XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El álgebra subyacente al transformar ecuaciones paramétricas en la ecuación cartesiana correspondiente: los mediadores papel y lápiz y tecnología

José **Zambrano** Ayala
Instituto Tecnológico de Milpa Alta
México
jose.zam@itmilpaalta.edu.mx
Gonzalo **Zubieta** Badillo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
gzubieta@cinvestav.mx
Verónica **Vargas** Alejo
Universidad de Guadalajara
México
veronica.vargas@academicos.udg.mx

Resumen

Reportamos resultados de una investigación cuyo propósito fue analizar cómo actividades diseñadas en papel y lápiz y con tecnología, en particular *applets* (e.g., GeoGebra), contribuyen al aprendizaje del álgebra en el tema de *Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica* de modo que estudiantes de ingeniería sobrepasen obstáculos algebraicos derivados al transformar ecuaciones paramétricas a la ecuación cartesiana correspondiente. En el estudio participaron un grupo de estudiantes de cálculo vectorial cuya edad oscilaba entre 19 y 25 años. Los datos fueron analizados en dos teorías: *Cambio de atención* de Mason (2008) y *Representaciones* de Duval (1999, 2003, 2006)[1]. Nuestros resultados indican que la mediación de la tecnología promueve la reflexión y la construcción de significados, por los estudiantes, alrededor del desarrollo de binomios, uso de identidades trigonométricas y la transformación de ecuaciones paramétricas a la ecuación cartesiana correspondiente, cuando representaciones algebraicas se asocian a representaciones gráficas.

Palabras clave: GeoGebra, representación, reflexión, atención, transformación.

Introducción

Algunas investigaciones en la década de los 70 y 80 del siglo pasado reportan dificultades de los estudiantes para la actividad transformacional del álgebra (Kieran, 2004). Éste síntoma se

---

[1] En Guzmán y Zambrano (2014) se describen estas dos teorías; en este documento sólo se indica cómo la usamos en el análisis de datos en la presente investigación.

ve reflejado en algunos estudiantes de nivel universitario, quienes exhiben dificultades señaladas como comunes, frecuentes y persistentes (e.g., Kirshner & Awtry, 2004; Marquis, 1988; Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987; ente otros). Si bien autores como Carry, Lewis y Bernar (1980), Kirshner y Awtry, (2004) y Payne y Squibb (1990), entre otros, explican los orígenes de errores de manipulación algebraica por estudiantes, aquí estamos interesados en que a partir de actividades diseñadas con papel y lápiz y applet, el estudiante reflexione sobre sus errores en el desarrollo de procesos simbólicos con la finalidad de que logre la aprehensión de la tarea algebraica en estudio (e.g., factorización, eliminación, racionalización, etc.).

Así como García, Benitez y López (2015) hicieron uso de tecnología por medio del simulador en *flash* para apoyar el aprendizaje de funciones vectoriales y Moncada, Ochoa, López, Espín y Gómez (2016) transformaron el aula en un laboratorio de cálculo vectorial con el uso de GeoGebra (el cual permitió evolucionar el aprendizaje de los contenidos de esta asignatura por medio de visualización dinámica), nos interesó usar la tecnología para investigar si los estudiantes podían reconocer la gráfica de ecuaciones a partir de su representación simbólica por medio de ecuaciones paramétricas cuando éstas se encuentran en forma cartesiana.

En nuestro estudio observamos si los estudiantes son capaces de identificar errores algebraicos y si ellos los corrigen a través de su reflexión de modo que logren su aprehensión; para ello, en esta investigación incluimos dos ambientes: el de papel y lápiz y el tecnológico. La pregunta que guió la investigación es: ¿De qué manera un ambiente dinámico (e.g., GeoGebra) promueve reflexión en el estudiante en torno a errores algebraicos cometidos al transformar ecuaciones paramétricas en la ecuación cartesiana correspondiente?

Marco conceptual

El análisis de los datos fue llevado a cabo con dos teorías cognitivas *Cambio de Atención* de Mason (2008) y *Representaciones* de Duval (1999, 2003, 2006). La primer teoría (Mason, 2008) se basa en tres conceptos básicos: *Atención* (observación por parte del estudiante) ésta se usa para reconocer la actividad del alumno relacionada con *sustentar, discernir, relacionar, percibir* y *razonar* los objetos matemáticos de estudio, y sin ella no es posible que el estudiante de sentido a lo que se quiere conocer; *Estar consciente de…*, consiste en verificar si el estudiante le da sentido a lo que quiere conocer, y precisa el conocimiento de lo que ya conoce, y la *Actitud* como la disposición que éste muestra de que quiere aprender. La segunda teoría (Duval, 1999, 2003, 2006) se basa en dos conceptos: *Semiosis*, como la aprehensión o producción de representaciones semióticas, proceso mediante el cual el estudiante exterioriza sus representaciones mentales (lenguaje natural, fórmulas algebraicas, figuras geométricas, entre otros), y *Noesis*, actos cognitivos que llevan al aprendizaje de un objeto.

Tabla 1

Conceptos en los que confluyen las dos teorías con las que analizamos los datos.

Conceptos con los que son analizados los datos	Cambio de atención (Mason, 2008)	*Representaciones* (Duval, 1999,2003, 2006)
i) Asociación de objetos	Razonamiento sobre un objeto de estudio en varias representaciones	Varias representaciones de un objeto
ii) Posición cognitiva	Cambio de consciencia implícita a explícita	“Visualizar el objeto”
iii) El estudiante le da sentido	Atención, Estar consciente de…,	Paso de un registro a otro

a lo que quiere conocer	y Actitud	

En nuestro estudio analizamos los datos al considerar los siguientes tres conceptos donde confluyen estas dos teorías: (i) *Asociación de objetos*, éste contempla el hecho de que el aprendizaje de conceptos matemáticos puede mostrarse por varias representaciones; (ii) *Posición cognitiva*, ocurre cuando se evidencia el cambio de conciencia de *implícita* a una *explicita* (Mason, 2008); esto es, cuando el estudiante puede "visualizar el objeto" (Duval, 2003) y manejar de forma consciente los objetos de estudio como un todo; (iii) *El estudiante le da sentido a lo que quiere conocer*, esto se evidencia en el estudiante cuando tiene dominio de los conceptos *Atención*, *Estar consciente de…* y *Actitud* (Mason, 2008), y puede probar el paso de un registro a otro (Duval, 2003) del objeto matemático de estudio. La Tabla 1 resume las dos teorías que conforman nuestro marco conceptual (segunda y tercera columna) e incluye los conceptos con los que analizamos los datos (primera columna).

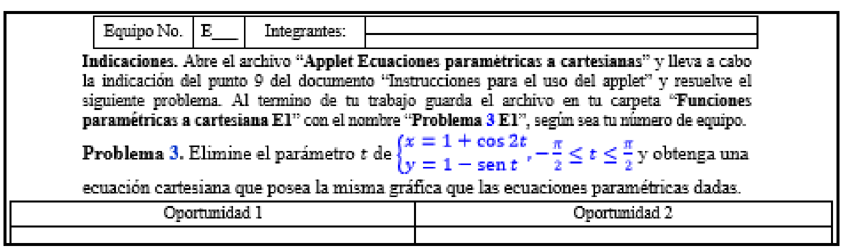
Metodología

Participantes

Los estudiantes que participaron en la investigación tenían entre 19 y 25 años de edad, pertenecían a un grupo (completo) de cálculo vectorial de un instituto tecnológico de la Ciudad de México que, al momento de la toma de datos cursaban esta asignatura. Ellos fueron agrupados en equipos de dos y tres integrantes y contaban con una computadora con el software instalado, el applet con sus indicaciones para su uso, así como sus problemas en papel.

Diseño e implementación de los instrumentos usados en el acopio de datos

Los problemas y el applet fueron diseñados por uno de los investigadores que reportan el presente artículo y llevadas a cabo por él mismo. Estos ejercicios son similares a los clásicos de los libros de texto, que con frecuencia no son discutidos con profundidad en el aula. La implementación de los problemas propuestos se llevó cabo en el salón de clases el cual se improvisó como un aula de cómputo, para ello hubo cinco sesiones, una por cada problema, con duración aproximada de una hora cada una. Previo a la solución del primer problema, los estudiantes recibieron un breve entrenamiento del uso del applet y después actuaron de forma autónoma (por equipos) para resolver los problemas propuestos. Por limitaciones de espacio, en este artículo, sólo reportamos los datos provenientes de tres equipos y tres problemas.



Equipo No.	E___	Integrantes:	

Indicaciones. Abre el archivo "**Applet Ecuaciones paramétricas a cartesianas**" y lleva a cabo la indicación del punto 9 del documento "Instrucciones para el uso del applet" y resuelve el siguiente problema. Al termino de tu trabajo guarda el archivo en tu carpeta "**Funciones paramétricas a cartesiana E1**" con el nombre "**Problema 3 E1**", según sea tu número de equipo.

Problema 3. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = 1 + \cos 2t \\ y = 1 - \operatorname{sen} t \end{cases}$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

Oportunidad 1	Oportunidad 2

Figura 1. Diseño con papel y lápiz del Problema 3.

Diseño de los problemas en papel y lápiz. Los problemas que resolvieron los estudiantes fueron del siguiente tipo: Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, con $t \in I$ y obtenga la ecuación cartesiana correspondiente (véase Figura 1). Los estudiantes debían eliminar el parámetro t y determinar una ecuación cartesiana del tipo $F(x, y) = 0$, la cual debían graficar (en el applet) para revisar si era recta, parábola, circunferencia, hipérbola, etc. Se les dio a los alumnos dos oportunidades; por ejemplo, si en la Oportunidad 1 la gráfica en el applet de ecuaciones paramétricas no era la misma en el dominio $t \in I$ que la ecuación cartesiana calculada por ellos, entonces debían identificar el (los) error(es) –algebraicos– con una marca roja en su trabajo, y con ello(s) reflexionar sobre éste(os) para que en la Oportunidad 2 volvieran a intentar su desarrollo de forma correcta.

Diseño del applet. La Figura 2 muestra las características del applet que fue proporcionado a los estudiantes para la solución de un problema que implicaba transformar las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 + \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos 2t \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \leq \ t \leq \frac{\pi}{2}$ en la ecuación cartesiana $2x^2 - 4x - y + 2 = 0$.

En t_i= y t_f= (véase Figura 2) el estudiante debía capturar los valores inicial y final del parámetro t, respectivamente; después, tenían que introducir las ecuaciones paramétricas en las casillas de entrada x(t)= y y(t)=. En seguida se le solicitaba simplificar su desarrollo algebraico en papel y lápiz. En Ecuación cartesiana el estudiante debía capturar la ecuación cartesiana obtenida, así como el nombre de la gráfica en Nombre Ecuación cartesiana. El deslizador se requería para el trazo de los puntos generados por las ecuaciones paramétricas para diferentes valores de t (en este problema $-\frac{\pi}{2} \leq \ t \leq \frac{\pi}{2}$) y la casilla de control Ecuación cartesiana para activar o desactivar la gráfica de la ecuación cartesiana.

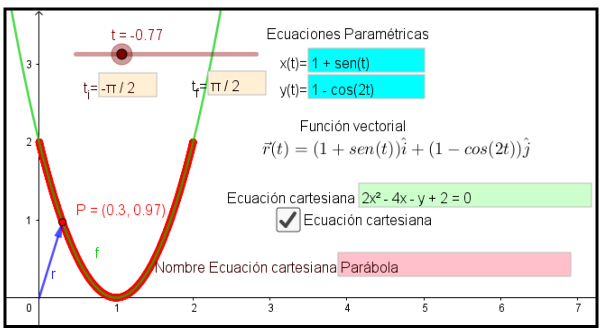


Figura 2. Diseño del applet, solución del Problema 3.

Análisis de datos y discusión de resultados

En este artículo analizamos los datos obtenidos a partir del trabajo de tres equipos de estudiantes (en adelante E1, E7 y E9) al resolver tres problemas.

Análisis y discusión de resultados del:

Problema 1. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = 3t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, -2 \leq \ t \leq 2$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

La Figura 3 muestra el desarrollo algebraico con papel y lápiz de la solución propuesta por E1. En ésta se observa cómo, en la Oportunidad 1, los estudiantes señalaron con tinta roja el error ($\sqrt{y+1} = y^{1/2} + 1$) producto de reflexionar (mediado por el trabajo que hicieron en el applet) que la ecuación cartesiana que ellos calcularon: $x - 3y^{1/2} + 1 = 0$, no era correcta ya que la gráfica de la curva de las ecuaciones paramétricas no resultó la misma que la gráfica de la ecuación cartesiana calculada; sin embargo, en la Oportunidad 2 llevaron a buen término la solución del trabajo (los estudiantes le dieron sentido a lo que querían conocer, Mason 2008; Duval, 1999, 2003, 2006).

En general, los estudiantes no tuvieron dificultades para encontrar una ecuación cuya gráfica coincidiera con la gráfica esperada en el dominio $-2 \leq t \leq 2$ como solución del problema 1. Sin embargo, algo importante que hay que enfatizar es que cambiaron su procedimiento y, por lo tanto, manejo algebraico para evitar el radical obtenido en la Oportunidad 1: $\sqrt{y+1} = y^{1/2} + 1$. Es decir, antes de despejar t a partir de la ecuación $y = t^2 - 1$, sustituyeron en esta ecuación: $t = \frac{x}{3}$ (Oportunidad 2).

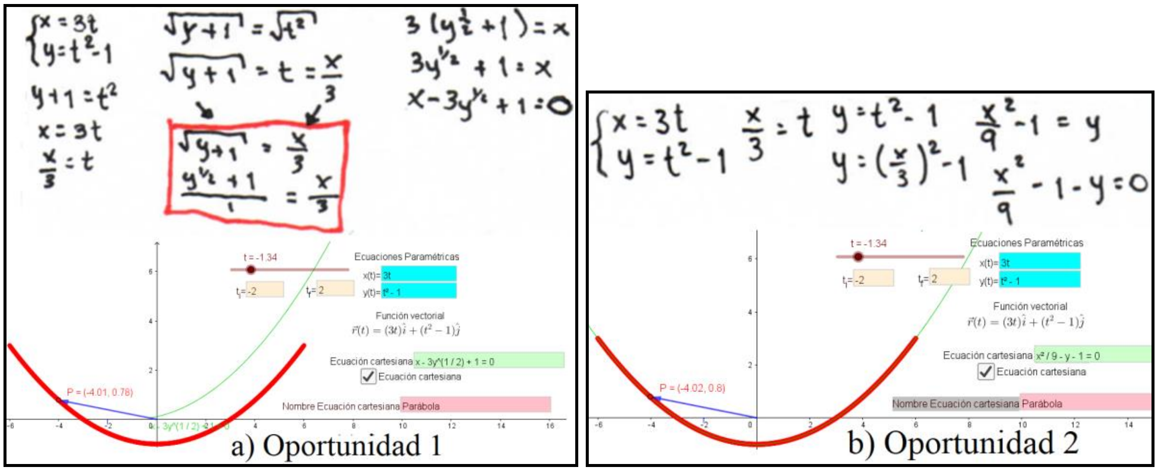


Figura 3. En a) E1 cometió errores de simplificación algebraica en el Problema 1 que corrigió en b).

Análisis y discusión de resultados del:

Problema 2. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = t^3 + 2 \\ y = t^2 + 3 \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

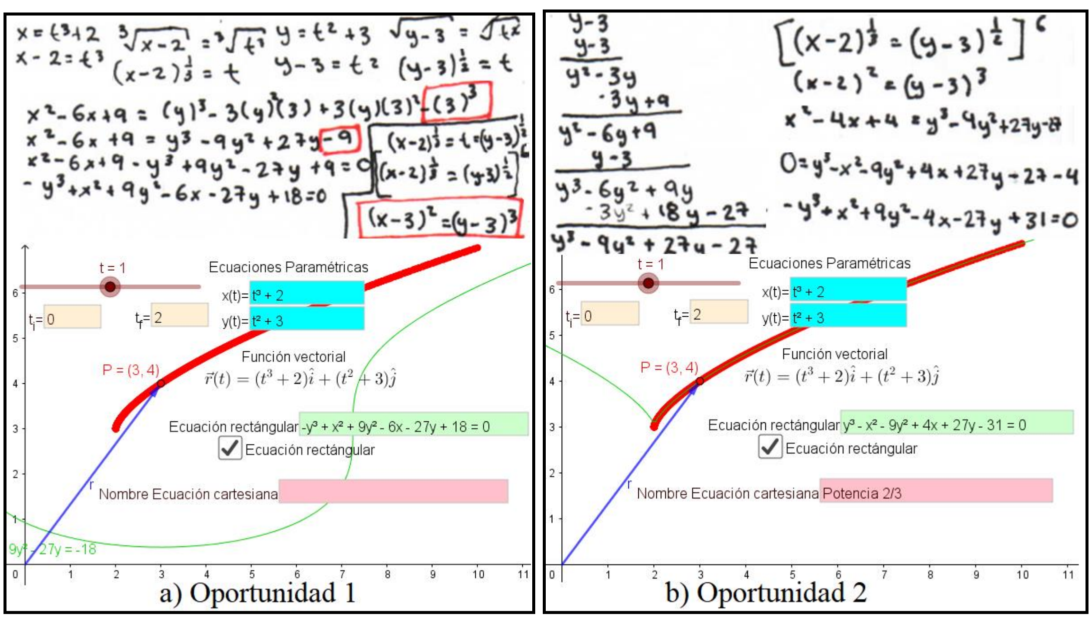


Figura 4. En a) E7 cometió errores de simplificación algebraica en el Problema 2 que corrigió en b).

Este problema puso a prueba el conocimiento de los estudiantes con respecto al desarrollo de un binomio al cuadrado y un binomio al cubo. Muy pocos equipos mostraron dificultades para desarrollar el binomio al cuadrado, no así en el binomio al cubo. La Figura 4 muestra la solución del equipo E7 de este problema. Los integrantes de este equipo desarrollaron de forma correcta la expresión $(y-3)^3$, pero una falta de atención (Mason, 2008) promovió el error al suponer $3^3 = 9$. Este error es común observarlo en el salón de clases, quizás se debe a que los estudiantes operan 3^3 como si fuera 3×3. Esto lo corrigieron en la Oportunidad 2, y desarrollaron el binomio al cubo como $(y-3)(y-3)(y-3)$ (los estudiantes le dieron sentido a lo que querían conocer, Mason 2008; Duval, 1999, 2003, 2006). Un error similar cometió E1 al fallar en el signo que acompaña al tercer término de $(y-3)^3 = y^3 - 9y^2 - 27y - 27$. E1 lo corrigió en la Oportunidad 2.

Análisis y discusión de resultados del:

Problema 3. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = 1 + \cos 2t \\ y = 1 - \operatorname{sen} t \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

El problema 3 puso a prueba el conocimiento de los estudiantes en el uso de identidades trigonométricas. La Figura 5 muestra el trabajo algebraico que desarrolló E7. En esta figura se observa cómo la mediación del applet conduce a los estudiantes a la búsqueda de errores algebraicos (véanse rectángulo en color rojo); en efecto, los integrantes del equipo E7 reflexionaron en torno a su error al suponer que $\frac{1}{2}\cos 2t = \cos t$ (véase Figura 5a)[2]. Sin embargo, en la Figura 5b) aplican de forma correcta la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$ (los estudiantes le dieron sentido a lo que querían conocer, Mason 2008; Duval, 1999, 2003, 2006).

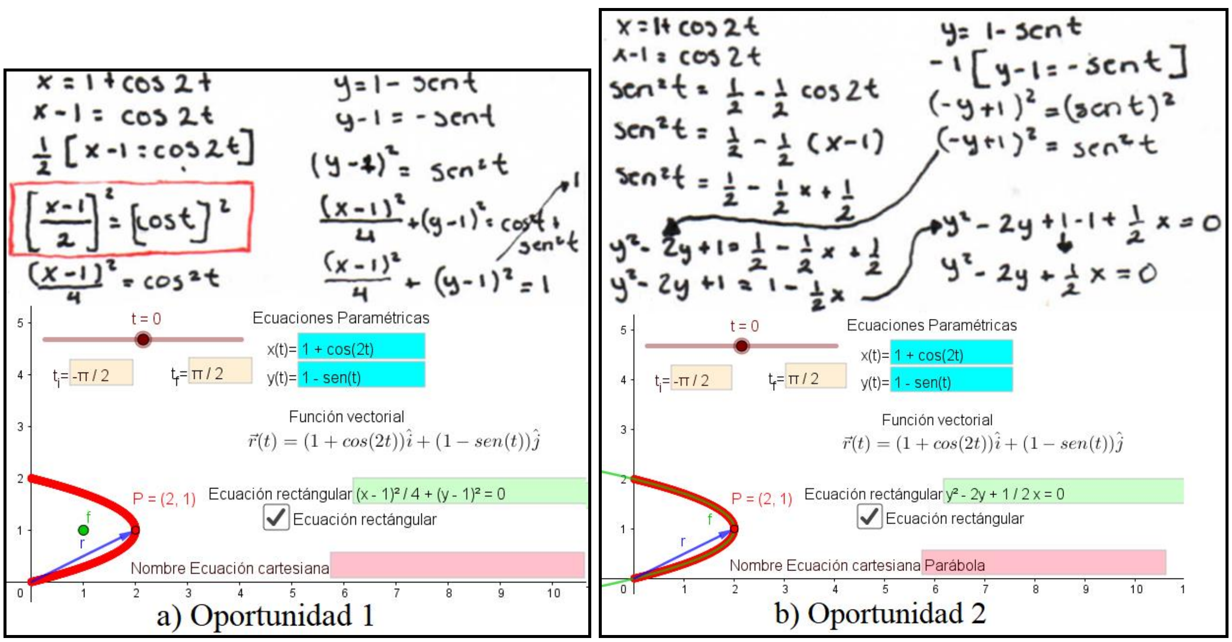


Figura 5. En a) E7 cometió errores de simplificación algebraica en el Problema 3 que corrigió en b).

Finalizamos el análisis de datos con la presentación de opiniones de los estudiantes (Tabla 2), a sendas preguntas relacionadas con la solución de los problemas aquí expuestos (con papel y lápiz) y con el applet. Utilizamos los tres conceptos donde confluyen las dos teorías utilizadas para analizar los datos (columna 3) para caracterizar las opiniones y relacionarlas con su aprendizaje de cálculo

[2] Es importante señalar que el "2" en el argumento de $\cos 2t$ también fue motivo de error en los procedimientos de otros equipos; por ejemplo, E9 obtiene $\boxed{(-2y+2)^2 = \operatorname{sen}^2 2t}$ de $y - 1 = -\operatorname{sen} t$. (falta de Posición cognitiva, Mason, 2008; Duval, 1999, 2003, 2006).

vectorial en el tema de *Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica*.

Tabla 2

Comentarios de los estudiantes en relación con la solución de los problemas de la investigación.

<table>
<tr><td colspan="3">Durante la aplicación del applet tuviste la necesidad de contestar en la Oportunidad 2, escribe –en el espacio– ¿cuáles fueron tus errores algebraicos y cómo los corregiste?</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Los errores mas comunes fueron los signos, también la forma del despeje de las incognitas, fueron corregidos mediante la observación de la applet ya que esta no coincidia. En ocaciones tuvimos que volver a realizar el procedimiento.</td><td>Asociación de objetos y Posición cognitiva</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Si tuve que utilizarlo, ya que en algunos problemas por nerviosismo colocaban nómeros que no eran, pero me tranquilizaba y sabia mis errores (excepto en la 3, esa si me costó)</td><td>El estudiante le dio sentido a lo que quería conocer</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Bueno lo fuimos corrigiendo como ibamos ingresando los valores a la applet. Conforme fuimos viendo nuestros errores ibamos corrigiendo.</td><td>Asociación de objetos y Posición cognitiva</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Recomendarías el applet a otros estudiantes para simplificar ecuaciones cartesianas a partir de ecuaciones paramétricas? ¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Claro que si, es una manera práctica de encontrar errores algebraicos e inmediatamente encontrar el error.</td><td>Posición cognitiva</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Es una app. que te facilita el entendimiento de tus operaciones, visualizando de que se trata pues no es una ecuación nada más, sino que te muestra como se comporta la función. "Recomendada"</td><td>Posición cognitiva</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Si porque te funciona mucho para ver cuales son tus errores al momento de ingresar los valores a la computadora.</td><td>Posición cognitiva</td></tr>
</table>

Conclusiones

El análisis de los datos que mostramos, nos permite dar respuesta parcial a la pregunta: ¿De qué manera un ambiente dinámico (e.g., GeoGebra) promueve reflexión en el estudiante en torno a errores algebraicos cometidos al transformar ecuaciones paramétricas en la ecuación cartesiana correspondiente? Aunque en este documento reportamos resultados de tres equipos de estudiantes en los cuales se observa que ellos reflexionaron y profundizaron en temas relacionados con álgebra básica –ello con la mediación de la tecnología (e.g., GeoGebra)–, es importante resaltar que otros equipos no lograron sobrepasar estas dificultades, quizá debido a un menor manejo sintáctico del álgebra el cual no les permitió reflexionar para resolver de forma adecuada los problemas mostrados en este documento. Es decir, con "menor manejo sintáctico del álgebra", en este artículo nos referimos a que los estudiantes, aun cuando están en el nivel universitario, parece que no han logrado tener un buen manejo del uso de exponentes y radicales (ver procedimiento de solución al Problema 1 en Figura 3a), se equivocan en las operaciones que implican símbolos *más* y *menos* (ver procedimiento en Figura 4a) y no comprenden, ni pueden utilizar las identidades trigonométricas (ver procedimiento en Figura 5a). Esto hace importante que se sugiera el impulso de más propuestas como ésta donde el uso de distintas representaciones –apoyadas con tecnología– permiten a los estudiantes dar sentido a ejercicios que en los libros de texto se orientan únicamente hacia lo simbólico.

A partir de los resultados que aquí presentamos consideramos que el uso de tecnología puede servir como mediador para que los estudiantes logren reflexionar sobre sus errores (y después corregirlos) en los procesos algebraicos para pasar de ecuaciones paramétricas a ecuaciones cartesianas; siempre que se tome en cuenta el ambiente de papel y lápiz. GeoGebra permite, además, que el profesor pueda poner a discusión aspectos que quizá en lápiz y papel no ocurrirían, como (en este caso) la discusión en torno a la construcción de una gráfica con dominio y rango diferente al mostrado.

Referencias y bibliografía

Carry, L. R., Lewis, C. & Bernard, J. E. (1980). *Psychology of equation solving: An information processing study* (ERIC No. ED186243). Austin: The University of Texas at Austin. Recuperado de http://www.eric.ed.gov el 16 de diciembre de 2009 de la base de datos Education Resources Information Center.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* [Trad. Vega, M., del francés al español]. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En E. Filloy (Coord.), *Matemática Educativa: aspectos de investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

García, R. M. L., Benitez, P. A. A. & López, B. A. (2015). Apoyando el aprendizaje de las funciones vectoriales desde múltiples representaciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II): 373-385.

Guzmán & Zambrano (2014). Influencia de dos ambientes: el tecnológico y el de papel-y-lápiz en el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal. *VI Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática*, Memoria del SNTCEAM, 2012, Capítulo 22 libro electrónico "Tecnología Computacional en la Enseñanza de las Matemáticas" ISNB: 978-607-27-0301-8, Monterrey, N.L.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 21-34). New York: Kluwer Academic.

Kirshner, D. & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(4), 224-257.

Marquis, J. (1988). Common mistakes in algebra. En A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-34). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners: attention, awareness and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. En T. Wood & B. Jaworski (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Vol. 4. The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 31–56). Rotterdam, Holanda: Sense Publisher.

Moncada, Ochoa, López, Espín & Gómez (2016). Laboratorio de cálculo vectorial usando GeoGebra. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol IV. No. 1.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18* (1), 3-14.

Payne, S. J. & Squibb H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive accounts of error. *Cognitive Science: A Multidisciplinary Journal*, *14*, 445-481.