Derivada clássica e derivada fraca: uma análise da compreensão dos conceitos com base na teoria APOS

Janice **Rachelli**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
janicerachelli@gmail.com
Vanilde **Bisognin**
Universidade Franciscana
Brasil
vanildebisognin@gmail.com

Resumo

Neste artigo apresentamos resultados de uma investigação, desenvolvida com estudantes brasileiros de um curso de mestrado em ensino de Matemática, que teve por objetivo analisar como se dá a compreensão do conceito de derivada clássica e derivada fraca. A teoria APOS foi utilizada na pesquisa como referencial teórico e metodológico. Para tanto, seguimos os passos da metodologia de pesquisa proposta pela teoria: Análise teórica, Planejamento e implementação e Coleta e análise de dados e utilizamos o ciclo de ensino ACE como metodologia de ensino no desenvolvimento de atividades em sala de aula. Os dados obtidos, por meio dos registros dos alunos e das observações anotadas no diário de campo, nos permitiram identificar mecanismos mentais de abstração reflexionante e estruturas mentais, previstos na decomposição genética e que foram desenvolvidos pelos estudantes na resolução das atividades. Além do mais, há evidências de que as atividades propostas facilitaram a compreensão dos conceitos.

Palavras-chave: derivada clássica, derivada fraca, teoria APOS, decomposição genética, ciclo de ensino ACE.

Introdução

A derivada tem sua origem associada aos estudos de Newton e Leibniz, no século XVII, sobre a teoria das fluxões, a determinação de tangentes e o estudo de diferenciais. Com a necessidade de formalização dos conceitos do Cálculo, Cauchy, no século XIX, definiu a função derivada como o limite da razão incremental. Desde então, este conceito, tornou-se um instrumento indispensável à descrição científica de fenômenos das ciências físicas, naturais, tecnológicas e sociais. Muitos desses fenômenos envolvem taxas de variação e podem ser descritos com a utilização do conceito de derivada clássica[1].

A derivada fraca[2], introduzida por Sobolev, no século XX, surgiu da necessidade de desenvolver uma análise matemática para tratar de problemas e teorias associadas a equações diferenciais parciais em que a noção de derivada fosse global e não pontual como a de derivada clássica.

Os conhecimentos sobre os conceitos tratados no Cálculo e nas Equações Diferenciais, em particular, os conceitos de derivada clássica e derivada fraca, são essenciais na formação dos estudantes em diferentes carreiras do ensino superior, como engenharias, física e matemática, tanto em cursos de graduação como em cursos de pós-graduação, pois servem de fundamentos para disciplinas científicas que utilizam a matemática como ferramenta na resolução de problemas. Nisso reside o interesse e a importância em investigar os processos de ensino e aprendizagem desses conceitos.

Com relação ao ensino e aprendizagem da derivada, pesquisas na área da Educação Matemática apontam dificuldades apresentadas, no seu estudo, pelos alunos (Pino-Fan, Godino & Font, 2015; Vega, Carrillo & Soto, 2014) e destacam a utilização de diferentes teorias e metodologias para serem utilizadas em sala de aula como forma de facilitar a aprendizagem (Asiala et al., 2001; Ferrão & Manrique, 2014; Vrancken & Engler, 2014). Uma dessas teorias é a APOS, a qual vem sendo utilizada por pesquisadores como forma de conhecer as dificuldades dos alunos com os conceitos matemáticos do ensino universitário e analisar as construções mentais utilizadas na aprendizagem desses conceitos.

Nesse sentido, o presente estudo, que é parte de uma pesquisa de doutorado concluída (Rachelli, 2017), tem o objetivo de analisar como se dá a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Para isso, levamos em conta a evolução histórica do conceito de derivada e utilizamos a decomposição genética para a elaboração de situações de ensino que possibilitam analisar se os estudantes constroem mecanismos de abstração reflexionante e estruturas mentais que favoreçam a compreensão dos conceitos.

Quadro teórico

A base teórica na qual fundamentamos este estudo é a teoria APOS. Tendo como base as ideias de Piaget (1995) sobre a abstração reflexionante, a teoria APOS busca compreender como ocorre a construção de um novo conceito matemático pelo aluno e como ele utiliza este conhecimento para a construção de novos conceitos.

Duas ideias são chaves neste modelo teórico: a de construções mentais e de mecanismos mentais no qual os indivíduos realizam estas construções. Para Dubinsky (1991), a partir de situações matemáticas problemáticas os alunos são encorajados à construção dos objetos matemáticos, cujas soluções envolvem ações, processos, objetos e relações entre esquemas que se constituem para resolver determinada situação. Assim, os esquemas mentais dos alunos evoluem, à medida que novos esquemas são formados e nos quais o conhecimento matemático cresce.

A interação entre as estruturas e os mecanismos para a construção do conhecimento

[1] Entendemos a derivada clássica como a definida pelo limite da razão incremental.
[2] O conceito de derivada fraca pode ser encontrado em Medeiros & Miranda (1988).

matemático é descrita da seguinte forma: a compreensão de um conceito matemático começa com a manipulação de objetos mentais ou físicos para formar ações; ações são então interiorizadas para formar processos, os quais são, por sua vez, encapsulados para formar objetos. Os objetos podem ser desencapsulados e voltar a serem processos dos quais eles foram formados. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas (Asiala et al., 1996).

Na teoria APOS, a análise do conceito matemático específico leva à chamada decomposição genética desse conceito, que descreve as estruturas e os mecanismos mentais que um estudante precisa construir para aprender um conceito matemático específico. Geralmente, começa como uma hipótese, tendo como base as experiências dos pesquisadores no ensino e aprendizagem do conceito, o conhecimento sobre a teoria APOS, os conhecimentos matemáticos, o desenvolvimento histórico do conceito e as pesquisas publicadas anteriormente. A decomposição genética busca uma descrição detalhada de como o sujeito poderá fazer a construção do conhecimento.

Para cada conceito matemático, são elaboradas sequências de ensino que se organizam no que se denomina ciclo de ensino ACE composto por três componentes: (A) Atividades, (C) Discussão em classe e (E) Exercícios. De acordo com Arnon et al. (2014), para as atividades que constituem o primeiro passo do ciclo, os estudantes trabalham cooperativamente em grupos, em tarefas projetadas para fazerem as construções mentais sugeridas pela decomposição genética. O foco dessas tarefas é promover a abstração reflexionante. Nas discussões em sala de aula, a segunda parte do ciclo, os alunos desenvolvem, discutem e refletem sobre as atividades designadas pelo professor. Como o professor guia as discussões, ele pode fornecer definições, explicações e apresentar uma visão geral do que está sendo discutido. Os exercícios, a terceira parte do ciclo, consistem em problemas considerados padrão, que servem para reforçar as atividades de sala de aula. Os exercícios ajudam no desenvolvimento contínuo das construções mentais sugeridas pela decomposição genética. Eles também orientam os alunos a aplicar o que aprenderam e a considerar ideias matemáticas relacionadas.

Metodologia

No desenvolvimento deste estudo seguimos os pressupostos de uma pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e empregamos as três componentes da metodologia de pesquisa proposta pela teoria APOS (Arnon et al., 2014): Análise teórica, Planejamento e implementação e Coleta e análise dos dados.

Na Análise teórica, elaboramos a decomposição genética dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca tendo como base a compreensão matemática e as construções históricas, as pesquisas de Asiala et al. (2001), García, Gavilán e Llinares (2012) e Vega, Carrillo e Soto (2014) e livros didáticos de Cálculo e Equações Diferenciais, a qual descrevemos sucintamente no que segue. Mais detalhes podem ser encontrados em Rachelli (2017).

Para a derivada clássica, é desejável que o aluno tenha como pré-requisitos conhecimentos algébricos e geométricos sobre funções. A construção do esquema da derivada se inicia a partir do esquema de função em que o estudante deve desenvolver ações de substituir os valores da função em pontos específicos e calcular a variação da função e a razão das variações. Essas ações devem ser interiorizadas em um processo, ao considerar o limite da razão incremental, para obter o conceito de derivada. Esse processo deve ser coordenado para obter a derivada por meio do limite e encontrar a derivada de funções utilizando regras de derivação. Com a encapsulação obtém-se a definição da derivada da função f no ponto a e a função derivada $f'(x)$. O aluno deverá coordenar as diversas interpretações de $f'(a)$ e utilizar o conceito de derivada em outros contextos como, por exemplo, nas equações diferenciais. Assim, a interiorização das ações necessárias para entender o processo da derivada, a coordenação das diversas interpretações, a encapsulação do processo da derivada, a coordenação e a generalização do esquema da função com sua derivada, a reversibilidade do processo, em que, conhecendo as características do objeto derivada, é possível obter as propriedades da função, são mecanismos mentais de abstração reflexionante indispensáveis para construir o esquema da derivada.

Para a derivada fraca, o aluno deverá ter conhecimentos sobre a derivada e a integral de uma função, o cálculo da integração por partes e a definição de função com suporte compacto. A construção do esquema da derivada fraca envolve ações de substituir a função e os intervalos na equação integral, a coordenação da fórmula de integração por partes com o teorema fundamental do Cálculo e com a definição de funções com suporte compacto e a encapsulação deste processo de obter a derivada fraca w a partir da equação integral $\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b w(x)\varphi(x)dx$.

Na etapa de Planejamento e implementação, elaboramos situações de ensino compostas por doze atividades que tratam das construções históricas, do conceito e interpretações da derivada, da solução de equações diferenciais e do conceito de derivada fraca.

Apresentamos, a seguir, duas das atividades propostas e uma descrição das construções mentais a serem efetivadas pelos estudantes quando da realização destas atividades.

Atividade 1. Uma corda elástica de comprimento $L = 20$ é puxada e depois colocada em movimento a partir da posição inicial u_0. Suponha que

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 10 \\ -\frac{1}{2}(x-20), & 10 < x \le 20 \end{cases}.$$

a) A função u_0 é derivável no sentido clássico? Por quê?
b) A função u_0 é derivável no sentido fraco? Qual é a sua derivada fraca?
c) O que você pode concluir quanto aos resultados obtidos em (a) e (b)?

Na Atividade 1(a), o aluno deverá utilizar o esquema da derivada clássica para verificar se a função u_0 é derivável. Para tanto poderá desenvolver ações e processos para por meio do limite da razão incremental mostrar que a função u_0 não é diferenciável em $x = 10$ ou, por meio da interpretação geométrica da derivada observar que o gráfico da função u_0 apresenta um ponto anguloso em $x = 10$. Em (b) deverá utilizar a equação integral e por meio de ações e processos coordenar a fórmula de integração por partes, o teorema fundamental do Cálculo e o conceito de funções com suporte compacto, para encapsular o objeto matemático, derivada fraca da função u_0. Após, em (c), o aluno deverá coordenar os esquemas da derivada clássica e derivada fraca.

Atividade 2. Em cada uma das afirmações abaixo, verifique se são verdadeiras ou falsas. Se a afirmação for verdadeira, faça a prova, se for falsa, dê um contraexemplo.

a) Toda função real de variável real que é contínua em um ponto é também derivável neste ponto.
b) Se uma função é fracamente derivável então ela é derivável no sentido clássico.
c) A função $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$ é derivável no sentido clássico no intervalo $(-1,1)$.
d) A função $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$ é derivável no sentido fraca no intervalo $(-1,1)$.

A Atividade 2 tem como objetivo analisar a compreensão do aluno com relação aos conceitos de continuidade e diferenciabilidade e da existência da derivada clássica e da derivada fraca. Assim como na Atividade 1, é necessário que o aluno utilize construções mentais que estão associadas aos esquemas de derivada clássica e derivada fraca.

Essas atividades foram desenvolvidas junto a cinco estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática de uma universidade brasileira matriculados em uma disciplina que trata dos fundamentos do Cálculo e contempla tópicos de derivada, integral e equações diferenciais.

A coleta de dados se deu por meio do desenvolvimento das situações de ensino, em sala de aula, com a responsabilidade de uma das professoras pesquisadoras, em que utilizamos o ciclo de ensino ACE como metodologia de ensino. Em cada uma das aulas desenvolvidas, as atividades foram inicialmente discutidas em pequenos grupos e, na medida em que as dúvidas foram surgindo, a professora forneceu as definições e explicações, apresentando uma visão geral dos conceitos que estavam sendo discutidos.

Análise dos dados e resultados

A análise dos dados foi realizada a partir dos registros dos alunos nas atividades propostas e das anotações no diário de campo, em que procuramos verificar se os alunos fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética e avaliar a compreensão do conceito de derivada clássica e fraca pelos estudantes.

A fim de exemplificar como se deu a compreensão do conceito de derivada clássica e de derivada fraca, apresentamos a trajetória individual do aluno, que chamaremos de Aluno E5, em que descrevemos a forma como o estudante resolveu cada uma das atividades e as construções mentais desenvolvidas por ele.

Na Atividade 1(a), o Aluno E5 representou corretamente o gráfico da função u_0 e respondeu que a função não é derivável no sentido clássico pois "Possui um bico no ponto $x = 10$" (Figura 1). Isto evidencia sua compreensão sobre a interpretação geométrica da derivada em um ponto.

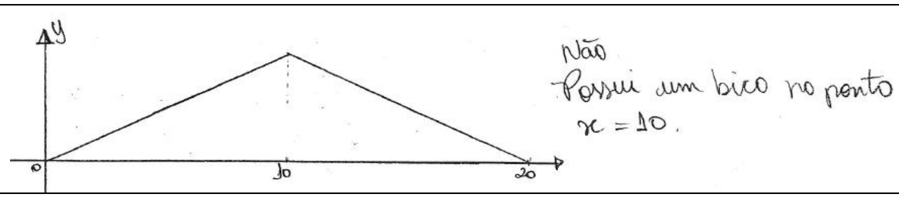
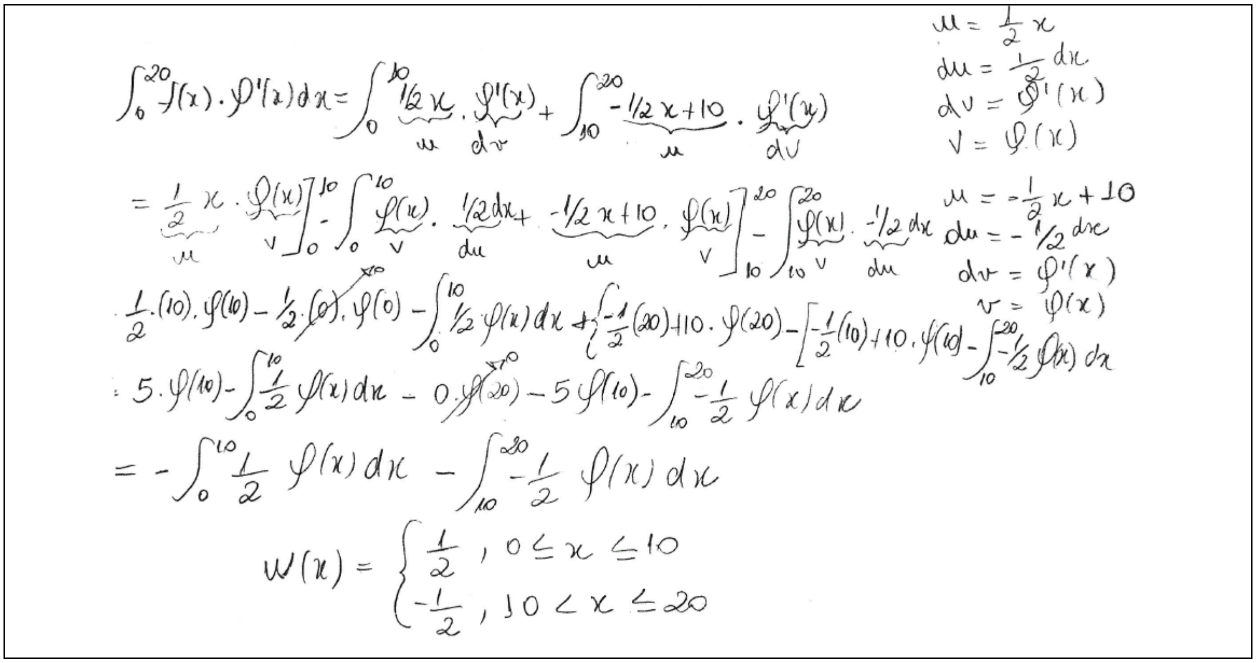


Figura 1. Resolução da Atividade 1(a) feita pelo Aluno E5.

Para resolver a Atividade 1(b), o aluno E5 escreveu que é preciso: "Achar w tal que $\int_0^{20} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{20} w(x)\varphi(x)dx$", mostrando assim, ter clareza sobre o conceito da derivada fraca de uma função. A obtenção da derivada fraca está ilustrada na Figura 2.

Observamos que para a obtenção de w, o aluno desenvolveu as seguintes construções mentais: ações de substituir a função u_0 na equação integral que define a derivada fraca considerando os intervalos [0,10] e [10,20]; interiorização dessas ações por meio do processo de integração por partes; coordenação da fórmula de integração por partes e do teorema fundamental do Cálculo, considerando φ de suporte compacto no intervalo [0,20]; encapsulação deste processo para obter o objeto matemático $w(x)$ que é a derivada fraca da função $f(x)$.



$$\int_0^{20} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_0^{10} \underbrace{1/2\,x}_{u}\cdot\underbrace{\varphi'(x)}_{dv} + \int_{10}^{20} \underbrace{-1/2\,x+10}_{u}\cdot\underbrace{\varphi'(x)}_{dv}$$

$u = \frac{1}{2}x$, $du = \frac{1}{2}dx$, $dv = \varphi'(x)$, $v = \varphi(x)$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}x}_{u}\cdot\underbrace{\varphi(x)}_{v}\Big]_0^{10} - \int_0^{10}\underbrace{\varphi(x)}_{v}\cdot\underbrace{1/2\,dx}_{du} + \underbrace{-1/2\,x+10}_{u}\cdot\underbrace{\varphi(x)}_{v}\Big]_{10}^{20} - \int_{10}^{20}\underbrace{\varphi(x)}_{v}\cdot\underbrace{-1/2\,dx}_{du}$$

$u = -\frac{1}{2}x+10$, $du = -1/2\,dx$, $dv = \varphi'(x)$, $v = \varphi(x)$

$$\frac{1}{2}\cdot(10)\cdot\varphi(10) - \cancel{\frac{1}{2}\cdot(0)\cdot\varphi(0)} - \int_0^{10} 1/2\,\varphi(x)\,dx + \left\{-\frac{1}{2}(20)+10\cdot\varphi(20) - \left[-\frac{1}{2}(10)+10\cdot\varphi(10) - \int_{10}^{20} -1/2\,\varphi(x)\,dx\right.\right.$$

$$= 5\cdot\varphi(10) - \int_0^{10}\frac{1}{2}\varphi(x)\,dx - \cancel{0\cdot\varphi(20)} - 5\varphi(10) - \int_{10}^{20} -\frac{1}{2}\varphi(x)\,dx$$

$$= -\int_0^{10}\frac{1}{2}\varphi(x)\,dx - \int_{10}^{20}-\frac{1}{2}\varphi(x)\,dx$$

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 10 \\ -\frac{1}{2}, & 10 < x \le 20 \end{cases}$$

Figura 2. Resolução da Atividade 1(b) feita pelo Aluno E5.

Ao concluir sobre os resultados obtidos em (a) e (b) o Aluno E5 escreveu que a função u_0 não é diferenciável no sentido clássico no ponto $x = 10$, mas tem derivada fraca no intervalo [0,20]. Sua resposta nos fornece evidências de que o estudante foi capaz de coordenar os esquemas da derivada clássica e da derivada fraca, tornando clara a sua compreensão de que a derivada clássica é definida pontualmente e a derivada fraca é definida em um intervalo.

Na resolução da Atividade 2(a), após ilustrar com um contraexemplo o gráfico uma função que é contínua, porém não diferenciável, o Aluno E5, escreveu que a afirmativa é falsa e usou a justificativa: “Para a função ser diferenciável tem que existir a derivada no ponto, e neste exemplo, a função não possui a inclinação da reta tangente no ponto $x = 1$, ou seja, ela não é diferenciável no ponto $x = 1$. Porém esta função é contínua”. De forma análoga, na Atividade 2(b), o Aluno E5 respondeu que a afirmativa é falsa e justificou citando como contraexemplo a função u_0 da Atividade 1, justificando que a função possui derivada fraca, mas não é derivável em $x = 10$. Isto demonstra que o aluno tem clareza do conceito de diferenciabilidade de uma função.

Para responder a Atividade 2(c), o Aluno E5 utilizou regras de derivação para encontrar a derivada de f para $x > 0$ e para $x < 0$ e a definição da derivada em um ponto para encontrar a derivada $f'(0)$, conforme pode ser observado na Figura 3.

Observamos que a decomposição genética para a derivada, prevista na Análise teórica, foi desenvolvida pelo estudante: ações de substituir os valores da função em 0 e $0 + h$, calcular a variação da função e a razão das variações $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, para interiorizar essas ações e por meio de um processo, calcular o limite e então, encapsular esse processo para obter a derivada da função em $x = 0$. Além do mais, utilizou regras de derivação para a determinação da derivada nos intervalos $(-1,0)$ e $(0,1)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

$h > 0$: $$\lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

$h < 0$: $$\lim_{h \to 0} -\frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} -h = 0$$

$$f(x) = y = -x^2, \ -1 < x < 0$$
$$y' = -2x$$
$$y = x^2, \ 0 \leq x < 1$$
$$y' = 2x$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Figura 3. Resolução da Atividade 2(c) pelo Aluno E5.

Ao resolver a Atividade 2(d), o aluno E5 utilizou as construções mentais previstas na decomposição genética: substituiu a função f na equação integral que define a derivada fraca considerando os intervalos $[-1{,}0]$ e $[0{,}1]$; utilizou a fórmula de integração por partes para resolver as integrais; substituiu corretamente os limites de integração o que está de acordo com o teorema fundamental do Cálculo; usou o fato da função auxiliar φ ser infinitamente contínua e ter suporte compacto no intervalo $[-1{,}1]$, considerando $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ e, a partir da equação integral, obteve a derivada fraca

$w = \begin{cases} -2x, & -1 < x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ da função f.

Estas construções também foram observadas nos registros dos demais estudantes, porém, em algumas resoluções, não ocorreu coordenação dos esquemas de integração por partes com o teorema fundamental do Cálculo.

Considerações finais

Apresentamos neste artigo, resultados que se referem à compreensão do conceito de derivada clássica e derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Os dados que advieram dos registros dos alunos nas atividades propostas e das observações em sala de aula nos permitem afirmar que, mediante a decomposição genética dos conceitos, tendo como base a teoria APOS, foi possível a construção de mecanismos e estruturas mentais pelos alunos que possibilitaram a compreensão dos conceitos. Esse resultado é, para nós, surpreendente, pois acreditávamos que, pelo fato de o conceito de derivada fraca envolver conceitos e teorias muito complexas, e os alunos estarem estudando pela primeira vez esse conceito, teriam mais dificuldades, o que não se confirmou. Acreditamos que as atividades propostas, que iniciaram com questões sobre soluções de equações diferenciais e modelos matemáticos para o problema de vibrações de uma corda, em que foram discutidas condições sobre as funções e a necessidade de novas teorias para a resolução desse problema, possibilitaram o desenvolvimento de mecanismos de assimilação e de acomodação, que propiciaram aos estudantes a compreensão do conceito de derivada fraca de uma forma bastante satisfatória. Além do mais, todos os exercícios que precederam ou que foram resolvidos juntamente com os exercícios que envolveram a determinação da derivada fraca, também reforçaram a construção do esquema da derivada clássica. Salientamos que a metodologia de ensino utilizada, tendo por base o ciclo de ensino ACE, com o desenvolvimento de atividades, discussões em classe e exercícios, e que as atividades elaboradas a partir da decomposição genética e apresentadas aos alunos, favoreceram a compreensão.

Referências e Bibliografia

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. New York, NY: Springer.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. E. (2001). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1-37.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, n. 2, p. 1-32.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: Tall, D. (Org.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ferrão, N. S. & Manrique, A. L. (2014). O uso de mapas conceituais como elemento sinalizador da aprendizagem significativa em Cálculo. *IENCI*, Porto Alegre (RS), v. 19, n. 1.

García, M., Gavilán, J. M. & Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del professor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del professor. *Enseñanza de las Ciencias*, 30.3, 219-236.

Medeiros, L. A. & Miranda, M. M. (1988). *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: Caderno Didático UFRJ.

Piaget, J. (1995). *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Pino-Fan, L. R., Godino J. D. & Font, V. (2015). Uma propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros professores sobre derivadas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 60-89.

Rachelli J. (2017). *Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APOS*. 2017. 294 f. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria.

Vega, M. A., Carrillo, J. & Soto, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p.403-429.

Vrancken, S. & Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 449-468.