



Estudio de la parábola como lugar geométrico: una forma de ampliar el conocimiento especializado del profesor

Isabel **Torres** Céspedes.
Universidad de Lima
Perú
iztorres@ulima.edu.pe

Elizabeth **Advíncula** Clemente
Universidad de Lima
Perú
eadvincu@ulima.edu.pe

José Carlos **León** Ríos
Universidad de Lima
Perú
Jleonr@ulima.edu.pe

Ángel Homero **Flores** Samaniego.
Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM.
México
ahfs@unam.mx

Resumen

En las escuelas de nuestros países, observamos que los docentes de matemática de educación secundaria tienen dificultades al resolver problemas relacionados con la parábola y su enseñanza está centrada en el tratamiento algebraico de dicha cónica, dejando de lado su condición geométrica. El objetivo de este taller es explorar con material concreto y con el GeoGebra diversas situaciones que afiancen el conocimiento de la parábola como el lugar geométrico y sus propiedades. En este trabajo tomamos en cuenta el enfoque del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTKS) y seguimos una metodología cualitativa que toma en cuenta aspectos de la ingeniería didáctica. Finalmente, esperamos promover la reflexión en los docentes para trabajar los distintos objetos matemáticos con recursos que faciliten la comprensión del objeto matemático haciendo conjeturas y validándolas.

Palabras clave: Conocimiento especializado del profesor, parábola, lugar geométrico, material concreto, GeoGebra.

Introducción

Estamos de acuerdo con Flores y Gaita, C. (2014) cuando indican que el modelo conductista predomina en los planes de formación de profesores de matemática de educación del nivel primaria y secundaria en el Perú. Los actuales escenarios de aprendizaje muestran que existen diversos recursos y estrategias que pueden ser utilizados como apoyo para la enseñanza de la matemática, específicamente la parábola. Nuestra propuesta didáctica está centrada en el aprendizaje de la parábola y dirigida a profesores de educación secundaria. Hacemos uso de material concreto y de tecnología digital, con el objetivo de explorar la condición geométrica de la parábola y algunas de sus propiedades. Las secuencias didácticas ofrecidas en el taller incluyeron actividades con material concreto como papel, hilo, así como el uso de recursos digitales en el aula con el aplicativo Geogebra, con la finalidad de crear ambientes de aprendizajes dinámicos y motivadores que propicien de manera más efectiva el aprendizaje del estudiante. Las actividades propuestas ofrecen diversas situaciones que permitan reflexionar sobre el objeto matemático parábola.

Marco teórico y metodológico

La realización del presente taller tiene como marco teórico el modelo MTSK (por sus siglas en inglés: Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática), propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013).

Este modelo se centra en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas respecto de la enseñanza del contenido, en nuestro caso de la parábola. Tiene dos grandes dominios de conocimiento: conocimiento del contenido matemático (MK, por sus siglas en inglés) y conocimiento didáctico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés). En este taller, nos centramos en el conocimiento matemático (MK) que tiene como prioridad indagar los conocimientos matemáticos de los profesores de educación secundaria en relación con el contenido relativo a la parábola, pues observamos que los docentes en ejercicio presentan muchas deficiencias conceptuales en relación a este contenido, lo que pudimos confirmar cuando analizamos los resultados obtenidos en una evaluación diagnóstica que aplicamos a un grupo de docentes de educación secundaria de nuestros países.

El conocimiento matemático (MK) está compuesto por tres subdominios de conocimiento: conocimiento de los temas (KoT, por sus siglas en inglés), conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM, por sus siglas en inglés) y conocimiento de la práctica matemática (KPM, por sus siglas en inglés).

En la tabla 1, se observa la descripción de cada subdominio del conocimiento matemático (MK).

Tabla 1

Descripción de los subdominios del conocimiento matemático (MK).

MK		
(Conocimiento matemático)		
KoT	KSM	KPM
(Conocimiento del contenido	(Conocimiento de la	(Conocimiento de la práctica

matemático)	estructura matemática)	matemática)
<p>Conocimiento de conceptos y procedimientos matemáticos con sus correspondientes fundamentos.</p> <p>Se concreta en saber matemáticas, conocer definiciones, propiedades, procedimientos, ejemplos específicos, significados y aspectos fenomenológicos asociados al contenido.</p>	<p>Considera la idea de conexión y complejidad del contenido matemático. Las conexiones abarcan las interconceptuales (comprenden vínculos entre ideas o conceptos matemáticos distintos) y temporales (enlazan los conocimientos previos y posteriores con el contenido de enseñanza).</p>	<p>Implica el modo de proceder en matemáticas. Incluye el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en matemáticas, el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, elegir representaciones, argumentar, generalizar o explorar, aspectos de la comunicación matemática.</p>

Fuente: elaboración propia. 2018.

Este taller forma parte de un proyecto de investigación en proceso y está dirigido a docentes de nivel secundario (quienes atienden a estudiantes entre 13 y 17 años) e investigadores interesados en el tema que deseen profundizar en la problemática o aportar con sus observaciones al mejor desarrollo de la investigación.

En el subdominio KoT hemos considerado tres categorías: los contenidos, la fenomenología y los sistemas de representación de la parábola, cada uno de ellos con sus respectivos indicadores. Consideramos que el profesor de matemática debe tener conocimientos de contenidos básicos como conceptos, reglas, teoremas y sus significados en relación con el contenido, imágenes, representaciones de los contenidos y procedimientos, incluimos el conocimiento de propiedades correctas y otras incorrectas de la parábola cuando manejamos los sistemas de representación.

En la tabla 2, damos cuenta de dichas características. Nuestras actividades engloban los indicadores de cada categoría como el concepto de la condición geométrica de la parábola, en la fenomenología la representación de situaciones de distintos significados de la parábola, en los sistemas de representación la omisión del sistema de ejes coordenados la invariabilidad de las propiedades de la parábola-

Tabla 2

Categorías e indicadores del subdominio KoT.

Categorías	Indicadores
Contenidos	Conocimiento del concepto de parábola como lugar geométrico.
	Conocimiento de la parábola como la gráfica de una función cuadrática.
Fenomenología	Conocimiento de distintos significados del concepto parábola.
Sistemas de representación de la parábola	Representación de la condición geométrica de la parábola omitiendo el sistema de coordenadas cartesiano.

Fuente: elaboración propia. 2018.

En el subdominio KPM hemos considerado que el docente debe conocer la forma cómo se produce el conocimiento matemático y las reglas de sintaxis de la disciplina. Por ejemplo, demostrando que el único punto común entre una recta tangente a una parábola y dicha parábola es el punto de tangencia, y que dicho punto resulta de hacer la discriminante cero. Recurrimos al pensamiento deductivo e inductivo.

En la tabla 3, se muestran la categoría formas de validación y demostración, así como los indicadores relativos.

Tabla 3

Categorías e indicadores del subdominio KPM.

Categoría	Indicador
Formas de validación y demostración	Verificación de la condición geométrica de la parábola a partir de la construcción de dicha cónica.

Fuente: elaboración propia. 2018.

Asimismo, dado que nuestro estudio es de carácter cualitativo, nuestra metodología toma en cuenta aspectos de la ingeniería didáctica, la cual tiene como propósito analizar los procesos de construcción del aprendizaje a través secuencias de enseñanza. El diseño de esta investigación incluye las tres primeras fases de la ingeniería didáctica: el análisis preliminar en sus tres dimensiones, epistemológica, cognitiva y didáctica; la concepción y el análisis a priori para el diseño de las actividades del taller y la experimentación en el desarrollo de este.

Actividades sugeridas

En esta propuesta se plantean actividades y tareas relacionadas con la parábola, explorar su condición geométrica y sus principales propiedades. A continuación, se presentan algunas de las que desarrollaremos en el taller.

Actividad 1: Construcción de la parábola con doblado de papel

El objetivo de esta actividad es explorar el concepto de parábola como lugar geométrico, representar la condición geométrica de la parábola omitiendo el sistema de coordenadas cartesiano y determinar la ecuación de la parábola teniendo en cuenta las propiedades de sus elementos.

La actividad consiste en obtener una parábola doblando papel como se observa en la figura 1. Luego se procede a los cuestionamientos para explicar por qué se forma dicha curva.

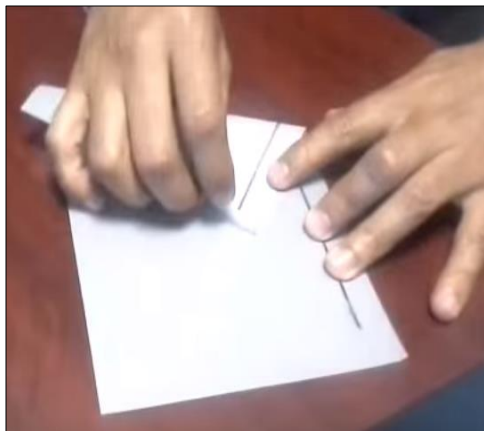


Figura 1. Construcción de la parábola con doblado de papel

Actividad 2: Construcción de la parábola con hilo y aguja

El objetivo de esta actividad es reconocer a la parábola como la gráfica de una función cuadrática y su representación geométrica en el sistema de coordenadas cartesiano; determinar la ecuación de la parábola teniendo en cuenta las propiedades de sus elementos; y, por último, determinar la ecuación ordinaria de la parábola y el reconocimiento de sus principales elementos.

La actividad consiste en obtener una parábola cruzando hilos según las posiciones previamente definidas y explicar por qué se obtiene dicha curva, como se observa en la figura 2.

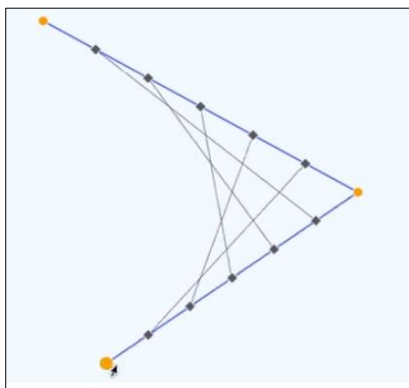


Figura 2. Construcción de la parábola con hilo y aguja.

Actividad 3. La parábola y el triángulo isósceles

Esta actividad hace uso del aplicativo Geogebra. El objetivo de esta actividad es construir una parábola haciendo uso de las propiedades de un triángulo isósceles y relacionarlas a la condición geométrica de la parábola, es decir la equidistancia que existe de un punto perteneciente a la parábola con la directriz y el foco.

En el desarrollo del taller, se requiere ocultar los ejes coordenados, la cuadrícula de la hoja y trazar en la vista gráfica un triángulo isósceles ABC . En la figura 3, se observa como el objeto

triángulo isósceles usa sus propiedades elementales para la construcción de una parábola, incluso parábola de forma oblicua.

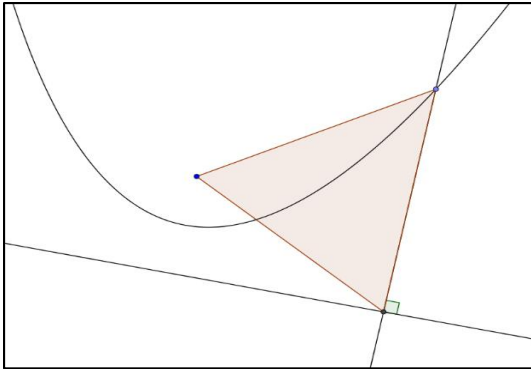


Figura 3. Construcción de una parábola a partir de un triángulo isósceles.

Actividad 4. Envoltente de una parábola

El objetivo de esta actividad es recrear en GeoGebra la construcción de una parábola doblando papel y mostrar que el trazo de una recta tangente a una parábola desde un punto exterior permite explicar la actividad del doblado de papel y además evidenciar un procedimiento para trazar una curva a partir de las intersecciones de rectas.

Antes de empezar la construcción es necesario ocultar los ejes coordenados y la cuadrícula en la hoja de trabajo que usaremos en GeoGebra. En la figura 4, mostramos el trabajo final de la envoltente de una parábola.

Luego, relacionar la actividad con una serie de preguntas ¿Cómo demuestra analíticamente que la recta \mathcal{L} es tangente a la parábola?, ¿cuántas rectas tangentes a la parábola se puede trazar desde el punto P ?, si el punto P está sobre el eje focal, ¿cuál es la posición de la recta que une los puntos de tangencia respecto a dicho eje?

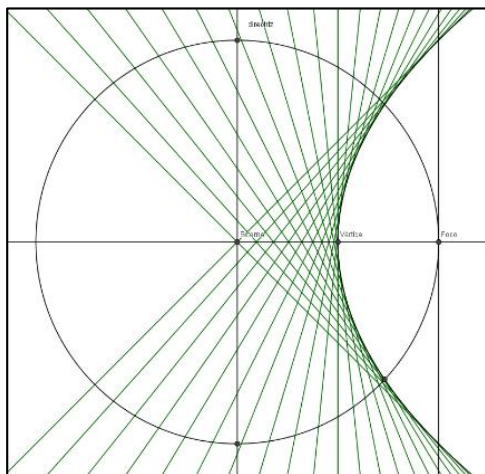


Figura 4. Construcción de una parábola por medio de rectas tangentes.

Consideraciones finales

Las actividades propuestas en este taller están diseñadas para reflexionar sobre la manera de fomentar el conocimiento del contenido (KoT) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM) en el profesor. Nos hemos enfocado en la exploración de una determinada situación matemática, producir una conjetura y buscar la manera de validarla, es decir, la forma de crear y producir matemática a través del razonamiento y la prueba.

Con esto esperamos que se sienten las bases para una reflexión más profunda sobre el modelo teórico MTSK y la forma de abordar la parábola como lugar geométrico.

Referencias y bibliografía

- Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Mathematics Teacher Specialized Knowledge. En: *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics education* (CERME 8) (pp. 2985-2994).; Antalya, Turquía: ERME.
- Flores, J. V. & Gaita, C. (2014). Situación actual de la Educación Matemática. en el Perú. *Revista de matemática, ensino e cultura*, 9(15), 82-95. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/304677241_Situacion_actual_de_la_educacion_matematica_en_el_Peru