XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enseñanza de la división, basada en justificaciones, con estudiantes de primaria

Candy Clara **Ordoñez** Montañez
Universidad Nacional de Cañete
Perú
cordonez@undc.edu.pe

Resumen

Existen investigaciones que muestran la importancia de incluir a las justificaciones como medio para enseñar las matemáticas. En ese sentido, este trabajo pretende investigar las condiciones en las que es posible lograr que los estudiantes de tercer grado de primaria sean capaces de construir la noción de división de números naturales cuando la enseñanza es basada en justificaciones. En este estudio participaron estudiantes de tercer grado de primaria de un colegio estatal. Las actividades que se diseñaron y aplicaron estuvieron enmarcados en una noción intuitiva que busca la construcción gradual de la noción de división. En el análisis de las respuestas de los estudiantes obtuvimos como principal hallazgo el logro de la comprensión de manera significativa de la relación existente entre el residuo y el divisor de una división de números naturales.

Palabras clave: enseñanza, división, repartición, justificación, primaria.

Introducción

En las últimas décadas, los documentos referidos a estándares de aprendizaje han enfatizado en la importancia de desarrollar las habilidades de los estudiantes para generar y criticar argumentos matemáticos en todos los grados de los diferentes niveles (Bieda, et al., 2013). Nuestro país no es ajeno a ello, pues en el Currículo Nacional (2016), propuesto por el Ministerio de Educación de Perú, contempla en sus cuatro competencias matemáticas la capacidad de la argumentación de afirmaciones (elaborar, justificar, validar o refutar afirmaciones). Sin embargo, todavía, resulta ser una capacidad matemática poca desarrollada en nuestros estudiantes de todos los niveles, especialmente, del nivel primario. En ese sentido, creemos que una forma de desarrollar esta capacidad y lograr la construcción de conocimientos matemáticos es con una enseñanza basada en justificaciones. Desde la perspectiva presentada por la investigadora Vallejo (2012) explica que las justificaciones matemáticas de un estudiante del nivel de primaria o secundaria se entienden como aquellos primeros argumentos que presentan los estudiantes que se inician en los procesos demostrativos. Es decir, es un sentido más amplio que la demostración matemática. Por otro lado, existen investigaciones que muestran la relevancia de las justificaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que son implícitas en temas afines. Por su parte, De Villiers (2001) manifiesta que la demostración cumple varias funciones, no sólo consiste en la verificación de proposiciones matemáticas, sino contribuye a la creación de nuevos resultados. Asimismo, Reid (2011) señala que probar es un tema fundamental para las matemáticas, en que debe ser visto como una forma de desarrollar la comprensión de los conceptos matemáticos y de descubrir nuevos y significativos conocimientos matemáticos. De otro lado, tenemos el estudio de Stylianou (2011) el cual manifiesta que los estudiantes de nivel primario traen consigo una inclinación natural por probar, convencer o convencerse y que esto puede aprovecharse para ser cultivada en su pensamiento matemático. De igual modo, Schifter (2011) investiga sobre los argumentos que emplean los estudiantes en el nivel primario cuando se da una práctica docente basada en pruebas. En su estudio, uno de los casos que presenta es el de un profesor que trabaja los números pares e impares con sus estudiantes de tercer grado de primaria, que conjeturaron que la suma de dos números pares es par. La investigadora reporta cuatro categorías de argumentos que intentan probar la conjetura planteada; a partir de ello, le conlleva a concluir que los estudiantes son capaces de justificar afirmaciones de carácter general empleando como argumento la representación de objetos físicos, imágenes, diagramas o contextos de historias. Es por esa razón, que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante pruebas permiten explorar las nociones intuitivas e informales de la prueba y cómo estas pueden nutrirse de tal manera que sientan las bases para realizar pruebas matemáticas en grados posteriores. Investigaciones como las mencionadas muestran el papel importante de la demostración, la prueba y la estrecha relación con las justificaciones, siendo de sumo interés para la comunidad de la Educación Matemática y para la Comunidad Matemática. En ese sentido, este trabajo tiene como objetivo mostrar qué condiciones permiten a los estudiantes de tercer grado de primaria construir el conocimiento de la división de los números naturales cuando la enseñanza es basada en justificaciones.

Justificación matemática

Nuestra postura acerca de las justificaciones matemáticas se refiere a todos aquellos argumentos que permiten validar la veracidad o falsedad de una afirmación matemática, ya sea que se haya planteado como tal, o que esté involucrada en una pregunta. Un ejemplo de esto último es el siguiente caso que muestra dos maneras “equivalentes” de plantear un mismo problema.

- Planteado como una afirmación: Determine el valor de verdad de la siguiente afirmación y justifique su respuesta: “un residuo de una división con divisor 3 puede ser el número 4”.
- Planteado como pregunta: ¿4 es un residuo de una división con divisor 3? Justifique su respuesta.

Observamos que para justificar la veracidad o falsedad de ambos problemas se requerirán básicamente de los mismos argumentos, ya que en esencia es el mismo problema. Por otro lado, entre los argumentos que se pueden emplear para una justificación tenemos: definiciones, resultados previamente justificados, ejemplos, contraejemplos, etc. La elección del argumento adecuado dependerá básicamente del tipo de problema que nos planteen: dependerá específicamente de si un problema es particular o general.

División como repartición equitativa y máxima

Lay (2009) considera que las pruebas (o justificaciones) dependen de buenas definiciones, ya que si estas últimas son inadecuadas no podemos esperar que los estudiantes puedan construir pruebas válidas. En base a ello, el presente trabajo toma la propuesta de Vallejo (2012) quien define la división de números naturales en función de la noción de la repartición equitativa y máxima como se esquematiza en la siguiente figura:

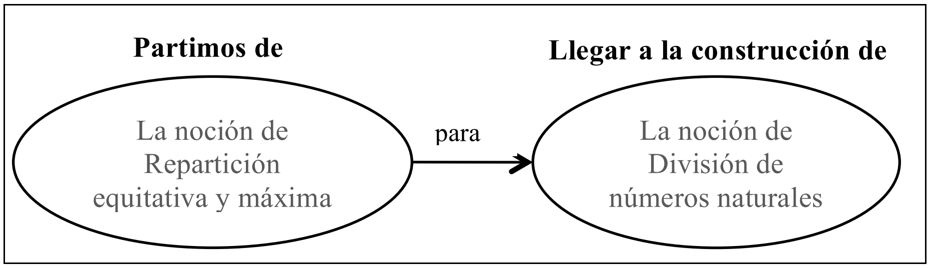

Figura 1. Esquema tomado de la investigación de Ordoñez (2014).

La noción de repartición equitativa y máxima cumple un rol importante en el desarrollo de este trabajo de investigación, es así que, explicamos los diferentes tipos de reparticiones a partir de los aportes de la investigadora Vallejo (2012) que se resume en la tabla 1.

Tabla 1
Tipos de reparticiones y sus ejemplos

Nociones	**Significado**	**Ejemplo de las reparticiones (ER):** Repartimos 15 lápices entre Hema y Felipe
Repartición equitativa	Repartición en la que cada persona recibe un mismo número de objetos.	ER: Entregamos a Hema 6 lápices y a Felipe 6 lápices y nos sobra 3 lápices después de la repartición.
Repartición máxima	Repartición en la que se reparte la mayor cantidad de objetos. Es decir, no sobra objetos después de la repartición.	ER: Entregamos a Hema 7 lápices y a Felipe 8 lápices.
Repartición equitativa y máxima	Repartición en la que cada persona le corresponde una misma cantidad de objetos y a la vez recibe la mayor cantidad posible de objetos.	ER: Entregamos a Hema 7 lápices y a Felipe 7 lápices y nos sobra 1 lápiz después de la repartición.
Repartición natural	Repartición en la que el número de objetos que le corresponde a cada persona es un número natural.	ER: Entregamos a Hema 5 lápices y a Felipe 10 lápices. Las dos personas tienen un número natural de lápices
Repartición Libre	Repartición que no presenta condición alguna.	ER: Entregamos a Hema 8 lápices y a Felipe 5 lápices y nos sobra 2 lápices después de la repartición.

Fuente: Nociones de reparticiones tomadas de Vallejo (2012)

Las reparticiones libres, reparticiones equitativas, reparticiones máximas por sí solas se caracterizan por tener más de una respuesta. Mientras que las reparticiones del tipo equitativas y máximas a la vez admiten una única respuesta. En base a la noción de repartición equitativa, y máxima la autora define división y divisibilidad (Vallejo, 2012, p. 153-157). En este trabajo nos concentramos en la noción de división, la cual define en términos de repartición:

> División de X entre Y como una repartición equitativa, máxima y natural de X objetos entre Y sujetos.

Metodología

Contexto y muestra

Este trabajo se llevó a cabo con 24 estudiantes del tercer grado de primaria, entre 8 y 9 años de edad, de un colegio estatal de Lima-Perú. Antes de desarrollar la investigación, ninguno de ellos contaba con conocimiento alguno sobre división de números naturales. Sin embargo, tenían como conocimiento previo la noción de adición, sustracción y multiplicación de números naturales. Por otra parte, el Currículo Nacional (2016) contempla la enseñanza y aprendizaje de la noción de división en el nivel 4 de los estándares de aprendizaje. Concretamente, en el tercer grado de primaria, es por esa razón que la investigación se sitúa en ese grado.

Procedimiento

Para la elaboración de nuestras actividades nos hemos basado en las nociones que presenta Vallejo (2012), pues presenta una propuesta de enseñanza por medio de justificaciones. La investigación se desarrolló en 14 sesiones, todas estas situaciones han sido diseñadas con el propósito de construir gradualmente las nociones de divisiones y divisibilidad de números naturales a partir de la noción de repartición equitativa y máxima. Nos centraremos en las 7 primeras sesiones, ya que estas estuvieron orientadas a la construcción de la noción de división de números naturales. Estas sesiones se han desarrollado en base a tres tipos de actividades: *Trabajo en clase* (todos los estudiantes con la guía de la investigadora), *Trabajo en grupos* (los estudiantes de manera grupal y sin la guía de la investigadora) y *Trabajo individual*.

Tabla 2
Resumen de sesiones y actividades

Sesión (*S*) y tipo de trabajo	Actividad (*A*) y nociones trabajadas (*N*)	Propósito
S1 Trabajo en clase y trabajo en grupos	*A: Situación "El álbum de frutas"* *N:* Repartición libre, equitativa, máxima, natural y libre.	*Caso: división con divisor fijo 2* Trabajar con un álbum de 2 páginas para repartir y pegar figuritas de frutas.
S2 Trabajo en clase y trabajo en grupos	*A:Situación "La promesa de las canicas"* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3* Trabajar con 3 bolsas de mallas para repartir canicas
S3 Trabajo individual	*A:Ficha "La promesa de las canicas"* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3* Conjeturar que existe infinitos números naturales que son divisibles entre 3.
S4 Trabajo individual y trabajo en clase	*A:Ficha "Reparticiones equitativas y máxima"* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3* Identificar las razones por las que 3 no pueden ser un valor del residuo en una división con divisor igual a 3.
S5 Trabajo en clase	*A:Ficha "Reparticiones equitativas y máxima"* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3,4 y 5* Identificar los posibles valores del residuo en una división con 3, 4 y 5.
S6 Trabajo en clase	*A:Situación: "Goles con premio"* *N:* Repartición exacta e inexacta	*Caso: división con dividendo fijo 24* Determinar los divisores de 24, en función de la noción intuitiva, para que cumpla la repartición exacta e inexacta
S7 Trabajo individual	*A:Situación: "La radio"* *A:Ficha: "Repartiendo entradas de forma equitativa y máxima"* *N:*Repartición exacta e inexacta	Identificar y justificar por qué las reparticiones son de tipo exacta o inexacta

Principales hallazgos

Para el análisis de las justificaciones de los estudiantes tanto individuales y grupales se han tenido en cuenta la puesta en práctica de las secuencias de actividades, así como también, las transcripciones que se han obtenido de las grabaciones en las sesiones de clases. Principalmente, el análisis de la información recopilada es cualitativa. Por otro lado, en esta investigación se combinan dos elementos relevantes de la enseñanza basada en las justificaciones: establecer un marco conceptual a partir del cual justificar y establecer como expectativa que las respuestas deben justificarse dentro de ese marco. Estos dos elementos se evidencian en las respuestas de los estudiantes dados a partir de la situación siguiente:

> ***Promesa de las canicas:*** Luis y sus amigos juegan un partidito de canicas. Esta vez Luis tiene presente que el día anterior había prometido a sus tres primos que les obsequiaría las canicas que gane en su próximo juego. Luis ha pensado en detalle cómo hará la repartición de las canicas que gane entre sus tres primos: "*Repartiré entre ellos la mayor cantidad de canicas que pueda, respetando que cada uno de ellos tenga una misma cantidad de canicas, así todos quedan contentos. Yo me quedaré con las canicas que sobren después de la repartición*". (Ordoñez, 2014, p.102)

A continuación, presento fragmentos de las transcripciones obtenidas en las sesiones.

Investigadora: ¿Podrá Luis tener 3 canicas después de repartir 12 canicas entre sus 3 primos?

Estudiante 1: No, porque Luis tiene que repartir la cantidad máxima de canicas.

Investigadora: Entonces, ¿no ha repartido la cantidad máxima de canicas?

Estudiante 2: No, todavía esas 3 (canicas) las puede repartir a sus primos

Investigadora: Ahora, ¿cuánto le corresponde a cada primo?

Estudiante: 4 canicas a cada primo y a Luis le sobrarían 0 canicas.

[...]

Investigadora: ¿con cuántas canicas como máximo se puede quedar Luis después de repartir cierta cantidad de canicas entre sus 3 primos?

Estudiante 3: 2 canicas

Respecto a este fragmento, notemos que las respuestas de los estudiantes proporcionan justificaciones en base a las expectativas que las respuestas han de tener dentro de un marco conceptual. En este caso, se estableció un marco conceptual, parte de ese marco es la noción de repartición máxima. Además, la justificación que presenta el estudiante 1 está basada en dicha noción; mientras que, el estudiante 2 considera la redistribución de canicas, de esa manera aplica la noción de repartición máxima. Es relevante mencionar que la enseñanza por medio de justificaciones permite construir la noción de división, pues comprenden y justifican por qué no puede ser el resto 3 cuando la división presenta como divisor a 3.

[...]

Investigadora: ¿Qué pasaría si Luis tiene 4 primos?, ¿con cuántas canicas Luis puede quedarse después de la repartición de un cierto número de canicas?

Estudiante 4: con 0, 1, 2 y 3 canicas

Investigadora: Ahora, Luis tiene 6 primos, ¿con cuántas canicas Luis puede quedarse después de la repartición de un cierto número de canicas?

Estudiante 5: 0, 1, 2, 3, 4 y 5 canicas

Investigadora: ¿por qué no le pueden quedar más de 5 canicas?

Estudiante 6: porque si fuera 6 canicas, tendría que repartirlas a sus primos.

Este fragmento, nos da señales claras que esta forma de enseñanza por medio de justificaciones permite que los estudiantes puedan construir la noción de división, y esto se evidencia cuando determinan los posibles valores que toma el resto cuando la división es por 4 y por 6. Cabe señalar que en las preguntas que se planteó solo tenían como dato el divisor (número de primos), pero esto no fue impedimento para que logren dar los posibles valores del residuo de la división (número de canicas que le quedan a Luis después de la repartición). Creemos que este tipo de respuestas dadas por los estudiantes conllevan a que más adelante hagan generalizaciones en relación al resto y el divisor de la división. Por otra parte, la intervención del estudiante 6 lo consideramos como una justificación, ya que emplea un ejemplo y se evidencia el uso de la noción de repartición máxima.

Investigadora: Luis tiene 672 primos, ¿con cuántas canicas se puede quedar Luis después de a la repartición de las canicas?

Estudiante 7: 671 canicas

Estudiante 8: también, 669, 668, …

Investigadora: ¿con cuántas canicas como mínimo se puede quedar Luis?

Estudiante 9: con 0 canicas.

Este último ejemplo y otros más, conlleva a deducir que los estudiantes han logrado comprender, justificar y construir su propio conocimiento de división, particularmente, cuando el residuo de una división no puede ser igual o mayor al divisor de la división. Por otra parte, en las transcripciones, hemos ilustrado el papel que tomó las justificaciones en la enseñanza de la división y como el establecimiento de la noción de la repartición máxima permitió que las justificaciones estén dentro del marco de dicha noción.

Según el esquema (ver figura 1) el logro de la construcción de la división se debe a la noción de repartición equitativa y máxima, pues este tipo de repartición admite una única respuesta. En los siguientes trabajos de los estudiantes muestran las actividades graduales que desarrollaron para lograr la adquisición de la noción de división.

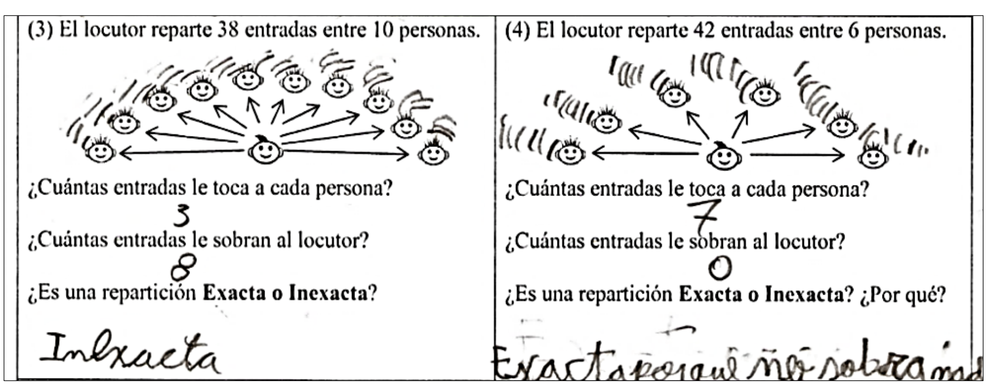

Figura 2. Ejemplo del estudiante 10

El trabajo anterior, presenta el ejemplo de un estudiante que para dar respuesta a lo planteado ha recurrido a un procedimiento de repartición equitativa y máxima, nuestro concepto primitivo. Notemos que da una justificación válida, de acuerdo al valor del residuo.

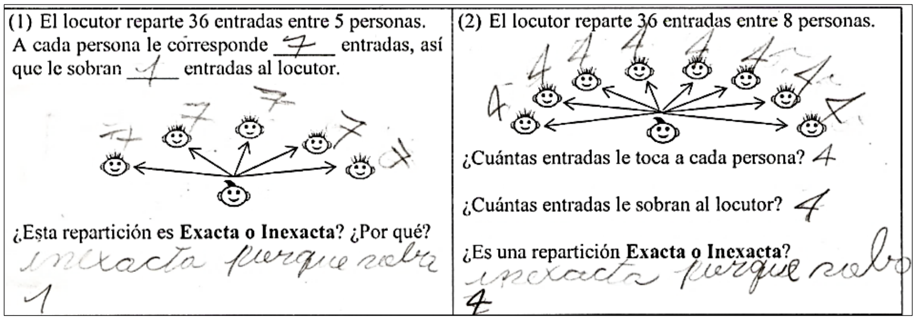

Figura 3. Ejemplo del estudiante 11

En la figura 3, creemos que el estudiante para dar respuesta a lo planteado recurre a dos nociones: reparticiones equitativas y máximas y, multiplicación. Justamente, el Currículo Nacional (2016) sugiere asociar la noción de la multiplicación con la división. Por otra parte, el estudiante en los dos casos presenta una justificación válida, según el resto obtenido.

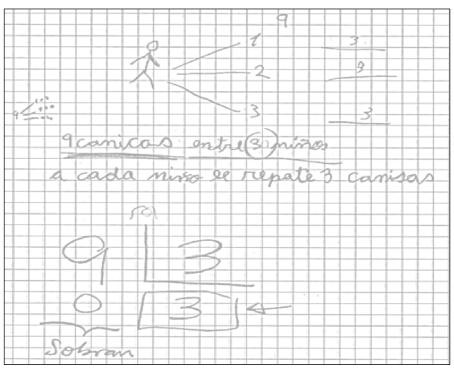

Figura 4. Ejemplo del estudiante 12

El estudiante 12 muestra claramente la vinculación entre las dos nociones: repartición equitativa y máxima (noción intuitiva), y la división de números naturales. Asimismo, evidencia como a partir de la noción intuitiva concibe la división y sus elementos (dividendo, divisor y residuo). Cabe aclarar que se orientó el uso de la notación de la división y se reforzó mediante el pedido de la creación de ejemplos de divisiones con esta nueva notación.

Conclusiones

Respecto al objetivo general, determinamos que las condiciones que permite la construcción de la noción de división son *la noción de repartición equitativa y máxima y, las justificaciones*. Estas dos condiciones se complementan, dado que la noción de repartición equitativa y máxima ha sido la base para la construcción de la división de números naturales, mientras que las justificaciones involucradas en los problemas han sido el medio para que se logre la construcción de dicho conocimiento. Asimismo, cabe señalar que la noción de repartición equitativa y máxima es un concepto intuitivo para los estudiantes, el cual permite con naturalidad asociar con la noción de división.

Coincidimos con lo manifestado por Reid (2011), las justificaciones (prueba) ha de ser vista como un vehículo para descubrir y construir conocimientos matemáticos. Consideramos que este trabajo de investigación es una muestra clara que la enseñanza basada en justificaciones permite que los estudiantes logren construir sus propios conocimientos y, que consigan darle sentido y un gusto por aprender las matemáticas.

Notamos que la mayoría de los alumnos lograron darse cuenta de la relación existente entre el divisor y el residuo (esto al menos de manera implícita) y no memorizarse como muchos estudiantes de su edad lo hacen. En concreto, los estudiantes lograron justificar por qué el residuo no puede ser mayor o igual que el divisor. Asimismo, los estudiantes han logrado identificar los posibles valores del residuo y el valor máximo del residuo teniendo como información dada el valor del divisor. Este logro fue conseguido en base a la noción de repartición equitativa y máxima, gracias a la cual construimos la noción de división.

Asimismo, cabe resaltar que más del 50% (17 de los 24) de los estudiantes concibieron con facilidad el algoritmo de la división y en todo momento evidenciaron la vinculación con la noción de repartición equitativa y máxima.

Finalmente, nos sumamos a lo dicho por Stylianou (2011), la enseñanza de las matemáticas por medio de justificaciones (pruebas) en estudiantes de primaria es una oportunidad para que nuestros estudiantes puedan desarrollar su pensamiento matemático, explorar sus nociones intuitivas y construir los cimientos para que en los grados posteriores puedan realizar pruebas matemáticas.

Referencias y bibliografía

Bieda, K., Xueying, J., Drwencke, J., & Picard, A. (2013). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*

De Villiers, M. (2001). Papel e funcoes da demonstracao no trabalho como o sketchpad. 31-36. Key Curriculum Press.

Lay, S. (2009). Good proofs depend on good definitions: Examples and counterexamples in arithmetic. In F. Lin, F. Hsieh, G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), Proc. 19th Conf. of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study (Vol. 2, pp. 27-30). Taipei, Taiwan: ICMI.

Ordoñez, C. (2014). La construcción de la noción de división y divisibilidad de números naturales, mediada por justificaciones, en alumnos de tercer grado de nivel primaria. (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Perú, Ministerio de Educación (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf

Reid, D. (2011) Understanding proof and transforming teaching. In Wiest, L., & Lamberg, T. (Eds.) Proceedings of the Thirty-third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (pp. 15-30) Reno NV: University of Nevada.

Schifter, D. (2011). Representation-based Proof in the Elementary Grades. En Stylianou, D., Blanton M. & Knuth, E.(eds.). Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective.(cap.4, pp.71-86). New York: Routledge.

Stylianou, D., Blanton M. & Knuth, E. (2011), Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective. (pp.65-70). New York: Routledge.

Vallejo, E. (2012). Análisis y propuesta en torno a las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en el primer grado de secundaria. (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú