XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Uma introdução ao estudo das superfícies parametrizadas regulares utilizando o GeoGebra

André Lúcio Grande
Faculdade de Tecnologia de Mauá – Fatec-Mauá
Brasil
andreluciogrande@gmail.com

Resumo

Este minicurso objetiva realizar um estudo das superfícies parametrizadas regulares utilizando como recurso auxiliar o software GeoGebra, com o intuito de explorar e caracterizar suas propriedades geométricas, algébricas e topológicas. Pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral evidenciam as potencialidades e as possíveis contribuições do uso de softwares de geometria dinâmica no sentido de auxiliar na visualização e na compreensão dos conceitos tanto geométricos quanto algébricos dos objetos matemáticos. Como referencial teórico foram utilizadas as ideias ligadas ao papel da visualização relacionadas ao ensino do Cálculo defendidas por David Tall. Este trabalho apresenta uma abordagem qualitativa, tendo como procedimentos metodológicos a utilização do GeoGebra na construção de maneira dinâmica das superfícies tais como: regulares, regradas, de revolução e mínimas. Como resultados, ressaltamos que o estudo das superfícies com o auxílio do GeoGebra apresenta contribuições significativas na construção do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Superfícies, Cálculo Diferencial e Integral, GeoGebra, Visualização, Geometria Dinâmica.

Introdução

Em nossa prática docente nos diversos níveis de ensino da Matemática nos deparamos com situações que envolvem o conceito de superfície, quer seja nas aulas de Geometria Euclidiana, Diferencial, Analítica, Topologia ou Cálculo, dada a sua diversidade de abordagens e aplicações.

Em muitas dessas situações em grande medida ao procurarmos caracterizar ou definir as superfícies utilizamos como exemplo as superfícies planas ou empregamos o próprio termo para sua conceptualização. Utilizando-se intuitivamente de analogias físicas, podemos obter uma superfície por exemplo pela deformação ou rompimento de uma folha de papel ou a colagem de alguns pedaços de papel.

Quanto às aplicações, destacamos sua utilização em diversas áreas, como a arquitetura, por exemplo, na construção de estruturas que se utilizam de suas propriedades geométricas.

Uma superfície pode ser definida como um conjunto de pontos do espaço euclidiano, sendo bidimensional e que qualquer ponto da mesma pode ser descrito localmente por duas coordenadas.

Dentre as várias classificações das superfícies, segundo Do Carmo (2012) são de interesse ao estudo aquelas não apresentam pontos singulares ou auto intersecções. Tais superfícies são denominadas superfícies regulares e admitem uma parametrização, sendo que as coordenadas de cada ponto dessa superfície podem ser descritas por funções de duas variáveis.

De uma maneira mais formal, utilizando-se dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, definimos uma superfície regular S da seguinte maneira:

> Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superficie regular se, para cada ponto $p \in S$, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$e uma transformação $x: U \rightarrow V \cap S$ de um conjunto aberto de $U \subset \mathbb{R}^2$ em $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:
>
> 1) x é diferenciável. Isso significa escrever que se nós escrevermos $x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U$.
>
> 2) x é um homeomorfismo. Se x contínua pela condição 1, isto significa que x tem uma inversa $x^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ que é contínua, isto é, x é uma restrição da aplicação contínua $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em um aberto W contendo $V \cap S$.
>
> 3) (Condição de regularidade). Para cada $q \in U$, a diferencial $dx_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um a um. (Do Carmo, 2012, p. 52).

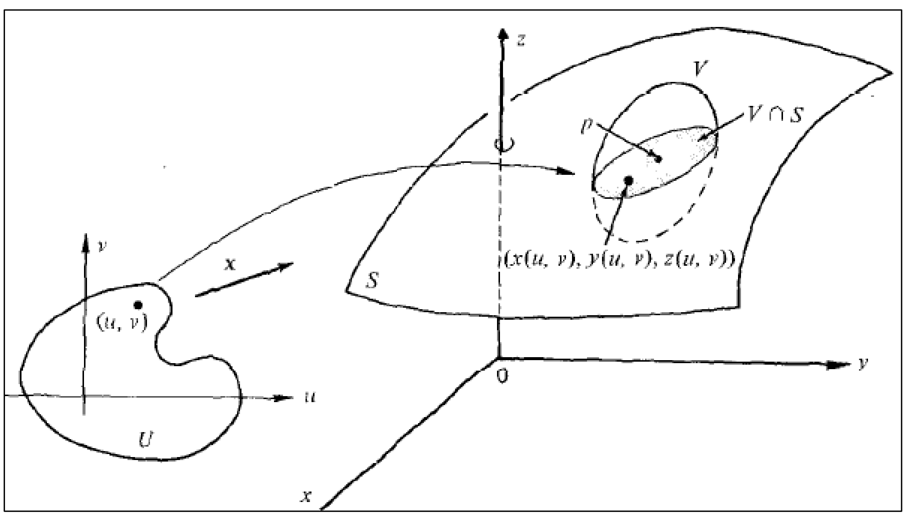

Figura 1. Superfícies Regulares

Em outras palavras, as superfícies regulares são aquelas que em cada ponto da mesma está definido um plano tangente e que consequentemente é possível se utilizar dos conceitos do

Cálculo Diferencial e Integral para se efetuar medições nessa superfície, como por exemplo distâncias, ângulos e áreas.

Uma superfície também pode ser definida do ponto de vista topológico, de uma maneira mais abstrata, como uma variedade. Uma variedade é um espaço que pode ser descrito localmente através de coordenadas, sendo o número de coordenadas ou o número de direções independentes necessárias para representar todos os pontos próximos de um ponto dado num objeto chamado de dimensão da variedade. Esse número de direções pode ser compreendido intuitivamente como o número observado por alguém que "viva" sobre a variedade, e não o número de dimensões necessárias para conter o objeto. No caso das superfícies, sua dimensão é igual a dois.

Para que as superfícies possam ser representadas, visualizadas e exploradas suas propriedades geométricas, algébricas e topológicas, faz-se necessário o uso de um recurso computacional auxiliar, que no caso desse minicurso, será utilizado o software GeoGebra, conforme será descrito a seguir.

A importância da visualização no ensino do Cálculo

O papel da visualização no ensino e na aprendizagem em Matemática é um tema que vem sendo discutido por um número cada vez maior de educadores e pesquisadores. A visualização, em linhas gerais, no ensino e aprendizagem do Cálculo permite interpretar informações por meio da construção de representações visuais, de *softwares*, entre outros recursos didáticos.

David Tall (2002) considera a visualização não só relevante à Matemática como à Educação Matemática. Por visualização o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que se pensou. Sobre a visualização o autor afirma que:

> Ao introduzir as visualizações adequadamente complexas de ideias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de aprender os conceitos, fornecendo intuições muito mais poderosas do que através de uma linguagem tradicional (TALL, 2002, p.20 – tradução nossa).

O autor afirma ainda que o uso do computador constitui uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados às explorações sensoriais por meio de percepções, visualizações e intuições. Para o autor, o computador se torna um "organizador genérico" de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente (ou micromundo) em que os alunos podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos. Por meio de um software, portanto, os alunos entram em contato com o objeto matemático.

Sendo assim, selecionou-se o software GeoGebra para a exploração das propriedades algébricas e geométricas das superfícies, visando trabalhar com os alunos conceitos intuitivos de maneira dinâmica das mesmas, o que pode contribuir para o aluno formular conjecturas e testar hipóteses sobre alguns resultados.

Por Geometria Dinâmica pode-se entender como a geometria assistida por computador, em que os objetos matemáticos, como retas, ângulos e triângulos, podem ser movidos e manipulados, ao contrário da geometria em que os objetos são construídos com instrumentos euclidianos, como régua não graduada e compasso.

O GeoGebra é um *software* gratuito de Geometria Dinâmica, escrito na linguagem JAVA e disponível em português, que apresenta uma interface entre Geometria e Álgebra. Ele possui a vantagem de dispor, ao mesmo tempo, de duas representações diferentes de um mesmo objeto matemático: a geométrica e a algébrica, por exemplo, e essas representações podem ser simultaneamente manipuladas.

O estudo das superfícies parametrizadas regulares no GeoGebra

As superfícies parametrizadas regulares podem ser classificadas de várias maneiras, tais como por exemplo superfícies de revolução, mínimas ou regradas.

As denominadas superfícies de revolução são obtidas a partir uma curva plana e conexa regular em torno de um eixo no plano que não encontra a curva. Temos, por exemplo, o plano *xz* como o plano da curva e o eixo *Oz* como o eixo de rotação.

Para obtermos, por exemplo, a superfície de revolução denominada paraboloide utilizando o GeoGebra devemos iniciar representar algebricamente uma curva, no caso a parábola, no plano xz utilizando o parâmetro $u \in [0, 5]$ com as seguinte equações paramétricas: $\alpha(u) = (u, 0, u^2)$.

No GeoGebra, esta curva será representada geometricamente utilizando-se o seguinte comando:

Curva(<Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)

No nosso caso, teremos a seguinte expressão:

c = Curva(u, 0, u^(2), u, 0, 5)

O paraboloide de revolução será gerado pela rotação da curva α em torno do eixo *Oz* utilizando no GeoGebra o seguinte comando:

Superfície(<Curva>, <Ângulo>, <Reta>)

Para o paraboloide, considerando-se o ângulo de rotação α tal que $0 < \alpha < 2\pi$, temos que:

S = Superfície(c, α, EixoZ)

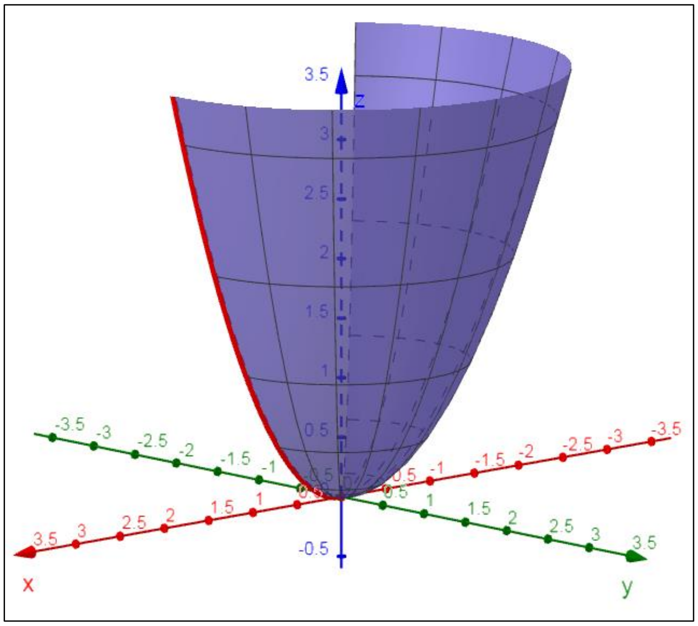

Figura 2. Superfície de Rotação no GeoGebra: Paraboloide de Revolução

Por meio dessa representação é possível estudar as possíveis interseções dessa superfície com planos paralelos, por exemplo, ao plano *xy.* Além disso, podem ser efetuadas medições, como comprimento de arcos, áreas e volume do sólido gerado pela superfície.

Outro objeto de estudo de igual interesse são as chamadas superfícies parametrizadas mínimas, que são aquela cuja curvatura média é identicamente nula. Temos como exemplos o plano, a catenoide, a helicoide, as superfícies de Enneper e superfícies Costa

A helicoide, por exemplo, é formada por semirretas que passam por um ponto P dessa superfície e são perpendiculares ao eixo z, conforme a figura a seguir.

Pode–se considerar que essa superfície pode ser gerada traçando-se uma reta paralela ao plano *xy* e que intersecta o eixo *Oz.* A helicoide possui as seguintes equações paramétricas:

$$x(u,v) = (v\cos u, v\,sen\, u, au), \qquad 0 < u < 2\pi \quad -\infty < v < \infty$$

Intuitivamente, podemos considerar que x aplica uma faixa aberta de largura 2π do plano uv sobre a parte do helicoide que corresponde a uma rotação de 2π ao longo da hélice.

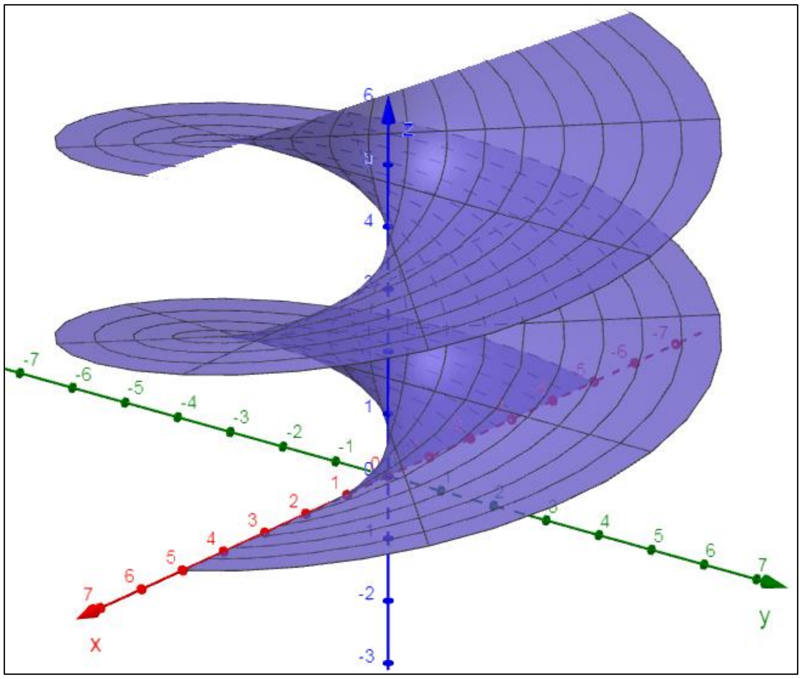

Figura 3. Superfície de Rotação no GeoGebra: Helicoide

Denominam-se superfícies regradas àquelas que se constituem um caso particular de superfícies desenvolvíveis. Podemos considerar que a palavra regrada possui o significado de "sujeita a regras". Uma superfície regrada é aquela é ser formada por retas, o que lhe confere uma "regra" própria para ser gerada. Elas podem ser completamente determinadas pelo movimento de uma reta no espaço.

Como exemplo de superfícies regradas, temos: cilindro, cone, paraboloide hiperbolico, hiperboloide de uma folha, helicoide ou conoide.

Segundo Struik (1988), o primeiro estudo das superfícies regradas foi efetuado por Gaspar Monge (na obra aplicações da Análise à Geometria), que estabeleceu as equações diferenciais parciais que satisfazem todas as superfícies regradas (de terceira ordem).

Matematicamente, podemos considerar uma superfície regrada como sendo um subconjunto S do espaço euclidiano que para cada $k \epsilon \mathbb{R}$ existe uma reta

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{R}} r_k$$

Em outras palavras, as superfícies regradas são aquelas que em cada ponto dessa superfície passa, ao menos, uma reta contida na superfície. Ao menos localmente as superfícies regradas são o espaço constituído pelo movimento rígido de pelo menos uma reta (reta geratriz), sendo que o traço desse movimento será a superfície.

Com isso, para representarmos geometricamente uma superfície podemos utilizar o GeoGebra no intuito de auxiliar a visualização e a compreensão do fato por exemplo das superfícies regradas, tal como o hiperboloide de uma folha, serem formadas por uma união de retas, bem como obter as secções das superfícies por meio de planos paralelos aos planos xy, yz e xz, para visualizar que as intersecções dessa superfície com esses planos podem geram curvas como a elipse e a hipérbole.

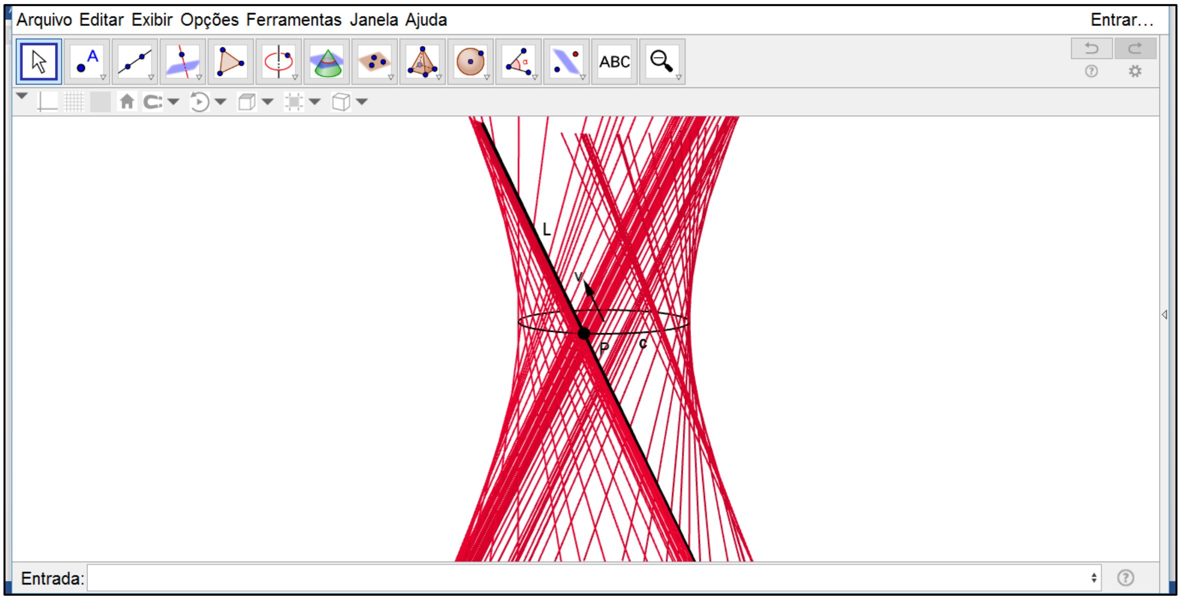

Figura 4. Superfície regrada no GeoGebra

Além disso, o software GeoGebra permite de maneira dinâmica a interação com o objeto de estudo, pois ao variarmos os parâmetros a, b e c da equação do hiperboloide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ podemos visualizar as alterações geométricas que ocorrem na superfície em questão.

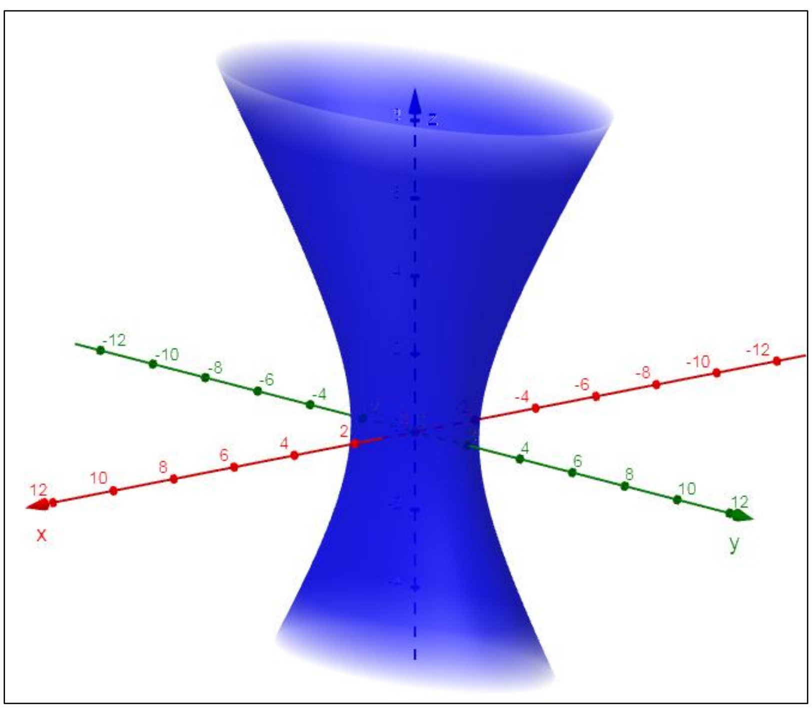

Figura 5. Superfícies regradas no GeoGebra: Hiperboloide de uma folha

Considerações Finais

Sobre o estudo das propriedades geométricas, algébricas e topológicas das superfícies utilizando o software GeoGebra, podemos considerar que o uso de tal recurso computacional auxiliar se constitui um elemento essencial responsável por "concretizar" o objeto de estudo em questão, no caso as superfícies parametrizadas regulares, além de permitir elaborar intuitivamente algumas conjecturas e hipóteses sobre as propriedades geométricas de tais superfícies. Já a utilização do GeoGebra auxiliou simular a obtenção das superfícies regradas como o hiperboloide de uma folha, por exemplo, mostrando sua característica de ser formada por retas, assim como contribuiu na formalização das hipóteses e conjecturas intuídas anteriormente.

Devemos ressaltar que o uso de um recurso computacional auxiliar – no caso do GeoGebra - pode não trazer o rigor matemático exigido em provas e demonstrações, mas possibilita em grande medida desenvolver intuições, gerar conjecturas e testar hipóteses, elementos essenciais para a construção do conhecimento matemático.

Destacamos que o ensino e a aprendizagem da Matemática sedimentados em princípios e ideias ligadas ao uso da intuição e do pensamento visual permitem aos estudantes, em grande medida, uma maior participação na construção do conhecimento científico. No caso do estudo das superfícies regulares, o GeoGebra apresenta contribuições significativas na construção do conhecimento matemático.

Referências e bibliografia

Camargo, I. Boulos, P. (2005). *Geometria Analítica – um tratamento vetorial.*3º ed. rev. e ampl. – São Paulo: Prentice Hall.

Creswell, J. W. (2010). Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Magda França Lopes. 3ª. ed. Porto Alegre: Artmed.

Do Carmo, M. P. (2010) Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM.

Grande, A. L. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo

Grande, A. L. (2016). "Geometria Gaudiana": Um estudo das superfícies regradas nas obras de Antoni Gaudi utilizando o GeoGebra. In : Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Madrid – Espanha.

Struik, D. J. (1988). Lectures on Classical Differential Geometry. 2nd ed. New York: Dover Publications.

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In: *Visualizations on Mathematics* (ed. Zimmermann e Cunninghan), M.A.A. Notes No. 19, 105-119.

Tall, D. (2002). *Using Technology to Suport and Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics.* In: Primeiro Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro – Brasil.