



## Interpretaciones del método de Descartes en Didáctica del álgebra. Estudio documental<sup>1</sup>

Jhon Helver **Bello** Chávez  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Colombia  
[jhonhelver@gmail.com](mailto:jhonhelver@gmail.com)

### Resumen

Esta comunicación presenta un estudio documental de las interpretaciones del método cartesiano en tres libros sobre enseñanza y aprendizaje del álgebra, su influencia y uso en la comprensión del álgebra escolar.

Se encontraron argumentos para indicar que algunas interpretaciones usadas en didáctica respecto a la práctica matemática de Descartes develan una concepción del método cartesiano que privilegia aspectos de tipo sintáctico y metódico, dejando a un lado el análisis del tratamiento representacional y semántico que se encuentra en la obra. La importancia educativa que se le otorga al método de análisis está relacionada con la manipulación algebraica y la construcción de un sistema simbólico, las reflexiones sobre las necesidades interpretativas, diagramáticas y semánticas del método en la solución de problemas son exiguas.

*Palabras clave:* método de Descartes, didáctica del álgebra, enseñanza del álgebra, Geometría, historia de la matemática

### Problemática a estudiar

La participación por parte de la Historia de la Matemática en la Didáctica implica la interpretación, selección y análisis de aspectos que el didacta considera relevantes para los procesos de enseñanza aprendizaje. El didacta interpreta y analiza las matemáticas a partir reconstrucciones históricas centradas en diferentes aspectos; sociales, epistemológicos o sociológicos. De esta manera, organiza un nuevo relato histórico que considera relevante para su práctica respecto a un objeto matemático de estudio. En consecuencia, reconstruye la historia desde necesidades específicas respecto al tipo de conocimiento que desea trabajar, reconoce

---

<sup>1</sup> Este estudio hace parte de los antecedentes del proyecto de tesis doctoral: Diagramas y práctica matemática en la geometría cartesiana (1637-1750). Contribución de la historia de la matemática a la formación de profesores. Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle -Colombia-.

algunos acontecimientos históricos que inspiran su acción; este proceso lo realiza desde una mirada epistemológica del objeto en la Didáctica.

Este documento devela en tres libros sobre enseñanza y aprendizaje del álgebra las interpretaciones en relación con los trabajos históricos, especialmente la *Geometría* (Descartes, 1637). Se estudia la posición teórica que han realizado los didactas de estos acontecimientos desde el conocimiento que los historiadores tienen de la obra de Descartes. Se estudia en un momento de la Didáctica de la Matemática las interpretaciones y usos de la obra histórica.

Los textos fueron escogidos porque en el contexto nacional, especialmente en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, son usados para formar profesores, para dar a conocer la parte histórica del trabajo que se ha realizado en el campo. Los textos se ubican en una etapa de consolidación de la investigación en enseñanza y aprendizaje del álgebra, desde 1996 hasta 2004. En el primero, *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, se estudia la parte I: *Historical Perspectives in the Development of Algebra* (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996). En el segundo texto se profundiza en el capítulo ocho *Working Group on Algebra History in Mathematics Education* del estudio 12th ICMI (Stacey, Chick, & Kendal, 2004). Este capítulo tiene como propósito analizar estudios en historia del álgebra que en el futuro puedan examinarse para la enseñanza y aprendizaje. El tercer texto *Perspectives on School Algebra* (Sutherland, Rojano, Bell, & Lins, 2002).

### **¿Qué dice la Historia de las Matemáticas de la obra matemática de Descartes?**

El análisis de Liu (2017) reseña que los investigadores han realizado dos tipos de lecturas del papel de la geometría y el álgebra en la obra de Descartes, la lectura tradicional y la lectura progresista. La primera caracterizada por dar más prioridad a la herencia euclidiana, en especial al papel de la construcción geométrica. En esta perspectiva se entiende una mayor importancia epistemológica a la geometría que al álgebra. Esta se comprende como una herramienta que posibilita la solución de problemas geométricos.

La lectura progresista reconoce en la obra de Descartes mayor contribución al desarrollo de una concepción de matemática más cercana a la actual. De esta manera, este tipo de interpretación le reconoce menos valor al trabajo geométrico -sin desconocerlo- y le pone énfasis a la contribución en la estructuración del álgebra; al análisis y organización de entidades abstractas que luego contribuyeron con la matemática. En este tipo de lectura se entiende que Descartes liberó a la magnitud y el número de intuiciones espaciales.

Reconociendo las diferencias entre los enfoques que han estudiado la obra matemática de Descartes, este estudio centra el marco referencial con el que estudia el corpus documental desde la práctica que relaciona geometría y álgebra a través del método de resolución de problemas, idea que reconocen los dos enfoques históricos del texto. El método es el centro de la práctica matemática que se desarrolló a través de la publicación de la *Geometría*, que, como se sabe, hace parte del *Discurso del método para conducir bien la propia razón y buscar la verdad en las ciencias* (Descartes, 1637).

### **Método de solución de problemas**

Es conocida la oposición que Descartes tuvo a la silogística de razonamiento llevada a cabo por los escolásticos, en especial su crítica al papel convincente para probar cosas que se conocen (Descartes, trad. en 2010, trad. en 1996). Sustentó la necesidad en avanzar en un proyecto para encontrar un método de descubrimiento de verdades, con la idea de descomponer

en los elementos más simples cada problema geométrico (Gaukroger, 1989).

Dentro de su filosofía esta técnica estuvo encaminada a orientar la solución de cualquier problema geométrico, fue basada en el método de análisis y planteó una separación de la técnica argumentativa Euclidiana.

Sobre el procedimiento para acceder a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas. Si, pues, deseamos resolver un problema, inicialmente debe suponerse efectuada la resolución dando nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción, tanto a las que son desconocidas como a las que son conocidas. A continuación, sin establecer distinción entre las líneas conocidas y las desconocidas, debemos decifrar el problema siguiendo el orden que muestre, de modo más natural, las relaciones entre estas líneas, hasta que se identifique un medio de expresar una misma cantidad de dos formas: esto es lo que se entiende por una ecuación. (Descartes, trad. en 1996, p.392).

En el método la ecuación se convirtió en un medio que permitió otra forma de argumentación respecto a la tradición griega. El trabajo de Descartes desarrolló el método de análisis el cual permitió superar el uso de figuras arbitrarias que generalizaban las propiedades de los objetos y contribuyó con diagramas que muestran las relaciones entre objetos geométricos y permitieron especificar a partir de ecuaciones lo que se considera dado,

En adelante se podían incluir en el razonamiento todos los elementos que estaban implicados, como si todos fueran dados, sin que esta unificación de tratamientos y procedimientos implicaran en ningún momento el menor riesgo de confusión en cuanto al estatuto exacto de cada uno de ellos Gardies (como se citó en Arboleda, 2012, pág. 3).

Descartes plantea en su *Geometría* el uso de símbolos de manera temprana, al advertir el uso de la letra para designar la magnitud a partir de un segmento de recta

Sobre el uso de letras en geometría. Pero frecuentemente no es necesario trazar de esta forma tales líneas sobre el papel, siendo suficiente designar cada una de ellas por una letra. Así para sumar la línea AB y CH, llamo a la una  $a$  a la otra  $b$  y escribo  $a + b$  (Descartes, trad. en 1996, p. 391).

Este aspecto contribuye a superar la visión euclideana de homogeneidad. En Descartes  $a^2, a^3, \sqrt[n]{a}, n \geq 0$ , pueden ser representados mediante una línea recta, se obtienen construcciones geométricas por medio de segmentos que representan por ejemplo, ecuaciones de grado  $n$ .

Esta nueva forma de operar involucró una metafísica que en su época revolucionó la forma de hacer matemáticas, su base fundamental estuvo en dejar a un lado la perspectiva de los objetos y enfocarse en las relaciones (Macbeth, 2004, 2014). El interés de estudio en las matemáticas cambió, de objetos geométricos como líneas, círculos y polígonos a relaciones entre segmentos de línea; las cuales se entienden como representantes de cantidades arbitrarias y se pueden representar por medio de proporciones: las matemáticas vistas desde la simplicidad de las relaciones entre líneas.

Dos momentos en la interpretación del signo se establecieron en el método de solución de problemas; el primero vinculado con la interpretación de la situación por ejemplo, en el problema de Pappus parte de las inferencias que se realizan son producto del diagrama que usa, el cual no cambia durante toda la obra, las rectas están en posición dada, esto permite deducir las

relaciones entre las rectas para la solución y sus implicaciones en la forma de las curvas y de las representaciones simbólicas (Maronne, 2007). El otro momento se establece al construir geoméricamente los segmentos de línea con longitudes iguales a las raíces de una ecuación, representar geoméricamente la solución de ecuaciones es parte del método propuesto.

Según (Mancosu, 1996) en los comentaristas de la obra de Descartes existen dos interpretaciones del papel del álgebra en *La Geometría*. La primera representada por los trabajos de Bos, Boyer, Grosholz, Lachterman y Lenoir, la cual sostiene que el álgebra es una herramienta que ayuda a proporcionar la economía, de esta manera el estatus epistemológico de la representación simbólica era ese, herramienta; el medio de representación y definición era la curva. Una segunda interpretación es la de Giusti, quien considera que la identificación de la curva por medio de la ecuación, está en el corazón del programa cartesiano, los medios para construir curvas son secundarios.

Parte del trabajo que se presenta en la *Geometría* se sustenta en mostrar las limitaciones de la regla y el compás, aceptar instrumentos articulados para trazar curvas involucró los medios de construcción en una nueva organización, algunas denominadas por los antiguos como mecánicas ahora cumplen los criterios para ser geométricas.

...pues si pensamos que las han denominado de tal modo porque es necesario utilizar algún instrumento para trazarlas, entonces deberíamos rechazar por la misma razón los círculos y las líneas rectas, puesto que no se trazan sobre el papel, sino utilizando la regla y el compás que también pueden ser considerados como máquinas... (Descartes, trad. en 1996, pág. 409).

Descartes incluye el tratamiento de instrumentos mecánicos, compases, que le permiten ir trabajando alrededor de ideas primarias sobre las matemáticas, como por ejemplo la media proporcional. Es cierto que la revisión de la *Geometría* deja duda sobre la existencia de este tipo de instrumentos, pues estos podrían ser diagramas para comprender los problemas; sin embargo algunos comentaristas que han investigado las correspondencia de Descartes en especial con Beeckman y el tratado de *private reflections* aseguran la existencia de estos instrumentos (Bos, 2001; Shea, 1993). Se construían curvas que daban muestra de las relaciones que se sintetizaban en la escritura de una ecuación. Este es un procedimiento que aparece frecuentemente en la *Geometría*.

Descartes fue elaborando un enfoque unificado de técnicas algebraicas, en donde los problemas que son susceptibles de construcción podrían reducirse a un grupo de problemas estándares, los cuales podrían ser representados por las relaciones de una construcción conocida. Relacionó los instrumentos que hacen posible trazar una curva, la construcción geométrica y la solución de la ecuación, con expresiones algebraicas estandarizadas y generales. Mostró el potencial del método para integrar problemas que en la clasificación de los antiguos estaban separados.

### Análisis de los textos

El estudio establece relaciones entre los niveles semánticos y pragmáticos de fragmentos de los textos analizados. Las unidades básicas son frases tomadas entre puntos apartes o puntos seguidos, y citas textuales relacionadas con la *Geometría* o respecto a Descartes. Una primera revisión del corpus documental permitió develar dos categorías de análisis, una a nivel explicativo de la obra histórica, las interpretaciones del método y otra a nivel de la praxis dentro de la didáctica, los usos didácticos del método.

## Respecto a las interpretaciones del método

En esta categoría de análisis resaltan dos elementos de discusión, el papel del símbolo en el desarrollo de método y el papel del análisis en la resolución de problemas geométricos.

En los tres textos se evidencia un reconocimiento y énfasis de la necesidad de escritura simbólica para el desarrollo del método. Sin embargo, no se evidencia referencia ni uso de los procesos constructivos geométricos que garantizaron la posibilidad de interpretación de lo desconocido como dado. Parte del método consiste en interpretar lo que se busca con las mismas características y propiedades de lo conocido.

El contraste entre una relación geométrica y su representación simbólica se encontraba mediada por el papel de la construcción. Este aspecto se reconoce como el propósito metodológico de la Geometría, el cual consiste en enfrentar una cuestión crucial en la tradición de la resolución de problemas geométricos: ¿cómo construir cuando regla y compás son insuficientes? (Bos, 1984, 2001).

Los apartes de los textos analizados hacen referencia a un análisis desprovisto de relaciones geométricas contradiciendo la perspectiva que presenta Descartes. En obras posteriores como en Arnauld y Prestet (Schubring, 2005), se evidencia una versión de método más cercana a la que presentan los textos didácticos. En frases como la siguiente se evidencian estas concepciones:

They observe that the history of symbolism in algebra is the invention of a system that makes it possible to solve problems by manipulation of symbols according to rules, and without recourse to what the symbols mean. This is the legacy of Descartes and others. (Stacey, et al., 2004, p.10).

Esta concepción se corresponde con la lectura progresista del método. Fundamentalmente, se vincula con la creación del sistema de signos matemáticos que posibilitó una estructuración de las expresiones polinómicas y de la resolución de problemas identificando expresiones canónicas:

Thus the method continues by transforming the written algebraic expressions and the resulting equations in order to reduce them to a canonical form. This implies that it has previously been determined which expressions and which equations will be considered canonical, and that one has a catalogue of all the possible canonical forms and procedures for solving each of them. (Stacey, et al., 2004, p.194).

En la obra se trabajó la forma canónica de los polinomios, sin embargo, este hecho es consecuencia del trabajo sobre aspectos geométricos de la curva. Las unidades de análisis no permiten determinar el alcance que se sugiere de las relaciones entre la curva y su forma canónica. La figura, la construcción, el desarrollo de la gráfica, está ausente en los análisis que se realizan en el texto sobre el método de solución de problemas geométricos. Las duplas de problema geométrico/construcción (curva) y construcción (curva)/ecuación son fundamentales en la comprensión de la importancia histórica de la *Geometría*.

Solamente uno de los textos hace referencia a la representación de las magnitudes y al trabajo relacional que se involucra en el desarrollo del método, pero no describen el tipo de relaciones que permiten el análisis:

In geometry, analysis revolves around the search for what is known among what seems to be unknown. The core of analysis is the hypothesis, that is the assumption that the problem is solved. As said before it imposes the development of a certain way of representing the unknown magnitudes that are considered given by hypothesis. In that process, all lines or parts of a figure are dealt with in the same way. Relations between those lines are studied, whether the lines are given or not. (Bednarz, et al., 1996, p.36).

El proceso analítico está delineado por una buena elección de lo conocido y desconocido en el problema geométrico. Este aspecto está sustentado en la posibilidad que el método de descubrimiento que posibilita el uso de técnicas algebraicas quede cubierto por la comprensión de los asuntos que anteceden la suposición de resolución del problema (Gaukroger, 1989). La ecuación contiene elementos conocidos y desconocidos; pero su conformación es sustentable por saber geométrico.

### Uso didáctico del método

Las secciones analizadas hacen referencia a la importancia del método en la adquisición del sistema simbólico del álgebra escolar. Le otorgan relevancia en la construcción de una sintaxis para la matemática, categorizando al método cartesiano como algebraico. En la solución de problemas el método aparece relacionado con el reconocimiento de cantidades dadas y desconocidas

What lies at the heart of algebraic problem solving is the expression of problems in the language of algebra by means of equations. In order to be able to compare the ways of writing equations that represent word problems in different historical texts so that the comparison brings out what is pertinent for teaching, a good strategy is to take as a reference what is done in the Cartesian Method, which is the algebraic method *par excellence* and may be considered as the canon of the methods traditionally taught in school systems. (Stacey, et al., 2004, p.191).

En el tratamiento didáctico no se evidencian propuestas de trabajo respecto a la representación de magnitudes por medio de segmentos. La dificultad que se enuncia en la enseñanza refiere al papel del símbolo que subyace al uso del método. En las fases que se reconocen no se involucra la interpretación de problemas por medio de construcciones diferentes a la simbólica, desconociendo la fase interpretativa del problema a partir del diagrama que permite inferir las relaciones que se representan en ecuaciones. Sin embargo, se reconocen diferentes interpretaciones de la letra en el proceso de construcción del método, el paso de la incognita a la variable

...competent use of the Cartesian Method is linked with the creation of families of problems that are represented in the mathematical sign system (MSS) of algebra as canonical forms. This implies an evolution of the use of symbolisation in which, finally, the competent user can give meaning to a symbolic representation of the problem that arises from the particular concrete examples given in teaching. Student will make sense of the Cartesian Method when they become finally aware that by applying it they can solve families of problems, defined by the same scheme of solution. (Stacey, et al., 2004, p.191).

En los documentos no se profundizan los medios que hacen posible comprender los problemas o realizar el primer paso del método, establecer las relaciones de lo conocido y de lo desconocido. El énfasis se pone en el reconocimiento de técnicas algebraicas, de las ecuaciones como una nueva forma de resolución de problemas al margen de los procedimientos aritméticos

y geométricos. Las únicas experiencias que se presentan involucran problemas en la relación aritmética – álgebra y vinculan diferentes recursos como hojas de cálculo, exploración por métodos aritméticos y gráficas de curvas, siempre en la construcción de familias de problemas, en busca de la comprensión de la operatividad de lo simbólico

The role played by intermediate methods in the passage from the classical arithmetic method to the Cartesian one has to do with the possibility of the user constructing meanings for the algebraic relationships between the elements of the problem. Although it should be pointed out that, on the other hand, the essential difference between the introduction of algebra and all previous approaches lies in that in the latter, when solving problems, the unknown is represented, although it is not operated. Inferences are made with a reference to the representation of the unknown; but if operated, this is always done by means of the data: if a mention is made of unknowns, this is only in terms of the results of operations which are being done with the data. (Sutherland, et al., 2002, p. 175).

En esta categoría se evidencia que hasta la fecha de producción de los documentos analizados, el método cartesiano seguía siendo un elemento de análisis para la didáctica de la matemática. Por un lado vinculado a la construcción de sistemas simbólicos y por otro a la resolución de problemas por medio del reconocimiento de la estructura simbólica canónica de los polinomios.

### Reflexión final

Los estudios históricos sobre la obra matemática de Descartes en especial de la *Geometría* (Descartes, 1637), muestran un método ligado a la resolución de problemas geométricos y al análisis. La representación de datos conocidos y desconocidos por medio de segmentos, la representación de relaciones geométricas por ecuaciones y el estudio de su solución por instrumentos o construcciones geométricas, hacen parte de las actividades que caracterizan la práctica. La construcción se entiende como un elemento fundamental en la obra. El estudio de las propiedades de las curvas y una clasificación que incluye nuevos problemas como geométricos, permiten comprender y usar el método propuesto por Descartes.

En los textos analizados de enseñanza y aprendizaje del álgebra se desarrolla una idea de método cartesiano vinculada con el dominio de técnicas algebraicas y con la resolución de problemas a partir de expresiones canónicas. Aunque los textos reconocen la importancia didáctica del método, la concepción que persiste está más vinculada con autores posteriores a Descartes, se fortalece la técnica algebraica y la representación simbólica de las curvas no depende de planteamientos geométricos. No se vinculan medios de representación diferentes al simbólico y la noción de curva es poco trabajada como medio que permite comprender la expresión algebraica, en las oportunidades que aparece lo hace más como representación de los símbolos y no como justificación o representación de ellos.

La interpretación que hacen los libros analizados descarta el uso de reflexiones didácticas sobre la semántica que se desarrolla en la obra de Descartes, los diagramas de los problemas que permiten la construcción de relaciones geométricas y la evolución en el método del tratamiento de la letra no se encuentran desarrollados dentro de los textos. El espíritu relacional de la matemática en Descartes no hace parte de argumentos que acerquen el análisis histórico de la obra a la didáctica. En correspondencia, la posibilidad de uso a la que se refieren está ligada al desarrollo del sistema simbólico y por medio de éste a la identificación de formas canónicas de solución de problemas.

### Referencias y Bibliografía

- Arboleda, L. (2012). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas. *13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (p.764 -777). Medellín: Universidad de Medellín. Obtenido de [http://asocolme.org/images/eventos/13/MATEMATICA\\_EDUCATIVA\\_13\\_Encuentro\\_Colombiano%20ECME.pdf](http://asocolme.org/images/eventos/13/MATEMATICA_EDUCATIVA_13_Encuentro_Colombiano%20ECME.pdf)
- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Bos, H. (1984). Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory: the construction of equations. 1637 - 1750. *Archive for History of Exact Sciences*, 331 - 380. Obtenido de <http://www.jstor.org/stable/41133725>
- Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer.
- Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*. Recuperado de <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86069594>
- Descartes, R. (2010). *Reglas para la Dirección del Espíritu*. (J. Navarro Cordón, Trad.). Madrid: Alianza Editorial.
- Descartes, R. (1996). *Discurso del Método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría*. (J. Sánchez Ron, Eds., & G. Quintas, Trad.). Barcelona: Círculo de Lectores.
- Gaukroger, S. (1989). *Cartesian Logic*. Oxford: Clarendon press.
- Liu, C. (2017). Re-examining Descartes' Algebra and Geometry. *Analytic Philosophy*, 58(1), 29 - 57.
- Macbeth, D. (2004). Viète, Descartes, and the Emergence of Modern Mathematics. *Graduate Faculty Philosophy Journal*, 25(2), 87 - 117.
- Macbeth, D. (2014). *Realizing Reason. A Narrative of Truth and Knowing*. Oxford: Oxford University Press.
- Mancosu, P. (1996). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. Oxford: Oxford University Press.
- Maronne, S. (2007). *La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne: 1637 - 1661*. (Tesis doctoral, Université Paris - Diderot- Paris VII). Recuperada de: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00203094/document>
- Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number concept Underlying the development of Analysis in 17-19th Century France and Germany*. New York: Springer.
- Shea, W. (1993). *La magia de los números y el movimiento. La carrera científica de Descartes*. Madrid: Alianza Editorial.
- Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (Eds.). (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A., & Lins, R. (Eds.). (2002). *Perspectives on School Algebra*. Boston: Kluwer Academic Publishers.