



Sobre la configuración de un modelo local para identificar y caracterizar formas de pensamiento algebraico

Johnny Alfredo Vanegas Díaz
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
johnny.vanegas@correounivalle.edu.co

Resumen

La presente comunicación se inscribe en el marco del *early algebra* y se ocupa de una problemática asociada con la naturaleza del pensamiento algebraico. Inicialmente se discute la problemática existente en torno a la naturaleza del pensamiento algebraico y se deja entrever que atender este asunto puede verse como una posibilidad teórica para generar análisis profundos sobre las filiaciones, rupturas y discontinuidades entre la aritmética y el álgebra. Seguidamente se presentan y discuten las reflexiones teóricas que dieron lugar a la configuración de un modelo de algebrización, que incluye tres componentes fundamentales: *lo relacional*, *lo analítico* y *lo notacional*, el cual puede resultar útil para identificar y caracterizar formas de pensamiento algebraico, específicamente aquellas que emergen en la actividad matemática desplegada por los estudiantes como resultado del trabajo con tareas relativas a las ecuaciones lineales. Finalmente se exponen algunas reflexiones y se presentan nuevas ideas para seguir investigando.

Palabras clave: early algebra, formas de pensamiento algebraico, resolución de ecuaciones lineales, modelo de algebrización

Introducción

Desde hace unas décadas se viene considerando un cambio de perspectiva, hacia un álgebra para todos, como una red de conocimientos y habilidades que los estudiantes pueden desarrollar a través de todo su ciclo escolar (Kaput, 2000). Este enfoque, reconocido internacionalmente como *early algebra* plantea: a) la introducción de formas de pensamiento algebraico en la matemática escolar, pretendiendo la algebrización del currículo; y b) nuevos puntos de vista entre la aritmética y el álgebra que promuevan continuidad entre estos dominios (Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006; Kaput, 2000).

En consonancia con la visión del early algebra se apertura un nuevo espacio curricular para las matemáticas del siglo XXI; se incorpora un nivel de coherencia, profundidad y poder a la matemática escolar, tanto curricularmente como cognitivamente, y finalmente, se marginan los

cursos abruptos, aislados y superficiales del álgebra de la escuela secundaria (Kieran, 2004).

Si bien, la algebrización del currículo aliviana, en gran medida, la remarcada transición de la aritmética al álgebra, también es cierto que genera un nuevo campo de discusión en torno a: 1) la naturaleza del pensamiento algebraico y 2) la manera en que dicho pensamiento puede ser desarrollado en el ámbito escolar (Aké, 2013). Aunque ambos aspectos se encuentran íntimamente relacionados, el énfasis de esta comunicación está puesto sobre el primero de ellos, entre otros aspectos, porque durante los últimos años, numerosas investigaciones (e.g., Carraher et al., 2006; Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi, 2014) han señalado la importancia de clarificar y profundizar en la comprensión de los procesos involucrados en el pensamiento algebraico.

En el marco de las consideraciones anteriores, esta comunicación aporta al señalado panorama de discusiones teóricas –alrededor de la naturaleza del álgebra escolar–; al poner de manifiesto el proceso constitutivo de un modelo local de algebrización, que incluye tres componentes fundamentales: *lo relacional*, *lo analítico* y *lo notacional*.

Contextualización de la problemática de interés

Diferentes investigaciones en el campo de la Educación Matemática dejan entrever que se conoce poco sobre la naturaleza del pensamiento algebraico. La complejidad detrás de una definición precisa y concisa del pensamiento algebraico es producto de la amplia gama de objetos y procesos relacionados, así como de las diversas formas de concebir el pensamiento en general (Radford, 2012). Por su parte, Aké (2013), indica que es necesario clarificar la naturaleza del álgebra escolar y responder a cuestiones, tales como: ¿Qué formas de razonamiento son algebraicas? y ¿Cuáles son las características de esas formas de razonamiento?. En esta misma dirección, Vergel (2014) pone de manifiesto la necesidad de identificar y caracterizar las formas de pensamiento algebraico que emergen en estudiantes jóvenes cuando trabajan con generalización de patrones.

Si bien, desde la perspectiva de la *generalización de patrones* hay numerosas investigaciones (e.g., Radford, 2014; Vergel, 2014) que presentan resultados entorno al pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes; se conoce muy poco acerca de las formas de pensamiento algebraico de estos estudiantes, frente a situaciones inscritas en el contexto de las ecuaciones. De hecho, pese a que existe un claro consenso que actividades relativas a la formación y manipulación de expresiones simbólicas tienen relación directa con formas de pensamiento algebraico, sigue siendo discutible los **contornos** de la actividad algebraica en actividades que incluyen la resolución de problemas y la equivalencia de expresiones aritméticas (Aké, 2013). En consecuencia, parece necesario incursionar en el contexto matemático de las ecuaciones y re-descubrir por qué este contexto sigue ofreciendo elementos de estudio que son importantes para comprender la actividad algebraica desplegada por los estudiantes.

Abordar el estudio del pensamiento algebraico desde un contexto simple, como es: la resolución de ecuaciones lineales, contribuye a la generación de espacios para indagar sobre las formas en que los estudiantes hacen explícito su pensamiento algebraico, pues tal como lo indican, Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue (2005) hay mucho que aprender de las generalizaciones que hacen los estudiantes acerca de las propiedades de los números y las operaciones y de cómo ellos exploran y trabajan con relaciones entre cantidades.

Hacia la construcción de un modelo de algebrización

Algunas conceptualizaciones sobre el pensamiento algebraico

Dentro de la diversidad de perspectivas teóricas, se pueden reconocer diferentes maneras de entender y conceptualizar el pensamiento algebraico. Por un lado, Radford (2014) en el marco de la *teoría de la objetivación* define el pensamiento algebraico como una forma particular de reflexionar matemáticamente, la cual se manifiesta a través de diferentes recursos semióticos de objetivación, incluso sin hacer uso del simbolismo alfanumérico. De hecho, Vergel (2014) siguiendo esta misma dirección, señala que tales manifestaciones, que dan cuenta del proceso de conocer, no pueden ser descritas únicamente en términos de prácticas discursivas y por lo tanto, hace énfasis en la importancia que trae consigo los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. Por otra parte, Godino et al. (2014), en el marco del *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* (EOS) prefieren hablar en términos del razonamiento algebraico. Definen este tipo de razonamiento como una zona transicional, desde la aritmética hasta el álgebra, en la que se admite la presencia de tipos de tareas, objetos y procesos algebraicos de una forma gradual pero creciente.

Aportes desde la resolución de problemas y la modelación matemática

Lins (1992) desarrolla una caracterización del *pensamiento algebraico* que incluye: *pensar aritméticamente*, *pensar internalistamente* y *pensar analíticamente*. Fundamenta tal caracterización en una revisión de literatura sobre investigaciones previas concernientes a dos tópicos: a) desarrollo histórico del álgebra y conocimientos matemáticos en culturas matemáticas culturalmente situadas (e.g., aspectos de la cultura matemática griega, china, etc.) y b) aprendizaje y enseñanza del álgebra (e.g., dificultades causadas por el uso de la notación literal). Para este autor, el *pensamiento algebraico* es una forma de modelación y de manipulación de modelos, como una vía de organización del mundo que involucra diversas manifestaciones. En concreto, el pensamiento algebraico puede entenderse como una “intención”; es decir, una manera en la cual una persona quiere hacer las cosas. Incluso si los conceptos o métodos necesarios para llevar a cabo esa intención no están disponibles o desarrollados.

Aritmética generalizada y pensamiento relacional

Jacobs, Franke, Carpenter, Levi, & Battey (2007) caracterizan el pensamiento algebraico desde la perspectiva de la aritmética generalizada y el estudio de las relaciones. La caracterización del *pensamiento relacional* incluye, la observación de expresiones y ecuaciones en su totalidad, en lugar de los procedimientos que se llevan a cabo paso a paso. Implica cierto nivel de conocimiento de las operaciones y de las propiedades de los números, pero no necesariamente una comprensión completa de ellas y de sus definiciones formales. La idea es que al poner la atención sobre las relaciones y propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas, en lugar de centrarse en los procedimientos de cálculos de respuestas, se puede hacer más coherente la enseñanza y el aprendizaje con los tipos de conocimientos que apoyan el aprendizaje del álgebra, y al mismo tiempo, apoyar y mejorar el aprendizaje de la aritmética (Carpenter et al., 2005).

Identificación de los componentes constitutivos de un modelo de algebrización

En el presente marco conceptual, el pensamiento algebraico remite a la descripción de una actividad matemática que abarca a) el trabajo con ecuaciones lineales, b) significados del signo

igual, c) formas analíticas de proceder, y d) diferentes notaciones para representar los objetos matemáticos. Así, la conceptualización del pensamiento algebraico que aquí se esboza, sienta las bases para construir un modelo de algebrización que incluye tres componentes: *lo relacional*, *lo analítico* y *lo notacional*.

El *componente relacional* destaca hallazgos de diversas investigaciones, enmarcadas en la resolución de ecuaciones (e.g., Kieran, 1992), las cuales convergen en que el significado relacional del signo igual es fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico. Al parecer una comprensión más rica del signo igual, que la proporcionada por la aritmética tradicional, genera mayores oportunidades de éxito con el álgebra de las ecuaciones.

Por otra parte, el *componente notacional* para ser indispensable en la comprensión de la actividad algebraica desplegada por los estudiantes (Godino et al., 2014; Van Amerom, 2003; Vergel, 2014). Si bien, es necesario orientar una buena parte de la enseñanza del álgebra hacia el aprendizaje y comprensión de las reglas sintácticas, también hay que reconocer que el álgebra implica trabajo con otras formas notacionales que incluyen representaciones visuales y materiales, tales como: dibujos, tablas y diagramas.

Finalmente, el *componente analítico* es considerado por la presencia de la analiticidad como un aspecto distintivo del pensamiento algebraico (Lins, 1992; Radford, 2014) que tiene sus orígenes históricos en la formalización del “método analítico” definido por Vieta y Descartes, alrededor del siglo XVI. La lógica de este método es diferente a la utilizada para resolver problemas aritméticos. En el método analítico, las relaciones entre las cantidades se describen empleando los datos conocidos y los desconocidos de manera similar, construyendo relaciones equivalentes a partir de ellos, hasta que se obtiene una respuesta al problema.

Configuración de un modelo de algebrización

La revisión de literatura en torno al pensamiento algebraico (e.g., Aké, 2013; Godino et al., 2014; Lins, 1992; Vergel, 2014), así como la mirada a diversos trabajos de investigación enmarcados en el contexto de la resolución de ecuaciones (e.g., Andrews & Sayers, 2012; Van Amerom, 2003) posibilitan la construcción de un modelo de algebrización. La estructura de este modelo se basa en articulación de tres componentes algebraicos que lo constituyen: a) *componente relacional*, b) *componente analítico* y c) *componente notacional* (Fig. 1).

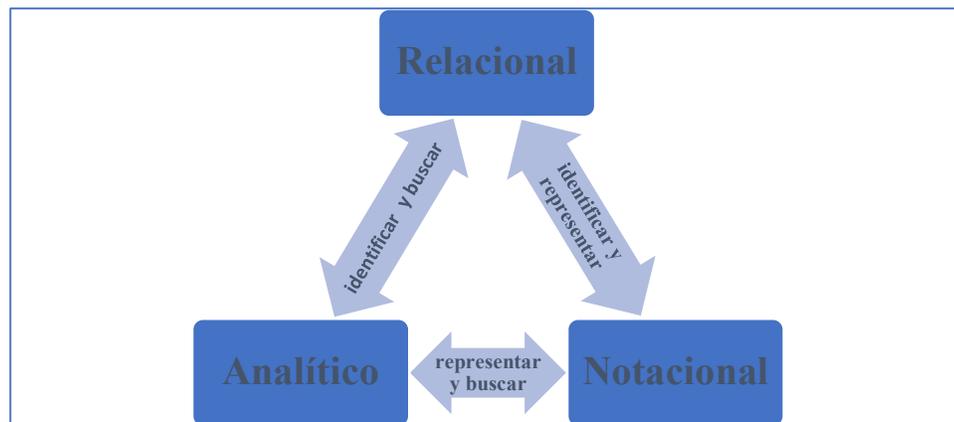


Figura 1. Modelo de algebrización

Individualmente cada componente aborda una dimensión ontológica de las nociones matemáticas, en términos de dos categorías: *operacional* y *estructural* (Sfard, 1995; Sfard & Linchevski, 1994). Aunque se reconoce el hecho de que esa diferenciación es evidente en algunos casos, y objeto de debate en otros, metodológicamente resulta útil. En primer lugar, la delimitación aporta elementos para construir un puente entre la aritmética y el álgebra. Y en segunda instancia, se constituye en una herramienta para identificar formas de pensamiento algebraico, en diferentes niveles de concreción.

El *componente relacional* incluye dos significados asociados al signo igual. La literatura de investigación revela que gran parte de los estudiantes de Educación Básica carecen de un *significado relacional* del signo igual y en su lugar, presentan un *significado operacional* (Jacobs et al., 2007)

El *significado relacional* indica una equivalencia entre dos expresiones que se encuentran a ambos lados del signo igual. En contraste, el *significado operacional*, sitúa el signo igual como un operador, es decir, una instrucción para realizar una operación. La consideración de dos significados para el signo igual, tiene consonancia con numerosos estudios. La tabla 1 ilustra algunas investigaciones, cronológicamente organizadas, que destacan este hecho.

Tabla 1.

Investigaciones que reportan dos significados relativos al signo igual

Investigaciones	Significados del signo igual	
	Operacional	Relacional
(Kieran, 1992)	El signo igual anuncia un resultado	El signo igual representa una equivalencia
(Jacobs et al., 2007)	Una señal para realizar el cálculo que le precede.	Indicador de una relación entre dos expresiones

El *componente notacional* está conformado por dos categorías que integran las cuatro formas de representación más resonantes en la literatura de investigación. Estas cuatro formas de representación pueden concebirse como una colección de herramientas que están a disposición de los estudiantes al momento de resolver un problema (Van Amerom, 2003) y son consideradas en diversos estudios para explorar perspectivas del pensamiento algebraico de los estudiantes (e.g., Huntley, Marcus, Kahan, & Miller, 2007). Además, se pueden poner en correspondencia con las fases del desarrollo histórico del álgebra, enmarcando las *notaciones singulares* tanto, en la fase retórica como en la sincopada, y las *notacionales simbólicas* en la fase simbólica del álgebra (Van Amerom, 2003).

Las *notaciones simbólicas*, involucran el uso de símbolos alfanuméricos (literales) para representar los objetos desconocidos y las relaciones matemáticas entre las cantidades. En contraste, las *notaciones singulares*, implican representaciones concretas, gráficas y verbales; y las letras aparecen, únicamente, como etiquetas o abreviaciones para designar un objeto.

Desde la visión adoptada para el *componente notacional* se rescata la importancia que posee la notación simbólica como un sistema de representación básico de las matemáticas y un indicador de pensamiento algebraico (Brizuela & Schliemann, 2004); como una forma de expresar los *objetos* y *procesos* algebraicos en niveles superiores de algebrización (Aké, 2013).

Además, al igual que otras investigaciones (e.g., Kieran, 2004; Van Amerom, 2003) se reconoce que el pensamiento algebraico está asociado con diferentes formas de representación que desbordan el marco de la *notación simbólica*. Al respecto, Kieran (2004) señala que el álgebra simbólica-literal puede ser usada como herramienta o apoyo cognitivo de creación y para sostener un discurso en la escuela, pero insiste en que se puede estar involucrado en actividades algebraicas sin utilizar, en absoluto, algún símbolo literal, por ejemplo; al analizar las relaciones entre cantidades.

Finalmente, el *componente analítico* enmarca dos categorías: *contextual* y *sintáctica*. Según, Cai & Knuth (2011), un análisis detallado de las formas en las cuales los problemas se resuelven usando aritmética y álgebra puede ayudar a reconocer aspectos claves del pensamiento algebraico. En palabras de Radford (2012, 2014), dicho análisis es decisivo en la identificación de la *analiticidad* como componente fundamental del pensamiento algebraico. Además, tal como indica Lins (1992), la forma analítica de abordar un problema parece ser una constante dentro del pensamiento algebraico.

En términos generales, la conceptualización del *componente analítico* se basa en ideas de Radford (2012) y Vergel (2014) sobre la *analiticidad*; como forma de trabajar los objetos indeterminados o el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos. Desde esta postura, la analiticidad no emerge, exclusivamente, de manera *sintáctica*, sino que además, tiene presencia en escenarios donde lo indeterminado empieza a ser objeto de discurso (Vergel, 2014). Por lo tanto, el *componente analítico*, está asociado al carácter operatorio de lo desconocido, pero también se refiere a las deducciones que se hacen a partir de ciertas premisas.

De esta manera, se entiende la *analiticidad sintáctica* como la forma de operar con los objetos indeterminados a través de las reglas sintácticas del álgebra. Así, lo desconocido es el punto de partida del proceso de solución, en el que el símbolo, en sí mismo, es el objeto de manipulación. En cambio, la *analiticidad contextual* implica una forma de trabajo que no opera con la sintaxis algebraica. Si bien, pueden usarse literales para representar lo desconocido, los cálculos se realizan utilizando, esencialmente, las operaciones y sus inversas sobre cantidades conocidas, de tal manera que lo desconocido no está involucrado, directamente, en los cálculos. El énfasis está puesto sobre las cantidades y sus relaciones.

Por un lado, la *analiticidad contextual*, en correspondencia con las ideas de Vergel (2014) está implicada en argumentos escritos por los estudiantes, que no necesariamente remiten a una forma simbólica. Por otra parte, la *analiticidad sintáctica* le asigna un lugar protagónico a la *notación simbólica*. De este modo, la *analiticidad sintáctica* guarda cierta relación con los planteamientos de Filloy, Puig, & Rojano (2008), quienes argumentan que el carácter analítico del uso de los sistemas de signos, para reducir el enunciado del problema a una forma canónica, es una característica de lo algebraico. De hecho, Godino et al., (2014) consideran que en un nivel propiamente algebraico se opera de manera analítica/sintáctica sobre un lenguaje simbólico-literal.

Las conexiones entre los componentes algebraicos se delimitan sobre la base de la perspectiva de la *resolución de problemas* y la *modelación matemática*. Los términos *identificar*, *buscar* y *representar* se entienden como acciones fundamentales que emergen y se desarrollan al interior de los procesos de *matematización* en sus dos fases. Por un lado, se corresponden con la *matematización horizontal* en aspectos, tales como: a) la identificación de la matemática que es relevante respecto al problema, b) la búsqueda y hallazgo de regularidades, relaciones y patrones,

y c) la esquematación, formulación y visualización del problema desde diferentes puntos de vista. Por otra parte, guardan alguna relación con actividades propias de la *matematización vertical*, tal como: el uso de diferentes representaciones sujetas a estrategias de reflexión, generalización, prueba y simbolización (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Desde esta visión, el trabajo con tareas relativas a las ecuaciones lineales, implica *identificar* las relaciones entre las cantidades, que son relevantes en el contexto de la tarea; *buscar* nuevas relaciones matemáticas a través de las formas analíticas de proceder y *representar* las relaciones matemáticas mediante las formas notacionales.

Reflexiones finales y nuevas rutas de investigación

Es importante resaltar algunos aspectos, sobre la configuración del modelo, que se encuentran permeando la discusión pero que no son evidentes. En primer lugar, se trata de un modelo “local” que no pretende constituirse en un marco explicativo global, pues no aborda cuestiones asociadas, por ejemplo, a la resolución de problemas funcionales. En segundo lugar, no se sugiere que la actividad con ecuaciones y/o sistemas de ecuaciones lineales, pueda estudiarse, únicamente, mediante los componentes señalados y sus relaciones. La indeterminancia, en el sentido de Radford (2012) es propio de lo algebraico, pero agrega una variable que por sí misma resulta compleja de aislar. Finalmente, el modelo se basa en la resolución de problemas y modelación matemática, como perspectiva de introducción del álgebra escolar, lo cual no sugiere que esta perspectiva sea independiente, o más importante que otras perspectivas que han sido consideradas en el estudio del pensamiento algebraico.

Por otro lado, al tratarse de una primera versión del modelo, indudablemente se requieren otros estudios que ayuden a consolidar una mejor interpretación de los componentes algebraicos identificados, o bien proponer otros, que posibiliten la exploración y comprensión de la actividad algebraica desplegada por los estudiantes.

En síntesis, esta comunicación pone de relieve que una conceptualización del pensamiento algebraico a partir de los tres componentes: *relacional*, *analítico* y *notacional*, podrían proveer un adecuado modelo para intentar explicar y comprender la actividad algebraica desplegada por los estudiantes cuando trabajan con la resolución de situaciones relativas a las ecuaciones lineales. De hecho, la implementación de este modelo permitió reconocer, al menos, cuatro formas de pensamiento algebraico que guardan una estrecha relación con la manera en que los estudiantes trabajan con los componentes algebraicos y sus conexiones, poniendo de manifiesto la riqueza del modelo para explorar, describir y caracterizar la actividad algebraica; pero ello será objeto de otra comunicación.

Referencias

- Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Granada.
- Andrews, P., & Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(4), 476–488.
<http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.002>
- Brizuela, B., & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 24(2001), 33–40. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/10.2307/40248456>
- Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. New York: Springer.

- Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 37(1), 53–59. <http://doi.org/10.1007/BF02655897>
- Carraher, D. W., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87–115.
- Fillooy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. (A. Bishop, Ed.) *Saudi Med J* (Vol. 43). New York: Springer. <http://doi.org/10.1073/pnas.0703993104>
- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebraización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de Las Ciencias*, 32(1), 199–219. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/eos/niveles_algebraizacion.pdf
- Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(2), 115–139. <http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.005>
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258–288. Retrieved from <http://homepages.math.uic.edu/~martinez/PD-EarlyAlgebra.pdf>
- Kaput, J. J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. In *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum* (pp. 1–20). Washington, DC: National Academy Press.
- Kieran, C. (1992). Learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York: Macmillan.
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Nottingham.
- Radford, L. (2012). On the Development of Early Algebraic Thinking. *Pensamiento Numerico Y Algebraico*, 6(4), 117–133.
- Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257–277. <http://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15–39. [http://doi.org/10.1016/0732-3123\(95\)90022-5](http://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5)
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). Educational Studies in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2), 191–228. <http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000028403.25781.79>
- Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 63–75. <http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005237.72281.bf>
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). the Didactical Use of Models in Realistic. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9–35. <http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc>
- Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.