XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Análisis Ontosemiótico de la noción Ecuación Lineal en libros de texto mexicanos

Graciela Rubi **Acevedo** Cardelas
Universidad de Sonora
México
grasick@gmail.com
Ramiro **Ávila** Godoy
Universidad de Sonora
México
ravilag@mat.uson.mx

Introducción

Los resultados aquí mostrados son parte de una investigación más amplia, cuyo objetivo es contrastar las acciones operativas y discursivas llevadas a cabo por los profesores en su planeación con respecto a las realizadas en su implementación en el aula, en el caso de la enseñanza de la ecuación lineal. Una de las acciones implementadas para desarrollar dicha contrastación ha sido una revisión documental de textos que sustentan y apoyan el trabajo de los docentes, es decir, tanto los referentes curriculares como libros de texto. Aquí se presentan los resultados de la revisión y análisis de los libros de texto seleccionados.

Enseñanza de las Ecuaciones Lineales

Dentro de las investigaciones referentes a la visión que los profesores tienen respecto a la enseñanza del álgebra (Tunks & Weller, 2009), se identifica que ésta es concebida, por algunos profesores, como un conjunto de reglas para manipular variables, postura que se ve reforzada por los mismos libros de texto. Así, para muchos profesores, el álgebra consiste en determinar cantidades desconocidas y no se le ve como una actividad de razonamiento que involucra la indeterminación.

Esto se ve reflejado en el campo particular de la enseñanza de las ecuaciones lineales donde se observa que las experiencias previas de aprendizaje y de enseñanza de los profesores les indican que deben dedicar la mayor parte del tiempo en la escuela a desarrollar habilidades procedimentales en vez de conceptuales. Para Attorps (2005) hay dos posibles explicaciones a este hecho: una es que muchos libros de texto no dan suficiente apoyo para este tipo de enseñanza, otra es que los maestros pueden no ser suficientemente competentes en sus conocimientos conceptuales matemáticos.

Tradicionalmente, en la enseñanza de las ecuaciones lineales si un estudiante logra resolver un tipo de ecuación, el profesor le proporcionará ecuaciones más complejas, sin importar si el estudiante la resolvió por prueba y error o a través de operaciones inversas (Linsell, 2009). Otro aspecto que considerar es la importancia del contexto y cómo las preguntas hechas en contexto resultan más sencillas que sus equivalentes simbólicos.

En el caso de las ecuaciones aritméticas —con incógnitas solo en un miembro de la ecuación— los estudiantes necesitan comprender las operaciones inversas y sus características (Linsell, 2009), mientras que para las ecuaciones algebraicas —con incógnitas en ambos miembros de la ecuación— se requiere tanto que los alumnos comprendan que las expresiones en ambos lados del signo igual son de la misma naturaleza (o estructura) como que sean capaces de operar con la incógnita como una entidad y no como número (Filloy & Rojano, 1989). En ese sentido, las ecuaciones aritméticas son procedimentales mientras que las algebraicas son estructurales. (Kieran, 1992). Sin embargo muchos estudiantes no logran esta transición, siendo incapaces de operar espontáneamente con o en la incógnita por lo que terminan constreñidos a realizar operaciones sin sentido con símbolos que no entienden (*cognitive gap*) (Herscovics & Lichevski, 1994) aunque Pirie & Martin (1997) sostienen que esto se puede deber más a una didáctica inapropiada que a una insuficiencia cognitiva.

En cuanto a las investigaciones relacionadas con las aproximaciones de resolución de ecuaciones algebraicas, utilizar la metáfora de la balanza es de los recursos más reportados, pues ésta ayuda a los estudiantes a ver la ecuación como un todo en vez de una instrucción a operar, ayuda a los estudiantes a resolver ecuaciones algebraicas desde la perspectiva de hacer lo mismo en ambos miembros de la ecuación; sin embargo, el uso de números negativos sólo tiene cabida de manera artificial (Vlassis, 2002).

Por su parte, el método de "cambiar de lado, cambiar de signo" se centra en transponer la ecuación de manera que la incógnita quede del lado izquierdo del signo igual, este movimiento arbitrario de la incógnita a la izquierda perpetúa las concepciones operacionales del signo igual y no promueve que los estudiantes comprendan que dicho movimiento no cambia la igualdad de la ecuación (Capraro & Joffrion, 2006 referido en Andrews & Xenofontos (2017)).

En cuanto a la estrategia de "ensayo y error", aunque promueve una comprensión de la naturaleza relacional del signo igual y el rol de la incógnita en contexto (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005) y puede ser apropiado como una estrategia inicial en un proceso de enseñanza, es ineficiente y no promueve el aprendizaje de estrategias generales de resolución de ecuaciones (Filloy & Rojano, 1989). Esta estrategia también permite validar los resultados, sin embargo, en cuanto se abandona como técnica de resolución también lo hace para verificar la solución (Kieran, 1992).

Lo reportado en esta sección sirve como referente para indagar en qué medida los libros de texto que se analicen propician una solución a las dificultades que han sido reportadas o si, por el contrario, influyen en su generación.

Análisis de libros de texto

A pesar de que, en educación primaria y secundaria, los docentes cuentan con orientaciones curriculares, la realidad es que la mayoría de los profesores usan los libros de texto como principal recurso didáctico (Kajander & Lovric, 2009). Dichos textos determinan tanto el material que debe ser cubierto como la manera en la que será presentado. De hecho, en lugares como el País Vasco "el 90 por ciento de los centros declara tener un libro de texto para las asignaturas de matemáticas, que es utilizado 'para todo' en un 67% de los casos, fuera de un 11% que sólo lo utilizan 'para los problemas'" (Ruiz de Gauna Gorostiza, Dávila Balsera, Etxeberria Murgiondo, & Sarasua Fernández, 2011).

Una línea de investigación en Matemática Educativa ha sido el análisis de libros de texto, con el fin de responder a diversas cuestiones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Picado & Rico, 2011), por ejemplo, el Proyecto 2061, una iniciativa de la American Association for the Advancement of Science (referido por Kajander & Lovric, 2009) menciona que la mayoría de textos usados para enseñar álgebra tienen potencial para ayudar al aprendizaje de los alumnos, aunque también presentan serias debilidades. De hecho, concluyen que ningún libro de texto hace un trabajo satisfactorio en favorecer que los estudiantes superen conocimientos previos inadecuados o carentes.

A pesar de haber interés por analizar el contenido y explorar la forma en que los libros de texto son usados en el aula, muy pocos investigadores han optado por realizar un análisis profundo de lo que hay en dichos libros, enfocándose en cómo el material es presentado y qué tipo de aprendizaje es promovido (Kajander & Lovric, 2009).

Esto último se ha convertido en un referente para este artículo, donde se tiene el interés de identificar los elementos que son movilizados en los libros de texto y la manera en que interactúan unos con otros, a fin de poder caracterizar lo que se espera aprendan los estudiantes.

Marco Teórico

El marco teórico utilizado en esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemáticos (Godino J. D., 2017), a continuación, se refieren las herramientas teóricas, propias de este enfoque, que se han utilizado para analizar el tratamiento propuesto en los libros de texto mexicanos para la noción de ecuación lineal.

El EOS asume una visión antropológica y pragmatista de las matemáticas, que se ve reflejada en la noción de práctica matemática, la cual se refiere a "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino & Batanero, 1994). Dichas prácticas pueden ser realizadas por un sujeto o en el seno de una institución —conjunto de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas—.

Los objetos matemáticos adquieren un estado derivado de las prácticas que lo preceden; es decir, que los individuos adquieren su experiencia a través de las prácticas matemáticas y de ellas emergen los objetos matemáticos. Una forma de conceptualizar las prácticas matemáticas es considerarlas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual se leen y producen textos matemáticos, y una práctica discursiva que permite reflexionar sobre la práctica operativa (Font, D. Godino, & Gallardo, 2013).

Dentro de los significados institucionales, entendidos en términos de los sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización en el seno de una institución (Godino, Batanero, & Font, 2008), se encuentran los Significados Institucionales de Referencia, Pretendido, Implementado y Evaluado. En el caso particular del Significado Institucional de Referencia, este es considerado como el sistema de prácticas usado como referencia para elaborar el significado pretendido, dado que esta investigación es parte de una mayor que tiene como interés contrastar el Significado Institucional Pretendido con el Implementado, es necesario el caracterizar el Significado Institucional de Referencia. Dado que los docentes con los que se trabaja utilizan como principal fuente para su planeación los libros de texto, es a partir de ellos de donde se ha caracterizado dicho Significado.

Cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...), lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...), conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...), proposiciones (enunciados sobre conceptos), procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...) y argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...) (Godino, Batanero, & Font, 2008), los cuales son considerados objetos primarios.

Al realizar y evaluar una práctica matemática, se analiza el conjunto formado por todos los objetos primarios articulados en los que se considera una configuración ontosemiótica, es decir, una red de objetos primarios (intervinientes y emergentes) de los sistemas de prácticas. Cuando estos objetos son movilizados por parte de un sujeto en sus prácticas matemáticas, dicha configuración será cognitiva, mientras que cuando se trata de objetos matemáticos institucionales, la configuración será epistémica (Parra Urrea & Pino-Fan, 2017).

Metodología

Como se ha mencionado anteriormente, este trabajo es parte de una investigación más amplia que pretende contrastar el Significado Institucional Pretendido con el Implementado de la noción de Ecuación Lineal. Para caracterizar el significado institucional de referencia, se ha estudiado el libro de texto que utiliza una de las docentes que es sujeto de investigación: Block Sevilla, D., García Peña, S., & Balbuena Corro, H. (2018). *Matemáticas 1*. México: SM.

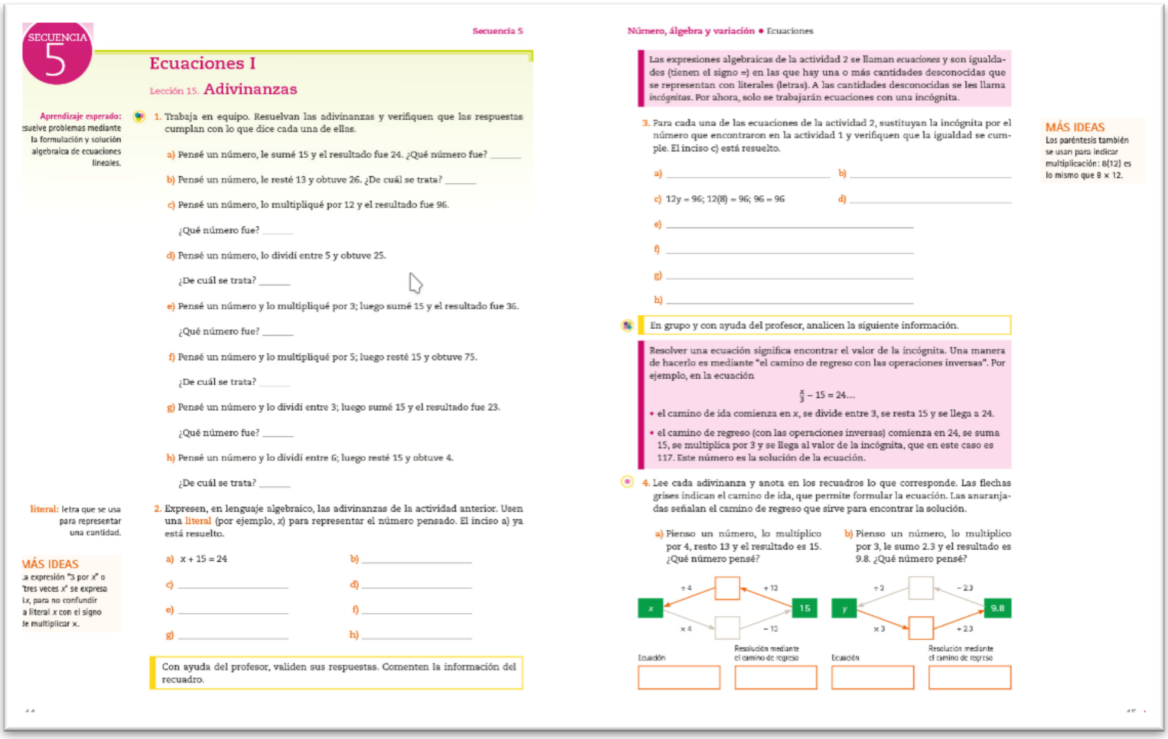
El análisis de este texto cobra importancia, debido a que en el ciclo 2018-2019 se instauró un Nuevo Modelo Educativo (SEP, 2017), que tuvo como consecuencia modificaciones a los planes y programas de estudio y en consecuencia a los libros de texto. El análisis de dichos textos será de utilidad para comprender los alcances de esta nueva propuesta y abona en la posible mejora de la misma.

Esta investigación, de tipo cualitativa, se centra en el análisis del mencionado texto, el cual divide en dos partes el estudio de las ecuaciones lineales, la Secuencia 5 llamada Ecuaciones 1, subdividida a su vez en cuatro lecciones; mientras que la Secuencia 12 llamada Ecuaciones II se ha subdividido en tres lecciones. Cada una de estas siete lecciones representa una Unidad de análisis en este trabajo.

Para lograr los objetivos de esta investigación se establecieron cuatro fases: 1) identificar los objetos primarios intervinientes y emergentes de cada Unidad de análisis, 2) construir una configuración epistémica de cada Unidad de análisis, 3) construir la trayectoria epistémica de la enseñanza de las ecuaciones lineales y a partir de lo anterior 4) caracterizar el Significado Institucional de Referencia de la noción de ecuaciones lineales.

Resultados

Por cuestión de espacio, en este reporte se presentan la identificación de objetos primarios y configuración epistémica de la Unidad de análisis 1 (figura 1), entendiendo que este mismo trabajo se realizó con las unidades subsecuentes.



SECUENCIA 5

Secuencia 5

Ecuaciones I

Lección 15. Adivinanzas

Aprendizaje esperado: [r]esuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales.

1. Trabaja en equipo. Resuelvan las adivinanzas y verifiquen que las respuestas cumplan con lo que dice cada una de ellas.

a) Pensé un número, le sumé 15 y el resultado fue 24. ¿Qué número fue? ______

b) Pensé un número, le resté 13 y obtuve 26. ¿De cuál se trata? ______

c) Pensé un número, lo multipliqué por 12 y el resultado fue 96.
¿Qué número fue? ______

d) Pensé un número, lo dividí entre 5 y obtuve 25.
¿De cuál se trata? ______

e) Pensé un número y lo multipliqué por 3; luego sumé 15 y el resultado fue 36.
¿Qué número fue? ______

f) Pensé un número y lo multipliqué por 5; luego resté 15 y obtuve 75.
¿De cuál se trata? ______

g) Pensé un número y lo dividí entre 3; luego sumé 15 y el resultado fue 23.
¿Qué número fue? ______

h) Pensé un número y lo dividí entre 6; luego resté 15 y obtuve 4.
¿De cuál se trata? ______

literal: letra que se usa para representar una cantidad.

2. Expresen, en lenguaje algebraico, las adivinanzas de la actividad anterior. Usen una literal (por ejemplo, x) para representar el número pensado. El inciso a) ya está resuelto.

a) $x + 15 = 24$ b) ______

c) ______ d) ______

e) ______ f) ______

g) ______ h) ______

MÁS IDEAS
[L]a expresión "3 por x" o "tres veces x" se expresa [3]x, para no confundir [l]a literal x con el signo [d]e multiplicar ×.

Con ayuda del profesor, validen sus respuestas. Comenten la información del recuadro.

Número, álgebra y variación • Ecuaciones

Las expresiones algebraicas de la actividad 2 se llaman *ecuaciones* y son igualdades (tienen el signo =) en las que hay una o más cantidades desconocidas que se representan con literales (letras). A las cantidades desconocidas se les llama *incógnitas*. Por ahora, solo se trabajarán ecuaciones con una incógnita.

3. Para cada una de las ecuaciones de la actividad 2, sustituyan la incógnita por el número que encontraron en la actividad 1 y verifiquen que la igualdad se cumple. El inciso c) está resuelto.

a) ______ b) ______

c) $12y = 96$; $12(8) = 96$; $96 = 96$ d) ______

e) ______

f) ______

g) ______

h) ______

MÁS IDEAS
Los paréntesis también se usan para indicar multiplicación: 8(12) es lo mismo que 8 × 12.

En grupo y con ayuda del profesor, analicen la siguiente información.

Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la incógnita. Una manera de hacerlo es mediante "el camino de regreso con las operaciones inversas". Por ejemplo, en la ecuación

$$\frac{x}{3} - 15 = 24\ldots$$

- el camino de ida comienza en x, se divide entre 3, se resta 15 y se llega a 24.
- el camino de regreso (con las operaciones inversas) comienza en 24, se suma 15, se multiplica por 3 y se llega al valor de la incógnita, que en este caso es 117. Este número es la solución de la ecuación.

4. Lee cada adivinanza y anota en los recuadros lo que corresponde. Las flechas grises indican el camino de ida, que permite formular la ecuación. Las anaranjadas señalan el camino de regreso que sirve para encontrar la solución.

a) Pienso un número, lo multiplico por 4, resto 13 y el resultado es 15. ¿Qué número pensé?

b) Pienso un número, lo multiplico por 3, le sumo 2.3 y el resultado es 9.8. ¿Qué número pensé?

Figura 1. Block, D., García, S., & Balbuena H. (2018). Unidad de análisis 1. Recuperado de https://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=2473#page/47

En la tabla 1 se aprecian los objetos primarios intervinientes y emergentes identificados en la Unidad de análisis 1:

Tabla 1

Situaciones problema asociadas a la Unidad de análisis 1

Objeto primario	Interviniente	Emergente
Situaciones problema	SP1.1 Problemas donde se debe adivinar un número que es el resultado de aplicar, en un primer momento una operación y, posteriormente, dos operaciones, donde tanto los números dados como los resultados, son naturales. SP1.2 Representar, en lenguaje algebraico, las adivinanzas de la actividad anterior. SP1.3 Para cada una de las ecuaciones de SP1.2, sustituir la incógnita por el número que se encontró en SP1.1 y verificar que la igualdad se cumple. SP1.4 Plantear y resolver ecuaciones del tipo de SP1.1 completando un diagrama, como se observa en la Fig. 1.	No se encontraron.
Lenguaje	Verbal: para plantear las situaciones problema, para introducir definiciones y para describir procedimientos.	Algebraico: Para plantear las ecuaciones lineales referentes a los problemas planteados.
Comunicación		

	Diagramático: para hacer ostensivas las operaciones inversas relacionadas con cómo se plantea la ecuación y cómo se resuelve.	
Conceptos	Cantidad desconocida.	Expresión algebraica, ecuación, literales, incógnitas, solución de una ecuación, noción de igualdad como equivalencia entre expresiones.
Proposiciones	No se encontraron.	Propiedad de sustitución de la igualdad.
Procedimientos	Suma, resta, multiplicación, división.	Resolver una ecuación mediante operaciones inversas.
Argumentos	No se encontraron.	No se encontraron.

Una vez que se identificaron los objetos intervinientes y emergentes, se procedió a realizar la configuración epistémica de cada Unidad de análisis. La configuración epistémica relativa a la Unidad de análisis 1 se muestra en la figura 2, esta nos permite observar la movilización que tienen cada uno de los objetos primarios que fueron identificados en esta Unidad de análisis.

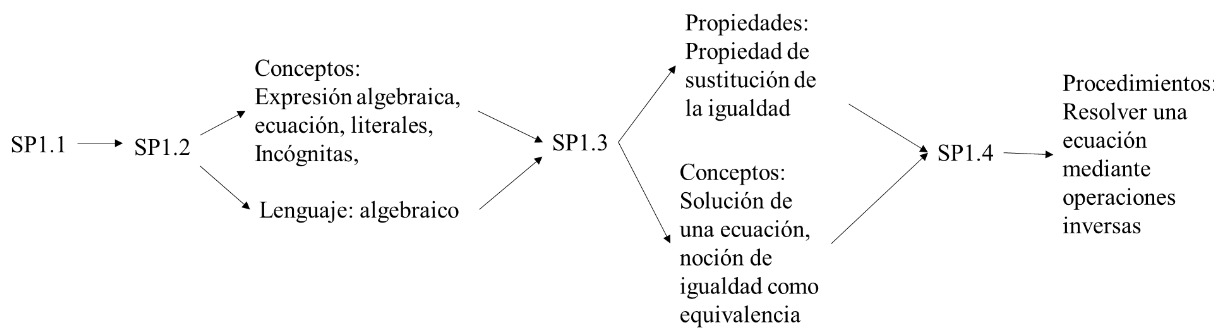


Figura 2. Configuración epistémica asociada a la Unidad de análisis 1

Al tener las configuraciones epistémicas relativas a cada Unidad de análisis, se procedió a conjuntarlas en una trayectoria epistémica, lo cual fue de relevancia ya que a partir de ésta fue posible determinar el Significado Institucional de Referencia asociadas a los libros de texto.

Conclusiones

Se concluye que los sistemas de prácticas asociados a la noción de ecuaciones lineales en el libro de texto comienzan con el alumno resolviendo adivinanzas, lo cual sirve para ir movilizando los saberes previos de los estudiantes, de tal manera que al "adivinar" sean capaces de encontrar relaciones entre la solución y el "candidato a solución" tales como "la solución debe ser un número mayor (o menor) que…", además se va construyendo la noción de *solución de una ecuación*.

Al pedir que esas adivinanzas se escriban como ecuaciones, emerge el lenguaje algebraico y conceptos como *ecuación*, *literal*, *incógnita*. Cabe destacar que el paso de las adivinanzas a la modelación en una ecuación de las mismas podría estar lejano a la zona de desarrollo próximo de los alumnos, a pesar de que se plantee trabajar en equipo.

Cuando se pide al alumno sustituir la incógnita por el número encontrado en la primera actividad emerge el concepto de *solución de la ecuación* como aquel número que hace que la igualdad sea cierta, así como la noción del signo igual como una equivalencia de expresiones.

En la última actividad de esta Unidad de análisis se propone completar un diagrama donde a través de flechas y colores se hace ostensivo el procedimiento para modelar y resolver la ecuación, así como las operaciones inversas que se ponen en juego. A pesar de que este recurso resulta útil para que los alumnos comprendan ambos procedimientos (modelación y resolución), el texto cae en lo que menciona Attorps (2005) de no dar suficiente apoyo para un tipo de enseñanza que favorezca lo conceptual, ya que el procedimiento es establecido por el texto, es decir, no se favorece que sean los alumnos quienes desarrollen sus propias estrategias de resolución.

Referencias y bibliografía

Andrews, P., & Xenofontos, C. (2017). Beginning teachers' perspectives on linear equations: A pilot quantitative comparison of Greek and Cypriot students. *Paper presented to the tenth Congress of European Research in Mathematics Education*. Berlin.

Attorps, I. (2005). Secondary school teachers' conceptions about algebra teaching. *Paper presented at the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Block Sevilla, D., García Peña, S., & Balbuena Corro, H. (2018). *Matemáticas 1*. México: SM. Disponible en https://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=2473#page/1

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 19-25.

Font, V., D. Godino, J., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 97-124.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En P. A.-M. J. M. Contreras (Ed.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 7-37.

Herscovics, N., & Lichevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 59-78.

Kajander, A., & Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 173-181.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of*

Mathematics (págs. 390-419). New York: Macmillan Publishing.

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A., & Stephens, A. (2005). Middle school students" understanding of core algebraic concepts: equivalence and variable. *ZDM* (37), 68-76.

Linsell, C. (2009). Students' knowledge and Strategies for Solving Equations. *Findings from the New Zeland Secondary Numeracy Project 2008*, 29-43.

Parra Urrea, Y., & Pino-Fan, L. (2017). Análisis Ontosemiótico de libros de texto chilenos: el caso del concepto de función. En P. A. J. M. Contreras (Ed.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Picado, M., & Rico, L. (2011). Análisis de Contenido en Textos Históricos de Matemáticas. *PNA*, 6(1), 11-27.

Pirie, S. E., & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, 34(2), 159-181.

Ruiz de Gauna Gorostiza, J., Dávila Balsera, P., Etxeberria Murgiondo, J., & Sarasua Fernández, J. (2011). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(2), 245-276.

SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral.* México: SEP.

Tunks, J., & Weller, K. (2009). Changing Practice, Changing Minds, from Arithmetical to Algebraic Thinking: An Application of the Concernsbased Adoption Model (CBAM). *Educational Studies in Mathematics*, 161-183.

Vlassis, J. (2002). The Balance Model: Hindrance or Support for the Solving of Linear Equations with One Unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 341-359.