XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

# Elementos de prueba en geometría euclidiana en ambiente de papel-y-lápiz: estudio con alumnos de bachillerato

José Luis **López** Hernández
Escuela Nacional Preparatoria Antonio Caso, UNAM
México
jose.lopez@enp.unam.mx

**Resumen**

En este artículo reportamos las pruebas y argumentaciones dadas por 15 estudiantes de bachillerato (16-17 años de edad) al resolver problemas de congruencia de triángulos, en ambiente de papel-y-lápiz y tecnológico cabri-géomètre; sin embargo, aqui sólo son reportadas aquellas en ambiente estático. Los estudiantes resolvieron individualmente los problemas y al término de la solución de cada uno de estos, el profesor del grupo abrió una discusión plenaria, cuyo objetivo fue que los estudiantes dieran a conocer la forma en que ellos los habían resuelto. Las pruebas y argumenatciones dadas por los estudiantes, de los nueve problemas que les fueron propuestos, coinciden con las reportadas en la literatura de investigación relacionada con este tema. Nuestros resultados sugieren que los estudiantes, con frecuencia, en sus pruebas y argumentaciones se apoyan en evidencias empíricas, intuiciones e incluso en experiencias personales surgidas de las figuras geométricas que les fueron proporcionadas en los problemas.

*Palabras clave*: Prueba, geometría, congruencia, resolución de problemas.

## Introducción

Desde hace aproximadamente 40 años, se ha venido discutiendo la pertinencia o no de incluir el tema de la demostración en el currículo de matemáticas de los niveles básicos (secundaria y bachillerato). Es cierto que no todos los temas de matemáticas de estos niveles educativos necesitan de una prueba formal; sin embargo, cuando los estudiantes inician el estudio de temas de geometría euclidiana ciertos resultados o problemas contenidos en sus libros de texto, requieren que los estudiantes den argumentos de porqué cierta propiedad geométrica es válida. Gran parte de los estudiantes de estos niveles educativos no se interesa en comprender, o bien en aprender cómo demostrar ciertas proposiciones de geometría euclidiana, pues para ellos las propiedades geométricas y algunas proposiciones, dado que son apoyadas en figuras, suelen ser evidentes.

## Marco conceptual

La literatura de investigación relacionada con la demostración en matemáticas, y en el ámbito educativo es extensa. Por limitaciones de espacio, en este documento sólo incluimos algunas referencias bibliográficas; cuyo énfasis es la prueba y la argumentación dadas por los estudiantes en los diversos niveles educativos. Por ejemplo, Van Dormolen (1977, citado por Ibañes & Ortega, 2005, p. 25), se refiere a tres niveles de demostración, dados por los estudiantes; tales niveles son: a) nivel cero; caracterizado porque el estudiante se enfoca únicamente en objetos concretos, b) nivel uno, se caracteriza porque el estudiante piensa en objetos como representantes de una clase, c) nivel dos; en este nivel el estudiante es capaz de generalizar. Bell (1976) propuso tres propósitos de la demostración; ellos son: verificación, iluminación y sistematización; de Villiers (1993, citado por Ibañes & Ortega, 2005, p. 29) comenta dos funciones de la demostración: descubrimiento y comunicación; por su parte, Balacheff (1987) menciona dos tipos de demostraciones en que los estudiantes utilizan los ejemplos: las pragmáticas, basadas en la *ostensión*; en este tipo de prueba, los estudiantes recurren a la acción y a ejemplos concretos, y las intelectuales; apoyadas éstas en la formulación de las propiedades matemáticas puestas en juego y en las relaciones que existen entre ellas. A su vez, las demostraciones pragmáticas se subdividen en varios tipos: el empirismo ingenuo, la experiencia crucial, el ejemplo genérico y la experiencia mental. Siñeriz y Ferraris (2005), Van Ash (1993, citado por Ibañes & Ortega, 2005, p. 26) y Hanna (1990), entre otros, han contribuido también al estudio y desarrollo de la prueba, de acuerdo con el tipo de lenguaje y grado de formalidad utilizados.

Más allá de los diferentes procesos de argumentación y prueba utilizados por los estudiantes para justificar los resultados en geometría, existe la problemática relacionada con los diversos tipos de interpretación de una representación geométrica, en la que el razonamiento y la visualización son aspectos de suma importancia, tal como son discutidos por Camargo, Perry y Samper (2005) y por Palais (1999). Atendiendo a la problemática antes bosquejada, en esta investigación nos planteamos el siguiente objetivo: Explorar la función de la tarea en ambiente de papel-y-lápiz en la demostración. Es decir, cómo la tarea sugerida por el profesor, motiva y hace ver la necesidad de probar resultados. En este artículo, pretendemos dar respuesta a la pregunta: ¿Qué tipos de pruebas emergen durante las soluciones dadas por los estudiantes a problemas geométricos de congruencia de triángulos?

## Metodología

### Descripción de la población

Este estudio se llevó a cabo con 15 estudiantes (16-17 años de edad) de segundo año de una escuela preparatoria ubicada en la Ciudad de México. Los estudiantes no tenían experiencia en cómo llevar a cabo demostraciones en geometría. Durante tres sesiones de trabajo (la primera de una hora y las otras dos de dos horas, cada una de ellas, fueron conducidas por el autor del presente artículo), los estudiantes resolvieron problemas de geometría euclidiana; que incluyeron tareas como: reconocimiento de figuras, construcciones geométricas, uso de teoremas y criterios de congruencia de triángulos, así como la validación de sus resultados. Debido a problemas de espacio, en este artículo sólo documentamos el trabajo de siete estudiantes; cuyas demostraciones ejemplifican los diversos tipos de demostraciones reportados en la literatura de investigación.

### Selección y modificación de los problemas

Del libro Geometría Plana y del Espacio (Wentworth & Smith, 1979), fueron elegidos nueve problemas de congruencia de triángulos; estos problemas fueron modificados en cuanto a su redacción original. Fue llevada a cabo la solución *a priori* de los problemas propuestos a los estudiantes; tales soluciones tienen el objetivo de prever las posibles pruebas y argumentaciones de los estudiantes.

**Implementación de los problemas y acopio de datos**

Se dispuso de 10 a 15 minutos para la resolución de cada problema (de manera individual), y de algunos minutos para la discusión grupal; conducida por el investigador. Se cuenta con el registro de los nueve problemas de la actividad, con sus respectivas respuestas dadas por cada uno de los estudiantes, usando papel y lápiz, así como las videograbaciones del trabajo individual y de la discusión grupal.

En seguida, son mostrados cuatro problemas (la numeración de estos no significa el orden en que fueron propuestos) así como las pruebas y argumentaciones que dieron los estudiantes.

**Problema 1:** En el cuadrado $\square\, ABCD$ [1] (Figura 1), P es punto medio de $\overline{AB}$. Prueba que $\overline{PC} = \overline{PD}$.

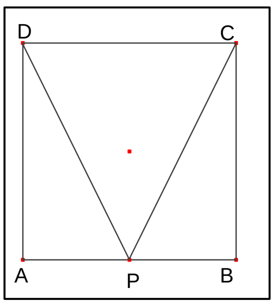



*Figura 1.*Cuadrado y triángulos.

**Estudiante A2.** Argumentación deductiva formal.

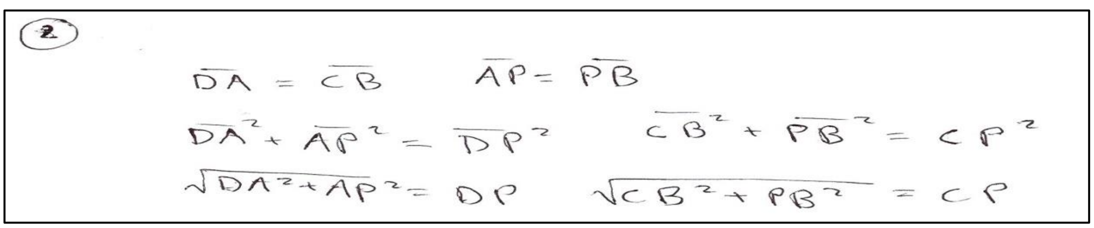



*Figura 2*. Uso del Teorema de Pitágoras.

La Figura 2 muestra el uso de las hipótesis del problema: dado que $\overline{DA} = \overline{CB}$ y $\overline{AP} = \overline{PB}$, al utilizar el *Teorema de Pitágoras* se concluye que $\overline{PC} = \overline{PD}$.

[1] $\square\, ABCD$ es cualquier cuadrado cuyos vértices son A, B, C y D.

**Estudiante A4.** Explicación por evidencia.

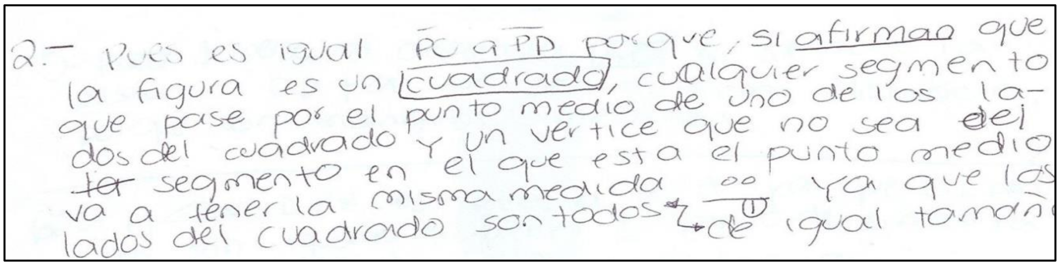

2.- Pues es igual PC a PD porque, si afirmao que
la figura es un cuadrado, cualquier segmento
que pase por el punto medio de uno de los la-
dos del cuadrado y un vértice que no sea del
~~lo~~ segmento en el que está el punto medio
va a tener la misma medida ya que los
lados del cuadrado son todos de igual tamañ

*Figura 3*. Argumentación apoyada en evidencias.

Como se muestra en la Figura 3, el estudiante afirma que los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$ miden lo mismo, únicamente por el hecho de que la figura, cuyos vértices son A, B, C y D es un cuadrado, pero no da argumentación alguna.

**Estudiante A5.** Explicación por dibujo.

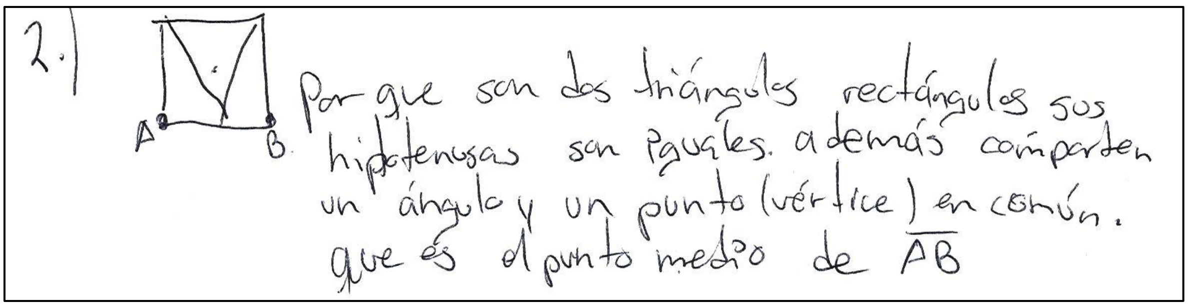



*Figura 4*. Afirmaciones apoyadas en la figura.

Como se muestra en la Figura 4, el estudiante afirma que $\overline{PC} = \overline{PD}$, porque observa que P es punto medio de uno de los lados del cuadrado y que se forman triángulos rectángulos, cuyos lados son lados del cuadrado. Sólo afirma sin argumentar.

**Estudiante A11.** Prueba por visualización.

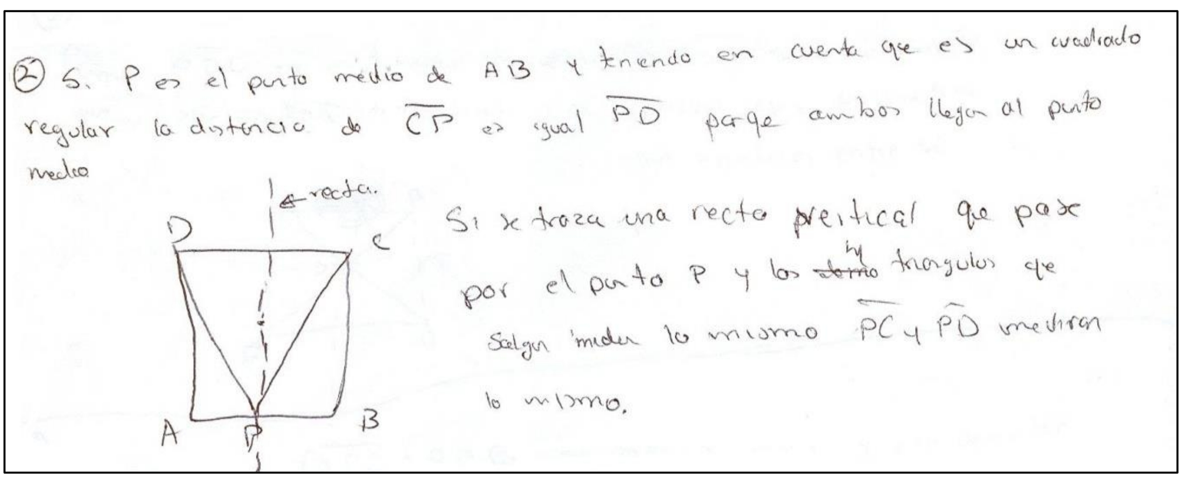



*Figura 5*. Argumentos apoyados en la visualización de la figura.

La Figura 5 permite observar que el estudiante se enfoca en los elementos de la representación gráfica, y construye la recta auxiliar que pasa por P, para obtener cuatro triángulos congruentes, lo cual le ayuda a concluir que $\overline{PC} = \overline{PD}$.

**Problema 2:** En la Figura 6, $\overline{AC} = \overline{BC}$ y $\overline{AD} = \overline{BD}$. Prueba que $\measuredangle CBD = \measuredangle DAC$.

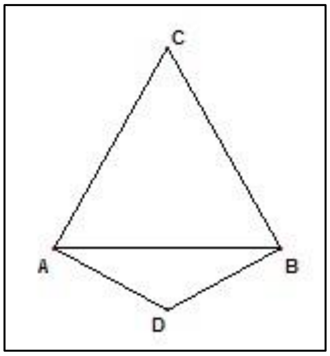



*Figura 6*. Cuadrilátero y triángulos.

**Estudiante A2.** Argumentación deductiva coloquial.

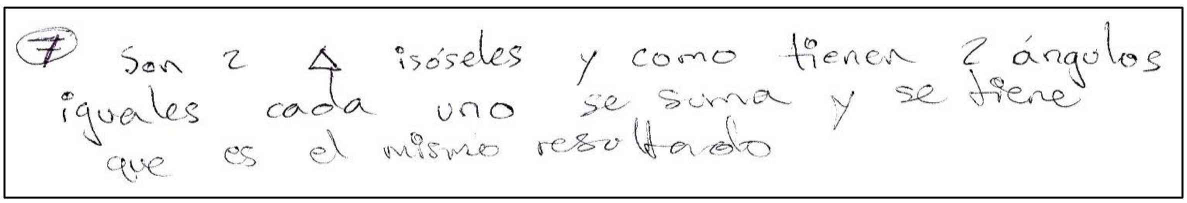



*Figura 7*. Argumentos apoyados en la figura dada mediante el uso de lenguaje coloquial no claro.

De acuerdo con la Figura 7, el estudiante utiliza un lenguaje coloquial para argumentar la validez de la proposición a partir de las propiedades de los triángulos isósceles. Así mismo, parece deducir que los ángulos de interés son iguales porque los ve como la misma suma de dos ángulos; sin embargo, la manera de escribir sus ideas no es clara.

**Estudiante A11.** Explicación coloquial.

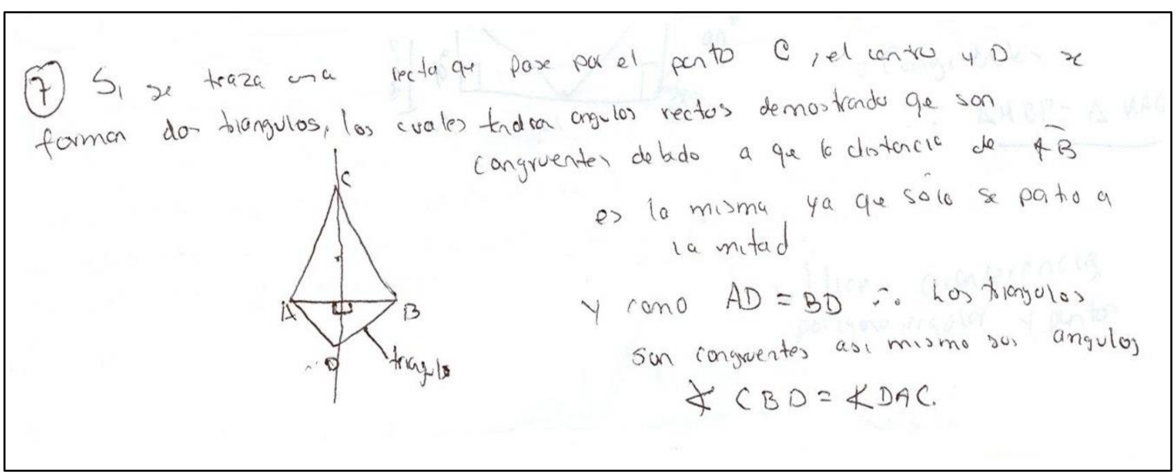



*Figura 8*. Argumentación apoyada en acciones evidentes.

De acuerdo con la Figura 8, el estudiante utiliza un lenguaje coloquial para probar la afirmación. Él traza la recta auxiliar $\overline{CD}$ que corta a $\overline{AB}$ en su punto medio de manera perpendicular, y como $\overline{AD} = \overline{BD}$, concluye (por el criterio LLL) que $\Delta\, ADC$ [2] es congruente a $\Delta\, BDC$.

**Problema 3:** En $\Delta\, ABC$ equilátero (Figura 9), P y Q son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Prueba que $\overline{AP} = \overline{BQ}$.

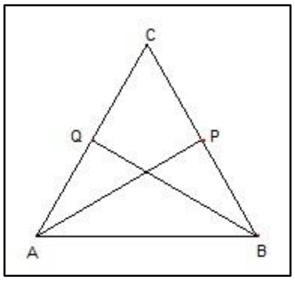



*Figura 9*. Triángulos.

**Estudiante A10.** Explicación por evidencia.

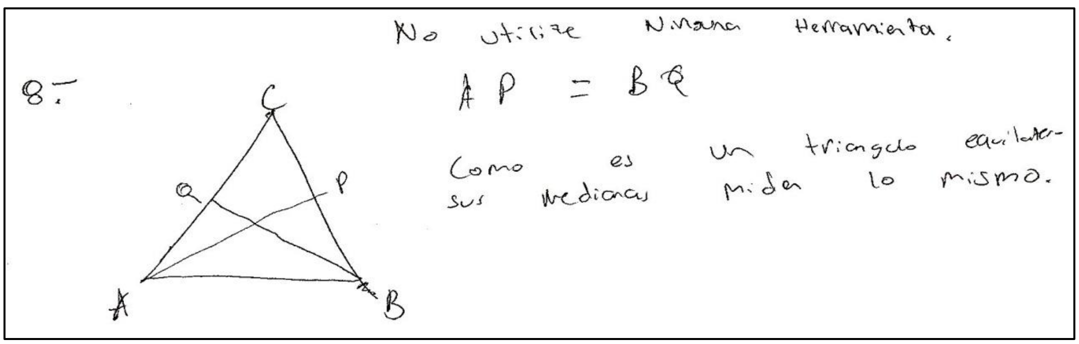
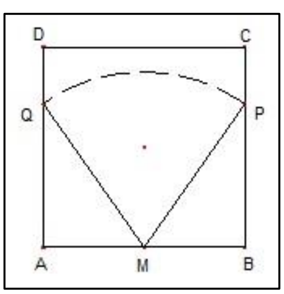



*Figura 10*. Argumentación apoyada en evidencias.

De acuerdo con la Figura 10, el estudiante afirma que las medianas tienen la misma longitud por el solo hecho de que el triángulo es equilátero. No da argumentación alguna.

**Problema 4:** En $\square\, ABCD$ (Figura 11), el punto medio de $\overline{AB}$ es M. Con centro en M se describe el arco $\widehat{QP}$ [3] que corta a $\overline{AD}$ en Q y a $\overline{BC}$ en P. Prueba que $\Delta\, MBP$ es congruente a $\Delta\, MAQ$




[2] $\Delta\, ADC$ es cualquier triángulo cuyos vértices son A, D y C.
[3] $\widehat{QP}$ es cualquier arco de circunferencia con extremos Q y P.

*Figura 11*. Cuadrado, triángulos y segmento de arco.

**Estudiante A12.** Explicación coloquial.

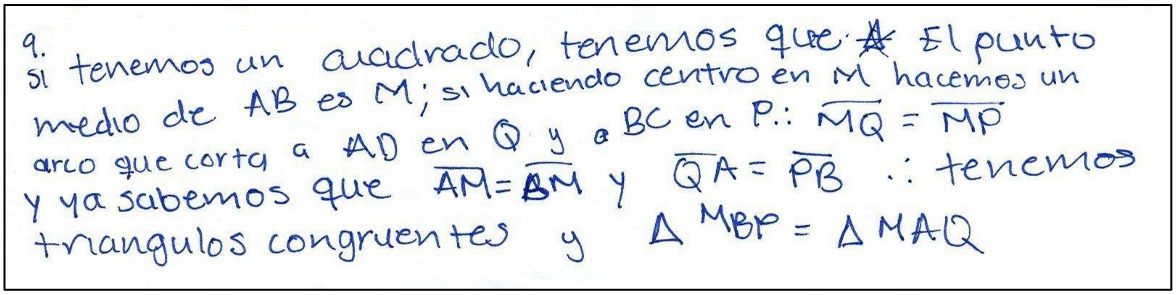

9.
si tenemos un cuadrado, tenemos que ~~A~~ El punto
medio de AB es M; si haciendo centro en M hacemos un
arco que corta a AD en Q y a BC en P.: $\overline{MQ} = \overline{MP}$
y ya sabemos que $\overline{AM} = \overline{BM}$ y $\overline{QA} = \overline{PB}$ ∴ tenemos
triangulos congruentes y $\Delta MBP = \Delta MAQ$

*Figura 12*. Afirmaciones no evidentes.

En la Figura 12 se observa que para el estudiante, dos triángulos son congruentes si dos de los lados de uno son iguales a dos de los lados del otro, y entonces concluye que los triángulos rectángulos son iguales, aunque no se refiere al ángulo recto.

**Estudiante A7.** Prueba que explica.

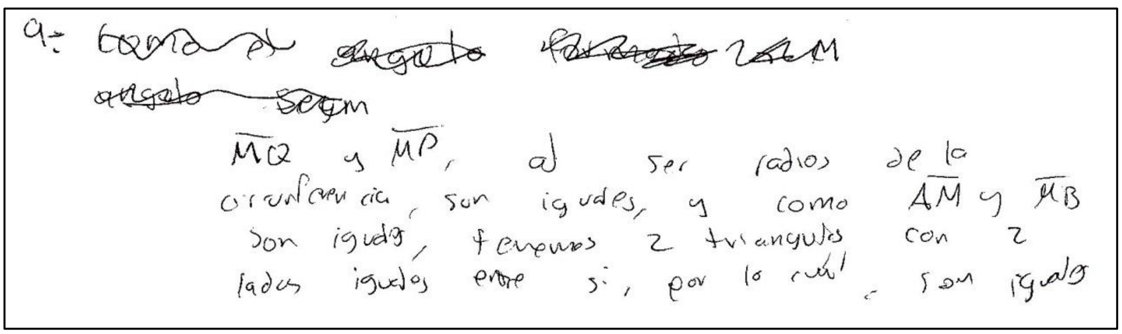

9: tomando el ~~ángulo~~ ~~formado~~ LAM
~~ángulo~~ ~~SEGM~~
$\overline{MQ}$ y $\overline{MP}$, al ser radios de la
circunferencia, son iguales, y como $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$
son iguales, tenemos 2 triangulos con 2
lados iguales entre si, por lo cual, son iguales

*Figura 13*. Uso de conceptos geométricos para explicar la prueba.

Como se observa en la Figura 13, el estudiante proporciona una justificación basada en la congruencia de triángulos (criterio LAL). Dos lados correspondientes iguales (y el ángulo recto, que no menciona) le bastan para afirmar que los dos triángulos rectángulos involucrados son iguales.

## Conclusiones

En general, de la segunda y tercera sesión de trabajo se observa que la mayoría de los estudiantes justificó los resultados con un lenguaje coloquial y, en ocasiones, los procesos de argumentación fueron imprecisos o incompletos; sin embargo, en algunos casos, sí utilizaron un lenguaje simbólico formal con claridad. En general, los estudiantes elaboraron, de manera aceptable, las demostraciones en las que recurren a la congruencia de triángulos, o al menos, este elemento les permitió intuir y elaborar un discurso con el que trataron de justificar los resultados.

A la luz de las respuestas de los estudiantes, en esta investigación, los tipos de prueba que emergen durante las soluciones a los problemas geométricos de congruencia de triángulos son los ya mencionados en la literatura de investigación relacionada con la prueba en matemáticas. En nuestra investigación, constatamos que existe gran dificultad, por parte de los estudiantes, para identificar elementos auxiliares que pueden serles útiles para asegurar la veracidad del resultado. Los estudiantes necesitan desarrollar un razonamiento intuitivo de los objetos geométricos para tener acceso, tanto a un mejor entendimiento de la geometría euclidiana como a un razonamiento deductivo formal para su estudio; para lograr lo anterior, se requiere tomar en cuenta el tipo de tareas a resolver y la manera en que éstas son guiadas.

## Referencias y bibliografía

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(12), 147-176.

Bell, A. W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23-40.

Camargo, L., Perry, P. & Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿Puede tener un papel protagónico? *Educación Matemática, 17*(3), 53-76.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Ibañez, M. & Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *Números, 65,* 19-40.

Palais, R. S. (1999). The visualization of mathematics: toward a mathematical exploratorium. *Notices of the AMS*, *46*(6), 647-658.

Siñeriz, L. & Ferraris C. (2005). Tipos de prueba: una de las categorías de un modelo teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría. *Memorias del VII Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy.

Wentworth, J. & Smith, D. E. (1979). *Geometría plana y del espacio.* México: Porrúa.