# Visualización y producción de enunciados en las propiedades del triángulo

Griselda González Arriaga
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"
México
grisgonzalez5@yahoo.com.mx
Luis Manuel Aguayo Rendón
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas
México
l_aguo@yahoo.com.mx

## Resumen

Esta ponencia forma parte de una tesis doctoral en construcción cuyo objetivo es probar una propuesta de formación para la enseñanza de la geometría con futuros profesores y docentes de escuelas multigrado. La finalidad es analizar la visualización en la actividad geométrica mediante la entrada del constructor considerada como necesaria por Duval (2005), y su importancia en este caso para identificar las propiedades del triángulo. El trabajo se basa en la perspectiva teórica Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) de Houdement y Kuzniak (2006). Es de carácter cualitativo, analiza la construcción y justificación de un profesor que participa en la experimentación y se observa la relación de los componentes cognitivos del ETG. Entre los hallazgos más relevantes encontramos que la descripción de las figuras geométricas permite producir una forma visual que tiene una propiedad geométrica, además, se confirma la importancia de activar la visualización no icónica en la actividad geométrica.

*Palabras clave*: visualización, geometría, formación de profesores, entradas de la geometría, triángulo.

## Introducción

Esta ponencia deriva de una tesis doctoral en construcción en la que se experimenta una propuesta de formación para la enseñanza de la geometría con estudiantes y profesores de escuelas multigrado, en este trabajo se muestran los primeros avances y observaciones realizadas. El referente teórico que orienta el trabajo se basa en las concepciones sobre el trabajo matemático y las investigaciones en didáctica de la geometría de Houdement y Kuzniak (2006), específicamente en la perspectiva del Espacio de Trabajo Matemático, donde se señala que a través de la actividad matemática el individuo configura un constructo teórico acerca del objeto y del contenido matemático en cuestión. En este sentido y en el tema en particular de dicha investigación, nos referiremos al Espacio de Trabajo Matemático en el subdominio Geométrico (ETMG) o simplemente al Espacio de Trabajo Geométrico (ETG).

El saber geométrico que se coloca en el ETG son las propiedades y elementos notables del triángulo, es por ello que resulta necesario que estos contenidos geométricos se incluyan en las situaciones didácticas que forman parte de la propuesta experimental. Cabe mencionar que, en tanto que la propuesta se experimenta con profesores en formación y docentes que se desempeñan profesionalmente en escuelas multigrado, las interacciones entre unos y otros es una variable importante que tiene relación con los conocimientos geométricos y didácticos necesarios para que los sujetos del estudio reconstruyan las situaciones didácticas trabajadas en el ETG cuando las apliquen en los grupos de educación primaria.

## Fundamentación teórica

Para comprender la estructura del Espacio de Trabajo Geométrico (Ver figura n° 1) deben considerarse los componentes que caracterizan a toda actividad geométrica en su dimensión puramente matemática, es decir, en el plano epistemológico de un ETG se encuentran componentes como: un espacio real y local, un conjunto de artefactos y un sistema teórico de referencia. Estos componentes, a través de las génesis (figural, instrumental y discursiva) del espacio de trabajo, se articulan con aquellos que conforman el plano cognitivo: la visualización, la construcción y la prueba.

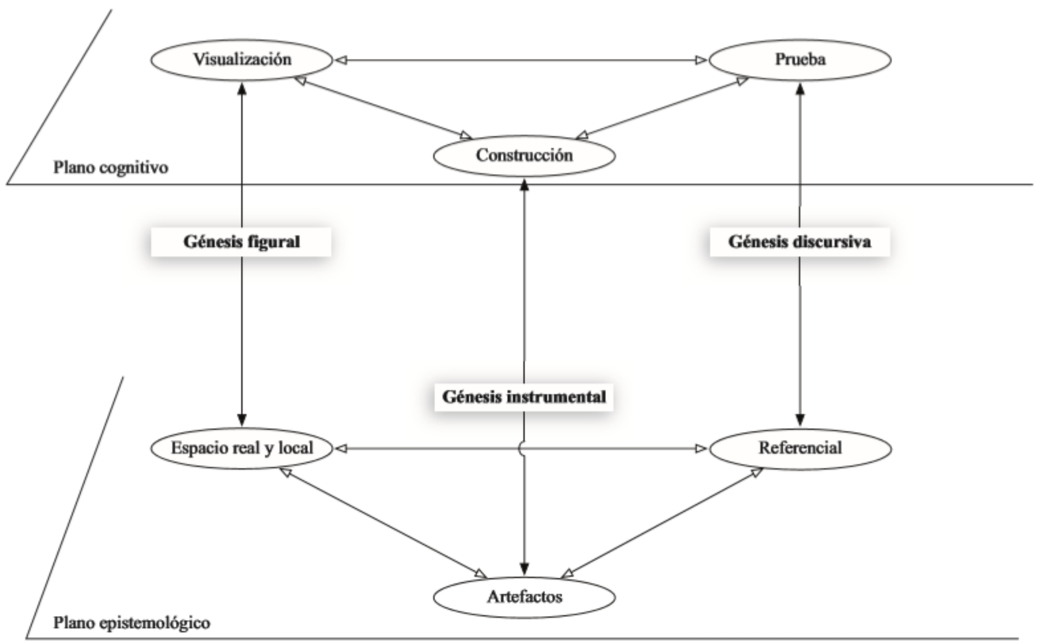



Figura 1. El espacio de trabajo geométrico y su génesis (Kuzniak, 2011).

Sin embargo, la estructura de un ETG debe entenderse como un modelo dinámico porque se requiere la activación de todas las génesis para que lograr un aprendizaje geométrico; por ello, los componentes de ambos planos resultan fundamentales en el proceso de enseñanza de la geometría. Empero, es importante mencionar que estos componentes pueden separarse para su análisis, pero no siempre es posible hacerlo en la actividad matemática.

Por esta posibilidad de separar los componentes para su análisis, en este estudio analizaremos lo relativo al componente de visualización, que es una actividad cognitiva fundamental en la geometría (Duval, 2005). Asimismo, en el plano cognitivo existen ciertos procesos que se activan con el trabajo geométrico (visualización, construcción y prueba) y se relacionan entre sí. En este caso en particular analizamos el proceso de visualización, lo que éste aporta al proceso de construcción y viceversa; es de subrayarse que la visualización también aporta al proceso de la prueba.

## La visualización

La actividad cognitiva que se despliega en el dominio geométrico se puede considerar como una de las más completas, pues en el trabajo geométrico el sujeto debe ver, construir y razonar para aprehender los objetos geométricos. Cuando el geómetra se enfrenta a la tarea geométrica y despliega sus procedimientos mentales para resolverla, se hace presente el componente de visualización; a decir de Houdement y Kuzniak (2006), en la visualización se produce la representación semiótica de un objeto como una figura geométrica o un gráfico cartesiano.

Según Duval (2005), la actividad cognitiva requerida para la actividad geométrica exige la articulación de dos registros de representación que funcionan de manera simultánea e interactiva; el lenguaje y el registro de las figuras. Es decir,

> El reconocimiento de los objetos representados no depende ante todo de la discriminación visual de las formas, sino de las suposiciones que se han realizado y que también controlarán la mirada sobre las figuras. Y este es otro tipo de actividad que se moviliza: la producción discursiva de declaraciones que están vinculadas entre sí para justificar, explicar o demostrar (Duval, 2005, p. 8).

Es por ello, que la enseñanza debe considerar entre sus objetivos la visualización y la producción de enunciados, ambas son condiciones para aprender a aprender en geometría. En ese sentido cabe precisar que toda tarea que se plantee en la actividad geométrica está relacionada con la forma de ver y reconoce dos formas de visualizar según sea el tipo de operación que se realice con las figuras y la manera como se movilizan sus propiedades: una visualización icónica y otra no-icónica (Duval (2005).

Cuando se activa la visualización icónica los objetos se identifican o representan mediante la semejanza con un objeto (real) o por comparación con un modelo tipo de formas (una figura particular sirve de modelo, y otras figuras se reconocen según su grado de parecido con este modelo). Por su parte, señala Duval (2005), la visualización no icónica reconoce las formas por las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones; por las deducciones discursivas acerca de las propiedades enunciadas en las definiciones o en los teoremas o bien a partir de hipótesis que declaran lo que representa una figura. La visualización no icónica facilita entonces la comprensión del problema, de ahí la pertinencia de activarla durante el trabajo geométrico.

## Tipos de aprehensión

Resulta importante señalar que en el actividad geométrica el uso de las figuras posibilita el trabajo con la geometría elemental y en estos casos la visualización es intrínsecamente semiótica y no se puede reducir a una simple percepción visual, sino que en ella confluyen otros tipos de aprehensión según Duval (como se citó en Henríquez, 2014):

1. *La aprehensión perceptiva*. Identifica de manera espontánea la figura a partir de trazos externos o internos que posibilitan la resolución del problema.
2. *La aprehensión operatoria.* Toda figura puede modificarse de diversas maneras (rotar, separar, agrandar, desplazar, etc.), lo que representa una actividad heurística, ya que en la búsqueda de la solución a un problema geométrico, un sujeto puede modificar la figura hasta regresar a la configuración inicial y las modificaciones que hace pueden ser de dos tipos: un cambio figural o una reconfiguración.
3. *La aprehensión discursiva.* Se produce al asociar la configuración con una afirmación matemática (definiciones, propiedades), este razonamiento puede realizarse desde lo visual hacia el discurso o del discurso hacia lo visual ya que la introducción de una figura geométrica necesariamente implica un discurso.

La acción de visualizar figuras está asociada con las posibles actividades que se ofrecen a los alumnos ya que plantear a los estudiantes acciones en función de las figuras, puede ser un trabajo extenso y variado, a decir de Duval (2005, p. 9).

> Las variaciones de actividad se relacionan tanto con la tarea en cuestión (para reproducir una figura según un modelo o para construirla, o para realizar mediciones, o para describirla para que sea reconstruida por otro alumno) y en el modo del actividad solicitada (modalidad concreta utilizando un material manipulable, modo de representación apegándose a las únicas producciones gráficas, o modalidad técnica mediante la imposición de ciertos instrumentos).

## Las entradas de la geometría

Considerando las potenciales variaciones de la actividad Duval (2005) identifica cuatro "entradas" o tipos de actividades para el trabajo geométrico:

1. La entrada del botánico (botanise). Es evidente e inmediata, en ésta se reconocen y nombran las formas más elementales de la geometría plana, se observan las características entre formas similares y/o diferentes y se distinguen sus propiedades a partir de las características visuales del entorno. La actividad del botánico no es geométrica pero se considera una primera etapa en todo proceso de adquisición de conocimientos geométricos.

2. La entrada del topógrafo (arpenter-géomètre). Las actividades se centran en aprender a medir -por ejemplo la distancia entre dos puntos- y llevar esta medida a un dibujo que toma el estatus de plano, generalmente las tareas exigen pasar de una escala de magnitud a otra, por lo que se deben igualar. Como no existe un procedimiento común para medir las distancias reales en el campo y las longitudes de un dibujo, pasar de una medida a otra se convierte en una dificultad para el estudiante. Cuando se eligen los objetos como puntos de referencia para representar su posición, se toman en cuenta las direcciones u orientaciones aunque estos aspectos no siempre sean relevantes para la representación geométrica.

3. La entrada del constructor (constructeur). Es necesaria porque en la actividad geométrica las particularidades de las figuras (por lo menos las formas elementales) deben ser edificables mediante instrumentos manipulables o sustitutos (regla, compás, software). Al usar los instrumentos, los alumnos pueden verificar o darse cuenta de las propiedades de las figuras, además de experimentar para constatar que no son

meramente perceptivas.

4. La entrada del inventor (inventeur-bricoleur). Para ejemplificar esta entrada se describe mediante la siguiente tarea: “a partir de un cuadrado ya dado, ¿de qué manera se puede construir otro que sea dos veces más grande y su área es el doble?”. Si este problema se resuelve usando sólo un papel cuadriculado para reproducirlo a partir del conteo de unidades, se reduce a operaciones de medición, pero, si se deconstruye la figura demandada, la acción exige una deconstrucción visual, ya que añadiendo trazos complementarios se genera un proceso heurístico que lleva a la solución de la tarea.

Como se puede apreciar, de acuerdo a Duval (2005), las dos primeras entradas activan la visualización icónica y las dos últimas la no icónica, la entrada del inventor implica la deconstrucción de las formas ya conocidas, lo que constituye el proceso central de la visualización geométrica que se lleva a cabo en coordinación con la actividad discursiva; por esta razón en la actividad geométrica resulta esencial favorecer la visualización no icónica.

## Metodología

La propuesta de formación o ETG de formación, consta de tres situaciones didácticas que integran tanto el trabajo geométrico como el trabajo didáctico en el aula de formación y en los salones de clase de las escuelas primarias multigrado. La propuesta de formación se experimenta con tres estudiantes para profesor que cursan el séptimo semestre de la Licenciatura en Educación Primaria de la Escuela Normal Rural de San Marcos, en Zacatecas, México y dos profesores en servicio que se desempeñan en escuelas multigrado de una zona escolar de la región de Loreto, Zacatecas, México.

La primera situación didáctica se desarrolló durante seis sesiones de dos horas cada una, todas las sesiones se videograbaron y además se recuperaron las libretas en las que los participantes plasmaron los resultados de distintas tareas geométricas. Con los datos recabados mediante esos instrumentos se hicieron los análisis de corte cualitativo.

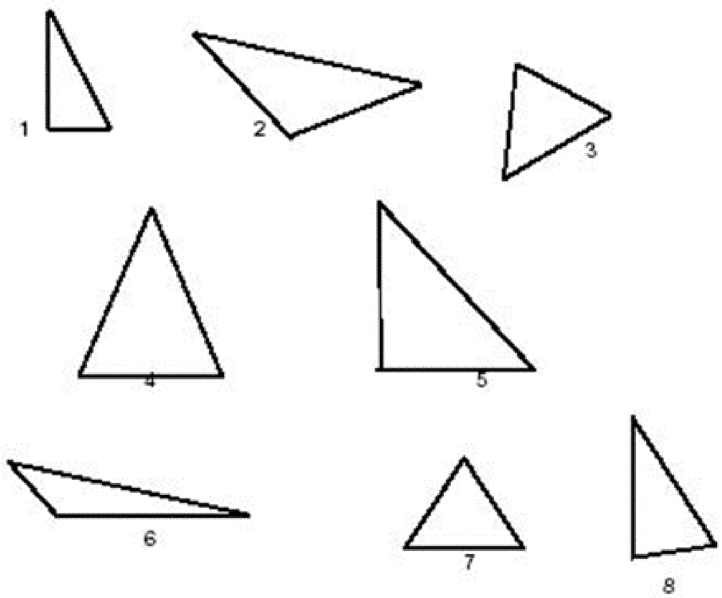
En la primea sesión, cuyo análisis es el objeto de esta ponencia, se coloca como saber geométrico la clasificación de triángulos y algunas de sus propiedades. El primer momento consistió en explorar los conocimientos previos que poseían los sujetos de estudio en situaciones que implicaban identificar y construir triángulos además de justificar la pertinencia de sus construcciones.

En la Tabla 1 se muestra la tarea propuesta. Se les proporcionó una tarjeta que contenía un conjunto de triángulos, se les pidió que seleccionarán uno de ellos y que redactaran un mensaje escrito con la secuencia que se debería usar para construirlo. Luego se pasó ese mensaje a otro de los sujetos y se le pidió que lo construyera.

Tabla 1

*Ejemplo de tarea propuesta*

| *Enunciado de la tarea* | *Imágenes de la tarjeta* |
| --- | --- |

| | |
|---|---|
| *"Cada uno de ustedes seleccionará uno de los triángulos de la tarjeta que se les entregó sin que los demás sepamos la que eligieron, enseguida escriban en la tarjeta en blanco la secuencia ordenada que hay que seguir para que se construya el triángulo elegido, después entreguen esas instrucciones a su compañero para que lo realice en una hoja blanca utilizando los instrumentos geométricos que consideren. Recuerden ser lo más precisos posible en sus indicaciones y emplear los conocimientos que poseen sobre los triángulos para que sea más clara la descripción".* |   |

En la Tabla 1 se muestra la tarea propuesta. Se les proporcionó una tarjeta que contenía un conjunto de triángulos y a partir de la selección de uno de ellos, redactar la secuencia ordenada para que otro compañero identifique cuál es y lo construya.

Como se puede apreciar, esta actividad se clasifica como una tarea del constructor pues el trabajo principal consiste en construir la figura utilizando los artefactos que consideren necesarios, mediante esta tarea es posible descubrir las propiedades geométricas involucradas. Por otra parte, al incluir la descripción se activa la aprehensión discursiva que es necesaria para comunicar los resultados y en lo que toca a la validación, solamente se consideró la descripción del proceso de construcción y la verificación de si las instrucciones eran adecuadas y suficientes para cumplir con la tarea.

Como se mencionó anteriormente los saberes geométricos que se pretendían obtener por medio de la descripción y la discusión eran la clasificación de los triángulos y algunas de sus propiedades, específicamente los señalados en Thompson (1993): los ángulos internos de los triángulos suman 180°; cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°; y en un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados son iguales.

Al concluir la tarea, se organizó una puesta en común de los resultados para que cada pareja confrontará las instrucciones recibidas y la figura construida; en esta etapa la formadora fue complementando con preguntas cada una de las participaciones con el fin de orientar la reflexión hacia las propiedades implicadas.

## Resultados

El análisis de los resultados de esta sesión se centra específicamente en las descripciones (instrucciones) elaboradas por los cinco participantes y en las justificaciones que sobre ellas expresan. Nuestras reflexiones se focalizan en las propiedades de los triángulos que se pusieron en evidencia en el momento de la puesta en común de los resultados obtenidos en la Tarea 1. Para dar cuenta de los resultados más relevantes en esa sesión, tomaremos como referencia inicial la tarea que realizó una de las parejas formadas por el emisor de instrucciones y el constructor a la que llamaremos Caso A.

**Análisis del caso A**

> Mensaje emitido:
>
> "Para poder realizar el triángulo elegido deberás realizar los siguientes pasos:
>
> 1. Trazar dos líneas que tengan la misma medida y que formen entre ellas un ángulo de 90°.
>
> 2. Posteriormente, traza otra línea que una a ambos extremos de las líneas anteriores para que se forme el triángulo.
>
> 3. Revisa si el ángulo mide 90° exactamente y que los lados iguales sean exactamente de la misma medida".

En la discusión grupal se pidió a emisor y constructor que revisarán la pertinencia de las instrucciones, ambos coincidieron que lo fueron y las validaron mediante argumentos como: "el triángulo seleccionado es isósceles porque tiene dos de sus lados iguales y el tercero diferente"; "también es un triángulo rectángulo porque uno de sus ángulos era recto". También se les cuestionó si el triángulo construido era el único que reunía estas características, respondieron que "hay otro similar que tiene un ángulo de 90° pero sus lados son diferentes". Para validar su argumento el constructor midió los ángulos de ambos triángulos con el transportador y los lados con la regla, luego de medir señala que "con las indicaciones dadas solamente podría haber sido ese triángulo en particular".

En esta misma puesta en común, la siguiente discusión versó sobre cómo comprobar si todos los triángulos que tienen dos lados iguales y un ángulo de 90° grado con el mismo tipo de triángulo, en este caso, triángulo rectángulo isósceles, sobre el respecto los profesores manifestaron que "un triángulo isósceles rectángulo siempre tiene un ángulo de 90° y otros dos de 45° y los tres suman 180°, exactamente lo que deben sumar los ángulos internos de un triángulo".

Asimismo, mencionaron que "el triángulo que tiene todos sus lados desiguales se considera escaleno", el cual, señalaron "se puede identificar a partir de las medidas de sus lados, todos son diferentes, pero también se pueden considerar sus ángulos, pues existen triángulos escalenos obtusángulos, acutángulos y rectángulos". En cuanto a los triángulos equiláteros señalaron que "cada uno de sus ángulos mide 60° y todos sus lados son iguales". Cabe mencionar que todos estos argumentos se desprendieron de la validación de los resultados de la tarea en la que emplearon la regla y el transportador.

Con base en la puesta en común se pueden apreciar los saberes previos que tienen los profesores, la reflexión colectiva sobre algunas propiedades de los triángulos y algunos prejuicios pedagógicos principalmente cuando comprueban la pertinencia de las instrucciones (tal como se observa en el mensaje emitido cuando se indica que deben revisar que estén bien las medidas, orientando a que es el proceso de verificación), también se observa que en toda la actividad se omite el uso del compás en la actividad lo que resulta significativo porque en la perspectiva teórica y el discurso del constructor se asume que las figuras geométricas se construyen con ayuda de un instrumento que permite producir una forma visual con una propiedad geométrica específica, por esta razón, en este caso se comprueba que no es posible construir una figura sin tomar en cuenta sus propiedades geométricas. Finalmente, también es posible apreciar el despliegue de la visualización no icónica y su importancia en la actividad geométrica.

## Conclusiones

Resulta fundamental la importancia de la visualización en el proceso de construcción y de prueba, ya que además de favorecer -en el caso de este análisis- la identificación de los diferentes tipos de triángulos y sus propiedades, facilita la reflexión sobre los criterios de construcción de los triángulos y además contribuye a la definición de los tipos de prueba que se pueden solicitar a los profesores. Con ello se hace evidente la relación de la visualización con los otros componentes del plano cognitivo de un ETG.

Dentro de las limitaciones de la actividad puede mencionarse el hecho de que las propiedades del triángulo quedaron circunscritas en los conocimientos básicos de clasificación y propiedades generales, es por ello que la descripción de los profesores no consideró por ejemplo la demostración del teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo que se plantea como: *sea un triángulo ABC, demostrar que $A + B + C = 1$ ángulo llano (180°).*

Otra limitante es que en la génesis discursiva (elaboración de instrucciones) no se mencionó al compás como instrumento para la construcción de los triángulos, tampoco lo emplearon los profesores en el proceso de construcción.

## Referencias y bibliografía


Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Siences Cognitives*, 10, 5-53. Francia: IREM de Strasbourg.

Henríquez, C. (2014). *El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundario.* Tesis doctoral. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, pp. 175-193. IREM de Strasbourg.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.

Thompson, J. (1993) *Geometría.* México, D.F.: Limusa.