XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ingeniería Didáctica para el estudio de la variación de las funciones: Análisis preliminar

Noé Oswaldo Cabañas Ramírez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
noe_ocr@hotmail.com
Edgardo Locia Espinoza
Universidad Autónoma de Guerrero
México
lociae999@hotmail.com
Armando Morales Carballo
Universidad Autónoma de Guerrero
México
armando280@hotmail.com

Resumen

Se presentan los avances de una investigación en desarrollo que tiene como objetivo el diseño y puesta en escena de una Ingeniería Didáctica para el estudio del sentido de variación de las funciones en el nivel preuniversitario. En particular, se presenta un análisis de los principales textos que se utilizan en el preuniversitario y primeros años de universidad, y algunos elementos histórico-epistemológicos en relación a la temática. Más precisamente, se analizan las concepciones de crecimiento y de decrecimiento de una función que subyacen en las demostraciones del teorema que vincula el signo de f' con el sentido de variación de f, dadas por Lagrange y Cauchy, las cuales difieren de la concepción que subyace en la definición formal actual.

Palabras clave: Sentido de variación de funciones, teoría de situaciones didácticas, análisis epistemológico, ingeniería didáctica.

Introducción

La problemática de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, ha sido abordada desde diferentes marcos teóricos y metodológicos. Investigaciones referentes a este tema, ponen de manifiesto que los alumnos presentan problemas sobre la comprensión de los conceptos básicos del cálculo; tales como el concepto de función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, entre otros (Reséndiz, 2006; Zúñiga, 2009; Castillo, 2009; Díaz, 2009; Salinas & Alanís, 2009; Rubí, Moreno, Pou, & Jordán, 2010; Pineda, 2013; Delgado, 2013; Ruiz, Hernández, & Gutiérrez, 2015; Cuevas & Delgado, 2016).

Con el propósito de contribuir en la solución de la problemática identificada, se plantea como objetivo de investigación el diseño de una Ingeniería Didáctica para favorecer el estudio y la comprensión del sentido de variación de funciones en el preuniversitario.

Esta investigación forma parte de un trabajo más amplio. De manera particular, en este reporte se describen algunos elementos de carácter histórico-epistemológico relacionados con los conceptos y teoremas que intervienen en el análisis del sentido de variación de una función; así como la adhesión de estas definiciones en los libros de texto más representativos para este nivel.

Antecedentes y planteamiento del problema

La importancia del estudio del sentido de variación de funciones radica en que es un tema indicado como obligatorio en los planes y programas de estudio del tercer año del nivel medio superior, en México. Se trata de un contenido integrador en donde convergen y se necesitan los principales conceptos del cálculo diferencial, así como una madurez de razonamiento matemático en los alumnos para poder entender y aplicar los teoremas y resultados que fundamentan este análisis.

De la revisión a la literatura especializada, se puede identificar que, en la educación media superior en México, a pesar de que se han realizado diversas investigaciones desde diferentes referentes teóricos y metodológicos sobre el estudio del sentido de variación de una función (Zúñiga, 2009; Engler, Vrancken, Gregorini, Müller, Hecklein & Henzenn, 2008; Díaz, 2009; Rey Cabrera, 2016), aún persisten muchas dificultades para la comprensión y manejo de este contenido, tanto en el profesor como en el estudiante. Por ejemplo, Sánchez-Matamoros, García, & Llinares (2008), Russo (2016), documentan las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en cuanto a la comprensión, construcción e interpretación de los conceptos básicos del cálculo, tales como el concepto de función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. También, Engler & Vrancken (2002), observaron que los alumnos presentan dificultades para resolver problemas que involucran conceptos fundamentales del cálculo como: primera y segunda derivada y sus relaciones con el crecimiento y decrecimiento de una función, concavidad y convexidad, puntos de máximo y mínimo, y de inflexión. Por otro lado, en un estudio hecho por Valero (2003) encontró que estudiantes de bachillerato quienes habían abordado ya el tema del análisis de funciones, identificaron las funciones crecientes con funciones positivas y las decrecientes con funciones negativas.

Por lo tanto, hemos planteado el siguiente **problema de investigación:** Existen dificultades en estudiantes de nivel medio superior sobre la comprensión de los conceptos y teoremas que fundamentan el estudio del sentido de variación, la determinación de los extremos y la construcción de las gráficas de las funciones.

Pregunta de investigación. ¿Qué elementos teóricos y metodológicos permiten elaborar una ID para el tratamiento de los conceptos, teoremas y procedimientos para el estudio del sentido de variación, determinación de extremos y construcción de gráficas de funciones en la enseñanza del cálculo en el nivel medio superior?

Fundamentación teórica

La presente investigación se sustenta en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) desarrolladas por G. Brousseau e Y. Chevallard, respectivamente, ya que estas teorías se adaptan a los procesos que se pretenden utilizar en el desarrollo de las actividades e interacciones en el aula y enmarcan a la Ingeniería Didáctica utilizada en este proceso de estudio como metodología de investigación. Según lo descrito por Chevallard, la TTD considera la transformación que siguen los saberes desde su génesis, su constitución como un saber científico y su transformación en un saber escolar según los roles de los involucrados en la modelización que en ella se hace de la actividad matemática del matemático, la actividad matemática y didáctica del profesor y la actividad matemática del alumno, en relación a un saber específico.

En el proceso de transmisión de un conocimiento determinado, Brousseau plantea el diseño de Situaciones que incluyan un conjunto de actividades, en las que se propicie una génesis ficticia de los conocimientos que hagan que el estudiante recorra un camino similar al que recorren los matemáticos (proceso descrito por Lakatos), en el que el error y la existencia de contradicciones en los argumentos (puestas en evidencia por los contraejemplos) no sean vistos sólo como una contingencia, sino que adquieran un estatus positivo propiciando que los estudiantes examinen sus argumentos, diagnostiquen sus problemas y los superen, den significados a los contenidos, los procedimientos o los procesos cognitivos.

Buscando convertir la clase en una micro-comunidad científica dentro de la cual los conocimientos (conceptos y resultados) se construyan como herramientas necesarias y óptimas para superar los obstáculos que se plantean en ellas, dando lugar a las diferentes etapas a-didácticas y didácticas (situaciones de acción, de formulación, de validación y de institucionalización) descritas en la teoría. En donde los alumnos formulen, de manera individual o por equipos, sus propuestas que contribuyan a la superación de los obstáculos, las sometan a discusión con sus pares, sean validadas o cuestionadas a través de contraejemplos, estableciéndose una dialéctica entre la validación y la refutación similar a la que describe Lakatos (1976) en su modelo de la actividad del matemático y la lógica del descubrimiento en matemáticas.

Sin embargo, en el contexto escolar, Locia (2000) afirma que, muchos estudiantes e incluso profesores manifiestan desconocimiento en el razonamiento matemático, en particular, no tienen el hábito de buscar un contraejemplo para poner a prueba una afirmación que se necesita aplicar, pero cuya veracidad no ha sido establecida en la clase. Por otro lado, Morales (2008), Zazkis & Chernoff (2008), Klymchuk (2010), García & Morales (2013), coinciden en que la formulación de conjeturas y el empleo de contraejemplos, permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, y disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje, por lo que es necesario introducir en el aula escenarios que propicien el aprovechamiento de las virtudes pedagógicas de los contraejemplos.

Para el desarrollo de esta investigación se utiliza la metodología de la Ingeniería Didáctica (ID), la cual en la etapa de los análisis preliminares incluye la realización de un estudio epistemológico, didáctico y cognitivo sobre el objeto de estudio, en nuestro caso el relacionado al sentido de variación de funciones de variable real. En este sentido estaremos interesados en analizar el desarrollo histórico-epistemológico de las diferentes concepciones que se han ido sucediendo de los saberes involucrados en el estudio del sentido de variación de las funciones y las disparidades y coincidencias entre el saber en construcción, el saber científico y el saber enseñado. En el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, se analiza el papel que juegan los libros de texto a través de las caracterizaciones o comunicaciones que de ellos extrae el profesor. Del análisis de las concepciones de los estudiantes, a través de un estudio se obtiene información del alumno referente a la aplicación y uso correcto de las propiedades, conceptos, teoremas o definiciones.

Resultados y conclusiones

Elementos histórico-epistemológicos, didácticos y cognitivos de la noción de Sentido de Variación

Respecto a los hallazgos obtenidos de este análisis, hoy día encontramos que el teorema de Rolle fue demostrado primero en álgebra (en 1691) para contribuir a dar solución al problema de la existencia de raíces de ecuaciones de grado arbitrario, y las primeras demostraciones del teorema que asocia el sentido de variación de una función y el signo de su derivada no lo utilizaban.

Lagrange (1797) enuncia y demuestra el siguiente lema (p. 45):

> *Si una función prima de z tal que $f'z$ es siempre positiva para todos los valores de z, desde $z = a$ hasta $z = b$, b siendo $> a$, la diferencia de las funciones primitivas que corresponden a estos dos valores de z, a saber, $fb - fa$, será necesariamente una cantidad positiva.*

Es importante mencionar que Lagrange rechazaba fundamentar el análisis a partir de la noción de límite, de cantidades evanescentes o de infinitésimos, poniendo como concepto central, el desarrollo de una función en serie de potencias y definiendo a la derivada como el coeficiente del término de primer grado en ese desarrollo. Este lema le permitía determinar cotas para el resto de la serie, principio que él considera fundamental y del cual se desprende el resultado que actualmente se conoce como teorema de los incrementos finitos. Para la demostración de este lema, Lagrange evade utilizar la noción de límite y utiliza otro "principio básico" enunciado y demostrado casi al inicio de su obra (p.12) el cual "se debe ver […] como uno de los principios fundamentales de la teoría": en el desarrollo en serie de una función, se puede tomar siempre i suficientemente pequeño para que un término cualquiera sea más grande que la suma de los términos que le siguen.

Por otro lado, a diferencia de Lagrange, Cauchy funda sus trabajos de rigorización del análisis en la noción de límite. Cauchy (1823) define la derivada como un límite y plantea el siguiente problema relacionado con el teorema que vincula el signo de la derivada con el sentido de variación de una función (p. 37):

> ***Problema.*** *Suponiendo que la función $y = f(x)$ sea continua respecto a x en la vecindad del valor particular $x = x_0$, se pide si, a partir de este valor, la función crece o disminuye, mientras que se hace crecer o disminuir la variable misma.*

Podemos resumir la demostración dada por Cauchy de la siguiente manera: primero, un paso de lo infinitesimal (la positividad de $f'(x_0)$) a lo local (de la positividad de $f'(x_0)$ deduce la positividad de $\Delta y/\Delta x$ para valores muy pequeños de Δx). Después pasa de lo local a lo global sobre un intervalo. En el paso de lo infinitesimal a lo local, hoy en día sabemos que no es posible deducir el crecimiento de f en una vecindad de x_0, del hecho de que $f'(x_0)$ sea positivo. Ello puede hacerse evidente con el siguiente contraejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En efecto, puede demostrarse que esta función definida, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ satisface que $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, sin embargo no es creciente, según la definición de función creciente que conocemos en la actualidad, en ninguna vecindad de 0.

En las pruebas dadas por Lagrange y Cauchy, se vislumbra que ambos tienen concepciones implícitas de lo que es una función creciente (nunca dan una definición), pero éstas no coinciden exactamente. La concepción de Lagrange es más cercana a la que encontramos actualmente en los libros de texto de nivel superior, pues a partir de la hipótesis de la positividad de la derivada y de la desigualdad $b > a$, deduce que la diferencia $f(b) - f(a)$ es positiva.

Por otro lado, la definición implícita de Cauchy de una función creciente se puede formular de la siguiente manera: una función f definida en un intervalo I es una función creciente, si para cualquier elemento a de I, existe una vecindad $V(a)$ tal que para cualquier x en $V(a)$, el orden entre $f(a)$ y $f(x)$ es el mismo que entre a y x. La definición de Lagrange es global y puntual y se refiere a dos puntos dados (arbitrariamente, y de manera independiente); en la definición de Cauchy, las propiedades locales se mantienen en una vecindad de cada punto dado arbitrariamente. Se puede demostrar, no sin dificultad, que ambas definiciones son equivalentes desde un punto de vista matemático. Sin embargo, según Chorlay (2007) difieren significativamente, tanto desde un punto de vista epistemológico (en el que, por ejemplo, se pone de relieve la diferencia entre propiedades locales y globales), como desde un punto de vista cognitivo.

La primera “definición” explícita de función creciente, la encontramos con Ampère (1924) enunciada en los siguientes términos (p. 11):

> *Se dice que una función continua es creciente en el intervalo de dos valores de la variable independiente, cuando ella aumenta a medida que se dan a esta variable valores cada vez más grandes, y que irá por consecuente disminuyendo, si se le dan a la misma variable valores cada vez más pequeños*

Observemos que más que una definición, se trata de una descripción de la variación intuitiva de cómo cambian dos cantidades una de las cuales depende de la otra (al aumentar una la otra también, si se trata del crecimiento o al aumentar una, la otra disminuye, si se trata del decrecimiento). A esto Chorlay (2007), lo llama “el estilo narrativo”, el cual es anterior a la formalización.

Es sorprendente que la noción de sentido de variación de una función no llegó a definirse, tal como se conoce en la actualidad, sino hasta 1912 por Osgood. Así, la noción de crecimiento y de decrecimiento de una función de variable real, durante mucho tiempo evocada de una manera puramente narrativa (Chorlay, 2007) y que se encuentra de manera explícita por primera vez en los trabajos de Ampère, encuentra en Osgood una formulación puramente puntual adquiriendo, hasta ese momento, el estatus de una verdadera definición. La concepción que subyace en ella, es la de transformación de un conjunto ordenado en otro conjunto ordenado, de tal manera que el orden se preserva, si la función es creciente o se invierte si la función es decreciente.

Las definiciones y los teoremas en los libros de texto

En el proceso de búsqueda de las definiciones y su inserción en los libros de texto más representativos al menos en nuestro país, identificamos esencialmente cuatro definiciones de función creciente:

Definición 1: Una función f es creciente en un conjunto S, si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de S, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definición 2: Una función f se llama *creciente*, cuando a un mayor valor del argumento x corresponde un mayor valor de la función. Dicho de otro modo, f es creciente si al aumentar x, aumenta $f(x)$ y si al disminuir x, disminuye $f(x)$.

Definición 3: Una función es creciente en el intervalo (a,b), si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a,b)$.

Definición 4: Se dice que una función $y = f(x)$ es creciente para $x = a$ si en un entorno de a se verifica que: Si $x > a$ es $f(x) > f(a)$ y si $x < a$ es $f(x) < f(a)$. Se dice que una función $y = f(x)$ es creciente en un intervalo si es creciente en todos sus valores del intervalo.

Las definiciones de función decreciente se formulan de manera análoga.

En términos generales, podemos decir que la definición 1 coincide con la dada por Osgood (1912). Observemos que la idea de función en la que se basa esta definición 1, es aquella de que una función es una aplicación o transformación entre dos conjuntos, por lo que, las propiedades de variación son propiedades de las aplicaciones entre dos conjuntos ordenados. Hemos dicho que la concepción que subyace en ella es aquella de que el orden se preserva, si la función es creciente o se invierte si la función es decreciente. Encontramos esta definición, con ciertas variaciones, en los libros (Apóstol, 1967; Swokowsky, 1982; Leithold, 1992; Ortiz, 2009; Stewart, 2007; Ortiz, Ortiz y Ortiz, 2011; Arteaga y Espinoza 2014; Valdés, 1983).

La **definición 2**, puede ser equiparada con la definición dada por Ampère en 1824, y hemos dicho que más que una definición es la expresión o la explicación, en términos informales, de la idea de crecimiento y de decrecimiento acorde con la idea intuitiva de variación dinámica de las funciones que se mencionó en párrafos anteriores. Esta definición es presentada por los libros (Granville, 2007; Ibañez y García, 2007; Cuéllar, 2007; Contreras, 2014; Garza, 2015; Ayres, 1971; Ayres y Mendelson, 2001).

La **definición 3**, introduce fuertes restricciones al campo de aplicación de las funciones a las cuales se les puede considerar como crecientes o decrecientes. La primera de ellas se refiere a que condiciona a que las funciones deben estar definidas en un intervalo, mientras que en la definición 1 se consideran funciones definidas en un conjunto numérico S arbitrario. La otra restricción, más fuerte aún que la primera, es la exigencia de diferenciabilidad en los puntos interiores del intervalo dominio. Más que una definición, se trata en realidad de la condición que se establece en el teorema que vincula el signo de la derivada con el sentido de variación de la función. Encontramos esta definición en los textos de (Aguilar, et. al., 2010; Arteaga y Espinoza, 2014; Silva, 2014; Garza, 2015).

En la **definición 4**, se define primero el crecimiento de una función de manera puntual y, a partir de ella, se define la noción de crecimiento global introduciendo un cuantificador universal para los puntos de un intervalo. Se observa en la definición, la condición de que las funciones deben estar definidas en un intervalo, condición que es absolutamente necesaria y no es posible debilitarla más sustituyendo el intervalo por un conjunto arbitrario, pues si el dominio es un conjunto no conexo. Es posible demostrar, que, en un conjunto arbitrario, si una función es creciente en el sentido de la definición 1, entonces es también creciente en el sentido de la definición 4, pero la afirmación recíproca no se cumple (contraejemplo: $f(x) = -\frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$). Sin embargo, en un dominio conexo, ambas definiciones son equivalentes. Esta definición solo se encontró en Sántalo y Carbonell (2011).

Análisis de los principales teoremas y sus resultados

Solo los textos de (Apóstol, 1967; Leithold, 1982; Swokowski, 1982; Valdés, 1983; Ayres y Mendelson, 2001; Piskunov, 2008; Ayres, 1971); (que en esencia se utilizan en los primeros años de universidad), explicitan los teoremas que vinculan el signo de la derivada con el sentido de variación de una función, sobre ellos hacemos las siguientes observaciones. Estos textos presentan las demostraciones clásicas; es decir, lo demuestran a partir del teorema de los incrementos finitos. Además, presentan explicaciones gráficas, en las que, intuitivamente pretenden hacer evidente que, en los puntos, de los intervalos en los cuales las funciones son crecientes, las rectas tangentes a las curvas que representan las funciones, tienen pendiente positiva e inmediatamente la asocian con la derivada de la función. Los libros (Ortiz, 2007; Stewart. 2007; Ortiz, Ortiz y Ortiz, 2011; Contreras, 2014;) presentan el teorema sin hacer la demostración.

Un detalle importante**:** en los libros de Ayres (1971) y Granville (2007), el teorema se enuncia en un solo sentido. Sin embargo, las demostraciones que ambos presentan, son idénticas (salvo quizás ciertas diferencias de notación) a la que presentada en Cauchy (1823). Hemos mencionado en el estudio epistemológico, que esta demostración contiene un paso erróneo. Nos referimos al paso en el que se concluye que a partir de la positividad de f' en un punto x_0 se deduce el crecimiento de la función f en una vecindad de x_0. En el caso del texto de Ayres y Mendelson (2001), este error es subsanado y se presenta la demostración clásica utilizando el teorema de los incrementos finitos.

Sobre las producciones de los estudiantes

En un estudio previo realizado con estudiantes de primero de licenciatura (quienes habían abordado ya este contenido), se les pidió expresar lo que entendían por una función creciente o decreciente, ninguno de ellos consiguió definir de manera correcta estas nociones, utilizando expresiones como “si la gráfica sube, la función es creciente y si baja es decreciente”. Cuando se les mostró la gráfica de una función monótona a trozos, que era creciente en algunos intervalos y decreciente en otros, en particular una parábola, respondieron que, “ubicándonos en el vértice de la parábola, si caminamos hacia la izquierda, la función es creciente, y si caminamos hacia la derecha, la función también es creciente”. Al preguntarles cómo se ordenaban los números $f(-1)$ y $f(1)$, sabiendo que f es una función decreciente, afirmaban que $f(-1)$ tenía que ser menor que $f(1)$ porque -1 es un número negativo. De manera general, les resultó muy complicado comparar imágenes de una función, solo con tener la información de la monotonía. A nivel de procedimientos, también se encontraron dificultades para analizar sobre ejemplos concretos, el sentido de variación de una función.

Conclusiones

El estudio histórico-epistemológico nos arrojó que existieron diferentes concepciones acerca del sentido de variación de una función y que la definición actual fue dada hasta en el año 1912. En ella subyace la idea de una función como una transformación abstracta entre dos conjuntos ordenados. Sin embargo, esta idea de las funciones no es abordada con profundidad en el nivel medio superior, si acaso se hace referencia a ella al inicio de la introducción del tema, cuando se ilustran los diferentes tipos de relaciones (funcionales o no) mediante diagramas de flechas. La idea de función que prevalece en las matemáticas del bachillerato, es aquella (más intuitiva) de “cantidad variable” y “dependencia entre dos cantidades” en la que dos cantidades x y y tienen variaciones dependientes. La revisión de los libros de texto, nos puso en evidencia la poca importancia que se les da en ellos a las definiciones y a los teoremas, encontrándose también, en algunos textos, las concepciones que se identificaron en el estudio histórico epistemológico; dando como consecuencia que los procedimientos que se utilizan para analizar el sentido de variación de funciones se presenten como una secuencia mecánica de pasos. Todo esto dificulta la apropiación de estas definiciones y estos teoremas, incluso a largo plazo, y este hecho se hizo patente, en el estudio con estudiantes, ya que encontramos que se apegan a las caracterizaciones encontradas en los libros de texto dejando de lado las definiciones y teoremas. Esto nos indica que en la Ingeniería Didáctica se hará necesaria, una estrategia de transición que vaya desde la comprensión puramente intuitiva de la variación de una cantidad que depende de la variación de otra (la cual es una idea dinámica), hasta la formulación de la definición formal de función creciente (definición 1), en la cual subyace una idea puramente estática, de aplicaciones o transformaciones entre los conjuntos ordenados (y no expresa en absoluto, idea alguna de "variación").

Referencias y bibliografía

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. & Reyes, R., (2010). Cálculo Diferencial. México: Progreso.

Ampère, A. M. (1824). Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral, CRH cours : A3a 174, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique. P. 12.

Arteaga, S. & Espinoza, J. (2014). Cálculo. México: Fondo de cultura económica.

Apóstol, T. (1984). Calculus. México: Reverté.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, I Moreno, y P. Gómez Gómez, P. (Ed.) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática (pp. 33-59). Bogotá, Colombia, Grupo Editorial Iberoamérica.

Ayres, F. (1967). Cálculo diferencial e integral. México. Mc Graw Hill.

Ayres, F. & Mendelson, E. (2001). Cálculo. México: Mc Graw Hill.

Brousseau, G. (1978), "La cours a 20", en Theorie des situations didactiques (1998) La Pensee Sauvage, pp. 24-43. Una primera version, de 1978, en Etude locale des processus d'acquisition en situation scolaire, Etude sur l'enseignement elementaire (Cuaderno 18,7-21). Bordeaux, IREM y Universidad de Bordeaux 1.

Castillo, M. (2009). Un estudio de concepciones del concepto de función en estudiantes de ingeniería. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22, 419–427. Cauchy, A. (1821). "Analyse Algébrique". Cours d'Analyse de l'Ecole royale polytechnique. L'Imprimerie Royale, Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi.

Cauchy, A. (1823). Resumé des lecons d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1ère partie Analyse Algebraique. Paris: Gauthiers-Villars.

Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 1, 146-157.

Chorlay, R. (2007) La multiplicité des points de vue en Analyse elementaire comme construit historique, in Histoire et enseignement des mathématiques: erreurs, rigueurs, raisonnements, E. Barbin y D. Bénard (eds). Lyon: INRP, 203-227

Contreras, S. (2014). Cálculo Diferencial. México: Fondo de cultura económica.

Cuéllar, J. (2007). Matemáticas V. Cálculo Diferencial. México: Mc Graw Hill.

Cuevas, C., & Delgado, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? ReCalc, 7, 108-119.

Delgado, M. (2013). Un problema con la concepción de la continuidad de una función. El Cálculo y su Enseñanza, 4, 27-44.

Díaz, M. (2009). Conocimientos de los profesores preuniversitarios de Cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada. El Cálculo y su Enseñanza, 1, 75-90.

Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M. I., Müller, D., Hecklein, M., & Henzenn, N. (2008). Estudio del

comportamiento de la función a partir de la derivada. Alme, 21,466–476.
García, O. & Morales, L. (2013). Ideas para enseñar: El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 35, 161-175.
Garza, B. (2015). Cálculo diferencial. México: Pearson.
Granville, W. A. (2007). Cálculo diferencial e integral. México: Limusa.
Ibañez, P. & García, G. (2007). Matemáticas V. Cálculo Diferencial. México: Cosegrat.
Klymchuk, S. (2010). Counterexamples in calculus. EEUU. Mathematical Association of América.
Lagrange, L. (1797)Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégages de toute considération d'infiniment petits ou de'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies en el 9º cuaderno del Journal de l'École Polytecnique. Paris: République.
Lakatos, I. (1976). Pruebas y refutaciones: ensayo sobre la lógica del descubrimiento matemático. Editorial Alianza Universidad.
Leithold, L. (1992). El cálculo con Geometría Analítica. México: Harla.
Locia, E. (2000). Les contre – exemples dans l`enseignement des mathèmatiques. (Tesis Doctoral), Universidad Paul Sabatier. Touluse, Francia.
Morales, A. (2008). El papel que juega el contraejemplo en la construcción de las definiciones en matemáticas: El caso de la función convexa. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, México.
Ortiz, F. (2009). Cálculo Diferencial. México: Ed. Patria.
Ortiz, F.; Ortiz, F. & Ortiz, F. (2011). Cálculo diferencial. México: Ed. Patria.
Osgood, W. F. (1912). Lehrbuch der Funktionentheorie. Berlín: B. G. Teubner.
Pineda, C. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.
Piskunov, N. (2018). Cálculo diferencial e integral. México: Limusa
Rey Cabrera, M. (2016). Propuesta didáctica para la formación del profesorado: el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática. (Tesis de Maestría). México: Cinvestav.
Reséndiz, E. (2006). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 9(3), 435–458.
Rubí, G., Moreno, M., Pou, S., & Jordán, A. (2010). Problemática persistente en el aprendizaje de Cálculo Caso de la Facultad de Ciencias, UABC, 1–10.
Russo, C. (2016). Diseño de una secuencia didáctica para el estudio del concepto de función utilizando software de geometría dinámica. (Tesis de Maestría). México: Cinvestav.
Ruiz, E., Hernández, J., & Gutiérrez, J. (2015). Aplicaciones en dispositivos móviles enfocadas al estudio de conceptos de cálculo, El cálculo y su enseñanza. 6, 123–144.
Salinas, P., & Alanis, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institucion educativa. Relime. 12(3), 355-382.
Sánchez-Matamoros, G., García, M. & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. Relime. 11(2), 267-296.
Sántalo, M. & Carbonell, V. (2011). Cálculo diferencial. México: Diana
Silva, J. (2014). Cálculo Diferencial. México: Anglo.
Stewart, J. (2007). Cálculo Diferencial e Integral. EEUU: Thomson.
Swokowski, E. (1982). Cálculo con Geometría Analítica. EEUU: Wadsworth Internacional Iberoamérica.
Valdés, C. (1983). Análisis matemático, Tomo II. La Habana: Editorial Pueblo y Educación
Valero, S. (2003). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. (Tesis Doctoral). CICATA-IPN. México.
Zazkis, R., & Chernoff, E. (2008). What makes a counterexample exemplary?. Educational Studies in Mathematics, 68, 195-208.
Zúñiga, M. (2009). Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. en alumnos de un curso de cálculo I. (Tesis de maestría) UPN. Tegucigalpa, Honduras.