Dificultades para razonar inductivamente en profesores de secundaria al resolver un problema de generalización

Landy **Sosa** Moguel
Universidad Autónoma de Guerrero
México
landy.sosa@gmail.com
Guadalupe **Cabañas** Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
gcabanas@uagro.mx
Eddie **Aparicio** Landa
Universidad Autónoma de Guerrero
México
eeddie16@gmail.com

Resumen

En este estudio se examinó el razonamiento inductivo en profesores de matemáticas de secundaria, con el objeto de identificar las dificultades que enfrentan al resolver un problema de generalización. Dicho problema consistió en inducir una regla general correspondiente a un patrón de comportamiento cuadrático, y se aplicó a 19 profesores quienes lo resolvieron por escrito de forma individual. Las dificultades halladas radican principalmente en el proceso para establecer el patrón y están asociadas a la observación de una regularidad global entre los datos, al establecimiento de relaciones entre variables y a la abstracción de lo general.

Palabras clave: dificultades, profesores, razonamiento inductivo, resolución de problemas, generalización.

1. Introducción

El razonamiento inductivo es un proceso esencial para generalizar en matemáticas (Castro, Cañadas & Molina, 2010; Pólya, 1966). En el aprendizaje de las matemáticas, es fundamental en la resolución de problemas de generalización, ya que apoya el reconocimiento de regularidades, el establecimiento de patrones, la abstracción y formulación de reglas generales (Haverty, Koedinger, Klahr & Alibali, 2000; Murawska & Zollman, 2015; Mousa, 2017).

En educación secundaria, es necesario que los estudiantes usen razonamiento inductivo para buscar relaciones matemáticas y generalizar distintas clases de patrones (NCTM, 2000). Es por ello que, para entender como favorecer dicho razonamiento en niños y jóvenes, varios estudios han analizado el razonamiento inductivo en la resolución de problemas, y se han enfocado en describir los procesos cognitivos que usan (Christou & Papageorgiou, 2007), la forma en que reconocen patrones en relaciones funcionales numéricas (Haverty, et al., 2000) y las estrategias inductivas que emplean en problemas sobre sucesiones (Cañadas, Castro y Castro, 2008).

No obstante, aun cuando el profesor es el principal actor en promover esta y otras formas de razonamiento en los estudiantes, escasos estudios se han centrado en analizar el razonamiento inductivo en profesores de matemáticas en servicio (Sosa y Cabañas, 2017). Con el interés de contribuir en este tema de investigación, se examinó el uso de dicho razonamiento por profesores de secundaria en la resolución de un problema matemático. El objetivo consistió en identificar las dificultades que ellos enfrentan al resolver el problema, el cual demanda razonar inductivamente para generalizar. La detección de tales dificultades proporciona información que puede orientar a la configuración de programas de desarrollo profesional.

2. Razonamiento inductivo

Filosófica e históricamente, el razonamiento inductivo ha sido una vía de estudio para descubrir principios universales o leyes de fenómenos, los cuales son abstraídos de la observación empírica de hechos particulares (e.g. Pineda, 2009; Poincaré, 1948). Es un tipo de razonamiento que posibilita el paso de los hechos singulares a las proposiciones generales (Frolov, 1984).

Cognitivamente, el razonamiento inductivo es un proceso que involucra inferir conclusiones generales de una totalidad de elementos a partir de un subconjunto de esos elementos (Sriraman & Adrian, 2004). En la literatura sobre el tema, una manera de analizar este razonamiento ha sido elucidando los procesos o fases que permiten pasar de la observación de un conjunto finito de casos particulares a la inferencia de una regla general (e.g. Cañadas y Castro, 2007; Christou & Papageorgiou, 2007; Haverty et al. 2000; Klauer, 1996). Estos estudios han coincidido en señalar que el razonamiento empieza con el trabajo con casos particulares dirigido a la observación de regularidades y se cristaliza en la generalización, como producto del proceso inductivo. Sin embargo, también han reportado que no todos los sujetos alcanzan tal generalización, esto es, extender el patrón a todos los casos de una clase o categoría general.

Es así que, en este estudio la atención estuvo en indagar cómo profesores de secundaria pasan de la observación de una regularidad a la formulación de una generalización, con el objeto de identificar las dificultades en su razonamiento inductivo para efectuar este tránsito.

3. Método

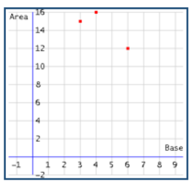
El estudio realizado fue empírico de tipo descriptivo, basado en la comparación y contraste de datos. Estos se obtuvieron por medio de la aplicación y resolución de un problema de razonamiento inductivo que involucraba generalizar una relación entre variables continuas.

3.1. Diseño del instrumento

El problema se diseñó con base en la propiedad genérica de las tareas del razonamiento inductivo: "requerir que el individuo induzca una regla que gobierna un conjunto de elementos" (Glaser & Pellegrino, 1982, p. 200). En éste la regla correspondía a la expresión de una relación funcional que representa la generalización de un patrón de comportamiento cuadrático, esto significa que la variación entre las variables es lineal (Villa, 2008).

El problema consistió en inducir una regla general para determinar la medida del área de cualquier rectángulo de una familia de estos (Figura 1). Para ello, se proporcionó información de tres rectángulos mediante tres puntos en una gráfica cartesiana, cuyas coordenadas representaban las medidas de su base (b) y área (A). La regla general podía inducirse a partir de reconocer el siguiente patrón asociado a las medidas de la base y la altura de los rectángulos: la suma de las medidas de la base y la altura (el semiperímetro) de la familia de rectángulos mide 8 unidades. La expresión algebraica de la regla es de la forma: $A = b(8 - b)$, con $0 < b < 8$.

Problema. En la gráfica se representan las medidas de la base y el área de tres rectángulos de una familia de estos.



A partir de dicha información, genere una expresión algebraica para calcular la medida del área de cualquier rectángulo de esa familia.

Figura 1. Problema planteado para generalizar usando razonamiento inductivo.

3.2. Participantes

El estudio fue conducido con un grupo de 19 profesores de matemáticas en educación básica (secundaria), en escuelas públicas en México. Ellos contaban con conocimientos matemáticos básicos sobre sucesiones y funciones lineales y cuadráticas, debido a su formación profesional en Escuelas Normales o en alguna ingeniería. Asimismo, enseñan esos contenidos como parte del currículo matemático de secundaria.

3.3. Recolección y análisis de datos

El problema fue planteado a los profesores por escrito y lo resolvieron de manera individual con una duración aproximada de 20 a 30 minutos. Las soluciones de los profesores fueron analizadas primeramente, para reconocer a aquellos que alcanzaron a formular una generalización y expresarla de manera verbal o escrita, y se clasificaron formando dos grupos de profesores, según si lograron generalizar (Grupo 1) o no lo lograron (Grupo 2). Para preservar el anonimato de los profesores, en los resultados se hará referencia a ellos con las letras del alfabeto castellano. Posteriormente, se compararon y contrastaron los procesos de solución de estos dos grupos, a fin de identificar las acciones del razonamiento inductivo que estuvieron ausentes en los profesores del Grupo 2, en relación con las del Grupo 1. Esto permitió identificar dificultades en su razonamiento inductivo para generalizar, las cuales se exponen a continuación.

4. Dificultades para generalizar razonando inductivamente

Todos los profesores iniciaron el proceso de razonamiento para la solución del problema mediante la obtención y organización de casos particulares. Esto se realizó interpretando las coordenadas de los puntos en la gráfica cartesiana dada. Así, los profesores obtuvieron los valores 3, 4 y 6 unidades, como medida de la base (b) de tres rectángulos y los valores 15, 16 y 12 unidades cuadradas, respectivamente, como medida de su área (A). Después, determinaron los valores de las alturas (h), utilizando la fórmula para calcular la medida del área de rectángulos: $A = b \times h$. Dichos valores constituyeron los casos particulares observados, y se organizaron en tablas o en columnas de datos. Sin embargo, solamente el 16% de los profesores

(3/19) pasaron del trabajo con casos particulares a la obtención de una regla general.

Las dificultades para razonar inductivamente en quienes no alcanzaron generalizar se situaron en el paso de la observación de una regularidad a la formulación de una generalización, especialmente en el establecimiento de un patrón. Se identificaron las dificultades siguientes:

a. Dificultad para reconocer numéricamente una regularidad global

La búsqueda de regularidades para establecer un patrón se centró en el trabajo aritmético entre cantidades y el uso de una estrategia recursiva de cálculo de diferencias, pero se presentaron dificultades para observar una regularidad que englobe varios casos particulares.

Los profesores que reconocieron un patrón y generalizaron adecuadamente, se basaron en la observación de regularidades numéricas de manera global. Ellos establecieron una relación aditiva entre los pares de valores (medidas de la base y la altura) obtenidos de la gráfica y compararon los resultados de la adición de esas medidas globalmente. Así observaron que la suma es igual al valor 8 en todos los casos, independientemente de la variación en los valores de b y h, como puede verse en la solución del profesor A (Figura 2).

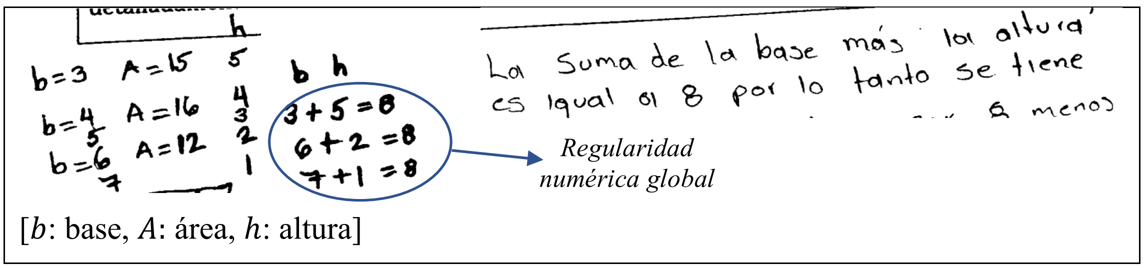


Figura 2. Regularidad global observada por el profesor A (Grupo 1).

Por el contrario, los profesores que solamente observan una regularidad localmente, no logran transitar hacia una generalización correcta, pues su razonamiento no trasciende a la observación de una regularidad global, es decir, que relacione y agrupe los casos particulares. Por ejemplo, el profesor D identifica una regularidad geométrica y numérica en los casos particulares. Geométricamente, la regularidad observada es que los puntos de la gráfica son simétricos respecto a un eje vertical. Considera que los puntos corresponden a la gráfica de una parábola vertical y determina puntos simétricos, $(5,3)$ a $(3,5)$ y $(2,6)$ a $(6,2)$, respecto al eje focal de la parábola (Figura 3). Numéricamente, observa que los valores de la base y la altura de algunos rectángulos son los mismos, pero intercambiados, y así obtiene otros casos particulares tales como: $(7,1)$ y $(1,7)$.

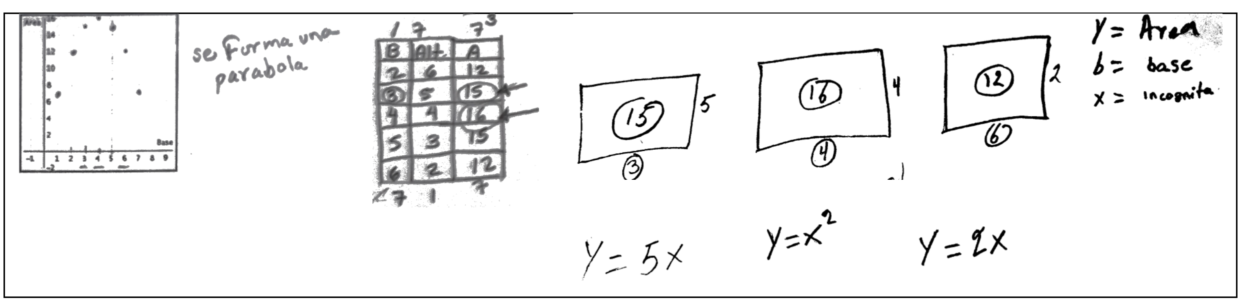


Figura 3. Solución del profesor D (Grupo 2).

No obstante, el razonamiento del profesor se caracterizó por un análisis puntual de los casos particulares, sin mostrar un análisis de qué y cómo se relacionan los pares de valores entre cada caso. Si bien determinó expresiones para la medida del área, éstas eran distintas y no correspondían a la familia de rectángulos en general, sino a cada uno en específico, tal como la ecuación $y = 5x$ para el rectángulo que mide 3 unidades de base y 15 unidades cuadradas de área. Esta dificultad para observar una regularidad global que relacione distintos casos particulares obstaculiza poder establecer un patrón para generalizar inductivamente.

b. Dificultad para asociar una regularidad observada con una estructura matemática

Los profesores que llegan a establecer un patrón son quienes logran asociar una estructura matemática a las regularidades observadas. La dificultad en este proceso consistió en determinar alguna relación matemática entre las variables del problema.

En el caso de los profesores que sí establecieron un patrón, lo hicieron a partir de asociar y representar con una relación aditiva a la regularidad numérica observada entre las medidas de la base y la altura de los rectángulos, y establecer una relación de igualdad entre lo variable (base y altura) y lo constante (el semiperímetro de la familia de rectángulos). Por ejemplo, el profesor A expresó el patrón verbalmente como sigue: "*la suma de la base más la altura es igual a 8*" (Figura 2), mientras que el profesor B (Grupo 1) lo expresó tanto verbal como simbólicamente (Figura 4).

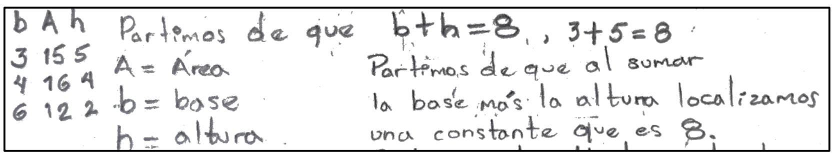


Figura 4. Expresión del patrón mediante una relación aditiva por el profesor B (Grupo 1).

Sin embargo, quienes no logran reconocer una relación matemática que conecte los casos particulares, no alcanzan a establecer el patrón. Esto es porque no identifican una relación que asocie lo variable con lo constante en la situación del problema. Tal fue el caso del profesor F (Grupo 2), por citar un ejemplo. Él trabajó con las medidas de la base (b) y el área de cada rectángulo por separado (Figura 5). Su atención estuvo en la forma de calcular la medida de la altura de los rectángulos, estableciendo una expresión lineal ($y = mx$) para la medida del área de cada uno, pero no identificó alguna relación entre las medidas de los distintos rectángulos para generar una fórmula general con la cual determinar el área de todos los rectángulos de la familia. En otras palabras, no mostró un análisis sistemático que le permitiera relacionar e interconectar las variables del problema en los distintos casos particulares por él considerados.

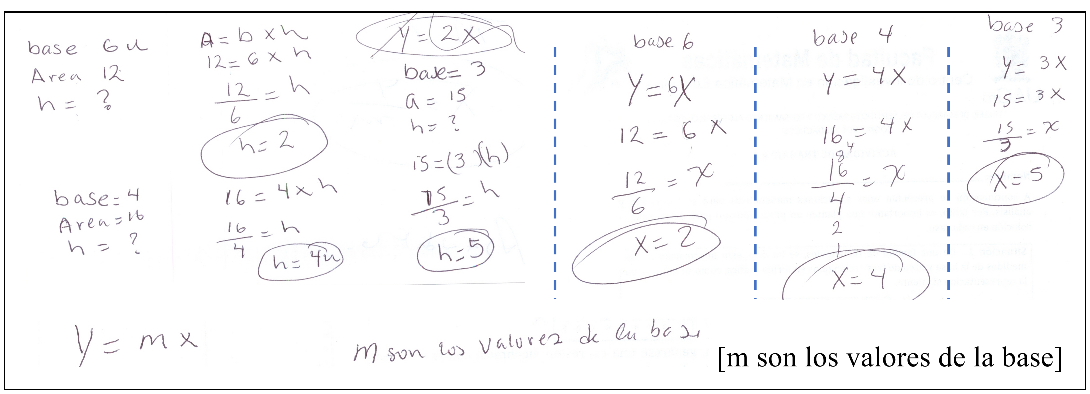


Figura 5. Solución del profesor F (Grupo 2).

Asimismo, se detectó que si la relación establecida entre las variables del problema queda imprecisa, entonces tampoco se llega a establecer un patrón adecuado. Por ejemplo, el profesor E plantea una relación entre los valores de b y h que expresa como sigue "*La b y h varían inversamente. Si la b aumenta una unidad, la h disminuye una unidad*" (Figura 6), pero resulta ambigua debido a que no establece con precisión la relación de dependencia entre tales variables.

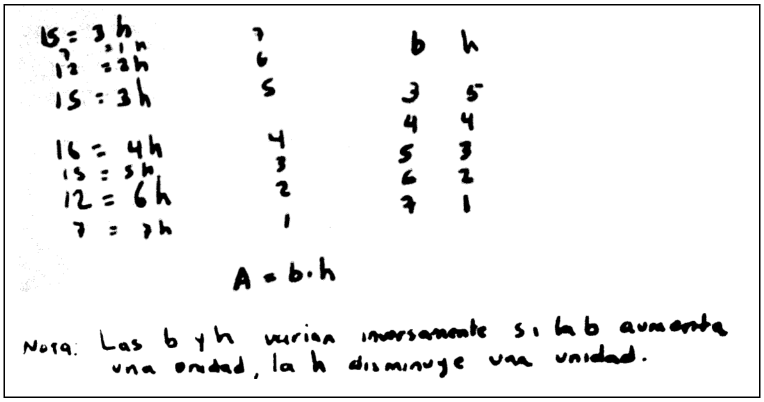


Figura 6. Relación entre los valores de b y h establecida por el profesor E (Grupo 2).

El razonamiento de quienes dieron una solución incompleta o no formularon una regla general para determinar la medida del área de los rectángulos, se caracterizó por no lograr establecer un patrón en los datos. La dificultad para establecerlo se atribuye a la imposibilidad de reconocer relaciones funcionales entre las variables implicadas en el problema. Adicionalmente, se plantea hipotéticamente que tal dificultad también podría ser relativa a la naturaleza covariacional de esas variables. Esto es, a la existencia de una dificultad específica en los profesores para determinar relaciones entre variables continuas que varían simultáneamente.

c. Dificultad para abstraer lo general en lo particular

Una dificultad en los profesores para culminar su proceso inductivo fue abstraer lo general en lo particular. Es decir, descontextualizar o aislar el patrón de la particularidad de los casos analizados y extenderlo a un conjunto que englobe una totalidad de casos, incluso no conocidos.

Los profesores que pasaron del establecimiento de un patrón a la formulación de una generalización evidenciaron la abstracción de relaciones invariantes en las tareas. Por ejemplo, abstrajeron que al variar las medidas de la base y la altura de los rectángulos, la medida de su semiperímetro permanece constante (Figura 7). Asimismo, infirieron que para calcular la medida de la altura de cualquier rectángulo, debían restar 8 unidades a la medida correspondiente a su base. De este modo generaron una regla general para determinar la medida del área de la familia de rectángulos, la cual expresaron como: $A = b(8 - b)$.

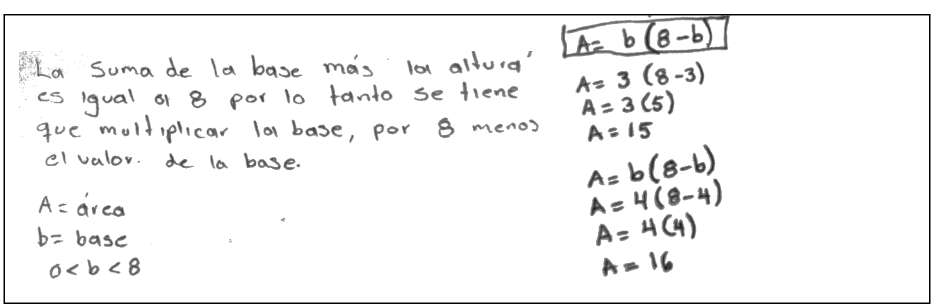


Figura 7. Expresión de la generalización en la solución del profesor A (Grupo 1)

La dificultad para abstraer una relación matemática que relacione y englobe los casos en una clase general, fue centrarse en la particularidad de cada caso de forma separada, tal como puede notarse en la solución del profesor D (Figura 3). Si bien relacionó uno a uno cada par de medidas de la base y el área de los tres rectángulos con su área y, por ensayo y error, le asoció una expresión algebraica, ésta fue distinta para cada rectángulo. No consiguió abstraer las relaciones invariantes entre los datos ni una forma general para determinar la medida del área de cualquier rectángulo de la familia.

Se infiere en este estudio que, ambas dificultades referidas en los apartados anteriores imposibilitan la formulación de una generalización, ya que dificultan abstraer lo general en lo particular.

5. Conclusiones

Una de las tareas importantes de los profesores de educación secundaria es promover el razonamiento inductivo en sus estudiantes. Sin embargo, el diseño y la conducción de actividades para llevar a cabo con éxito esta tarea, puede verse obstaculizada si los profesores carecen de competencias para resolver problemas mediante procesos inductivos. Bajo este supuesto, el propósito de este estudio fue identificar aquellas dificultades ligadas a la producción de generalizaciones de manera inductiva por parte de profesores de secundaria en servicio.

Los resultados muestran que la mayoría de los profesores no logró pasar de la observación de regularidades a la formulación de una regla general, y esto se debió a un conjunto de dificultades que radican esencialmente en el proceso de establecer un patrón de comportamiento cuadrático, particularmente de variables continuas. Si bien se había detectado mayor dificultad en generalizar comportamientos cuadráticos que lineales en estudiantes (Ebersbach & Wilkening, 2007) y profesores en formación (Manfreda et al. 2012), en este estudio se concluye que dichas dificultades en los profesores se hallan por un lado, en la falta de asociación de las regularidades observadas en casos particulares de una situación, con una relación matemática que las describa; y por otro, en la complejidad para abstraer lo general en lo particular, debido a que no se logra reconocer la característica invariante en todos los casos analizados y aquello que norma su comportamiento.

La observación puntual o aislada de lo que se repite en un conjunto de casos particulares resultó insuficiente para que los profesores pudieran establecer el patrón, pues este proceso inductivo requiere del establecimiento de relaciones numéricas entre datos que varían por medio de estructuras matemáticas. Por tanto, se hace necesario que los profesores dispongan de conocimientos para interpretar y representar relaciones entre variables; en especial, para construir la expresión de relaciones funcionales cuadráticas con base en datos numéricos. Esto sugiere que, en experiencias de aprendizaje profesional docente, se favorezca el desarrollo de procesos inductivos para pasar de lo particular a lo general, así como conocimientos basados en el estudio de relaciones matemáticas.

Referencias y bibliografía

Cañadas, M., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137–151.

Canadas, M. C., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67–78. https://doi.org/10.1227/01.NEU.0000032542.40308.65

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2010). El Razonamiento Inductivo como Generador de Conocimiento Matemático. *UNO*, *54*, 55–67. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction*, *17*(1), 55–66. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.11.009

Ebersbach, M., & Wilkening, F. (2007). Children's intuitive mathematics: The development of knowledge about nonlinear growth. *Child Development, 78*(1), 296-308.

Frolov, I. (1984). *Diccionario de filosofía.* Moscú: Editorial Progreso.

Glaser, R. & Pellegrino, J. (1982). Improving the skills of learning. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *How and how much can intelligence be increased* (pp. 197-212). Norwood, NJ: Ablex

Haverty, L., Koedinger, K., Klahr, D., & Alibali, M. (2000). Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. *Cognitive Science*, *24*(2), 249–298.

Klauer, K. (1996). Teaching inductive reasoning: some theory and three experimental studies. *Learning and Instruction*, *6*(1), 37–57. https://doi.org/10.1016/0959-4752(95)00015-1

Manfreda, V., Slapar, M. & Hodnik, T. (2012). Comparison of competences in inductive reasoning between primary teachers students and mathematics teacher students. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels.* Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego

Mousa, M. (2017). The influence of inductive reasoning thinking skill on enhancing performance. *International Humanities Studies, 4*(3), 37-48.

Murawska, J. M., & Zollman, A. (2015). Taking it to the next level: Students using inductive reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *20*(7), 416–422.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Pineda, O. (2009). Inducción y deducción como origen de la ciencia. *Konvergencias: Filosofía y culturas en diálogo, 21,* 122-133.

Poincaré, H. (1948). *Science and Method*. New York: Dover Publications.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Sosa, L. y Cabañas, M. G. (2017). Analytical framework to study inductive reasoning in mathematical teachers while solving task. En Galindo, E. and Newton, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1415-1418). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Sriraman, B., & Adrian, H. (2004). The Pedagogical Value and the Interdisciplinary Nature of Inductive Processes in Forming Generalizations: Reflections from the Classroom The University of Montana. *Interchange*, *35*(4), 407–422

Villa, A. (2008). El concepto de función: Una mirada desde las matemáticas escolares. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21*, 245-254. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C.