



## Construcción de ecuaciones de rectas y planos en $R^3$ en laboratorio interactivo con GeoGebra y plataforma Moodle

Antonio **Rivero** Alexanderson  
Escuela de Ciencias, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra  
República Dominicana  
[arivero@pucmm.edu.do](mailto:arivero@pucmm.edu.do)

### Resumen

En el presente artículo mostramos que el uso del laboratorio interactivo con GeoGebra y la plataforma Moodle contribuye al aprendizaje de conceptos y ecuaciones de rectas y planos en  $R^3$ . En el estudio participaron 9 estudiantes de nivel superior, del curso de álgebra lineal para ingenieros. La investigación se apoyó en la teoría de Representaciones de Duval (2006) y del uso de ambientes dinámicos de Soto y Romero (2011) para favorecer el aprendizaje. La metodología consistió en diseñar una sesión práctica interactiva que intercala el trabajo en GeoGebra con preguntas y reflexiones en la plataforma Moodle, tutorizadas por el docente. Los resultados indican que el uso de la tecnología facilita la relación entre la representación visual y la algebraica de los objetos matemáticos y que la plataforma interactiva permite registrar las actividades de los estudiantes para su valoración.

*Palabras clave:* álgebra lineal, GeoGebra, Moodle, laboratorio.

### Introducción

La enseñanza de la matemática a nivel superior presenta sus propios retos, sobre todo en los primeros años de la formación universitaria, entre los cuales está una población estudiantil con diferentes niveles de dominio de los saberes previos, diversos estilos de pensamiento, intereses y grado de madurez, entre otros. Estas consideraciones tienen como efecto que el que el rango de logros de aprendizaje en los estudiantes de matemática de nivel universitario de los primeros años sea bastante amplio en cuanto a las competencias desarrolladas y su nivel de dominio.

En este contexto, los cursos de álgebra lineal introductoria, que suelen impartirse en el primero o segundo año de una carrera universitaria de ingeniería, presentan los retos adicionales de que muchos estudiantes no tienen experiencia con el desarrollo de conceptos abstractos, los cuales se construyen generalmente a través de definiciones y análisis de propiedades. Ejemplos de esto en álgebra lineal son los conceptos de espacio vectorial, base, función vectorial y transformación lineal, entre otros. Los estudiantes de ingeniería deben comprender y aplicar correctamente los conceptos de álgebra lineal y de cálculo para abordar exitosamente las asignaturas de las ciencias.

Para ayudar al estudiante a construir los conceptos abstractos del álgebra lineal, Duval (2006) señala que el uso de múltiples representaciones de un objeto y el cambio de una a otra favorece su comprensión. De esta manera, el uso de representaciones geométricas en el álgebra lineal permite un acercamiento más concreto e intuitivo al estudio y análisis de las propiedades de dichos objetos.

Por otra parte, una de las metas en la educación del siglo XXI es la inclusión de las tecnologías de información y comunicación en el apoyo a la educación. En la misma línea, el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos, NCTM en inglés, establece en sus Estándares (2000) que el uso de herramientas tecnológicas adecuadas favorece el análisis, el razonamiento y la resolución de problemas.

Por tanto, se observa una inclusión paulatina de las tecnologías en la educación matemática. Ante esto, surge la interrogante: ¿Cuáles aspectos debe tomarse en cuenta para que el uso de dichas tecnologías favorezca el aprendizaje de los estudiantes en el área matemática?

De acuerdo con Artigue (2011), las herramientas tecnológicas modelan no sólo los conocimientos y saberes que producen, sino los procesos de aprendizaje y sus formas. Además, la tecnología debe responder a tres funciones: una pragmática, que permite actuar sobre el mundo real; otra epistémica, que contribuye a la comprensión del objeto y otra heurística, que organiza nuestras acciones para aprender. De esta manera, el uso que se da al recurso tecnológico debe ser integral, más allá del aspecto ilustrativo.

Los investigadores Soto y Romero (2011) estudiaron el uso de ambientes dinámicos para favorecer el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal sus resultados muestran que el software para construcciones geométricas dinámicas, como es GeoGebra, ayuda al aprendizaje de las propiedades y características de los objetos del álgebra lineal.

En la misma línea, Sánchez Rosal (2012) presenta resultados favorables de aprendizaje al incluir las tecnologías informáticas en la educación matemática. Y concluye que el estudiante debe tener la facilidad de *explorar y hacer conjeturas*, para desarrollar las capacidades reflexivas propias del pensamiento matemático. Comenta también que es importante la guía del profesor en la tutorización del docente para aclarar dudas, evitar errores de interpretación y guiarlo en su proceso reflexivo.

Más recientemente, Guzmán y Zambrano (2015) mencionan en su ponencia del XIV CIAEM que las representaciones geométricas dinámicas promueven reflexiones en torno al

aprendizaje de los *conceptos previamente adquiridos con papel y lápiz*. Por tanto, la actividad en un software de matemática no debe sustituir las representaciones tradicionales sino complementarlas, para una mejor comprensión de los objetos matemáticos en estudio.

En este sentido, entendemos que el mayor impacto ocurre cuando la interacción con el software se realiza dentro de sesiones de laboratorio en la cual los estudiantes descubren al objeto y sus propiedades a través de la manipulación de diversas representaciones, especialmente la representación geométrica dinámica, bajo la tutela del docente.

Un reto importante en todo laboratorio de matemática es mantener un balance entre la intuición y el formalismo. La presente propuesta considera la incorporación de un laboratorio de matemática en un curso de álgebra lineal en el cual se abordan representaciones geométricas y cambio de representaciones de objetos matemáticos abstractos para favorecer la comprensión de sus propiedades.

Los elementos particulares de este laboratorio son el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, el diseño de sesiones de laboratorio en una plataforma digital, como es Moodle, donde se agrega actividades interactivas y preguntas específicas que motivan al estudiante al aprendizaje por experimentación. Además, se propone diseñar secuencias didácticas de trabajo práctico que promuevan la experimentación y el análisis por parte del estudiante ante situaciones presentadas con ayuda de las herramientas tecnológicas.

### **Metodología**

La presente investigación tiene un carácter exploratorio en la cual se incluyen elementos cuantitativos y cualitativos.

Se utilizó una muestra de 9 estudiantes del curso de álgebra lineal que tenían la disposición de colaborar en el estudio para formar un grupo piloto y realizar una práctica de laboratorio, respondiendo preguntas sobre lo aprendido y recogiendo sus impresiones sobre la actividad. El investigador, quien es docente de la asignatura, elaboró una sesión práctica de laboratorio para complementar el aprendizaje de los conceptos de ecuación del plano y ecuación de la recta en  $R^3$ , los cuales ya se habían desarrollado en clase teórica. Para esto se diseñó una secuencia didáctica utilizando la plataforma Moodle, que permite realizar lecciones interactivas e integrar cuestionarios junto con la lección. La parte de software de geometría interactiva se realizó en la plataforma de Grupos de GeoGebra (GeoGebra Groups) que permite generar una construcción geométrica única y asignarla individualmente a un grupo de estudiantes como una tarea en la que cada estudiante interactúa y escribe sus respuestas para ser valoradas posteriormente por el profesor. De esta manera, se ha creado una plataforma integrada para prácticas de laboratorio que permite registrar las interacciones de cada estudiante y guardar sus reflexiones y conclusiones, como si fuera un formato de tareas individuales en formato digital.

## Bienvenido!

Bienvenido a esta actividad!

El objetivo de esta práctica es reforzar los aprendizajes de los conceptos de ecuaciones de rectas y de planos en R3.

La dinámica a seguir es la siguiente:

1. Se realiza una verificación de conocimientos. Usted debe responder las preguntas que se hacen
2. Se realiza una práctica guiada usando el software Geogebra, como estrategia para construir nuevos aprendizajes.
3. Se realiza una verificación de conocimientos final, para validar si hubo un aprendizaje real o no.

Estamos listos para comenzar. Pulse clic en la sección 1 para continuar...



Figura 1. Pantalla de bienvenida de la sesión en la plataforma Moodle

En el diseño metodológico se consideraron cuatro momentos:

El primer momento consiste en un en una prueba diagnóstica o pre-test para ver el grado de dominio de la tarea específica a lograr, en este caso se pidió hallar ecuaciones de rectas y planos en R3 dados ciertos elementos en forma algebraica.

El segundo momento corresponde a la sesión de interacción con la plataforma GeoGebra, donde previo registro de cada participante, se presentan dos actividades desarrolladas con el software: una con una recta que es la intersección de dos planos y la otra con un plano. En este momento se presentan actividades que requieren la interacción con el software GeoGebra para responder preguntas que propician el análisis y la reflexión del estudiante. El docente ejerce un rol de tutor en esta etapa, respondiendo dudas sobre el uso de la herramienta y aclarando conceptos matemáticos. El objetivo de la interacción del docente es hacer consciente a los estudiantes de los objetos matemáticos involucrados, propiciando la relación entre la representación algebraica del objeto, que se usa en ejercicios y evaluaciones de papel y lápiz, y la representación geométrica visualizada a través del software.

El tercer momento consiste en un momento de metacognición, donde se pide al estudiante que escriba una reflexión sobre los aprendizajes que tuvo en su interacción con la plataforma GeoGebra. Posteriormente, se realiza una verificación post-test donde se le pregunta al estudiante el mismo tipo de ítems de la prueba diagnóstica para ver si hubo un aprendizaje real a partir del trabajo de laboratorio.

Finalmente, se pide una valoración cualitativa de la sesión, donde el estudiante abiertamente puede dar su opinión acerca del uso de la plataforma y la actividad realizada.

La valoración de los resultados se hizo de la siguiente manera: se hizo una tabulación de los estudiantes que lograron completar el pre-test exitosamente y se comparó con una tabulación similar de los estudiantes que lograron completar con éxito el post-test.

En la parte cualitativa, se recogieron las reflexiones de los estudiantes sobre los aprendizajes que tuvieron al usar la plataforma y se valoraron las opiniones emitidas por los estudiantes sobre la actividad. Como el estudio es de carácter exploratorio, dichos insumos servirán para diseñar sesiones prácticas posteriores en base a la retroalimentación recibida y cuya efectividad pueda medirse de manera más precisa.

### Análisis de datos y discusión de resultados.

En este artículo presentaremos solamente los resultados de la primera actividad, cuyo objetivo era hallar ecuaciones de una recta en R3 a partir de una construcción geométrica. En el pre-test y post-test, se pide a cada estudiante que escriba ecuaciones simétricas de una recta que contiene dos puntos cuyas coordenadas se especifican. La Tabla 1 presenta los porcentajes de estudiantes que pudieron completar el pre-test y el post-test exitosamente. De manera general, vemos que hubo más estudiantes que respondieron correctamente a la pregunta realizada después de la sesión interactiva.

Tabla 1

*Porcentajes de respuestas correctas del pre-test y post-test*

	Pre-test	Post-test
Correcto	44%	67%
Incorrecto	56%	33%

*Notas.* Porcentajes en base a un total de nueve estudiantes.

El trabajo en GeoGebra comenzó con unas preguntas definidas en la plataforma Moodle para que cada estudiante respondiera a partir de su interacción con la construcción geométrica. En el caso de la recta en R3, una actividad pedía digitar unas ecuaciones en forma simétrica dadas para identificar la representación geométrica del conjunto solución. Posteriormente, se pidió hallar y representar un vector de dirección de la recta graficada. Finalmente, se solicitó definir gráficamente dos puntos sobre la recta, distintos a los marcados inicialmente, para hallar un vector de dirección entre los puntos y escribir otras ecuaciones simétricas de la misma recta.

Al analizar los resultados con más detalle, vimos que todos los estudiantes que realizaron el pre-test exitosamente hicieron el trabajo en GeoGebra sin mayor dificultad y completaron el post-test también con éxito. Sin embargo, destacamos el trabajo realizado por dos estudiantes, quienes estaban confundidos en el pre-test y escribieron una ecuación de un plano, en lugar de

ecuaciones de una recta. Durante el trabajo interactivo, pudieron darse cuenta de su error y en el post-test, estos estudiantes no tuvieron dificultad en escribir, ahora sí, ecuaciones de una recta.

En el momento del trabajo interactivo con GeoGebra, el docente leía en voz alta las preguntas propuestas en la actividad, esperaba a que los estudiantes interactuaran con el software y buscaran una respuesta, luego pedía turnos para responder. Si nadie participaba, buscaba orientar a través de otras preguntas. La interacción del docente ayudaba a reforzar los conceptos, preguntando, por ejemplo: ¿Cómo es un vector normal a un plano? Las respuestas verbales de los estudiantes a las preguntas no fueron registradas, pero sí hay una copia de la construcción geométrica hecha por cada estudiante y de sus respuestas escritas que el docente pudo verificar gracias a la plataforma GeoGebra Groups.

También pudimos observar que los estudiantes que tuvieron dificultades con el uso del software GeoGebra y no tuvieron oportunidad de responder sus dudas con el docente durante la sesión interactiva, no pudieron completar las tareas solicitadas y tuvieron dificultades en el post-test. Los resultados anteriores indican que es favorable contar con la guía del docente durante la sesión de laboratorio interactivo.

Por último, en la valoración cualitativa de los estudiantes sobre la actividad realizada, el 100% de los estudiantes encuestados respondieron que deseaban que este tipo de actividades se incluyera en las demás sesiones del curso de álgebra lineal. En la figura 2 se muestra algunas respuestas escritas de los estudiantes sobre sus aprendizajes.

<p>Pregunta: Escribe brevemente lo que aprendiste sobre el tema con esta actividad.</p>	<p>Pregunta: Escribe brevemente lo que aprendiste sobre el tema con esta actividad.</p>
<p>Respuesta:  Con esta actividad haciendo uso de la plataforma geogebra se nos hace mas facil poder aplicar los conceptos de ecuaciones simetricas y parametricas debido a que estamos haciendo uso de un nuevo modelo de apoyo digital para realizar operaciones matematicas. Aprendi a identificar y colocar un vector entre dos puntos con fines de poder realizar adecuadamente las operaciones de la recta que nos pedian</p>	<p>Respuesta:  gracias a esto, me siento mas capaz de trabajar con los vectores en R3, que mediante geogebra, me ayuda un poco mas a comprender la ubicación de un vector y y como este esta representado en el espacio y no solo ver cálculos y mas cálculos D.: ademas de esto, me senti mas cómodo buscando el vector unitario de esta manera</p>

Figura 2. Respuestas de estudiantes sobre los aprendizajes que tuvieron con la actividad.

Cuando se les preguntó sobre lo que habían aprendido, las respuestas escritas a modo de ensayo libre fueron variadas, pero muchas evidenciaron la *visualización* de objetos y sus propiedades, tales como observar que un vector de dirección es paralelo a la recta; o un proceso, como el de definir un vector entre dos puntos, entre otros. De esta manera, los estudiantes valoraron la importancia de trabajar con representaciones visuales para facilitar su comprensión.

## Conclusiones

En base al análisis realizado de los datos disponibles podemos ver que efectivamente el uso de diferentes representaciones de un objeto facilita su comprensión.

También, que la interacción dinámica con representaciones geométricas a través del software GeoGebra ayuda a que los estudiantes comprendan cuáles son los objetos involucrados y puedan relacionarlos más fácilmente con las representaciones algebraicas de los mismos.

Finalmente, hemos visto que la integración de recursos tecnológicos para la educación matemática en formato de laboratorio permite mayor interacción y propicia el aprendizaje. El uso de las plataformas Moodle y GeoGebra Groups permite dejar registro escrito de la actividad de cada estudiante para una posterior valoración cualitativa o cuantitativa. La interacción con el docente para responder dudas sobre el uso de la herramienta tecnológica o aclarando conceptos matemáticos favoreció el logro de los aprendizajes esperados.

En base a estos resultados, recomendamos incluir sesiones prácticas de laboratorio en las asignaturas de matemática que lo requieran y en base a la retroalimentación de los estudiantes y el efecto en sus aprendizajes, seguir diseñando mejores sesiones de laboratorio que contribuyan a su aprendizaje.

## Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Año 6. Número 8. (pp 13-33). Costa Rica: Universidad de Costa Rica. ISSN Impreso: 1659-2573
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z
- Guzmán, J., Zambrano, J. (2015). Base de un espacio vectorial de  $R^n$  y tecnología. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado de: [http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv\\_ciaem/xiv\\_ciaem/paper/view/884](http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/884)
- Kolman, B., Hill, D. (2006). Álgebra lineal. México: Pearson Educación. ISBN: 970-26-0696-9
- NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.
- Sánchez, A. (2012). Incorporación de las TIC en el aprendizaje de la matemática en el sector universitario. *Revista de Educación Matemática*, 27(3). (pp 23-38). Argentina: Universidad Nacional de Córdoba. ISSN: 0326-8780
- Soto, J. L. & Romero, F. C. (2011). El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión gráfico-algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Canadá: Loze-Dion. ISBN: 978-2-9235-6554-5