Análisis sobre situaciones de enseñanza del Teorema de Pitágoras entre universidad y escuela

Noemí **Pizarro** Contreras
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile
noemi.pizarro@umce.cl
Gabriela **Nuñez** Contardo
Colegio Alemán del Verbo Divino.
Chile
gabrielanunezcontardo@gmail.com
Guillermo **Arancibia** Canales
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile
guillermo.arancibia@umce.cl
Tomas **Cruces**
Escuela Ronda de San Miguel
Tomas.cruces@live.com

Resumen

Mediante una reflexión y acción conjunta entre profesores y formadores de profesores emerge la necesidad de desarrollar conocimiento profesional para la enseñanza del Teorema de Pitágoras, conocimiento desconocido para el equipo, que es tanto objeto y sujeto de investigación. En esta comunicación mostramos un breve análisis de dos episodios vinculados a la primera clase, correspondiente al trabajo con Ternas Pitagóricas. Observamos la débil formación e investigación sobre la enseñanza del Teorema de Pitágoras, el escaso de material didáctico para representar triángulos rectángulos y la importancia de la relación entre el pensamiento matemático y el pensamiento geométrico.

Palabras clave: Conocimiento profesional, práctica, enseñanza, Teorema de Pitágoras.

Introducción

Comúnmente, los formadores de profesores no se relacionan con la escuela, y a la vez, los profesores de escuela, no se relacionan con la academia, situación que conlleva un paralelismo contante entre ambos trabajos que, en la práctica, deberían estar interrelacionados (Zeichner, 2010). A raíz de esto, surge el proyecto “Investigación entre universidad y escuela: Un análisis sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática por medio de reflexión conjunta sobre la práctica”, donde se espera que profesores de aula y formadores de profesores investiguen en conjunto sobre problemas en la enseñanza de la matemática.

Dentro de este contexto, un docente que trabaja en el último grado de primaria (13 años) sostiene lo complejo que es para él enseñar el Teorema de Pitágoras, explicando que siempre lo ha enseñado de acuerdo a la secuencia: muestra de la relación de catetos e hipotenusa, demostración, ejercicios y problemas. Estrategia que no ha dado resultados. Desde la academia, sólo se tiene experiencia en su demostración, pero no en cómo tratar el contenido con estudiantes de 13 años.

Para poder realizar las clases indagamos en la literatura en educación matemática y observamos que la mayoría de las propuestas de enseñanza o análisis comparativos sobre ellas, se centran en demostraciones, dejando de lado el pensamiento matemático y el trabajo docente.

Por ello, dicho saber es idóneo observarlo desde la complejidad de la práctica, que ha sido estudiada por múltiples investigadores, quienes coinciden que para la enseñanza es necesario que los profesores posean y empleen una amplia variedad de conocimientos y habilidades que pueden ser perfeccionadas con el tiempo (Darling-Hammond y Bransford, 2005, entre otros).

A raíz de lo anterior nos preguntamos ¿Qué conocimiento debe tener un profesor de matemáticas para enseñar el Teorema de Pitágoras? ¿Qué recursos podrían ser idóneos para el trabajo en aula? ¿Qué dificultades pueden emerger por parte de los estudiantes y del saber? ¿Qué habilidades matemáticas se desarrollan en su tratamiento?

Planteamiento del Problema

El proyecto, que plantea hacer co-docencia entre formadores de profesores y profesores provocó una situación compleja y didácticamente interesante: el problema de cómo enseñar el Teorema de Pitágoras. El docente de aula planteó no tener formación al respecto y de no tener actividades, ni en los libros de texto ni en los programas de estudio que lo orientaran a no reproducir la fórmula y las ternas pitagóricas. Los formadores de profesores, conocíamos diversas demostraciones, pero no nos habíamos planteado cómo llegar a esa demostración haciendo partícipes a los estudiantes.

La primera pregunta que, en conjunto, nos hicimos, fue ¿Por qué y para qué tenemos que enseñar el Teorema de Pitágoras? ¿cómo realizamos una clase que no caiga en el esquema tradicional de definición-ejemplo y ejercicio? Estas fueron las primeras preguntas durante la planificación para la práctica, que encuentran respuesta en el desarrollo del objetivo de investigación: analizar la práctica de enseñanza del Teorema de Pitágoras de acuerdo a una propuesta de trabajo diseñada entre universidad y escuela.

De esta forma, la investigación que se presenta posee espacios de planificación, ejecución y reflexión que posibilitan significar y resignificar los procesos de enseñanza y aprendizaje considerando el conocimiento especializado para la enseñanza de la matemática y su desarrollo.

Fundamentos Teóricos

El Teorema de Pitágoras es la relación más recordada de las épocas escolares (González, 2008). En él, se establece conexiones importantes y naturales entre el álgebra y la geometría. Es espacialmente apropiado para realizar modelamiento matemático y no hay manera de "descubrirlo" sin una clara conducción del profesor (Varas, Cubillos & Jimenez, 2008).

Por lo que observa en los distintos agentes de enseñanza sobre él (Gurrola y Jáuregui, 2008; Barreto, 2009; entre otros), el Teorema de Pitágoras se ha reducido a su muestra, demostración y aplicación, sin considerar conjeturas y validaciones que propicien un trabajo matemático en el aula para el desarrollo del pensamiento inductivo.

Es necesario mencionar que se han realizado esfuerzos por descubrir el Teorema de Pitágoras, sin embargo, este descubrimiento es sólo el resultado de una "actividad de indagación, sin aclarar que se obtiene apenas una conjetura, que no tiene la validez de un teorema, aumenta la confusión acerca de lo que es un teorema, una demostración y una certeza en matemática; sobre lo que es la matemática, su estructura interna y su racionalidad (Varas et al, 2008, p.126)

A raíz de lo anterior, se considera indispensable desarrollar la argumentación y demostración al tratar el Teorema de Pitágoras en la escuela, dado que su tratamiento debe responder a un trabajo intelectual lejano a la deducción lógica, por ello es un ícono de la Geometría racional en la Escuela Pitagórica y es, además, la base de una multitud de teoremas geométricos (González, 2008)

La práctica docente

Shulman (1986) sostiene la importancia del conocimiento docente para una práctica efectiva, dando un giro en las investigaciones sobre la enseñanza, que se centraban, principalmente en el comportamiento de los estudiantes, los tiempos utilizados en la clase o las planificaciones de las mismas. Por ello, el análisis del proceso de las prácticas de la enseñanza revela el conocimiento docente, porque éste debe ponerse en juego en un escenario complejo e impredecible, dando el paso a la constitución de ejes que permiten realizar reflexiones sobre el quehacer docente en un caso particular.

Desde la década de los 80, varios autores (Schön, 1992; Shulman, 1986, 1987; Darling-Hammond y Bransford, 2005, entre otros) han concluido que reflexión y práctica son conceptos indisolubles, estrechamente relacionados y mutuamente exigidos, de cuya evolución emerge el desarrollo profesional. Por ello, en los últimos años las investigaciones centradas en la práctica de la enseñanza de la matemática han aumentado, transformando a docentes y su quehacer en un elemento fundamental para comprender los procesos de enseñanza para el aprendizaje, lo que ha traído como consecuencia que los profesores y su enseñanza han pasado a ser un elemento central (Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, 2005; Sfard, 2005; English y Kirshner, 2016).

La premisa que guía este estudio considera que el profesorado reflexiona sobre su práctica por medio de un análisis que involucre crítica, redescubrimiento y modificación de los referentes y creencias que la sustentan, así de esta manera desarrolla herramientas para construir su profesionalismo sobre su conocimiento para enseñar, y por lo demás, su propio aprendizaje.

Conocimiento especializado del profesorado de matemática

Para analizar la enseñanza, consideramos como referente al Conocimiento especializado para el profesor de matemática (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, MTSK) propuesto Carrillo, Climent, Contreras, Escudero-Ávila., Flores-Medrano, Montes (2014). Este marco comprende el conocimiento del contenido del profesor desde la contribución de Shulman (1986, 1987) y el Mathematical Knowledge for Teaching desarrollado por Ball y su equipo (2008). En este marco teórico se distinguen dos componentes: una referida al conocimiento de la matemática, MK (Mathematical Knowledge), y otra relativa al conocimiento didáctico para enseñar, el PCK. (Pedagogical Content Knowledge). El MTSK además de ser una propuesta teórica para modelar el conocimiento del profesor de matemática, es una herramienta metodológica, con la cual es posible analizar la práctica.

Las componentes se dividen a la vez en seis dominios, que serán a la vez, las dimensiones de análisis de los datos de este estudio. A continuación, se explica cada uno de los seis dominios del MTSK, los tres primeros son referentes al MK y los tres últimos al PCK (Flores, Escudero y Aguilar, 2001, Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013). En cada uno de ellos nos referiremos al contexto de la enseñanza del Teorema de Pitágoras:

El Conocimiento de los Temas (Knowledge of Topics, KoT): este dominio analiza o modela qué y cómo el profesor de matemáticas conoce los temas que va a enseñar, supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. En este subdominio, por ejemplo, el docente debe ser capaz de comprender la relación entre los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo o diferenciar el Teorema de Pitágoras y su recíproco

Conocimiento de la estructura de la matemática (Knowledge of the Structure of Mathematic, KSM): Es el conocimiento de las relaciones que el profesor realiza entre distintos contenidos. Estos contenidos pueden ser del curso que está tratando o bien de otros cursos y niveles, la idea es que realice conexiones entre temas matemáticos. El desarrollo del Teorema de Pitágoras involucra trabajo geométrico y algebraico, relacionando composiciones de figuras; descomposiciones y composiciones de áreas, resolución de ecuación y cálculo de raíces.

Conocimiento de la práctica matemática (Knowledge of the Practice of Mathematics, KPM): Este dominio considera que es importante el conocimiento de los resultados matemáticos, pero que es fundamental conocer las formas de proceder para llegar a ellos y las características del trabajo matemático. El KPM es quizás la dimensión más compleja en el tratamiento del Teorema de Pitágoras, dado que en el aula se considera por demostración una actividad de indagación.

El Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Features of Learning Mathematics KFLM): Este dominio se enfoca en el contenido matemático como objeto de aprendizaje, por ello se evita mirar al estudiante en sí, dado que la idea es observar las características del proceso de comprensión del estudiante sobre el contenido, que derivan de su interacción con el mismo. En nuestro caso, un conflicto es que los estudiantes no están acostumbrados a desarrollar conjeturas o a trabajar en equipo en miras a la resolución de un problema.

Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (Knowledge of Mathematics Teaching, KMT): el KMT tiene como foco la enseñanza. En este dominio incluye el conocimiento de los recursos, materiales, formas de presentar el contenido, el uso de ejemplos adecuados tanto en el contenido, como en el contexto y la intención. Esta subdimensión es la más importante dentro del estudio. ¿cómo presentamos el Teorema de Pitágoras? Si observamos la historia de la matemática, podríamos partir por el recíproco del Teorema de Pitágoras, dado que diversas culturas lo utilizaron para realizar construcciones. ¿Qué demostración incentivaremos en el aula?

6. Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards, KMLS): se refiere al conocimiento curricular del maestro. Es el conocimiento que el profesor tiene sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueven en determinados momentos educativos.

Por otro lado, el papel de las creencias del docente es central dado que engloba a los seis subdominios anteriores.

Metodología

Como se puede observar, las características del estudio exigen que sea un estudio de caso de corte cualitativo y descriptivo de la investigación-acción docente. Para González- Lloret (2012) lo que distingue a la investigación-acción cualitativa es su claro objetivo de cambiar y mejorar la práctica o la situación que se está estudiando y no solo su descripción o interpretación. Los datos se recogen tanto de las reflexiones individuales y colectivas de los docentes y formadores de docentes, como de las prácticas de aula por medio de video tape, dado que las evidencias de prácticas de aula son indispensables en la formación docente

En la investigación participan cuatro docentes, dos de ellos docentes de aula de escuelas diferentes y dos formadores de profesores, los cuatro son sujetos y objetos de investigación. Se realizan cuatro clases para el último curso de primaria (octavo año, 13 años aproximadamente) de la Escuela Ronda de San Miguel sobre el Teorema de Pitágoras.

Para realizar la investigación, se consideran tres instancias de investigación: sobre la práctica, en la práctica y para la práctica. Killion & Todnem (1991), considerando los primeros trabajos de Shön, distinguen estos tres momentos de reflexión; las dos primeras son de índole reactiva, la reflexión en la práctica se lleva a cabo durante el trabajo de aula; la reflexión sobre la práctica se realiza después de un hecho puntual. La reflexión para la práctica es el resultado de las dos anteriores y a la vez, el antecedente de las dos anteriores, dado que componen un ciclo de investigación y acción.

Análisis de resultados

Durante la actividad, se presentaron diversos episodios de análisis que nos permiten detectar factores que indicen en la enseñanza del Teorema de Pitágoras, lo que conlleva, construcción del conocimiento del profesor de matemática. Por cuestiones de espacio, en esta comunicación sólo presentaremos dos episodios correspondientes a la primera clase. A continuación, se muestran diálogos entre estudiantes (E); profesores (P) y Formadores de Profesores (FP)

Episodio 1:

Durante la reflexión para la práctica, el profesor del curso y dos académicos se reúnen para planificar la primera clase:

1.a Primera reunión

FP1: *Tenemos que pensar en el desarrollo de buenas demostraciones*

P1: *Pero antes de eso hay que hacer un buen inicio, algo que no sea artificial. No quiero hacer lo mismo de siempre, porque los estudiantes no aprenden*.

FP1: *Creo que antes de todo, tenemos que preguntarnos ¿Por qué enseñamos el Teorema de Pitágoras?*

FP: *Es un Teorema importante… fundamental.*

P: *No tendría aún respuesta para ello.*

FP2: *Busquemos información, y posterior a ello, a partir del porqué de la enseñanza, busquemos información*.

1.b Segunda reunión

FP2: *He encontrado cuatro razones por qué enseñar el Teorema.*

- *Es fundamental para comprender, geométricamente, es decir, más allá de la percepción visual cuando dos planos son perpendiculares. Distintas culturas lo han trabajado para ello. En este caso, deberíamos considerar el recíproco del teorema.*
- *Relaciona dos magnitudes: longitud y área de superficie.*
- *Gracias a él, podemos localizar los números irracionales.*

- *Por otro lado, es un Teorema pilar de muchos otros teoremas, sobre todo para tercero medio, miren "es la base de multitud de teoremas geométricos, de los estudios sobre polígonos y poliedros, de la Geometría Analítica y de la Trigonometría –la fórmula* $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1$ *es un caso particular del Teorema de Pitágoras y el Teorema del coseno es una generalización del mismo–. La relación pitagórica* $x^2 + y^2 = z^2$ *es la ecuación de la circunferencia y la raíz histórica del Análisis indeterminado de Diofanto y Fermat. El Teorema de Pitágoras también pudo ser el germen de la dramática aparición pitagórica de la inconmensurabilidad de gran trascendencia en la estructuración y sistematización platónico-euclídea de la Geometría griega" (González, 2008, p.103)*

P1: *Otra razón es para observar la diferencia entre la diferencia entre distancia y trayectoria, relacionándolo con la física (relación con Física)*
FP1: *Bueno quizás después encontremos más. ¿Cómo partimos?*
FP2: *Con el contexto histórico.*
P1: *¿Con el recíproco?*
FP2: *No… con el Teorema. Directamente, contextualicemos en paredes perpendiculares. A partir de la perpendicularidad, podrían construir triángulos rectángulos, para que posteriormente, a partir del recíproco, ciertas ternas nos aseguren que las paredes están derechas. El recíproco podría ser parte del cierre de la clase*
FP1: *¿Y pretendes que los chicos descubran las ternas?*
P1: *Claro… es la idea*
FP1: *Imposible… demósle una, el 3-4-5 en el inicio, por lo menos, sino, estaremos toda la clase con el tanteo*.
FP2: *es que no sería tanteo, sería trabajo con material concreto, composición de figuras.*
FP1: *¿Y cómo harías eso?*
FP2: *¡No sé!*
P1: *Busquemos material*
1.c Tercera reunión
PF2*: No sé cómo hacer que los estudiantes construyan triángulos rectángulos (explica en contexto)*
P2: *Tráeme lana, lo haremos como los egipcios. Yo creo que no sería problema que los estudiantes descubran las ternas. Si no lo hacen, ahí vemos que pasa*.
P1: *Yo haría cuerdas con cuentas (pedazos de madera o plástico para separar cuerdas), Yo las hago*
Posteriormente, fue bastante complejo el trabajo con el material. Los espacios entre las cuerdas no eran congruentes y con el pegamento era compleja su movilidad en las cuentas. Costó encontrar material adecuado para poder realizar la actividad. Finalmente se utilizaron palillos y pelotas para poder realizar la actividad.
En este episodio podemos observar que los profesores y los formadores de profesores no tienen una respuesta automática ante la pregunta ¿por qué enseñamos el Teorema de Pitágoras? (KTM) Por otro lado, se observa que uno de los FP no considera posible que los estudiantes logren encontrar las Ternas Pitagóricas (KFLM), sin embargo, para los otros docentes era imprescindible (KPM). Una vez que se pusieron de acuerdo en la construcción de triángulos para encontrar las ternas no fue posible conseguir material didáctico de segmentos separados por una misma distancia.
Episodio 2:
Durante la reflexión en la práctica, se lleva a cabo la construcción planificada en el episodio 1.

El curso se organiza en grupos de 3 o 4 estudiantes, se entrega, por grupo, un envase que contiene palillos y pelotitas con perforaciones, que permite el encaje con los palillos. Previo al diálogo que continua, la FP2 muestra la representación de un cuadrado utilizando el recurso entregado.
PF2: *¿Ustedes creen que podrían armar un triángulo rectángulo con este material?*
Grupo curso: ¡*Síiiii!*
PF2: *Manos a la obra.*
(A los 4 minutos)
E1: *Aquí está armado uno, tiene lados 3 palitos, 4 palitos y 5 palitos*
PF2: *Muy bien. ¿y has armado otro?*
P2: *Sí, es más se ha dado cuenta de algo.*
E1: *Sí, armé otro que es 6-8 y 10. Son los dobles de las medidas anteriores. Yo creo que, si les saco el triple, igual se arma*.
P2: *Yo quiero que lo pruebe*
E2: *Yo creo que dé más da…*
Posteriormente se validan, en forma colectiva, las distintas construcciones, comentando el episodio anteriormente nombrado
E3: *A mí me dio lo mismo, entonces hay muchas ternas para armar triángulos.*
FP2: *¿podrías representar una que no hayamos realizado?*
E3: *No… para qué, si con la multiplicación del 3, 4 y 5 ya estamos listos.*
FP2: *¿Y eso cómo lo puedes asegurar?*
E3: *porque es una regularidad…*
Varios estudiantes: *Claro, es más que seguro que da*
E4: *¿Guardamos el material entonces?*
En este episodio podemos observar, que, a los cuatro minutos, varios grupos de estudiantes ya habían encontrado la terna 3-4-5 (KPM) por otro lado, la regularidad algebraica fue para ellos tan convincente como el material concreto.

Conclusiones

Antes de conocer al Profesor 1 (P1) ninguno de los otros tres participantes del estudio se había cuestionado sobre cómo enseñar el Teorema de Pitágoras a un grupo de estudiantes de 13 años. Fue interesante observar que, desde nuestras distintas experiencias y formaciones, a pesar que formamos profesores (FP1 y FP2) y coordinamos grupos de profesores (P2), no teníamos una respuesta ante la pregunta ¿Por qué debemos enseñar el Teorema de Pitágoras? Hemos observado que este desconocimiento, es un lugar común, porque hemos preguntado en congresos, reuniones docentes y situaciones informales, y los profesores de matemática tienden a responder que el Teorema se enseña sólo para comprobar perpendicularidades o diferenciar distancias de trayectorias.

A raíz de lo anterior, nos parece necesario que en la formación docente se considere la pregunta ¿Por qué enseñar cierto contenido? (KPM) Gracias a este estudio, ahora podemos formar profesores que sí se realicen esta pregunta y planifiquen clases considerando aquellos porqués como objetivos. Podemos destacar la importancia que universidad y escuela hagan un trabajo conjunto de desarrollo bidireccional, donde el docente de escuela tenga experiencias de investigación como un par, no sólo como un objeto de investigación y que el formador de profesores comprenda los problemas de enseñanza a los que serán enfrentados los futuros profesores que forma.

Por otro lado, observamos que hay pocos recursos de enseñanza para trabajar el Teorema de Pitágoras. Dado que es un contenido que curricularmente (KMLS, KPM, KMLS) está en la frontera de la enseñanza primaria con la secundaria, en los libros para profesores, de primaria o secundaria, si se llega a mencionar, es bastante superfluo, por lo tanto, es indispensable revertir la situación, con actividades como las mencionadas en esta comunicación.

A pesar que uno de nosotros (PF1) se resistía a que los estudiantes encontraran las ternas por sí mismos, gratamente pudimos observar que los estudiantes, a pesar de estar en una clase de matemática a las cinco de la tarde, trabajaron concentrados y entusiastas. A los cuatro minutos ya tenían la terna 3-4-5 y gracias a un pensamiento algebraico, rápidamente lograron obtener más ternas. En variadas ocasiones tendemos a subestimar a los estudiantes, es necesario que comencemos a revertir nuestras prácticas. Sin embargo, es complejo revertirlas sin en el mercado no hay material didáctico de apoyo (KTM) ni en los libros de textos o directrices curriculares actividades para los docentes. Por ello, mientras las editoriales avanzan, es indispensable que la formación de profesores se haga cargo del conocimiento profesional de los docentes con investigaciones como esta.

Bibliografía

Adler, J., Ball, D., Krainer, K, Lin F.L., y Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 359-381.

Barreto, J. (2009). Otras deducciones o extensiones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas 70*, 35-51.

Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, M. Montes (2014), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas,* el MTSK. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva

Darling-Hammond, L., & Bransford, J. (2005). *Preparing Teachers for a changing world. What teachers should learn and be able to do.* San Francisco: Jossey Bass.

English, L. D., & Kirshner, D. (2016). Changing agendas in international research in mathematics education. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (Third, pp. 3–18). New York: Routledge.

Flores, E., Escudero, D. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepay N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275- 282). Bilbao, España: SEIEM.

González, P. *(2008). Un* teorema llamado de Pitágoras*. Sigma Revista de Matemáticas, 32(*8*), 103-130.*

González-Lloret, M. (2012). *Investigación acción (II): la investigación cuantitativa.* Recuperado el 24 de enero de 2017, de: http://cvc.cervantes.es/aula/didactired/anteriores/diciembre_12/17122012. html

Killion, J. &Todnem, G. (1991) A process for personal theory building. *Educational Leadership, 48* (6), pp. 14-16.

Montes, M. A., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. In *Proceedings of the CERME* (Vol. 8).

Schön, D. A. (1992). *La Formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Barcelona: Paidós.

Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relation between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *58(3*), 393–413.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.

Varas, M. L., Cubillos, L. F., & Jiménez, D. (2009). Análisis de la calidad de clases de matemática: teorema de Pitágoras y razonamiento. *Chile, Ministerio de Educación, Departamento de Estudios y Desarrollo (Ed.), Selección de investigaciones primer concurso FONIDE: evidencias para políticas públicas en educación*, 123-153.

Zeichner K (2010) Rethinking the connections between campus courses and field experiences in college- and university-based teacher education. *J. TeacherEduc. 61:* 89-99.