



Razonamiento Covariacional mediado por GeoGebra en Estudiantes de Quinto Grado de Educación Primaria (11-12 años)

Iván Eduardo **Gálvez** Giraldo
Institución Educativa Juan María Céspedes
Colombia

ivan.galvez@correounivalle.edu.co

Diana Marcela **Tamayo** González
Institución Educativa Juan María Céspedes
Colombia

diana.m.tamayo@correounivalle.edu.co

Resumen

En esta comunicación se presentan los resultados de una investigación que centró la atención en caracterizar el razonamiento covariacional que los estudiantes de un grupo de quinto grado (11-12 años) manifestaron al desarrollar tareas de variación y cambio. Para este estudio, se usó el marco conceptual propuesto por Carlson et al., (2003) y se diseñó una situación dinámica mediada por GeoGebra y contextualizada en apartes de “La vuelta al mundo en 80 días” de Julio Verne, adaptada mediante un cómic. A partir de observaciones directas y del análisis de episodios de la interacción entre estudiantes e investigadores, se constató que la totalidad de estudiantes lograron identificar qué cambia, qué no, y la dirección de cambio, pero no todos dieron cuenta de la cuantificación del cambio de las magnitudes involucradas en el estudio. Estos resultados alimentan la reflexión acerca del desarrollo de razonamiento covariacional desde los primeros grados de escolaridad.

Palabras clave: razonamiento covariacional, variación, covariación, GeoGebra.

Presentación del problema y Justificación

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar han sido y siguen siendo objeto de interés para múltiples investigadores en el campo de la educación matemática. En buena parte esto se debe a la complejidad que distintas investigaciones como las de Kieran (1992), Molina (2007), Socas (2011), Castro (2012), entre otras, han puesto de manifiesto en torno a su enseñanza y aprendizaje. Es así como se encuentran en la literatura reportes que expresan diferentes obstáculos, dificultades y errores encontrados en el aprendizaje del álgebra pese al gran empeño que los maestros suelen colocar en su enseñanza. La toma de conciencia sobre estas y otras situaciones ha generado que un buen número de trabajos hayan intentado explicar el origen de estas problemáticas y buscar alternativas para hacerles frente.

Es así como Kieran (1992), afirma que buena parte de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar están asociadas, entre otras razones, con el significado de las letras y el cambio de convenciones entre la aritmética y el álgebra donde se privilegia lo sintáctico por encima de lo semántico, descuidando con ello sus aspectos conceptuales y su conexión con otras áreas del conocimiento. Tal manipulación mecánica de símbolos en álgebra podría explicar lo encontrado por Doorman y Gravemeijer (citado por Villa & Vahos, 2010), quienes afirman que un gran número de las dificultades que presentan los estudiantes en los cursos de cálculo tienen su génesis en la escasa familiarización con la construcción de modelos, propósitos, convenciones y formas de representación en las situaciones y problemas a resolver.

Este panorama general de investigaciones en didáctica del álgebra se ratifica con la experiencia pedagógica de los autores de la investigación que aquí se reporta. En efecto, el trabajo docente en la Institución Educativa donde se realizó el estudio muestra cómo tradicionalmente el abordaje del álgebra se deja para unos años en particular, por lo general, para grado octavo de la educación básica secundaria (estudiantes que oscilan entre los 13 y 14 años de edad). Lo anterior ha contribuido a la inconexión entre la aritmética y el álgebra, dejando de lado el abordaje de procesos tan importantes como son el estudio de la variación y el cambio, la generalización y la modelación, entre otros aspectos.

En atención a lo anterior, Godino y Font (2003) son claros en indicar que no se trata de implementar el álgebra desde la educación básica primaria pero sí de favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico. Igualmente, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 1998, 2006) proponen el inicio del desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos como un logro para alcanzar desde los primeros grados de escolaridad. Esto es, entre otras cuestiones, una matemática escolar que permita analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones de variación y cambio en diversos contextos, para lo cual la incorporación de las nuevas tecnologías puede jugar un papel relevante. Así, Vasco (2006) afirma que las reinterpretaciones dinámicas de representaciones gráficas y tabulares por medio de pantallas computacionales son una de las maneras como puede desarrollarse el pensamiento variacional. Esto implicaría cambios metodológicos que, a diferencia de estilos tradicionales, permitan una interacción directa de los estudiantes con las herramientas tecnológicas de tal modo que se acerquen, mediante la visualización, al estudio de la variación y el cambio.

Con la intención de analizar el pensamiento variacional de un grupo de estudiantes y, específicamente, cómo enfrentan situaciones de variación y cambio, esta investigación buscó identificar algunos rasgos del razonamiento covariacional en un grupo específico de estudiantes de quinto grado de la educación básica Colombiana, para lo cual se diseñó una situación dinámica en la que interviene el software GeoGebra.

Marco Teórico de Referencia

Para Posada y Obando (2006) el análisis de la covariación debe incluirse en la relación entre multiplicación y proporcionalidad e integrando el estudio de las magnitudes de tal manera que no se produzca una desvinculación entre la proporcionalidad y las funciones. Esto se puede significar mediante la representación tabular visibilizando la relación directa entre la multiplicación y proporcionalidad directa simple, relación que puede ser descrita de diferentes formas como son la verbalización, la comparación de representaciones y el empleo de variables (Confrey y Smith, 2016).

Carlson et al.,(2003) definen el razonamiento covariacional como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra”(p.124). En este referente se tienen en cuenta cinco acciones mentales con sus comportamientos asociados, que a su vez están relacionados con los niveles de desarrollo del razonamiento covariacional, en el cual se requiere de la construcción de imágenes de dos variables, de manera que el estudiante identifique los cambios simultáneos de una con respecto a la otra. Así, en este marco se describen las acciones mentales involucradas cuando sujetos ponen en juego su razonamiento covariacional al estudiar situaciones dinámicas.

Las acciones mentales dentro del marco conceptual de Covariación

Las imágenes de covariación proveen un medio para clasificar los comportamientos de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de covariación. El análisis de este conjunto de acciones mentales y comportamientos permite determinar la habilidad de razonamiento covariacional de un estudiante para una tarea en particular. Para describir las acciones mentales y sus respectivos comportamientos, se presenta la Tabla 1:

Tabla 1

Acciones mentales en la covariación (Carlson, et al., 2003, p.128)

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos asociados
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función.

Conforme a la tabla anterior, un estudiante se encuentra en un nivel determinado cuando sustenta las acciones mentales asociadas a ese nivel, dando cuenta también de las anteriores en el

contexto de la tarea. A partir de la Acción Mental 1 (AM1), donde se identifica de manera verbal lo que está cambiando, las acciones mentales van incrementando su nivel de complejidad hasta llegar a la Acción Mental 5 (AM5).

Niveles de razonamiento covariacional dentro del marco conceptual de Covariación

Para describir la evolución del razonamiento covariacional y clasificar a las acciones mentales que se manifiestan en un estudiante frente a una tarea de carácter covariacional, Carlson et al., (2003) describen cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.

Tabla 2

Niveles de Razonamiento Covariacional (Tomado de Carlson, et al., 2003, p.129)

Niveles del razonamiento Covariacional

Nivel 1 (N1). Coordinación

En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).

Nivel 2 (N2). Dirección

En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.

Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa

En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.

Nivel 4 (N4). Razón promedio

En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.

Nivel 5 (N5). Razón instantánea

En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

De este modo, la evolución de la imagen de covariación sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado. Es así como dentro de una tarea particular, si el razonamiento empleado por un estudiante se clasifica en el nivel 4 (N4), está en la capacidad de razonar en dicha acción mental, en conjunto con los razonamientos de la AM1 a la AM3. Por consiguiente, el estudiante está en la capacidad de coordinar la razón de cambio promedio de una función con los cambios uniformes en los valores de entrada de la variable, lo que implica, haber identificado lo que cambia y cómo cambios en una variable producen cambios en otra, la relación en las

direcciones de cambio de las variables y además cuantificar los cambio de una variable con respecto a la otra.

Diseño metodológico de la investigación

El trabajo de investigación se inscribió dentro del enfoque de investigación cualitativo de tipo descriptivo – interpretativo (Louis, & Lawrence, 1990). La situación que se diseñó fue implementada con 15 estudiantes con edades entre 11 y 12 años de una institución educativa de carácter público del municipio de Tuluá, Valle del Cauca, Colombia, con un análisis basado tanto en las respuestas ofrecidas por los estudiantes al resolver cada una de las tareas propuestas en la situación, como en los diálogos ofrecidos por ellos al justificar sus actuaciones a partir de las intervenciones realizadas por los investigadores (grabadas en video); se procedió a revisar los datos recogidos tomando como unidades de análisis los niveles de razonamiento covariacional, fruto del marco conceptual adoptado para este estudio.

El diseño de la situación se hizo a partir de cinco tareas dispuestas en cuatro archivos de GeoGebra, en las cuales se estudiaba de manera dinámica la distancia y el tiempo, la primera como variable dependiente de la segunda. Cada una de las tareas, a excepción de la primera, ponían en juego las primeras cuatro acciones mentales descritas por Carlson et al.,(2003), todas contextualizadas en apartes del libro “La vuelta al mundo en 80 días” de Julio Verne. En su orden, las tareas desarrolladas por los estudiantes fueron: *Tarea 1. Comprendiendo la situación* (Figura 1), con la que se buscaba contextualizar a los estudiantes mediante un cómic en la narrativa dispuesta en los apartes del libro en mención, haciendo énfasis en una persecución en elefante llevada a cabo en Bombay por el detective Fix a Phileas Fogg; *Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes* (Figura 2), en donde se indagó sobre qué magnitudes cambiaban cuando se recreaba en GeoGebra la persecución en elefante, lo que pone en juego AM1; *Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes*, con el propósito de identificar la dirección de cambio de las magnitudes estudiadas en la persecución, propio de AM2; *Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables*, apareciendo por primera vez en registros tabulares valores numéricos para las distancias recorridas y para el tiempo, favoreciendo así la identificación de patrones de covariación entre ambas cantidades, comportamiento propio de AM3. Finalmente la *Tarea 5. Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes*, se puso en juego la coordinación de la razón de cambio promedio entre la distancia recorrida por los personajes con incrementos uniformes en el tiempo, lo que corresponde con acciones asociadas a AM4.



Figura 1. Fragmento del Cómic: Contextualización Tarea 1 (Adaptación propia)



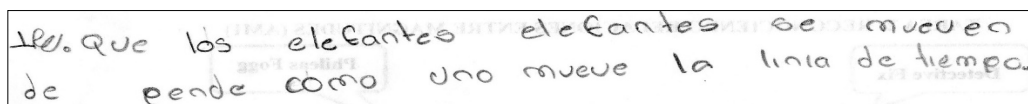
Figura 2. Fragmento Tarea 2: Reconociendo relaciones entre magnitudes

Análisis de resultados

Las respuestas ofrecidas por los estudiantes (E1, E2,...E15) a las preguntas de cada tarea se clasificaron conforme a qué tan lejos o cerca se encontraban de las respuestas esperadas en el contexto de cada acción mental del referente conceptual adoptado, lo cual, a su vez, permitía identificar el nivel de razonamiento covariacional puesto en juego al responder a ellas.

Las producciones de los estudiantes en la Tarea 1, dejó notar que todos comprendieron la situación narrada mediante el cómic, especialmente, que se trataba de una persecución entre dos personajes: el detective Fix a Phileas Fogg, y cuál fue el propósito que dio origen a tal evento.

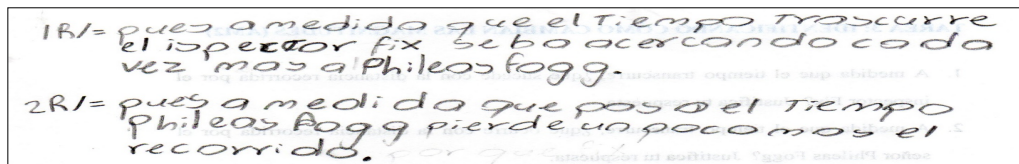
A partir de las respuestas dadas en la Tarea 2 (en la cual se evaluó la AM1), se constató que el 80% (12) de los estudiantes lograron identificar que en la medida en que cambia el tiempo (representado por el deslizador) la posición de los personajes cambia. Esto se hace evidente en sus producciones escritas, tal como se ilustra a modo de ejemplo en la Figura 3.



1R/ que los elefantes se mueven de pende como uno mueve la linea de tiempo.

Figura 3. Respuesta de uno de los estudiantes al ítem 2 de la Tarea 2 (¿Qué está variando o cambiando en la situación?)

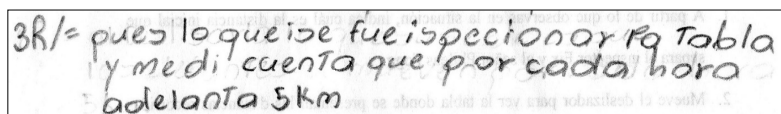
En la Tarea 3 (que evaluaba la AM2), 12 estudiantes (80%) centraron su atención en la disminución de la distancia que separa los personajes (Fix y Phileas Fogg) a medida que transcurre el tiempo, lo cual se interpreta como la identificación de una correlación inversa entre estas magnitudes. Además de esto, los estudiantes identificaban que a medida que el tiempo aumentaba también lo hacían las distancias recorridas de cada personaje (ver Figura 4).



1R/ = pues a medida que el tiempo transcurre el inspector fix se va acercando cada vez mas a Phileas fogg.
2R/ = pues a medida que pasa el tiempo Phileas fogg pierde un poco mas el recorrido.

Figura 4. Ejemplo de respuestas ofrecida por un estudiante a los ítems 1 y 2 de la Tarea 3

A partir de las producciones realizadas por los estudiantes en la Tarea 4 (que se indagaba por la AM3), se indagó sobre cómo ellos daban cuenta de la cuantificación de los cambios de las cantidades presentes en la persecución y de la forma cómo covariaban dichas cantidades. En las producciones de los estudiantes se observaron que fácilmente 2 de ellos (13.3%) manifestaron que mientras el tiempo cambia de 1 hora en 1 hora las distancias cambian de 5 km en 5 km para el inspector Fix (Figura 5), y de 4 km en 4 km para el señor Phileas Fogg, es decir, reconocieron que cambios en la magnitud *tiempo* determinan cambios simétricos en la *distancia recorrida* por los personajes. Los demás estudiantes también reconocieron esto, pero no de manera inmediata.



3R/ = pues lo que ise fue inspeccionar la tabla y me di cuenta que por cada hora adelanta 5km

Figura 5. Respuesta de un estudiante al ítem 3 de la Tarea 4

Obsérvese cómo estos dos estudiantes establecen la razón entre las distancias recorridas y el tiempo, identificando en el primer caso la razón *5 kilómetros / 1 hora*, y para el segundo caso la razón *4 kilómetros / 1 hora*. De ahí que estos 2 estudiantes logran identificar la covariación que se presenta entre las cantidades de ambas magnitudes (tiempo y distancia recorrida).

Finalmente, en la Tarea 5 (AM4) ante solicitudes como: *“Describe la relación que hay entre la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg para cada hora transcurrida”* cuya intención fue indagar sobre el comportamiento de la velocidad que tuvo el señor Phileas Fogg durante toda su huida, se logró apreciar que 3 estudiantes identificaron que las distancias recorridas por el personaje son distintas para cada unidad de tiempo y parecieron tener una noción intuitiva de la velocidad cuando asociaron los cambios de las distancias recorridas a elementos como el cansancio o la energía de los elefantes, tal como se muestra a manera de ejemplo en la Figura 6.

IR/= al principio en la distancia 1 recorre 7km en la distancia 2 recorre 5km en la distancia 3 3km en la distancia 4 6km y en la distancia 5 4km lo que quiere decir que al principio no estaba cansado pero poco a poco el cansancio iba cayendo sobre el pero a partir de la 4ª comenzo a recuperar energía y siguió su camino.

Figura 6. Producción de un estudiante al ítem 1 de la Tarea 5 (Describe la relación que hay entre la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg para cada hora transcurrida)

Conclusiones

Las producciones escritas y verbalizaciones de los estudiantes dejaron ver la emergencia de características relacionadas con el razonamiento covariacional enmarcado en esta propuesta (Figuras 6). Si bien, conforme al marco conceptual adoptado (Carlson et al., 2003) los estudiantes de esta investigación no dieron cuenta de un nivel 4 de razonamiento covariacional (Razón de Cambio Promedio), se pudo constatar que todos pasaron por N1 y N2 de este razonamiento, sustentados por AM1 y AM2, esto es, la coordinación del valor y dirección de cambio de una magnitud con los cambios en la otra. Asimismo, 9 estudiantes presentaron características asociadas a N3, sustentadas por AM1, AM2 y AM3, siendo esta última la coordinación de la cantidad de cambio de una magnitud con los cambios en la otra magnitud. De estos 9 estudiantes, 2 tuvieron un acercamiento intuitivo a la velocidad por medio de la comparación de las 2 magnitudes que aparecían en escena, pero sin llevar a cabo la coordinación de la razón de cambio promedio de la distancia recorrida (magnitud de salida) con los incrementos uniformes del tiempo (magnitud de entrada), es decir, sin una verdadera construcción de esta nueva magnitud (la velocidad). Este hecho sugiere que la construcción de la razón de cambio como una nueva magnitud independiente de las que la generan, es asunto complejo y que requiere tiempo.

La vinculación entre el deslizador y la generación de las tablas (Tarea 4) permitió a los estudiantes la identificación de patrones y relacionar la simulación con la representación tabular (tiempo y distancia recorrida) para cada uno de los personajes (Figura 5). Ese asunto aportó al reconocimiento de la variación de las magnitudes en todos los estudiantes y, en algunos casos, la forma en cómo dichas magnitudes covariaban. Por tal razón, la representación tabular posibilitó el reconocimiento de la variación de cada una de las magnitudes y en algunos casos de la

covariación dada entre ellas. En este sentido pudo verificarse lo que propone el MEN (2006) cuando reconoce la importancia de usar tablas y gráficas como formas de acercamiento temprano al desarrollo de pensamiento variacional.

La incorporación del cómic en la contextualización de la situación junto a las interacciones con los archivos de GeoGebra propició una actitud receptiva en los estudiantes hacia la implementación de las tareas, facilitándose la indagación en las características del razonamiento covariacional. Esta articulación de la literatura, las matemáticas, la tecnología e incluso las ciencias al intentar abordarse la construcción intuitiva de la velocidad, contribuyó a un acercamiento al desarrollo de este razonamiento en los estudiantes.

Referencias y bibliografía

- Aké, L. P. (2014). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros de formación*. Universidad de Granada.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. Revista EMA, 8(2), 121-156.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.
- Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema*, 26(46), 483-511.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419. New York: Macmillan
- Louis, C. y Lawrence, M. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, La muralla.
- Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores P. Bolea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII*, 53-69. SEIEM. La Laguna.
- Posada, F. y Obando, G. (2006). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico*. pp. 79-107.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.
- Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. In C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*. (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Verne, J. y Dios, M. F. (1999). *La vuelta al mundo en 80 días* (Vol. 2). Edaf.
- Villa-Ochoa, J. A. y Vahos, M. R. (2010). *Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales*. *Educação matemática pesquisa*, 12(3), 514-528.