XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Modelización en el aula matemática

Andrés **Ortiz** jiménez
Facultad de Educación, Universidad Católica de la Santísima Concepción
Chile
aortiz@ucsc.cl
María **Aravena** díaz
Facultad de Ciencias Básica, Universidad Católica del Maule
Chile
maravena@ucm.cl
Horacio **Solar** bezmalinovic
Facultad de Educación, Universidad Católica de Chile
Chile
hsolar@uc.cl
Leonardo **Cárdenas** calderón
Facultad de Educación, Universidad Católica de Chile
Chile
lcardenc@uc.cl

Resumen

Este taller promueve un trabajo independiente que permitirá a los/las docentes participantes involucrarse en un ciclo de modelamiento desde dos puntos de vista. El primero, a través de un trabajo con problemas de modelado matemático para que pongan a prueba sus habilidades, destrezas, conocimientos matemáticos, procesos de comunicación y argumentación en los diferentes momentos del ciclo de modelado; y el segundo, analizar como ese proceso modelación puede implementarse en el aula. Se privilegiará un trabajo colaborativo mediante la interacción grupal con las diferentes situaciones que le permitan acercarse a los conceptos y procesos desde una perspectiva contextualizada, que puedan relacionar y valorar desde sus propias realidades, el rol de la modelación para describir diferentes fenómenos de la realidad.

Palabras clave: Competencias matemáticas, modelización, ciclo de modelamiento, desarrollo profesional profesores.

Introducción

La modelización de situaciones ha sido ampliamente investigada, mostrando que cuando es incorporada en el aula, permite el desarrollo de capacidades de alto nivel, necesarias para enfrentar un mundo cada vez más matematizado (Keitel, 1993; Aravena & Caamaño, 2007; Gómez, 2007). Sin embargo, Blomhoj & Carreira (2009) nos señalan que la modelización en la formación de profesores tanto de primaria como de secundaria sigue siendo una cuestión pendiente. Lo anterior es complejo, pues dentro de las competencias matemáticas que han generado consenso a nivel internacional, se destacan como esenciales preparar a los profesores en la formulación de problemas que involucren procesos de modelación, la utilización del lenguaje matemático, la comunicación y argumentación matemática y la capacidad de analizar y construir modelos matemáticos en diferentes contextos (Niss & Højgaard, 2011).

Esta tensión entre desarrollo de competencias y formación de profesores es señalada por Kauertz y sus colaboradores, quienes indican que la relación entre el desarrollo de las competencias y la enseñanza es todavía vaga, y las evaluaciones no proporcionan información del proceso de desarrollo de las competencias, sino que señalan las metas que deberían haberse logrado, proporcionando información que es útil para el diseño de políticas públicas en educación, pero no para orientar procesos de enseñanza (Kauertz, Newmann, & Hearting, 2012).

Justificación teórica del taller

Respecto a la modelización, existen autores que la sitúan como la base de la actividad matemática; debido principalmente a que en las tareas de modelización de situaciones se da un especial énfasis al proceso seguido por los estudiantes en dichas tareas, esto es, a procesos mediante las cuales realiza "la adecuación a los propios actos de conocimiento y no al contenido de los propios actos*"* (Gómez, 2007, p. 32*),* dando así más importancia a los procesos cognitivos que a los modelos obtenidos (Aravena, Caamaño y Giménez, 2008; Blomhøj, 2004); ello se puede ver reflejado en el marco teórico de PISA 2015 (OECD, 2016) en que se describe cada una de las siete competencias matemáticas según el ciclo de modelización.

En este sentido, planteamos que modelar un fenómeno observado o utilizar un modelo para comprender o resolver alguna situación, contribuye a una mejor formación de los alumnos en cualquier fase de escolaridad, fomenta el desarrollo de habilidades que ayuda a una mejor comprensión de conceptos matemáticos para su aplicabilidad y saber integrar la matemática a otras áreas del saber (Biembengut, 2016). Desde el punto de vista del aprendizaje, si el modelaje se torna parte del centro de la actividad matemática escolar, el estudiante en situaciones de su interés, aumentará su comprensión en el uso de datos, estimulará el uso de su capacidad matemática, desarrollará la comprensión de fórmulas algebraicas y la habilidad argumentativa, criticando y defendiendo los modelos creados al contrastar sus resultados con los de situaciones de la vida real (Saeki, Ujiie & Kuroki, 2007, citado en Biembengut, 2016: 102). En los primeros años de enseñanza primaria, la modelización se asocia a cuando los niños generan y desarrollan sus ideas y procesos matemáticos propios, para formar sistemas de relaciones que son generalizables y reutilizables (English, 2006).

Según Maaß (2006) para modelizar un problema real hay que moverse entre la realidad y la matemática. El proceso de modelación comienza en el mundo real; simplificando, estructurando e idealizando este problema se obtiene un modelo real. La matematización del modelo real conduce a un modelo matemático. Trabajando dentro de las matemáticas se obtiene una solución matemática; la cual tiene que ser primero interpretada para obtener una solución interpretada y luego validada. Si la solución o el proceso elegido no resulta ser adecuado a la realidad, los pasos o quizás incluso la totalidad del proceso de modelización necesita ser revisado. En la figura 1 se ilustra la propuesta de Maaß (2006) que se inicia con la simplificación del problema real, en donde la situación real puede manipularse de manera de obtener un modelo real, haciendo supuestos de diversas hipótesis, fragmentando el problema o bien se suponen despreciables ciertas variables. Utilización de sistemas de representación, esquemas, dibujos, reconocimiento de las variables que intervienen, identificación de las condiciones iniciales. Se busca alguna similitud con algo conocido del mundo matemático, lo cual es muy importante para poder enfrentar el proceso de matematización. (Gómez, 2007; Aravena, 2016). Esto nos permite obtener un modelo matemático inicial, que la autora denomina modelo real.

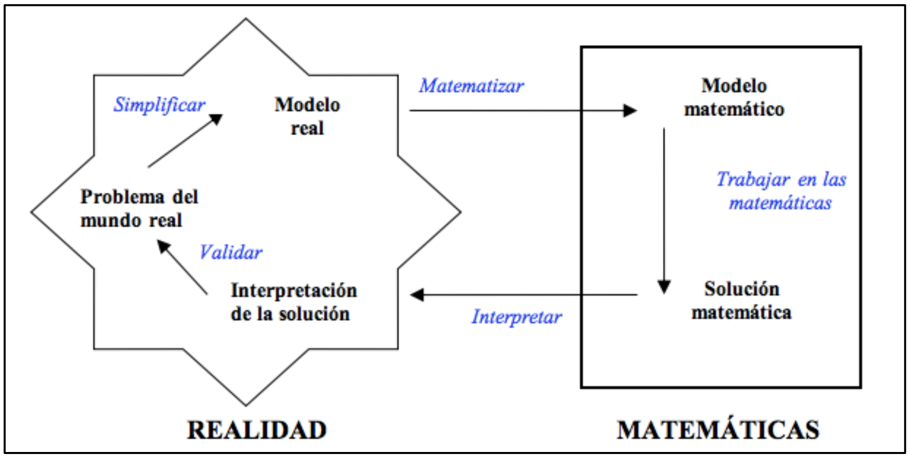


Figura 1. Procesos de modelación matemática (Maaß, 2006)

La entrada al mundo matemático se denomina Matematización. Este se genera mediante la traducción donde se sustituyen las palabras por símbolos y expresiones matemáticas (ecuación, funciones, etc.). Aquí se consigue una formulación matemática del problema y de manera natural se obtienen un problema en términos matemáticos. Esto es, el significado de matematización es la descripción de relaciones matemáticas que interpretan el proceso. En el proceso de matematización se aplican los métodos matemáticos tales como propiedades, algoritmos que resuelven el problema en términos matemático, hasta obtener una solución matemática del problema (Gómez, 2007; Niss, 2013), lo que se denomina la formulación del modelo.

La interpretación de la solución es la salida del mundo matemático, lo que se requiere es analizar si el modelo formulado es el adecuado, es saber si da respuesta al problema real. Si es un buen ajuste para los datos del problema, ver márgenes de errores, reestudiar los resultados numéricos obtenidos en términos del problema propuesto. Interpretar es saber si hay diversas soluciones, cual es la más adecuada al problema (Aravena, 2016).

Luego se entra a la etapa de validación, donde se requiere evaluar el modelo con nuevos datos del domino o proyectar nuevos datos, esto es, justificar la validez del modelo, si satisface las condiciones iniciales.

Finalmente se estudia el análisis y proyección del modelo, lo que no está descrito explícitamente en el esquema de Maaß (2006), pero que requiere ser analizado en todo proceso de modelación matemática (Gómez, 2007; Aravena, 2016). Aquí se analiza las fortalezas y limitaciones del modelo, esto es, el modelo presenta limitaciones que están relacionadas con las decisiones iniciales, cuando se fragmentó o con las condiciones iniciales del objeto real como deformaciones por el medio ambiente, etc. Hay que tener presente, que el modelo es adecuado, si las condiciones se mantienen, pues si cambian las condiciones, como por ejemplo en el problema de la temperatura, el modelo no sirve. O que no es posible generalizar para otras situaciones.

Las fortalezas están relacionadas con la posibilidad de generalizar el modelo para situaciones similares. Por ello, la generalización es un paso importante en todo proceso de modelación, pues lo que se busca es tratar de modelar una situación real para poder luego buscar una generalización que permita contar con una expresión algebraica o analítica (cuando se habla de analítica es de todo el proceso) que nos lleve a su utilización en situaciones similares (Aravena, 2016). Así nos evitamos que para cada situación muy similar tengamos que iniciar todo el proceso de modelamiento, lo cual no sería eficiente. Así la generalización permite contar con un modelo que nos sirve para diversas situaciones muy similares unas de otras.

Propuesta del Taller

Situación para modelar: "Cuidemos el Medio Ambiente" (Aravena y Caamaño, 2007). En 1896 el científico sueco Svante Arrhenius fue el primero en predecir el efecto invernadero como resultado de las emisiones de dióxido de carbono en el aire por parte de los países industrializados. La quema de combustibles fósiles continúa produciendo 5,4 mil millones de toneladas de carbono al año, las cuales son absorbidas por la atmósfera y por los océanos. En 1990 el Grupo Internacional sobre el Cambio de Clima (GICC) pronosticó que, de continuar la tendencia actual, aumentará la temperatura promedio global de la Tierra. La tabla 1 muestra los datos del aumento de la temperatura global pronosticada en grados Celsius.

Tabla 1

Aumento de la temperatura global pronosticada en grados Celsius

Año	Temperatura
1980	0.0
2000	0.42
2020	0.84
2040	1.26
2060	1.68
2080	2.10

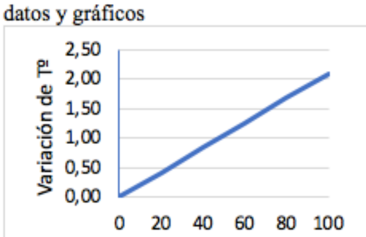
A partir de la información, responda las siguientes preguntas: (1) Determina un modelo de manera que concuerde con los datos y representa gráficamente; (2) Tomando tu expresión general (o modelo) explica el significado de los coeficientes de la función; (3) Predice la temperatura estimada para los años: 2030 y 2085

Análisis del Taller

El análisis comienza con la parte de simplificación del problema real, el cual se muestra en la figura 2.

Datos: Años; Aumento de temperatura en grados Celsius

Utiliza sistemas de representación: Tabla de datos y gráficos



t	Años	Temperatura en °C
0	1980	0.0
20	2000	0.42
40	2020	0.84
60	2040	1.26
80	2060	1.68
100	2080	2.10

Condiciones iniciales:

Despreciar la temperatura antes de 1980. Considerar el año 1980 como el año t= 0. Incremento de la temperatura constante (0.42° C) cada 20 años.

Figura 2. Simplificación del problema real

Posteriormente, empieza la *Matematización* en donde se identifican las relaciones matemáticas. En la situación de este taller, el modelo matemático inicial se relaciona con la función lineal o afín y por tanto se produce un cambio de representación, pasando del algebraico al geométrico o del geométrico al algebraico, lo anterior se puede observar en la figura 3

<table>
<tr>
<td>(A) Modelo Matemática Inicial

Relaciona la situación con la función afín $f(x) = mx + b$ y la ecuación corresponde a: $y = mx + b$

Utiliza cambios de representación, del algebraico al geométrico o viceversa.

Identifican las ecuaciones o relaciones de acuerdo con el contexto del problema.

Utilización de propiedades, algoritmos y aplicabilidad de teoremas</td>
<td>(B) Proceso de Matematización

El incremento de la T° es directamente proporcional con el incremento de los años

<table>
<tr><th>Incremento en años (t)</th><th>Años</th><th>Temperatura en °C (T)</th><th>Incremento en °C (d)</th></tr>
<tr><td>-</td><td>0</td><td>0.0</td><td>-</td></tr>
<tr><td>20</td><td>20</td><td>0.42</td><td>0.42-0= 0.42</td></tr>
<tr><td>20</td><td>40</td><td>0.84</td><td>0.84-0.42= 0.42</td></tr>
<tr><td>20</td><td>60</td><td>1.26</td><td>1.26-0.84= 0.42</td></tr>
<tr><td>20</td><td>80</td><td>1.68</td><td>1.68-1.26= 0.42</td></tr>
<tr><td>20</td><td>100</td><td>2.10</td><td>2.10-1.68= 0.42</td></tr>
</table>

Se calcula la pendiente de la recta:
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2.10 - 0.42}{100 - 20} = \frac{1.68}{80} = 0.021$

Como la ecuación de la recta tiene la forma
$y = 0.021x$</td>
<td>También se puede encontrar la regularidad
$\frac{y}{x} = k$

sabiendo que
$x \neq 0; y \neq 0$

Entonces el modelo matemático es
$T(t) = 0.021 \cdot t$</td>
</tr>
</table>

Figura 3. Matematización

A partir de lo anterior se establece la <u>FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO FINAL (en términos numéricos).</u> Como la gráfica de la recta pasa por el origen (0,0) se tiene que $b = 0$, así la ecuación de la recta es $T(t) = 0.021 \cdot t$. Posteriormente, ver figura 4, se inicia la VALIDACIÓN, en la cual se dan las etapas: Verificación y validación con datos numéricos; Generalización del modelo.

<table>
<tr>
<td>Verificación y validación con datos numéricos

Verificación Se consideran dos puntos de la gráfica.

P_1= (20, 0.42)
P_2= (100, 2.10)

Se tomará el punto t= 60.

Luego,
$y = 0.021 \cdot 60$
$y = 1.26$</td>
<td>Generalización del modelo.

Sea la variable dependiente y que se corresponde con el aumento de la temperatura °C (T). Y la variable independiente x que se corresponde con los años (t).
Entonces tenemos que el aumento de T en función del año queda de la siguiente forma
T(t) = m t
$T(A) = m \cdot A$
$T(A) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot A$
Luego,
$d = y_2 - y_1$
$t = x_2 - x_1$</td>
<td>Matematizando:
Se reemplaza $d = y_2 - y_1$; $t = x_2 - x_1$

$\boxed{T(A) = \frac{d}{t} \cdot A}$
<u>Validación y verificación</u>
Validación del modelo general
d= 0.42
t= 20 entonces,
$\frac{d}{t} = \frac{0.42}{20} = 0.021$
Como el modelo tiene la forma
$T(A) = \frac{d}{t} \cdot A \quad T(A) = 0.021 \cdot A$
<u>Verificación</u>
Se considerará un tiempo de 60 años (A), luego de 1980.
Entonces,
$T(A) = 0.021 \cdot 60 \quad T(A) = 1.26$</td>
</tr>
</table>

Figura 4. Verificación y validación con datos numéricos. Generalización del modelo.

Luego, en la figura 5 se mostrará un análisis y proyección de las limitaciones y fortalezas del modelo

Fortalezas:	**Limitaciones del modelo**	**Comunicación matemática.**
El modelo puede ser utilizado para diferentes intervalos de tiempo, y diferentes incrementos de temperatura. Por ejemplo: el aumento de la temperatura en el núcleo del sol en los últimos millones de años.	No es aplicable para calcular temperaturas antes del año 1980. No es aplicable si el aumento de la temperatura no es constante.	Dar respuesta al problema real. El modelo generalizado sirve para encontrar la temperatura en años posteriores a 1980.

Figura 5. Verificación y Validación con datos numéricos. Generalización del modelo

Habiendo finalizado el proceso, es importante analizar las posibles dificultades y mencionar algunas soluciones (ver tabla 2) cunado se está desarrollando esta actividad matemática con los estudiantes.

Tabla 2

Posibles dificultades y soluciones al implementar el problema en el aula

Posibles dificultades y obstáculos	**Posibles Soluciones**
No relacionan los datos de la tabla con una proporción directa.	Hay que recordar que la constante de una proporción directa es de la forma $k = \frac{y}{x}$
No reconocer la ecuación de la recta.	Ubicar los valores de la tabla como puntos en el plano cartesiano, y unirlos mediante una recta.
No saber escribir la forma general de la ecuación de la recta.	Apoyar en recordar forma general de la ecuación de la recta.
No saber encontrar la pendiente en una ecuación de la recta.	Relacionar la pendiente de la recta con la constante de proporcionalidad (*k*).
No relacionar el coeficiente de posición con el punto que pasa por el origen.	Los alumnos discutan en grupos cual es la diferencia de una función afín y una función lineal.

Por último, mostramos un plan de clases, con lineamientos generales para la gestión del modelamiento de la situación presentada en el aula (ver tabla 3)

Tabla 3

Lineamientos para una implementación en el aula

	Tiempo	**Rol del estudiante**	**Rol del profesor**
Comprender el problema	15 Minutos	• Leer el problema y organizar los datos • Utiliza información para complementar tabla que presenta la situación. • Reconocer y nombrar las variables involucradas.	• Introducir el problema a la clase. • Observar, guiar y atender a los grupos de trabajo para aclarar dudas sin entregar soluciones.
Desarrollar una solución por sí mismos.	40 Minutos	• Graficar la información de la tabla. • Relacionar la gráfica con la ecuación de la recta. • Describir el modelo inicial. • Matematizar y completar un modelo de acuerdo con el problema. • Modelo final.	• Responder consultas de los estudiantes. • Acercar a los estudiantes a utilizar los conceptos de: pendiente, constante de proporcionalidad y coeficiente de posición.
Discusión grupal del	20 Minutos	• Analizan el o los modelos propuestos. • Se discute el modelo final que da respuesta al problema.	• Observar y orientar el trabajo de los estudiantes complementando

ciclo de modelación.		• Validación y verificación del modelo final.	los conceptos con lenguaje matemático y notación. • Atener sus dudas y fomentar sus ideas sin entregar soluciones.
Conclusión	20 Minutos	• Presentan soluciones y extrapolan los resultados obtenidos al problema y su contexto. • Generan conclusiones y generalizaciones a partir del problema. • Proyectan posibles generalizaciones y aplicaciones. • Argumentan matemáticamente sus procesos y resultados	• Escuchar y criticar constructivamente las ideas, dudas y comentarios de los estudiantes. • Complementar las respuestas de los estudiantes, fomentar las diferentes líneas de pensamiento y valorar los distintos modelos propuestos.

Reflexiones finales del taller

Este taller hace que los profesores participantes vivan una tarea de modelización con una interpretación renovada de lo que es el "aprendizaje significativo" en una perspectiva de cambio constante. La enseñanza de un objeto matemático debe ser contextual, debe contemplar su aspecto informativo, de elementos de otras ciencias, su aspecto formativo, centrado en el desarrollo del pensamiento, el fomento del espíritu crítico y la práctica del razonamiento lógico, todo ello basado en la resolución de problemas (Aravena, Caamaño & Giménez, 2008). Esto se complementa con la necesidad de crear contextos adecuados para enseñar a matematizar, como forma de dar significatividad al proceso de hacer matemática. En efecto, existe consenso en que el aprendizaje y la enseñanza, deben partir de contextos que revistan interés y que tengan pertinencia en el mundo real. Sin embargo, usualmente los contextos se utilizan después de haber enseñando a los alumnos las matemáticas formales. Otro aspecto que esperamos que los profesores vivan con este taller, es una experiencia de aprendizaje cooperativo, que se reconoce como un medio potente para abordar problemas matemáticos, flexible de hacer fluir los mecanismos individuales de construcción del conocimiento matemático de los estudiantes, además es un buen productor o reproductor de argumentos matemáticos, permitiendo generar mecanismos de integración del conocimiento, evitando la descontextualización y posibilitando la vinculación con otras áreas, en que se reconoce, además, que todo conocimiento se construye en estrecha relación con los contextos en los que se usa, y que, no es posible separar los aspectos cognitivos, emocionales y sociales presentes en el contexto en que se actúa.

Referencias y bibliografía

Aravena, M., & Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *33*(2), 7-25.

Aravena, M., Caamaño, C., & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(1), 49-92.

Aravena, M. (2016). La modelación matemática en Chile (2016). En Arrieta, Jaime y Díaz, Leonora (eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. España: Gedisa.

Biembengut, M. S. (2016). Modelaje Matemático en la Educación Brasileña: Historia de las Ideas e Ideas de las Historias. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). *Investigaciones Latinoamericanas*. Barcelona: Gedisa.

Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling—a theory for practice. En B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-160). Göteborg University: National center for mathematics education.

Blomhøj, M., & Carreira, S. (2009). Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. En *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 6-13).

English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational studies in mathematics*, *63*(3), 303-323.

Gómez, J. (2007). *La matemática reflejo de la realidad. La modelización matemática como herramienta para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas*. Badajoz: FESPM.

Kauertz, A., Newmann, K. & Hearting, H. (2012) Competence in science education. En Fraser, et. al (Eds.), *Second International Handbook of Science Education* (711-721). London: Springer.

Keitel, C. (1993). Implicit mathematical models in social practice and explicit mathematics teaching by applications. *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications. Chichester: Ellis Horwood*, 19-30.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142.

Niss, M. (2013) Modeling a Crucial Aspects of Students´ Mathematical Modeling. En R. Lesh, P. Galbarith, C. Haines, A. Hurford (Eds). *Modeling Students´ Mathematical Modeling Competencies. (*pp. 43-59). *ITCMA 13*. M VI, 378 V8 Springer: Dordrecht Heidelberg New York London.

Niss, M. & Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.*(English edition). IMFUFA tekst n. 485/2011. Roskilde: Roskilde University.

OECD. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. OECD Publishing: Paris.