XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Límites de funciones en una variable y principales dificultades conceptuales de estudiantes en formación inicial

Cristian **Quesada** Fernández
Universidad Estatal A Distancia
Costa Rica
cquesadaf@uned.ac.cr
Eric **Padilla** Mora
Universidad Estatal A Distancia
Costa Rica
epadilla@uned.ac.cr

Resumen

Estudios realizados en el contexto de educación presencial, y relacionados con el aprendizaje de la teoría de límites de funciones, señalan que los estudiantes enfrentan diversos obstáculos; sin embargo, hay una carencia de información entorno a esta temática en educación a distancia, en particular con estudiantes de carreras de formación docente. Este trabajo muestra una síntesis de un estudio realizado con el propósito de determinar y analizar las dificultades conceptuales que afrontan los estudiantes, en formación inicial de Enseñanza de la Matemática, en las pruebas escritas de cálculo diferencial en la UNED, Costa Rica. Se realizó una categorización y análisis detallado de las dificultades encontradas y los resultados evidencian dificultades conceptuales así como con el uso incorrecto de simbología matemática. Con este estudio se pretende mejorar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de los contenidos y buscar la mejora en el rendimiento académico de los estudiantes.

Palabras clave: obstáculo, dificultades de aprendizaje, cálculo, educación a distancia, límites de una función.

Introducción

Un tema fundamental en el análisis matemático y cimiento sobre el cual se sostiene toda una estructura que da pie al desarrollo de contenidos como: continuidad, derivación e integración, corresponde a la teoría de límites de funciones. No obstante, el desarrollo y comprensión de dicho concepto, desde sus orígenes, produjo mucha dificultad, tal como lo señala Mira (2016) al indicar que

> El proceso de refinamiento del concepto de límite fue difícil para los científicos de la época dada la profundidad del mismo por su auténtica naturaleza y porque

> requiere una precisión de pensamiento y una percepción del sistema de los números reales que no era fácil de conseguir (p.7).

Por su parte, Blázquez y Ortega (2000) señalan que dicha temática acarrea quizá la mayor cantidad de dificultades en su aprendizaje, las cuales están ligadas propiamente al concepto, el cual para muchos de los estudiantes, según los autores, es “árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender” (p.1).

Los diversos estudios realizados con el fin de analizar las dificultades y errores en torno al tema límites de funciones, generalmente, se han realizado con estudiantes de carreras universitarias no matemáticas y en contextos en los cuales los procesos de enseñanza y de aprendizaje son presenciales, como los de Claros (2010), García (2013), Neira (2013), Pons, Valls y Llinares (2012), Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006), entre otros; y señalan que las dificultades podrían estar relacionadas con obstáculos de origen didáctico, producto de la forma en la cual se enseña, o quizá porque la comprensión de este concepto implica procesos poco utilizados por los estudiantes como: el uso consciente y adecuado de simbolismo, la abstracción, el análisis y en algunos casos la demostración, aunado a los problemas generados con el término límite y su poca relación con los contextos coloquiales, lo cual provoca que cuando el estudiante debe afrontar la solución de situaciones que requieran un mayor manejo conceptual cometa más errores (Selden, Mason y Selden, 1994).

Ahora bien ¿Qué sucede cuando dichos procesos se dan en una educación a distancia? con estudiantes en formación de enseñanza de la Matemática, tal como ocurre en la Universidad Estatal a Distancia (UNED), de Costa Rica, con la asignatura: Cálculo Diferencial.

En dicha asignatura se aborda los temas: límites, continuidad, derivación y aplicaciones de la derivada; se imparte bajo un modelo de educación a distancia, donde se mezclan actividades presenciales con actividades en línea. Como parte de la evaluación, el estudiante debe realizar dos pruebas escritas de manera presencial, así como actividades obligatorias mediante la plataforma de aprendizaje Moodle (pruebas cortas en línea, tareas y un taller de aplicación con software especializado). El estudiante puede asistir a tutorías presenciales no obligatorias, además tiene acceso a un foro de consultas a través del entorno virtual del estudiante.

En los últimos años, la asignatura ha presentado un número elevado de estudiantes que la pierden o la retiran. Por ejemplo en el III cuatrimestre del 2017, perdió 41,9% y se retiró 19,4%, lo cual da una aprobación de 38,7%.

Además, durante el proceso de revisión o calificación de los instrumentos de evaluación se nota que los estudiantes evidencian diversas dificultades, los cuales están relacionados con: conocimientos previos, el uso inapropiado de simbología y con la naturaleza del contenido (obstáculos epistemológicos). Esto condujo al desarrollo de un proceso investigativo cuyo objetivo principal fue analizar las dificultades conceptuales en las que incurren los estudiantes en las pruebas escritas de dicha asignatura y relacionados con el tema: límite de una función en una variable.

Con los resultados obtenidos se pretende contribuir con la toma de decisiones que permitan favorecer los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos, al proponer alternativas para solucionarlos y por ende lograr que los estudiantes puedan comprenderlos y así mejorar el rendimiento académico.

Marco referencial

La teoría relacionada a obstáculos ha sido ampliamente abordada por diversos autores. Brousseau (1983, citado por Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, s.f.) indica:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento. El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto que encuentra con frecuencia. Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente.
- El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica (pp.2-3).

Además, Brousseau identifica tres tipos de obstáculos: ontogénicos, didácticos y epistemológicos. En relación a estos últimos, Bachelard (1976) los define como las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de los individuos para construir su conocimiento. Al respecto, este autor identifica cinco obstáculos principales: los conocimientos previos, el verbal, el peligro de la explicación por la utilidad, el conocimiento general y el animista. Cabe señalar que los epistemológicos se presentan en diversos campos del quehacer matemático; el cálculo no es la excepción. Se muestra a continuación algunas posturas entorno a las dificultades relacionadas con el estudio de límites.

Primero, resulta pertinente destacar que la noción de límite fue abordada por distintas culturas en diversos sitios del planeta. Se tienen registros de civilizaciones egipcias y griegas. El método de exhausión, fue utilizado para calcular longitud de curvas, áreas y volúmenes de figuras geométricas, procesos en los cuales la noción de límite era tácita (Volveras, 2015). Grandes matemáticos como Kepler, Cavalieri y Fermat, entre otros, hicieron grandes aportes al desarrollo del concepto de límite, y por ende al desarrollo del análisis infinitesimal. Entre los más destacados están los aportes de Isaac Newton en el desarrollo de series infinitas, así como el aporte de Leibniz al introducir una notación y terminología más formal la cual permitió una mejor lectura en la resolución de problemas.

Lo anterior pone en manifiesto que históricamente el estudio del concepto de límites ha revertido distintos obstáculos, ligados estrechamente a su concepto y sus representaciones. Se coincide con Volveras (2015) en que tanto el lenguaje matemático, como el contexto y las distintas representaciones tienen una fuerte influencia sobre la concepción del infinito y los razonamientos alrededor de este concepto.

Con el estudio de límites, se hace pertinente que los estudiantes logren determinarlos, reconocerlos tanto de forma gráfica como algebraica, haciendo uso de tablas, representaciones en el plano cartesiano, así como de manera verbal. En todos estos escenarios, es recurrente la aparición de errores por parte de los estudiantes. Cornu (1983, citado por Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein, s.f.) señala algunos obstáculos epistemológicos que afrontan los estudiantes. El primero, relacionado al sentido común de la palabra límite, que induce a concepciones relacionadas a muro o barrera insuperable. Segundo, la sobregeneralización que se hace de las propiedades de procesos finitos a los infinitos. Además, un aspecto ligado a la noción de infinito, que induce a una nueva manera de razonamiento. Finalmente, en esta misma línea, los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

En cuanto a las dificultades que presenta el concepto de límite Tall (s.f., citado por Claros, 2010) señala: dificultades producidas por el lenguaje, la imposibilidad de transformar el cálculo de cualquier límite en una simple operación algebraica o aritmética y la idea de si el límite es alcanzado o no genera dificultades, así como el paso de lo finito a lo infinito tiende a confundir. Por su parte Fernández (2010, citado por La Plata, 2014) señala

- Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.
- Dificultades para reconocer los límites laterales.
- Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.
- Problemas con el uso de diferentes representaciones de las funciones.
- Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario (p.8).

En suma, durante las últimas décadas, el estudio de obstáculos ha sido ampliamente abordado por diversos estudiosos. No obstante, todos ellos hacen mención al modelo de educación presencial tradicional. La bibliografía en torno a esta temática en el modelo a distancia es prácticamente nula, por ello, resulta pertinente el estudio bajo la modalidad a distancia.

En esta línea, se destaca que la asignatura Cálculo Diferencial, atiende al modelo pedagógico de la UNED el cual busca aplicar didácticas flexibles donde el estudiante sea el principal protagonista del proceso de aprendizaje, al respecto se indica que

> debe permitirle, a éste, la libertad de aprovechar al máximo los recursos que se le ofrecen, de planificar el progreso de su aprendizaje y de regular, él mismo, el ritmo y la calidad de sus avances. Esto implica que todos los elementos del modelo pedagógico se piensen para ponerlos a disposición de los estudiantes, de manera que ellos puedan gestionar su propio proceso de formación (UNED, 2005, p.13).

Metodología

El estudio realizado es de carácter descriptivo, y se tomó como referencia los estudiantes de la asignatura cálculo diferencial de la carrera enseñanza de la matemática en la UNED, que aplicaron la primera prueba escrita ordinaria del III cuatrimestre del 2017. La muestra estuvo conformada por 20 estudiantes con la misma cantidad de hombres que mujeres. La edad promedio de la muestra fue de 33 años con una desviación estándar de 7,68 años.

En este estudio se analizaron tres categorías: la dificultad de formalismo simbólico, la dificultad de argumentación y la dificultad conceptual. Por tanto, con el fin de evitar ambigüedades, se procedió a definirlos, lo cual se muestra en la tabla 1:

Tabla 1
Tipo de dificultad y su definición

Dificultad	**Definición**

Conceptual.	Las dificultades conceptuales corresponden a • Aplicar el procedimiento tal como es requerido por el concepto, pero comete errores al ejecutar los pasos necesarios. Por ejemplo, evalúa o realiza el análisis correcto del límite pero los procedimientos empleados son incorrectos. • No justificar de forma clara, en caso de existir, el tipo de indeterminación que se presenta. • Confundir una indeterminación con la forma indefinida. • Interpretar de forma incorrecta expresiones como $\infty-\infty$ y $\frac{0}{0}$, entre otras. • Plantear de forma incorrecta e incompleta las condiciones iniciales de la definición.
De argumentación.	Cuando en el proceso de solución los argumentos empleados no son claros, el razonamiento no conlleva una lógica o la explicación carece de sentido.
En el uso de simbología.	Cuando en el proceso de solución se omite o se emplea de forma incorrecta algún símbolo o expresión matemática.

Fuente: elaboración propia.

Al trabajar con los objetivos relacionados con el cálculo de límites; se consideraron las soluciones dadas a los ejercicios tanto en la parte de respuesta breve como en la de desarrollo. En la tabla 2 se muestra la relación entre objetivo e ítem. En total se analizaron 6 ejercicios.

Tabla 2

Relación objetivo-ítem respecto a los instrumentos

Objetivo	**Ítem en la prueba**
Calcular límites de funciones que presenten indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ o $\infty-\infty$ usando factorización, simplificación o racionalización.	RB (1a) RB (1b)
Aplicar los teoremas básicos de límites en la resolución de ejercicios y problemas.	RB3
Demostrar, usando la definición formal, que $\lim_{x\to a} f(x)=l$ existe.	D1
Aplicar los límites trigonométricos especiales en el cálculo de límites de funciones trigonométricas que producen formas indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$.	RB (1c) D2
Simbología **RB**: corresponde a los ítems de respuesta breve de la prueba escrita. **D**: corresponde a los ítems de desarrollo.	

Fuente: instrumento de evaluación aplicado a estudiantes y diseño curricular de curso.

Análisis y discusión de resultados

Tomando como referencia el objetivo propuesto, para el análisis de los instrumentos, se diseñó lo mostrado en la tabla 3 y posteriormente se procedió a completarla.

Tabla 3

Frecuencia relativa de los ítems analizados respecto a los criterios

Criterio	RB(1a)	RB(1b)	RB(1c)	RB3	D1	D2
1. Hay evidencia que permita asegurar que intentó resolver el ejercicio.	1,00	1,00	0,85	0,80	1,00	0,95
2. Resuelve solo algunos pasos del ejercicio.	0,15	0,05	0,25	0,00	0,30	0,10
3. Se evidencia que tiene claro el procedimiento que debe realizar.	0,65	0,50	0,45	0,25	0,80	0,65
4. Justifica de forma clara, en caso de existir, el tipo de indeterminación generada.	0,35	0,10	0,25	na	na	0,20
5. Resuelve el ejercicio hasta obtener el resultado final.	0,85	0,95	0,30	0,55	0,65	0,50
6. El resultado final es correcto.	0,45	0,35	0,30	0,25	0,60	0,35
7. Utiliza el teorema de intercalación.	na	na	na	0,30	na	na
8. En la solución sus argumentos conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido.	0,85	0,60	0,45	0,65	0,55	0,70
9. Omite o confunde el uso de la simbología correspondiente durante la resolución del ejercicio.	0,50	0,45	0,30	0,25	0,50	0,35
10. Se evidencia una estructura de orden en la solución del ejercicio.	0,80	0,80	0,25	0,45	0,70	0,20
11. Plantea, de forma correcta y completa, las condiciones iniciales de la definición de límite.	na	na	na	na	0,55	na
12. Encuentra el delta y es correcto.	na	na	na	na	0,60	na
13. Prueba que el delta obtenido funciona.	na	na	na	na	0,60	na

Simbología

RB: corresponde a los ítems de respuesta breve en la prueba escrita.

D: corresponde a los ítems de desarrollo en la prueba escita.

na: no aplica.

Fuente: solución brindada por los estudiantes en el instrumento de evaluación. III cuatrimestre 2017.

De acuerdo con los resultados de la tabla anterior se puede inferir que

a) Por lo general, los estudiantes intentan resolver el ejercicio aunque no tengan claro que es lo que deben hacer.

b) En el cálculo de límites, cuando existe alguna indeterminación, los estudiantes no justifican ni brindan argumentos claros que permita concluir que comprenden el tipo de indeterminación que se presenta. Además, de forma mecánica el estudiante realiza algún procedimiento (racionaliza, factoriza, sustituye, etc.) según la forma que tiene el criterio de la función, sin saber si es requerido o no dicho procedimiento.

c) Respeto al cálculo de límites haciendo uso del teorema de intercalación, aunque en el ejercicio se les indicó que era a partir de su uso solo 30% de los estudiantes lo utilizó. Además, no tienen claro el porqué es necesario emplear dicho teorema y su relación con el criterio de la función y el valor al cual tiende la variable, lo cual puede denotar dificultad en la comprensión de la teoría estudiada y su aplicación en la resolución de ejercicios y problemas. En este mismo ítem, algunos estudiantes trataron de calcular límites laterales, cuando esto no se podía aplicar ya que la variable tendía a infinito. Cabe destacar que en la resolución de este ítem se requiere ser muy metódico, ordenado y estructurado, algo que solo el 35% de los estudiantes evidencia, y el 25% tiene una idea clara de lo que debe realizar.

d) En cuanto al cálculo de límites por definición (cálculo de $\delta-\varepsilon$), de los ítems analizados, es el que mejor aprobación tiene, con un 60%; esto hace pensar que se debe a una buena comprensión de la definición formal de límite por parte de los estudiantes, o bien, por preparación para resolver este tipo de preguntas (repetición dado que es un ejercicio que se incluye en la mayoría de las pruebas escritas). No obstante, al contrastar el rendimiento mostrado en este ítem con otros donde se deben calcular límites específicos, se nota poca comprensión del concepto, lo cual inclina la balanza hacia que el estudiante presume que practican con regularidad la resolución de este tipo de problemas.
Además, en este ítem se evidencia la importancia de una estructura de orden, y 90% trabajó de esa manera.

e) Los estudiantes omiten o confunden el uso de la simbología correspondiente, es común que no escriban la expresión $\lim\limits_{x\to a}$ o bien utilizan el igual cuando en realidad lo de que deben emplear es el implica o el sí y solo sí. Algunos ejemplos de lo realizado por los estudiantes se muestra a continuación

▪ $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\sqrt{x^2+3x}-x\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$	Olvida la expresión $\lim\limits_{x\to\infty}$.
▪ $\left\|x^2+3x+1-55\right\|<\varepsilon=\left\|x^2+3x+54\right\|<\varepsilon$	Uso incorrecto del igual.
▪ $-1<\dfrac{senx}{x+2}<1$ $\lim\dfrac{-1}{x+2}<senx<\lim\dfrac{1}{x+2}$	No hay claridad en el procedimiento por falta de la simbología respectiva.

f) En la solución sus argumentos conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido. Ejemplos de lo realizado por estudiantes, en ciertos cálculos, se muestra a continuación

▪ $\lim\limits_{x\to\infty}\infty(0)=\infty$	▪ $\lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{x-x}_{\infty-\infty}=0$
▪ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}}{x+2+\sqrt[3]{x}}=\dfrac{0}{\infty}=0$	▪ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{3}{x}-1\right)}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1}=\dfrac{\infty\cdot 0}{2}=\dfrac{0}{2}=0$

Conclusiones y recomendaciones

El objetivo planteado para este estudio fue alcanzado; fue posible determinar y analizar las principales dificultades conceptuales en que incurren los estudiantes, en formación de Enseñanza de la Matemática, en las pruebas escritas de cálculo diferencial. Los resultados evidencian además de errores de tipo simbólico y algebraico, dificultades relacionadas estrechamente al concepto de límite; al comparar los desarrollos de los estudiantes, parece indicar que ellos aplican la definición de límite de manera mecánica, sin embargo, la misma no es interiorizada o comprendida correctamente, ya que en ejercicios donde deben calcular un límite no se evidencia esta comprensión, dado los errores de argumentación encontrados. Además, se denota dificultades en el uso de teoremas específicos del área.

Se considera importante realizar un estudio en el cual se apliquen técnicas más de corte cualitativo para así analizar otros aspectos relacionados con el accionar de los estudiantes durante el proceso de resolución de los ejercicios. Para ello sería conveniente, con base en los resultados obtenidos en este estudio, focalizar el tipo de dificultar por analizar a profundidad y por tanto seleccionar y adecuar el tipo de ejercicio que se estudiará.

Es oportuno en los cursos iniciales establecer mecanismos para reconocer los errores en que están incurriendo los estudiantes, detectar las posibles causas y se logre crear estrategias de solución a los mismos, de manera que las dificultades presentadas sean subsanadas y no se arrastren a cursos de corte superior. Cabe destacar que el Modelo Pedagógico de la UNED, está centrado en el estudiante al cual le da la libertad de aprovechar al máximo los recursos, de planificar el progreso de su aprendizaje y de regular su ritmo y la calidad de sus avances (UNED, 2005). Por tanto, se visualiza al estudiante como un sujeto activo y participativo, capaz de autorregular y autoevaluar su propio aprendizaje; ante esto, la metodología de las asignaturas debe propiciar que el estudiante sea capaz de construir su propio conocimiento.

Finalmente, es pertinente que los estudiantes puedan conocer los resultados de este tipo de investigaciones con el fin que intenten conocer los tipos de errores más frecuentes y así evitar que se sigan presentado, con ellos se pretende mejorar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos y por ende lograr que los estudiantes puedan comprenderlos y mejorar su rendimiento académico.

Bibliografía y referencias

Batanero, C. Godino, J. Green, R. Holmes, P. Vallecillos, A. (s.f.). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. **Recuperado de www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/erroresestadis.doc**

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). *El concepto de límite en la educación secundaria. En El futuro del cálculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. ISBN: 970-625-246-0. México.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S y Benegas, J. (2006). *Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad*. Recuperado de: **http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000200002**

Claros, F. (2010). Límite Finito de un Sucesión: Fenómeno que organiza. Tesis Doctoral. Recuperado de: **http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/5663/18909772.pdf?sequence=1&isAllowed=y**

García, J. (2013). *La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería*. Recuperado de: **http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44028564002**

La Plata, C. (2014). *Errores entorno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real*. Tesis de maestría. Pontificia Universidad de Perú

Mira, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje*. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Neira, G. (2013). *Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación Matemática*. Recuperado de: **https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4817228**

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). *Características de la tematización del esquema de límite de una función*. Recuperado de: **https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5065976**

Selden, J., Mason, A. y Selden, A. (1994). *Even good calculus students can´t solve non-routine problems* [Incluso los buenos estudiantes de cálculo no pueden resolver problemas no rutinarios]. Recuperado de **https://www.researchgate.net/publication/313667340_Even_good_calculus_students_can%27t_solve_nonroutine_problems**

UNED. (2005). *Modelo Pedagógico*. Recuperado de **https://www.uned.ac.cr/academica/images/igesca/materiales/24.pdf**

Volveras, A. (2015). *Propuesta didáctica para la enseñanza de límites de funciones en el grado de undécimo de la I.E. El Rosario integrando Geogebra*. Trabajo de grado para optar por el título Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia.

Vrancken, S, Gregorini, M, Engler, A, Müller, D y Hecklein, M. (s.f.). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite*. Recuperado de **http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf**