XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Un referente para analizar los campos de conocimiento conceptual y procedimental del teorema de Pitágoras

Nathalia **Valderrama** Ramírez
Docente de Matemáticas – Investigador
Secretaria de Educación Bogotá - Universidad Nacional de Colombia
Colombia
nataliavalderrama@ustadistancia.edu.co

Diana Isabel **Quintero** Suica
Docente de Matematicas - investigador
Secretaria de Educación Cundinamarca - Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma_dquintero472@pedagogica.edu.co

Resumen

Al abordar el teorema de Pitágoras en diferentes momentos y trabajos de aula anteriores a este, y al procurar un marco de evaluación de las producciones de los estudiantes frente a dichos trabajos, surge la necesidad de generar un instrumento que permita analizar las producciones realizadas por ellos. El objetivo del presente documento es ilustrar la creación y constitución de dicho instrumento, el cual conforma *un referente para analizar los campos de conocimiento conceptual y procedimental del teorema de Pitágoras*, y es derivado de la integración de dos propuestas: los campos de conocimiento conceptual y procedimental expuestos en Rico (1997), y las etapas de construcción de estructuras descritas en la taxonomía SOLO (*Structure of Observed Learning Outcomes*). Toda vez que esta integración es producida, nutrimos tal referente a partir de unos indicadores de análisis sugeridos que posibilitan un análisis cualitativo de futuras producciones estudiantiles sobre este concepto matemático.

¿Cómo nacen las propuestas Teorema de Pitágoras – Proporcionalidad?

La idea impulsadora del presente documento nace tres años atrás, a partir de nuestro interés en los estudios realizados por Guacaneme (20016) acerca de la nociones de razón y proporción en la geometría euclidiana. Tales nociones, las cuales difieren de las movilizadas tradicionalmente en el aula de la educación básica y media, nos han llevado a explorar nuevos ámbitos de la educación en matemáticas, y a construir una serie de propuestas (Quintero-Suica y Valderrama, 2015-a; Quintero-Suica y Valderrama, 2015-b) que nos permitan comprender algunas de las complejidades de los objetos, y de los procesos de enseñanza y aprendizaje de estos.

Acerca de la propuesta anterior

Para la construcción de la razón de proporcionalidad en nuestras propuestas, nos hemos auxiliado del método de antanairésis. Por medio de este método se busca determinar una medida común a dos magnitudes dadas, cuya naturaleza sea la misma, vía la sustracción reiterada de una de las magnitudes a la otra. Toda vez que se construye la razón de un par de magnitudes, es posible determinar si dos parejas de magnitudes de la misma naturaleza son proporcionales. En este caso basta con comparar la razón construida para cada pareja, verificando que sean las mismas.

Esta concepción de la razón y proporción la exploramos, con relativa facilidad en un curso de grado séptimo, al considerar como magnitudes un par de segmentos o parejas de segmentos. No fue así, al querer explorarla con magnitudes como las superficies, pues requeríamos un algoritmo que nos permitiera adicionar o sustraer cantidades de superficie, obteniendo como resultado una magnitud del mismo tipo.

Articulación con la propuesta actual

La dificultad antes señalada, se convierte en una oportunidad de trabajo al considerar al teorema de Pitágoras como el algoritmo requerido para llevar a cabo tales operaciones en el conjunto de las superficies. Por esta razón, nos interesamos en diseñar una secuencia de aprendizaje para la construcción de una concepción generalizada de este teorema.

Después de diseñada la propuesta, en la misma línea de la primera (antanirésis), se aplicó a estudiantes de grado decimo y con el fin de analizar las producciones al trabajar con tal secuencia, vimos la necesidad de configurar un marco de referencia apropiado, y por tanto una herramienta analítica, con el fin de describir cualitativamente tales producciones.

Acerca de la propuesta "Generalización del teorema de Pitágoras"

El presente artículo tiene como objetivo principal presentar y justificar el marco de referencia que se elaboró a partir de la propuesta de Campos de conocimiento de Rico (1997) integrando a este las taxonomías SOLO (*Structed Observed Learning Outcomes*) por Biggs y Collis (1982), para determinar criterios de clasificación y análisis de las producciones de los estudiantes luego de aplicar la propuesta didáctica denominada "generalización del teorema de Pitágoras" sin embargo, es necesario para el lector hacer una breve síntesis de dicha propuesta , extraída de la propuesta misma la cual se ha socializado anteriormente como parte del trabajo completo que se viene desarrollando desde hace algunos años como investigación de aula inspirada por las propuesta del profesor Edgar Guacaneme en algunos de sus artículos.

Esta propuesta se definió desde dos perspectivas i) la histórico-matemática la cual nos permitió establecer el método de suma tomando como instrumento el teorema de Pitágoras y ii) los aspectos de tipo didáctico y evaluativo que se consideran pertinentes para orientar la propuesta (objetivos, actividades, entre otros). En este sentido se presentara la primera perspectiva para contextualizar al lector.

Histórico - matemática

Guacaneme (2011) citando a Recalde (1994), establece una de las perspectivas del teorema de Pitágoras abordada en *Elementos* la cual se detalla "como [un] algoritmo de la suma de superficies, vía la construcción de lo que hoy se reconoce como una estructura algebraica para las magnitudes geométricas" (p. 663).

Desde esta nueva perspectiva del teorema de Pitágoras se indaga sobre una nueva concepción de esta proposición. Muñoz (2012) hace un análisis minucioso de las superficies, la forma de sumarlas y la estructura algebraica que se plantea en *Elementos* y que representa la adición definida en el conjunto conformado por estas superficies. En su tesis de pregrado Muñoz (2012) presenta las tipologías de magnitudes que Euclides consideró en la geometría. Una de estas tipologías es la magnitud superficial, considerando que "una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura" (p.21). Claramente, aunque es posible aplicar esta definición a las superficies sólidas[1], solo se trabajara con la noción de superficie plana.

Luego de definir las superficies planas, Euclides "construye [en] la proposición I.47 […] un algoritmo (Teorema de Pitágoras) para sumar dos cuadrados evidenciando así que la suma de estos cuadrados da como resultado un cuadrado equivalente a los sumados" (Muñoz, 2012, p.45). Dicho algoritmo se describe indicando que "en los triángulos rectilíneos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto" (Muñoz, 2012, p.48).

En otras palabras, el método para sumar superficies consiste *grosso modo* en la disposición de dos figuras semejantes en los catetos de un triángulo rectángulo, para luego obtener el resultado de la suma de estas dos figuras por medio de la representación de la figura dispuesta en la hipotenusa de dicho triángulo que, por su puesto, será semejante también a las dos iniciales.

Si bien Euclides solo consideró a los cuadrados para ser sumados por medio del teorema de Pitágoras, el método expuesto por él se puede aplicar a un par de superficies cualesquiera, aun cuando no fuesen cuadrados. Esto es posible debido a que *la gran mayoría* de las superficies planas se pueden cuadrar[2] (construir un cuadrado con la misma cantidad de superficie que la original) de forma que se puedan operar con el teorema de Pitágoras. Se analizarán, en lo que sigue, dos ejemplos de sumas de superficies con este teorema.

Ejemplo 1: Sean el $\boxdot\ ABCD$ y el $\boxdot\ EFGH$. Para obtener la suma de la cantidad de superficie de estos dos cuadrados, primero se disponen los cuadrados en los catetos de un triángulo rectángulo tal que la medida de estos últimos coincidan con la medida de estos catetos.

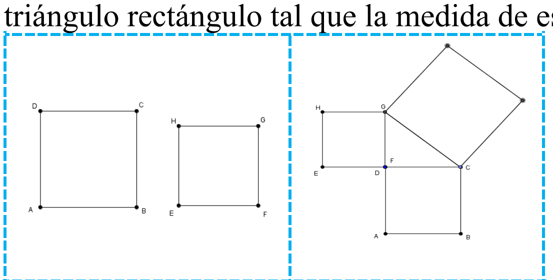

Figura 1: Suma de dos cuadrados

[1] En la sección de magnitudes superficiales (1.4), Muñoz (2012) aclara la distinción que hacían los filósofos griegos de las superficies y por tanto la posibilidad de una superficie sólida.

[2] En este punto cabe aclarar que para la Matemática griega solo era posible cuadrar algunas superficies con regla y compás (rectas y circunferencias). Sin embargo, las herramientas con las que disponemos en la actualidad (software matemático) nos permite cuadrar una cantidad adicional de superficies, como por ejemplo el círculo. Esto último es importante para la introducción de las TIC´s en la propuesta de enseñanza que aquí se presenta.

Luego, se construye a partir de la hipotenusa de ese mismo triángulo rectángulo, un cuadrado tal que la medida de su lado sea la misma que la medida de la hipotenusa. La cantidad de superficie de este cuadrado es la suma de las cantidades de las superficies dispuestas en los catetos.

Ejemplo 2: El presente ejemplo se toma de Muñoz (2012). Si se tienen dos superficies S_1 y S_2

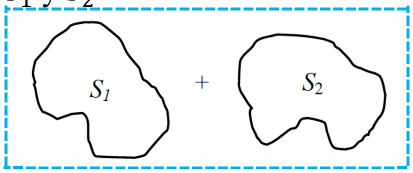

Figura 2: Superficies a sumar

Su suma se puede calcular cuadrando ambas superficies y obteniendo el cuadrado que subtiende la hipotenusa del triángulo rectángulo elegido, de forma que la cantidad de superficie de este es el resultado de la suma como se explicitó en el *Ejemplo 1*.

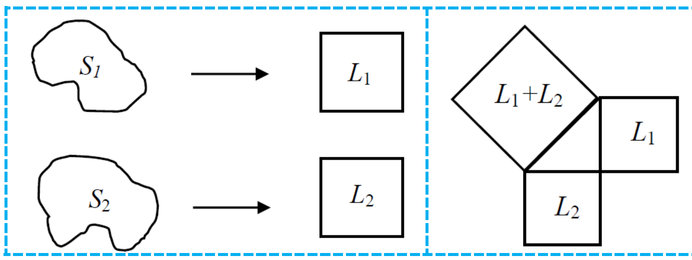

Figura 3: Suma de las superficies

Se puede observar fácilmente que utilizando el mismo método se puede también obtener la diferencia entre dos superficies. En el *Ejemplo 1*, la superficie del $\boxdot\ ABCD$ se puede ver como el resultado de la diferencia entre la cantidad de superficie del cuadrado que subtiende la hipotenusa y la cantidad de superficie del $\boxdot\ EFGH$. En otras palabras, si a la superficie del cuadrado de la hipotenusa se le resta la superficie del $\boxdot\ EFGH$, se obtendrá como resultado la superficie del $\boxdot\ ABCD$. Algo similar se puede realizar con las superficies del *Ejemplo 2*.

Por otro lado, el conjunto G de las superficies con la adición tal que

$$+: G \times G \to G$$

$$(S_1, S_2) \mapsto (S_1 + S_2)$$

Es una estructura algebraica denominada *semigrupo*. Es decir, $+$ es una operación conmutativa y asociativa en el conjunto G de las superficies (Muñoz, 2012). En otras palabras:

$$\forall S_1, S_2, S_3 \in G\ \big((S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3)\big)$$

$$\forall S_1, S_2 \in G\ (S_1 + S_2 = S_2 + S_1)$$

Acerca del marco de referencia de análisis de resultados de la puesta en practica

Ahora bien, este artículo pretende ilustrar la propuesta que desarrollaron las autoras al construir el marco de referencia que se usó para analizar los resultados, el cual tomó dos marcos conceptuales, los campos de conocimiento propuestos en Rico (1997) y las taxonomías SOLO de

Biggs y Collis (1982). Las autoras de la propuesta por inclinaciones didácticas eligen estos dos marcos y determinan indicadores para analizar las actuaciones y producciones de los aprendices.

En el primer marco conceptual elegido, Rico (1997) hace una organización cognitiva de los conocimientos y los clasifica en dos campos el campo conceptual y el campo procedimental. En el primero, El campo de conocimiento conceptual establece un conocimiento rico en relaciones, define que una unidad de conocimiento conceptual debe estar relacionada con otras piezas de información (unidades) para ser considerada una pieza del conocimiento conceptual (Hiebert y Lefevre. citados en Rico, 1997). En este campo se identifican los conceptos, los cuales nos permiten pensar y según lo concretos que estos sean se pueden identificar tres niveles: i) los **hechos** son unidades de información para registrar acontecimientos, *ii*) los **conceptos**, los cuales describen relaciones entre un conjunto de hechos y poseen una representación simbólica y, *iii*) las **estructuras conceptuales**, que relacionan conceptos y permiten generar unos de orden superior.

En el segundo campo, el procedimental se establece las formas de ejecutar una tarea a partir de algoritmos, reglas o procedimientos que son secuenciales y organizados linealmente (Hiebert y Lefevre. citados en Rico, 1997). Este conocimiento establece también tres niveles

i) Las **destrezas** las cuales procesan hechos o transforman expresiones simbólicas en otras a partir de una secuencia de reglas y manipulación de símbolos, *ii*) los **razonamientos**, que establecen relaciones de inferencia entre los conceptos y constituyen relaciones entre estos y, *iii*) las **estrategias**, que operan dentro de una estructura conceptual y suponen diferentes tipos de procedimientos a partir de las relaciones y conceptos implicados.

El segundo marco conceptual elegido para el marco de referencia tomado para el análisis son las taxonomías de SOLO (*Structed Observed Learning Outcomes*) Biggs y Collis (1982), estas buscan analizar y describir el nivel de comprensión y razonamiento de un aprendiz cuando se enfrenta a un aprendizaje especifico a través de cinco etapas o niveles que incrementan su complejidad asi: i) **Pre-estructural,** en este nivel se adquieren conceptos e información que no se encuentra relacionada entre sí, que no tiene organización o sentido, ii) **Uni-estructural,** aquí se realizan conexiones simples y obvias, pero la información no adquiere mayor significado respecto a la etapa anterior, iii) **Multi-estructural,** se deben realizar un número considerable de conexiones pero la relación entre ellas aún no se identifica y por lo tanto no se adquiere un sentido global de estas, iv) **Relacional,** en esta se puede apreciar el significado de las partes en relación con el todo y v) **Abstracta,** aquí ya se realizan conexiones no solo entre los objetos dados sino con otros elementos conocidos, generalizando y transfiriendo los principios establecidos en el nuevo conocimiento a algunas otras instancias. Esto en la propuesta y secuencia didáctica no represento de ningún modo indicadores de aprendizaje u objetivos de aprendizaje, por lo tanto no se planifico esperando que el aprendiz alcanzara el ultimo nivel, simplemente represento junto con los campos de conocimiento la estrategia de análisis.

¿Cómo se integran los dos marcos conceptuales?

En este sentido las etapas de la taxonomía SOLO se integran en el nivel de razonamiento del campo de conocimiento procedimental, es decir que el marco conceptual de Rico se toma como eje principal para el marco de referencia y las taxonomías son una integración en uno de los niveles de uno de los campos. Esta integración se logra luego del análisis de las pretensiones del nivel y las taxonomías mismas. De esta forma este marco de referencia permitirá definir los niveles del aprendiz en cada campo (teniendo una extensión en el campo procedimental y específicamente en el nivel de razonamiento).

Resultados

Marco de referencia para análisis de resultados

Como se especificó anteriormente este marco se diseña a partir de dos campos de conocimiento el conceptual y procedimental, los cuales a su vez incluyen tres niveles en uno de los cuales se integran las taxonomías de SOLO. A continuación se presenta cada campo considerado en la propuesta "Generalización del teorema de Pitágoras" y descrito desde el campo de conocimiento conceptual específicamente para el concepto "Teorema de Pitágoras – polígonos" y desde el campo de conocimiento procedimental lo establece desde el hecho que conforma "Teorema de Pitágoras – cuadrados". Es posible que el lector esté interesado en usar el marco de referencia que se va a proponer para definir los criterios en toda la estructura conceptual, es decir para cada concepto allí definido o que en próximos trabajos las autoras lo presenten.

Campo del conocimiento conceptual: la figura presenta las consideraciones de cada uno de los niveles *hechos, conceptos y estructuras conceptuales.*

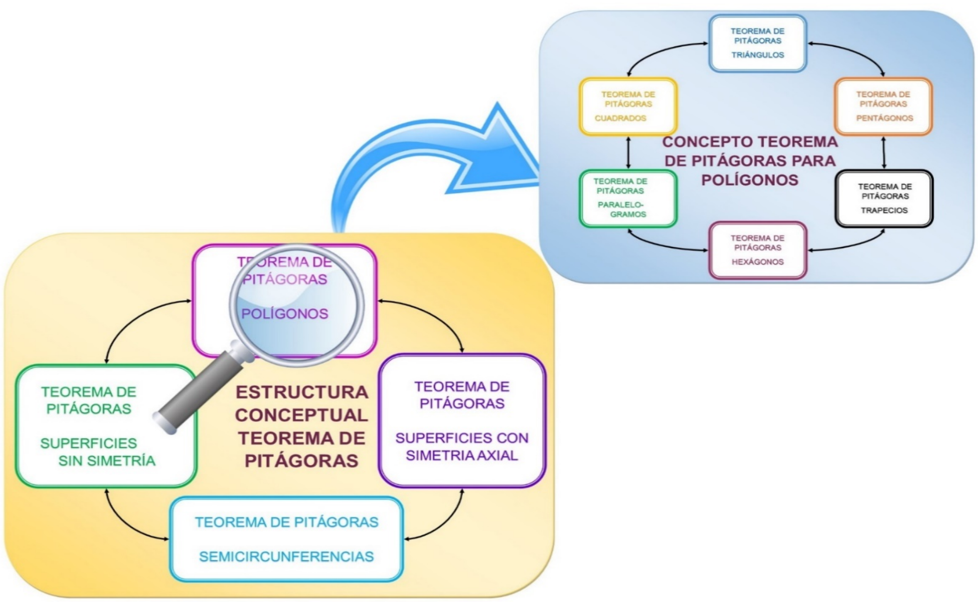

Figura 1. Estructura conceptual para la generalización del **Teorema de Pitágoras**

La figura 1 ilustra una perspectiva global de la estructura conceptual que dentro del análisis se denomina "Teorema de Pitágoras" la cual se forma con los conceptos y las interrelaciones que se establecen entre estos. Cabe resaltar que aunque a dichos conceptos subyace el papel determinado desde la matemática griega, cada uno representa un tipo de superficie específica, por lo que aquí se propone un término concreto para cada uno, a saber: *Teorema de Pitágoras - Polígonos, Teorema de Pitágoras – Superficies sin simetría, Teorema de Pitágoras – Superficies con simetría axial y Teorema de Pitágoras – Semicircunferencia (estos son los* ***conceptos****).* Las autoras consideran que el reconocimiento y tratamiento de cada uno de estos conceptos le permitirán al aprendiz tener una amplia noción acerca de la proposición en estudio.

Tomando uno de los conceptos de la estructura se permite ver en detalle los hechos o unidades que lo conforman, por ejemplo en el concepto definido como "Teorema de Pitágoras – Polígonos" se contemplan las diferentes versiones del teorema de Pitágoras que se abordaron en la propuesta didáctica para superficies poligonales. Cuando se establece el teorema de Pitágoras para cuadrados se dice que este es un **hecho** que requiere ser relacionado con otros para generar dicho concepto. Así mismo, se tienen otros hechos que aluden al teorema para otros cuadriláteros (no cuadrados), los cuales se denominan: *Teorema de Pitágoras – Paralelogramo y Teorema de Pitágoras – Trapecio (estos son los **hechos** dentro de dicho concepto)*. Igualmente se tienen para otros polígonos, con lo cual surgen los hechos denominados Teorema de Pitágoras - Triángulos, Teorema de Pitágoras – Pentágonos y Teorema de Pitágoras – Hexágonos.

Cabe aclarar que en la ilustración se presenta un número finito de hechos que conforman el concepto, sin embargo, el número es infinito por a la cantidad de polígonos existentes.

Lo anterior describe un concepto de la estructura conceptual propuesto a partir de la relación entre varios hechos, el cual fue necesario abordar desde tareas de aprendizaje que posibilitaran la conceptualización y las relaciones entre la estructura. En la propuesta se abordó con mayor énfasis los hechos del concepto Teorema de Pitágoras con el fin de estudiar propiedades y relaciones geométricas que permitieran interiorizar la estructura en completitud.

Campo del conocimiento procedimental integrando SOLO en uno de sus niveles: Luego de definir las relaciones en el campo de conocimiento conceptual propuesta en la figura 1 se define el campo de conocimiento procedimental estableciendo sus tres niveles *destrezas, razonamientos y estrategias.* En este campo se debería definir los 3 niveles para cada uno de los hechos en cada concepto de la estructura sin embargo, así como en el anterior campo se seleccionó un concepto para ilustrar los hechos y relaciones entre estos que definen el concepto (lo cual deja abierta la posibilidad al lector de proponer para cualquiera de los demás conceptos definidos), en este campo se determinara solo un hecho especifico "Teorema de Pitágoras – Cuadrados". En la tabla 1 se organizaron los indicadores que clasifican las *destrezas, razonamientos (*en cada una de las etapas de SOLO) y las *estrategias.*

Tabla 5

Indicadores para la medición de destrezas, razonamientos y estrategias del hecho Teorema de Pitágoras - Cuadrados

Destrezas	Razonamientos		Estrategias	
	Etapa	Indicador	Etapa	Indicador
I1. Decide la transformación adecuada de dos superficies cuadradas en una tercera, por medio de la selección entre tres opciones	Pre-estructural	Identifica que las figuras involucradas en el trabajo son cuadrados	Abstracta I	Comprueba el Teorema de Pitágoras con superficies no cuadradas (triángulos, paralelogramos, etc)
I2. Explica las razones por la cuales descartar algunas de las opciones presentadas como superficies cuadradas posibles de representar la suma de otras dos del mismo tipo	Uni-estructural	Relaciona una determinada cantidad de superficie con la suma de dos cantidades de superficie adicionales	Relacional I	Generaliza el Teorema de Pitágoras de acuerdo con la comprobación hecha con superficies poligonales alternas

I3. Describe un método para realizar la transformación de dos superficies cuadradas en una tercera superficie del mismo tipo	Multi-estructural	Asocia las medidas de cada uno de los lados de cada cuadrado con las medidas de los lados de un triángulo rectángulo	Abstracta II	Comprueba el teorema de Pitágoras con superficies no poligonales
I4. Identifica la obtención de uno de los tres cuadrados a partir de otros dos dados, acudiendo al Teorema de Pitágoras como instrumento	Relacional	Da significado a la relación entre una terna de cuadrados y un triángulo rectángulo, reconociendo la conjunción de estos elementos como el teorema de Pitágoras	Relacional II	Generaliza el Teorema de Pitágoras de acuerdo con la comprobación hecha en superficies no poligonales.

Teniendo la tabla anterior se completa el marco de referencia que las autoras proponen para revisar las producciones de los estudiantes luego de aplicar la propuesta didáctica "Generalización del Teorema de Pitágoras" con el fin de tener un instrumento para medir los alcances de la misma.

Referencias y bibliografía

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Guacaneme, E. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas* (Tesis de maestría). Universidad del Valle: Cali, Colombia.

Guacaneme, E. (2011). *Usos de la historia de las matemáticas en la educación matemática. El caso del teorema de Pitágoras*. Quindío: ECEM.

Muñoz, D. (2012). *Análisis histórico y epistemológico de la noción de suma en Euclides* (Tesis de pregrado). Santiago de Cali, Colombia.

Quintero-Suica, D., & Valderrama, N. (2015-a). Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad. Tuxtla, Chiapas. México: CIAEM.

Quintero-Suica, D., & Valderrama, N. (2015-b). Una concepción del Teorema de Pitágoras y su enseñanza en la educación básica y media. Bogotá. Colombia: ENHEM5.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M.M. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Madrid: ice - Horsori.