



## O Ensino de Funções Trigonométricas Com o *Software* GeoGebra

Sonner Arfux de Figueriedo  
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Brasil  
sarfux@uems.br  
Nielce Meneguelo **Lobo da Costa**  
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN  
Brasil  
**nielce.lobo@gmail.com**

### Resumo

Neste artigo se discute, num experimento de ensino, como futuros professores consolidam conceitos trigonométricos em uma experimentação de tarefas desenhadas em um ambiente virtual. Desenvolveu-se em um Curso de Licenciatura, Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Brasil. O aporte teórico desse recorte da pesquisa maior veio dos estudos sobre abstração reflexiva de Piaget como indicada por Simon e Tzur. A metodologia da pesquisa foi qualitativa com características do *Design-Based Research*, Cobb et al, e a análise foi interpretativa. Foi desenvolvida uma trajetória hipotética de aprendizagem, segundo Simon *et al*, nela utilizamos uma abordagem exploratória-investigativa de ensino. Os sujeitos foram três licenciandos e os resultados indicaram que, apesar de pouca experiência com o *Software*, houve um processo de abstração dos conceitos ao relacionarem o aspecto operacional com o estrutural, o qual o acadêmico só atingiria se conseguisse interiorizar de modo a captar as relações trigonométricas como um todo.

*Palavras chave:* Educação Matemática; Trigonometria; Tecnologia; Formação pedagógica.

### Introdução: O estudo da Trigonometria

As origens da trigonometria são um tanto obscuras. Há alguns problemas no papiro de Rhind que envolvem a co-tangente de um ângulo diedro da base de uma pirâmide, na tábula cuneiforme dos antigos babilônica Plimpton 322 que continha uma notável tábua de secantes, também é possível que as investigações modernas sobre a matemática da Mesopotâmia antiga venham a revelar um desenvolvimento apreciável da trigonometria prática, sem falar nos Indus que consideravam a trigonometria como uma ferramenta para sua astronomia.

A trigonometria na antiguidade sempre foi ligada às partes da geometria e da álgebra, com os quais se relacionam, entretanto hoje é tratada como um tópico matemático independente nas propostas curriculares (conteúdo programático de matemática) do ensino fundamental ou médio. Euclides Roxo considerava que muitas questões da Geometria se resolvem rapidamente graças as noções básicas de trigonometria, e ele se valeu das pressuposições teóricas de educadores matemáticos tais como Gutton, ao afirmar que os tópicos matemáticos abordados nos livros didáticos utilizados no ensino secundário apresentavam separações estanques entre os vários ramos da matemática, tornando-os fragmentados (LOBO DA COSTA, 2004).

Sendo assim, ao longo dos anos, houve uma evolução no sentido da simplificação da linguagem até, chegarmos à escrita atual, mas nem por isso a geometria através do desenho perdeu sua importância como meio de comunicação e de expressão, e foi sendo sempre utilizado paralelamente à escrita.

De modo a garantir ao discente uma formação que o torne protagonista na construção do conhecimento, é fundamental que se aplique na formação inicial uma metodologia para o ensino de funções trigonométricas que inclua a Geometria Dinâmica. A metodologia proposta para o ensino é uma alternativa à tradicional, e se propõe a resgatar a importância da geometria como fonte de conhecimento, inspiração e criação.

Propusemos uma alternativa para o ensino e aprendizagem da trigonometria usando o *software* de Geometria Dinâmica *GeoGebra*<sup>1</sup> na procura de sanar as dificuldades encontradas pelos acadêmicos quanto à compreensão das definições relacionadas à trigonometria. Com o uso do *software GeoGebra* proporcionamos ao acadêmico ferramentas e estratégias para a exploração, relação, análise e demonstração de forma que construíssem com solidez os conceitos e identificassem as propriedades trigonométricas.

A pesquisa que subsidia este artigo foi desenvolvida em um curso de Licenciatura em Matemática e teve por objetivo elaborar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o ensino das funções seno e cosseno.

Assim, propusemos trabalhar o conteúdo de trigonometria no ciclo trigonométrico e introduzir as funções trigonométricas. A THA foi desenvolvida com acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UFMS.

### **Marco Teórico da Investigação**

O marco teórico da investigação contemplou a caracterização do mecanismo cognitivo que se centra na relação atividade-efeitos em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem - THA (do inglês, Hypothetical Learning Trajectory-HLT), segundo Simon, Tzur, Heinz & Kinzel (2004), com uma taxonomia sobre os processos de generalização que parte da ideia de abstração reflexiva de Piaget (1977). Assim podemos analisar a relação entre a aprendizagem conceitual e as tarefas matemáticas, com esta elaboração da THA, o mecanismo oferece uma estrutura para pensar sobre como a tarefa matemática pode promover o processo de aprendizagem do licenciando (FIGUEIREDO et al, 2015).

A perspectiva teórica procede a uma particularização da ideia de abstração reflexiva elaborada a partir das ideias de Piaget (1977) sobre abstração reflexiva, utilizada por Simon e Tzur

---

<sup>1</sup>. Para mais informações ver: <https://www.geogebra.org>

(2004). Estes autores apontam que as ações dos estudantes produzem diferentes efeitos que podem ser considerados por ele no desenvolvimento de seus processos de abstração.

O enfoque proposto por Simon (1995) e por Simon e Tzur, (2004), para desenvolvimento profissional docente propõe um modelo de análise da prática do professor que permite, com posterioridade, incorporar resultados aos programas de formação de professores. Os autores explicam que enquanto os alunos se concentram em suas atividades com vistas a atingir sua meta, eles criam registros mentais, de modo que a atividade de experiência é gravada mentalmente e se desenvolve uma interação da atividade que é ligada ao seu efeito.

Este mecanismo baseia-se na descrição de Piaget (1977) sobre dois aspectos: o da reflexão e da abstração. O primeiro aspecto é uma projeção, no qual as ações em um nível tornam-se objetos (entrada) para as ações do próximo nível. O segundo aspecto é uma subjetividade conceitualização, no qual uma reorganização entre ações ocorre. O autor faz uma distinção entre os dois tipos de reflexão realizados pelos estudantes em seus registros da experiência.

Tzur e Simon (2004) partindo da noção de abstração reflexiva de Piaget, assumem que os processos mentais dos estudantes são elementos constituintes da compreensão de um objeto que por sua vez envolve duas fases: a fase participativa, na qual o estudante desenvolve diferentes atividades guiadas por um objetivo, qual seja, o de resolver uma tarefa matemática; a fase antecipatória, em que antes de uma determinada tarefa cuja resolução envolve o uso de um conceito matemático pelo aluno ele deve considerar pertinente o uso do conceito matemático na resolução dessa tarefa. Neste caso, o aluno pode usar o conceito de forma adequada, independentemente do contexto ou da tarefa.

### **O trabalho docente ao desenhar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem**

O trabalho docente é uma atividade profissional que requer a mobilização de diferentes domínios do conhecimento em situações nas quais o professor deve tomar decisões, colocando seu "conhecimento em uso". Essa é competência docente de planejar situações de ensino e aprendizagem de matemática nas quais o professor mobiliza seus conhecimentos e faz uso do que conhece de matemática, de ensino e de tecnologia. São diferentes contextos e áreas nas quais o professor deve utilizar informações para as mais diversas tomadas de decisão.

O professor, a partir de sua intencionalidade pedagógica produz um “caminho” para a aprendizagem do aluno. Temos então um desenho e a planificação de instruções aos discentes, com definições dos objetivos da aprendizagem, os quais definem as metas a serem alcançadas; o desenho das tarefas propostas aos estudantes/professores; e a caracterização de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) contendo a previsão de como o pensamento e a compreensão dos estudantes/professores poderão evoluir, quando resolvem as tarefas matemáticas propostas.

Em nossa pesquisa destacamos a experimentação das tarefas desenhadas em um ambiente virtual, nesta se analisa a experiência a partir dos referenciais teóricos subjacentes a trajetória hipotética de aprendizagem dos estudantes/professores, e se trata de investigar se a atividades desenvolvidas pelos estudantes/professores correspondem ou não com o que foi planejado nas definições dos objetivos da aprendizagem e, e neste caso, em que medida os materiais e o entorno desenhado apoiam a aprendizagem projetada.

### **O Desenho do experimento**

A investigação desenvolveu-se em um processo de formação inicial no qual se aplicou um experimento de ensino sobre funções trigonométricas usando o *Software GeoGebra* em uma

relação entre a atividade feita com o uso de lápis e papel em um entorno tecnológico, cujo objetivo foi compreender e caracterizar o conceito de funções trigonométricas. A metodologia foi a qualitativa de cunho interpretativa com características do *Design-Based Research* segundo Cobb et al (2003). Criamos atividades relacionadas ao conteúdo de funções trigonométricas objetivando levar o acadêmico a identificar as razões trigonométricas, no ciclo trigonométrico, o conceito de periodicidade, amplitude, domínio, conjunto Imagem em funções trigonométrica possibilitando ao acadêmico uma ideia do que se trata esta abordagem no ensino de funções trigonométricas, ou seja, como organizar o raciocínio e de forma a construir argumentações lógicas. Esperávamos que o acadêmico apresentasse alguma dificuldade relacionada à maneira de organizar o raciocínio e construir argumentações lógicas, também na operacionalização do *software*, uma vez que seria o primeiro contato com o *software GeoGebra*.

As atividades foram direcionadas a três acadêmicos do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Fundamentos de Matemática I. Abordamos conteúdo da trigonometria no triângulo retângulo numa perspectiva investigativa para o estudo de seno, cosseno e tangente, na qual iniciou-se a construção do conhecimento por triângulos retângulos, passando para o ciclo trigonométrico e pôr fim a utilização de gráficos das funções correspondentes. Para esta atividade disponibilizamos três encontros de duas horas/aula cada, nas dependências da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - Brasil, no laboratório de informática.

Primeiramente foi feita uma revisão da teoria no que se refere ao conceito das relações trigonométricas para o triângulo retângulo, e em seguida generalizando este conceito para o ciclo trigonométrico, partindo do pressuposto que os acadêmicos já estudaram este conteúdo quando cursou a disciplina regularmente. Na sequência foi apresentado o *software GeoGebra* ao acadêmico, informando que se trata de um *software* matemático que reúne geometria, álgebra, cálculo e estatística em três janelas diferentes: Gráfica, algébrica e numérica. Esperamos respostas a algumas questões e/ou soluções que o acadêmico construa, tais como: Como você explicar, os conceitos de ângulo e de arco trigonométrico; Qual(is) estratégia(s) pode (m) ser utilizada (s) por um professor a fim de proporcionar a alunos a construção do significado de periodicidade; Como o aluno entende o significado da tangente de  $x$ , se ele percebe o  $x$  como argumento da tangente, e não como um produto de duas variáveis.

Nesta atividade esperamos que o acadêmico possa também relacionar dois aspectos de um único conceito: o aspecto operacional, em que o conceito é visto como processo, e o aspecto estrutural, no qual o conceito é visto como objeto.

### **Roteiro para construção de gráficos**

O acadêmico recebeu um *applet*<sup>2</sup> (figura 1), em um arquivo do computador, construído previamente no qual o mesmo passou a fazer sua investigação, uma vez que a construção da figura requer um domínio maior do *Software*. Nesta atividade coube ao aluno observar e analisar a variação do seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico, movimentando o ponto P, e visualizando as funções no gráfico. Ao mesmo tempo em que observava o ciclo, o acadêmico tinha a opção de selecionar apenas uma ou mais opções, ou até mesmo todas ao mesmo tempo.

Nesta atividade o acadêmico pôde selecionar a opção que desejava, não fornecemos um roteiro, deixamos que ele criasse as suas funções e investigasse o que acontecia com a sua imagem no *software*. Nossa intervenção foi no sentido de propormos algumas questões com relação ao arco

---

<sup>2</sup> É um *software* aplicativo que é executado no contexto de outro programa.

construído pelo ponto P, medida do raio da circunferência, o comprimento da circunferência, o comportamento da função seno, função cosseno e função tangente observando nos respectivos quadrantes suas variações, sempre no intuito de o acadêmico compreender as relações e propriedades da trigonometria. Por meio da exploração do software de geometria dinâmica o recurso de arrastar, permite a visualização das propriedades das figuras construídas. Assim observamos e argumentamos junto ao acadêmico sobre como explicar, os conceitos de ângulo e de arco trigonométrico.

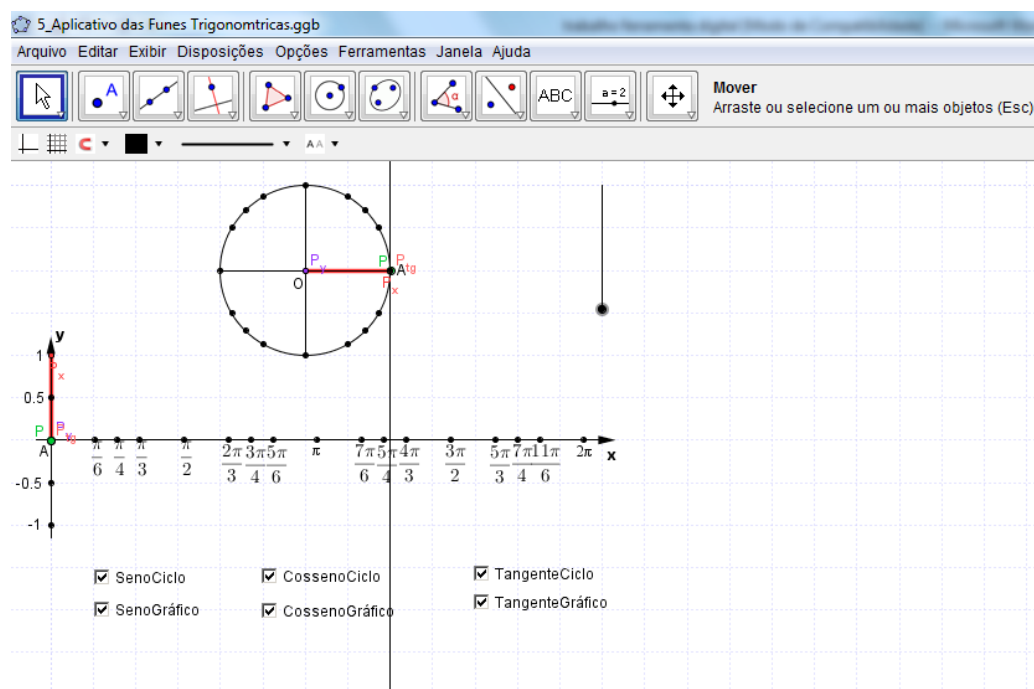


Figura 1 –Applet do Ciclo trigonométrico no GeoGebra

Após os estudantes empreenderem várias investigações foi então solicitado a eles que comentassem a atividade. Foi registrada a seguinte fala de um dos três acadêmicos: “com o *Software*, somos convidados a investigar diversas situações, podendo ter no nosso computador o registro de todas as situações criadas”.

Posteriormente disponibilizamos mais dois *applet*, de modo que ao manipular podiam observar a construção gráfica da função seno e cosseno. Nesta atividade propusemos 5 (cinco) tarefas, disponibilizamos com o *Software* o eixo cartesiano e as opções  $f(x)=a \cdot \sin(x)$ ,  $g(x)=b \cdot \sin(x)$ ,  $p(x)=\sin(m \cdot x)$  e  $q(x)=\sin(x) + n$ . O acadêmico digitava o valor para cada variável  $a$ ,  $b$ ,  $m$  e  $n$ , pertencente ao conjunto dos números inteiros e analisava as variações no gráfico da função.

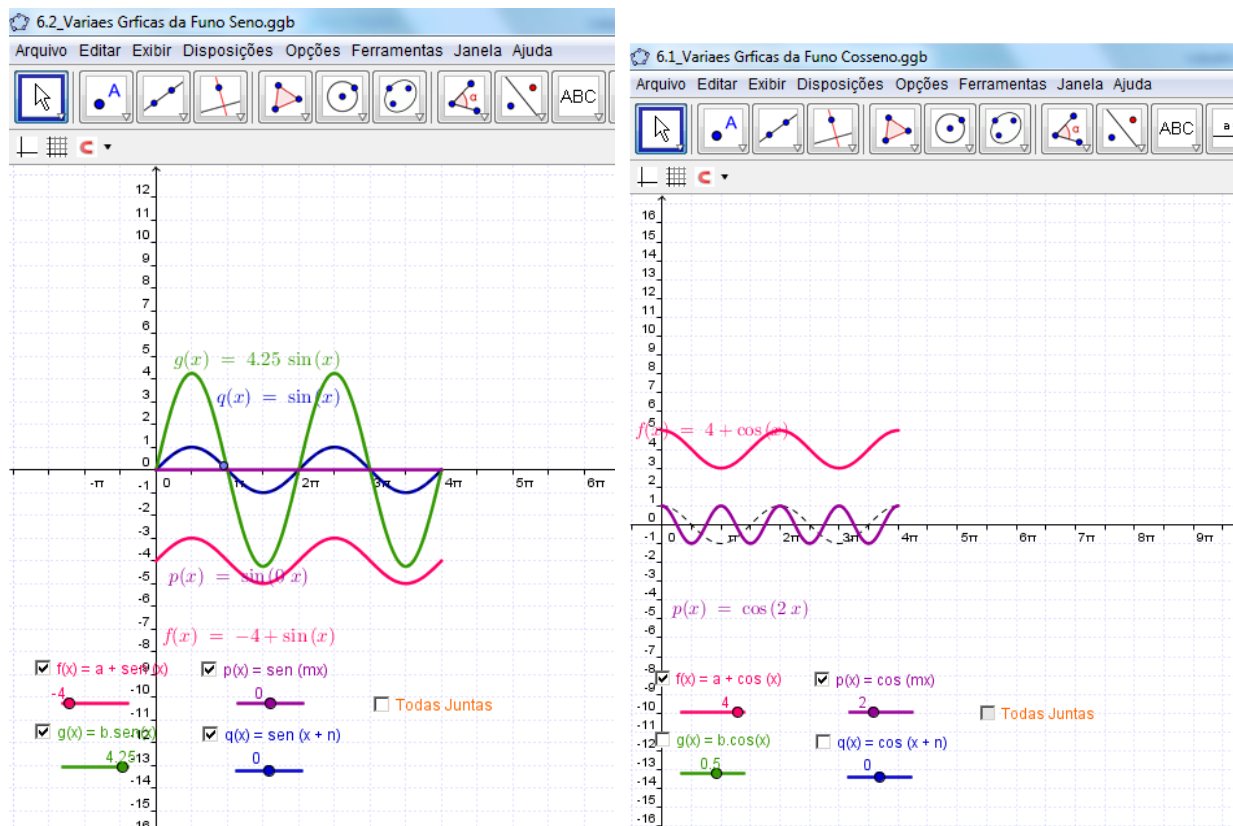


Figura 2: Applet da função seno e função cosseno no GeoGebra

- ✓ Tarefa 1:  $y = \sin x$ ;  $y = \sin x + 1$ ;  $y = \sin x + 2$ .
- O que você observa ao comparar os gráficos na tarefa 1?
- ✓ Tarefa 2:  $y = \sin x$ ;  $y = \sin x - 1$ ;  $y = \sin x - 2$ .
- O que você observa ao comparar os gráficos na tarefa 2?
- ✓ Tarefa 3:  $y = \sin 2x$ ;  $y = \sin 3x$ ;  $y = \sin \frac{x}{2}$ ;  $y = \sin \frac{x}{4}$ .
- O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 3?
- ✓ Tarefa 4:  $y = 2 \sin x$ ;  $y = 3 \sin x$ ;  $y = 4 \sin x$ .
- O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 4?
- ✓ Tarefa 5:  $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ;  $y = \cos x$ .
- O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 5?
- ✓ Tarefa 6:  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ;  $y = -\cos(x)$ .
- O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 6?

O acadêmico observou a variação no eixo cartesiano na atividade da tarefa 1 e 2, relacionando com o período da função, e na tarefa 3 e 4 a diferença entre multiplicar a função seno ou cosseno por uma constante e a multiplicação da constante com o arco correspondente.

Nesta atividade registramos a seguinte fala de um dos acadêmicos: “agora sim pude perceber qual é variável o parâmetro que determina a variação do gráfico no eixo do x e do eixo do y, quando o gráfico encurta ou fica mais comprido”.

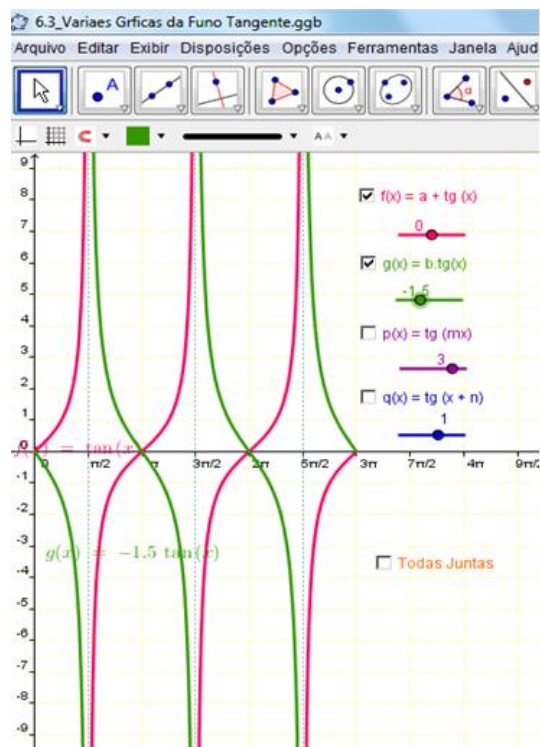


Figura 4: Applet da função tangente no GeoGebra

Neste último *Applet*, direcionamos nossa intervenção no sentido de responder à questão de como o acadêmico entende o significado da tangente de  $x$ , se ele percebe o  $x$  como argumento da tangente, e não como um produto de duas variáveis, sem esquecer nosso objetivo principal, observando os gráficos em relação a tangente.

Em nossas intervenções buscamos relacionar com esta ferramenta, sempre a discussão em relação ao conceito e definição dos conteúdos abordados, envolvendo a observação e reflexão que visam à atuação em situações contextualizadas, através de uma metodologia de formação investigativa, e com isto a possibilidade de o acadêmico colocar em prática seus conhecimentos na oportunidade de contato com o objeto em construção.

Na THA as tarefas matemáticas, Simon e Tzur (2004) identificaram tipos de tarefas que se pode propor aos alunos para que desenvolvam suas capacidades. Chamam de tarefas iniciais as que podem ser realizadas por estudantes que usam seu conhecimento prévio, já as tarefas que permitem que os alunos reflitam sobre ela própria relacionando-a para gerar abstração de regularidades na relação atividade-efeito, são denominadas de tarefas de reflexão e caracterizam ainda as tarefas de antecipação realizadas durante uma HLT às quais, para realização necessitam que o aluno tenha produzido uma abstração de regularidade na relação atividade-efeito.

Concluimos que as tarefas foram significativas para o ensino de funções seno, cosseno e tangente aliado a atividade de ensino com o *Software GeoGebra*, pois consideramos a aplicação do conceito a partir dos conhecimentos prévios dos alunos. Sabemos que a trigonometria pode ser abordada sob diferentes registros, de maneira a evitar aplicações que envolvam somente algoritmos e procedimentos, sobretudo algumas conexões entre a trigonometria e outras partes da matemática ou, talvez, entre está e as outras disciplinas como é proposta no Projeto Político Pedagógico do curso.

Os resultados permitem afirmar que a metodologia adotada auxiliou os alunos a ampliarem o conhecimento de tais conceitos, resultados também constatados em nossa intervenção com o acadêmico. No desenvolvimento do trabalho adotamos uma série de atividades investigativas para analisar as potencialidades e limitações do *Software* no ensino e aprendizagem da trigonometria, e assim, constatamos por meio desta sondagem, que foi possível diagnosticar que o *software* se mostrou muito eficaz, auxiliando os alunos a relacionarem os conceitos já vistos quando cursaram a disciplina regularmente.

Em nossa intervenção observamos e registramos algumas falas dos acadêmicos, mostrando a importância de se discutir a relação teoria e prática com um *software* matemático, possibilitando ao acadêmico a visualização e a interação, não ficando somente na fala do professor e na demonstração dos conceitos em lápis e papel. Consideramos que o acadêmico em virtude do pouco contato com o *software*, não realizou o processo de abstração da matemática ao relacionar o aspecto operacional e estrutural, no caso ele só atingiria se conseguisse interiorizar de modo a captar como um todo o conceito matemático da questão. Observamos ainda, que além da dificuldade de operacionalizar o *Software*, os acadêmicos apresentaram alguns erros conceituais no que tange à maneira de organizarem o raciocínio e construir argumentações lógicas do conteúdo.

Nesta intervenção concluímos que a geometria dinâmica auxiliou nas atividades investigativas, de modo que os acadêmicos interagiram com o *software*. percebemos que a melhoria da prática depende do envolvimento do docente na busca de novas metodologias. Sendo assim, as análises nos levaram a concluir que as atividades auxiliaram os acadêmicos a construir novos procedimentos e estratégias de ensino que contribuirão de forma positiva atingindo o objetivo da aprendizagem e investigação no ensino de função trigonométrica.

### Referências

- Coob, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003.). *Design experiments in education research*. Educational Researcher, v.32(n.1), pp. 9-13.
- Figueiredo, S. A.; Lobo Da Costa, N. M.; Llinares, S. Valls, J. *Caracterização em uma Trajetória de Aprendizagem com Funções Trigonômicas*. XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática. Tuxtla Gutierrez. Mexico. 2015.
- Lobo da Costa, N. M. (2004). *Formação de Professores para o ensino da Matemática com a informática Integrada à prática Pedagógica: exploração e análise de dados em bancos computacionais*. Tese de Doutorado em Educação. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.
- Piaget, J. (1977). *Studies in Reflecting Abstraction*. Sussex: Psychology Press.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 26, No. 2, 114-145.
- Simon, M. A., Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Simon, M. A., Tzur, R, Heinz, K and Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305-329.