Una experiencia en aula desde la experimentación y la simulación para la enseñanza de la probabilidad frecuentista y clásica

Michelle **Penagos** Vargas
Universidad Nacional de Colombia
Colombia
mapenagosv@unal.edu.co

Resumen

En la actualidad, la enseñanza de la probabilidad es de gran importancia para la formación de ciudadanos críticos. Esta comunicación quiere presentar la experiencia en aula desarrollada por medio de una serie de actividades que, a partir del uso de juegos de dados y urnas, y por medio de actividades experimentales y de simulación, se introdujo a estudiantes de 9° grado de educación básica colombiana al estudio de los conceptos de probabilidad frecuentista y clásica. El proceso de enseñanza planteado en este documento resulta ser similar al proceso en el que se construye la teoría de la probabilidad desde aspectos disciplinares e histórico-epistemológicos. De igual forma, estas actividades permiten que estudiantes que no hayan estudiado probabilidad previamente reconozcan elementos de aleatoriedad, brindando herramientas para la resolución de problemas donde la aleatoriedad esté presente a partir de argumento no subjetivistas.

Palabras clave: probabilidad frecuentista, probabilidad clásica, simulación, experimentación.

Introducción

La enseñanza de la probabilidad se ha convertido en parte especial dentro de la enseñanza de las matemáticas, puesto que, como lo reseña Batanero (2002), la probabilidad posee una utilidad después de la vida escolar por las aplicaciones que tiene en otras ciencias, además de desarrollar el pensamiento crítico a partir de la observación de evidencia objetiva. En el caso colombiano, la enseñanza de la probabilidad está incluida en el desarrollo curricular propuesto por el Ministerio de Educación Nacional en los Estándares Básicos de Competencia. A pesar de este hecho, hay instituciones educativas donde estos procesos de enseñanza se han descuidado. Este fue el caso del Instituto San Ignacio de Loyola, colegio ubicado en Bogotá, en donde se encontró un problema de este tipo; según los resultados mostrados en la Prueba Saber 9°-2016, los estudiantes presentaban dificultades al afrontar problemas donde la aleatoriedad estuviera presente, puesto que no reconocían la posibilidad o imposibilidad de eventos aleatorios, no usaban modelos ni estrategias para definir la probabilidad de un evento y no usaban conceptos de probabilidad para discutir conjeturas sobre experimentos aleatorios. Una de las posibles razones de este problema pudo ser que, según la estructura curricular del colegio, el primer contacto con las temáticas relacionadas con la probabilidad era en grado 9°.

Esta fue una de las razones que llevó al diseño de una secuencia didáctica, cuyo objetivo fue introducir a los estudiantes al estudio de la probabilidad desde los enfoques frecuentista y clásico[1] utilizando como mediaciones pedagógicas el juego, la experimentación y la simulación. Para el planteamiento de las actividades de la secuencia se tuvieron en cuenta tres aspectos importantes: la fundamentación disciplinar de la teoría de la probabilidad, el desarrollo histórico-epistemológico del concepto de la probabilidad y elementos extraídos de la didáctica de la probabilidad. Así, esta comunicación muestra los elementos más importantes que se tuvieron en cuenta de cada uno de estos aspectos, seguido por una breve descripción de las actividades desarrolladas y los resultados obtenidos con estas actividades.

Marco de Referencia

Aspecto teórico

Se tuvieron los elementos teóricos disciplinares, tomando como referencia las definiciones básicas de la teoría de probabilidad mostradas por Blanco, Arunachalam y Dharmaraja (2012). Es importante notar que estos no son los conceptos que se le enseñaran como tal a los estudiantes, dada a su complejidad, sino que son los conocimientos básicos que debe tener el profesor a la hora de asumir la enseñanza de la probabilidad. Las definiciones que se tuvieron en cuenta se muestran en la Figura 1.

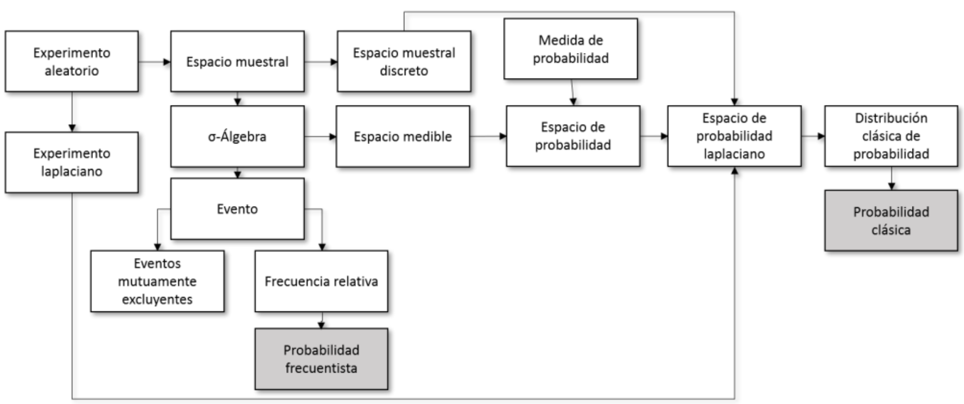

Figura 1. Red conceptual

Aspecto histórico-epistemológico

Para el diseño de la secuencia didáctica se tuvo en cuenta el desarrollo del concepto de probabilidad a lo largo de la historia. La teoría de la probabilidad tiene sus inicios con los juegos de azar. Ejemplo de esto es que, según registros hallados del tiempo del emperador romano Augustus (63 a.C.-14 d.C.), los juegos de azar eran comunes. Se han encontrado que culturas antiguas como los sumerios y los asirios utilizaban dispositivos similares a los dados, muy posiblemente para tomar decisiones al azar. Evidencias similares se han encontrado en la cultura egipcia, quienes llevaban registros escritos del uso de este tipo de dados. Esto demuestra que desde hace bastante tiempo se manejaba alguna noción de probabilidad (Blanco et al., 2012;

[1] Esta experiencia es parte del desarrollo del trabajo final de grado, realizado para obtener el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Disponible en http://bdigital.unal.edu.co/63667/

Vega-Amaya, 2002).

En la Edad Moderna se retoma la noción de probabilidad que subyacía en los juegos de azar. Girolamo Cardano (1501-1576) y Galileo Galilei (1564-1642) escribieron sobre estudios realizados sobre juegos con dados, constituyendo un inicio al estudio de la probabilidad desde el enfoque clásico (Vega-Amaya, 2002). Más adelante, Jacob Bernoulli (1654-1705) escribió el libro *Ars Conjectandi*, recogiendo el trabajo realizado por Christiaan Huygens (1629-1695) sobre los juegos de azar, adicionando comentarios, demostraciones y combinatoria. Considera problemas relacionados con juegos de azar y trabaja en aplicaciones de la teoría (Burton, 2006).

En la Edad Contemporánea Pierre Laplace (1749-1827) hace una primera formalización de la teoría clásica de probabilidad. En su obra *Théorie Analytique des Probabilités* presenta la solución de casi todos los problemas que habían surgido relacionados con probabilidad, al tiempo que sistematizaba y extendía los saberes obtenidos por matemáticos anteriores a él. (Burton, 2006). En el siglo XX, Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) fue el matemático que más aportes hizo a la teoría de la probabilidad, al crear un fundamento axiomático de la misma haciendo uso de la teoría de la medida, en la obra *Fundamentos de la Teoría de Probabilidades* publicada en 1933 (Blanco et al., 2012; Chaumont, Mazliak, & Yor, 2007).

Aspectos didácticos

Borovcnik y Peard (1996) realizan una clasificación de diversas estrategias para enseñar probabilidad. Dos de estas clasificaciones son las estrategias que buscan simplificar las relaciones matemáticas, donde se incluye la simulación, y las estrategias que reúnen la integración de las aplicaciones a la enseñanza, donde se incluyen estrategias como la experimentación y el juego.

La simulación. Una simulación es una reproducción artificial de un modelo teórico de una situación, que analiza su comportamiento y planea las consecuencias de cambios similares dentro de un contexto real. Según Biehler (1991), citado por Borovcnik y Peard (1996), la simulación tiene dos papeles dentro de la enseñanza de la probabilidad: la simulación como método para resolver problemas, ya que permite saltar grandes cálculos, y como antecedente empírico para la probabilidad, ya que brinda una base operacional carente en la probabilidad. Aun así, se debe tener en cuenta que hacer uso de éstas no da una explicación del cómo o por qué la solución brindada realmente resuelve el problema. A pesar de que no hay investigaciones con resultados concluyentes, los puntos de vista intuitivos del aprendiz pueden dificultar el uso de simulaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje, por lo que se sugiere iniciar el estudio con simulaciones con material concreto, para después comparar los resultados con simulaciones computarizadas (Borovcnik & Peard, 1996). El uso de simulaciones puede tener algunas desventajas. Una de ellas es que puede sustituir la forma en la que se piensa la solución de un problema, así como tampoco da explicación a intuiciones erradas. Lo que sí puede hacer las simulaciones es indicar en dónde puede estar un error de estas intuiciones erradas (Borovcnik & Peard, 1996). Considerando la simulación como un antecedente empírico para la probabilidad, Freudenthal (1991), citado por Borovcnik y Peard (1996), afirma que "las simulaciones usuales de la 'convergencia' empírica de las frecuencias relativas hacia la probabilidad desconocida se enfoca en una serie progresiva de frecuencias, mostrando como se estabiliza" (p. 263).

La experimentación. En los procesos de enseñanza de la probabilidad se han privilegiado estrategias basadas en el enfoque clásico. Con el desarrollo del análisis de datos, la enseñanza de la probabilidad ha optado por actividades experimentales y empíricas, favoreciendo el enfoque frecuentista (Chaput, Girard, & Henry, 2015). Nilsson (2014) afirma que la realización de experimentos en el proceso de enseñanza de la probabilidad sirve como contexto para explorar e ilustrar aspectos críticos de este proceso, usando los datos empíricos producidos por los estudiantes. Citando a Cobb (1990) y a Shaughnessy (2003), recalca la importancia de la enseñanza de la probabilidad por medio de la recolección de datos, que permita la discusión en el aula de clase sobre conceptos de probabilidad. Aun así, señala que la experimentación puede que no siempre motive lo suficiente a los estudiantes para que reflexionen sobre el uso de los datos que se recolectan o que no la vean como evidencia para hacer predicciones probabilísticas sobre algún evento. Para llevar a cabo un experimento, en probabilidad, se examina un evento aleatorio de interés efectuando acciones específicas y observando los resultados, realizando intentos en repetidas ocasiones. Lee y Mojica (2007) dan los pasos que debería tener un experimento probabilístico para ser usado en el proceso de enseñanza de un concepto.

Los juegos. La historia muestra la importancia de los juegos de azar en el desarrollo de la teoría de la probabilidad. Además, los juegos de azar son uno de los primeros elementos que permiten a las personas tener contacto con situaciones de aleatoriedad, iniciando el proceso de concientización de la imprevisibilidad y estimación los resultados, lo que conlleva a que se pueda adquirir conocimientos probabilísticos antes de una introducción formal al tema (Cañizares, Batanero, & Serrano, 1999). Según Cañizares et al. (1999) la investigación sobre el uso y la implicación del juego para la enseñanza de conceptos probabilísticos es poca, pero se encuentran bastantes experiencias de aula., que fueron base para el planteamiento de las actividades de la secuencia. Conocer la historia de una idea matemática puede ayudar a su comprensión, ya que da una guía para enmarcar dicha idea en los problemas que fueron motivo para su surgimiento o en las razones por las cuales se decidieron estudiar (de Guzmán, 1992), y en el caso de la probabilidad, los juegos de azar fueron parte importante. Así, el conocimiento de la historia de las ideas matemáticas permite conocer las dificultades que pueden tener los estudiantes al abordar el tema, puesto que probablemente esas mismas dificultades estuvieron presentes cuando surgieron dichas ideas. Asi mismo, el proceso de evolución histórica puede asemejarse al proceso de aprendizaje del estudiante (de Guzmán, 1992).

Propuesta metodológica

La secuencia didáctica contiene 5 actividades. La aplicación de estas actividades se hizo con un grupo de 30 estudiantes de 9° grado de educación básica colombiana, con edades entre los 14 y los 16 años, organizados en grupos de 5 personas. Las actividades se describen a continuación.

Actividad 1: Urnas.

A cada grupo se le da una urna con cierta cantidad de fichas plásticas de colores, cada una con una distribución diferente de fichas por color. Los estudiantes, sin conocer la cantidad de fichas que hay, deben hacer extracciones sin reemplazo para recoger datos que permitan concluir en cuál de las urnas es más probable encontrar una ficha azul y a partir de los datos hacen una conjetura, iniciando una discusión a partir de estas sobre cómo se puede decidir cuál sería la urna con más posibilidad de encontrar una ficha azul. La discusión se guio de tal forma que los estudiantes entendieran que para poder determinar de mejor manera la urna con mayor probabilidad se debe tener en cuenta el número de veces que una ficha azul fue extraída de cierta urna y el número de extracciones que se realizaron, y que la razón entre estas dos cantidades es una forma de medir la probabilidad del evento. Al finalizar la actividad se espera que los estudiantes identifiquen la frecuencia relativa como medida de probabilidad.

Actividad 2: Carrera de caballos.

En una carrera corren 12 caballos, cada uno de ellos identificado con un número del 1 al 12. La pista de carreras tiene un número determinado de casillas, en las que los caballos pueden avanzar a partir del lanzamiento de un par de dados (de 6 lados cada uno). Se lanzan los dados y la suma de los resultados obtenidos determina que caballo puede avanzar de posición, avanzando una casilla cada vez que se lancen los dados. Cada uno de los jugadores deberán apostar por un caballo. Gana el caballo que primero complete un número de casillas determinado. Para esta actividad se utilizó un tablero de cinco casillas, que representó la pista de carreras, por lo que para ganar se tenía que completar 5 casillas. A cada grupo de estudiantes se les entregó un tablero, un par de dados y un marcador para llenar el avance de la carrera. Cada grupo debía completar una tabla de resultados, donde registraban lo sucedido en el juego, para luego hacer un consolidado con los datos de todos los grupos. Según estos datos, se les preguntó por el caballo por el que apostarían en una próxima carrera y el porqué de su elección, propendiendo para que sus respuestas incluyeran el cálculo de frecuencias relativas para determinar la probabilidad que ellos escogieran. Para terminar esta actividad se comprobó la hipótesis planteada por los estudiantes realizando una última carrera.

Actividad 2: Carrera de caballos simulada

Partiendo de la actividad anterior, se planteó la posibilidad que la pista de carreras fuera más larga, necesitando completar más casillas para ganar. Si esto se realiza con material manipulable, se torna dispendioso de hacer, por lo que se usó de una aplicación móvil (disponible en https://goo.gl/xDYcMB), o en su defecto, un aplicativo web (disponible en https://goo.gl/wyGbxu), que simula una carrera a partir del número de casillas que se necesitan para ganar. Con la simulación se debía realizar 10 carreras diferentes. Para la recolección de datos cada integrante de cada grupo registraba en una tabla los resultados de cada una de las simulaciones realizadas de tal forma que cada uno se encargara de completar la información de una posición especifican de la carrera. Luego de hacer un consolidado con los datos del curso se analizó la primera posición de la carrera, y por qué al parecer el Caballo 7 tiene mayor probabilidad de ganar a medida que la carrera se hace más larga. La discusión giró en torno a la revisión del espacio muestral del evento, guiando a los estudiantes a considerar todas las posibles combinaciones resultantes al lanzar un par de dados, observando que, 6 de 36 posibles combinaciones favorecerán al Caballo 7, formulando en lo posible una relación parte-todo entre estas dos cantidades. Así, se haría un primer acercamiento al concepto de probabilidad desde el enfoque clásico.

Actividad 4: Urnas (Parte 2)

Ya con la idea del enfoque clásico se retoma la Actividad 1. En esta ocasión los estudiantes podrán determinar cuál de las urnas era la que realmente tenía mayor probabilidad de extraer una ficha azul. Se les entrega a los estudiantes las urnas con la posibilidad de que cuenten las fichas de cada color y puedan calcular la probabilidad real de obtener una ficha para cada color. Una vez calculados estos valores de probabilidad se comparan con los valores de probabilidad obtenidos con la frecuencia relativa, dando paso a la discutir la comparación entre los dos enfoques, preguntando por la manera en que la probabilidad frecuentista pueda acercarse más a la probabilidad clásica.

Actividad 5: Dados cargados

En las Actividades 2-3 se han realizado lanzamientos con dos dados de seis caras y se ha llegado a la conclusión que el resultado de suma con mayor probabilidad es el número 7. Se propone un cambio a esta situación, cargando uno de los dados con los que se realizan los lanzamientos. Cada grupo recibe un par de dados de seis caras cada uno, distinguibles por color, de tal forma que uno de los dados estuviera cargado. El objetivo de esta actividad experimental es, por medio del cálculo de frecuencias relativas, examinar cual es el resultado más probable de obtener con el par de dados cargados y comparar los resultados con par de dados sin carga. Para esta actividad se utilizaron dados de espuma con dimensiones de 4 cm cargados en la cara 5, en la esquina contigua a las caras 6 y 4, con dos balines de acero de 1/8 de pulgada cada uno. Para obtener los datos de los lanzamientos de los dados sin carga se utilizó una simulación alojada en un aplicativo web (disponible en https://goo.gl/98yxQa). La recolección de los datos experimentales se hizo por medio de tablas de frecuencia, que después se consolidaron en una hoja de cálculo, para comparar los datos experimentales (de los lanzamientos de los dados cargados) con los datos simulados (de los dados sin carga). Utilizando las herramientas que ofrece la hoja de cálculo se realizó una discusión, utilizando cálculos de probabilidad y gráficas para comparar el uso de cada uno de los enfoques.

Resultados y Conclusiones

A lo largo de la aplicación de las actividades se llegaron a algunos resultados interesantes. En las actividades relacionadas con urnas, la mayoría de estudiantes se inclinan por hacer decisiones basadas en frecuencias absolutas sin tener en cuenta el total de extracciones, y aunque algunos relacionan frecuencias absolutas con total de extracciones para comparar probabilidades, no utilizan la frecuencia relativa en primera instancia. En la discusión se ve la importancia de los preconceptos relacionados con las relaciones parte-todo, puesto que fue desde esta idea que se da la idea de frecuencia relativa como medida de probabilidad. Adicionalmente los estudiantes identifican que esta probabilidad no es “real” por diferencias en las extracciones entre grupos. Con la Actividad 4 se soluciona este problema al darle la oportunidad a los estudiantes de conocer el material de las urnas, empezando a intuir que a mayor número de repeticiones la probabilidad se acerca más a la real.

Con respecto a la Actividad 2, los estudiantes decidieron apostar para una última carrera por el Caballo 7, según los resultados obtenidos y probabilidades calculadas (Figura 2). Cuando se comprobó la hipótesis de los estudiantes realizando una nueva carrera surgieron dos opciones: hacer los lanzamientos con dados físicos o con dados virtuales. Estas dos opciones surgieron porque los estudiantes desconfiaban de la parcialidad de los resultados que se podían obtener; por un lado, los lanzamientos con dados físicos dependen de factores humanos (fuerza, superficie, etc.), mientras que los dados virtuales generan desconfianza por qué no pueden garantizar que los números generados son realmente aleatorios. Esta última situación resulta interesante, puesto que permite comprobar lo mencionado Borovcnik y Peard (1996), ya que los resultados brindados por las simulaciones computarizadas son pseudo-aleatorios y los puntos de vista intuitivos de los estudiantes pueden ocasionar problemas con sus procesos de aprendizaje, lo que dificulta el uso de computadores.

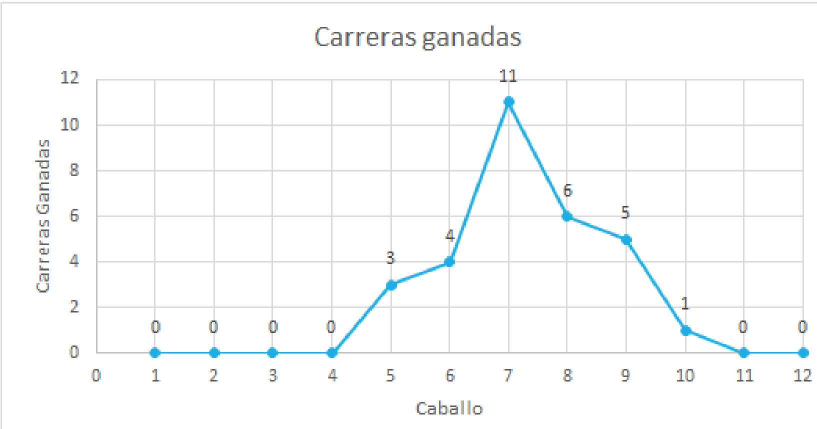

Figura 2. Resultados obtenidos por los estudiantes en Actividad 2

Con respecto a la Actividad 3, para definir el modelo matemático del enfoque clásico de la probabilidad fue de provecho las ideas que tenían los estudiantes sobre el enfoque frecuentista —basadas en uso de porcentaje y relaciones parte todo— ya que los estudiantes relacionaron estas ideas para calcular la probabilidad en este caso, tomando el número de casos que favorecían al Caballo 7, con el total de casos posibles en un lanzamiento de dos dados. Dado a que se basaron en las ideas del enfoque frecuentista se aclararon diferencias entre las dos formas de calcular probabilidades, radicadas en la forma en la que se aborda un problema: si se hacen el experimento cierto número de veces y se observa cuantas veces ocurre cierto evento se tiene en cuenta un enfoque frecuentista, pero si se analiza los posibles resultados que puede tener un experimento y se toma en cuenta el total de veces que favorecen al evento a analizar se tiene en cuenta el enfoque clásico.

En la Actividad 5 los estudiantes concluyeron que con los dados cargados el número con mayor probabilidad de salir es el 7, los valores menores que 7 aumentaron su probabilidad de ocurrencia, mientras que los que eran mayores que 7 disminuyeron su probabilidad, esto en comparación con los datos obtenidos en las actividades previas y la simulación realizada, viéndose más el cambio en los valores 6 y 10. Cuando se calcularon los valores de probabilidad se hizo más notorio que los lanzamientos con los dados cargados favorecían en mayor medida a los números menores que 7, y mientras los valores aumentaron en estos valores, la disminución de la probabilidad de los valores mayores se dio casi que en la misma medida en como aumentaban los primeros (Figura 3).

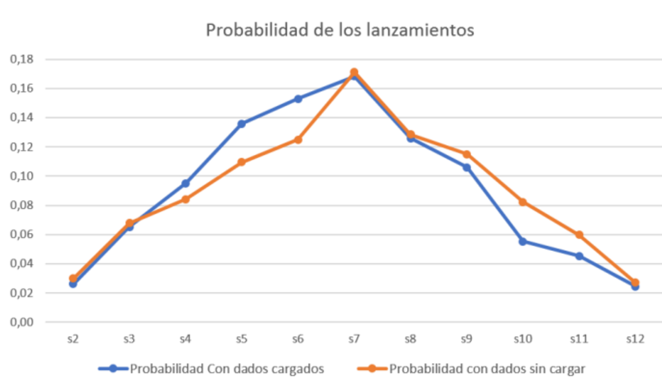

Figura 3. Valores de probabilidad obtenido en Actividad 5

Dado a que en la planeación de la actividad no se tuvo en cuenta la comparación con los valores de probabilidad clásica, se les planteó a los estudiantes la situación en la que los datos experimentales no fueran los de los dados cargados sino los que nos arrojan la simulación. Se les preguntó si era posible que de alguna forma el valor de la probabilidad experimental se acercara a la probabilidad real y ellos identificaron que entre más lanzamientos se realizaran, estos dos valores de probabilidad se iban a parecer cada vez más. Se puede ver entonces que con estas actividades los estudiantes identificaron que la probabilidad frecuentista, al aumentar el número de repeticiones en las que se realiza un experimento, tiende al valor de la probabilidad clásica.

A forma de conclusión, el proceso de aprendizaje y enseñanza propuesto en la secuencia didáctica guarda parecido a la forma como se construye la teoría formal de la probabilidad y al proceso histórico-epistemológico del concepto de probabilidad, partiendo del uso de juegos de azar para encaminar a una formalización de la teoría. La secuencia parece efectiva para introducir a los estudiantes al estudio de la probabilidad y, a pesar de no lograr formalizar conceptos, da herramientas para abordar problemas de aleatoriedad, contribuyendo en la toma de decisiones fundamentada en argumentos no subjetivistas. Aunque la secuencia fue creada para solucionar un problema encontrado en grado 9°, puede ser adaptada para su aplicación en grados inferiores, de tal forma que pueda responder en mayor medida al cumplimiento de lo que plantean los Estándares Básicos de Competencia colombianos.

Referencias y bibliografía

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estádistica. En *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*. Buenos Aires.

Blanco, L., Arunachalam, V., & Dharmaraja, D. (2012). *Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications*. John Wiley & Sons, Inc.

Borovcnik, M., & Peard, R. (1996). Probability. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbooks of Education* (pp. 239–287).

Burton, D. (2006). *The History of Mathematics: An Introduction* (6°). McGraw Hill.

Cañizares, M., Batanero, C., & Serrano, L. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, *37*, 37–55.

Chaput, B., Girard, J.-C., & Henry, M. (2015). Frecuentist Approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 85–95). Springer.

Chaumont, L., Mazliak, L., & Yor, M. (2007). Some aspects of the probabilistic work. En É. Charpentier, A. Lesne, & N. Nikolski (Eds.), *Kolmogorov's Heritage in Mathematics* (pp. 41–66). Berlin: Springer.

de Guzmán, M. (1992). Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Recuperado de https://goo.gl/qqDg6Z

Lee, H. S., & Mojica, G. F. (2007). Teachers' Use of Experiments and Simulations in Middle School Probability Lessons. En T. de Silva & L. Wiest (Eds.), *29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Exploring Mathematics Education in Context* (pp. 437–440). Recuperado de https://goo.gl/wyHuic

Nilsson, P. (2014). Experimentation in Probability Teaching and Learning. En E. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting plural perspectives.* (pp. 509–532). Springer.

Penagos, M. (2017). *Secuencia didáctica para la enseñanza de la probabilidad frecuentista y clásica para estudiantes de grado noveno*. Universidad Nacional de Colombia.

Vega-Amaya, O. (2002). Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad. *Apuntes de Historia de Las Matemáticas*, *1*(1), 54–62. Recuperado de https://goo.gl/ScU5uJ