XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El proceso de derivación en GeoGebra: un estudio sobre el conocimiento matemático de futuros profesores

Cesar **Martínez** Hernández
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima
México
cmartinez7@ucol.mx
Yuliana Nayeli **Marmolejo** Rebolledo
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima
México
yuliana_marmolejo@ucol.mx
David Sadrac **Parra** Soto
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima
México
david.parrasoto08@gmail.com

Resumen

La investigación aborda la problemática del uso de herramientas tecnológicas y la formación de profesores en torno a su Conocimiento Matemático de la derivación de funciones algebraicas; en particular, sobre las técnicas de derivación requeridas y de los procesos algebraicos involucrados en éstas. La investigación, de corte cualitativo, se sustentó en los elementos teóricos del modelo llamado Conocimiento Matemático para la Enseñanza, la Aproximación Instrumental (AI) y los Registros Semióticos de Representación. Con base en el tipo de funciones propuestas a los futuros profesores, el contraste de sus técnicas (en el sentido de la AI) de papel y lápiz con el uso de GeoGebra, produjo tres tipos de respuestas en la población participante: respuestas equivalentes en ambos ambientes, respuestas incorrectas en el ambiente de papel y lápiz, y creencia de que sus respuestas de papel y lápiz son correctas.

Palabras clave: formación de profesores, conocimiento matemático, uso de tecnología

Antecedentes

Uno de los intereses de la investigación en Educación Matemática versa en torno al Conocimiento Matemático en alumnos del nivel superior, en particular sobre conceptos del cálculo diferencial; diversas investigaciones dan cuenta de ello (e.g., Díaz, 2009; Flores, 2013, entre otras). Es decir, el aprendizaje del cálculo, mediante distintos medios, es una problemática reconocida en la investigación. En este reporte, se aborda dicha problemática con futuros profesores respecto al proceso de derivación de funciones algebraicas en ambiente GeoGebra.

Una de estas variables es la formación y profesionalización de los profesores de matemáticas; por ejemplo, respecto a los tipos de conocimiento que deben tener; entre otros, el Conocimiento Común del Contenido Matemático (Ball, Thames y Phelps, 2008), el cual subraya el conocimiento del contenido en la parte especifica de lo matemático. Respecto al conocimiento matemático que deben desarrollar los futuros profesores, para grados preuniversitarios, una de las principales problemáticas se refiere a su aprendizaje de distintos conceptos del cálculo diferencial, por ejemplo, el de función, límites, derivadas, etc. (Flores, 2013).

Sobre el concepto de derivada, varias investigaciones muestran dificultades que presentan los estudiantes del nivel universitario en su aprendizaje. Por ejemplo, Ubuz (2002) menciona diferentes concepciones erróneas que manifiestan los alumnos, entre otras, no diferenciar la derivada puntual con la función derivada; o bien, confundir la ecuación de la recta tangente con la función derivada. Incluso hay problemáticas asociadas a los procesos algebraicos involucrados. En este sentido, es conocida la problemática sobre las dificultades en el aprendizaje del cálculo que estudiantes del nivel superior presentan sobre el tipo de errores algebraicos que cometen en el proceso de derivación (Díaz, 2009).

En el caso de la derivada, la cual es un límite, los procesos de derivación y el álgebra involucrada en éstos sólo se discuten en el registro algebraico y se deja de lado la discusión con otros tipos de registro. Lo anterior puede deberse a que usualmente se trabaja en ambiente de papel y lápiz y se hace énfasis en el registro algebraico. De esta manera, una vía que puede incidir en potenciar el aprendizaje es utilizar recursos tecnológicos que permitan el trabajo matemático mediante distintos registros. Duval (2006) dice que la originalidad de la actividad matemática está en movilizar parcialmente, al menos dos registros de representación al mismo tiempo, o la posibilidad de cambiar de un registro a otro todo el tiempo. De la misma manera en que Presmeg (1997) se menciona la importancia del uso de representaciones para el caso de las funciones, lo es para el concepto de derivada. Más aún, para los procesos de derivación y los resultados que se obtienen con éstos. De aquí la importancia de utilizar herramientas tecnológicas que permitan el trabajo con diferentes sistemas de representación.

En cuanto a los beneficios, la incorporación de tecnología como un medio alternativo para promover aprendizajes sobre el cálculo de derivadas (y de los procesos algebraicos involucrados) puede ser pertinente si se explotan al menos dos registros de representación como lo indica Duval (2004). En este mismo sentido, de acuerdo con Lagrange (2005), las capacidades numéricas, gráficas, simbólicas y de programación de las nuevas herramientas tecnológicas, juegan un papel importante en el futuro de la enseñanza de las matemáticas, no sólo como ayuda pedagógica sino como un vehículo para nuevas aproximaciones.

De acuerdo con los antecedentes planteados en esta sección, el problema de investigación que se reporta consistió en analizar el desarrollo del Conocimiento Matemático sobre la derivación de funciones algebraicas de futuros profesores de matemáticas cuando utilizan GeoGebra. Específicamente se plantea la siguiente pregunta: ¿Qué reflexiones emergen en los futuros profesores de matemáticas cuando contrastan técnicas de papel y lápiz y la técnica GeoGebra en la derivación de funciones algebraicas?

Referentes teóricos

Los elementos teóricos que sustentaron la investigación, tanto para el diseño de las Actividades (tareas) para la recopilación de datos como para su análisis fueron los siguientes. En primer lugar, se tomó de referencia al modelo sobre los tipos de conocimiento del profesor de matemáticas llamado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) (Ball, et al. 2008). En tanto que el estudio se enfoca en el Conocimiento Matemático de los futuros profesores, esta investigación sólo se enfocó en uno de los seis elementos que dicho modelo refiere: el conocimiento común del contenido matemático.

De acuerdo con Ball et al. (2008), el MKT se compone de dos grandes dominios; los cuales, a su vez se integran de tres tipos de conocimiento para la enseñanza de las matemáticas. La primera componente, Ball y sus colaboradores la llaman Subject Matter Knowledge, es decir conocimiento sobre el área específica, en este caso el de las matemáticas, y la primera componente de éstas tres la identifican como *Common Content Knowledge* (Conocimiento Común del Contenido matemático, CCK). Éste se refiere al conocimiento sobre las matemáticas que posee cualquier persona relacionada con esta área, por lo que no es propio para la enseñanza, pero es fundamental. Los otros componentes de este modelo son el conocimiento especializado, el conocimiento en el horizonte, conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimeinto del contenido y la enseñanza y el conocimiento del contenido y el currículum. Como ya se mencionó, en este estudio sólo se tomó en cuenta el primero de los seis componentes.

En segundo lugar, dado que los participantes trabajarían tanto en un ambiente de papel y lápiz como en GeoGebra para derivar funciones propuestas en las Actividades, otros de los elementos de la investigación provienen de la llamada Aproximación Instrumental del uso de herramientas tecnológicas (AI), en su vertiente antropológica (Artigue, 2002; Lagrange, 2003; Lagrange, 2005). En esta perspectiva de la construcción del conocimiento matemático, tres conceptos son importantes. El primero de ellos es el de Tarea, el cual se define como el problema a resolver. El segundo es el de Técnica, el cual se refiere a la forma o maneras de resolver la Tarea dada; por último, la Teoría, refiere a la explicación o justificación que sustenta la Técnica.

Dentro de la aproximación instrumental, cuando se utilizan herramientas tecnológicas que permiten resolver cierta tarea, por ejemplo los manipuladores simbólicos, para resolver, desarrollar, factorizar, etc. se consideran como una de las maneras en que el individuo puede resolver un problema. Es decir, las técnicas "tecnológicas" (como el uso de comandos) se consideran formas de resolver ciertas tareas. Usualmente, a las técnicas sólo se les confiere un valor pragmático; sin embargo, Artigue y sus colegas mostraron que también poseen un valor epistémico, es decir, permite una comprensión de los objetos matemáticos que involucra la Tarea, particularmente durante la construcción de las Técnicas. En este sentido, las Técnicas, de acuerdo con Lagrange (2005, p. 116) pueden usarse para distinguir y reorganizar las Tareas, si existen diferentes formas de resolver una Tarea (i.e. diferentes Técnicas). Así, cuando se utiliza alguna herramienta tecnológica que permite resolver cierta Tarea, se está considerando como una forma más que el usuario tiene para abordar el problema a resolver. Además, las Técnicas son el objeto de reflexión conceptual cuando son comparadas con otras y cuando su consistencia es discutida (Lagrange, 2003, p. 271).

Finalmente, dado que los alumnos trabajarían en al menos dos registros de representación, algebraico y gráfico, un tercer elemento teórico fue considerado: los Registros de Representación Semióticos (RRS) (Duval, 2006). Como es ampliamente conocido en el medio de la investigación sobre representaciones semióticas, de acuerdo con Duval (1999), el pensamiento matemático requiere activar en paralelo dos o tres RRS. Por lo tanto, para Duval, la coordinación de registros no es la consecuencia de entender las matemáticas, al contrario, es una condición necesaria.

Método

Los elementos metodológicos tomados en cuentas para llevar a cabo la investigación fueron los siguientes.

Participantes

Los futuros profesores participantes en este estudio fueron 14 estudiantes (E1, E2,…, E14, en adelante) de una Universidad Pública de México, quienes al momento de la toma de datos cursaban el 8º semestre unos, y el 6º semestre, otros, de una licenciatura en educación media especializada en matemáticas, enrolados en un curso extracurricular sobre el uso de GeoGebra. Tenían además, la experiencia de estar utilizando sistemáticamente este software de Geometría dinámica en algunos de sus cursos previos, durante al menos un año. Cada uno de los estudiantes trabajo de manera individual, previo a una discusión grupal de sus respuestas. Cada uno de ellos contó con una computadora para utilizar GeoGebra cuando fuera necesario, de acuerdo con las actividades.

Diseño de Actividades (Tareas)

Para el acopio de datos, se diseñaron tres actividades, cada una de ellas con una Tarea principal: Derivar una función dada. En términos de la Aproximación instrumental, las tres actividades incluyen preguntas técnicas y teóricas, además de promover un trabajo tanto en el registro algebraico, tanto en papel y lápiz como en GeoGebra, y trabajo en el registro gráfico, sólo en GeoGebra. Para identificar las diferentes formas que los alumnos derivan ciertas funciones y la explicación que proveen, las actividades incluyen las siguientes funciones:

- Actividad 1: involucra derivar $f(x) = (2x-3)^2$, $g(x) = 4x^2 - 12x + 9$ y $h(x) = 4x^2 - 9$.
- Actividad 2: incluye la derivación de $f(x) = x^3(5x^2 - 3) + x$, $g(x) = 5x^5 - 3x^3 + x$ y $h(x) = 5x^6 - 3x^3$.
- Actividad 3: se propone derivar $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $g(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{8x+1}}$ y $h(x) = (\frac{2x-3}{8x+1})^{\frac{1}{2}}$.

Las actividades incluyen tres momentos de trabajo: primero involucra derivar sólo con papel y lápiz en el registro algebraico. Segundo, involucra la derivación en GeoGebra y el uso de los registros algebraico y gráfico. El tercer momento incluye una serie de preguntas de reflexión sobre sus respuestas en ambos ambientes.

Fuentes de información

Los datos obtenidos provienen de las siguientes fuentes de información: hojas de trabajo de cada estudiante, archivos GeoGebra generados por cada uno de ellos, videograbación de las sesiones (una por cada actividad) y notas de campo del investigador. Dichas fuentes sirvieron para poder llevar una triangulación de datos.

Resultados

De acuerdo con los datos recabados, para las dos primeras actividades, ninguno de los participantes tuvo mayores problemas para resolver de manera correcta la tarea propuesta (derivar las funciones), ni para interpretar los resultados que se obtienen en GeoGebra. Sin embargo, hubo tres tipos de respuesta, para la tercera actividad, producto de sus reflexiones del trabajo con GeoGebra que emergieron en los alumnos, y que son representativos para cuando sus Técnicas y Teoría son, débiles en algunos casos, y sólidos en otros. El uso de GeoGebra como Técnica para resolver la Actividad 3, les permite obtener las funciones derivadas (Figura 1).

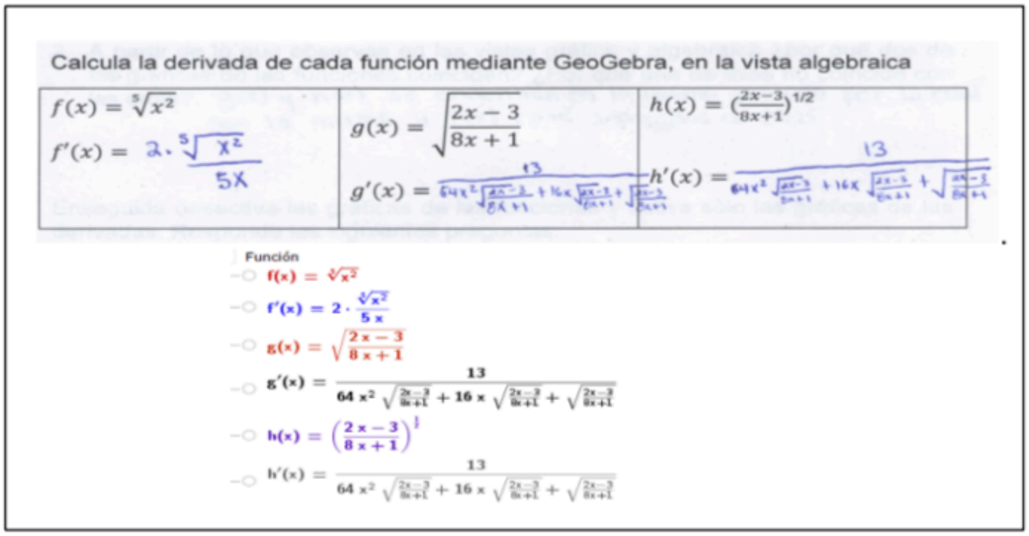

Figura 1. Resultados obtenidos con GeoGebra por E7

Como se observa en la Figura 1, GeoGebra les permite resolver la Tarea y obtener funciones derivadas en el mismo registro algebraico, pero con representaciones equivalentes. Es decir, se trata de respuestas que no concuerdan con las que ellos obtienen con papel-y- lápiz, se trata de representaciones equivalentes, en el mismo registro. Este tipo de respuestas, puede ser importante para promover reflexiones de carácter teórico, tal como lo señalan Kieran y Drijvers (2006). Para aquellos participantes que se muestran seguros de sus respuestas de papel-y-lápiz, esto no parece causarles confusión alguna. Sin embargo quienes no están seguros de sus primeras respuestas sí les causa ciertas dudas sobre sus procedimientos de papel-y-lápiz. Como se muestra a continuación. Las respuestas de los participantes respecto a su trabajo de papel-y-lápiz y los que obtienen con GeoGebra pueden clasificarse de la siguiente manera:

1) sus resultados son correctos pero no coinciden con los de GeoGebra.
2) sus resultados son incorrectos y no coinciden con los obtenidos en GeoGebra.
3) creencia de que sus respuestas son correctas aunque no coincidan con las de GeoGebra.

Las siguientes Figuras 2, 3 y 4 muestran cada uno de estos casos, respectivamente. Para el primero, se muestra el trabajo de E5 (Figura 2), donde si bien comete errores de notación sus respuestas finales son correctas.

El segundo caso, donde las respuestas son incorrectas y no coinciden con GeoGebra, es posible que uno de los factores que influyó en ello y por los cuales no coincidieron sus derivadas fue que el tiempo que tuvieron para terminar esta tarea, o bien que el futuro profesor no contaba con el conocimiento suficiente para calcular las derivadas en papel-y-lápiz. La Figura 3 (Trabajo de E1) muestra este ejemplo.

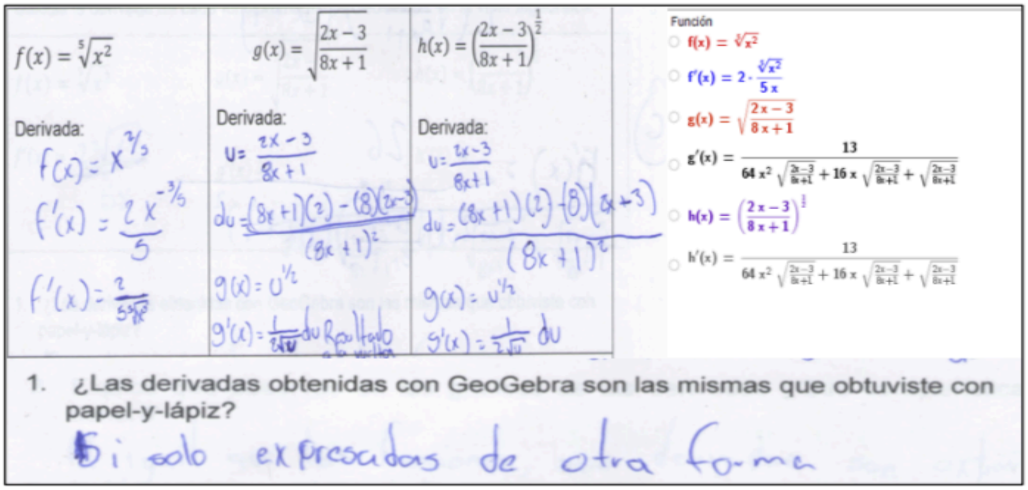

Figura 2. Resultados son correctos pero no coinciden con los de GeoGebra.

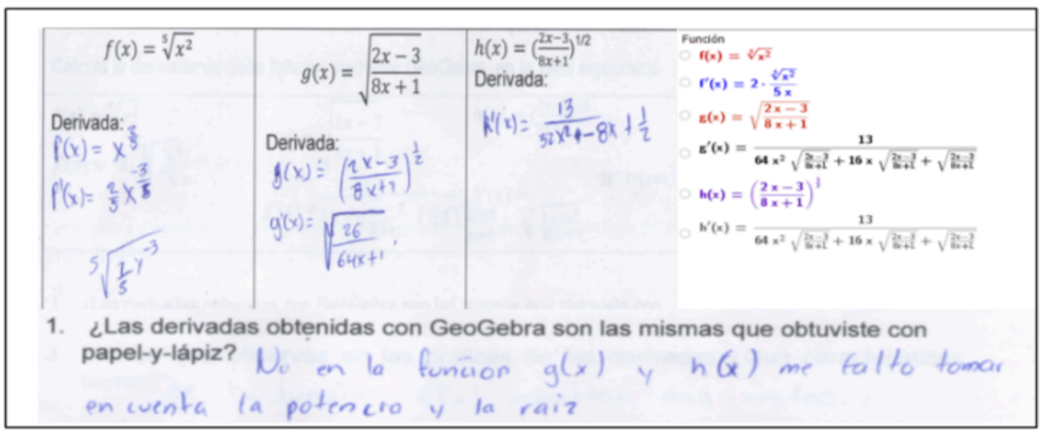

Figura 3. Resultados incorrectos y no coinciden con los obtenidos en GeoGebra.

En el tercer caso (Figura 4) muestra el trabajo de E9, por la respuesta del participante, él cree que sus respuestas están correctas al observar que en GeoGebra dos de las derivadas son iguales; al comparar con sus respuestas con papel-y-lápiz él también obtiene dos derivadas iguales (que difieren con las dadas por GeoGebra), a partir de este hecho, el participante argumenta que sólo le falta simplificar la derivada, para tenerlas en la misma forma que GeoGebra las expresa. Es decir, piensa que sus respuestas de papel y lápiz sí están correctas sólo que escritas en una representación algebraica diferente o bien que su proceso no está completo.

Como puede observarse, el futuro profesor no está del todo seguro si sus respuestas están correctas; cree que sí, ya que en sus respuestas dos de éstas coinciden. Es a partir de esta característica de coincidencia entre dos respuestas (que también se observa en GeoGebra) lo que lo lleva a pensar que sólo le faltó simplificar su resultado, para que fuera igual al de GeoGebra. La Tabla 1, muestra un resumen de lo expuesto en esta sección.

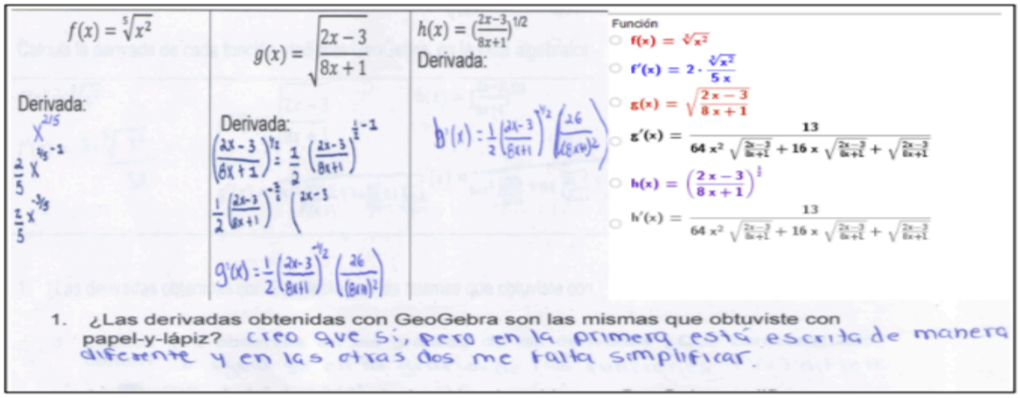

Figura 4. Creencia de respuestas correctas aunque no coincidan con las de GeoGebra.

Tabla 1

Tipos de respuestas al comparar resultados de papel y lápiz con resultados de GeoGebra

Tipo	Frecuencia
Respuestas de papel-y-lápiz correctas pero no coincide con GeoGebra	4
Respuestas de papel-y-lápiz incorrectas	6
Creencia de que sus respuestas de papel-y-lápiz son correctas aunque no coinciden con GeoGebra	4

Fuente: elaboración propia.

La diferencia observable respecto a las Actividades 1 y 2, es que en la Actividad 3 el trabajo con GeoGebra, para varios participantes les permite identificar que sus procedimientos son incorrectos; aunque no son capaces de corregirlos. Se dan cuenta que tienen errores al resolver sus procedimiento a papel-y-lápiz haciendo alusión que debe a un bajo conocimiento y argumentan que necesita repasar algunos procedimientos algebraicos.

Conclusiones

Hasta este momento de la investigación, es posible decir, que para algunas funciones, derivarlas (actividades 1 y 2), no les causó ningún problema; en este sentido, el uso de GeoGebra, no promueve mayores reflexiones. Sin embargo, no fue el caso de actividad 3, donde si hubo discrepancias en los resultados que obtiene algunos estudiantes.

Fueron dos el tipo de reflexiones que emergieron. La primera respecto a una identificación correcta de los resultados (correctos o incorrectos) que obtienen mediante las dos técnicas (papel-y-lápiz y GeoGebra); la segunda, una inconsistencia en la intepretación de los resultados que obtienen, por un lado con papel y lápiz, por otro con GeoGebra: identificarlos como equivalentes cuando no lo son. Respecto a esto, es importante mencionar que ninguno de los participantes utilizó el registro gráfico para justificar la incongruencia o no de las respuestas obtenidas con papel y lápiz a partir de observar las gráficas que en automático el software GeoGebra ofrece para las funciones derivadas. Fue necesaria la intervención del investigador para promover una mayor reflexión de su trabajo, a partir de contrastar los resultados y su consistencia en ambos registros.

Desde el punto de vista de la aproximación instrumental, el uso de GeoGebra, si bien es entendida como una técnica (que utilizaron correctamente) para derivar funciones, no fue incorporada como una herramienta que permite una discusión a nivel teórico, cuando las funciones son "más complejas" de derivar para el usuario. Este resultado concuerda con lo reportado en otros estudios (e.g., Martínez y Ulloa, 2017; Sinclair y Robutti, 2013) acerca de que es necesario mayor tiempo y ayuda por parte del profesor para desarrollar en el usuario de la tecnología la llamada génesis instrumental. En otras palabras, para promover una discusión más efectiva de sus técnicas, con el objetivo de que alcancen un desarrollo teórico.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245-274.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Díaz, J. L. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El cálculo y su enseñanza*, *1*, 91-97.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PME-NA.

Duval, R. (2004). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143–168.

Flores, A. (2013). Ayudando a futuros profesores a mejorar la comprensión conceptual del cálculo. En A. Cuevas, F. Pluvinage, et al. (Eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral* (pp. 43-84). Mexico: Pearson.

Kieran, C. y Drijvers, P. (2006). Th eco-emergence of machine Techniques, paper-and- pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*, 205-263.

Lagrange, J-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J.T. Fey (Ed.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269–283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lagrange, J-B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113- 135). New York: Springer.

Martínez C. y Ulloa, R. (2017). Dynamic geometry software and tracing tangents in the context of the mean value theorem. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, *24*(2), 75-82.

Sinclair, N. Y Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of Dynamic Geometry. En M. A. Clements; J. A. Bishop; C. Keitel; J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (571-596). NY: Springer.

Ubuz, B. (2002). Development of calculus concepts through a computer base learning environment. En I. Vakalis (Ed.), *Proceedings of the 2 International Conference on the Teaching of Mathematics* (pp.1-10). Hersonissos, Creta. Grecia : John Wiley & Sons Inc.