Conocimiento del profesor con ayuda de Geogebra

Fernando **Mejía** Rodríguez
Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México
México
fernando.mejia@isceem.edu.mx

Resumen

La cultura de la evaluación no dejó escapar a la educación, ahora se crean organizaciones que aplican exámenes internacionales. Los resultados de PISA 2015 evidencian la posición del sistema educativo mexicano. El objetivo de esta comunicación es analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas cuando resuelve tareas con la ayuda de Geogebra. El enfoque metodológico es estudio de caso, se trabajó con seis profesores, cuatro de educación básica y dos de educación media superior. Se muestra una tarea resuelta por caminos diferentes. Entre las conclusiones, podemos destacar: el profesor de matemáticas, antes de exponer una tarea, debe al menos conocer tres caminos para encontrar el mismo resultado; el MTSK es complejo; una herramienta digital, que permitió la transición a una mejor comprensión y a la resolución de tareas, fue Geogebra, que, a partir de un bosquejo inicial o refuerzo, puede ser utilizado a favor de la matemática escolar.

Palabras clave: conocimiento, profesor, MTSK, tareas, Geogebra, estrategias.

Contexto del profesor de matemáticas mexicano

Los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), se organizaron para formar el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés). México ha participado desde el 2000 en estos programas, el más reciente fue el aplicado en el 2015. En la *Figura 1* (OCDE, 2016, p. 194), se puede apreciar el lugar que ocupa el sistema educativo mexicano en cuanto a matemáticas, con respecto a los países miembros de la OCDE. Estamos en último lugar, tomando en cuenta sólo los miembros de la OCDE que están en letras de color negro. Por otro lado, la OCDE hace la invitación a otras economías alrededor del mundo y están identificados con letras en color azul, entonces, alcanzamos el lugar 55 de 69. En la zona latina, estamos por encima de Costa Rica, Perú, Colombia y Brasil; pero debajo de Argentina, Chile y Uruguay.

En México, las autoridades educativas aseguran, que se debe *evaluar para mejorar*; los profesores si quieren seguir trabajando tienen que participar en evaluaciones, que como premio les dejarán seguir laborando en las escuelas; de lo contrario, perderán su empleo.

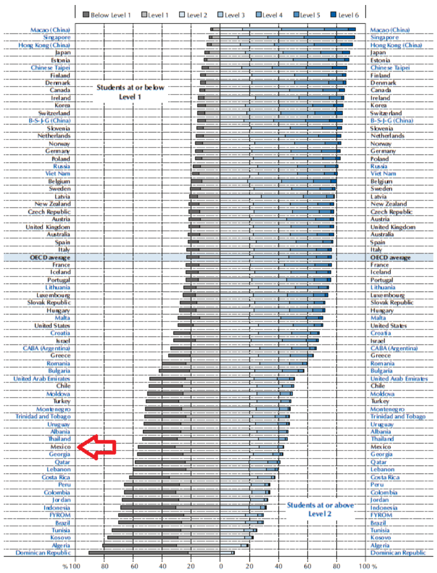

Figura 1. Resultados de matemáticas en PISA 2015

Resolución de tareas

Para Lester & Cai (2016, p. 8) la actividad principal en el salón de clases es “una tarea que se presenta a los estudiantes en un entorno de instrucción que plantea una pregunta para ser respondida, pero para la cual los estudiantes no tienen un procedimiento o estrategia disponible para responderla”. El profesor debe tener un cierto conocimiento para poder explicar las ideas matemáticas a sus alumnos cuando resuelven tareas.

En la *Figura 2* se muestra el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés), expuesto por Aguilar et al. (2013), donde el dominio del Conocimiento Matemático (MK) está dividido en tres subdominios: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM); al igual el dominio del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) en otros tres subdominios: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

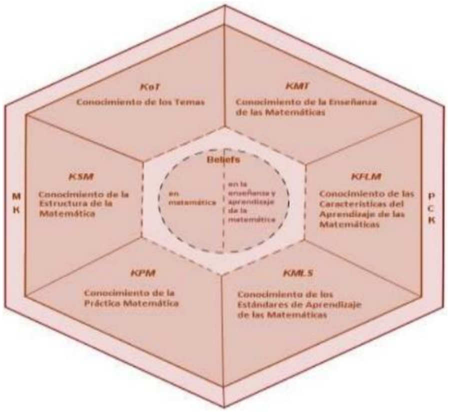

Figura 2. Modelo MTSK

El efecto de tomar la decisión de que los alumnos interactúen con un software dinámico para la construcción de figuras geométricas, las señalan Gutiérrez, Prieto & Ortiz Buitrago (2017, p.39) como "bondades de integrar tecnologías digitales en las experiencias de resolución de problemas matemáticos con cierto realismo". El software Geogebra, tiene ventajas sobre otros paquetes informáticos porque: es gratuito, es multiplataforma, es intuitivo y no demanda tanta cantidad de memoria y operaciones del microprocesador:

> Con el desarrollo de software gratuito basado en Internet, como Geogebra, es posible que se superen estas barreras. El mayor acceso a los estudiantes, y la disponibilidad de proyectores digitales, presenta el inconveniente de quién debería estar a cargo: el maestro dirigiendo una discusión de toda la clase o el estudiante involucrado en una 're-invención guiada' individual (Little, 2018, p. 9).

Fan & Zhu (2007) señalan las estrategias que se pueden utilizar para resolver tareas: (1) Actúalo, (2) Cambia tu punto de vista, (3) Dibuja un diagrama, (4) Adivina y revisa, (5) Razonamiento lógico, (6) Busca un patrón, (7) Elabora suposiciones, (8) Elabora una lista, (9) Elabora una tabla, (10) Replantea el problema, (11) Simplifica el problema, (12) Resuelve parte del problema, (13) Piensa en un problema relacionado, (14) Usa un modelo, (15) Usa una ecuación, (16) Usa concepto antes-después, (17) Trabaja de reversa.

Diseño

La mirada de esta investigación es cualitativa, con estudio de caso (Stake, 1999). El caso para esta investigación, fueron los profesores que estudiaron el programa de la maestría en investigación de la educación de la generación 2016-2018 en Toluca, Estado de México, cuyos temas de tesis estaban inscritos en educación matemática. Se trabajó con seis profesores de educación básica y media superior, que tomaron dos talleres de resolución de tareas, donde básicamente se llevaban a cabo dos actividades: la resolución de tareas con papel y lápiz, y la utilización de Geogebra. Cinco profesoras y un profesor, una profesora de educación preescolar (Araceli), dos profesoras de primaria (Lupita y Carmen), una de secundaria (Rocío), una de media superior (Edith) y un profesor de media superior (Sergio). Araceli tiene 11 años de servicio en la docencia, Lupita 11, Carmen 20, Rocío 5, Edith 4 y Sergio 11.

Se resolvieron diversas tareas, pero por el espacio para esta comunicación sólo se muestra una de ellas, que se tomó del calendario del mes de enero de 2018, del día 19 (NCTM, 2018): *Un triángulo isósceles tiene los vértices de sus ángulos base sobre la gráfica de* $x^2 + y^2 = 16$. *La coordenada del tercer vértice es (0,10). Encuentra las coordenadas de los vértices en los ángulos base que maximicen el área del triángulo.*

La tarea pide graficar una circunferencia con centro en el origen y de radio 4, después poner alineados y paralelos al eje x dos puntos del triángulo cuyo tercer vértice tiene la coordenada $(0{,}10)$, los dos vértices base se pueden mover a lo largo de la circunferencia y lo que se pide es encontrar el área máxima y la ubicación de los dos vértices base. Resolver esta tarea con lápiz y papel está en desventaja con Geogebra, primero porque no se puede apreciar el movimiento en el papel, pero sí en la pantalla de la computadora, tableta o celular.

Resultados

La tarea fue resuelta por tres caminos diferentes que llegan al mismo resultado de 42.7 como área máxima y los vértices base $(-3.8, -1.3)\ y\ (3.8, -1.3)$: el primero, en plenaria; el segundo, por Araceli, Lupita y Carmen; y el tercero, por Rocío, Edith y Sergio. En el primer camino, todos los profesores con la ayuda de Geogebra[1], construyeron los siguientes comandos:

c=Circunferencia ((0,0),4)
A=Punto(c)
f=Recta (A,Ejex)
Interseca(c,f)
D=(0,10)
Polígono(B,C,D)

El resultado se puede ver al cambiar el punto B desde la parte alta del círculo hasta la parte baja y observar cómo el área del triángulo va teniendo incrementos hasta llegar a un tope y después empezar a disminuir hasta cero. En la *Figura 3* se aprecia el área máxima de 42.7 y las coordenadas de B y C son $(-3.8, -1.3)$ y $(3.8, -1.3)$ respectivamente. Cabe hacer mención, que lo encontrado es el valor aproximado, tanto de los valores de B, C y el área máxima del triángulo. Pudiera decirse que está resuelto parcialmente, que se tiene un buen acercamiento, pero el valor preciso no. En estudiantes de educación básica sería suficiente con estos números, pero en media superior, creemos que tenemos que seguir buscando el valor exacto. Las estrategias de solución empleadas, fueron: Actúalo, Dibuja un diagrama, Adivina y revisa, y Elabora suposiciones.

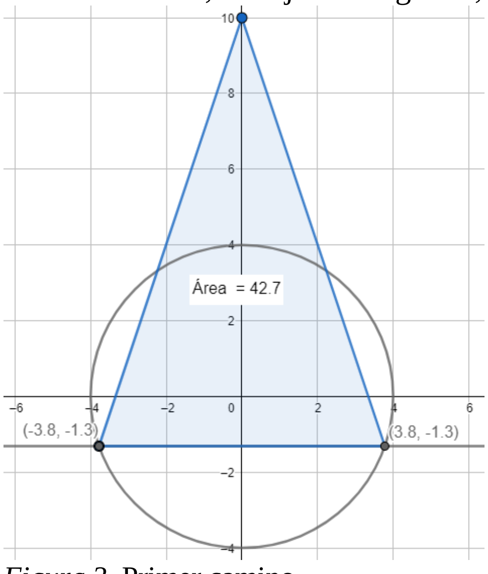

Figura 3. Primer camino.

[1] https://www.geogebra.org/m/uGncX53x

El segundo camino es por Araceli, Lupita y Carmen, que pensaron en construir una expresión para el área del triángulo, nombraron (a, b) y $(-a, b)$ a los vértices base del triángulo, el otro vértice es (0,10), así que la altura del triángulo la expresaron en términos de b.

$$h = 10 - b$$

Como el valor de b está dentro de la función $b = \pm\sqrt{16 - a^2}$, se tomó la función negativa porque es donde se encuentra el área mayor. La altura queda definida como.

$$h = 10 - \left(-\sqrt{16 - a^2}\right) = 10 + \sqrt{16 - a^2}$$

Para el área del triángulo escribieron.

$$A_{(a)} = \frac{(2a)\left(10 + \sqrt{16 - a^2}\right)}{2} = a\left(10 + \sqrt{16 - a^2}\right)$$

Graficaron la función en sus cuadernos, pero les costó trabajo, así que decidieron hacerlo con Geogebra, tal como lo muestra la *Figura 4*. La función de $A_{(a)}$ tiene un máximo en el primer cuadrante con las coordenadas $(3.84, 42.7)$; esto quiere decir, que el valor de los vértices bases tendrían las coordenadas de.

$$b = -\sqrt{16 - (3.84)^2} = -1.12$$
$$(-3.84, -1.12) \text{ y } (3.84, -1.12)$$

Por lo tanto, el área máxima del triángulo sería 42.7, con las estrategias de solución: Dibuja un diagrama, Adivina y revisa, Razonamiento lógico, Usa un modelo, y Usa una ecuación.

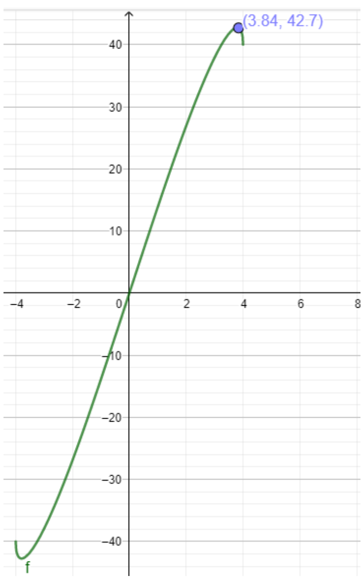

Figura 4. Segundo camino.

El tercer camino, expuesto por Rocío, Edith y Sergio, donde pensaron en resolver la tarea con la expresión del camino anterior, pero derivarla e igualarla a cero para encontrar el punto de inflexión.

$$A_{(a)} = a\left(10 + \sqrt{16 - a^2}\right)$$
$$A'_{(a)} = a\left(\frac{-2a}{2\sqrt{16 - a^2}}\right) + 10 + \sqrt{16 - a^2} = 0$$
$$4a^4 + 36a^2 - 1344 = 0$$
$$a^4 + 9a^2 - 336 = 0$$

Hicieron un cambio de variables.

$$x = a^2$$

Reescribieron la ecuación.

$$x^2 + 9x - 336 = 0$$

La resolvieron con la fórmula general.

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 1344}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}\sqrt{57}}{2} = \frac{-9 \pm 5\sqrt{57}}{2}$$

Buscaron los valores de a.

$$a = \sqrt{x}$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}$$

Que los valores aproximados son 3.791383137 y -3.791383137.

Para encontrar el valor de los vértices base, se tomó el valor de a para la siguiente ecuación.

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$b = \pm\sqrt{16 - a^2}$$

$$b = \pm\sqrt{16 - \frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}$$

$$b = -\sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}$$

Los vértices base están dados por las coordenadas.

$$\left(-\sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}, -\sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}\right)\ y\ \left(\sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}, -\sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}\right)$$

Que en valor aproximado son.

$$(-3.79, -1.27)\ y\ (3.79, -1.27)$$

El valor del área máxima es.

$$A_{\left(\sqrt{\frac{-9+5\sqrt{57}}{2}}\right)} = \sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}\left(10 + \sqrt{16 - \frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}\right)$$

$$A_{\left(\sqrt{\frac{-9+5\sqrt{57}}{2}}\right)} = \sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}\left(10 + \sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}\right)$$

Cuyo valor aproximado es 42.747531, gracias a las estrategias de solución: Razonamiento lógico, Replantea el problema, Simplifica el problema, Resuelve parte del problema, Usa un modelo, Usa una ecuación, y Usa concepto antes-después.

Conclusiones

Existen diferentes caminos para resolver tareas, de la tarea propuesta en esta comunicación, se expusieron tres caminos diferentes; esto lo podemos trasladar a, que un profesor de matemáticas, antes de llegar al salón de clases y exponer una tarea, debe por lo menos conocer tres caminos para encontrar el mismo resultado.

Cada profesor tenía sus estrategias de solución favoritas, lo que nos lleva a pensar que, cada profesor y cada estudiante pueden desarrollar más unas estrategias de solución que otras, podrán mejorar cierta destreza sobre el uso de unas estrategias con respecto a otras, cada quien lo hace de manera personal, lo importante es conocer más estrategias.

La ventaja de conocer más estrategias de solución por parte de los alumnos, en una clase de matemáticas, es que pueden construir más caminos diferentes para llegar a resolver la tarea matemática; la bondad de que el profesor de matemáticas amplíe su abanico de estrategias de solución, provocará que reconozca más caminos para resolver la misma tarea y llegar al mismo resultado, esto le ayudará a asesorar mejor a sus estudiantes, porque cuando vea el trazado de un camino, no será necesario esperar hasta el final, porque el profesor podrá adelantar al proceso que llevan y evitar una trayectoria que guiará a los alumnos al fracaso, por el contrario, alentará el camino que anticipa que terminará en éxito. Todo lo anterior se da en el contexto de trabajo en equipos por parte de los estudiantes.

Aunque existe consenso dentro de la comunidad de educación matemática, que el desarrollo de las habilidades de los estudiantes para resolver tareas es el objetivo principal de la enseñanza, no hay un consenso de qué tendrían que hacer los profesores para alcanzar dicho objetivo (Lester & Cai, 2016). Estamos de acuerdo los profesores de matemáticas, en que la actividad principal en las clases de matemáticas es la resolución de tareas, pero verla como un medio o como un fin, puede estar a discusión.

La resolución de tareas como una finalidad, muestra una postura donde el actor principal es el conocimiento y el profesor, porque quien lleva el conocimiento enseña, expone en clases tipo cátedra y mediante ejemplos deja más claro el tema a desarrollar, para después dar ejercicios de práctica, desarrollar la mecanización del algoritmo; que es buena, pero no suficiente.

Las tendencias internacionales de cómo enseñar matemáticas, está mayormente inclinada con la resolución de tareas como medio, ahora el centro de la educación es el estudiante, porque a través de ensayos, intentos y en ocasiones de errores, esboza un camino para poder encontrar la solución a las tareas. No se tiene un método eficiente para resolver esa tarea inicial, cuenta con elementos que le permiten acercarse a la solución, ha resuelto tareas similares, puede descomponerla para poder contestar parte de ella; el profesor, a partir de la necesidad, puede exponer un método más eficiente, nuevo, pero no mejor.

¿Qué método es mejor a otro? Depende, cada persona tiene a través de los años estrategias favoritas, atajos, artilugios, técnicas propias, que va desarrollando, perfeccionando, hasta que puede decir "para mí, este método es mejor que aquel"; pero eso se cumple exclusivamente para esa persona, no hay métodos universales que sean mejores que otros, pueden existir métodos más cortos, más rápidos, más abstractos, más complicados, pero no mejores para todos.

Los profesores de matemáticas no necesitan ser expertos para resolver tareas, deben ser serios estudiosos de la resolución de tareas (Lester, 2013). El profesor de matemáticas no requiere ser un matemático, un experto en la matemática, necesita ser una personas dedicada, comprometida, estudiosa y responsable con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, debe preocuparse por cómo aprenden sus estudiantes, por cómo está organizado el currículum escolar, de cómo comunicar las ideas matemáticas con sus estudiantes, de saber resolver tareas por diferentes caminos, usando diversas estrategias de solución, debe saber las bases de las matemáticas del siguiente nivel educativo; pero sobre todo, de tener la disposición para aprender, de buscar la información cuando no tenga la respuesta.

El MTSK del profesor de matemáticas es complejo, ya lo explicamos a lo largo de este documento; una herramienta digital, que permitió la transición a una mejor comprensión y a la resolución de tareas, fue Geogebra, que no sólo abonó en favor del MK, sino también del PCK porque podrá permitir tener una mejor comunicación con los nativos digitales, que en la mayoría son nuestros niños o jóvenes, alumnos de educación básica o media superior. Ya lo hemos resaltado, pero vale la pena volver a remarcar, no pensamos que la tecnología o que Geogebra sea la panacea de la educación matemática, el abuso puede provocar que no se aprenda a reflexionar, que se crea que las computadoras, el software, las aplicaciones, podrán sustituir los temas de matemáticas y aplicarlos directamente a la resolución de tareas; creemos que, como bosquejo inicial o refuerzo, puede ser utilizado a favor de un mejor aprendizaje y enseñanza de la matemática escolar.

Cierro este escrito, mencionando que me he divertido haciendo esta comunicación, considero que el mayor objetivo de una persona en este mundo, es buscar la felicidad, Walsh (2011) asegura que para lograr una salud mental, se requieren de ocho TLC (Cambios de Estilo de vida Terapéuticos): ejercicio, nutrición y dieta, tiempo en la naturaleza, relaciones, recreación, relajación y manejo del estrés, participación religiosa y espiritual, y contribución y servicio a los demás. Salir a disfrutar de la naturaleza con la bicicleta, me ayuda con el ejercicio, el tiempo en la naturaleza, la recreación y la relajación; en el Instituto donde laboro, puedo hacer lo que más me gusta, las matemáticas, con ello logro las relaciones, la recreación y el servicio con los demás, así que comparto este documento esperando que haga feliz a más personas.

Referencias

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., … Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. In *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 5063–5069). Uruguay: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.

Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 61–75.

Gutiérrez A., R. E., Prieto G., J. L., & Ortiz Buitrago, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educacion Matematica*, *29*(2), 37–68. https://doi.org/10.24844/EM2902.02

Lester, F., & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from Thirty Years of Research. In P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pehkonnen (Eds.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives*. Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1&2), 245–277.

Little, C. (2018). Interactive Geometry in the Classroom: Old Barriers & New Opportunities. *Mathematics in School*, *38*(2), 9–11.

NCTM. (2018). January 2018 Calendar. *The Mathematics Teacher*, *111*(4), 280–282. https://doi.org/10.5951/mathteacher.111.4.0280

OCDE. (2016). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. Paris: OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264266490-en

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Walsh, R. (2011). Lifestyle and mental health. *American Psychologist*, *66*(7), 579–592. https://doi.org/10.1037/a0021769