Construcciones mentales para la comprensión del concepto de Ortogonalidad

Brandon Andrey **Moreno** Solares
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
brandonmss@hotmail.com

Solange **Roa** Fuentes
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander; Grupo EDUMAT – UIS
Colombia
roafuentes@gmail.com

Resumen

El interés de esta investigación está en el concepto de ortogonalidad, el cual hace parte de los cursos de álgebra lineal del primer año universitario en los programas de ingenierías y ciencias exactas. Éste ha sido poco estudiado desde la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Se presentan algunos trabajos previamente desarrollados que involucran el estudio del concepto y se toma como fundamento teórico la teoría APOE, la cual permitirá estudiar con profundidad la ortogonalidad desde lo cognitivo con el fin de identificar las construcciones previas que un estudiante debe poseer para comprensión del objeto matemático deseado y, de esta manera, contribuir a la didáctica del álgebra lineal. Finalmente, se describen algunas conclusiones, reflexiones y alcances de la investigación en curso.

Palabras clave: Teoría APOE, Ortogonalidad, didáctica del álgebra, pensamiento matemático avanzado.

Introducción

El álgebra lineal es una de las principales asignaturas del ciclo básico universitario de los programas de ingeniería y ciencias exactas. Recientemente, investigar acerca de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal ha adquirido un mayor interés y, en la actualidad, se encuentra una gran variedad de trabajos que muestran su importancia, dificultades asociadas a su enseñanza y aprendizaje y, estudios para la comprensión de conceptos específicos. A continuación, se mencionan algunos de los trabajos desarrollados tanto en la didáctica del álgebra como aquellos relacionados al objeto de interés en la presente investigación.

Aspectos generales

El álgebra lineal es considerada como una asignatura de gran dificultad, Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) mencionan que los estudiantes se sienten en otro planeta en el cual no pueden encontrar su rumbo. Un estudio realizado en 1987 por Robert y Robinet propuso un cuestionario con el fin de identificar los conocimientos e ideas de los estudiantes en torno al álgebra lineal, donde dos de las preguntas pedían a los alumnos realizar una descripción del curso y sus dificultades. En ellas se encontró que la dificultad en la comprensión de un objeto particular (Espacio vectorial), la multitud de teoremas, propiedades y definiciones, el requerimiento de pruebas, rigor, precisión, lógica y cuantificadores y, la ausencia de conexiones entre los conocimientos previos y los nuevos son los principales obstáculos en la comprensión del álgebra lineal, denominado obstáculo del formalismo.

Harel (2000) señala tres principios para el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal: el principio de lo concreto, el principio de la necesidad y el principio de la generalización. El primer principio tiene que ver con la comprensión por parte de los estudiantes de los conceptos matemáticos partiendo de contextos concretos para ellos. El principio de la necesidad hace referencia a que el conocimiento se desarrolla a partir de necesidades, intelectualmente hablando; es decir, un estudiante aprenderá un concepto matemático cuando sienta la necesidad de usarlo como una solución a una situación problema de su contexto. Finalmente, el principio de generalización tiene como objetivo permitir y fomentar en los estudiantes la generalización de los conceptos a partir de otros conceptos aprendidos en un modelo específico.

Posteriormente, Dorier y Sierpinska (2001) hicieron una compilación de investigaciones alrededor del álgebra lineal. Allí, se identifican dos tipos de dificultades: (i) dificultades conceptuales, las cuales corresponden a las dificultes asociadas a la naturaleza del álgebra lineal en sí misma, lo denominado por Hillel como “the nature of the beast”; y, (ii) dificultades cognitivas, las cuales hacen referencia al tipo de pensamiento que se necesita para la comprensión del álgebra lineal.

Para ampliar un poco más sobre los trabajos realizados en torno al aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal y las dificultades asociadas a su comprensión se recomienda leer las investigaciones de Sierpinska (2000), Hillel (2000), Sierpinska et al (2002), Dorier (1997), Dorier et al (2000), Rober y Robinet (1987), Alves Dias & Artigue (1995).

Por otra parte, se han realizado diferentes investigaciones estudiando la construcción y comprensión de algunos objetos matemáticos específicos del álgebra lineal, dentro de ellos se encuentran los conceptos de espacio vectorial (Trigueros y Oktac, 2005; Oktac et al, 2006; Parraguez y Oktac, 2010); sistemas de ecuaciones lineales (Trigueros et al, 2007); base (Kú et al, 2008); transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktac, 2010; Roa-Fuentes y Oktac, 2012); y, valores y vectores propios (Salgado y Trigueros, 2015). Como se puede observar, en los trabajos realizados con la teoría APOE en torno a los conceptos del álgebra lineal no se ha estudiado el concepto de ortogonalidad, lo cual es el interés de la presente investigación. Además, hay pocos trabajos realizados desde otras teorías que involucran el estudio de la comprensión y la construcción de dicho concepto. A continuación, se describen algunos de esos trabajos.

Acerca de la Ortogonalidad

Gueudet-Chartier (2004) presenta un estudio de libros textos referente a los conceptos de ortogonalidad y producto punto, con el fin de observar el potencial y las limitaciones del uso de la geometría en la enseñanza del álgebra lineal. En dicho apartado, el autor destaca la carencia del aprendizaje de conceptos del álgebra lineal a partir de nociones intuitivas, por ejemplo, el caso de la definición de ortogonalidad en espacios con producto interno que no tiene una noción intuitiva asociada que le permita a los estudiantes establecer un vínculo entre el álgebra lineal y la geometría. En esta investigación se invita a considerar las otras áreas de la matemática con el fin de mejorar la enseñanza del álgebra lineal y más aún la geometría, así conceptos como el de espacios con producto interno u ortogonalidad se podrían estudiar bien a través de este enfoque.

Adicionalmente, el grupo de educadores matemáticos llamado "Linear Algebra Curriculum Study Group" (LACSG), cuyo objetivo era estudiar las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, generó un conjunto de recomendaciones para un primer curso de álgebra lineal, para las cuales se tuvo en cuenta aspectos pedagógicos y epistemológicos acerca del aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal; la experiencia de los docentes y algunas recomendaciones por personas pertenecientes a otros campos. Referente a las recomendaciones del LACSG y el concepto de ortogonalidad en un primer curso de álgebra lineal se encuentra que se debe abordar los conceptos de producto interno, incluyendo la ortogonalidad, conjuntos bases y matrices ortogonales, proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, entre otros Harel (2000).

Posteriormente, Bagley y Rabin (2013) realizaron un trabajo de investigación en torno a tres formas de pensamiento en un curso de álgebra lineal las cuales ellos denominaron como pensamiento abstracto, pensamiento computacional y pensamiento geométrico. Los investigadores buscaban identificar las estrategias que los estudiantes implementaban para resolver un problema, y la coordinación de las formas de pensamiento; por lo cual su investigación giró alrededor de una tarea llamada el "Problema de Michelle", la cual consiste en encontrar una base para $\mathbb{R}^4$ a partir de dos vectores dados u y v. La investigación mostró que los estudiantes poseen dificultades en torno al concepto de ortogonalidad, se evidenció que ellos operaban de manera circular cuando intentaban resolver un sistema de ecuaciones lineales en la búsqueda de vectores ortogonales. También se identificó que ellos pensaban que la única forma de producir vectores ortogonales era por el medio del proceso de Gram-Schmidt. Otro resultado interesante es que ningún estudiante intentó solucionar el problema a través de la ortogonalidad de manera natural, solamente lo hicieron cuando el entrevistador lo sugirió.

Dreyfus y Hillel (1998, 2005) realizaron una investigación basada en la construcción de significados relacionados con los conceptos de proyección y aproximación. Esta investigación estudia la noción de "producto interno", la cual es una generalización del producto punto en R^n. De esta manera, por medio de Espacios con Producto Interno se define en términos más generales otros conceptos como proyección ortogonal, ortogonalidad, norma, distancia, entre otros, donde una aplicación interesante tiene que ver con la aproximación de una función f mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, dicha aplicación es poco usual en un curso de Álgebra Lineal.

Asimismo, Caglayan (2018) aborda el concepto de espacios con producto interno donde se incluye la condición de ortogonalidad desde la aproximación de funciones. Este autor se interesó por estudiar la comprensión de los estudiantes de los polinomios ortogonales de Hermite e identificar las formas creativas e innovadoras donde se coordinan enfoques visuales y analíticos a través de un software de geometría dinámica. Mediante la exploración en el software de geometría dinámica, los estudiantes obtuvieron una parte de la secuencia de los polinomios de

Hermite y posteriormente se abordaron algunas propiedades y conceptos en términos de los polinomios de Hermite tales como ortogonalidad, desigualdad de Cauchy-Schwarz, desigualdad del triángulo, teorema de Pitágoras, ortonormalidad, entre otros.

Los trabajos anteriormente descritos realizan diferentes aportes al concepto de ortogonalidad, en ellos, se identifican algunas dificultades relacionadas con el concepto y se proporciona un tratamiento diferente al usual en un curso de álgebra lineal mediante la aproximación de funciones; de esta manera, también se evidencian las conexiones existentes entre la ortogonalidad y otros conceptos de la misma área. Por tanto, la pregunta que guía esta investigación es ¿Qué estructuras y mecanismos mentales necesita construir un estudiante para la compresión del concepto de ortogonalidad? A la cual se le dará respuesta mediante el objetivo, describir las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes universitarios de primer año sobre el concepto de Ortogonalidad, a través del diseño y desarrollo del Ciclo de Investigación propuesto por la teoría APOE.

Marco Teórico

Teoría APOE

La Teoría APOE[1] (Arnon et al, 2014) busca describir cómo un individuo construye su comprensión de un objeto matemático específico mediante *estructuras mentales* que permiten reflexionar sobre las construcciones que va a hacer o que necesita hacer para lograr la comprensión de un objeto o un concepto matemático, de esta manera, se puede realizar un acercamiento de forma más reflexiva, proporcionando así, un enriquecimiento en la concepción que un individuo tiene sobre los objetos matemáticos.

La siguiente figura es un esquema que muestra cómo se relacionan las estructuras y mecanismos mentales para la comprensión de un objeto matemático. Para la construcción de las estructuras mentales se requiere de los diferentes mecanismos mentales, los cuales son los puentes que permiten el tránsito entre una estructura y otra y, por tanto, conducen a la construcción del conocimiento matemático.

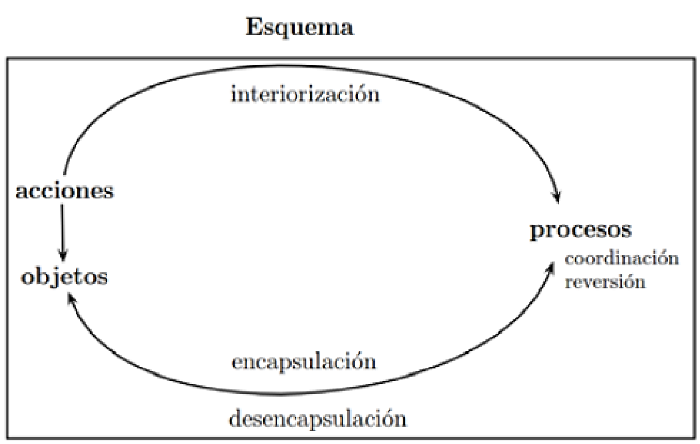

Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de un concepto matemático (Arnon et al, 2014)

[1] Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema.

Se puede observar que el conocimiento matemático se origina con Acciones, las cuales son transformaciones sobre los objetos físicos o mentales previamente construidos por parte de un individuo; la interiorización de las Acciones conduce a una reflexión sobre ellas y, por tanto, a una apropiación interna de las mismas, de esta manera se produce una concepción Proceso sobre determinado concepto. Los mecanismos de coordinación y reversión permiten la construcción de nuevos procesos. La concepción Objeto se logra a través de la encapsulación, esto es, comprender el Proceso como una estructura estática con la cual se pueden realizar Acciones. La desencapsulación es el mecanismo por el cual el individuo regresa al Proceso que dio origen a un objeto mental. Finalmente, un Esquema es un conjunto de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que el estudiante puede usar para dar solución a una situación problema. El nivel de comprensión de un individuo dependerá de su habilidad para establecer relaciones entre las diferentes construcciones mentales (Arnon et al, 2014).

Un aspecto fundamental de esta teoría es que parte de la idea de que todo objeto o concepto matemático puede ser comprendido por un individuo si éste posee las construcciones necesarias (Arnon et al, 2014) por tanto, se requiere del diseño de un modelo cognitivo denominado descomposición genética; el cual es un camino que describe cómo un concepto matemático puede llegar a ser comprendido mentalmente por un individuo. Dicha descomposición genética es el punto de partida para el diseño de actividades que favorezcan tanto el trabajo del profesor como el de los estudiantes, tales actividades deben promover cada una de las construcciones propuestas para la comprensión del concepto y de esta manera validar el modelo establecido; en caso de que el modelo no funcione deber ser refinado y repetir este proceso hasta que dé cuenta del aprendizaje del concepto deseado.

Paradigma de Investigación

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, la teoría APOE proporciona una metodología de investigación que consta de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de instrumentos, y recolección y análisis de datos. En la figura 2 se muestran las tres componentes y cómo estas están relacionadas entre sí.

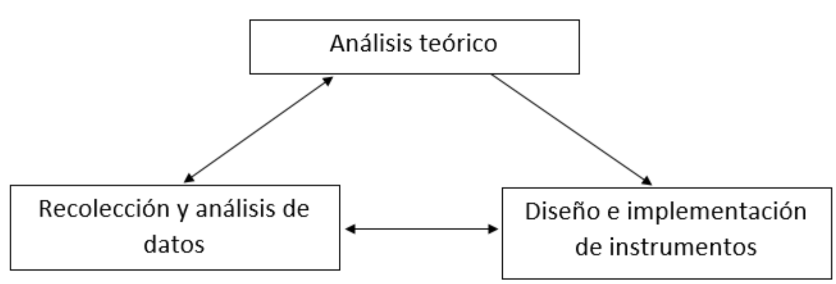

Figura 2. Ciclo de Investigación de APOE (Arnon et al, 2014)

Análisis teórico: La investigación inicia con un estudio teórico sobre el objeto matemático que se desea comprender, el cual se desarrolla teniendo en cuenta los siguientes aspectos: (i) análisis de libros de texto, (ii) experiencia de los investigadores como estudiantes y docentes y; dificultades identificadas desde otras perspectivas teóricas de la disciplina. Por lo tanto, el objetivo principal de esta fase es proporcionar un modelo cognitivo que dé cuenta de las construcciones mentales que un individuo necesita hacer para la comprensión de un concepto matemático específico (descomposición genética preliminar). La descomposición genética es el eje fundamental del ciclo de investigación; una vez se obtiene, permite avanzar a las etapas posteriores del ciclo hasta completarlo, dando como resultado una descomposición genética refinada. Cuanto más se repita este proceso se obtendrán descripciones más finas de las construcciones mentales necesarias para la comprensión de un determinado concepto. (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012).

Diseño e implementación de instrumentos: El diseño de actividades permite validar la descomposición genética propuesta o remodelarla en caso de ser necesario. Cada una de las actividades propuestas dentro de la investigación debe estar orientada hacia el desarrollo de todas y cada una de las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010).

Recolección y análisis de datos: Una vez obtenida la descomposición genética del concepto matemático deseado se debe proporcionar evidencia empírica que permita su refinamiento o validación; en caso contrario la descomposición genética permanecerá únicamente como un modelo hipotético (Arnon et al, 2014). El propósito de esta fase debe responder a dos preguntas: ¿Los estudiantes hicieron las construcciones mentales descritas en la descomposición genética? y, ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto? Existen diferentes tipos de datos que proporcionan información suficiente para responder a estas dos preguntas, en particular para esta investigación se tienen en cuenta: cuestionarios escritos previamente diseñados; entrevistas profundas enfocadas en el objeto matemático de interés y; una combinación de instrumentos escritos y entrevistas.

Aspectos Metodológicos

Esta investigación está enfocada en la descripción de las construcciones que un estudiante debe realizar para la comprensión del concepto de ortogonalidad. Se desarrolla con un grupo de estudiantes que pertenecen a un curso de álgebra lineal II en la Universidad Industrial de Santander (UIS). Se definen los aspectos teóricos y didácticos del concepto de ortogonalidad en conjunto con el profesor a cargo del curso, con el fin de preparar actividades y realizar un seguimiento continuo como observador; esto permite conocer el contenido, expectativas e intereses del curso.

Análisis teórico: Para esta primera fase del ciclo de investigación, se plantean las siguientes preguntas: (i) ¿Qué significa comprender el concepto de ortogonalidad? y, (ii) ¿Cómo se puede construir la comprensión del este concepto? Con el fin de responder estas preguntas se analizan tres libros de texto de álgebra lineal cuyo propósito principal es diseñar una descomposición genética que dé cuenta de las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante debe poseer para la comprensión del concepto de ortogonalidad. En esta etapa es necesario definir cómo se aborda el concepto matemático de ortogonalidad, de esta manera, el análisis de los libros de texto contribuye a la escogencia de dicha definición puesto que el interés es determinar qué teoremas, propiedades, definiciones y notaciones intervienen en la construcción del concepto.

Diseño e implementación de instrumentos: Partiendo de la descomposición genética se diseñan dos instrumentos: una prueba diagnóstica y una entrevista, los cuales están acompañados de un análisis a priori. Puesto que el interés de la investigación es estudiar cómo los estudiantes construyen el concepto de ortogonalidad para dar cuenta de la comprensión del mismo, se escogen los estudiantes cuyos resultados sean los mejores.

Recolección y análisis de datos: A través del análisis de los datos resultados empíricos obtenidos en la etapa anterior se pretende encontrar las construcciones propuestas en la descomposición genética que no fueron necesarias y las construcciones necesarias que no fueron consideradas con el fin de realizar los ajustes correspondientes para que la descomposición genética sea una mejor aproximación a la construcción de la ortogonalidad. A esto se le conoce como refinamiento de la descomposición genética. De esta manera, el análisis se realiza caracterizando las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes poseen alrededor del concepto de ortogonalidad lo cual permite la validación de la pertinencia y la viabilidad de la descomposición genética.

Reflexiones finales

El concepto de ortogonalidad ha sido poco estudiado desde la didáctica del álgebra lineal y es necesario dentro de tal asignatura. Sin embargo, en los cursos tradicionales de álgebra lineal no se alcanza a abordar dicho concepto en otros espacios vectoriales diferentes de $\mathbb{R}^n$. Es solo en aquellas universidades en donde se imparte un segundo curso de álgebra lineal en donde se trata de manera más profunda dicho concepto. Esta investigación pretende aportar al desarrollo de la línea de investigación de la didáctica del álgebra, al álgebra lineal en sí misma y a la teoría APOE. Estos son solo los primeros acercamientos al estudio del concepto de ortogonalidad, donde se espera proponer un camino para la construcción y comprensión de tal concepto. Asimismo, se espera que otras investigaciones sean desarrolladas en torno al estudio de este concepto y que esta investigación llegue a ser considerada dentro de las aulas de clase, puesto que ese es el fin último de la investigación.

Referencias y bibliografía

Alves Dias, M & Artigue, M. (1995). Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra, in The proceedings of the 19th annual meeting of the international group for the Psychology of Mathematics Education, Universidade Federal de Pemambuco, Recife, Brésil, 3 vols 2:34-41.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M, y Weller, K. (2014). APOS Theory - A framework for research and curriculum development in mathematics education, Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D, y Thomas, K. (1996). A framework for researchand curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.): Research in Collegiate Mathematics Education, CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Bagley, S., & Rabin, J. (2013). Computational Thinking in Linear Algebra. In The Proceedings of RUME 16, Volume 1, 65-75, Denver, Colorado.

Caglayan, G. (2018). Coordinating Analytic and Visual Approaches: Math Majors' Understanding of Orthogonal Hermite Polynomials in the Inner Product Space P_n (R) in a Technology-Assisted Learning Environment. The Journal of Mathematics Behavior.

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J. & Rogalski M. (2000). On a research program about the teaching and learning of linear algebra in first year of French science university, International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology 31(1), 27-35.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall, (Ed), Advanced Mathematical Thinking, (p. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T. & Hillel, J. (1998). Reconstruction of meanings for function approximation, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3(2), 93-112.

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática,* 20 (2), 65-89.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? Linear Algebra and its Applications, 379, 491-501.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, pp. 177-190. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J. & Dreyfus, T. (2005). What's a best fit? Construction of Meaning in a Linear Algebra session. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), Meaning in Mathematics Education (pp. 181-203). Springer.

Meel, D. (2003). “Modelos y Teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE”. RELIME. Año/vol. 6, núm. 003. pp. 221-278.

Oktaç, A., Trigreros, M., y Vargas, X. N. (2006). Unverstanding of vector spaces – a viewpoint from APOS theory. *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*, (En CD-ROM) Istanbul, Turkey.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications,* 432,2112-2124.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (1), 89-112.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15 (2), 199-232.

Robert, A., Robinet, J. & Tenaud, I. (1987). De la géométrie à l'algèbre linéaire, Brochure 72, IREM de Paris VII.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. Educación matemática, 26(3), 75-107.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp.209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Nnadozie, A., & Oktaç, A. (2002). A study of Relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra. Concordia University: Montreal. Disponible en: http://www.annasierpinska.wkrib.com/pdf/Sierpinska-TT-Report.pdf

Trigeros, M., y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l’Enseignement de l’Algébre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 10, 157-176.

Trigueros, M., Oktaç, A., y Manzanero, L. (2007). Unverstanding of Systems of Equations in Linear Algebra, *Proceedings of the 5th CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education)*, Larnaca, Chipre, 2359-2368.