



## Desarrollo de la modelación por medio de una gestión argumentativa en el aula de matemáticas

Horacio Solar Bezmalinovic

Facultad de Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile

Chile

[hsolar@uc.cl](mailto:hsolar@uc.cl)

María Aravena Díaz

Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule

Chile

[maravena@ucm.cl](mailto:maravena@ucm.cl)

Manuel Goizueta

Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

[manuel.goizueta@pucv.cl](mailto:manuel.goizueta@pucv.cl)

Rodrigo Ulloa Sánchez

Facultad de Educación, Universidad Católica de la Santísima Concepción

[rulloa@ucsc.cl](mailto:rulloa@ucsc.cl)

### Resumen

Si bien existe una línea extensa y nutrida de investigaciones en modelación y argumentación el desarrollo de ambas líneas ha sido de manera independiente. El propósito de esta comunicación es describir una propuesta didáctica para la formación continua de profesores en modelación mediante una gestión argumentativa. El enfoque de la investigación es de corte cualitativo, mediante estudio de casos múltiples, para lo cual se seleccionó un grupo de docentes que realizan clases de matemática en educación primaria y que tenían experiencia en argumentación. Se diseñó una propuesta de formación de profesores basada en la modelación y la argumentación que actualmente está en fase de implementación. Los resultados preliminares muestran que más allá de las dificultades y errores que pueden tener los docentes de primaria para resolver problemas de modelación, los diferentes ciclos de modelación que se aprecian en las producciones son oportunidades para la gestión argumentativa

*Palabras clave:* competencias matemáticas, argumentación, modelación, desarrollo profesional

### Modelación por medio de una gestión argumentativa

Los resultados de los estudiantes en las pruebas estandarizadas internacionales PISA 2012 (OECD, 2013) muestran que los desempeños a nivel sudamericano están muy por debajo del estándar. Tal es el caso de matemática en Chile, donde los estudiantes se encuentran en el

ranking 51, 71 puntos bajo el promedio de la OECD (Agencia de Calidad de la Educación, 2014). Estos resultados indican que un 52% de los estudiantes chilenos de 15 años no tiene las competencias básicas que le permiten usar su conocimiento y habilidades para resolver problemas, así como desarrollar tareas contextualizadas en la vida cotidiana, participando positivamente en la sociedad (Agencia de la Calidad de Educación, 2014). Para enfrentar este tipo de dificultades en matemáticas, varios países han incorporado en sus marcos curriculares una visión desde la alfabetización matemática, entendida como la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos (OECD, 2015). En varios países se ha incorporado el enfoque por competencias en el currículo. En el caso de Chile se han considerado cuatro habilidades matemáticas: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar, y representar (MINEDUC, 2013).

Si bien la perspectiva de competencia matemática considera varios procesos matemáticos (Niss & Højgaard, 2011), creemos que en especial las competencias de argumentación y modelación se relacionan con aspectos esenciales de la actividad matemática de los estudiantes. Respecto a la modelación, algunos autores la sitúan como la base de la actividad matemática, debido a que en las tareas de modelación de situaciones se da más importancia a los procesos cognitivos que a los modelos obtenidos (Blomhøj, 2004). Ello se puede ver en el marco teórico de PISA 2015 (OECD, 2016), donde se describen siete competencias matemáticas según el ciclo de modelación (Borromeo-Ferri, 2006; Maaß, 2006).

Desde el punto de vista de la argumentación, uno de los estándares académicos fundamentales en matemáticas en EEUU (*Common Core Math Practices*) hace referencia a la construcción de argumentos viables y a la evaluación del razonamiento de otros<sup>1</sup>; además, las orientaciones curriculares del National Council of Teachers of Mathematics señalan que una de las prácticas de enseñanza eficaz es el diálogo entre los estudiantes, pues les permite construir una comprensión compartida de las ideas matemáticas a través del análisis y comparación de sus enfoques y argumentos (NCTM, 2014). En efecto, la discusión en el aula de matemáticas permite a los estudiantes compartir ideas, clarificar su comprensión y construir argumentos convincentes respecto del cómo y el por qué las cosas funcionan (NCTM, 2000).

Si bien se puede esperar que promover las competencias de argumentación y modelación en el aula sienta bases para superar las dificultades de los estudiantes en matemáticas, es necesario tener profesores formados para ello. Según el consenso a nivel internacional, se destaca como esencial preparar a los profesores en la formulación de problemas que involucren procesos de modelación, la utilización del lenguaje matemático, la comunicación y argumentación matemática y la capacidad de analizar y construir modelos matemáticos en diferentes contextos (Niss & Højgaard, 2011). Sin embargo, Blomhøj y Carreira (2009) señalan que la formación de profesores para promover la modelación en el aula de matemáticas sigue siendo una cuestión pendiente, tanto para la educación primaria como para secundaria.

En relación con la investigación, aunque existen líneas extensas y nutridas de investigaciones en modelación (Blomhøj 2004; Blum & Borromeo-Ferri, 2009; Maaß, 2006) y en argumentación (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014; Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson, 2007; Krummheuer, 1995, 2007; Rasmussen, Stephan, & Allen, 2004, Solar & Deulofeu, 2016), el desarrollo de ambas líneas ha sido de manera independiente. Es decir, existen escasos estudios que busquen relacionar las competencias de argumentación y modelación (e.g., Dede, 2018), y estos se han realizado en contextos de formación inicial de

---

<sup>1</sup><http://www.corestandards.org/Math/Practice/#CCSS.Math.Practice.MP3>

profesores. No hemos encontrado investigaciones asociadas a la formación continua de profesores con un foco en el desarrollo articulado de la modelación y la argumentación en el aula de matemáticas.

Esta tensión entre desarrollo de competencias y formación de profesores es señalada por Kauertz, Newmann y Hearting (2012), quienes indican que la relación entre el desarrollo de las competencias y la enseñanza es todavía vaga. Según los autores, las evaluaciones no proporcionan información del proceso de desarrollo de las competencias, sino que señalan las metas que deberían haberse logrado, proporcionando información que es útil para el diseño de políticas públicas en educación, pero no para orientar procesos de enseñanza. Para revertir esta situación se requiere de más estudios en profundidad relacionados con el desarrollo de competencias matemáticas, en particular, con el desarrollo de la argumentación y la modelación. El propósito de esta comunicación es describir el diseño de una propuesta de formación continua de profesores que se encuentra actualmente en fase de implementación. En lo que sigue, describimos los principios que están en la base tanto del diseño de la propuesta formativa como de su implementación, y analizamos algunas producciones de profesores participantes para ilustrar algunos de los logros y desafíos de la propuesta.

### **Metodología**

La propuesta de formación que se ha diseñado, la cual exponemos y discutimos en este texto, se inscribe en el contexto de un proyecto de investigación más amplio, que pretende dar cuenta de los aprendizajes de estudiantes en el aula de matemáticas cuando se promueven conjuntamente la argumentación y la modelación. Así, la instancia de desarrollo profesional se diseña e implementa con el fin de que el grupo de docentes participantes en el estudio tenga una base de conocimientos común en el desarrollo de la modelación y argumentación para las clases de matemáticas que serán observadas.

Los participantes del proceso de formación realizan clase de matemáticas en educación primaria (6 a 14 años) y tienen experiencia previa en el desarrollo y/o análisis de la argumentación en el aula de matemáticas, debido a su participación en instancias formativas anteriores. Participan un total de 22 docentes, 13 en Santiago y 9 de Concepción (Chile) y se seleccionó este grupo de manera intencionada, puesto que era conveniente que tuvieran formación previa en relación con procesos argumentativos para así enfrentar los procesos de modelación matemática.

Al momento de enviar esta comunicación, ya se habían realizado 6 sesiones del proceso de formación. En lo que sigue, reportaremos las etapas que se han ejecutado: (1) diseño de una propuesta de trabajo para formación de profesores basada en la modelación y la argumentación; (2) implementación de la propuesta formativa; (3) análisis de resultados preliminares de la implementación. A continuación, se explica en detalle cada una de estas tres etapas

### **Diseño de la propuesta de formación basada en modelación y argumentación**

Para el diseño de la propuesta se realizó un estudio bibliográfico de las componentes teóricas y didácticas para promover las competencias de modelación y argumentación. Se consideraron el ciclo de modelación (Borromeo-Ferri, 2006; Maaß, 2006) y la argumentación colectiva (Conner et al., 2014; Krummheuer, 1995). La propuesta incorpora, además, el modelo Mejoramiento de la Experiencia Docente (MED) (Solar, Ortiz, & Ulloa, 2016), centrado en el análisis de la práctica de formación para el desarrollo profesional de profesores. Este modelo de formación considera cuatro etapas:

La primera etapa hace referencia **al análisis de la práctica de otros**. Los docentes realizan un análisis didáctico y matemático de la modelación. El análisis didáctico se hace a través de episodios de clases en los que se analiza el desarrollo de la modelación, mientras el análisis matemático se realiza por medio de tareas matemáticas de modelación.

La segunda etapa considera el **análisis de la propia práctica**. Los docentes realizan análisis didáctico de la modelación y la argumentación. Analizan la propia práctica mediante ciclos de modelación con el propósito de apropiarse de estrategias adecuadas para promover modelación por medio de la gestión argumentativa en el aula de matemáticas.

En la tercera etapa se aborda **el diseño e implementación** de clases. Los docentes adaptan tareas de modelación a fin de abordar clases para desarrollar la modelación mediante una gestión argumentativa. Estas clases son implementadas y observadas por el equipo de formadores para su posterior análisis y evaluación.

En la cuarta etapa se considera la **reflexión sobre la práctica**. Se evalúa el proceso de estudio y desarrollo de la modelación mediante la gestión argumentativa, valorando tanto el desempeño como la reflexión docente sobre el modelación y argumentación en el aula de matemáticas

En la figura 1 se presenta un esquema que resume el modelo MED, mediante el cual se han trabajado con los docentes las primeras dos etapas.

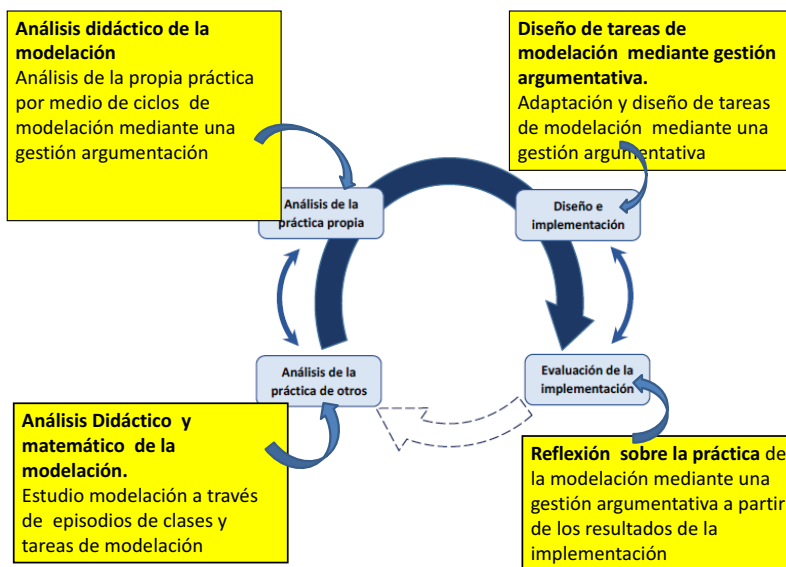


Figura 1. Elaboración propia basada en el Modelo de formación MED

El equipo de investigadores elaboró una secuencia de tareas basada en situaciones de modelación para ser estudiadas con los docentes. El propósito es que reflexionen, mediados por el equipo de investigadores, sobre dichas situaciones para valorar las estrategias y habilidades matemáticas que colocan a prueba en ciclos de modelación (Etapa 1 y 2 del modelo MED) y el conocimiento base para elaborar su propia propuesta didáctica de aula, de acuerdo a su contexto, nivel y objetivos de aprendizaje, para posteriormente gestionar en el aula de matemática dicha secuencia de tareas (Etapa 3 y 4, modelo MED), con sus alumnos de enseñanza primaria. Esto permitirá que, posteriormente, reflexionen sobre la implementación por medio de la evaluación de la gestión argumentativa de la modelación a partir de los resultados de dicha implementación (Etapa 4 Modelo MED).

A modo de ejemplo, en la figura 2 se muestra la secuencia metodológica de la formación de los docentes, con la primera etapa que se ha trabajado, las actividades que dan respuesta a las etapas del modelo y las estrategias metodológicas.

Etapas modelo MED	Actividad	Estrategia Metodológica
<p><b>I. Primera etapa.</b>  <b>Práctica de otros a través de casos.</b>  <b>Análisis didáctico-matemático.</b>                      Análisis de situaciones de modelación e identificación de los procesos argumentativos que colocan a prueba.</p>	<p><b>Análisis matemático y didáctico de los ciclos de modelación.</b>  <b>(1) Análisis de casos.</b> Discusión de problemas para identificar procesos de modelación matemática.                      (1) Análisis didáctico y matemático del proceso de modelación                      • Contrate del proceso seguido con propuestas teóricas de la idea de modelo.                      (2) Analizar los procesos argumentativos que utilizan los docentes en cada uno de los ciclos de modelación matemática.</p>	<p>Se presenta un video de una clase con un caso para reconocer si es un problema de modelación.                      Argumentación colectiva.  <b>Discusión grupal.</b> Oportunidades de aprendizaje sobre procesos matemáticos que son esenciales en la actividad matemática.                      Gestión argumentativa para los procesos de modelación matemática en el aula.</p>

Figura 2. Elaboración propia Secuencia metodológica de la formación docente

### Implementación de la propuesta.

El curso de formación (12 sesiones de 3 horas) comenzó a implementarse en agosto de 2018. En esta primera parte se ha trabajado la primera etapa del modelo de formación MED. Durante el resto del año (octubre-diciembre de 2018) se implementarán el resto de las etapas que se ha descrito (figura 1). Durante el 2019, se seleccionarán entre 7 y 9 docentes de Santiago y Concepción para hacer un seguimiento en sus aulas, el que permitirá analizar cómo aprenden los estudiantes cuando se promueve la argumentación y la modelización de manera articulada. A continuación, se describen las sesiones 1 a 4 correspondientes a la primera etapa.

La metodología de trabajo de las sesiones 1 y 2 consistió en que los docentes, tomando como base su propia experiencia, analizaran de qué manera se desarrollaba la modelación en episodios de clase de distintos cursos de Educación Primaria, para luego contrastar sus análisis por medio de apuntes con criterios sobre modelación en el aula de matemáticas. Ello busca que la apropiación de los temas sea por medio de conflictos cognitivos que evidencian los profesores a raíz del contraste entre sus concepciones y la teoría. En la sesión 3 y 4, en cambio, el foco estuvo en el desarrollo de tareas de modelación realizadas por los docentes para identificar cómo se enfrentan a los procesos de modelado a partir de sus intuiciones, concepciones, conocimientos matemáticos, estrategias para su resolución y etapas del ciclo de modelado que identifican para dar respuesta al problema, tanto en términos matemáticos como en términos de la situación real. A partir de la solución del problema, contrastan sus producciones con el ciclo de modelado de Maaß (2006). Se muestra en la figura 3 una situación trabajada en la etapa II.

**Cuidemos el medio ambiente**  
 En 1896 el científico sueco Svante Arrhenius fue el primero en predecir el efecto invernadero como resultado de las emisiones de dióxido de carbono en el aire por parte de los países industrializados. La quema de combustibles fósiles continúa produciendo 5,4 mil millones de toneladas de carbono al año, las cuales son absorbidas por la atmósfera y por los océanos. En 1990 el Grupo Internacional sobre el Cambio de Clima (GICC) pronosticó que, de continuar la tendencia actual, aumentará la temperatura promedio global de la Tierra.  
 La Tabla 1 muestra los datos del aumento de la temperatura global pronosticada, en grados Celsius.

1980	2000	2020	2040	2060	2080
0,0	0.42	0.84	1.26	1.68	2.10

A partir de la información:

- 1) Determina un modelo de manera que concuerde con los datos.
- 2) Explica el significado de los coeficientes de tu modelo
- 3) Predice la variación de temperatura estimada para los años: 2030 y 2085, respecto a 1980.

Figura 3. Situación de modelado trabajadas por los docentes en Etapa, extraído de (Aravena y Caamaño, 2007)

**Resultados preliminares de la implementación.**

Para mostrar el proceso de apropiación de los docentes en la etapa I del proceso de formación, de las producciones de los docentes en las tareas de modelación se analiza el ciclo de modelación (Maaß, 2006), que incorpora las siguientes etapas: simplificación del problema real para obtener una primera aproximación el modelo, matematización para obtener el modelo matemático, trabajo matemático con el modelo para obtener una solución, interpretación de la solución, justificación de la validez del modelo, y, finalmente, el análisis y proyección del modelo, que requiere ser analizado en todo proceso de modelación matemática (Aravena, 2016).

**Producción 1**

Problema.  
 A partir de la información:

- a) Determina un modelo de manera que concuerde con los datos y representa gráficamente.
- b) Tomando tu expresión general (o modelo) explica el significado de los coeficientes de la función.
- c) Predice la variación de temperatura estimada para los años: 2030 y 2085, respecto a 1980.

Tabla 1

Año	Variación de Temperatura (°C)
1980	0,0
2000	0,42
2020	0,84
2040	1,26
2060	1,68
2080	2,10

$(\text{año} - 1980) \cdot 0,021 = ?$

**Producción 2**

0,021 \$ per año  
 0,21 per década  
 0,42 : 20 = 0,021

$y = mx + b$   
 $0,42 = \frac{0,42 - 0}{2000 - 1980}$   
 $0,42 = 0,021$

Figura 4: Producciones de docentes en la tarea de modelación “Cuidemos el medio ambiente”, Etapa I

Para la tarea “Cuidemos el medio ambiente” en la figura 4 se muestran dos producciones de docentes. En la producción 1 se ha simplificado el problema mediante un gráfico de barras. En cambio, en la producción 2 se ha simplificado mediante un gráfico de líneas. Esto representa dos simplificaciones al modelo, uno discreto (producción 1) y el otro continuo (producción 2) de los datos del problema. En la fase de matematización, en la producción 1 se obtiene una expresión numérica  $(\text{año} - 1980) \cdot 0,021$ , usando “año” como variable y el valor 0.021 como un factor multiplicativo; mientras que en la producción 2 se muestra la ecuación  $y = mx + b$ , donde ‘x’ es el año, ‘y’ es la variación de temperatura, y el valor 0.021 representa la pendiente de



la recta; aunque en la producción 2 no se aprecia la ecuación  $y = 0.021x$ . En ambos casos, el trabajo matemático se centró en obtener la solución al problema de encontrar una expresión matemática de la forma  $T(t)=0.021t$  en que  $t$  es el tiempo y  $T(t)$  es la variación de temperatura. En relación con la validación de los modelos, en la producción 1 el gráfico de barras representa un modelo discreto al problema, en cambio, en la producción 2, si bien el gráfico lineal permite hacer predicciones, no se consideró el año 1980 como tiempo cero, lo que impide que se llegue a la formulación del modelo. En ninguna de las producciones se analiza la proyección de los modelos matemáticos.

Más allá de las dificultades y errores que pueden tener los docentes de primaria para desarrollar problemas de modelación, los diferentes ciclos de modelación que se aprecian en las producciones son oportunidades para la gestión argumentativa. Por ejemplo, en la fase de simplificación del problema se pueden contrastar el gráfico de barras y lineal; y en la fase de validez se puede contrastar las expresiones algebraicas según las condiciones del problema. Este trabajo es promovido por los formadores con los profesores, con el propósito que los docentes puedan experimentar lo que espera que ellos mismos promuevan en clase con sus estudiantes.

### Conclusiones

Se ha presentado una propuesta didáctica para la formación continua de profesores de primaria para fomentar procesos de modelación. Los resultados preliminares se centran en la etapa I del modelo de formación, en la que los docentes se ven enfrentados a tareas de modelación. En las etapas siguientes del modelo de formación, los docentes incorporarán estrategias argumentativas, que ya conocen, para gestionar la modelación en el aula de matemáticas, adaptando y diseñando tareas de modelación para ser implementadas.

Si bien esta comunicación se enmarca en un proyecto más amplio que tiene como propósito caracterizar los aprendizajes de los estudiantes al promover de manera articulada las competencias de argumentación y modelación en el aula de matemáticas, hemos diseñado una propuesta de formación de profesores, ya que para el desarrollo de la modelación mediante una gestión argumentativa no basta con una propuesta didáctica enfocada directamente al aula, sino que se requiere de una propuesta de mayor envergadura, que implica un desarrollo profesional de profesores para luego diseñar una propuesta didáctica conjunta entre profesores e investigadores.

### Referencias y bibliografía

- Agencia de Calidad de Educación (2014). *Informe Nacional Resultados Chile PISA 2012*, Agencia de Calidad de Educación, Chile: Autor.
- Aravena, M. (2016). Modelización Matemática en Chile. En: J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp.195-234). México. Barcelona: Gedisa.
- Aravena D, María, & Caamaño E, Carlos. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 33(2), 7-25. <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052007000200001>
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling—a theory for practice. En B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-160). Göteborg University: National center for mathematics education
- Blomhøj, M., & Carreira, S. (2009). Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. En *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 6-13).

- Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (1), 45-58.
- Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86, 95.
- Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, 86(3), 401–429. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8>
- Dede, A. T. (2018). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825>
- Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3–21. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8>
- Kauertz, A., Neumann, K., & Haerting, H. (2012). Competence in science education. (B.Fraser, K. Tobin, & C. Mc Robbie, Edits.) *Second International Handbook of Science Education*, 711-721
- Krummheuer. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Ed.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), 60–82.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142.
- MINEDUC. (2013). *Bases curriculares chilenas 7º básico a 2º medio*. Santiago: Autor.
- NCTM. (2000): *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: autor.
- NCTM. (2014): *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, Va: autor.
- Niss, M. & Højgaard, T. (2011). (eds.) *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. (English edition). IMFUFA tekst n. 485/2011. Roskilde: Roskilde University.
- OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing. Recuperado el 05 de febrero de 2016 desde <http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>
- OECD. (2015). *PISA 2015 Integrated Design*. OECD Publishing: Paris.
- OECD. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. OECD Publishing: Paris.
- Rasmussen, C., Stephan, M., & Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(3), 301–323.
- Solar, H. & Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema*, 30(56), 1092–1112
- Solar, H., Ortiz, A., & Ulloa, R. (2016). MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. *Estudios Pedagógicos*, 42(4), 281–298. <https://doi.org/10.4067/S0718-07052016000500016>