XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Comprensión del concepto de independencia lineal: una perspectiva de las estructuras y mecanismos mentales de estudiantes universitarios de primer año

Silvia Juliana **Ballesteros** Gualdrón
Universidad Industrial de Santander
Colombia
julianaballesterosg@hotmail.com
Solange **Roa** Fuentes
Universidad de Industrial de Santander; Grupo de Investigación EDUMAT-UIS
Colombia
sroa@matematicas.uis.edu.co
Darly Kú Euán
Universidad Autónoma de Zacatecas
México
Ku.darly@gmail.com

Resumen

Se presenta la primera Fase de una investigación que busca diseñar una descomposición genética validada del concepto de independencia lineal que parta de la aplicación de *acciones* sobre objetos concretos (numéricos y geométricos) para la construcción de objetos abstractos (definiciones formales o esquemas) con estudiantes de primer año de universidad. La investigación se fundamenta en la teoría APOE (Arnon et al., 2014); dicha teoría explica cómo los individuos construyen los conceptos y nociones matemáticas. En este caso se toma la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos para lograr Objetos abstractos. En álgebra lineal las representaciones geométricas son interpretadas como Objetos concretos, que un individuo puede transformar de manera física o mental. Los antecedentes que se proponen en el documento muestran la importancia de potenciar la construcción de relaciones entre diferentes interpretaciones de los Objetos matemáticos (Roa-Fuentes y Parraguez, 2017), para promover la comprensión en los estudiantes.

Palabras clave: Didáctica del álgebra, Objetos concretos, Objetos abstractos, teoría APOE, Independencia lineal.

Introducción

El primer encuentro de estudiantes universitarios con matemáticas abstractas se desarrolla en el curso de Álgebra Lineal (Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996); allí los objetos de trabajo son principalmente vectores, elementos de un Espacio Vectorial ($\mathbb{R}^n$, $M_{m\times n}$, polinomios, entre otros). Actualmente en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se desarrollan 32 grupos dirigidos por 23 profesores, que acompañan un aproximado de 1032 estudiantes. Desde la Matemática Educativa se ha planteado cómo las diversas representaciones de los objetos matemáticos aportan en su comprensión. Por ejemplo, una transformación lineal admite una interpretación funcional ($f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$), una matricial ($M_{2\times 2}$) y una geométrica ($\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$) como resultado de la transformación de un vector o una región del plano. Por tanto, se propone que es fundamental analizar cómo los estudiantes de Álgebra Lineal I de la Universidad Industrial de Santander pueden transitar entre las diferentes interpretaciones de un objeto matemático para comprenderlo. Para esto se propone el diseño de un modelo cognitivo, *descomposición genética*, del concepto de independencia lineal que señale las principales estructuras, mecanismos y sus relaciones a partir de las diferentes interpretaciones que son presentadas en un curso básico de álgebra lineal. A continuación, se exponen los antecedentes de la investigación que permiten ubicar en el panorama de la didáctica de las matemáticas el problema presentado, también los principales elementos de la teoría APOE y el método que guía el desarrollo de esta investigación.

Antecedentes

Los principales hallazgos publicados en Carlson, Johnson, Lay y Porter (1993) y Zazkis et al. (1996) muestran un primer acercamiento para contribuir a una mejora en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, donde cada uno de ellos con sus particulares posturas buscan definir los objetos concretos que un estudiante del curso de álgebra lineal puede considerar, para a partir de ello construir objetos abstractos.

Más adelante en 2017, Harel habla acerca de los objetos concretos y los objetos abstractos que se presentan en álgebra lineal. Los objetos concretos se entienden como objetos con los cuales se pueden manipular u operar; por ejemplo, operaciones entre vectores, solución de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros. Y por objetos abstractos como combinación lineal, dependencia e independencia lineal, transformación lineal, etc. Harel (2017) menciona algunas dificultades que tienen los estudiantes con el paso de lo concreto a lo abstracto, por ejemplo, los estudiantes pueden encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales haciendo uso de un método conocido, pero no comprenden la dependencia e independencia lineal entre vectores.

De otra forma, Parraguez y Bozt (2012) analizan bajo la teoría de los modos de pensamiento, el razonamiento que muestran los estudiantes universitarios a partir de lo práctico a lo teórico al trabajar con los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y la solución de un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; además de las relaciones que se establecen entre dichos conceptos, esto con base a las conexiones que existen entre los objetos concretos y los objetos abstractos. En este caso la autora toma como objetos concretos todo aquello que puede operar, como es en este caso la solución del sistema de ecuaciones para transformar dicha solución en algo abstracto, como es el concepto de independencia lineal.

Por su parte Aydin (2014) analiza la comprensión que desarrollan los estudiantes sobre el concepto de independencia lineal mediante la generación de ejemplos basados en la teoría APOE[1]. Este autor plantea que un estudiante que es capaz de generar un ejemplo, acerca de cuándo un conjunto de vectores es linealmente independiente o no, es porque tiene una imagen conceptual formada de manera consistente. Esta imagen conceptual se asocia a una construcción abstracta del concepto.

De igual forma, una manera de ver los objetos concretos en álgebra lineal se puede relacionar con interpretaciones geométricas de los conceptos. En este sentido la geometría se encuentra como un componente principal, en la enseñanza de los cursos de álgebra lineal. En particular Sierpinska (2000) considera que el álgebra lineal puede ser vista como consecuencia de dos posturas: El rechazo de la entrada de los números en la geometría y desde la Intuición geométrica.

De esta forma, Oropeza y Lezama (2007) desarrollan una serie de actividades tomando como base la geometría. En un primer momento de forma exploratoria con el fin de caracterizar con los estudiantes la abstracción del álgebra y los impedimentos que tiene la geometría para su completa visualización.

Se puede encontrar en la literatura autores que hablan acerca de la percepción visual que se encuentra inmersa en la geometría. Según Piaget, la percepción visual es posible para objetos estáticos, pero no para procesos dinámicos. Para visualizar esto último, Piaget menciona que es necesario percibir un conjunto de fenómenos estáticos y razonar sobre ellos para hacer construcciones mentales de procesos dinámicos. Así mismo, Hillel (2000) menciona que los modos algebraicos, geométricos y abstractos coexisten y a veces son intercambiables, pero no son equivalentes. El modo abstracto usa el lenguaje y los conceptos de la teoría (espacio vectorial, subespacio, independencia lineal, tramo, etc.), mientras que el modo algebraico usa el lenguaje y conceptos de la teoría más específica de R^n (n-tuplas, matrices, rango, etc.). Finalmente, el modo geométrico usa el lenguaje y concepto de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (segmento de línea dirigida, puntos, planos, etc.).

Por ejemplo, un vector puede ser representado como una flecha en modo geométrico, como una fila o columna de números o símbolos en modo algebraico, y como un elemento de un espacio vectorial en el modo abstracto.

Por otro lado, autores como Konyalioglu et al., (2011) mencionan que los orígenes del álgebra

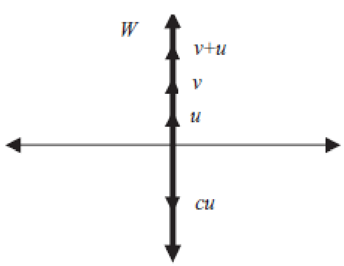
[1] Teoría APOE (acrónimo de Acción-Proceso –Objeto-Esquema)

lineal parten de la geometría, especialmente con representaciones vectoriales; por tanto, enfatiza que en la enseñanza del álgebra lineal deben estar involucradas nociones geométricas, en este sentido proponen el uso de la visualización como un enfoque de enseñanza, en el cual se sustenta que las estructuras geométricas deben estar fuertemente apoyadas por estructuras algebraicas y abstractas.

Por ejemplo, el siguiente problema “Sea W el conjunto de elementos de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $x_1 = 0$ y $x_i \in R$. ¿Es W un subespacio del espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$?” admite en un primer momento una representación geométrica, para caracterizar el problema en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$; luego puede ser interpretado de manera algebraica para generalizar en $\mathbb{R}^n$ y por último puede ser construido de manera abstracta para utilizar el resultado en el concepto de independencia lineal como se muestra en la tabla 1, para la afirmación:

Tabla 1

Interpretación geométrica, algebraica y abstracta.

Geométrica	Algebraica	Abstracta
El subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de vectores de la forma $(0, y)$ como se muestra en la siguiente figura:  	Sea $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementos de W y $c \in R$. Como u y v pertenecen a W se tiene que: $x_1 = 0$ y $y_1 = 0$. Entonces $cu + v = (cx_1 + y_1, cx_2 + y_2, \dots, cx_n + y_n)$ Donde: $cx_1 + y_1 = c0 + 0 = 0$ Luego, $cu + v \in W$. Así W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.	Si W es un subespacio de un espacio vectorial V, y W es un subconjunto de W'. En este caso ¿W' es linealmente dependiente? Cada subespacio de un espacio vectorial debe contener el elemento cero. Si W es un subespacio de un espacio vectorial, W contiene el elemento cero. Entonces, W' contiene el elemento cero. Si uno de los elementos en W' es el elemento cero, entonces el subconjunto W' es linealmente dependiente.

Fuente: Konyalioglu et al., (2011)

La Teoría APOE

En esta sección se revisarán las ideas principales de la teoría APOE (Arnon, et al., 2014), las cuales se utilizarán para el desarrollo de la investigación.

Esta teoría es una interpretación de la teoría constructivista que parte de las ideas de Piaget, el cual estudió acerca del desarrollo del pensamiento lógico de los niños, tomando principalmente la idea de abstracción reflexiva. Este tipo de abstracción se presenta cuando se realiza una reflexión y un razonamiento lógico respecto a un objeto, siendo más adelante formalizado por Dubinsky (1991), enfocándolo hacia un análisis cognitivo de conceptos matemáticos que se desarrollan a nivel universitario para describir las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes pueden desarrollar sobre una noción o concepto matemático, por medio de un ciclo metodológico que se describirá en el siguiente apartado.

En la figura 2 se puede observar que las estructuras mentales son las Acciones, Procesos, Objetos y esquemas y los mecanismos mentales son la interiorización, encapsulación, des encapsulación y coordinación, que se relacionan para la construcción de un nuevo conocimiento.

Como se mencionó anteriormente, la teoría APOE parte de la teoría constructivista, donde se menciona que un nuevo conocimiento se da a partir de conocimientos previamente construidos, de esta forma, un individuo parte de un objeto (conocimiento previamente construido) y si aplica manipulaciones a ese objeto, externas de él, se puede decir que se encuentra en una concepción Acción, si el individuo interioriza dichas manipulaciones, es decir, reflexiona acerca de las Acciones, se encuentra en una concepción Proceso.

También los Procesos se pueden generar a partir de otros Procesos, es decir, mediante la Coordinación de dos Procesos se pueden dar un nuevo Proceso y por último si se aplican Acciones a los Procesos se puede considerar que el individuo se encuentra en una concepción Objeto, de la que mediante el mecanismo de desencapsulación puede volver al Proceso que le dio origen.

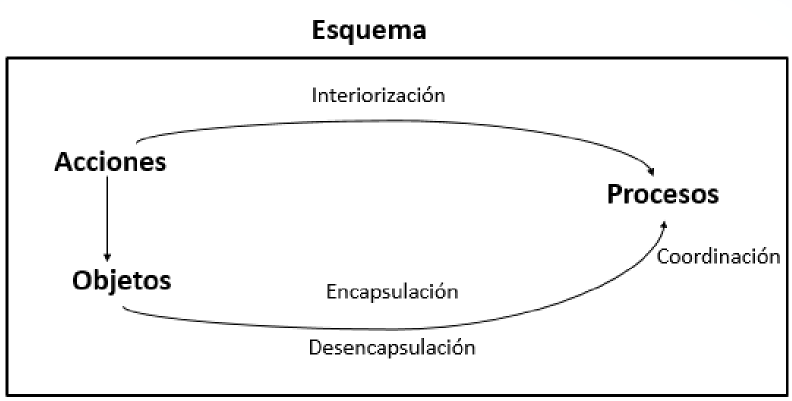


Figura 1. Arnon et. al.,2014, p. 18.

Finalmente, la Descomposición Genética (DG) es un modelo cognitivo que describe las estructuras y mecanismos mentales (descritas anteriormente) que un individuo necesita para construir una noción o un conocimiento matemático.

Método

Esta investigación se sustenta teórica y metodológicamente en la Teoría APOE (acrónimo de Acción-Proceso –Objeto-Esquema) que describe las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes pueden desarrollar sobre una noción o concepto matemático. Esta teoría tiene un ciclo metodológico que se basa en el diseño y desarrollo de tres componentes: 1. Análisis Teórico; 2. Diseño y desarrollo de un modelo de enseñanza; y 3. Observación, recolección y análisis de datos, como se muestra en la siguiente figura:

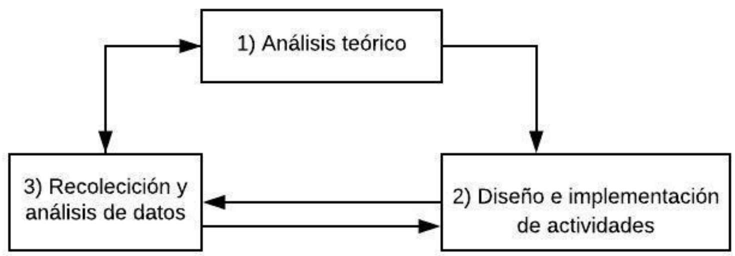


Figura 2. Adaptación (Arnon et. al.,2014, p. 94)

La dirección de las flechas indica que, después de realizar el análisis teórico que tiene como objetivo la construcción o modificación de una descomposición genética preliminar del concepto a trabajar, se realizan las actividades con base en dicha descomposición genética, seguido se empiezan a recolectar y analizar los datos. Cabe resaltar que si los datos encontrados difieren con la descomposición genética preliminar se debe volver a la fase 2 (fase 3 a fase 2) y diseñar e implementar nuevamente las actividades. Sin embargo, si después de realizar esta modificación los resultados vuelven a arrojar resultados diferentes de lo propuesto en la descomposición genética se debe volver a la fase 1 y refinar la descomposición genética propuesta (fase 3 a fase 1) porque puede que las caracterizaciones de las estructuras mentales de los estudiantes no sean acordes, por ende, es un ir y venir entre fases, para lograr la descomposición genética que pueda caracterizar en gran medida las estructuras mentales por las que un estudiante pasa para llegar a la comprensión del concepto a trabajar.

La población de estudio se ubica en la Universidad Industrial de Santander con estudiantes del curso de álgebra lineal I que ofrece la escuela de matemáticas. Esta investigación se divide en seis fases: 1.1 Análisis de exámenes finales de los estudiantes del curso en años anteriores: en base a dichos resultados se realizarán observaciones acerca de lo que los profesores están trabajando en el curso y lo que aparece en el programa de álgebra lineal I en la escuela de matemáticas; 1.2. Análisis de los libros de texto; 1.3. Análisis de descomposiciones genéticas trabajadas que aborden el concepto de independencia lineal; 2.1. Diseño de una descomposición genética con base a los resultados de la fase 1; 2.2. Diseño e implementación de las actividades con base en la descomposición genética de la fase 1; 2. 3. Recolección y análisis de datos.

Reflexiones finales

Actualmente se está realizando la descomposición genética del concepto de independencia lineal con base en los resultados de los exámenes finales anteriores, análisis de los libros de texto y análisis de descomposiciones genéticas anteriores sobre el concepto de independencia lineal.

Los resultados obtenidos en el análisis de los exámenes finales anteriores que se realizó en la fase 1 y unas encuestas realizadas a los profesores que dictan el curso de álgebra lineal, muestran que promedio los profesores dedican 3 horas para trabajar el concepto de independencia lineal y en algunos casos no se dicta el tema.

Con base a lo anterior se evidencia la necesidad de estandarizar los contenidos o modificar la estructura de los cursos entorno a las necesidades de los estudiantes de acuerdo a su carrera de pregrado y los temas centrales del álgebra lineal que se han venido discutiendo en investigaciones de didáctica del álgebra.

Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6. New York: Springer.

Aydin, S. (2014). Using example generation to explore students’ understanding of the concepts of linear dependence/independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(6), 813-826.

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., & Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46.

Dorier, J. L. (Ed.). (2000). *On the teaching of linear algebra* (Vol. 23). Springer Science & Business Media.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior, 46,* 69-95.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. En J.L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear Algebra* (pp. 191-207). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Konyalioglu, A. C., Isik, A., Kaplan, A., Hizarci, S., & Durkaya, M. (2011). Visualization approach in teaching process of linear algebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *15*, 4040-4044.

Oropeza Legorreta, C., & Lezama Andalón, J. (2007). Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *2*(1), 23-39.

Parraguez González, M., & Bozt Ortiz, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *7*(1), 49-72.

Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación universitaria*, *10*(4), 15-32.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Springer, Dordrecht.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D 4. *Journal for research in Mathematics Education*, 435-457.