XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Comprensión del producto vectorial desde los Modos de Pensamiento: El caso de profesores en formación inicial

Marcela **Parraguez** González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
marcela.parraguez@pucv.cl

Rosario **Guerra** Martínez
Universidad Católica del Norte
Chile
r1982gm@gmail.com

Resumen

Con base en la Teoría Modos de Pensar de Sierpinska, se presentan tres modos de pensar el concepto de producto vectorial: (1) como el vector normal a otros dos vectores, (2) como una fórmula que permite calcularlo y (3) a través de dos propiedades que lo caracterizan. La finalidad de presentar estos tres modos de pensar el producto vectorial tridimensional, es mostrar evidencias con sustento teórico de la comprensión del concepto producto vectorial en profesores en formación inicial, que pertenecen a dos casos de estudio, y de cómo ellos se sitúan en estos modos, para dar respuesta a tres situaciones que se les presentan. Los resultados muestran que los profesores en formación inicial se sitúan en uno o dos modos de pensar para responder, sin mayor interacción entre los tres modos.

Palabras clave: producto vectorial, modos de pensamiento, comprensión.

Introducción

El producto vectorial nace con del descubrimiento de los Cuaterniones, que hiciera uno de los fundadores de la matemática en el año 1843 –Sir William Rowan Hamilton–. En esos años, cuando Hamilton trabajaba sobre mecánica, comenzó una búsqueda incansable sobre la forma de extender la comprensión geométrica de los números complejos en el plano, a una comprensión geométrica en tres dimensiones. Sin embargo, Hamilton, redirige su investigación en la búsqueda de una terna o número complejo tridimensional, pero, durante muchos años no logró resultados satisfactorios para la geometría tridimensional, en particular en dotar de una estructura al producto vectorial. En este proceso de búsqueda, Hamilton observa que, si bien la propiedad de conmutatividad es inherente al producto, él tuvo que aceptar que esta propiedad no se cumple siempre para el producto en un espacio tridimensional, y para avanzar en su cometido él tuvo que aceptar que $ij = -ji$ (con i, j vectores en $\mathbb{R}^3$).

Además, al intentar entender el producto de vectores en el espacio, se dio cuenta de que eran necesarias cuaternas en lugar de ternas, fue así cómo nacen los *Cuaterniones de Hamilton*, números hipercomplejos cuatro dimensionales. Números con una parte escalar y una parte vectorial. Hamilton al definir las operaciones entre ellos, en particular la multiplicación de cuaterniones, considerando solamente la parte vectorial o compleja del cuaternión, dio origen a lo que se conoce como el producto vectorial o el producto cruz.

Con base en lo anterior, la historia del producto vectorial está entrelazada con la de los cuaterniones. Según Martínez-Sierra y Benoit (2008), en la historia sobre una epistemología del producto vectorial, se distinguen tres etapas, que a continuación brevemente se sintetizan.

La *primera etapa* referida a Hamilton, el descubrimiento de los cuaterniones y el nacimiento del producto vectorial.

Una *segunda etapa* que considera que la teoría de los cuaterniones, constituye una transición entre el cálculo geométrico plano, al análisis vectorial. Esta segunda etapa, fue llamada *de los defensores y detractores de los cuaterniones de Hamilton,* porque uno de los principales defensores del estudio de este tema fue Peter Guthrie Tait, físico matemático escocés y pionero en la termodinámica. Tait en 1867, publica un libro llamado *Tratado elemental sobre cuaterniones*, donde desarrolla de forma más simple la teoría propuesta por Hamilton, específicamente en uno de sus capítulos explica los principios de la multiplicación de los cuaterniones, como la anti-conmutatividad del producto vectorial.

La *última etapa*, llamada *el nacimiento del análisis moderno*, donde se destaca Josiah Willard Gibbs, quién separa de forma definitiva la parte escalar de la parte vectorial de un cuaternión, proponiendo dos productos, el producto escalar y el producto vectorial, dando así inicio al análisis moderno.

El interés de esta comunicación es situarse en el objeto matemático producto vectorial, desde una perspectiva cognitiva desarrollada por Sierpinska (2000), llamada Teoría Modos de Pensamiento, para mostrar a la comunidad interesada diferentes formas de comprender este objeto matemático, que en muchas ocasiones es utilizado para ejemplificar que el producto de vectores no es conmutativo.

El producto vectorial en el currículo de la formación de profesores

El concepto de producto vectorial está presente en la mayoría de los programas de matemáticas para carreras como Pedagogía en Matemáticas, Ingeniería, Licenciatura en Ciencias o en Economía, y nuestra propuesta es analizarlo desde un pensar práctico y teórico que construyen sus aprendices, dispuestos estos últimos en dos estudio de casos, constituidos por profesores en formación inicial. En lo que sigue, vamos a entender que el pensamiento práctico se genera con el fin de obtener algo en concreto, en cambio el pensamiento teórico de produce en el hecho puro de pensar las relaciones sobre sistemas de conceptos.

Generalmente un programa de Geometría Vectorial, para un curso de primer año de formación de profesores, contiene un apartado que aborda el producto vectorial. Este producto vectorial no tiene una definición única, sin embargo, en muchas ocasiones se define como sigue y dicha definición se puede encontrar en textos de Geometría Vectorial, como por ejemplo en Benítez (2015), que habitualmente forma parte de las referencias de algunos de estos programas.

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Su producto vectorial $u \times v$ (en este orden) se define como el vector: $u \times v = (u_2 v_3 - v_2\, u_3,\; u_3 v_1 - u_1 v_3,\; u_1 v_2 - u_2 v_1)$.

Existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender el concepto vector, pero no así de geometría vectorial y menos aún si se restringe el estudio del producto vectorial tridimensional a una postura cognitiva.

El problema central, en esta materia es que el estudiante debe trabajar con conceptos abstractos, pero su tendencia es a trabajar con procedimientos mecánicos, limitando su comprensión sobre los conceptos involucrados. Esto pone en tela de juicio el conocimiento alcanzado de la enseñanza de esta materia, y hay quienes piensan que, en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra con vectores no son exitosos (Dubinsky, Dauterman, Leron, y Zazkis, 1994). En la mayoría de las investigaciones realizadas (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, y Thomas, 1996; Weller et al., 2002) se logra poner en evidencia que, aún los estudiantes exitosos en los cursos de álgebra con geometría, no logran la comprensión de los conceptos involucrados. Y es en beneficio de los futuros profesionales, preguntarse si ¿es posible ayudar a un mayor número de aquellos a comprender uno de los conceptos básicos y particular de la geometría vectorial, como es el producto vectorial tridimensional?

En pro de alcanzar una respuesta a la pregunta anterior, la propuesta de esta comunicación radica en mostrar interpretaciones que los profesores en formación inicial ponen en juego para comprender el concepto de producto vectorial tridimensional, reconociendo en cada interpretación componentes de origen geométrico, procedimental y estructural, entendiendo cada una de estas componentes, como diferentes aspectos de un concepto básico de la geometría vectorial.

La teoría de los Modos de Pensar de Sierpinska

Los Modos de Pensamiento es una teoría de la Didáctica de la Matemática creada por Anna Sierpinska (2000), que permite interpretar los fenómenos que se relacionan con la forma de alcanzar un nivel superior de abstracción en conceptos que se relacionan con el álgebra lineal. Según esta teoría la comprensión de objetos matemáticos de un fragmento de la matemática, requiere de un pensamiento práctico, cómo también de un pensamiento teórico. A partir de allí Sierpinska identifica tres modos de comprender el álgebra lineal (Sierpinska, 2000), que son el resultado de la superación de dos obstáculos, uno que rechaza los números dentro de la geometría, y el otro, rechaza que la intuición geométrica pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético.

Con la finalidad de hacer explícito el pensar teórico del álgebra lineal y abordar sus obstáculos, Sierpinska propone tres modos de pensamiento, que constituyen formas de pensar y entender los objetos matemáticos, y cada uno de los modos constituye una vía de acceso a los diferentes significados del objeto, permitiendo tener una aproximación articulada de diferentes facetas del objeto matemático.

Sierpinska define tres modos de pensamiento a través de los cuales se hace explícito el pasamiento teórico, el modo Sintético-Geométrico que se corresponde con el pensamiento práctico, y los modos Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural que se corresponden con el pensamiento Teórico, estos se describen a continuación.

En modo Sintético-Geométrico (SG): Los objetos son representados mediante una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos.

En modo Analítico-Aritmético (AA): Los objetos matemáticos son representados a través de relaciones numéricas o simbólicas.

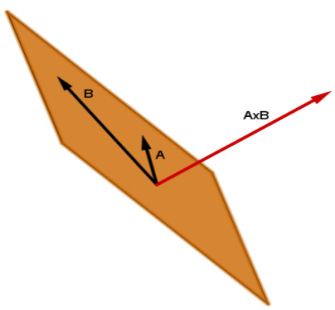
En modo Analítico-Estructural (AE): Los objetos son representados a través de las propiedades de los mismos objetos, o a su caracterización a través de axiomas, o propiedades que los determinan.

Modos de pensar el concepto de producto vectorial

El concepto de producto vectorial tridimensional (PVT), puede ser interpretado desde la matemática y con base en el estudio histórico epistemológico presentado en la introducción, a través de tres formas, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

Modos de pensar el producto vectorial tridimensional

Modo de pensar SG-PVT	Modo de pensar AA-PVT	Modo de pensar AE-PVT
	Sean $P = (a_1, a_2, a_3)$ y $Q = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. $P{\times}Q = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.	Sean $P, Q\ y\ R$ en $\mathbb{R}^3$ Propiedad 1: (AE-PVT-P1) $P{\times}Q = -(Q{\times}P)$ Propiedad 2: (AE-PVT-P2) $P{\times}Q = 0$, si y solo si, $P\ y\ Q$ son linealmente dependientes.

El modo de pensar SG-PVT está representado por lo que primero viene a la mente de un estudiante, cuando en una situación evoca al PVT. El modo AA-PVT esta descrito por aquella fórmula que los estudiantes utilizan para poder calcular el PVT, en cambio el modo AE-PVT, esta presentado a través de dos propiedades estructurales que caracterizan al PVT como objeto único de la matemática.

Importancia de abordar el producto vectorial desde los Modos de Pensamiento

Abordar el concepto de PVT en sus tres modos de pensarlos –SG-PVT, AA-PVT y AE-PVT– reporta la presencia o ausencia de un pensamiento sistémico –que integra el pensar práctico y teórico del PVT– en los aprendices de geometría vectorial, al resolver situaciones en contextos tridimensionales y fuera de ellos. Uno de los rasgos del pensamiento sistémico es que se enfoca en el establecimiento y estudio de las relaciones entre los conceptos y su caracterización dentro de un sistema (Modos de pensar el PVT) que también contiene otros conceptos (Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002).

EL conocimiento matemático incluido en los tres Modos de pensar los PVT de geometría vectorial (Tabla 1) es primordial, ya que está muy relacionado con la construcción y las dificultades del aprendizaje de los conceptos básicos de los espacios vectoriales. Esto puede ser la causa de obstáculos en la enseñanza y aprendizaje del álgebra con geometría, que sólo la articulación –como sistema– de los tres Modos de pensarla ayudaría a remontarlos, y en consecuencia el dominio de la habilidad para articularlos se torna fundamental en el aprendizaje del álgebra con geometría tridimensional y su aplicación.

Objetivo de Investigación

La presente comunicación se sitúa en la comprensión del concepto PVT, con la intención de analizar y mostrar evidencias con sustento teórico de cómo profesores en formación inicial que han cursado la asignatura de Geometría Vectorial, se sitúan y transitan en los Modos de Pensar el PVT. El programa de asignatura de Geometría Vectorial, seguido por los estudiantes para profesor, consideró los siguientes contenidos: vectores libres, aplicaciones de los vectores libres, vectores coordenados, producto escalar, aplicaciones del producto escalar, producto vectorial, ecuaciones vectoriales y paramétricas de rectas y planos.

Método

Desde el paradigma cualitativo se ha seleccionado el estudio de casos (Stake, 2010) como método para alcanzar el objetivo propuesto, porque permite una indagación en profundidad de una realidad específica y en un contexto global.

Los criterios seguidos para la conformación de los dos casos de estudio fueron: (a) Ser estudiante de Pedagogía en Matemáticas; (b) Haber sido estudiante del curso Geometría Vectorial y (3) Accesibilidad de los investigadores. Cada caso quedó constituido tal como se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2

Participantes y casos de estudio

Casos	Participantes	Nivel	Características	Identificación
Caso I	5 estudiantes de Pedagogía en Matemáticas	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Geometría Vectorial y eximido de dar examen.	E1, E2, E3, E4, E5
Caso II	4 estudiantes Pedagogía en Matemáticas	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Geometría Vectorial y rindió examen.	E6, E7, E8, E9

Recogida de datos

En esta indagación se utilizó como instrumento de recogida de datos un cuestionario escrito constituido por tres actividades matemáticas, como se muestra en la Tabla 3. Cada actividad fue diseñada con la intención de situarla a lo menos en un determinado modo de pensar el PVT.

Tabla 3

Actividades del cuestionario

Actividades	Objetivos
A1) De los vectores $A=(0,2,5),\ B=(19,0,0)\ y$ $C=(0,5,3)$ en $\mathbb{R}^3$, uno de ellos es perpendicular a los	Indagar cómo piensa o entiende el estudiante el modo SG-PVT. (Cómo se sitúa en el modo SG-PVT)

otros dos, ¿Cuál? Justifica.	Determinar si el estudiante privilegia el modo AA-PVT por sobre el modo SG-PVT.
A2) Sean $A = 2i - j + 2k$ y $B = 3i + 4j - k$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine $A \times B$.	Indagar cómo piensa o entiende el estudiante el modo AA-PVT. (Cómo se sitúa en el modo AA-PVT)
A3) Dados los vectores $A = (3,1,0)$ y $B = (5,7,0)$ Determine explícitamente un vector C perpendicular a los vectores A y B. ¿Hay más de un vector C que cumpla la condición? Justifica.	Indagar cómo piensa o entiende el estudiante la propiedad 1 o propiedad 2 del modo AE-PVT. (Cómo se sitúa en el modo AE-PVT)

Evidencias

Con la finalidad de mostrar un trabajo representativo de lo realizado por los estudiantes de los casos de estudios, es que hemos seleccionado algunos episodios de sus argumentos observables en las tres actividades, que se corresponden con el trabajo realizado por E6 y E2 para la primera actividad, por E4 y E9 para la segunda actividad y por E7 para la tercera actividad.

Primera Actividad. Cinco de los nueve profesores en formación inicial responden desde un modo AA-PVT. Tres responden desde un SG-PVT, de los cuales dos responden correctamente.

El estudiante E6 responde situándose desde un modo SG-PVT, aunque no dibuja correctamente los vectores pedidos, como se muestra en la Figura 1.

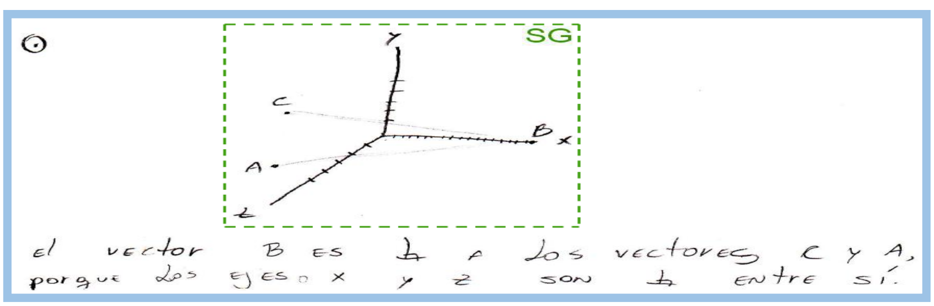


Figura 1. Respuesta del E6 a la actividad A1.

El Estudiante E2 responde incorrectamente desde un modo SG-PVT, como se muestra en la Figura 2.

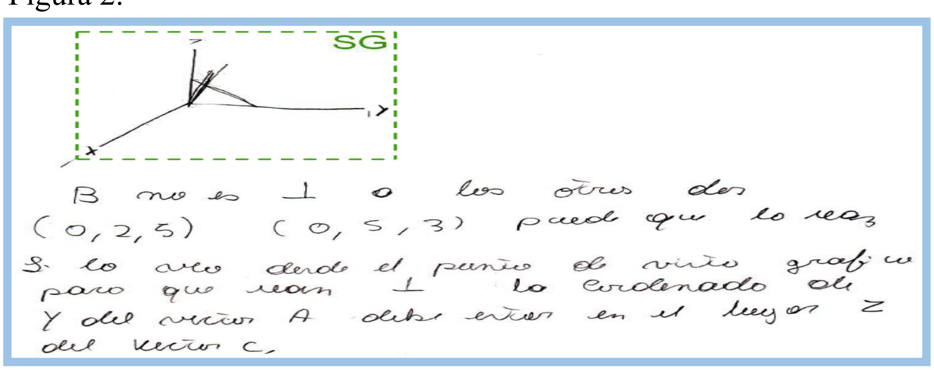


Figura 2. Respuesta del E2 a la actividad A1.

Segunda Actividad. Tres de los nueve estudiantes se sitúan desde un AA-PVT, de los cuales sólo 1 contesta correctamente.

El estudiante E4 se sitúa desde un modo AA-PVT, como se muestra en la Figura 3.

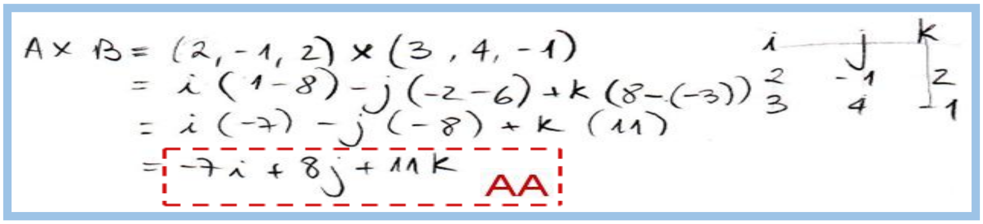


Figura 3. Respuesta del E4 a la actividad A2.

El estudiante E9 se sitúa incorrectamente desde un modo de pensar AA-PVT, ya que entrega como resultado un escalar (y no un vector), como se muestra en la Figura 4.

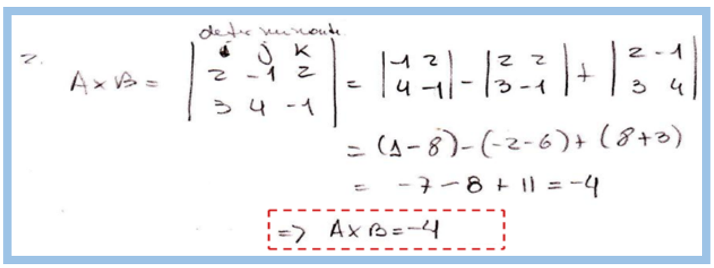


Figura 4. Respuesta del E9 a la actividad A2.

Tercera Actividad. Sólo cuatro de los nueve estudiantes responden a esta pregunta y el resto rafirman que C puede ser cualquier vector.

El estudiante E7 muestra en su respuesta una de las propiedades del modo AE-PVT-P1, al reconocer la simetría alternada (no conmutativa). Aunque no logra determinar el conjunto solución, como se muestra en la Figura 5.

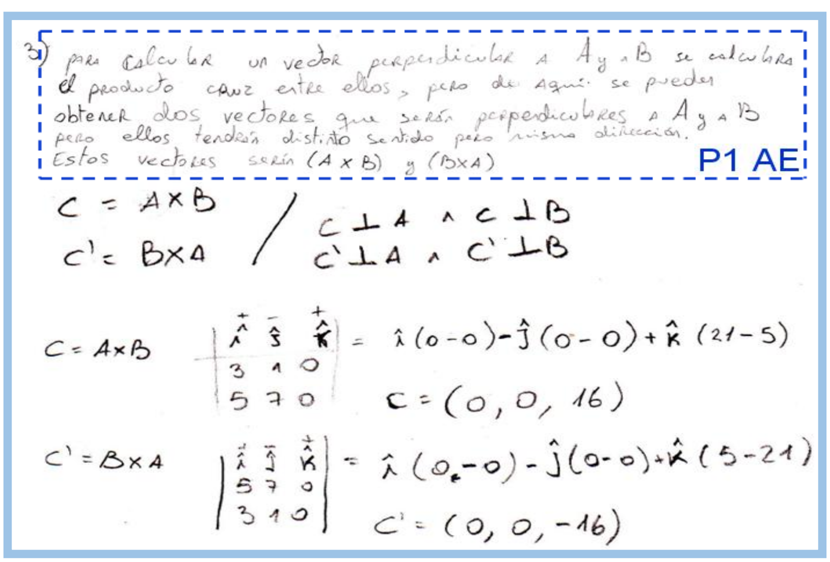


Figura 5. Respuesta del E7 a la actividad A3.

Conclusión

De las evidencias mostradas podemos concluir que en general los estudiantes para profesores privilegian el modo AA-PVT por sobre el modo de pensar SG-PVT, y además ellos presentan dificultades para entender al objeto matemático de PVT en sus distintos modos de comprenderlo: geométrico, aritmético y estructural. Con respecto a esto último, las principales dificultades identificadas en las respuestas de los profesores en formación inicial para situarse en cada uno de los modos, se muestra a través de los siguientes hechos.

En el **modo AA-PVT** los estudiantes para profesor no determinan correctamente las componentes del producto resultante (como vector) llegando a mostrar en sus respuestas (Figura 4) que el PVT no es un vector, sino un escalar.

En el **modo SG-PVT** los profesores en formación de los casos no logran coordinar las componentes de los vectores dados en el problema (Figura 1), con el sistema de ejes coordenados, así como tampoco con las componentes del vector resultante (Figura 2).

En el **modo AE-PVT**, las dificultades que presentaron los profesores en formación, se relacionan con que ellos no logran precisar un conjunto solución para A3 –que se relaciona con la Propiedad 1–, por ello responden que hay sólo un vector perpendicular o hay dos vectores (Figura 5) o cualquiera. No obstante, en los pocos argumentos mostrados por los estudiantes en A3, no se alcanzar a evidenciar una coordinación entre el modo **SG-PVT** con **AE-PVT**, pues de hecho ellos no perciben que los vectores de A3 al tener componentes reales, tiene igual dirección, pero distinto sentido. Mostrando esto último, que los profesores para profesor no comprenden el modo **AE-PVT**.

Agradecimientos

La investigación presentada ha sido financiada por el Proyecto FONDECYT Nº 1180468.

Referencias y bibliografía

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. and Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.). *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.

Benítez, R. (2015). *Geome*tría *vectorial*. México: Trillas.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U., and Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Goup Theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 267-273.

Martínez-Sierra, G. y Benoit, P. (2008). Una epistemología del product vectorial del cuaternión al análisis vectorial. *Latin-American Journal of Physics Education*, *2*(2), 201-208.

Sierpinska, A. (2000). "On some aspects of students' thinking in linear algebra", in J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, 209-246. Dortrecht: Kluwer Academic.

Sierpinska, A., Nnadozie A. and Oktaç A. (2002). A Study of relationships between theorical thinking and high achievement in linear algebra. Concordia University: Montreal.

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ª Ed.). Barcelona: Labor.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Versión disponible en: http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf