



Conocimiento Matemático de Probabilidad que ponen en acción Profesores de Bachillerato

José Miguel León Banguero
Universidad Autónoma de Zacatecas
México

josemigleon@gmail.com

Leticia Sosa Guerrero
Universidad Autónoma de Zacatecas
México

lsosa@uaz.edu.mx

Diego Díaz
Universidad del Valle
Colombia

diegoden09@yahoo.com

Resumen

Resulta interesante plantearse la cuestión acerca del conocimiento que debe de poseer un profesor para enseñar probabilidad, dado que el desarrollo del pensamiento aleatorio en estudiantes contribuye a la toma de decisiones en eventos aleatorios. Para abordar dicha cuestión se considera pertinente identificar el estado actual de *Conocimiento de los Temas (KoT)* para la enseñanza de la probabilidad en bachillerato en Colombia; para ello se propone, a partir del modelo MTSK, el diseño de un cuestionario de preguntas abiertas para la evaluación de conocimientos de ocho profesores en ejercicio. El análisis de los resultados de la aplicación de la prueba permitió reconocer que los profesores estudiados poseen desempeños bajos en los temas de probabilidad; también la investigación arrojó la identificación de elementos importantes para la enseñanza de la probabilidad con respecto al KoT.

Palabras clave: conocimiento, probabilidad, didáctica, profesores, formación.

Introducción

En la actualidad, uno de los principales interrogantes de investigación en la disciplina de la Matemática Educativa es acerca del conocimiento que debe de poseer un profesor de matemáticas para llevar a cabo un proceso de enseñanza eficaz y propiciar el aprendizaje en sus alumnos. Sin embargo, responder dicha cuestión no es tarea fácil, dado que conlleva a hacer un análisis más profundo del conocimiento del profesorado que toma en consideración la naturaleza, las características, el grado de conocimiento actual y necesario, las formas de enseñanza y demás elementos que juegan un papel fundamental en la formación del profesor.

Fruto de diversas reflexiones sobre el desarrollo profesional del profesor, surgen perspectivas sobre las cuales se pueden estudiar y modelar los conocimientos del profesor para la

enseñanza de las matemáticas, entre las cuales se destaca el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), propuesto por el grupo Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva, España. Este modelo dual se considera, por un lado, como una herramienta metodológica que brinda al investigador diferentes maneras de analizar las prácticas del profesor mediante la delimitación de categorías de conocimiento; por otro lado, como una propuesta teórica que modela el conocimiento matemático y didáctico del profesor (Medrano, Escudero, Montes, Aguilar y Carrillo; 2014).

En las últimas décadas, distintas reflexiones manifiestan la importancia de delimitar elementos para la enseñanza de contenidos de estadística y probabilidad en distintos niveles educativos (Mohamed, Ortiz y Serrano, 2007; Ortiz, Batanero y Contreras, 2012); dado que el aprendizaje de contenidos estocásticos promueve el razonamiento crítico de fenómenos aleatorios y contribuyen a la elaboración de juicios razonables a través de datos cuantitativos y conceptos elementales para tomar decisiones en fenómenos permeados por el azar y la aleatoriedad (Batanero, Gómez, Contreras y Díaz., 2015). Por esta razón, resulta relevante y significativo para la delimitación del conocimiento núcleo del profesor de matemáticas realizar investigaciones que estén dirigidas a caracterizar y establecer el conocimiento del profesor en la enseñanza de contenidos de estadística y probabilidad (Guerrero, 2015).

En este sentido, se plantea el objetivo general de la investigación el cual es identificar el estado actual de *Conocimiento de los Temas* (KoT) a profesores que estén impartiendo probabilidad en el nivel bachillerato en Colombia. Es importante resaltar que para esta investigación toma en consideración el modelo del MTSK, con el fin de identificar elementos en uno de sus subdominios de conocimiento, sin embargo, se reconoce a partir de resultados de otras investigaciones, la posibilidad de que aparezcan elementos pertenecientes otros subdominios, dado que estos poseen distintas relaciones entre sí y están en forma de amalgama.

Fundamentos Teóricos

En los últimos años, el grupo de investigación SIDM de la Universidad de Huelva, España, ha desarrollado un modelo que comprende aquellos conocimientos específicos del profesor que están relacionados directamente con la enseñanza de las matemáticas. Este modelo, basado en la idea de especializar el conocimiento del profesor, provee una mirada crítica y reflexiva del quehacer docente, dado que considera las creencias y concepciones de los profesores con respecto a la matemática y su enseñanza (Rojas et al., 2015).

Es importante resaltar, que el modelo MTSK surge a partir de algunas modificaciones y precisiones del modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), propuesto Ball et al. (2008). Esto se debe a que el MKT ha sido objeto de discusión por problemas de delimitación del Conocimiento Común del Contenido y del Conocimiento del Horizonte Matemático, como acciones del profesor (Montes et al., 2013; Jakobsen, Thames y Ribeiro, 2013). En este sentido, el MTSK, en respuesta a dichos problemas de delimitación, propone caracterizar, desde la especificidad, la enseñanza de los contenidos específicos por parte del profesor a partir de una nueva propuesta de organización, la cual está compuesta por dos categorías Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK); a su vez, cada una de esos dominios comprende tres subdominios, los cuales han sido divididos de manera intrínseca y van a ser explicitados en este documento más adelante.

De manera breve y sucinta se presentan a continuación los distintos subdominios del MK y PCK, los cuales son de gran interés en el foco de esta investigación, dado que ayudarán a esclarecer y evidenciar algunos elementos del conocimiento especializado del profesor a través

de instrumentos de recolección de datos.

El MK es considerado como uno de los conocimientos articuladores del MTSK dado que retoma factores fundamentales del conocimiento del profesor como la materia, los conceptos y sus relaciones, los procesos de resolución de problemas, los conocimientos implícitos de los procedimientos, etc. (Rojas et al., 2015). A partir de la delimitación de este dominio, se establecen tres subdominio esenciales los cuales son:

- Conocimiento de los Temas (KoT): Este abarca los conocimientos que posee un profesor de matemáticas con respecto a los contenidos matemáticos y su significado. Este subdominio comprende todo lo que se refiere en saber definiciones, procedimientos, ejemplos específicos, fenomenologías asociados al concepto, propiedades y sus caracterizaciones (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2016).
- Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM): Este subdominio encierra una perspectiva conjuntista y global de la estructura matemática (Rojas et al., 2015); dado que abarca todas las conexiones interconceptuales entre los contenidos, las cuales comprenden los vínculos que hay entre las ideas con las representaciones del mismo concepto. Este tipo de conocimiento también reconoce las conexiones temporales que existen de un mismo concepto, es decir, aquellos enlaces entre los conocimientos previos y posteriores del mismo con respecto a diferentes cursos y niveles educativos.
- Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): Se considera como el conocimiento que posee el profesor sobre los modos de proceder y sintaxis en matemáticas. Este conocimiento consiste en saber cómo hacer, descubrir y crear matemáticas.

Por otro lado, en el MTSK se propone la consideración del PCK dado que retoma los aspectos de conocimiento particular del profesor relacionados con la enseñanza y aprendizaje de un contenido, las consideraciones curriculares, el conocimiento que se deriva de la indagación bibliográfica de la literatura en investigación (Rojas et al., 2015). A partir de la delimitación de este dominio, se establecen tres subdominios esenciales los cuales son:

- Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): Es el conocimiento que le provee al profesor herramientas para la elección de recursos (materiales o tecnológicos) que utiliza para enseñar. En este sentido, este tipo de subdominio incluye los conocimientos acerca de la elección de libros de texto, tipos de representación, ejemplos, tipos de tareas, entre otras, usadas para los procesos de instrucción; la elección de este tipo de recursos didácticos se hace con el fin de adquirir, reforzar, potenciar o ejercitar los contenidos (Rojas et al., 2015).
- Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): Este engloba los conocimientos que tiene el profesor de matemáticas con respecto a las características de aprendizaje (formas de razonamiento, dificultades, errores, sesgos, conexiones intraconceptuales, entre otras.) que poseen los estudiantes en la interacción inherente con el contenido matemático.
- Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): En este se considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de los estándares, aprendizajes esperados por niveles, competencias, contenidos, orientaciones de enseñanza, materiales curriculares, entre otros., propuestos por las organizaciones oficiales o asociaciones de investigadores expertos (PISA, NCTM, OCDE, UNESCO).

Para esta investigación, se toma como referencia el modelo MTSK propuesto por Carrillo, et al. (2013), con el fin de explorar el conocimiento actual del profesor de matemáticas en el currículo de matemáticas en Colombia; específicamente se pretende identificar el conocimiento

de los temas de probabilidad, de profesores estudiantes de primer año de bachillerato. Es importante resaltar, que para esta investigación tomando en consideración los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en Colombia en el 1998, 2003 y 2013, respectivamente.

En adición a lo anterior, es importante mencionar que las vertientes teóricas sobre contenido probabilístico en las aulas de bachillerato son limitadas, a pesar de ello no se ha dejado de hacer investigación y se han adaptado modelos de conocimiento profesoral como el MTSK, MTK y Modelo de Conocimiento Didáctico Matemático, en la investigación sobre el contenido conocimiento profesoral para la enseñanza de la probabilidad. En ese sentido, para esta investigación se destacan referentes teóricos y metodológicos como Batanero et al. (2015), Vásquez y Alsina (2015) y Mohamed (2012); quienes en sus investigación del conocimiento profesoral para la enseñanza de la probabilidad en los temas (KoT) hacen aportes significativos a el estado actual del conocimiento, permitiendo delimitar elementos fundamentales como: fenomenología, historia, conocimientos previos y esperados, definiciones, entre otros.

Metodología

En este estudio se propone el diseño de un instrumento de investigación con preguntas tipo abiertas, las cuales estarán encaminadas a identificar elementos del Conocimiento de los Temas (KoT), subdominio perteneciente al modelo MTSK.

El diseño del instrumento se hace a partir de la contextualización al sistema educativo en Colombia y se retoman actividades propuestas de instrumentos elaborados por Vásquez y Alsina (2014), Batanero et al., (2015) y Mohamed (2012). En los instrumentos retomados, se realizan pruebas de conocimiento con el objetivo de medir el conocimiento de contenido y didáctico del profesor de matemáticas en la enseñanza de probabilidad, desde el modelo del MKT. Sin embargo, el rediseño que se propone pasó por un proceso de validación, el cual consta de dos momentos: en el primero, cada ítem planteado fue sometido a una validez de contenido, lo cual permite reconocer a priori si cada uno de estos mide el conocimiento de los contenidos y sus interconexiones para la enseñanza de la probabilidad; esta prueba de validez de contenido está soportada a partir de un análisis previo sobre las recomendaciones de currículos internacionales como Escuela Secundaria Obligatoria, National Council of Teachers of Mathematics y Proyecto Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Educations (GAISE). En un segundo momento, se coteja si cada ítem elaborado es capaz de medir el conocimiento para la enseñanza de la probabilidad, en los subdominios del Conocimiento de los Temas (KoT) y el Conocimiento de las Características de Aprendizaje (KFLM), para lo cual se consideró un juicio de expertos quienes permiten hacer una evaluación cualitativa para identificar el grado de correspondencia, formulación y pertinencia de cada uno de los ítems propuestos.

Es importante resaltar que hasta el momento se ha implementado este instrumento para identificar el conocimiento actual a siete profesores de matemáticas de secundaria, bachillerato y preparatoria que están cursando la Maestría en Matemática Educativa en la Universidad del Valle, Colombia. Los participantes del estudio son profesores de instituciones educativas públicas y cuentan con más de cinco años de experiencia profesoral, de los cuales, al menos, han impartido dos años matemáticas a niveles educativos que en sus contenidos posee probabilidad. La aplicación de la prueba fue en el marco del curso Concepción Teórica, el cual se brinda a estudiantes de primer semestre.

La forma en cómo se analizarán los resultados del instrumento aplicado es a través de un

análisis cuantitativo y cualitativo. Con respecto al análisis cuantitativo se hace una clasificación de las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas; es importante resaltar que el objetivo de la investigación no es evaluar el estado actual del conocimiento de los profesores estudiados, sin embargo, se considera pertinente hacer mención a este resultado dado que permite dimensionar el estado actual de conocimiento profesoral del dominio MK, dado que según Batanero et al. (2015), existe una intrínseca relación entre los conocimientos matemáticos y didácticos a la hora de enseñar un contenido en particular. En un segundo momento, haciendo un análisis desde un punto de vista cualitativo de las respuestas, se reconocen algunos elementos propios del Conocimiento de los Temas (KoT).

Instrumento

El cuestionario de investigación está propuesto en dos momentos. En el primero se pide resolver tres problemas sobre probabilidad, los cuales son adaptaciones de problemas validados y utilizados en investigaciones de maestría y doctorado (Batanero et al., 2015; Mohamed, 2012 y Vasquez y Alsina, 2015) ; esto con el fin de identificar el estado actual del conocimiento matemático de probabilidad en profesores de bachillerato. En un segundo momento, se identifican los conocimientos didácticos y estructurales del profesor en la enseñanza de la probabilidad, en ese sentido se realizan tres ítems adicionales, en los cuales se busca que el participante seleccione la respuesta o respuestas correctas y justifique ampliamente cada una de las respuestas incorrectas de los estudiantes, en este sentido se busca que reconozca errores y dificultades que presenta el alumno ficticio. A continuación se presenta a manera de ejemplo una de las situaciones del instrumento.

Situación 3: Alejandra y Amparo son estudiantes muy curiosas. Cansadas de jugar siempre lo mismo, han decidido poner en uso su imaginación para inventar un juego que consiste en lanzar dos dados. Para jugar deben de tener en cuenta las siguientes reglas:

- Calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
- Si el resultado es 0, 1 ó 2, entonces Alejandra le cobra a Amparo \$1.000
- En cambio, si el resultado es 3, 4 ó 5, Amparo es quien le cobra a Alejandra \$1.000.

Parte 1: A partir de la situación anterior responde:

- Desde su opinión ¿el juego inventado por Alejandra y Amparo es justo? Justifica tu respuesta.
- En caso de que su respuesta anterior sea negativa, ¿cuál sería la manera de modificar el juego para volverlo justo?
- Si usted decidiera jugar con las condiciones iniciales de Alejandra y Amparo, luego de n-partidas ¿cuánto se esperaría que ganara o perdiera cada una de las participantes?

Parte 2: A partir de las respuestas de los alumnos responde las siguientes preguntas:

- Indica el contenido matemático deben usar los alumnos para dar la respuesta correcta
- Señala las respuestas correctas e incorrectas
- Para cada una de las respuestas incorrectas explica cuáles son las posibles intuiciones o estrategias que han llevado a los participantes a dar una respuesta errónea

Respuestas de alumnos ficticios al ítem 1

- El juego es justo, dado que todos los resultados son igualmente probables.
- Es justo. Sin embargo como es un juego de azar, no se puede predecir.

- Es injusto, porque es más difícil obtener los resultados 3, 4 o 5.
- El juego es injusto, dado que si se analiza cada uno de los casos y se calcula la probabilidad se puede dar cuenta que Amparo tiene mayor probabilidad de ganar.
- El juego es justo, sin embargo si se juega varias veces es posible que Amparo gane.

Resultados

Posterior a la aplicación del instrumento, se realiza una recolección y análisis de los resultados. Entre los hallazgos que deja la prueba se pueden reconocer algunos elementos importantes a tomar en consideración durante la enseñanza de la probabilidad en nivel de bachillerato, los cuales algunos de éstos han sido reportados en investigaciones como Batanero et al. (2015); Guerrero (2015) y Mohamed (2012).

Con respecto a las respuestas de la Parte 1 de cada una de las situaciones del instrumento, el desempeño de los profesores con respecto al conocimiento del contenido matemático fue bajo. Esto puede inferirse a partir de la clasificación de las respuestas Incorrectas (I), Parcialmente Correctas (PC) y Correctas (C), lo cual pueden ver en la Tabla 1.

Tabla 1:

Resultados de las respuestas por parte de los siete profesores (estudiantes de la maestría) a la Parte 1 de las situaciones.

	Situación 1			Situación 2			Situación 3		
	I	PC	C	I	P	C	I	P	C
A	5	1	1	3	2	2	2	2	3
B	7	0	0	3	1	3	3	2	2
C							6	0	1

Fuente: Elaboración propia

Haciendo un análisis cualitativo de las respuestas, los resultados permiten inferir que los profesores identifican tres tipos de conceptos y elementos, los cuales guardan relación a los identificados por Batanero et al. (2015): conceptos relacionados con el azar (azar, probabilidad, posibilidades, juego equitativo, proporción, etc.), relacionados con las propiedades (carácter aleatorio, sucesos con mayor o menor probabilidad); y procedimientos (combinatorios para enumerar probabilidades, asignación de probabilidades, comparación de casos, regla de tres.)

El análisis de las respuestas permite encontrar elementos que son importantes tomar en consideración para la enseñanza de la probabilidad. En este sentido, se hace mención, con evidencias, de algunos de los elementos que deberían estar presentes en el Conocimiento de los Temas (KoT), desde un punto de vista del MTSK, para la enseñanza de la probabilidad.

- Hacer mención a la definición de equiprobabilidad y los factores que condicionan un evento aleatorio (Ver Figura 2).

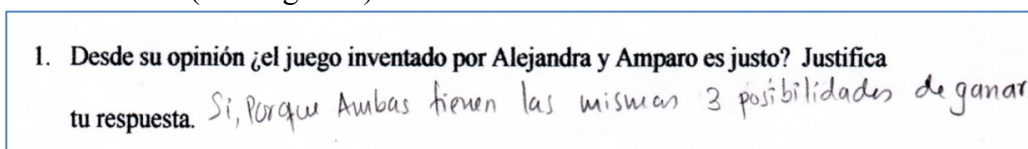


Figura 2: Respuesta Participante #1

En la Figura 2 se puede inferir que uno de los participantes presenta errores con respecto a la noción de equiprobabilidad.

- Se establece la importancia de que el profesor determine objetos y conceptos

probabilísticos como espacios muestrales, dependencia o no de eventos y cálculo de las probabilidades a cada uno de los eventos de la situación (Ver Figura 3).

	1	2	3	4	5	6	
1	2	3	4	5	6	7	2 opciones
2	3	4	5	6	7	8	3 opciones
3	4	5	6	7	8	9	4 opciones
4	5	6	7	8	9	10	5 opciones
5	6	7	8	9	10	11	6 opciones
6	7	8	9	10	11	12	7 opciones

Figura 3: Respuesta Participante #2

En la Figura 3 se puede inferir que la respuesta de uno de los participantes de la prueba en su procedimiento de respuesta calcula todas las probabilidades asociadas a cada evento de la situación. De igual forma hace uso de una representación tabular para mostrar todas las posibles combinaciones que se puede dar en el lanzamiento de dos dados.

- Se reconoce la importancia de elementos para la enseñanza de la probabilidad, específicamente ellos que guardan relación con la comparación de probabilidades y noción de juego equitativo (Ver Figura 4).

a. Considero que el juego no es justo ya que hay mayor posibilidad de que las restas al lanzar los dados sean 0, 1 y 2, por lo tanto, hay más probabilidad de que Alejandra gane y Amparo pierda más dinero.

Figura 4: Respuesta Participante #3

En la Figura 4 se puede inferir que uno de los participantes en sus respuestas trae a colación propiedades de conceptos, en este caso de juegos equitativos, dado que manifiesta la necesidad de una proporcionalidad en términos de probabilidades eventos y respectivas recompensas.

Conclusiones

El diseño, aplicación y análisis del instrumento de investigación para la evaluación del KoT ha permitido reconocer la importancia latente del conocimiento de los temas por parte del profesor en la labor de enseñanza. El análisis cuantitativo de las respuestas permite afirmar que los conocimientos sobre los temas para la enseñanza de la probabilidad son limitados, lo cual se complementa lo encontrado por Batanero et al., (2015). Se considera pertinente y significativo para fortalecer el estado actual del arte, rediseñar y replicar el instrumento propuesto, esto con el fin de establecer conclusiones generales los profesores en la enseñanza de la probabilidad.

Otro aspecto relevante que se concluye a raíz del diseño del instrumento es la importancia de los aspectos fenomenológicos de los conceptos probabilísticos; en este sentido se reconoce el papel fundamental que tienen los juegos de azar para el aprendizaje, comprensión y significación de la probabilidad. Se hace la recomendación, para fortalecer dicho aspecto, diseñar secuencias didácticas o propuestas de aula que integren los juegos de azar en el diseño de las situaciones.

El análisis cualitativo de los resultados de la prueba permite inferir distintos elementos que pertenecen a la subcategoría del Conocimiento de los Temas, en este sentido se reconocen diversos elementos como objetos y conceptos fundamentales para la enseñanza de la probabilidad. Se considera importante que para futuras investigaciones, analice una muestra mayor de profesores, esto con el fin de rescatar elementos del KoT y elaborar indicadores para la evaluación de este conocimiento.

Referencias Bibliográficas

- Ball D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Batanero, C. Ortiz, J. Serrano, L. (2007). *Investigación en Didáctica de la Probabilidad*. Departamento de Didáctica de la Matemática. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, 7-16.
- Batanero, C., Contreras, J., Cañadas, C., y Gea, M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades educativas*, 261, 78-84.
- Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J., & Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratorio. *Práxis Educativa*, 10 (1).
- Carrillo, J. Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). “Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching”. En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Ankara, Turquía.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas* (pp. 57-72). Huelva, España. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Guerrero, H. (2015). *Evaluación de Conocimientos sobre Esperanza Matemática y juegos equitativos en alumnos de Bachillerato*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Jakobsen, A., Thames, M. H. y Ribeiro, C. M. (2012). Delineating Issues related to Horizon Content Knowledge for Mathematic Teaching. En B. Ubuz, C. Haser C, MA Mariotti (Eds.), *Actas del 8.o congreso del CERME* (pp. 3125–3134). Antalya, Turquía.
- Mohamed, N. (2012). *Evaluación del Conocimiento de los Futuros Profesores De Educación Primaria Sobre Probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Montes, M., Contreras, L., y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Huelva, España.
- Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Boletim de Educação Matemática*, 29 (51), 143-166.
- Vásquez, C. & Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números*, 85, 5- 23.