



Una aproximación al álgebra escolar desde la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación

Sebastián **Castañeda** Martínez
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia

sebastian.castaneda.martinez@correounivalle.edu.co

Carolina **Castañeda** Martínez
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia

castaneda.carolina@correounivalle.edu.co

Ligia Amparo **Torres** Rengifo ¹
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia

ligia.torres@correounivalle.edu.co

Resumen

Esta investigación tiene como propósito favorecer el acercamiento al álgebra en estudiantes de grado 8° de la Educación Básica colombiana a través de la Resolución de Problemas aritméticos haciendo uso del concepto de ecuación. Para lo anterior, se realiza el diseño y puesta en acto de una propuesta de aula que integra aspectos didácticos, curriculares y matemáticos. La propuesta consta de dos situaciones, cada una con cuatro problemas y una serie de tareas, que permiten guiar a los estudiantes en el proceso de resolución para caracterizar sus tipos de razonamiento y desempeños. La estrategia metodológica es de tipo cualitativa, ya que permite la recolección de información basada en la observación de los comportamientos, características y respuestas de los estudiantes frente a las situaciones propuestas, para la posterior interpretación de los resultados.

Palabras clave: Resolución de Problemas, ecuación, pensamiento aritmético, pensamiento algebraico, didáctica.

¹ Directora del Trabajo de Grado

Planteamiento del problema

Las investigaciones realizadas en los últimos años en el campo de la Educación Matemática (Freudenthal, 1983; Gallardo y Rojano, 1988; Brousseau, 1989; Kieran, 1992; Rojano, 1994; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Puig, 1998; Socas, 2007; Socas 2011; Castro 2012) dan cuenta de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Las dificultades presentes en los estudiantes parecen manifestarse en la falta de comprensión y funcionalidad de ese conocimiento, lo cual se evidencia por medio de errores conceptuales y procedimentales, que no permiten que los estudiantes analicen fenómenos matemáticos, interpreten resultados, solucionen problemas relacionados con la vida diaria, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas, entre otros.

Particularmente, en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, estas dificultades son categorizadas por Castro (1994), en dificultades intrínsecas al objeto (epistemológico), dificultades inherentes al propio sujeto (ontológico) y dificultades en las técnicas de enseñanza (didáctico). Las dificultades intrínsecas al objeto se deben en gran medida a la naturaleza misma del álgebra, es decir, a su lenguaje formal, que se dota de símbolos y reglas (sintaxis), lo cual genera en los estudiantes errores de tipo procedimental y conceptual, como por ejemplo, errores al resolver problemas algebraicos (convertir los enunciados del lenguaje natural al lenguaje formal), errores con el uso de paréntesis, concebir los valores de las incógnitas solamente como números u objetos, errores al considerar el signo igual como se hacía en aritmética, es decir, tener la noción que a la izquierda del signo igual se encuentra una operación mientras que a su derecha se encuentra el resultado (como $2 + 7 = 9$ pero $2x + 7y \neq 9$ ó $9xy$), en lugar de verlo como un signo de equivalencia entre dos polinomios. Las dificultades inherentes al sujeto se enmarcan en la complejidad que supone la abstracción y la generalización de los conceptos algebraicos y las dificultades presentes en las técnicas de enseñanza se deben a la forma tradicional de enseñar de los docentes.

Por lo anterior, se presenta la Resolución de Problemas como una alternativa para la aproximación al álgebra, expuesta por Bednarz, Kieran y Lee (1996), que permite diferenciar y caracterizar los problemas de tipo algebraico (transformar cantidades y encontrar relaciones entre cantidades) y de tipo aritmético (buscar cantidades conocidas y desconocidas), es decir, que existe un puente significativo, puesto que los problemas aritméticos abordados desde lo algebraico, podrían influenciar un tránsito de la aritmética al álgebra más flexible, ya que analizar un problema desde los dos dominios, permite identificar nuevas características en la estructura algebraica. Por lo tanto, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo favorecer el acercamiento al álgebra escolar en estudiantes de grado 8° de la Educación Básica de una Institución particular de la ciudad de Santiago de Cali, a través de la resolución de problemas aritméticos haciendo uso del concepto de ecuación?

Marco de referencia conceptual

La fundamentación de los referentes conceptuales se hace desde las perspectivas didáctica, curricular y matemática, que permiten sustentar la problemática planteada, el diseño de la propuesta de aula y análisis de los resultados obtenidos de su implementación, en estudiantes de grado 8° de la Educación Básica Secundaria. En la primera perspectiva se sitúan las dificultades que se presentan en el tránsito de la aritmética al álgebra, al tener como eje central la resolución de problemas desde un enfoque metodológico para el desarrollo de la propuesta de aula. La segunda se aborda desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). En la tercera perspectiva se referencian algunos conceptos matemáticos que emergen en el diseño de la propuesta de aula, donde el foco principal es la ecuación de primer grado con una incógnita.

En la primera perspectiva se organizan dos aspectos fundamentales, el primero son las dificultades presentes en el tránsito de la aritmética al álgebra mencionadas anteriormente, en el segundo se precisan elementos de la resolución de problemas abordados en Bednarz y Janvier (1996), que procura esclarecer las condiciones de la evolución del razonamiento algebraico en un contexto de resolución de problemas, al ser esta una de las perspectivas más significativas desde la historia y enseñanza del álgebra. Además, permite analizar los problemas planteados a los estudiantes, de tal forma que se gradúe su complejidad y así observar un progreso, teniendo en cuenta los procedimientos disponibles que poseen los estudiantes para manipular y llegar a la solución de dichos problemas. Por otra parte, proporciona parte de la caracterización del tipo de problemas que se pretenden abordar en la propuesta de aula, es decir, permite observar la estructura de los problemas propuestos, con el objetivo de construir problemas con contextos reales. Además, la metodología cualitativa de entrevista semi-estructurada utilizada permite analizar el tipo de pensamiento que desarrollan los estudiantes al resolver problemas.

En la segunda perspectiva los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) aportan elementos claves para el desarrollo y consolidación de la propuesta de aula, puesto que hacen énfasis en desarrollar pensamiento matemático en los estudiantes e invitan a cuestionarse el para qué enseñar y no qué enseñar. Particularmente, en los Procesos Generales, Conocimientos Básicos y Contextos se centra la atención en la resolución y planteamientos de problemas, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y los contextos de la vida diaria respectivamente.

En adición, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) proponen una estructura desde una coherencia vertical y horizontal de las competencias que se pretenden desarrollar en los estudiantes, categorizadas por grados de escolaridad, es decir, 1° a 3°, de 4° a 5°, de 6° a 7°, de 8° a 9°, de 10° a 11° y por tipo de pensamiento matemático. Para fines de este trabajo se tendrán en cuenta la coherencia vertical y horizontal del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos de grado octavo a noveno, relacionados con el proceso de resolución de problemas en un contexto real.

Por último, en la tercera perspectiva se presentan conceptos netamente matemáticos acerca de los polinomios y las ecuaciones, que son de vital importancia en la construcción de la propuesta de aula, y el enfoque esperado desde la resolución de problemas en el tránsito de la aritmética al álgebra, pretende hacer que los estudiantes aborden estos conceptos.

En conclusión, para el diseño de la propuesta de aula se resaltan y sintetizan aspectos relevantes desde las tres perspectivas planteadas anteriormente puesto que permite articular y relacionar cada una de estas perspectivas para la consolidación de la propuesta basada en la resolución de problemas. La figura 1 evidencia lo anterior así:

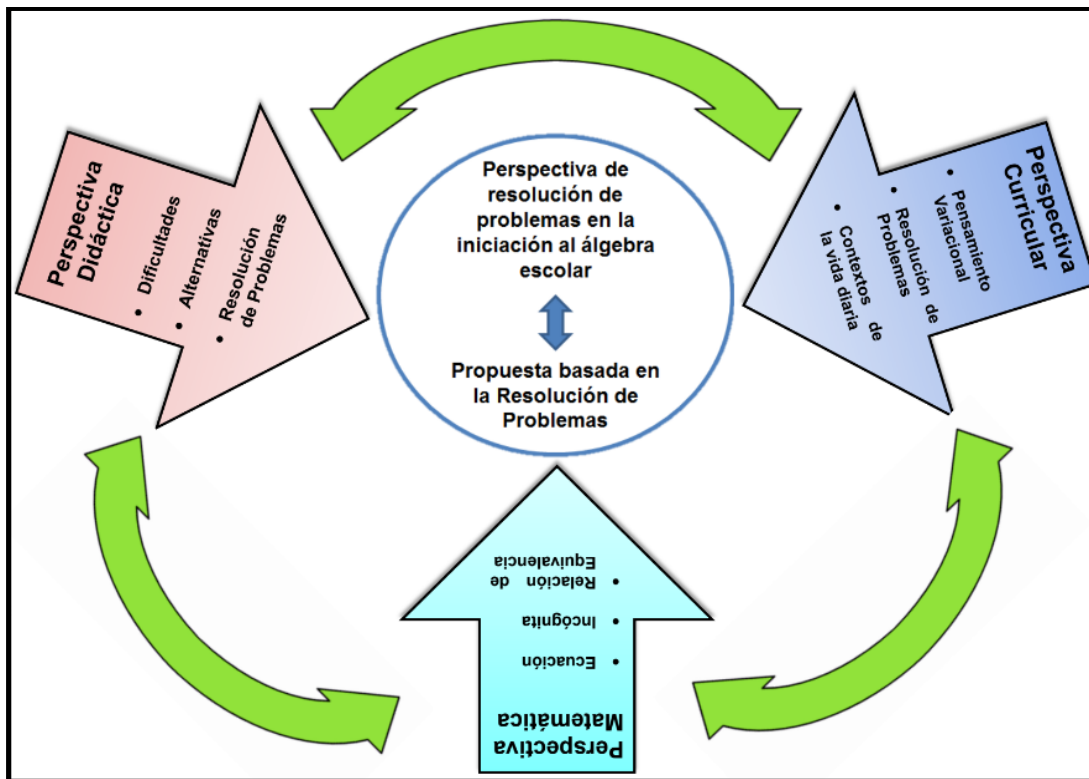


Figura 1. Diagrama de la relación entre las perspectivas didáctica, matemática y curricular.

Metodología

Las estrategias metodológicas que se utilizan son de tipo cualitativas, ya que permiten la recolección de información basada en la observación de los comportamientos, características y respuestas de los estudiantes frente a las situaciones propuestas, para la posterior interpretación de los resultados. Particularmente, se centra la atención en el estudio de casos y la entrevista clínica semi-estructurada. La primera, es una estrategia de investigación que permite describir y caracterizar situaciones, conocimientos, acciones, sin hacer juicios, además tiene la intencionalidad de obtener información, resultados teóricos y prácticos, con el fin de analizar las experiencias de los estudiantes. La segunda estrategia de investigación se complementa con la primera, debido a que permite reunir opiniones e ideas espontáneas y reales de los estudiantes con el fin de analizar los procesos de razonamiento que poseen, por medio de preguntas estructuradas con la flexibilidad de cambiarlas con base en las respuestas de los entrevistados (Camargo, 2018). El trabajo se desarrolla en cuatro fases que son, documentar la problemática, articulación del marco de referencia conceptual y diseño experimental, implementación y análisis de los resultados y conclusiones y recomendaciones didácticas.

Sobre la experimentación

La propuesta de aula se conforma por dos situaciones, cada una con cuatro problemas, dos problemas con composición homogénea de dos relaciones aditivas, un problema con composición homogénea de dos relaciones multiplicativas y el último problema con composición no homogénea de dos relaciones, con diferentes vínculos entre las relaciones en cada situación. La situación 1 tiene como dominio numérico el conjunto de los números naturales y la situación 2 tiene como dominio numérico el conjunto de los números racionales positivos. En adición,

cada problema contiene una serie de tareas que tienen como propósito direccionar al estudiante en el proceso de resolución para caracterizar sus tipos de razonamiento y desempeños.

Para la construcción de la propuesta de aula se establece un **análisis preliminar** que determina los criterios de análisis para el tránsito de problemas aritméticos a algebraicos que son: *el dominio numérico, la naturaleza de los datos (conocidos o desconocidos), el contexto, la estructura de las relaciones involucradas, la complejidad relativa de los problemas con respecto a las relaciones involucradas y las estrategias espontáneas de los estudiantes*. Además, se caracterizan los problemas en **problemas de repartición desigual** y se clasifican por factores de complejidad en cuanto a la naturaleza de las relaciones: *Composición homogénea de dos relaciones aditivas, composición homogénea de dos relaciones multiplicativas y composición no homogénea de dos relaciones*.

Por otra parte, se seleccionaron 30 estudiantes de grado 8° de la Institución Educativa Técnico Industrial 20 de Julio, de la ciudad de Santiago de Cali, Colombia, para la implementación de la propuesta de aula. Las edades de los estudiantes oscilan entre los 13 y 15 años, pertenecientes a un nivel socioeconómico medio. Los estudiantes tienen conocimientos básicos en aritmética que les permite resolver los problemas planteados en la propuesta de aula. Cabe resaltar que los estudiantes no han tenido un acercamiento al álgebra simbólica.

Un ejemplo del contenido de las situaciones es:

SITUACIÓN 1: FIESTA DE LOS NIÑOS Y PROBLEMAS ARITMÉTICOS.

En el mes de octubre, en muchos países se realizan actividades dedicadas a los niños y niñas. Entre esas actividades están: compartir dulces y colocarse el disfraz de su personaje favorito. La Institución Educativa Técnico Industrial 20 de Julio no es la excepción. Por ello, los profesores de primaria realizan actividades acordes a esta fecha. Particularmente, la profesora Mayerleny acompaña a sus estudiantes de grado tercero, cuarto y quinto de primaria disfrazados a pedir dulces por todos los salones.

Ayuda a la profesora a resolver las situaciones que se le presentaron.

Problema 1: Grupos de estudiantes y problema con composición homogénea de dos relaciones aditivas.

La profesora Mayerleny necesita saber cuántos estudiantes asistieron al colegio en los grados 3°, 4° y 5° antes de comenzar la actividad de pedir dulces por todos los salones. Si se sabe que en los tres grados asistieron 90 estudiantes, y el grado 3° tiene 16 estudiantes más que el grado 5°, y el grado 4° tiene 10 estudiantes más que el grado 3°. ¿Cuántos estudiantes asistieron en cada grado?

Tareas

Indica cómo se conforma la cantidad total de estudiantes.

1. a. De acuerdo con el problema, indica si los datos involucrados permiten calcular la cantidad de estudiantes de cada grado o si por el contrario hacen falta datos.
b. Explica tu respuesta.
2. Sí Carolina, estudiante de grado 4° afirma que la cantidad de estudiantes de grado 5° es de 20

estudiantes.

- a. Escribe la validez de esta afirmación.
 - b. Explica tu respuesta.
3. Indica cuál de los grados tiene el mayor número de estudiantes.
 4. Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de 3°.
 5. Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de 4°.
 6. Indica cuántos estudiantes asistieron en los grados 3°, 4° y 5°.

Problema 2: Recogiendo dulces y problema con composición homogénea de dos relaciones aditivas.

Los grados 3°, 4° y 5° recogieron 300 dulces. Los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°, y los estudiantes de grado 5° recogieron 50 dulces más que los estudiantes de grado tercero. ¿Cuántos dulces recogió cada grado?

Tareas

1. Daniel estudiante de grado 4°, afirma que los grados 3°, 4° y 5° tienen la misma cantidad de dulces, es decir 100 dulces para cada grado.
 - a. Escribe si esta afirmación es verdadera o falsa.
 - b. Explica tu respuesta.
2. Según el problema los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°. De acuerdo a la afirmación anterior los estudiantes de grado 4° recogieron 100 dulces. Explica esta situación.
3. Escribe como se calcula el total de dulces recogidos de acuerdo a lo que recogió cada grupo.
4. Cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 3°
5. Cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5°
6. Si x representa la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 4° completa la siguiente tabla.

Lenguaje natural	Lenguaje algebraico
Cantidad de dulces de grado 4°	x
Cantidad de dulces de grado 3°	
Cantidad de dulces de grado 5°	
Cantidad de dulces entre los tres grados	
Cantidad total de dulces en los tres grados es 300	

7. ¿Cuántos dulces recogió cada grado?

Discusión de resultados

En el análisis preliminar se puede evidenciar que los estudiantes desarrollan estrategias, modelos y convicciones para resolver problemas, los cuales se ven reflejados cuando ellos se

enfrentan a problemas algebraicos. Las concepciones desarrolladas en aritmética son el punto en el cual surgen nuevas soluciones, que pueden ser consideradas como obstáculos o como principios en la construcción del conocimiento, debido a que por una parte los estudiantes tienen arraigado una forma o estrategia para resolver problemas, lo cual puede presentar una resistencia para una evolución del pensamiento aritmético al algebraico o por el contrario pueden ayudar al estudiante a identificar estrategias más efectivas, para reconstruir los conocimientos previos de tal forma que se propicie un acercamiento al pensamiento algebraico.

Se espera que en el momento de la presentación de la comunicación se tengan resultados más contundentes y precisos con relación a los resultados puesto que la propuesta está en desarrollo.

Referencias y bibliografía

- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Aproximaciones al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bednarz, N & Janvier, B. (1996). *Surgimiento y desarrollo del álgebra como una herramienta en la solución de problemas. Continuidad y discontinuidad con aritmética*. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), Aproximaciones al álgebra. Perspectivas para la investigación y enseñanza (pp. 115-136).
- Brousseau, G. (1989), 'Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), Construction des savoirs. Obstacles et conflits, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 41-63.
- Camargo, L. (2018). Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Manuscrito no publicado.
- Castro, E. (1994). "Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)" Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.
- Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. Dordrecht: Reidel. 1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.
- Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Researchs in Didactique dec Mathématiques*, 9, 155- 18.
- Kieran, C. (1992). El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar. En Grows, D.A. (Ed.), *Manual de Investigación en Matemática Enseñanza y Aprendizaje*. Macmillan Publishing Company. New York, pp. 390-419.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). Lineamientos curriculares para matemáticas. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia.
- Puig, L. (1998). Cómo poner un problema en ecuaciones. Valencia. Recuperado de <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>
- Rojano T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y

enseñanza. Enseñanza de las Ciencias 12 (1)

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.