XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Reconceptualización de la transformación geométrica en profesores de matemáticas

Eddie **Aparicio** Landa
Universidad Autónoma de Guerrero
México
eeddie16@gmail.com
Guadalupe **Cabañas** Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
gcabanas.sanchez@gmail.com
Landy **Sosa** Moguel
Universidad Autónoma de Guerrero
México
landy.sosa@gmail.com

Resumen

Este trabajo consistió analizar la conceptualización que tienen profesores de matemáticas sobre el concepto de transformación geométrica. Para ello, se implementó un cuestionario de forma individual y a partir de las respuestas dadas, se inició una conversación reflexiva centrada en sus respuestas. Se pudo observar que los profesores poseen una débil conceptualización de la transformación así como de las razones de su enseñanza. Se concluye la necesidad de situar a los profesores en un proceso de reconceptualización tanto de sus saberes matemáticos como didácticos.

Palabras clave: reconceptualización, transformación geométrica, profesores

1. Presentación

Diversas han sido las investigaciones que han dado cuenta de la importancia e implicaciones favorables que tiene para el aprendizaje matemático de los estudiantes el que los profesores posean un conocimiento profundo de las matemáticas (Hill, Rowan & Ball, 2005; Darling-Hammond, 2000; Ma, 1999; Grossman, Hammerness & McDonald, 2009; Silverman & Thompson, 2008; Tirosh, 2000), pues se ha observado que el conocimiento matemático de ellos, particularmente en educación básica, es más de tipo operativo y con poca profundidad conceptual, mermando con ello un adecuado aprendizaje en los estudiantes (Hill, Rowan, & Ball, 2005; Ernest, 1989; Tzur & Timmerman, 1997), cabe decir que esto no es exclusivo de los profesores en ejercicio, sino también de profesores en formación, pues como se reporta en Thaqi, Giménez, & Rosich (2011), los estudiantes para profesores en secundaria, muestran un bajo nivel de aprendizaje sobre las transformaciones.

En sus estudios, Silverman, (2004); Silverman & Thompson, (2008), observaron que las comprensiones abstractas no son suficientes para que los profesores tengan la capacidad de presentar a los estudiantes oportunidades que los coloquen en una comprensión similar y consistente. Asimismo, puntualizan que la mayoría de los profesores que logran cambiar sus prácticas docentes, lo hacen de manera superficial (Stigler y Hiebert, 1999), y concluyen que los cambios en la práctica de enseñanza resultan de las conceptualizaciones pedagógicas de las matemáticas, tanto en el sentido de las matemáticas como de la conciencia de su desarrollo conceptual.

Bajo el entendido anterior, consideramos se precisa indagar sobre cómo lograr que un profesor de matemáticas se sitúe en forma reflexiva y autocrítica, en relación con su quehacer profesional, y en ello, suponemos que lo personal y lo colectivo tienen un papel fundamental en la producción de una forma específica de reconceptualizar, pensar y enseñar la matemática en el contexto escolar.

2. Reconceptualización y pensamiento didáctico

En este trabajo ubicamos el estudio de la reconceptualización y desarrollo de una forma didáctica de pensar la matemática desde un enfoque sociocultural, pues reconocemos que el aprendizaje y el desarrollo de los profesores no solo se apoyan en lo colectivo, sino que se ve fortalecido en la medida que ellos participan y colaboran en un intercambio de conocimientos, contextos y experiencias (Campbell & Stohl, 2017; Lave & Wenger, 1991, Kolb & Kolb, 2017). Por ejemplo, Preciado-Babb, et al, (2015) mencionan que la comunicación en un espacio de diálogo e interacción entre profesores, fortalece sus hábitos de trabajo matemático y su idea de comunidad, además, dicen que en esas condiciones, el mostrar un trabajo y el compartir ideas, se valora no solo por su propio beneficio, sino también por su papel en la profundización de la comprensión matemática de los profesores. Ketelaar, et al, (2014), por su parte, señalan que los profesores expresan sentimientos de propiedad al participar en experiencias de aprendizaje, principalmente a través del intercambio de éstas y cuando dichas experiencias se ajustaban a la forma en que ellos conocen y aprenden.

Dicho así, a diferencia de algunos investigadores que caracterizan al pensamiento didáctico del profesor (de matemáticas), como “el conjunto de ideas, creencias, concepciones, opiniones, principios y teorías implícitas de vida y profesional que posee el docente sobre su quehacer didáctico durante la práctica pedagógica” (Figueroa & Páez, 2008), o ese pensamiento que está en relación con las creencias y conocimientos acerca de la enseñanza de las matemáticas, la planeación de clase, las expectativas del grupo, y de su propia eficacia docente (García-Cabrero, Loredo & Carranza, 2008), más bien lo caracterizamos en los términos que plantean Parada & Pluvinage (2014), quienes lo refieren como ese pensamiento que está en relación con el conocimiento de la matemática con el fin de enseñarla y a éste, en combinación con la aplicación de la didáctica, pero añadimos la idea de que dicho pensamiento se va desarrollando y conformando a partir de un continuo proceso reflexivo de las experiencias.

Con base en los planteamientos expuestos sobre la importancia e implicaciones que representan la noción de colectividad (reflexiva), experiencias profesionales (y de aprendizaje), y la conceptualización y reconceptualización de saberes matemáticos para el desarrollo de una forma didáctica (profesional) en los profesores de matemáticas, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo contribuye el intercambio de experiencias profesionales en un espacio de conversación reflexiva, al desarrollo de una forma didáctica de pensar las matemáticas?, en particular, relativo al concepto de transformación geométrica.

3. Marco teórico

Para desarrollar y enmarcar el objeto de estudio en esta investigación, se ha recurrido a la Teoría del Aprendizaje Experiencial (ELT, por sus siglas en inglés), teoría mayormente empleada en estudios relacionados con la educación de personas adultas. En esta, el aprendizaje es entendido como un proceso mediante el cual se construye conocimiento a partir de la transformación continua de la experiencia. Por experiencia se entiende “lo que es debido a una transacción que tiene lugar entre el individuo y lo que en ese momento constituye el medio ambiente” (Dewey, 1938, p.43).

De este modo y como se ilustra en la figura 1, el aprendizaje resulta ser un proceso dialéctico y holístico de adaptación al mundo en el que se dan transacciones entre la persona y el entorno. Así, advertimos que las experiencias de los docentes tendrían un papel determinante no solo en su propio aprendizaje y desarrollo, sino también en sus pensamientos.

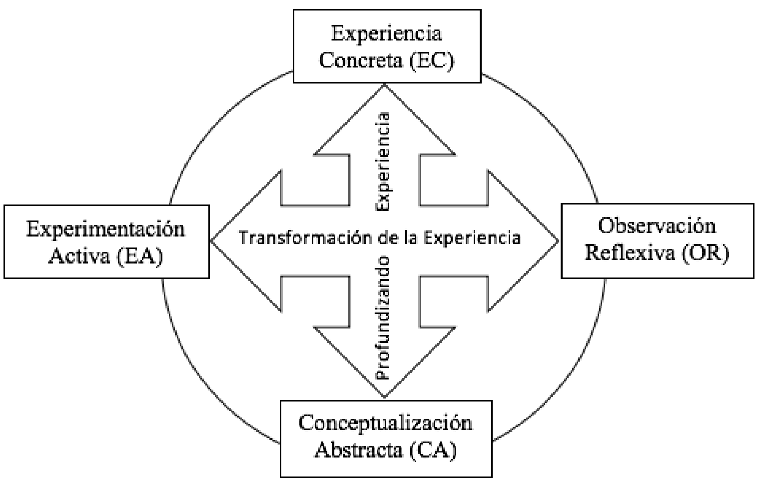

Figura 1. Ciclo de aprendizaje experiencial (Kolb y Kolb, 2017, p.32).

Las experiencias inmediatas o concretas (EC) son la base de las observaciones y reflexiones (OR). Estas reflexiones se asimilan y destilan en conceptos abstractos (CA), a partir de los cuales se pueden extraer nuevas implicaciones para la acción. Estas implicaciones pueden ser activamente probadas (EA) y servir como guías para crear nuevas experiencias (Kolb & Kolb, 2009, p. 298 – 299). La EC tiene que ver con lo experimentado (el hacer) en el momento, con una especie de experimentación sensorial (aprender experimentando/sintiendo), la OR tiene que ver con la observación y reflexión sobre lo realizado/experimentado en la EC (aprender procesando), la CA tiene que ver con teorizar o generalizar la experiencia a partir de la OR (aprender generalizando), y EA, tiene que ver con aplicar o probar una teoría para una próxima experiencia (aprender haciendo).

En el sentido anterior, es posible reconocer un espacio de conversación reflexiva (figura 2), como un espacio de aprendizaje de modo que, al escuchar, la persona experimenta al otro y reflexiona sobre lo que dice. De igual manera, al hablar, la persona piensa y formula intenciones sobre cómo responder y actuar para expresarlas. Es decir, que cuando una persona está "leyendo", recibiendo comentarios (EC) y formulando percepciones (OR), la otra persona está flexionando, creando intenciones basadas en esas percepciones (CA) y actuando sobre ellas (EA). A medida que el intercambio continúa, ambas partes alternan sus roles en la conversación (Kolb & Kolb, 2017).

Visto así, un espacio de conversación reflexiva ofrece la posibilidad de organizar experiencias y es en ese proceso de organización en donde pueden suscitarse aprendizajes a partir de la significación de dichas experiencias. Por tanto, representa un espacio para indagar y coadyuvar a los profesores a comprender y desarrollar su propio pensamiento, su propia práctica y la relación entre estas, pues la experiencia es primariamente un asunto activo-pasivo; no es primariamente cognoscitiva, comprende conocimiento en el grado en que se acumula o se suma a algo que tiene sentido, cuyos generales son: "el sentido de un problema; la observación de las condiciones; la formación y la elaboración racional de una conclusión sugerida y la comprobación experimental activa" (Dewey, 1998. pp. 133 - 134).

Figura 2. Ciclo de aprendizaje conversacional (Kolb & Kolb, 2017, p. 191).

4. Método y resultados de estudio

Como parte del espacio de conversación reflexiva se usó la "Entrevista grupal fenomenológica" que se caracteriza por suscitar un intercambio de experiencias en relación con un tema propuesto por el entrevistador (investigador), apoyando el crecimiento del conocimiento de los participantes a través de la reflexión colectiva sobre la experiencia (Gellert, 2008). Las características del tema o fenómeno quedan determinadas por las personas que lo "viven" y no por el investigador, son ellas quienes sacan dicho fenómeno de su conciencia y le dan expresión (Guerrero-Castañeda et al, 2017).

4.1. Participantes

En el estudio participaron cuatro profesores (dos hombres y dos mujeres) de matemáticas de educación básica en México, quienes dijeron no desconocer el concepto de transformación geométrica.

4.2. Instrumento

Para que inicie un proceso de reconceptualización, debe haber una confrontación entre el concepto que se tiene y el que se producirá como parte de una experiencia de aprendizaje. Así, se consideró emplear un instrumento el cuál tuviera tres preguntas relacionadas con el concepto de transformación geométrica, tal cual se muestra a continuación.

1. Indique, ¿Qué es transformación geométrica? Si le es posible, ofrezca un ejemplo de ello.

2. Indique si identifica algún tipo de relación geométrica entre el triángulo I y los etiquetados con los números II, III, IV, V y VI. Si fuera el caso, explíquela(s).

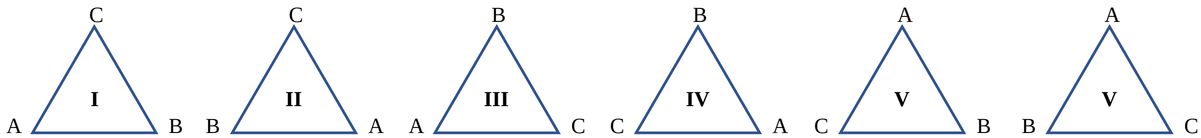

Figura 3. Segunda pregunta del instrumento planteada a los profesores.

3. Explique si es posible establecer algún tipo de relación geométrica de los puntos A, B y C con los puntos A_1, B_1 y C_1 en el plano cartesiano x, y.

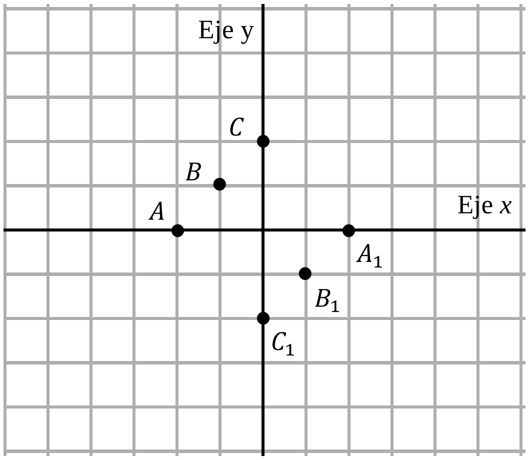

Figura 4. Tercera pregunta del instrumento planteada a los profesores.

4.3. Recolección y análisis de datos

La implementación del instrumento estuvo organizada de la manera siguiente: Primeramente, se solicitó atenderlo en su totalidad de manera individual, anotando sus respuestas en hojas. Segundamente, se les pidió reunirse en binas mixtas (hombre y mujer), para analizar sus respuestas y en su caso, generar una tercera en cada caso. Finalmente, el entrevistador realizó un cuestionamiento colectivo respecto a lo respondido individual y colectivamente.

Para la presentación de los datos obtenidos se hace uso de los siguientes códigos: PM1, PM2: para referir a las respuestas de las dos profesoras y PH1, PH2: para aludir a las respuestas de los dos profesores.

Las respuestas dadas por los profesores de manera individual a la primera pregunta fueron:

PM1: Es un proceso que se realiza para cambiar de posición cierta figura.

PM2: Es una operación que se le aplica a una figura para obtener otra, de tal forma que los puntos de la figura inicial correspondan con los de la figura final u obtenida.

PH1: Cuando tenemos una figura geométrica y tenemos rotar, trasladar, invertir o variar las proporciones de sus lados manteniendo sus ángulos correspondientes iguales, hablamos de una transformación geométrica.

PH2: Las transformaciones geométricas son aquellas que de una figura dada, obtenemos otra. Puede ser traslación, rotación, simetría y homotecia.

Las respuestas dadas de manera individual a la segunda pregunta fueron:

PM1: Todos giran ciertos grados y cambian de posición. Del I al IV se rotó 60 grados. Del IV al VI se rotó 60 grados, del I al VI se rotó 120 grados y del VI al I se rotó 60 grados.

PM2: II es simétrico del I respecto a una recta vertical. III se obtiene rotando II. V es simétrico del VI. VI es una rotación del I. IV es una rotación del VI.

PH1: I fue rotado 180 grados, dando como resultado II. VI resulta de girar 90 grados el I.

PH2: El IV es rotación del I en el punto B. V es rotación del II en el punto A. VI es rotación del III en el punto C. II es simétrico de I con el punto B o A. IV es simétrico de III en el punto C o A.

Las respuestas dadas de manera individual a la tercera pregunta del instrumento fueron:

PM1: Los puntos A, B y C, unidos forman un segmento paralelo al segmento $\overline{C_1A_1}$, además, el punto C con el punto C_1, son simétricos respecto al origen, así como también los otros puntos. Además, son simétricos respecto a la gráfica $y = x$.

PM2: Los puntos $\mathrm{A_1}, \mathrm{B_1}$ y $\mathrm{C_1}$ se obtienen mediante una rotación de los puntos A, B y C, respectivamente con centro en $(0,0)$ y ángulo de 180 grados.

PH1: Es posible establecer la relación de A con A_1, B con B_1 y C con C_1, al intercambiar las coordenadas x y y del punto $A(x, y)$ con sus simétricos al punto $A_1(x_1, y_1)$.

PH2: Son opuestos por el vértice u origen. Simétricos con respecto al origen.

Como puede verse, en las respuestas individuales dadas por los profesores a la primera pregunta, no se hace alusión al concepto de relación funcional o aplicación del plano al plano mismo, para decir qué es una transformación geométrica. Además, se deja ver que su conceptualización de la transformación es un sentido “manipulativo”. Es decir, la posibilidad de “manipular físicamente” una figura para modificarla o cambiarla en algo. Esta idea queda más evidenciada en sus respuestas dadas a las siguientes dos preguntas del instrumento.

De las respuestas dadas a la segunda pregunta, se identifica que los profesores si bien reconocen las transformaciones isométricas (reflexión y rotación), el sentido dado a ellas es igualmente manipulativo, pues no se hace referencia a los triángulos del II al VI, como “triángulos imágenes” del I.

Finalmente, se ve por las respuestas dadas a la tercera pregunta, que se sigue haciendo alusión a la simetría y rotación en un sentido de “operaciones geométricas”, más que de relaciones, a pesar de que el plano cartesiano pudiera sugerir evocar la idea de relación funcional, como se puede notar en PM1 y PH1.

Al solicitarles a los profesores analizaran en binas sus respuestas y en su caso, generan una tercera o indicaran si no harían ajustes a las mismas, las dos binas indicaron que sus respuestas eran equivalentes.

Para el tercer momento de trabajo colectivo (profesores y entrevistador), se solicitó a los profesores que reflexionaran e indicaran si al quitar etiquetas de número y vértices, a todos los triángulos, ellos dirían que son seis triángulos (equiláteros) o es un mismo triángulo (equilátero). Todos respondieron que se trata de seis triángulos, porque eso es lo que ven. Pero dando un espacio de silencio, luego dos de ellos dijeron que podría ser un solo triángulo, pero en diferentes posiciones. Es decir, un triángulo trasladado.

Posterior a su reflexión, se les pidió que observaran dos hojas del mismo tamaño, forma y color, en el escritorio. Una puesta verticalmente y la otra horizontalmente. Y que reflexionaran respecto a que uno de sus estudiantes les dijera: Yo veo que son dos hojas diferentes, aunque tengan la misma forma, tamaño y color. ¿Le dirían está en lo correcto? Todos dijeron que sí. Al dar su respuesta se les preguntó ¿por qué? A lo que respondieron que por en efecto son dos hojas. Por tanto, se aprovechó esta afirmación para discutir sobre qué pasa si ahora se deja una sola hoja y primeramente se muestra dispuesta verticalmente y luego horizontalmente, como era el caso cuando se tenían las dos hojas. Se les cuestionó sobre ¿Si la hoja horizontal es la misma que la vertical, solo que rotada y traslada? En este caso, todos entraron en duda de qué decir, e incluso algunos decían que el sentido físico y manipulativo de las hojas, podían causar problemas de entendimiento a los estudiantes sobre el concepto de transformación geométrica.

Respecto de la reflexión anterior realizada por los profesores, se les cuestionó si ellos considerarían que sería mejor el aprendizaje de la transformación tratarla desde un punto de vista de relación funcional, es decir, como una función que aplica puntos del plano al plano mismo, en lugar de uno manipulativo y operativo, a lo que ellos dijeron que sí, pero solo para estudiantes bachillerato, porque en primaria y secundaria, los estudiantes no lograrían entender. Ante ello, se les interrogó sobre la dificultad que tendría un estudiante de primaria o secundaria para entender que por ejemplo, una simetría o reflexión y una rotación, son formas de relacionar geométricamente dos figuras. Respondieron que en eso no veían que hubiera mucho problema o dificultad, ¡pues es muy claro!

5. Conclusiones

Se ha descrito una forma de situar a profesores en un proceso de reconceptualización individual y colectiva del concepto de transformación geométrica, con especial énfasis en las transformaciones isométricas de rotación y simetría, vistas como casos particulares del concepto de función biyectiva. La lógica detrás de esta propuesta consiste en considerar a la conceptualización presente en los docentes, para de ahí ampliar sus experiencias respecto a dicha conceptualización y finalmente, generar conciencia didáctica sobre las implicaciones de su conceptualización para una mejor práctica de enseñanza y aprendizaje asociada a las isometrías.

Ciertamente, llevar a una reconceptualización adecuada y conducida por los mismos profesores, detectamos, resulta complicado con solo un primer acercamiento a la problematización de los saberes, sin embargo, con una adecuada planeación, ejecución y continuo trabajo en espacios de conversación reflexiva, se podría lograr una ampliación de sus experiencias y conocimientos que les provea de una mayor autonomía para desarrollar una forma didáctica de pensar las matemáticas, más cercana a las demandas y retos que plantea una educación matemática de calidad. Esto se deriva de las valoraciones que los mismos profesores realizaron y expresaron tanto por escrito como verbalmente, sobre la necesidad de que ellos deben vivir más experiencias en donde sus conocimientos y prácticas docentes, entren en conflicto.

Referencias y bibliografía

Campbell, M. & Stohl, H. (2017). Examining Secondary Mathematics Teachers' Opportunities to Develop Mathematically in Professional Learning Communities. *School Science and Mathematics, 117* (3 – 4), 115 – 126.

Darling-Hammond, L. (2000). Teacher Quality and Student Achievement: A Review of State Policy Evidence. *Education Policy Analysis Archives*, *8*(1), 1 – 44.

Dewey, J. (1938). *Education and Experience*. New York, NY: Horace Liveright.

Dewey, J. (1998). Democracia y Educación. Una introducción a la filosofía de la educación. Madrid: Ediciones Morata, S. L.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics Teaching: the state of the art.* Recuperado de: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/impact.htm

Figueroa, N. & Páez, H. (2008). Pensamiento didáctico del docente universitario. Una perspectiva desde la reflexión sobre su práctica pedagógica. *Fundamentos en humanidades, 2*, 111 – 136.

García-Cabrero, B., Loredo, J. & Carranza, G. (2008). Análisis de la práctica educativa de los docentes: pensamiento, interacción y reflexión. *Revista electrónica de Investigación Educativa, Especial*, consultado el 15 de marzo de 2017 en http://redie.uabc.mx/redie/article/view/200/345

Gellert, U. (2008). Routines and collective orientations in mathematics teachers' professional development. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 93 – 110.

Grossman, P., Hammernness, K. & McDonald, M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education, *Teachers and Teaching: theory and practice*, *15*(2), 273 – 289.

Guerrero-Castañeda, RF., Menezes, TMO., & Ojeda-Vargas, MG. (2017). Características de la entrevista fenomenológica en investigación en enfermería. *Revista Gaúcha de Enfermagen, 38*(2), 1 – 5.

Hill, H., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371- 406.

Ketelaar, E., Koopman, M., Den Brok, P., Beijaard, D., & Boshuizen, H. (2014). Teachers' learning experiences in relation to their ownership, sense-making and agency. *Teachers and Teaching, 20*(3), 314 – 337.

Kolb, A. & Kolb, D. (2017). The Experiential Educator. Principles and Practices of Experiential Learning. San Bernardino, CA.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Nueva York: Cambridge University Press

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Parada, S. & Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 83 – 113.

Preciado Babb, A., Metz, M., & Marcotte, C. (2015). Awareness as an enactivist framework for the learning of teachers, mentors and institutions. *ZDM Mathematics Education*, *47*, 257 – 268.

Silverman, J. (2004). *Comparing aspects of constructivist research methodologies in mathematics education: Modeling, Intersubjectivity, and Tool Use*. Escrito presentado en el annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 499 – 511.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: Free Press.

Thaqi, X., Gimenez, J., & Rosich, N. (2011). Geometrical transformation as viewed by prospective teahers. In Pytlak, M., Rowland, T., & Swoboda, E. (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 578-587). Rszeszów, Poland: ERME.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knoledge of children's conceptions: the case of división of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5 – 25.

Tzur, R., & Timmerman, M. (1997). Why do we invert and multiply? Elementary teachers' struggle to conceptualize division of fractions. En J. A. Dossey, J. O. Swafford, M. Parmantie & A. E. Dossey (eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 553 - 559). Bloomington-Normal, IL: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.