XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

Organización por métodos y estrategias en el cálculo de áreas de triángulos

Vicente **Carrión** Miranda
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav
México
vcarrion@cinvestav.mx
François **Pluvinage**
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav
México
fpluvinage@cinvestav.mx

Resumen.

Se expone una forma para la organización de distintos métodos y estrategias utilizables para afrontar la resolución de problemas relacionados con propiedades métricas de las figuras geométricas. Se relacionan con el aprendizaje conceptos aritméticos, geométricos y algebraicos insertos en los programas escolares. En particular se trabajan maneras de obtener el área de una clase particular de triángulos, simultáneamente rectángulos e isósceles. La diversidad de métodos presentada obedece a las respuestas que resultaron de la aplicación a dos muestras, una de profesores y otra de estudiantes del nivel escolar medio, participantes en un trabajo de investigación sobre el tema. En el presente documento no se exponen los resultados observados, solamente la parte teórica de la conceptualización matemática.

Palabras clave: resolución de problemas, isometría, composición de transformaciones, producto escalar, producto vectorial.

Introducción

El escrito se compone de dos partes. La primera, la que se presenta en este texto, contiene los elementos conceptuales matemáticos, básicos, requeridos para afrontar y resolver el problema que se plantea. En este mismo apartado se describe y se desarrolla una exploración en la que se usan diversos métodos y algunas estrategias posibles para la búsqueda del área. Se expone una variedad de métodos que muestra una organización de las diferentes formas posibles de enfrentarse a la búsqueda y al desarrollo de los procedimientos que encauzan la llegada a los últimos resultados.

El problema planteado consiste en determinar el área de un triángulo que vértices se posicionan en las intersecciones de las rectas que conforman una rejilla, o malla. En otro contexto, se puede decir que las coordenadas de los vértices del triángulo en cuestión se expresan con números enteros. El problema consiste en utilizar "todos los métodos posibles" para encontrar el área del triángulo y, con detalle, escribir cada forma de afrontar y llegar al resultado que se pretende obtener. Finalmente, en la búsqueda del área en estudio se considera una generalización relacionada con triángulos que sus vértices son puntos cualesquiera del plano cartesiano.

Los métodos seguidos para obtener el área del triángulo se organizan en tres formas, caracterizadas por los niveles conceptuales involucrados en los distintos modos de abordar la resolución:

a. Una vía para dar seguimiento a la resolución del problema basada en las propiedades de invariancia del área por transformaciones rígidas, las isometrías.
b. Métodos que se apoyan en el cálculo de las longitudes de los elementos lineales del triángulo, medidas de lados, alturas, radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo.
c. Métodos que, además de apoyarse en las medidas de los elementos lineales del triángulo, se basan en las medidas de sus ángulos y en el uso de relaciones y fórmulas trigonométricas.

La segunda parte del escrito describe los elementos teóricos y metodológicos involucrados en una investigación sobre el tema, realizada con muestras de profesores y alumnos de niveles preuniversitarios. También contiene el análisis e interpretación de la información recabada en la investigación y las conclusiones de la indagación.

Debido a su extensión no se expone en este documento la fase experimental de la investigación. El desarrollo, el análisis y las conclusiones, se dejan para otro escrito. En la primera parte se exponen únicamente los elementos conceptuales matemáticos necesarios y los diferentes métodos para abordar el problema.

El problema

El lado del cuadrado **ABCD** tiene por medida cuatro unidades. Se divide en dieciséis cuadraditos de una unidad de área. Por diferentes métodos, encontrar el área del triángulo **EFC**, *Figura 1*.
Se espera que los participantes en la investigación orienten sus respuestas siguiendo algunos de los métodos y estrategias que enseguida se exponen.

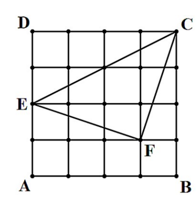


Figura 1

1. La resolución del problema por el primer método

Se hace uso del método de transformaciones geométricas para afrontar el problema de encontrar el área del triángulo **EFC** de la *Figura 1*. Con movimientos preestablecidos, transformaciones rígidas, los pequeños polígonos obtenidos con particiones, ubicados en el interior del triángulo **EFC**, se cambian de posición y se colocan en lugares diferentes. Estos movimientos permiten transformar conformaciones en otros objetos geométricos equivalentes, de una misma área, que pueden ser más simples, conducentes a determinar las áreas de las primeras figuras (Boltianski, V. G., 1981, pp. 2-38).

Se trazan el cuadrado **ABCD** y el triángulo **EFC**, *Figura 2*. Realizar las siguientes tareas escribiendo los cálculos necesarios en las preguntas que los requieran. Además, escribir las razones que justifiquen los pasos del desarrollo que conduce a las respuestas.
¿Cuáles son los valores de las áreas de cada uno de los polígonos incluidos en el cuadrado **ABCD**, *Figura 2*?

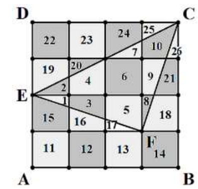


Figura 2

¿Qué conjuntos diferentes de polígonos congruentes existen en la *Figura 3*? Ayuda:

a. ¿Cuáles son los triángulos congruentes con el triángulo **ERM**, △(1)?
b. ¿Cuáles son los triángulos congruentes con el triángulo **PRE**, △(2)?
c. ¿Cuáles son los trapecios rectángulos congruentes con el trapecio rectángulo **GMRS**, ⏢(4)?
d. Encontrar otros conjuntos de polígonos congruentes en la Figura 3.

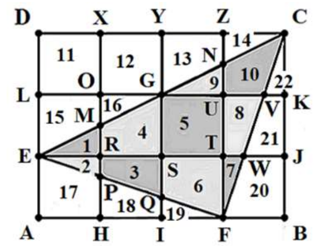


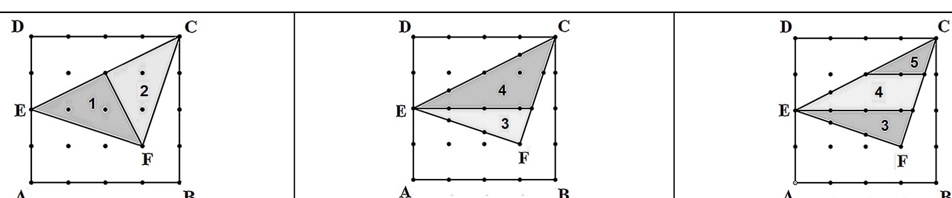
Figura 3

A partir de la *Figura 3*, encontrar composiciones de transformaciones que cambien el triángulo **ERM**, △(1), al triángulo **PRE**, △(2), al trapecio rectángulo **GMRS**, ⏢(4), al trapecio rectángulo **EAHP**, ⏢(17), al trapecio rectángulo **QSRP**, ⏢(3) y a de los cuadrados **DLOX**, □(11) y **XOGY**, □(12) en otras figuras que les corresponden. .

1.1. ¿En qué consiste la resolución del problema por el primer método?

El sustento del primer método de resolución está en la invariancia por isometrías de las dimensiones de una figura geométrica, en específico, su área. Se hace uso del método de estas transformaciones para afrontar la resolución del problema de encontrar el área del triángulo **EFC** de la *Figura 4*. Las transformaciones isométricas, como son la traslación, la rotación y la reflexión, conservan la forma y las dimensiones de las figuras geométricas; es decir, corresponden a movimientos rígidos que preservan la relación de congruencia de los objetos geométricos. Esta situación permite cambiar de posición las figuras para crear nuevas formas de áreas equivalentes (Turégano Moratalla, P., pp. 28-32).

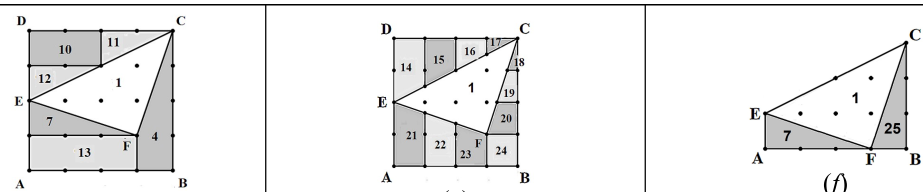
1.1.1. Utilizando equivalencia de áreas de polígonos, la propiedad aditiva del área de figuras en el plano y transformaciones que conservan área, encontrar y sumar las áreas del interior del triángulo **EFC**, en los incisos de la *Figura 5*.



(*a*) (*b*) (*c*)

Figura 5

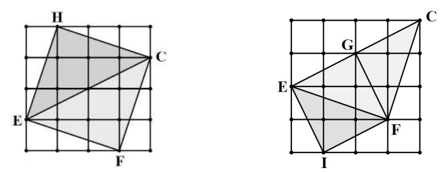
1.1.2. En los incisos de la *Figura 6*, con el uso de la equivalencia de áreas de polígonos, de la propiedad aditiva del área de figuras en el plano y con el método de transformaciones isométricas, sin aplicar fórmulas para áreas, determinar las áreas de cada una de las regiones que conforman el polígono correspondiente al complemento relativo de triángulo **EFC**, respecto al cuadrado **ABCD**. Luego, sumarlas para obtener el área de ese complemento. Después, obtener el área del triángulo **EFC** con la diferencia del área de cuadrado **ABCD** menos el área del complemento.



(*d*) (*e*) (*f*)

Figura 6

1.1.3. En los incisos de la *Figura 7*, con el uso de la equivalencia de áreas de polígonos, de la propiedad aditiva del área de figuras en el plano y por medio de rotaciones o reflexiones, explicar la forma en que se transforma el triángulo **EFC** en otros polígonos equivalentes, sin aplicar fórmulas para áreas, determinar el área del triángulo **EFC**.



(*a*) (*b*)

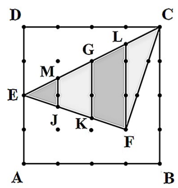
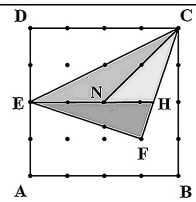
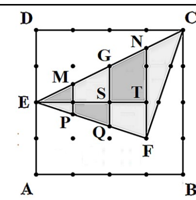
Figura 7

2. La resolución del problema por el segundo método

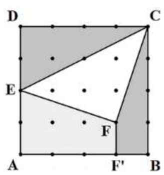
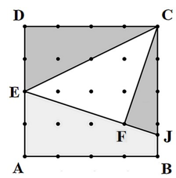
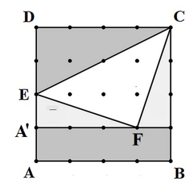
En esta parte se hace uso de cálculos mediante el empleo de fórmulas. En vez de reconstruir en las figuras los elementos lineales del triángulo **EFC**, lados o alturas, se calculan o se miden. Con base en estas medidas se utilizan fórmulas para calcular el área donde intervienen las longitudes de los lados y de las alturas del triángulo.

El sustento del segundo método de resolución se encuentra en el empleo de isometrías. Se emplean el método de estas transformaciones y fórmulas que conducen a la obtención del área del triángulo **EFC**. En la búsqueda de estos elementos geométricos se emplea el teorema de Pitágoras.

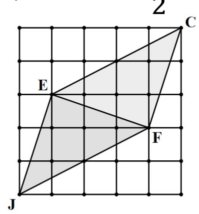
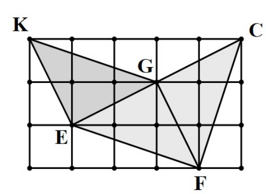
2.1. Obtener las áreas de los polígonos incluidos en el triángulo **EFC** de cada inciso de la *Figura 8*. Calcular longitudes de los segmentos de recta correspondientes a bases y alturas requeridos para aplicar fórmulas. Luego, sumarlas para obtener el área del triángulo **EFC**.

 (*d*)	 (*e*)	 (*f*)
Figura 8		

2.2. En los incisos de la *Figura 9* calcular longitudes de lados, alturas u otros segmentos necesarios y determinar las áreas de cada una de las regiones que conforman la figura del complemento relativo de triángulo **EFC** respecto al cuadrado **ABCD**. Luego, sumarlas para obtener el área de ese complemento. Después, obtener el área del triángulo **EFC** con la diferencia del área de cuadrado **ABCD** menos el área del complemento.

 (*a*)	 (*b*)	 (*c*)
Figura 9		

2.3. En los incisos de la *Figura 10* calcular longitudes de lados, alturas u otros segmentos necesarios y determinar las áreas de cada una de las regiones que conforman algún polígono que incluya al triángulo **EFC**. Después, a partir del área de este nuevo polígono obtener el área del triángulo **EFC** examinando la parte proporcional del área del triángulo respecto a la del polígono. En la *Figura 10* se muestran varias formas de obtener polígonos que conduzcan a diversas formas de tener el área del triángulo **EFC**. Encontrar otras transformaciones para llegar a fórmulas semejantes.

a. $\acute{A}rea(\triangle \mathrm{EFC}) = \dfrac{\acute{A}rea(\square \mathbf{JFCE})}{2}.$  (*c*)	*b.* $\acute{A}rea(\triangle \mathrm{EFC}) = \acute{A}rea(\square \mathrm{EFGK}).$  (*d*)
Figura 10	

2.4. Se utilizan fórmulas para calcular el área donde intervienen las longitudes de los lados y de las alturas del triángulo, obtenidas con el empleo del teorema de Pitágoras. En lo que sigue sólo se establecen las fórmulas para el cálculo del área del triángulo **EFC**.

a. El ángulo **EFC** es recto. El área es igual a la medida de la base $\overline{\mathbf{EF}}$ por la mitad de la medida de $\overline{\mathbf{FC}}$, la altura del triángulo **EFC**.

$$\text{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{(\mathbf{EF})(\mathbf{FC})}{2},\ \textit{Figura 11}.$$

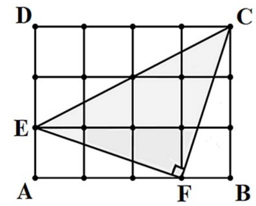


Figura 11

b. El área es igual a la medida de la base $\overline{\mathbf{CE}}$ por la mitad de la medida de $\overline{\mathbf{FG}}$, la altura del triángulo **EFC**.

$$\text{Área}(\triangle\text{EFC}) = \frac{(\mathbf{CE})(\mathbf{FG})}{2},\ \textit{Figura 12}.$$

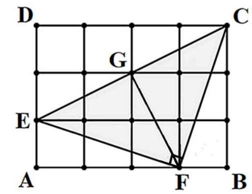


Figura 12

c. El triángulo **EFC** es isósceles. La altura $\overline{\mathbf{FG}}$ también es bisectriz del ángulo **EFC**, *Figura 12*. El área se calcula con la fórmula

$$\text{Área}(\triangle\text{EFC}) = \mathbf{CE}\cdot\sqrt{(\mathbf{EF})^2 - \frac{(\mathbf{CE})^2}{4}}$$

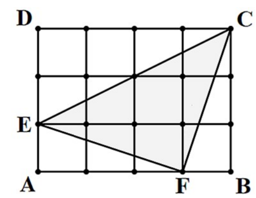


Figura 13

d. $\text{Área}(\triangle\text{EFC}) = \sqrt{s(s-\mathbf{EF})(s-\mathbf{FC})(s-\mathbf{CE})}$, donde $s = \frac{\mathbf{EF}+\mathbf{FC}+\mathbf{CE}}{2}$, *figura 13*.

e. $\text{Área}(\triangle\text{EFC}) = \frac{(\mathbf{EF})(\mathbf{FC})(\mathbf{CE})}{4(\mathbf{GF})}$, *Figura 14*.

f. La circunferencia de centro **L** y radio **LG** = *r* está inscrita en un triángulo **EFC**, *Figura 15*. $s = \frac{\mathbf{EF}+\mathbf{FC}+\mathbf{CE}}{2}$. $\text{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = rs$.

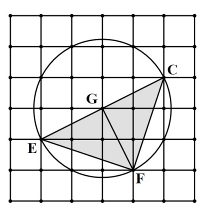


Figura 14

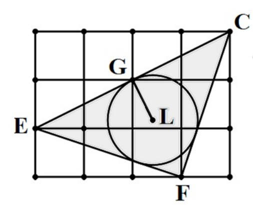


Figura 15

g. Se obtiene el área de un triángulo con la fórmula de Pick. Las coordenadas de los vértices del triángulo **EFC** son números enteros, según se ilustra en la *Figura 16*.

- ***I*** es el número de puntos sobre los segmentos de recta interiores de la retícula del triángulo **EFC** y
- ***B*** es el número de puntos que están en los segmentos del contorno del triángulo **EFC** entonces, el área se obtiene con la fórmula $\text{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{B}}{2} - 1$

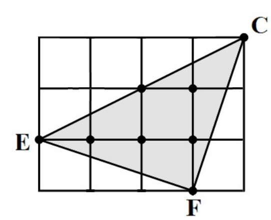


Figura 16

En la *Figura 16*, se tiene $\boldsymbol{I}$ = 3 y $\boldsymbol{B}$ = 4; de donde, $\text{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = 5$.

3. La resolución del problema por el tercer método

Se obtiene el área del triángulo **EFC** con recursos de trigonometría. Además de ser necesarios las medidas de los segmentos de rectas característicos de un triángulo, en este apartado se requiere calcular las medidas de los ángulos en función de las medidas de los lados. Es aquí donde se precisa del empleo de las relaciones trigonométrias. Para calcular el área del triángulo se dispone de varias fórmulas trigonométricas. Enseguida se utilizan algunos conceptos tigonométricos para obtener por varias formas el área del triángulo **EFC**.

3.1¿En qué consiste la resolución del problema por el tercer método?

El tercer método de resolución se fundamenta en el empleo de distintos conceptos, relaciones y ciertas fórmulas de trigonometría. Las longitudes de los lados del triángulo se encuentran usando el teorema de Pitágoras y con estos valores se tienen las relaciones trigonométricas que involucran los ángulos del triángulo. Estos valores se sustituyen en fórmulas específicas que conllevan a obtener el área buscada.

3.1.1. Con las siguientes fórmulas generales se obtiene el área de un triángulo, *Figuras* 18 y *19*.

$$\acute{A}rea(\triangle \mathbf{ABC}) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen(\mathbf{C}), \qquad \acute{A}rea(\triangle \mathbf{ABC}) = \frac{a^2 \cdot sen(\mathbf{B}) \cdot sen(\mathbf{C})}{2 \cdot sen(\mathbf{B}+\mathbf{C})}$$

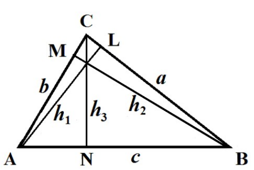


Figura 18

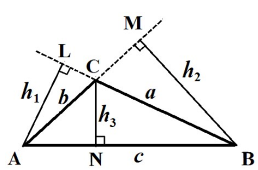


Figura 19

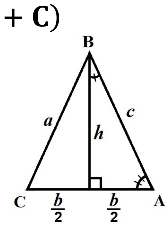


Figura 20

3.1.2. Para un triángulo isósceles se tiene que $\angle \mathbf{ACB} = \angle \mathbf{BAC}$ y $a = c$, *Figura 20*. El área del triángulo **ABC** se calcula con las fórmulas. $\acute{A}rea(\triangle \mathbf{ABC}) = \dfrac{a^2 \cdot sen(2\mathbf{A})}{2}$

4. La resolución del problema por el cuarto método

En el cuarto método se extiende el espacio de acción al plano completo, no sólo en rejillas equivalentes a usar coordenadas expresadas con números naturales o enteros. El caso es más general. Se requiere el uso de números reales. Este cuarto método de resolución participa del empleo de un sistema de coordenadas cartesianas, conceptos de geometría analítica, operaciones con vectores y sus propiedades.

4.1 ¿En qué consiste la resolución del problema por el cuarto método?

La base fundamental del cuarto método de resolución está, en primer lugar, en el empleo de distintos conceptos y ciertas fórmulas de geometría analítica. Se utiliza la fórmula correspondiente a un determinante de tercer orden para expresar el área de un triángulo. En segundo lugar, se encuentra vectorialmente la misma área por dos vías. En la primera se aprovecha la ventaja de que la definición de producto escalar de dos vectores lleva directamente al cálculo del área del triángulo. En la segunda, se tiene una oportunidad semejante, el área buscada se establece con el uso directo de la magnitud del producto vectorial de dos vectores.

4.1.1. Desarrollar el procedimiento requerido para obtener la fórmula para encontrar el área de un triángulo de los siguientes vértices, *Figura 21*:

$\mathbf{E} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{F} = (x_2, y_2)$, $\mathbf{C} = (x_3, y_3)$. $\text{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}.$

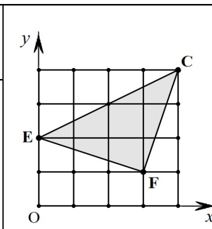


Figura 21

4.1.2. Desarrollar el proceso para obtener que el área de un triángulo. Es igual a la mitad del valor absoluto del producto escalar de los vectores $\overrightarrow{\mathbf{CE}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{CF}}$, *Figura 22*.

$$\text{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathbf{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{EC}}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)\right|.$$

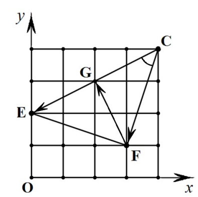


Figura 22

4.1.3. Desarrollar el proceso para obtener que el área de un triángulo. Es igual a la mitad de la magnitud del producto vectorial de dos vectores de punto inicial común determinados por dos lados de un triángulo de los siguientes vértices, *Figura 23*:

$\mathbf{E} = (x_1, y_1, 0)$, $\mathbf{F} = (x_2, y_2, 0)$, $\mathbf{C} = (x_3, y_3, 0)$.

$\overrightarrow{\mathbf{EF}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$, $\overrightarrow{\mathbf{EC}} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2, 0)$.

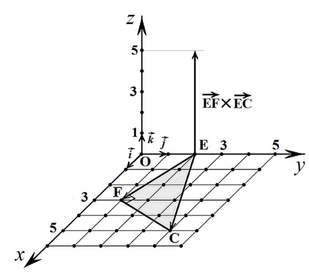


Figura 23

$$\text{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathbf{EF}} \times \overrightarrow{\mathbf{EC}}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Palabras finales

La enseñanza del cálculo del área de triángulos presentada en los libros de texto en el nivel medio se focaliza mediante una fórmula. La consecuencia es una insuficiente, reducida e insignificante conceptualización del área, reportada por varios investigadores. Nuestra idea es que el trabajo, apoyándose en una diversidad de métodos, pueda compensar esta carencia. En el análisis de los comportamientos y de las respuestas resultantes de las propuestas de exploraciones matemáticas, expuestas en este primer texto, se podrá ver si se cumple esta expectativa.

Referencias y bibliografía

Boltianski, V. G. . (1981). Figuras equivalentes y equicompuestas. Moscú: MIR.

Turégano Moratalla, P. (1993). De la noción de área a su definición: investigación histórica sobre las técnicas, métodos y conceptos que condujeron a la teoría de la medida. España: Universidad de Castilla-La mancha.