XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Curvas: Entre la división de lo continuo y la continuidad de lo discreto

Carlos Mario **Pulgarín** Pulgarín
Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia
Colombia
carlosm.pulgarin@udea.edu.
Carlos Mario **Jaramillo** López
Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia
Colombia
carlos.jaramillo1@udea.edu.co
René Alejandro **Londoño** Cano
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
rene.londono@udea.edu.co

Resumen

El presente documento exhibe algunos de los avances obtenidos como resultado de la investigación doctoral en relación con el proceso de comprensión del concepto de curva en la transición entre lo discreto y lo continuo en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Para ello, se inicia con un recorrido histórico del concepto de curva, situación que de forma simultanea propicia la discusión sobre la noción de continuidad e infinito en cálculo, y las dificultades que se evidencian por parte de los estudiantes al abordar dicho concepto en el estudio de la derivada y la integral. De esta forma se estructura el problema de investigación y elementos que aportarán en la metodología de la investigación.

Palabras clave: Curvas, transición, discreto, continuo, infinito, comprensión, teoría de Pirie y Kieren.

Aspectos históricos en el concepto de curva

Existen evidencias de que el primer acercamiento a una curva surgió a partir de círculos trazados a mano alzada en el siglo VII A. de C. y círculos perfectos trazados con la ayuda de cuerdas y clavos en templos construidos aproximadamente en el siglo V A. de C. A partir del siglo VI A. de C. se proponen modelos cosmológicos que involucraron de manera esencial a la esfera y al círculo. Anaximandro, Parménides, Pitágoras y sus discípulos sostuvieron modelos en los cuales la tierra es esférica y el movimiento de los astros se da en trayectorias circulares que llevaron a la elaboración de movimientos sumamente complejos a partir de epiciclos en esa ardua tarea de describir las orbitas planetarias. Siglos después, los modelos astronómicos de Tycho Brahe, Ptolomeo y Copérnico darían paso a las órbitas elípticas de Kepler. Sin embargo, el círculo seguiría siendo instrumento de estudio en las estimaciones del número π, conocidas las contribuciones de Arquímedes a la matemática a partir del método de exhaución. Dicho método lleva a pensar que, para tal época, las nociones de infinito y continuidad ya estaban dibujándose en la mente de los matemáticos. De hecho, el concepto de curva está vinculado a la dificultad de dar definiciones matemáticamente aceptables de un concepto intuitivamente claro como el de continuo.

Analizando cronológicamente la evolución del concepto de curva, se da un salto de muchos años y habría que esperar varios siglos de aislamiento y ausencia de registros sobre estudios al respecto, hasta que en 1676 Isaac Newton escribe *Tractatus de Quadratura Curvarum* (tratado de cuadratura de curvas), la cual sólo fue publicada hasta 1704. En esta obra, Newton describe la distinción entre el uso de elementos discontinuos y nuevas consideraciones cinemáticas con referencia a las fluxiones, abandonando así las cantidades infinitamente pequeñas en beneficio del concepto de fluxión. De hecho, Newton afirmó: "No voy a considerar aquí cantidades matemáticas compuestas de partes extremadamente pequeñas, sino como generadas por un movimiento o flujo continuo. Las líneas se describen, y por describirse son generadas, no por superposición de partes, sino por un flujo continuo de puntos" (Mosquera, 2013, p. 80)

Durante el siglo XVIII otros autores se ocuparon de este concepto desde una perspectiva más filosófica, al considerar que la noción de curva debía establecerse sin tener en cuenta ninguna idea ajena a ellas mismas y, por supuesto, excluyendo cualquier mención sobre la idea de movimiento. El detonante en tal momento fue básicamente la llamada curva de Peano. La noción de continuidad vinculada al concepto de curva que se tenían para entonces parecían vislumbrar los desacuerdos en una definición rigurosa y formalmente aceptada de esta última. A. G. Baumgarten, A. G. Knäster brindaron otras definiciones al respecto, sin embargo, en el año 1851, Bernhard Bolzano da a conocer su obra póstuma *Paradoxien des Unendlichen* y al igual que en otras obras de su autoría publicadas en años previos, tiene como objetivo dar una definición intrínseca y rigurosa del concepto de curva. Su esfuerzo fue notorio e implicó un constructo de definiciones cada vez más finas sobre el concepto de línea curva. En su obra *Geometrische Begriffe* formula el siguiente teorema sin demostración: Toda curva simple cerrada contenida en una superficie divide a está en dos partes, que se distinguen entre sí por el hecho de que todos los puntos de la superficie que no pertenecen a la línea están a un lado de esta o en el lado opuesto. (Freixenet 1998, p. 61)

En su actividad geométrica, Bolzano no se limitó a dar buenas definiciones en relación con el concepto de curva. Entre los años 1830 y 1834 dio un ejemplo de una función continua en todos sus puntos que no es derivable en ninguno de ellos. La función queda descrita por su gráfica y esta viene dada a través de una construcción de tipo iterativo que da lugar a una curva, obtenida como límite de líneas poligonales. Esta curva se construye como sigue:

Sea $\overline{PQ}$ un segmento rectilíneo, y considerese una dirección $d,$ distinta de la de $\overline{PQ}$. Dividamos $\overline{PQ}$ por su punto medio M y tomemos los puntos $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ tales que $\overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3M} = \overline{MQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_3Q}$

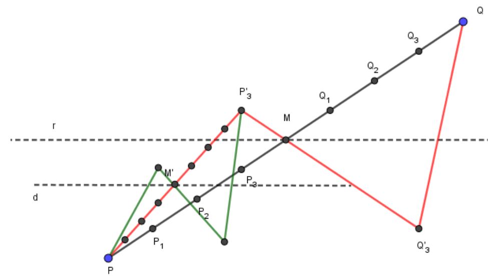

Figura 1. Función continua sin ser derivable

Si P_3' y Q_3' son los simétricos de P_3 y Q_3 respectivamente con respecto a la recta r, paralela a la dirección d por el punto M, se forma la línea poligonal $PP_3'Q_3'Q$ y se repite el proceso en cada uno de los cuatro lados de esta poligonal, y así sucesivamente. El límite de estas líneas es la curva buscada.

Una construcción que se asemeja bastante a la planteada por Bolzano se presenta en la figura 2, sin embargo; allí la discusión se centra en la continuidad geométrica y numérica. Sobre este aspecto (continuidad) Grégoire de Saint Vicent (1584-1667) a quien se le reconoce la primera resolución matemática sobre la paradoja de Zenón plantea una construcción geométrica simple pero que conlleva una reflexión profunda en la discusión sobre la noción de continuidad vista desde las series geométricas, más aún cuando se contrasta con la idea de Fermat, mientras que este último geometriza las series, Grégoire de Saint Vicent hace sus estimativos liberándolos del aspecto geométrico, aunque se parta de él. (DHombres, 1993, p. 46).

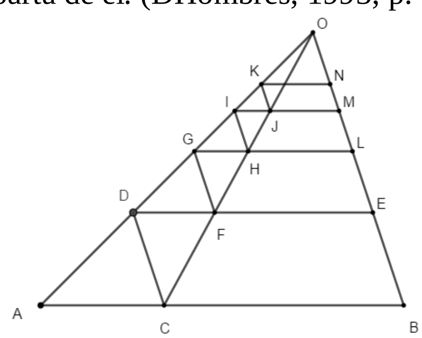

Figura 2. Interpretación del continuo geométrico a partir de series infinitas

Las construcciones de las figuras 1 y 2 evocan a la elaborada por Sundara Row (1966) en su texto *Geometric Exercises in Paper Folding*. En el caso de Row, su elaboración parte de bisecciones consecutivas a un ángulo del cuadrado y perpendiculares sobre cada bisectriz de tal forma que pasen por el vértice (Figura 3).

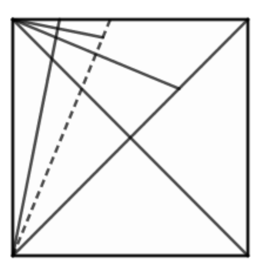

Figura 3. Construcción de Row para aproximar un arco de curva a partir de polígonos regulares

Los trabajos de Bolzano quedaron olvidados rápidamente y tuvieron que esperar largo tiempo hasta ser redescubiertos en el siglo XX. Sin embargo, a mediados del siglo XIX se propugnaba por el desarrollo de una geometría que permitiese el establecimiento de definiciones y el uso de espacios de dimensión superior a tres. En este sentido, las primeras definiciones rigurosas de tales espacios se atribuyen a Herman Grassmann y Bernhard Riemann.

"Grassmann expresa sobre el concepto de línea que: Entendemos por extensión-forma de primer orden la totalidad de elementos en el cual un elemento generador pasa a través de un cambio continuo. En la misma línea de Grassmann estaba Riemann quien plantea: El verdadero carácter de una variedad unidimensional (Curva) es que la progresión continua (movimiento) es solamente posible en dos direcciones o sentidos opuestos. Si se supone que una variedad de dimensión uno pasa a través de una serie de variedades igualmente unidimensionales en correspondencia punto a punto se obtiene una variedad de dimensión dos (superficie)" (Freixenet 1998, p. 67-68)

Estos intentos por dar una definición rigurosa del concepto de curva representan una auténtica revolución que trajo sus frutos en años posteriores. En la década de 1870 y 1880 George Cantor publica una serie de artículos sobre los conjuntos infinitos lineales de puntos, en los que fija las bases de la topología de los conjuntos del espacio euclídeo de dimensión n. Allí, Cantor define la curva plana como un continuo sin puntos interiores, la cual pasaría a recibir el nombre de línea cantoriana.

Al final de la década del 70 surge una profunda crisis acerca del concepto de curva, al probar Cantor que: los puntos de un segmento podían ponerse en correspondencia biunívoca con los de un cuadrado y en general con los de un cubo n-dimensional, lo cual obligó entre otras, a plantear la revisión de la noción de dimensión de los objetos geométricos.

En el siglo XIX destacan los trabajos de Camille Jordan, quien en el final del tercer tomo de su obra Cours d'Analyse enuncia su famoso teorema de la curva: Toda curva plana cerrada, simple y continua divide al plano en dos regiones, una exterior y otra interior, de manera que esta última no puede reducirse a cero, pues contiene un círculo de radio finito.

Esta definición de curva dada por Jordan sufrió un durísimo golpe cuando en 1890 Giuseppe Peano define una curva continua que recubre todos los puntos de un cuadrado; es decir, la imagen geométrica de la misma tiene dimensión dos. La descripción dada por Peano es analítica y no da ningún método que permita representar su curva.

Lo planteado por Peano suscito el interés de los matemáticos de la época entre ellos D. Hilbert quien en 1891 publicó un artículo en el que da un método que permite visualizar el proceso de construcción de una curva de Peano y que se obtiene como límite de líneas poligonales igual que la curva de Bolzano ya considerada.

Se hacía necesario revisar nuevamente la noción de curva. En 1920, H. Hahn estaba dando un seminario en la Universidad de Viena y propuso el problema de dar una definición adecuada del concepto de curva, de forma casual K. Menger (que contaba con 17 años de edad) asistió a aquel seminario e hizo eco de la propuesta. Una semana más tarde presentó al profesor Hahn una solución: Una curva es un conjunto de puntos tal que cada uno de ellos tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyos bordes cortan el conjunto dado en una cantidad finita de puntos.

Más de un siglo atrás Bolzano había dicho lo mismo que Menger. El profesor Hahn se interesó en tal definición y la reestructura así: Un continuo K recibe el nombre de curva si en cada entorno U de cualquier punto p de K existe un entorno U', contenido en U, de manera que la intersección del borde de U' con K no contiene conjuntos conexos.

Para concluir esta discusión previa sobre el concepto de curva enunciaré la siguiente definición Una curva[1], por tanto; es la trayectoria generada al movernos continuamente por la recta real, puede ser cerrada o abierta, puede tener picos, pero no puede rellenar algo de dimensión dos. Otra cosa es que queramos estudiar sus características diferenciales, es decir, vectores, planos tangentes, curvaturas, etc… para lo que sí necesitaremos la condición de diferenciabilidad y en su generalización tendremos que hablar de variedades diferenciables. Nótese que en esta última un tanto más enfocada al cálculo asocia el concepto de diferenciabilidad, el cual será elemento de análisis a continuación puesto que está estrechamente ligado a continuidad e infinito.

División de lo continuo y continuidad de lo discreto

Los registros históricos provenientes de diversas culturas alrededor del mundo indican que la mayoría de civilizaciones antiguas tenían sistemas de numeración y dichos números en muchos casos estaban asociados con significados geométricos dada la actividad de medir y la medida estar asociada con magnitudes geométricas. Hasta fines del siglo XIX, en geometría, la continuidad del espacio se dio por sentada, era un concepto que no se ponía en discusión, que no se planteó como la posibilidad de que pudiera traer consigo un problema.

Hablar en matemáticas de continuidad, involucra necesariamente la idea de infinito y como antesala de este, es importante considerar la noción de discreto. De este modo se presenta la triada entre los conceptos de infinito, discreto y continuo. El concepto de transición se entenderá aquí como el paso de un estado o condición a otra, ese proceso que se presenta entre una condición inicial y final. En particular, se hará mención de tal término para indicar el paso de lo continuo a lo discreto o viceversa, dentro de un proceso de razonamiento infinito. Estos tres conceptos han tenido una evolución considerable a través del tiempo y son ineludibles dentro de cualquier discusión sobre curvas.

El problema de investigación

La comprensión y análisis de curvas es esencial en el campo de las ciencias exactas, la ingeniería, la economía y otras áreas afines en donde comúnmente se generan soluciones a problemas a partir de la construcción de formas geométricas, cónicas o funciones matemáticas que pueden ser simples o supremamente complejas. En todos los niveles educativos se aborda la enseñanza de curvas de forma directa o indirecta al tratar el desarrollo de contenidos matemáticos tal como plantean los estándares básicos de competencias en matemáticas (2006, p. 61). Por ejemplo, se trata la circunferencia y el círculo en los primeros años de formación, la representación de funciones sobre el plano cartesiano en secundaria y el problema de la recta tangente o el área bajo la curva en el nivel universitario, por tan solo citar algunos casos. Sin embargo; el concepto de curva por lo general no se define y aunque parece simple, no se habla mucho de él en los textos escolares. La formalización de cada tema relacionado con curvas pasa por la generalización casi que, de forma inmediata. Por lo general; se remiten a una representación geométrica y en muy pocos casos ofrecen una definición detallada.

Se evidencia que el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos ha sido y es un campo de gran interés para la investigación en educación matemática, tal es el caso de Sánchez et. al (2010, p. 7) quienes en su tesis presentan el análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada. De otra parte;

[1] Extraída de: http://elquintopostulado.com/index.php/en/matematicas/56-curvas.html

Turégano (1998, p. 230) realiza una síntesis de los documentos oficiales e informes de los profesionales en los que se habla de la importancia de proponer nuevos enfoques en el aprendizaje del cálculo atendiendo a la comprensión y génesis histórica de los conceptos. De hecho, posteriormente Turégano (1998, p. 234) concluye que, en la secuenciación de contenidos, debe primar su génesis histórica al parecer más en consonancia con las ideas y el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre su orden lógico.

Es preciso insistir en que analizar la comprensión del concepto de curva y los elementos asociados al significado de lo que representa en distintos conceptos y contextos de la matemática, podría tener consecuencias favorables en el aprendizaje de temas tales como límites, sucesiones, series, área bajo curvas, entre otros. En su estudio, se involucran los conceptos de variación y acumulación, esenciales en el cálculo. Actualmente estos temas se analizan desde dos puntos de vista: el primero es a partir de una concepción infinitesimalista y la segunda es aquella basada en el concepto de límite. Ambos son eje de la presente investigación, ya que involucran procesos de razonamiento infinito a partir de transiciones necesarias entre lo discreto y continuo.

Al respecto, en lo concerniente al infinito, cabe destacar que "entre los profesionales de la matemática, el cálculo infinitesimal fue desechado desde mediados del siglo XIX, debido a supuestas deficiencias en sus fundamentos. En la enseñanza (del cálculo) se abandonó la presentación leibniziana[2], siendo gradualmente sustituida por la versión de Cauchy-Weierstrass, sin mayor atención al aspecto didáctico. Lo que se observó en las aulas principalmente a lo largo de la segunda mitad del siglo XX, nos deja como lección que en la enseñanza resulta conveniente una presentación de una ciencia que atienda los intereses y capacidades de (la mayoría de) los estudiantes y no las características que, en cuanto rigor lógico se refiere, ha de tener esa ciencia, según los profesionales de la misma. Actualmente, la mayor parte de los profesores de cálculo reconoce que la presentación basada en el concepto (riguroso) de límite resulta poco accesible para el común de los estudiantes". (Cantoral et al., 2008, p. 4)

La reflexión sobre curva tiene gran relevancia, dado que las investigaciones sobre este tópico pasan por apreciaciones históricas y epistemológicas desligadas, específicamente considerando estudios sobre la noción de límite, infinito, recta tangente y, además, sobre experiencias de aula relacionadas con estos mismos conceptos. Los estudios sobre la comprensión del concepto de curva son escasos, pocos ahondan en las dificultades que pueden presentar tanto profesores como estudiantes en los niveles de educación media y universitaria al respecto. Este hecho, incentiva un profundo estudio sobre el tema y busca a través del presente escrito, propiciar en los estudiantes de educación media y primeros semestres de universidad la comprensión del concepto de curva y su estrecha relación en el paso entre discreto-continuo. Dicho de otro modo, el problema que se pretende abordar es:

Los estudiantes de cursos de cálculo diferencial e integral presentan dificultades para comprender el concepto de curva a través de transiciones entre lo discreto y continuo mediado por procesos de razonamiento infinitos.

Este problema está relacionado con:

- *La representación discreta que induce la notación de función en el plano*
- La imposibilidad de calcular la longitud exacta de una curva a partir de segmentos de recta finitos.
- Asociar una suma infinita en un intervalo finito

[2] A partir de los trabajos de Abraham Robinson, a mediados del siglo XX podemos decir que no hay ninguna razón para seguir insistiendo en una falta de fundamentación lógica para el uso de los infinitesimales y, por lo tanto, en que el cálculo infinitesimalista es rigurosamente defectuoso.

- Identificar que una curva está compuesta por infinitos trozos de recta (segmentos)
- El incremento sobre el dominio de la curva no es igual al incremento en los puntos correspondientes de la curva.
- Solo se aproxima la longitud de una curva cuando los infinitos segmentos dejan de serlo y se convierten en puntos (punto de tangencia)
- Asociar la integral definida como un simple operador o relacionarlo con una suma infinita

Estas consideraciones hacen relevante el desarrollo de la investigación, dada su incidencia con temas históricos y de suma importancia en el ámbito educativo en todos sus niveles y en los cuales está ausente un estudio detallado que dé cuenta de la comprensión del concepto de curva a través de procesos de razonamiento infinito.

Acerca de la teoría de Pirie y Kieren

Al centrarse la investigación sobre la comprensión en el concepto de curva, cabe destacar que la implementación del modelo de dicha teoría parece entrar en concordancia con el objetivo planteado. "Pirie y Kieren conceptualizan su modelo sobre la evolución de la comprensión matemática como poseedor de 8 niveles potenciales, asumieron su concepción teórica para la comprensión matemática como estable pero no lineal, como un fenómeno recursivo, y la recursividad parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación" (Meel, 2003).

Figura 4. Estratos en el modelo de Pirie y Kieren (Meels, 2003)

Metodología

Se busca desarrollar una investigación de tipo cualitativa apoyada en un estudio de casos en la cual, con base a la implementación de algunos métodos de recolección de información en los tipos de unidades de análisis del proceso, se interpreten los resultados obtenidos, de tal forma que no solo validen o refuten la hipótesis inicial de la investigación, sino además permitan extender las interpretaciones de los resultados a estudios futuros en torno a dicho tema.

Referencias y bibliografía

Cantoral, R. et al., 2008, *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. España. Ediciones Diaz de Santos.

DHombres, J. (1993) Las progresiones infinitas: El papel del discreto y del continuio en el siglo XVII. Volumen 16. P 43-114. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/62118.pdf

Meel, D. (2003). *Models and theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the Growth of Mathematical Understanding and APOE theory.* CBMS Issues in Mthematics Education, 12, 132-181.

Mosquera, J. (2013) *Desarrollo histórico de la noción de curva: De la forma sintética a la representación analítica*. Universidad del Valle. Santiago de Cali.

Freixenet, J. (1998) *Sobre la historia del concepto topológico de curva*. Publicado en el: volumen 1, número 1 (enero-abril, 1998). Recuperado de: http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=303

Sánchez, G, et al. (2010) *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.* Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005

Turegano, M. (1998) *Del área a la integral, un estudio en el contexto educativo.* Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21531/21365