XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Reflexión por partes de profesores y futuros profesores en matemática en torno a definiciones

Ana María **Mantica**
Facultad de Humaniades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
Argentina
ana.mantica@gmail.com

María Florencia **Cruz**
Facultad de Humaniades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
Argentina
ma.florenciacruz@gmail.com

Resumen

En este trabajo se reflexiona en torno a una experiencia de un taller que se lleva a cabo con profesores y futuros profesores en matemática. En el mismo se analizan diferentes definiciones de polígono de distintos libros de texto.

Se pone énfasis en el análisis de la experiencia respecto a cuestiones que emergen en instancias de debate colectivo. Cabe destacar que la discusión versa en la arbitrariedad de las distintas definiciones presentadas, la relación que existe entre representaciones y definiciones formales, la presentación de ejemplos y no ejemplos del concepto de polígono y la equivalencia entre definiciones.

Palabras clave: *Definición, Polígono, Libros de texto, Futuros Profesores, Profesores en Matemática.*

Introducción

En la enseñanza de la matemática, actualmente, los libros de textos son los principales recursos didácticos empleados en los diferentes niveles del sistema educativo (Cárcamo, 2012). Braga Blanco y Belver Domínguez (2014) destacan la necesidad de que los profesores no utilicen diferentes libros de textos de un modo cegado, sino que realicen análisis de los mismos teniendo en cuenta el lugar preponderante que ocupan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática. Consideraciones similares se señalan en Cárcamo (2012).

En Argentina los documentos regulatorios producto de las últimas reformas curriculares revalorizan el trabajo en geometría (NAP, 2011). Sin embargo, diversos autores ponen de manifiesto la pérdida de presencia de este dominio en las clases de matemática en este país (Schaefer y Sgreccia, 2016; Grossi y Sgreccia, 2016) y parece que esta tendencia se evidencia también a nivel internacional (Ibarra, Formeliano, Patagua, Velazquez, Baspiñeiro, y Mendez, 2013; Olivero, Bosch y Gascón, 2013).

La definición de conceptos en matemática tiene un papel destacado, al respecto Winicki Landman (2006) afirma "Las definiciones, junto a los axiomas y los teoremas son los ladrillos con los que se construyen todas y cada una de las teorías matemáticas" (p. 528). En este sentido, cabe destacar que diversos investigadores en Educación Matemática manifiestan la preocupación por el modo en que se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de la definición (Vinner y Dreyfus, 1989; Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1991).

Atendiendo a las consideraciones realizadas se diseña un taller con el fin de reflexionar, analizar y discutir con docentes y futuros docentes definiciones de polígono que se presentan en libros de textos (manuales y académicos). Este taller se lleva a cabo en el XIII Congreso Argentino de Educación Matemática realizado en octubre 2018 en la ciudad de La Plata en la provincia de Buenos Aires (Argentina). En este trabajo se propone analizar la reflexión realizada por futuros profesores en matemática y profesores de matemática en desempeño en torno a cada una de las definiciones de polígono presentadas en el marco del taller mencionado.

Referentes teóricos

En el presente trabajo se abordan las particularidades que presentan los conceptos geométricos que llevan implícito una definición y una representación del mismo, considerando para esto diferentes teóricos que reflexionan sobre esta problemática.

Vinner (1991) hace referencia a definición conceptual cuando remite al significado matemático, es decir, a la definición formal. El autor considera que el nombre de un concepto conocido en raras ocasiones permite evocar su definición formal, sino que hace recordar un "algo" formado por un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Esto es lo que el autor denomina imagen conceptual. En la formación de conceptos geométricos, esta imagen conceptual que se crea en la mente de los sujetos está formada por los diversos dibujos, figuras o representaciones que se recuerdan como ejemplo de este concepto y el conjunto de propiedades que asocian al mismo. La imagen del concepto es correcta cuando le permite al sujeto discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociada son todas relevantes.

Winicki-Landman (2006) destaca que la secuencia clásica de trabajo en el aula de matemática, definición, ejemplos y no ejemplos, potencia el proceso de elaboración de la imagen conceptual. Propone una diferencia entre la definición formal del concepto y la personal. Con la formal se hace referencia a la definición matemática aceptada por la comunidad matemática y con la personal a las interpretaciones, construcciones o reconstrucciones que cada individuo hace respecto de la definición formal.

Guillén (1991) sostiene que la imagen que el estudiantes se forma de un concepto está basada en sus atributos críticos, los que debe poseer para ser un ejemplo de determinado concepto y los no críticos que sólo lo poseen algunos ejemplos. La autora considera que a medida que el mundo de ejemplos y no ejemplos posibles aumenta la imagen se amplia. Al respecto, Vinner y Dreyfus (1989) y Tall (1989) señalan la importancia de la presentación de ejemplos y no ejemplos en la construcción de la definición de un concepto geométrico.

Otra consideración a tener en cuenta es la equivalencia y no equivalencia entre definiciones formales de un mismo concepto matemático.

Van Dormolen y Zaslavsky (2003) sostienen que la equivalencia entre dos definiciones se da si definen el mismo concepto. En caso que se tengan definiciones equivalentes, en la práctica, se debe elegir una de ellas y considerar que las demás pueden probarse como propiedades. Lo mencionado posibilita que un sujeto pueda elegir entre varias definiciones equivalentes la que le resulte más elegante, por diversas razones, entre ellas, necesita menos cantidad de palabras, menos símbolos o porque usa conceptos generales más básicos.

Winicki-Landman (2006) destaca:

> En el proceso de definir se influyen criterios que no siempre se revelan cuando las definiciones son presentadas como hechos consumados […]. Desde el punto de vista lógico, la definición de un concepto: a) Debe ser precisa. b) Debe basarse solamente en otros conceptos previamente definidos o en conceptos primitivos (criterio de jerarquía, según Van Dormolen y Zaslavsky, 2003) c) Debe ser consistente con definiciones anteriores en la que ella se apoya. d) Es arbitraria. e) Establece condiciones necesarias y suficientes, es decir es bicondicional. (p. 530 y 531)

Modalidad de trabajo

El taller se lleva a cabo en un encuentro que posee una duración de dos horas. Participan profesores en matemática que desempeñan en nivel secundario y/o superior y futuros profesores en matemática de Argentina, Uruguay, México y Chile.

El taller se diseña con el fin de discutir con los participantes consideraciones en torno a: la arbitrariedad de la definición de polígono, las imágenes conceptuales que poseen y el valor de los no ejemplos en la formación de dichas imágenes conceptuales. Teniendo en cuenta lo mencionado se ponen en juego dos momentos de trabajo en grupos de al menos seis sujetos.

Para el primer momento se trabaja en torno a la siguiente tarea:

Tabla 1

Tarea 1 que se presenta a los asistentes al taller.

TAREA 1: Analizar las definiciones que se presentan de polígonos a partir de ideas disponibles a fin de justificar si son adecuadas o no.

Para el desarrollo de la tarea se trabaja con cinco definiciones de polígono tomadas de libros de texto de la escuela obligatoria y un libro de Geometría Euclídea destinado a la educación superior. Se entregan en formato papel tres definiciones de polígono a cada uno de los grupos. Luego que cada grupo finaliza la discusión se realiza un debate colectivo. El análisis que se realiza para el presente trabajo se concentra en discutir la reflexión realizada por los participantes en torno a cada definición por lo que no exponemos hasta el análisis cada una de ellas.

En el segundo momento de trabajo se presentan imágenes de ejemplos y no ejemplos de polígonos construidas en el software de geometría dinámica *GeoGebra* a fin de justificar cuáles consideran representaciones de polígonos y cuáles no. En esta instancia se muestra la vista gráfica 2D y 3D con el fin de incentivar la reflexión acerca de la relación entre construcciones bidimensionales, tridimensionales y las definiciones de polígonos. En el debate colectivo se pone especial énfasis en conocer los supuestos de los asistentes sobre polígonos y qué determina para cada individuo que una representación sea un polígono o no, la definición o la imagen. A su vez se reflexiona acerca del potencial del empleo del software de geometría dinámica *GeoGebra* en las vistas simultáneas de una representación en 2D y 3D, se propone la discusión acerca del papel que juegan los no ejemplos en la construcción de conceptos matemáticos, entre otros.

Es de destacar que durante el taller y con el consentimiento de los participantes se registra la discusión en audio. En este trabajo se realiza el análisis de las cuestiones que emergen en torno al primer momento llevado a cabo en el mismo.

Reflexión de discusiones colectivas

Se organiza el análisis presentando cada una de las definiciones y posteriormente una reflexión acerca de lo discutido en torno a la misma en el taller. Cabe destacar que los extractos de transcripciones textuales se presentan en letra cursiva.

Definición 1:

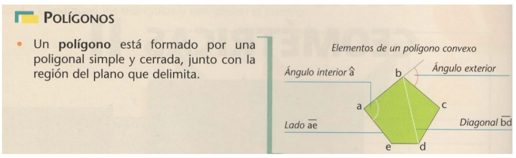


Figura 1. Definición recuperada de Kaczor, P.J.; Piñeiro, G.E.; y Serrano, G.B. (2012). *Actividades clave. II Matemática*. Buenos aires: Santillana.

El grupo A manifiesta que se emplean conceptos que no se encuentran definidos anteriormente en el texto, como ser, poligonal simple y cerrada. También destacan que el texto de la derecha hace referencia a un polígono convexo cuando la definición que se presenta a la izquierda es de polígono. La primera consideración puesta de manifiesto evidencia la necesidad de emplear el criterio de jerarquía al definir (Van Dormolen y Zaslavsky, citado en Winicki-Landman, 2006) La segunda hace referencia a la formación del concepto, este modo de presentación podría contribuir negativamente la formación de la imagen del concepto (Vinner, 1991).

El grupo B agrega a lo mencionado que los elementos que se presentan en el dibujo podrían suponer que un triángulo no es un polígono convexo por no tener diagonales. "*Estos son los elementos, que yo alumno de segundo año como plantea ahí, estas son las cosas que tengo que encontrar en un polígono convexo, la diagonal en un triángulo no existe entonces, ¿el triángulo dejó de ser un polígono convexo?*" Se manifiesta que está categorizado como los demás, y afirma que si se elimina un lado de un polígono convexo deja de ser un polígono.

El grupo C rescata como positivo que se considera el polígono como una región. Parece que debe cumplir estrictamente la definición dicha condición, sin embargo las definiciones son arbitrarias (Winicki-Landman, 2006).

Finalmente el Grupo A plantea que una definición debe responder a la pregunta, ¿qué es?, tanto en el ámbito de trabajo matemático como en otros ámbitos. Y afirma que en este caso no responde a esta pregunta.

Definición 2:

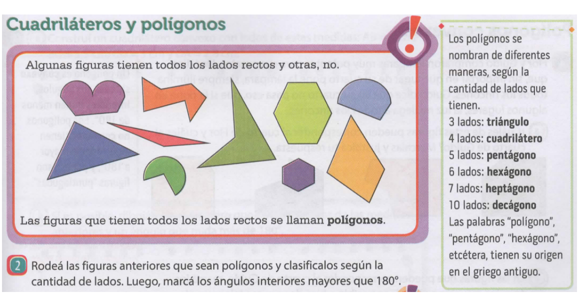


Figura 2. Definición recuperada de Sessa C. (Coord.). (2015). Hacer Matemática 7/1. Buenos Aires: Estrada.

El grupo D presenta la imagen 4 que considera que verifica la definición pero no corresponde a la imagen conceptual de polígono (Vinner, 1991). En este sentido se discute acerca de la necesidad de emplear conceptos previamente definidos (Winicki-Landman, 2006) y la importancia de los acuerdos en la comunidad clase que se trabaja.

Se presenta una discusión en torno a la expresión “lados rectos” y manifiestan que lados son segmentos y por tanto sólo pueden ser rectos.

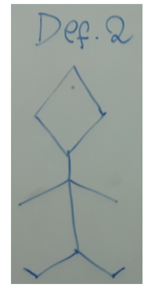
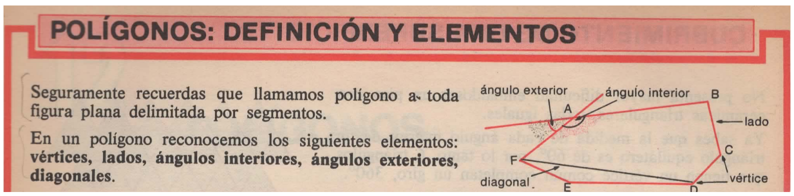


Figura 3. Representación Grupo D

Definición 3:



POLÍGONOS: DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

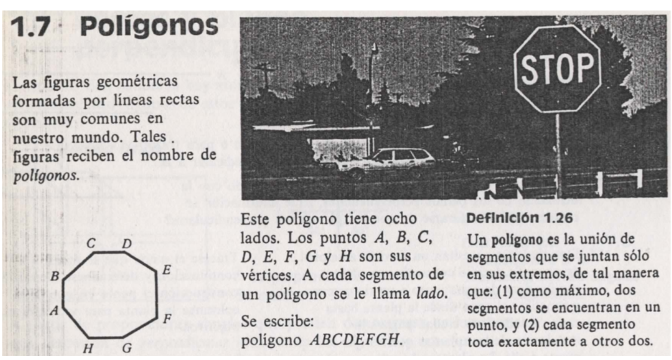
Seguramente recuerdas que llamamos polígono a toda figura plana delimitada por segmentos.

En un polígono reconocemos los siguientes elementos: **vértices, lados, ángulos interiores, ángulos exteriores, diagonales.**

Figura 4.: Definición recuperada de Sadovsky, P., Kass, M., Panizza, M.G. y Reyna, I.M. (1989) Matemática 2. Buenos Aires: Santillana.

El grupo A expresa la confusión que puede representar la imagen debido a la continuación del lado que se realiza para considerar el ángulo exterior y al representarlo como el segmento determinado por dos vértices consecutivos. Nuevamente se pone de manifiesto la influencia de las representaciones visuales en la construcción de un concepto (Vinner, 1991). El grupo B agrega que es importante el uso de líneas de puntos para representar con el fin de diferenciar el lado del polígono de la extensión del lado. A su vez los integrantes destacan que lo que se presenta no es una definición, no se profundiza esta afirmación porque no realizan mayores consideraciones al respecto.

Definición 4:



1.7 Polígonos

Las figuras geométricas formadas por líneas rectas son muy comunes en nuestro mundo. Tales figuras reciben el nombre de *polígonos*.

Este polígono tiene ocho lados. Los puntos A, B, C, D, E, F, G y H son sus vértices. A cada segmento de un polígono se le llama *lado*.

Se escribe: polígono $ABCDEFGH$.

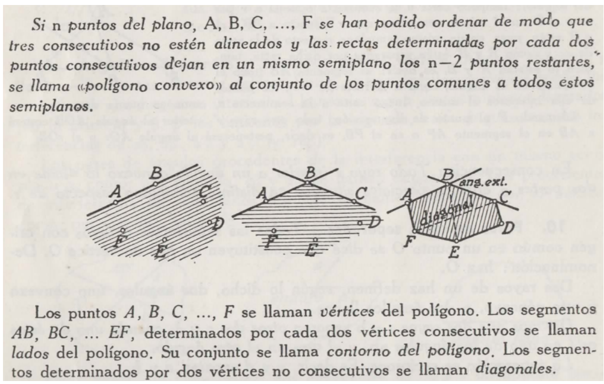
Definición 1.26

Un polígono es la unión de segmentos que se juntan sólo en sus extremos, de tal manera que: (1) como máximo, dos segmentos se encuentran en un punto, y (2) cada segmento toca exactamente a otros dos.

Figura 5. Definición recuperada de Stanley C., Phares G. y Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Distrito Federal: Addison Wesley Longman.

El grupo A manifiestan que los autores consideran la poligonal, por lo que no toma como otros textos la región. En esta afirmación se explicita la no equivalencia entre las definiciones trabajadas (Van Dormolen y Zaslavsky, 2003). También manifiestan que en la descripción y en la definición se emplean diferentes términos para referir al mismo concepto, por ejemplo, “formados por líneas rectas dice primero, cuando después en la definición habla de segmentos, es la brecha entre lo que cuenta y lo que define”, también hacen referencias, entre otros, a los términos, puntos, vértices. A su vez señalan que el concepto está "muy anclado" en la representación que es un polígono convexo puede dificultar la formación de la imagen conceptual de polígono (Vinner 1991).

Definición 5:


Si n *puntos del plano,* A, B, C, ..., F *se han podido ordenar de modo que tres consecutivos no estén alineados y las rectas determinadas por cada dos puntos consecutivos dejan en un mismo semiplano los* n−2 *puntos restantes, se llama «polígono convexo» al conjunto de los puntos comunes a todos estos semiplanos.*

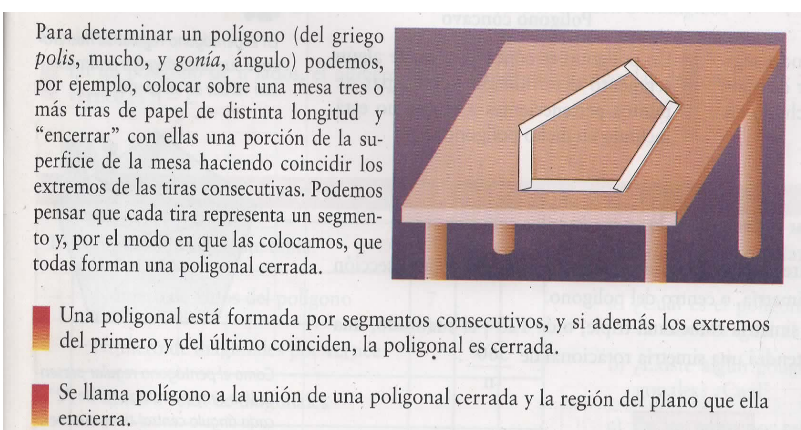
Los puntos *A, B, C, ..., F* se llaman *vértices* del polígono. Los segmentos *AB, BC, ... EF,* determinados por cada dos vértices consecutivos se llaman *lados* del polígono. Su conjunto se llama *contorno del polígono*. Los segmentos determinados por dos vértices no consecutivos se llaman *diagonales.*

Figura 6. Definición recuperada de Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo I. Fundamentos. Euler, G. Madrid: Puig Ediciones.

El grupo A diferencia esta definición de la presentada en la imagen 1 respecto al concepto de diagonal, puesto que en este caso se expresa que se determinan considerando vértices no consecutivos, en consecuencia no se excluye al triángulo como polígono convexo. Nuevamente se reflexiona en torno a la no equivalencia entre las definiciones presentadas (Van Dormolen y Zaslavsky, 2003)

El grupo B manifiesta que este texto no lo presentaría en la escuela secundaria por la formalidad con que está escrito, pues un libro destinado a la educación superior.

Definición 6:


Para determinar un polígono (del griego *polis*, mucho, y *gonía*, ángulo) podemos, por ejemplo, colocar sobre una mesa tres o más tiras de papel de distinta longitud y "encerrar" con ellas una porción de la superficie de la mesa haciendo coincidir los extremos de las tiras consecutivas. Podemos pensar que cada tira representa un segmento y, por el modo en que las colocamos, que todas forman una poligonal cerrada.

Una poligonal está formada por segmentos consecutivos, y si además los extremos del primero y del último coinciden, la poligonal es cerrada.

Se llama polígono a la unión de una poligonal cerrada y la región del plano que ella encierra.

Figura 7. Definición recuperada de Amenado M.B., Carranza, S.G., Diñeiro, M.T., Grau, J.E. y Latorre, M.L. (1996). Matemática 2. Buenos Aires: Santillana

El Grupo C destaca que "Se coloca en el mismo nivel de análisis y complejidad la palabra, mesa, tirita y polígono", el grupo D responde que les parece adecuada la presentación. Se hace referencia al material concreto que se emplea para representar los lados, algunos grupos expresan que es interesante el trabajo con el mismo para iniciar la comprensión del concepto y visualizar, y otros consideran que no son adecuados los materiales, puesto que la "*tirita de papel puede mojarse y doblarse. Tiene propiedades que no tiene el concepto, por ejemplo, espesor, una* *superficie, ¿qué es un punto?, ¿qué es un vértice en esa superposición de dos tiras?*". Al respecto se debate que todas las representaciones tiene limitaciones y que nunca la representación es la definición formal, en este sentido cabe destacar la importancia de lograr la fusión entre esta y sus representaciones (Vinner, 1991).

Un integrante del grupo D expresa que el trabajo con el material concreto podría representar cinco tiras articuladas lo cual puede redundar en beneficios de la construcción del concepto de polígono debido a que potencia la visualización de representaciones de polígonos cóncavos y convexos, esta cuestión se encuentra en sinergia con lo planteado por Guillén (1991).

Reflexiones finales

En el taller se pone de manifiesto y discute la arbitrariedad de la definición en matemática. Sin embargo, al hacer referencia a poligonal y región poligonal parece haber una resistencia en algunos docentes en aceptar alguna de ellas como definición de polígono que contradice su propia concepción de este concepto. Esto puede influir en instancias de producción de definiciones en el aula de matemática.

Cabe destacar que la reflexión en torno a la equivalencia y no equivalencia entre las definiciones presentadas puso de manifiesto la necesidad de realizar un análisis del libro de texto a utilizar antes de emplearlo en el aula con estudiantes. Esta cuestión se acrecienta más aún cuando se realiza recopilación de diferentes textos de distintos autores y por tanto con perspectivas disímiles.

Emerge en las discusiones con los profesores y futuros profesores la importancia del empleo de representaciones visuales, imágenes, etc. en instancias de formación de conceptos. Respecto al análisis realizado es evidente que en la mayoría de textos presentados estas representaciones son escasas, estereotipadas y que en algunos casos pueden generar contradicción con la definición dada por el mismo autor. A su vez se destaca la potencialidad del uso de ejemplo y no ejemplos en los proceso de enseñanza y de aprendizaje; en particular se reflexiona la importancia de presentar no ejemplos que cumplan algunas de las condiciones de la definición y no otras.´

El taller permitió a los participantes reflexionar acerca de diversas cuestiones, entre otras, la discusión respecto al lugar que ocupa la definición en matemática y la importancia de análisis de libros de textos, dado que puede redundar en beneficios en la enseñanza de la asignatura matemática y consecuentemente contribuir al logro de resultados satisfactorios de estudiantes.

Bibliografía y Referencias

Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos*. Euler, G. Madrid: Puig Ediciones.

Amenado M.B., Carranza, S.G., Diñeiro, M.T., Grau, J.E. y Latorre, M.L. (1996). *Matemática 2*. Buenos Aires: Santillana

Braga Blanco, G. y Belver Domínguez, J.L. (2014). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación,* 27 (1), 199-218.

Cárcamo, D. (2012). *Uso de los Libros de Texto de matemática en el proceso de enseñanza: Un análisis de casos comparado.* Tegucigalpa*:* Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

Grossi, S. y Sgreccia, N. (2016). Perspectivas docentes acerca de habilidades de representación y comunicación de lo tridimensional. En *libro de actas 2 CIECyM y 3 ENEM*, 73-77.

Guillén Soler, G. (1991). *El mundo de los poliedros.* Madrid. Síntesis.

Ibarra, L.; Formeliano, B.; Patagua, I.;Velazquez, S.; Baspiñeiro, S. & Mendez, G. (2013). La construcción de triángulos en la escuela primaria. Memorias del IV econgrès international sur la TAD.

Kaczor, P.J.; Piñeiro, G.E.; y Serrano, G.B. (2012). *Actividades clave. II Matemática*. Buenos aires: Santillana.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). NAP. Tercer ciclo. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-secundaria-matematica

Olivero, F.; Bosch, M.; Gascón, J. (2013). Praxeologías matemáticas en torno a la geometría para la formación del profesorado. *Memorias del IV econgrès international sur la TAD.*

Sadovsky, P., Kass, M., Panizza, M.G. y Reyna, I.M. (1989) *Matemática 2*. Buenos Aires: Santillana.

Schaefer, L. y Sgreccia, N. (2016). Conocimiento especializado del contenido al enseñar a medir segmentos y ángulos a futuros profesores en matemática. En *libro de actas 2 CIECyM y 3 ENEM*, 66-77.

Sessa C. (Coord.). (2015). *Hacer Matemática 7/1*. Buenos Aires: Estrada.

Stanley C., Phares G. y Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Distrito Federal: Addison Wesley Longman.

Tall, D. (1989). Concept images, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 37–42.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 91-106.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989) Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Winicki-Landman, G. (2006). Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19,* 528-537.