



## **Análisis de la construcción de modelos matemáticos de estudiantes de ingeniería**

Jazmín **Juárez** Ramírez

Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional  
México

[jjuarezr@ipn.mx](mailto:jjuarezr@ipn.mx)

José María **Chamoso** Sánchez

Facultad de Educación, Universidad de Salamanca  
España

[jchamoso@usal.es](mailto:jchamoso@usal.es)

María Teresa **González** Astudillo

Facultad de Educación, Universidad de Salamanca  
España

[maite@usal.es](mailto:maite@usal.es)

### **Resumen**

La modelación permite a los estudiantes aprender las matemáticas de manera aplicada en otras áreas del conocimiento y mejorar su capacidad para formular, solucionar e interpretar situaciones reales. La falta de procesos completos de modelación, así como el escaso tiempo dedicado al análisis, interpretación y validación de soluciones, son algunos de los principales problemas en los cursos de matemáticas superiores. Este trabajo tuvo como objetivo analizar la forma en que los estudiantes de ingeniería construyen modelos de situaciones reales con ecuaciones diferenciales. Los resultados mostraron que los estudiantes no concedieron la misma importancia a todas las etapas del proceso de modelación, y que no consideraron necesario contrastar sus resultados con datos reales, ni explicar otras posibles aplicaciones del modelo. Esto conduce a cuestionar la necesidad de otorgar un papel más importante a la modelación matemática y proponer alternativas para mejorar la práctica docente para la formación de futuros ingenieros.

*Palabras clave:* Ecuación diferencial, educación matemática, educación superior, ingeniería, modelación.

### **Introducción**

Uno de los objetivos más importantes de los cursos universitarios de matemáticas es que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos para aplicarlos en contextos diferentes del cual se aprendieron. Cuando la modelación matemática se presenta mediante problemas

planteados en un contexto del mundo real, fomenta que los estudiantes formulen preguntas sobre el contexto y piensen en la utilidad de sus conocimientos matemáticos (Santos & Reyes, 2011). La modelación propicia que los estudiantes integren las matemáticas en otras áreas del conocimiento, logren una mayor comprensión de los conceptos matemáticos, se interesen por las aplicaciones de las matemáticas, utilicen su creatividad para formular y resolver problemas y aumenten su capacidad para trabajar en grupo (Godino, Batanero, & Font, 2004). A través del aprendizaje de la modelación, los estudiantes pueden comprender cómo se originaron muchos conceptos y estructuras matemáticas, así como sus aplicaciones fuera de las matemáticas (Alsina, 2007).

Al respecto, cabe recordar que uno de los principios rectores para la educación matemática establece que un programa de matemáticas de excelencia requiere una enseñanza eficaz que involucre a los estudiantes en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas que fomenten su habilidad para dar sentido a las ideas y para razonar de una manera matemática (NCTM, 2015). Sin embargo, en algunos de los programas de las asignaturas de matemáticas en educación superior, la práctica de modelación matemática se reduce a las aplicaciones, las cuales no son más que problemas propuestos en los libros de texto. Es decir, el papel que tiene la modelación en los cursos de matemáticas para ingeniería, en la mayoría de los casos, es de carácter teórico y se basa en modelos preestablecidos que los estudiantes resuelven como simples ejercicios. Según Córdoba (2011), el proceso de modelación se enseña en las aulas de manera parcial, evitando confrontar a los alumnos con etapas claves de este proceso. En la literatura sobre modelación matemática, se pueden encontrar distintos ciclos o procesos de modelado, que dependen de diversas orientaciones y enfoques de cómo se entiende el modelado y, además, en algunos casos, si se utilizan tareas complejas.

Todo lo anterior, conduce a considerar la importancia de mostrar en el aula el proceso de modelación matemática con ecuaciones diferenciales no solamente como un ciclo dinámico para entender ciertos problemas o situaciones, sino como una forma de motivar un proceso de aprendizaje, en el cual los estudiantes experimenten las matemáticas como un medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria. Por tanto, se propuso el diseño de una experiencia con estudiantes de ingeniería en un curso de matemáticas, con el propósito de analizar la forma en que los estudiantes desarrollan un modelo matemático a partir de una situación de la vida real. La realización de este trabajo puede justificarse al considerar que la modelación matemática propicia en el estudiante habilidades tales como la integración de la matemática con otras áreas del conocimiento, interés por la matemática frente a su aplicabilidad y estímulo de la creatividad en la formulación y resolución de problemas.

### **Marco teórico**

En algunas investigaciones se han estudiado los problemas que enfrentan los estudiantes al construir el modelo matemático de un fenómeno físico, sus elementos, la interpretación de su solución, su relación con una situación real y las etapas que se deben seguir para construirlos. Algunos estudios han reportado que los estudiantes presentan dificultades para interpretar físicamente los términos de una ecuación diferencial y traducirlos de una descripción física a una descripción matemática (Rowland, 2006, Rowland & Jovanoski, 2004). Estas dificultades pueden atribuirse a la existencia de vínculos débiles entre las matemáticas y los procesos físicos, así como a los típicos problemas a los que están acostumbrados los estudiantes en el aula. Al analizar la forma en que los estudiantes transfieren el conocimiento del uso de las ecuaciones diferenciales para una situación de otra disciplina, se ha encontrado que la mayoría de los

alumnos que resuelven la ecuación diferencial no intentan analizar la solución y, que algunos estudiantes simplemente trazan una gráfica de la solución, sin comentar la evolución futura del sistema que se analiza (Crouch & Haines, 2004; Chaachoua & Saglam, 2006). En ese sentido Klymchuk, Zverkova, Gruenwald y Sauerbier (2008) recomiendan alentar a los estudiantes escribir detalladamente todos los pasos del proceso de modelación, incluso para problemas de aplicaciones simples, ya que esto puede prepararlos para enfrentar problemas de la vida real que requieren habilidades de modelado avanzado en otros cursos y también en su trabajo futuro.

Sin embargo, es importante señalar que a pesar de que al resolver problemas clásicos de modelado los estudiantes realizan diagramas para mejorar la comprensión de la situación y reconocen la importancia de comprender la situación física y entender qué deben calcular, existe una falta de comprensión de las variables y constantes involucradas en el proceso, así como de la relación entre ellas (Soon, Tirtasanjaya, & McInnes, 2011). Algunos estudios mostraron que al desarrollar proyectos centrados en la investigación, la aplicación de conceptos matemáticos, su relación con el tema, y la construcción de los modelos contribuyen de manera importantes a la percepción de los estudiantes sobre la relación entre las matemáticas y la realidad (Jacobini & Wodewotzki, 2006).

Las investigaciones existentes sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática indican que la construcción de modelos en el aula podría cambiar la percepción de los estudiantes sobre las matemáticas. Sin embargo al representar una situación de la vida real con un modelo matemático los estudiantes encuentran dificultades, ya que la mayoría de los cursos de matemáticas se basan en el estudio de técnicas de solución donde predomina el enfoque algorítmico con escasa vinculación real, por tanto, es necesario promover el desarrollo de actividades para que los estudiantes utilicen los diversos enfoques de solución.

## **Metodología**

### **Participantes y contexto**

La experiencia se llevó a cabo durante dos semestres consecutivos del curso escolar 2016/2017, en el desarrollo de la asignatura ecuaciones diferenciales, que se imparte en el primero de los 4 años de la Ingeniería en Sistemas Computacionales (ISC), que ofrece la Escuela Superior de Cómputo (ESCOM-IPN), en la Ciudad de México. En el primer semestre (curso A) participaron en la experiencia 26 estudiantes (8 mujeres, 31%, y 18 hombres, 69%), y en el segundo semestre (curso B), participaron 27 estudiantes (6 mujeres, 22%, y 21 hombres, 78%).

### **Desarrollo de la experiencia**

Los estudiantes realizaron a cabo un proyecto que consistía en construir, resolver y analizar el modelo matemático de una situación real. Para llevar a cabo esta actividad los estudiantes en ambos cursos se organizaron en pequeños grupos de 5 estudiantes y desarrollaron una serie de tareas comunicándose a través de un foro virtual. En el diseño del proyecto se consideraron algunas recomendaciones sobre las ventajas del aprendizaje colaborativo mediado por foros virtuales (Cheng, Paré, Collimore & Joordens, 2011). Las tareas realizadas por cada grupo trabajo fueron las siguientes:

1. Seleccionar del libro de texto del curso (Zill, 2012), un problema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que tuviera una aplicación real.
2. Construir, resolver y analizar el modelo matemático del problema seleccionado.

3. Diseñar una presentación electrónica para exponer su trabajo en el aula.
4. Valorar el trabajo de otro grupo (curso A) y su propio trabajo (curso B) a través del foro virtual, indicando las modificaciones que realizarían en términos del proceso de modelación matemática adaptado del modelo de Camarena (2009), que se estudió en el aula (Tabla 1).

Tabla 1

*Proceso de modelación matemática*

Etapa	Descripción
1. Identificar variables y leyes por aplicar	Determinar las variables responsables del cambio en el sistema y formular un conjunto de premisas del sistema por describir.
2. Plantear ecuación	Escribir la ecuación diferencial correspondiente.
3. Establecer condiciones	Determinar las condiciones del problema.
4. Resolver ecuación	Aplicar los métodos estudiados para obtener la resolución general.
5. Aplicar condiciones	Aplicar las condiciones para determinar la resolución particular.
6. Graficar resolución	Expresar la resolución particular con un gráfico.
7. Contestar pregunta original	Explicar el resultado en el contexto de la situación real.
8. Analizar resultado	Validar el resultado contrastándolo con datos conocidos.
9. Identificar el modelo	Explicar si son posibles otras aplicaciones del sistema.

**Recogida de datos y análisis de la información**

Se tomaron como datos los mensajes de los estudiantes en el foro virtual durante el desarrollo del proyecto. Estos fueron transcritos y se organizaron en unidades de análisis. Se consideró como unidad de análisis (UA) cada idea con significado propio, entendida como una unidad de pensamiento que expresaba una única información, extraída de un segmento de la aportación.

Para determinar la forma en que los estudiantes construyeron un modelo matemático, se analizó el contenido de las aportaciones de los estudiantes en términos del proceso de modelación matemática estudiado en el aula. Se categorizaron en función de los aspectos a los que se referían, tratando de identificar aspectos comunes. Se observó que, en sus aportaciones, los estudiantes mencionaron aspectos relacionados con el proceso de modelación matemática y a otros aspectos que no tenían relación con éste. Posteriormente se elaboró un sistema de categorías para clasificar las aportaciones de los estudiantes en tres partes, según los aspectos relacionados con el diseño, contenido matemático o de otro tipo en cada caso:

- *Diseño*, referido a aspectos relacionados con el diseño de la presentación, a los que aluden como: 1) *Efectos visuales* (colores, efectos, animaciones y recuadros), 2) *Características de texto* (formato de las ecuaciones, estilo de las fuentes y errores en la escritura), y 3) *Presentación* de la diapositiva sin especificar elementos.
- *Contenido matemático*, referido a los aspectos de las etapas del proceso de modelación matemática con ecuaciones diferenciales.
- *Otros*, referido a elementos sin relación con el diseño o el contenido matemático.

Las aportaciones de los estudiantes se asignaron al sistema de categorías, en cada grupo y en cada curso.

## Resultados

La distribución de las unidades de análisis (UA) de las aportaciones en el foro de los estudiantes en cada grupo de trabajo, y en cada uno de los cursos A y B, en función de las categorías del contenido descritas, se organizaron teniendo en cuenta los aspectos que se mencionaron y la frecuencia con que se hizo (Tabla 2 y Tabla 3).

Tabla 2

*Distribución de UA de las aportaciones de los grupos de trabajo en el curso A*

Categorías		Grupos curso A					Total
		G1A	G2A	G3A	G4A	G5A	
Diseño (D)	Efectos visuales	1	2	2	0	1	6(43%)
	Características de texto	0	3	0	2	0	5(36%)
	Presentación	1	2	0	0	0	3(21%)
Total		2	7	2	2	1	14%(100)
Contenido Matemático (C)	Identificar variables y leyes por aplicar	0	0	1	2	0	3(3%)
	Plantear ecuación	1	0	0	1	3	5(6%)
	Establecer condiciones	1	0	0	0	0	1(1%)
	Resolver ecuación	5	9	5	7	3	29(33%)
	Aplicar condiciones	4	2	0	0	0	6(7%)
	Graficar resolución	6	2	3	7	9	27(30%)
	Contestar pregunta original	0	0	1	0	0	1(1%)
	Analizar resultado	0	0	0	0	0	0(0%)
Identificar el modelo	5	0	6	5	1	17(19%)	
Total		22	13	16	22	16	89(100%)
Otros (O)		3	2	10	6	14	35(100%)
Total							138(100%)

Tabla 3

*Distribución de UA de las aportaciones de los grupos de trabajo en el curso B*

Categorías		Grupos curso B					Total
		G1B	G2B	G3B	G4B	G5B	
Diseño (D)	Efectos visuales	0	1	0	14	6	21(68%)
	Características de texto	2	0	0	0	3	5(16%)
	Presentación	0	0	0	3	2	5(16%)
Total		2	2	1	2	17	11
Contenido Matemático (C)	Identificar variables y leyes por aplicar	0	0	0	0	5	5(4%)
	Plantear ecuación	0	3	8	3	4	18(15%)
	Establecer condiciones	0	4	4	5	1	14(12%)
	Resolver ecuación	8	1	2	10	10	31(26%)
	Aplicar condiciones	0	0	0	2	0	2(2%)
	Graficar resolución	10	6	4	0	8	28(24%)
	Contestar pregunta original	0	0	0	1	0	1(1%)
	Analizar resultado	5	1	2	0	0	8(7%)
Identificar el modelo	0	0	3	2	5	10(9%)	
Total		22	23	15	23	23	33
Otros (O)		3	5	7	8	8	10
Total							183(100%)

Se observa que el total de los porcentajes de UA de las aportaciones en el foro virtual de los grupos de trabajo, en los cursos A y B, globalmente, fue similar en las categorías Contenido matemático (C) y Diseño (D) (prueba ji-cuadrado [ $\chi^2(2) = 3.31, p > 0.05$ ]; no se consideró la categoría Otros).

En general se observa que el aspecto que los estudiantes mencionaron en sus aportaciones con mayor frecuencia fue *graficar solución*, y en menor grado *contestar pregunta original*.

Se observa que los estudiantes del curso B, en sus aportaciones en el foro, al revisar su propio trabajo mencionaron más aspectos relacionados con las etapas *Establecer ecuación* y *Establecer condiciones* que los estudiantes del curso A al revisar el trabajo de otro grupo. Por otro lado las aportaciones de los estudiantes del curso B tuvieron en cuenta los elementos relacionados con la etapa *Analizar resultado*, al contrario que los del curso A, que no los mencionaron.

Se compararon las frecuencias de los aspectos mencionados en la categoría Contenido matemático entre los cursos A y B y se observó que existieron diferencias significativas [ $\chi^2(8) = 27.72, p < 0.001$ ]. Esto no sucedió para la categoría Diseño [ $\chi^2(2) = 4.68, p > 0.05$ ]. Es decir la frecuencia de los aspectos mencionados en el foro en relación al proceso de modelación matemática, al evaluar una presentación inicial, estuvo relacionada con la manera en que los estudiantes realizaron la revisión.

### Discusión de resultados

Llama la atención que la mayoría de los estudiantes, en cada grupo, no concediera importancia al hecho de identificar las variables involucradas al construir un modelo matemático, así como las leyes que gobiernan el sistema físico. Estos aspectos, que pueden parecer básicos, pueden evidenciar una dificultad de comprensión, lo que corrobora los resultados de algunas investigaciones (Soon et al., 2011; Klymchuk et al., 2008) cuando analizaron las dificultades que enfrentan los estudiantes al traducir una situación cotidiana en un problema matemático y encontraron una escasa comprensión de los estudiantes al identificar las cantidades variables y constantes del sistema. Por otro lado entre los aspectos que los estudiantes mencionaron con mayor frecuencia se encuentra *graficar solución*, sin embargo, al presentar sus trabajos en el aula solo mostraron las gráficas sin relación con un análisis de comportamiento, en ese sentido los resultados coinciden con los de Chaachoua y Saglam (2006), que encontraron que algunos estudiantes simplemente trazan una gráfica de la solución, sin comentar la evolución futura del sistema que se analiza.

Al exponer sus trabajos en el aula los estudiantes mostraron que eran conscientes de la existencia de una gran variedad de fenómenos que podían representarse con ecuaciones diferenciales. Algunos estudiantes seleccionaron problemas que les resultaban interesantes pero no consideraron que podría resultar complicado abordarlos, quizás porque se situaban en contextos donde los alumnos tenían poca experiencia. En este sentido puede parecer que se asemeja a lo establecido por Jacobini y Wodewotzki (2006) al señalar que, después de trabajar con actividades que impliquen modelado, los estudiantes rompen con la idea de que la matemática es puramente abstracta y encuentran su enfoque práctico en la vida cotidiana.

### Conclusiones

Los aspectos mencionados por los estudiantes de ingeniería en el foro en relación con las etapas del proceso de modelación matemática fueron considerados de diferente manera. Por

ejemplo los estudiantes de ambos cursos hicieron escasa referencia a los aspectos que implicaran la construcción del modelo: *identificar variables y leyes por aplicar, plantear ecuación y establecer condiciones*, a pesar de que fueron tratadas en el aula, al resolver ejemplos de situaciones de la vida real con el proceso de modelación matemática. Sin embargo, los aspectos relacionados con la solución de la ecuación diferencial y su interpretación gráfica fueron los que más se mencionaron.

En referencia al contenido de las aportaciones de los estudiantes de ingeniería en el foro, al valorar una presentación electrónica, varió en función de la manera en que los estudiantes desarrollaron el proyecto de modelación matemática, es decir, en general al valorar su propio trabajo hicieron referencia a aspectos con diferente frecuencia que al valorar el trabajo de otro grupo.

El hecho de que se observen diferencias entre la frecuencia de los aspectos mencionados relacionados con las etapas del proceso de modelación matemática, confirma nuevamente que los estudiantes de ingeniería comprenden de diferente forma estas etapas. Parece ser que para los estudiantes, en general, el proceso de modelación matemática se reduce a la solución algorítmica de una ecuación diferencial como un paso teórico, apartándolas de sus campos de aplicación.

El estudio podría completarse introduciendo un enfoque experimental para analizar la comprensión del proceso de modelación matemática como, por ejemplo, proponiendo a los estudiantes una experiencia determinada que les permitiera tomar datos aunque ello pudiera favorecer la predicción más que la comprensión. Otra posibilidad podría ser considerar un ejemplo concreto para todos los estudiantes como podría ser el que pueden experimentar en otras asignaturas que están cursando en su carrera.

### Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente subvencionado por la Universidad de Salamanca [2017/00111/001 (K118/ 463AC01)]; European Union, Project Erasmus+ [2017-1-ES01-KA203-038491], Ministerio de Economía y Competitividad de España [PSI2015-66802-P], RED8-Educación Matemática y Formación de Profesores [EDU2016-81994-REDT].

### Referencias y bibliografía

- Alsina, C. (2007). Teaching applications and modelling at tertiary level. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 469-474). New York: Springer.
- Camarena, P. (2009). Mathematical models in the context of sciences. En M. Blomhøj & S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 117-131). Denmark: Roskilde University.
- Chaachoua, H., & Saglam, A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications*, 25(1), 15-22.
- Cheng, C. K., Paré, D. E., Collimore, L. M., & Joordens, S. (2011). Assessing the effectiveness of a voluntary online discussion forum on improving students' course performance. *Computers & Education*, 56(1), 253-261.
- Córdoba, J. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México.

- Crouch, R., & Haines, R. (2004). Mathematical modelling: Transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(2), 197-206.
- Falsetti, M., & Rodriguez, M. (2005). A proposal for improving students' mathematical attitude based on mathematical modeling. *Teaching Mathematics and its Applications*, 24(1), 14-28.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2004). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: ReproDigital.
- Jacobini, O. R., & Wodewotzki, M. (2006). Mathematical modelling: A path to political reflection in the mathematics class. *Teaching Mathematics and its Applications*, 25(1), 33-42.
- Klymchuk, S., Zverkova, T., Gruenwald, N., & Sauerbier, G. (2008). Increasing engineering student's awareness to environment through innovative teaching of mathematical modelling. *Teaching Mathematics and its Applications*, 27(3), 123-130.
- NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. México: 3D editorial.
- Rowland, D. R. (2006). Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(5), 553-558.
- Rowland, D. R., & Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(4), 503-516.
- Santos, M., & Reyes, A. (2011). Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(3), 313-336.
- Soon, W., Tirtasanjaya, L., & McInnes, B. (2011). Understanding the difficulties faced by engineering undergraduates in learning mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(8), 1023-1039.
- Zill, D. (2012). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: Cengage.