XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La Elipse en la Métrica del Taxista

Wilson Jairo **Pinzón** Casallas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wjpinzonc@udistrital.edu.co
Wilson **Gordillo** Thiriat
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wgordillot@udistrital.edu.co
Orlando **García** Hurtado
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
ogarciah@udistrital.edu.co

Resumen

Este artículo presenta una propuesta didáctica para la comprensión de la elipse en estudiantes de primer semestre de la asignatura de cálculo diferencial de ingeniería topográfica, empleando la métrica del taxista, que permite trabajar diferentes representaciones semióticas de la misma con la convicción de que el estudiante entiende la elipse cuando transita entre las distintas representaciones semióticas. La elección de estas métricas se debió a la utilización que tienen los estudiantes de Ingeniería Topográfica para medir. Consideramos que el énfasis en la ecuación cartesiana de la elipse promueve la pérdida de su estructura como lugar geométrico y presenta resultados interesantes y sorprendentes que permiten el desarrollo de un aprendizaje más crítico y significativo.

Palabras clave: didáctica, lugar geométrico, métrica del taxista, elipse.

Introducción

Descripción de la problemática y objetivos de investigación

La elipse es un objeto matemático que se trata en nuestra universidad en la asignatura cálculo diferencial, correspondiente al primer semestre de la ingeniería topográfica. En donde se comienza el uso de técnicas analíticas, y se espera que los estudiantes puedan reconocer cónicas a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan. Los estudiantes que han trabajado la elipse bajo el enfoque tradicional, si bien comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen, y son capaces de graficarlas, presentan grandes dificultades para entenderla como un lugar geométrico, como se observó en la investigación realizada por Bonilla y Parraguez (2013) sobre la elipse. Con el objetivo de ver las diferentes representaciones semióticas que pueden elaborar los estudiantes sobre una situación planteada en el aula se diseñó esta investigación, en donde los artefactos utilizados en las representaciones son creación propia de los estudiantes.

Marco teórico

¿Qué comprensión es mejor para el aprendizaje de la elipse? Para hacer una elección entre la comprensión relacional y la comprensión instrumental de la elipse, el problema ya debe haber sido identificado y, por lo tanto, comprendido, esto está dentro de la paradoja del presente cognitivo. Es decir, se debe aprender en contexto, se debe entender lo que se aprende, esto permite que no sea olvidado y cuando se necesita solo con recordar una parte se puede reconstruir el todo, toda esta reconstrucción no sería posible sin una comprensión instrumental, por todo esto el aprendizaje de las matemáticas no puede ser memorístico, porque se olvida cuando pasa la evaluación; en otras palabras, se aprende para pasar la evaluación.

La comprensión relacional permite que el aprendizaje de las matemáticas construya una estructura conceptual (esquema) a partir de la cual su poseedor puede (en principio) producir un número ilimitado de planes para llegar desde cualquier punto de partida dentro de su esquema hasta cualquier punto de llegada.

Este tipo de aprendizaje es diferente en varios aspectos del aprendizaje instrumental.

- Los medios se independizan de los fines particulares que deben alcanzarse.
- La construcción de un esquema dentro de un área de conocimiento dada se convierte en un objetivo intrínsecamente satisfactorio en sí mismo.
- Cuanto más completo sea el esquema de un estudiante, mayor será su confianza en su propia capacidad para encontrar nuevas formas de "llegar hasta allí" sin ayuda externa.
- Pero un esquema nunca está completo. A medida que nuestros esquemas se amplían, nuestra conciencia de las posibilidades se amplía. De esta manera, el proceso a menudo se vuelve auto-continuo.

Por lo anteriormente dicho se podría tener en cuenta que el aprendizaje de las cónicas es introducido, en los niveles iniciales, desde una perspectiva procedimental, como generalización de procedimientos abstractos, tratándose las representaciones de la elipse como generalizaciones de las operaciones algebraicas y siendo evaluadas dichas generalizaciones para valores concretos de las variables. Sin embargo, rápidamente pasa a ser considerada desde una perspectiva estructural. Entonces, las representaciones de las cónicas son concebidas como objetos matemáticos en los cuales se llevan a cabo operaciones estructurales.

Este cambio obliga a los estudiantes a afrontar la necesidad de una comprensión relacional que, a menudo, no han experimentado en su aprendizaje matemático previo. En el aprendizaje de las cónicas los estudiantes deben tratar representaciones simbólicas como objetos matemáticos, y operar estos objetos con procesos que habitualmente no conducen a la obtención de una respuesta numérica. Por otra parte, deben modificar sus interpretaciones previas sobre los símbolos y empezar a representar problemas verbales con operaciones que, a menudo, son las inversas de las que utilizan para resolver problemas similares en el álgebra. Los estudiantes, ante este cambio, no sólo encuentran importantes dificultades en adquirir una comprensión relacional, sino también en conjugarla con su comprensión instrumental de las cónicas; aspectos a los que habitualmente no se les presta especial atención en la enseñanza.

Propuesta didáctica

Para diseñar la propuesta didáctica, indagamos en las bases epistemológicas de la Geometría No Euclidiana para pensar la elipse, las cuales nos dio luces sobre los elementos matemáticos que permiten articular las representaciones semióticas. Destacamos como antecedentes didácticos, la investigación de Parraguez y Bozt (2012) que, en una de sus conclusiones, reportan para su objeto matemático de estudio, que aquellos estudiantes que logran transitar entre los modos de pensamiento muestran en sus argumentos una cercanía con las definiciones formales de los conceptos. Así también, Bonilla y Parraguez (2013) realizan un estudio sobre la elipse desde la perspectiva la teoría los modos de pensamiento, donde afirman, que los estudiantes que han trabajado la elipse bajo el enfoque tradicional, si bien comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen, y son capaces de graficarlas, presentan grandes dificultades para entenderla como un lugar geométrico.

Con el propósito de que los estudiantes comprendan la elipse –como figura que la representa, como pares ordenados y como lugar geométrico–, nos propusimos como objetivo general de investigación: Diseñar una propuesta didáctica que promueva el tránsito entre las diferentes representaciones semióticas de pensar la elipse, para estudiantes de 16-21 años, utilizando como sistema de referencia el plano en la geometría del taxista (Krausse,1986).

Elementos históricos

En el istmo, entre el mar Mediterráneo y el Lago Mareótis, al oeste del delta del río Nilo, en una antigua aldea de pescadores y pastores llamada Rhakotis, nació la ciudad de Alejandría. En sus geométricas calles cuya planificación se atribuye al urbanista Dinócrates[1], Euclides escribió su obra "*Los Elementos*" que está compuesta de un conjunto de 13 libros. De que sólo se han encontrado versiones y traducciones muy tardías, en donde Euclides buscó dar a las matemáticas griega una base sólida utilizando el método axiomático.

El método axiomático consiste en un grupo de objetos o términos no definidos, llamados objetos o términos primitivos, en función de los cuales se definen todos los demás términos u objetos; un conjunto de proposiciones que se hace sobre los objetos o términos primitivos y aceptados sin demostración, que se llaman axiomas o postulados, y finalmente un conjunto de proposiciones demostradas utilizando la lógica deductiva que se denominan teoremas.

Euclides inicia el Libro I de los Elementos citando 23 definiciones en que busca dejar la comprensión de los objetos y términos, que tendrán sus propiedades estudiadas y establecidas en el transcurso de su obra, de forma bien clara y precisa.

A continuación, Euclides escribe los postulados y axiomas delimitando así las hipótesis que se utilizan en las demostraciones de los teoremas y en el desarrollo de toda la teoría. El cuestionamiento más importante de la obra de Euclides y que permitió a las matemáticas expandir y abrir nuevos caminos y áreas de estudio, giró alrededor del Quinto Postulado, también conocido como Postulado de las Paralelas, ya que puede ser así enunciado: punto, exterior a una recta, puede trazar una sola recta paralela a la recta dada.

[1] Arquitecto y urbanista originario de Rodas o Macedonia, vivió en la época de Alejandro el Grande, y también construyó la gran pira funeraria en Hefestion.

Durante muchos años, nos dice Aaboe, los investigadores creyeron que el Quinto Postulado dependía de los anteriores y, por lo tanto, era posible probarlo y el mismo no debería estar explicitado como un postulado. Varias tentativas de demostración aparecieron y fueron, cada una de ellas, refutadas.

La obra de Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), padre jesuíta, profesor de teología, filosofía y matemática, publicada en 1773 y titulada "Euclides ab Omni Naevo Vindicatus" (Euclides Libre de todos los errores) es una más que tiene como foco la demostración del Quinto Postulado de Euclides. El enfoque de Saccheri fue negar el Postulado de las Paralelas, o sea, él lo tomó como falso y aceptó como premisas verdaderas las 27 primeras proposiciones del Libro I de Euclides. A partir de ahí comenzó a buscar alguna evidencia de que el Quinto Postal era de hecho cierto. Él utilizó un cuadrilátero con dos lados opuestos congruentes y perpendiculares a la base que hoy conocemos como cuadrilátero de Saccheri estudiando así sus propiedades. Se puede decir que él descubrió una nueva geometría o la primera Geometría No Euclidiana, sin haber percibido de tal hecho. Desafortunadamente Saccheri analizó sus hechos bajo una óptica más volcada en la creencia existente en la época en que la verdadera y única geometría era la Euclidiana, que en lo que la lógica le estaba mostrando, dejando así de caminar en la dirección de una nueva e interesante área de las matemáticas. Hoy se considera como un precursor de una geometría no euclidiana.

Finalmente, en 1820 un preocupado padre con el futuro profesional del hijo le da un consejo por carta: "No desperdicies una hora en el problema. En vez de ser recompensador, envenenará toda tu vida. Este celoso padre todavía sigue tratando de disuadir al hijo para otros intereses escribiendo: "los mayores geómetras ponderaron el problema durante cientos de años y no consiguieron probar el postulado de las paralelas sin un nuevo axioma." Y poniendo la autoridad de padre: "Creo que yo incluso investigue todas las ideas posibles ... ".

A pesar de los llamamientos de Farkas Wolfgang Bolyai, el joven de 21 años, Janos Bolyai, nacido en Kolozsvár, Hungría (actualmente Cluj, Rumania), escribió a su padre el 3 de noviembre de 1823 relatando: "He realizado descubrimientos maravillosos que me dejaron extasiados y, sería motivo de lamento si las perdiera. Cuando las veas, querido padre, también lo percibir. En la misma carta Janos Bolyai escribe una conocida frase "He creado un universo de la nada". Y como se disculpó por el hecho de no haber seguido el consejo del padre afirma: "Estoy seguro que me traerá honor, tal como si ya hubiera completado el descubrimiento".

Una vez que nuevas y buenas ideas no son privilegio de una sola persona, pudiendo ocurrir de modo simultáneo entre personajes que nunca se conocieron, Farkas Bolyai aconsejó a su hijo a actuar con rapidez: "primero porque las ideas pasan fácilmente de unos a otros, que las pueden de inmediato publicar, y, segundo, hay alguna verdad en el hecho de que muchas cosas tienen una época para ser descubiertas al mismo tiempo en varios sitios ".

En esa época Farkas Bolyai trabajaba en su libro Ensayos sobre los Elementos de Matemáticas para Jóvenes Estudiosos e inmediatamente invitó a Janos Bolyai para incluir en él su investigación. Pero sólo en 1832 Janos Bolyai publicó sus estudios en un apéndice del 1º volumen de los Ensayos de Farkas Bolyai, con el pomposo título "La ciencia del espacio absoluto con una demostración de la independencia de la verdad o falsedad del axioma XI de Euclides (que no puede se decidirá a priori) y también la cuadratura del círculo en el caso de su falsedad.

Un poco antes, otro personaje de esa historia, Nikolay Ivanovich Lobachevsky, fue el primero en publicar un trabajo que presentó una geometría no euclidiana, que hoy conocemos como la Geometría Hiperbólica. En 1829 en una desconocida revista científica rusa, El Mensajero de Kazam, Lobachevsky presentó un artículo titulado Sobre los Fundamentos de la Geometría. En ese artículo, escrito en ruso, él relató todo el desarrollo de lo que llamó Geometría Imaginaria.

Tanto Bolyai como Lobachevsky no conocían el trabajo el uno del otro y como afirma Mlodinow "... desafortunadamente, nadie tampoco sabía. Matemáticos esencialmente oscuros, cuando hablaron nadie escuchó ". Bolyai nunca más publicó ningún otro trabajo y Lobachevsky se convirtió en rector de la Universidad de Kazam. Mlodinow todavía completa afirmando:

... podrían haber desaparecido en el limbo desconocido, no fuera su contacto con Gauss. Irónicamente, fue la muerte de Gauss que finalmente llevó a la revolución no euclidiana.

Gauss fue un cronista meticuloso de las cosas a su alrededor. Tenía el placer de coleccionar datos bizarros, tales como la duración de la vida de sus amigos muertos, o el número de pasos desde el laboratorio donde trabajaba hasta varios lugares que le gustaba visitar. También hacía registros de su trabajo. Después de su muerte, los expertos estudiaron con atención sus anotaciones y correspondencia. Allí, descubrieron su investigación sobre el espacio no euclidiano, así como los trabajos de Bolyai y Lobachevsky. (Mlodinow, 2010, pg.125).

Sólo en 1862, cuando Richard Baltzer, en la segunda edición de su libro Element der Mathmatik incluyó los trabajos de Bolyai y Lobachevsky, los convirtió en referencias estándar para aquellos que estudian esas nuevas geometrías. Así, de Euclides alrededor de 300 aEC hasta Bolyai y Lobachevsky en el siglo XIX, mucho tiempo se pasó para que las matemáticas consolidaran las ideas y consideraciones en torno al Quinto Postulado de los Elementos y abrirse camino para el estudio de nuevas geometrías que hoy conocemos como las Geometrías No Euclidiana. Tales geometrías son así llamadas, pues contrarían el Quinto Postulado de los Elementos o algunas de sus consecuencias.

Hoy en día llamamos Geometría Euclidiana, Geometría Hiperbólica y Geometría Elíptica aquella que adopta como el Quinto Postulado respectivamente la afirmación de que por un punto exterior a una recta se puede trazar una única recta paralela, infinitas rectas paralelas o ninguna recta paralela a la recta paralela a la recta dado.

A continuación, presentamos una Geometría No Euclidiana que por su simplicidad de comprensión y uso puede ser insertada y trabajada para contextualizar tópicos de la Enseñanza: La Geometría del Taxista.

Representaciones semióticas

En búsqueda de evidencias empíricas para las diferentes representaciones semióticas que pueden elaborar los estudiantes sobre la elipse, se selecciono una situación problema de nuestra secuencia exploratoria para darla a conocer en este artículo, se plantea la siguiente situación:

Un ciclotaxista que trabaja en el centro de la ciudad se desplaza por las calles y las carreras, que son perpendiculares a las calles. Sólo se les permite detenerse en las esquinas, por lo cual ellos miden las distancias en "cuadras" y siempre utilizan los recorridos tales que la suma de las cuadras a las dos estaciones de transporte en este lugar sea de 9 cuadras.

Las representaciones obtenidas se fueron las siguientes:

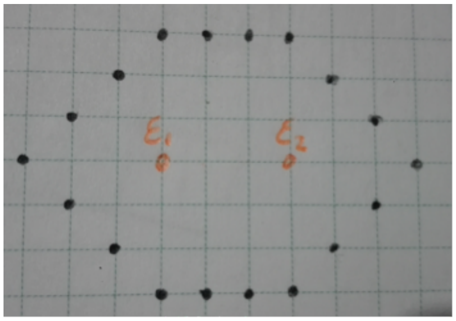
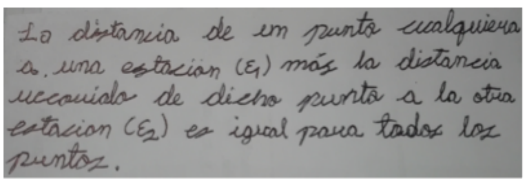


Figura 1. Representación grafica.

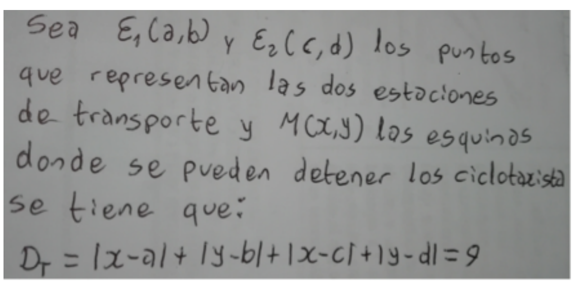
La figura 1 muestra la representación semiótica que la mayoría de los estudiantes realizaron de la situación problema, en donde se ve el lugar geométrico, pero no lo identifican como una elipse.



La distancia de un punto cualquiera a una estacion (E_1) más la distancia recorrida de dicho punto a la otra estacion (E_2) es igual para todos los puntos.

Figura 2. Representación verbal

En relación con la figura 2, se muestran evidencias de estar en vía de comprender un lugar geométrico por medio de una representación semiótica verbal, donde prueban a través de las distancias la propiedad que define la elipse, pero no logran establecer una ecuación.



Sea $E_1(a,b)$ y $E_2(c,d)$ los puntos que representan las dos estaciones de transporte y $M(x,y)$ los esquinas donde se pueden detener los ciclotaxista se tiene que:

$D_T = |x-a| + |y-b| + |x-c| + |y-d| = 9$

Figura 3. Representación algebraica

La figura 3, evidencia una comprensión de una representación semiótica algebraica en donde establecen una ecuación para todos los puntos que forman la elipse.

Es importante destacar que los estudiantes pueden mostrar que un punto específico es parte de la elipse, sin embargo, su dificultad radica en generalizar un punto de la elipse, es decir, si (a,b) es un punto ¿cómo se muestra que ese punto (a,b) es parte de la elipse? Por otro lado, evidenciamos que uno de los elementos que favorecen la conexión entre las representaciones de la elipse es la concepción del conjunto solución de una ecuación. Además, damos cuenta que, si bien los estudiantes han trabajado las cónicas en la geometría euclidiana, las definiciones presentadas en la actividad exploratoria acuden al concepto de lugar geométrico, por lo tanto, es posible que las definiciones de elipse, en la geometría del taxista como lugar geométrico se hayan construido a través de las actividades realizadas en el mismo instrumento exploratorio.

Resultados finales

Esta investigación proporciona al profesor de cálculo diferencial una forma de observar las matemáticas bajo un aspecto integrador y crítico, posibilitando que él mismo incluso pueda reflexionar sobre los procesos de enseñanza y las posibilidades que las representaciones semióticas proporcionan un objeto de aprendizaje. La representación semiótica grafica permite modelar el ambiente como un objeto de aprendizaje de comprensión natural y lúdica. La métrica del Taxista es un modelo natural para la geografía urbana y su conocimiento posibilita, la construcción de otras propuestas motivadoras, interdisciplinares y cercanas al cotidiano del estudiante, posibilitando la ruptura de paradigmas y fomentando enfoques más críticos y, desarrollos más consistentes del aprendizaje. Esperamos con ese trabajo, que el profesor de matemáticas de cálculo diferencial, abra nuevos caminos en su práctica docente y se sienta motivado en crear sus propias estrategias, buscando nuevos conceptos de aprendizaje.

Referencias y bibliografía

Aaboe, A. (1964). Episodes from the early history of mathematics (Vol. 13). MAA.

Bonilla, D. & Parraguez, M. (2013). La elipse desde la perspectiva la teoría los modos de pensamiento. Alemania: *Editorial académica española*.

Krause, E. (1986). Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry. New York: *Dover Publications*.

Mlodinow, L. (2010). *Euclid's window: the story of geometry from parallel lines to hyperspace*. Simon and Schuster.

Parraguez, M. & Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en ciencias*, *7*(1), 49-72.