XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática

Jhonatan Elias Posso Torres
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
jhonatan.posso@correounivalle.edu.co
Ligia Amparo Torres
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ligia.torres@correounivalle.edu.co

Resumen

Esta comunicación es el reporte de una investigación donde se analizan aspectos del razonamiento covariacional desarrollados en estudiantes de grado noveno de la educación básica, al modelar fenómenos mediante la función cuadrática. Al estudiar la variación desde el enfoque covariacional, asociada a la función cuadrática, en situaciones de la vida cotidiana, las matemáticas y otras ciencias, se movilizan aspectos del razonamiento durante los procesos de modelación, que pueden ser identificados y caracterizados. Para esto, se elaboró y se trabajó con estudiantes dos situaciones contextualizadas tomando como referencia aspectos curriculares de la educación en Colombia, aspectos didácticos en relación a la modelación y el razonamiento covariacional, y aspectos disciplinares de las matemáticas afines a la función. En los primeros análisis[1], los estudiantes experimentaron acercamientos a la situación (modelación situacional), uso de *modelos de* (modelación referencial), revelando indicios valiosos de las primeras acciones mentales al atender la covariación entre cantidades.

Palabras clave: Variación, covariación, razonamiento covariacional, modelación, función, función cuadrática.

---

[1] *Nota:* Al momento del diseño de esta comunicación se continúa realizando los análisis de los registros de los estudiantes respecto al trabajo de la primera situación y la aplicación de la segunda, por lo cual se espera que el día de la presentación se puedan exponer los resultados y conclusiones finales de la investigación.

Problemática

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar son procesos que históricamente han presentado diversas dificultades en las clases, algunas relacionadas con obstáculos epistemológicos en la historia de las matemáticas *per se* y otras identificadas con aspectos metodológicos, cognitivos y de aula, entre otros. Algunas dificultades tienen que ver con la forma como ciertos docentes presentan los contenidos en relación al álgebra, ya que se limitan a explicar el tema y poner ejercicios donde se privilegia el cálculo aritmético principalmente, convirtiéndose en rutinas repetitivas de ejercitación que carecen de sentido; en relación a esto, Castro (2012) indica que de esta manera el álgebra no se enseña a través de una progresión lenta sino como mecanismo manipulador enfatizado en el cálculo.

Andrade (1998) concluye que algunos textos escolares de matemáticas poco contribuyen al conocimiento del concepto de función, pues ilustran la variable como una letra que representa una cantidad desconocida o un número generalizado, no se comprende la relevancia de la variable producto de la ruptura que hay del paso de la aritmética al algebra, ya que "para lograr la variable fue necesario el uso de la letra como incógnita y luego como cantidad general, antes de pasar a representar la variación" (p. 248); Castro (2012) afirma que las primeras aproximaciones escolares donde no se comprende que representan las letras y los símbolos algebraicos empleados en modelos, pueden entorpecer la construcción apropiada del concepto de variable y el estudio de la variación.

Chevallard (1984, 1989), Bolea (2002), Sutherland et al. 2000 (citados en Ruiz Munzón, N; Bosch, M. y Gascón, J., 2007, p. 1) revelan en los resultados de sus investigaciones la ausencia del "juego" entre parámetros y variables, complicaciones para identificar o establecer relaciones entre variables y parámetros solicitados y la manipulación de modelos algebraicos principalmente en forma de reglas, ocasionando un acercamiento inapropiado a la comprensión de la noción de función en general y función cuadrática en particular, "dificultando el estudio de familias de funciones y el uso de estas familias como modelos de relaciones entre magnitudes" (Ruiz Munzón, N; Bosch, M. y Gascón, J., 2007, p. 1).

Respecto al estudio y trabajo con los modelos algebraicos, análisis como el llevado a cabo por Carlson 1998, Monk y Nemirovsky 1994, Thompson 1994a (citados en Carlson *et al*., 2003, p. 122-123) evidencian que incluso estudiantes de nivel de pregrado tienen dificultad para modelar relaciones funcionales de situaciones de variación continua entre variables y que según Kaput 1994 y Rasmussen 2000 (citados en Carlson *et al*., 2003, p. 123) "esta habilidad es esencial para interpretar modelos de eventos dinámicos" y comprender otros conceptos matemáticos de mayor complejidad.

Problemáticas como las expuestas permiten plantear la pregunta:

¿Qué aspectos del pensamiento variacional se desarrollan en estudiantes de grado noveno a través de una propuesta de aula que involucra la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática?

Referentes teóricos y metodológicos

El marco teórico comprende el análisis de aspectos que implican el desarrollo del pensamiento variacional, el estudio de la variación, la comprensión del concepto de función y de función cuadrática desde tres perspectivas las cuales son: Perspectiva curricular, didáctica y disciplinar (de las matemáticas).

Los documentos curriculares de la educación escolar colombiana como son los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) promueven el desarrollo del pensamiento numérico, del pensamiento espacial, del pensamiento métrico, del pensamiento aleatorio y del pensamiento variacional; todos mediados por cinco procesos: Formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Para esto, el docente debe tener la posibilidad de proponer a los estudiantes un contexto enriquecido de situaciones las cuales pueda explorar, realizar representaciones, realizar abstracciones, llevar a cabo el proceso de modelación matemática, entre otras posibilidades (MEN, 1998). Vasco (2003) señala la modelación como la utilización más poderosa del pensamiento matemático, que va más allá de la aplicación de algoritmos conocidos y que es fundamental para el aprendizaje del álgebra escolar, el estudio de la variación y de las funciones, además, plantea que el enfoque covariacional permite la captación y modelación de la covariación entre cantidades del magnitud, y que al momento que el estudiante lleva a cabo estas actividades también piensa de manera dinámica, formándose sistemas mentales propios del pensamiento variacional.

El razonamiento covariacional es el marco conceptual propuesto por Carlson et al. (2003) y se define como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p.124). En el desarrollo de este tipo de razonamiento se presta especial atención a la covariación entre cantidades de magnitud que se relacionan de manera funcional en eventos dinámicos, analizando la razón de cambio, de tal manera que se llega a formar imágenes de los cambios hasta modelar las relaciones funcionales; los cinco tipos de acciones mentales pueden llegar a ser evidenciadas y clasificadas en cinco niveles de acuerdo a este marco conceptual, tal como también lo evidencian posteriormente Dolores y Salgado (2009) y Villa (2012) en sus respectivos trabajos.

Las siguientes son las características de las acciones mentales en el marco del razonamiento covariacional:

Tabla 1
Acciones mentales del razonamiento covariacional

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios de otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio.

	incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de la concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y las concavidades son correctos)

Nota. Tomado de Carlson et al. (2003, p.128).

Las acciones mentales evidenciadas en los estudiantes conllevan a alcanzar los niveles de razonamiento covariacional, los cuales se describen como:

Tabla 2

Niveles de razonamiento covariacional

Nivel	Descripción del nivel de razonamiento covariacional
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5) Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Nota. Tomado de Carlson et al. (2003, p.129).

Por otra parte, la modelación entendida como un proceso mediante el cual se pueden producir modelos mentales, gráficos y analíticos, entre otros (Vasco, 2003) es pertinente en el estudio de la covariación, ya que facilita asociar las imágenes o modelos mentales con expresiones en los variados registros de representación. En la Educación Matemática Realista[2] se plantea que es fundamental que el estudiante pueda matematizar (organizar la realidad con medios matemáticos, incluida la matemática misma) distintas situaciones planteadas en contextos realistas (imaginables, que tienen sentido para el estudiante) ya sean situaciones cotidianas, de las matemáticas y de otras ciencias y para ello se establecen niveles de matematización (situacional, referencial, general y formal), que permiten la comprensión de la situación y consolidan el proceso de modelización, constituyendo la matematización en una actividad fundamental en el aprendizaje de las matemáticas (Freudenthal, 1973).

Aspectos experimentales

El trabajo de investigación se desarrolla en una institución educativa de carácter oficial de la ciudad de Santiago de Cali, departamento del Valle del cauca, Colombia, con un grupo de estudiantes de grado noveno de la educación básica secundaria. La institución queda ubicada en la zona rural de la ciudad en el corregimiento El Hormiguero, los estudiantes son habitantes del lugar y de veredas aledañas, ubicados en zonas de estrato 1.

Las actividades de experimentación están constituidas por dos situaciones, una en contexto de la vida cotidiana y otro en contextos geométrico, compuestas por tareas organizadas de tal forma que promovieran procesos de modelación y movilizaran aspectos del razonamiento covariacional. Dichas situaciones son presentadas a los estudiantes por tareas, en copias donde se pueda llevar a cabo la lectura de las mismas, además, el desarrollo por parte de los estudiantes fue escrito en hojas aparte.

La primera situación que será la analizada a continuación, está organizada a partir de un contexto de la vida cotidiana de la siguiente manera:

Situación 1: ¿Los ingresos de un gimnasio aumentan o disminuyen? El gimnasio *Hércules* cuenta con 150 socios inscritos los cuales pagan, cada uno, una mensualidad de $60.000. Michael, el dueño del gimnasio, desea incrementar sus ingresos por lo que ordena un estudio de mercado cuyo resultado recomienda reducir la mensualidad, ya que por cada $1.000 que disminuya se inscribirán cinco nuevos socios. ¿Cuál es el máximo ingreso económico que el gimnasio *Hércules* puede recibir si sigue las recomendaciones del estudio?

La situación se diseñó para desarrollarse en cuatro tareas. La primera tarea teniendo como referencia el proceso de modelación de la Matemática Realista, se diseñó para que los estudiantes exploraran y comprendieran la situación a partir de los primeros acercamientos a esta, realizando algunos cálculos iniciales, identificando cantidades como el número de rebajas, tratar de realizar los primeros esquemas y expresar sus primeras ideas o argumentaciones respecto a la situación; esta situación está comprendida en el nivel situacional de modelación y no se esperaba que los estudiantes manifestaran algún tipo de acción mental de acuerdo al marco del razonamiento covariacional, pero constituía parte importante para el surgimiento de las

[2] Corriente didáctica que nace en los años 60 cuyo fundador es Hans Freudenthal, promueve la enseñanza de las matemáticas conectada con la realidad, llevando a cabo procesos de matematización de la realidad con medios matemáticos en niveles de matematización horizontal y vertical.

primeras acciones mentales.

En la segunda tarea se proponía la siguiente tabla:

Tabla 3

Tabla de relaciones del valor de la mensualidad y número de socios

Valor de la mensualidad en pesos	60.000	59.000	58.000			46.000
Número de socios	150			165	180	

A partir de la tabla se esperaba que los estudiantes la completaran e identificaran las primeras regularidades presentes en las cantidades de las magnitudes indicadas, escribiendo algunas expresiones para determinar los valores faltantes, identificando las primeras relaciones de dependencia como es el caso de que la cantidad total de socios dependía de la cantidad de rebajas realizadas y el valor de la mensualidad como resultado de esa rebaja. Además, al cuestionar a los estudiantes acerca de cómo se comportaban los ingresos a medida que se inscribían socios nuevos y se reducía la cuota de la mensualidad, se buscaba hacer una primera aproximación a la pregunta ¿Cómo cambia?; esta situación está inscrita en el nivel situacional de modelación al continuar en el descubrimiento de regularidades y la esquematización de la situación.

En la tercera tarea se presentaba la siguiente tabla:

Tabla 4

Tabla de relaciones entre cantidades

Cantidad de rebajas	Valor de la rebaja (en pesos)	Valor total de cada rebaja (en pesos)	Valor inicial de la mensualidad (en pesos)	Valor de la mensualidad según rebajas (en pesos)	Cantidad inicial de socios	Cantidad de socios	cantidad total de socios según cantidad de rebajas	Ingreso total inicial (en pesos)	Ingreso total según mensualidad y número de socios (en pesos)
0	1.000	0	60.000	60.000	150	0	150	9.000.000	9.000.000
1	1.000	1.000	60.000	59.000	150	5	155	9.000.000	9.145.000
2	1.000	2.000	60.000	58.000	150	10	160	9.000.000	9.280.000
3									
4		4.000			150		170		
5						25			
	1.000	15.000			150		225		
⋮									
x		$1000x$							

En la tarea 3 se esperaba que los estudiantes completaran la tabla y a partir de la información identificaran las regularidades presentes en la misma, identificando relaciones de dependencia entre cantidades, como por ejemplo de que el valor total de cada rebaja dependía de multiplicar el número de rebajas por \$1000, hasta obtener las primeras expresiones o modelos como $1000x$ en este caso. En esta tarea se esperaba que los estudiantes presentaran un nivel referencial de modelación al emplear modelos gráficos y notacionales de la situación para analizar las dependencias y los cambios en las cantidades, desarrollando a su vez las primeras acciones mentales (AM1) inscritas en el nivel 1 de razonamiento covariacional (N1)

En la cuarta tarea se planteaba la siguiente gráfica:

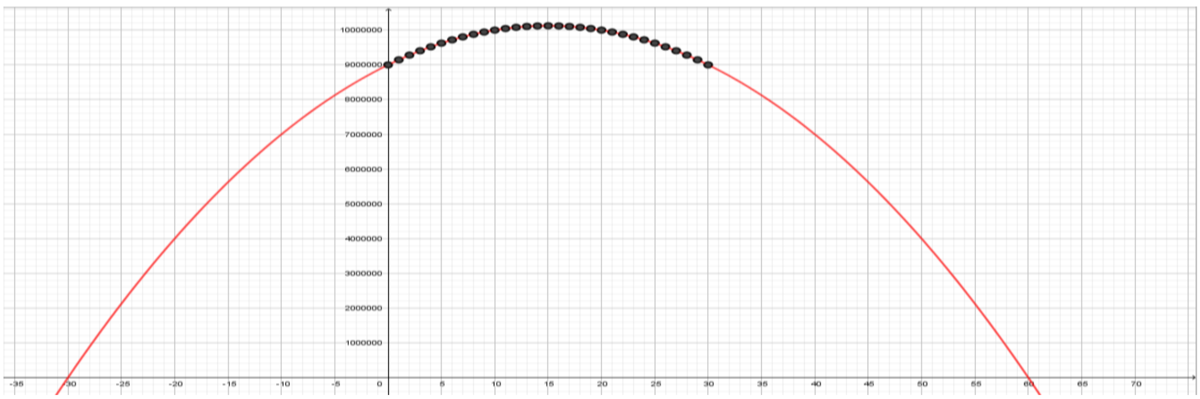

Figura 1. Gráfica de número de rebajas vs ingresos totales.

A partir de la gráfica se pretendía que los estudiantes continuaran identificando las relaciones de dependencia en la situación de tal manera que se analizara cómo cambian los valores de acuerdo a las rebajas realizadas. Estos modelos empleados son aún modelos particulares de la situación y por tanto se desarrollan en el nivel referencial de modelación y de acuerdo a la información suministrada, los estudiantes podían llevar a cabo algunas argumentaciones acerca de la dirección del cambio en ciertos instantes, atendiendo a la covariación entre las variables y estos planteamientos pretendían acciones mentales de segundo nivel (AM2), coordinando la dirección del cambio de una variable con los cambios de otra y propiciando un paso a un segundo nivel de razonamiento covariacional.

Discusión de resultados

Los primeros resultados de los análisis de los registros de los estudiantes son el producto de las aproximaciones al contexto de la situación. Estos evidencian, principalmente, que los primeros cálculos y cuestiones acerca de la situación en la tarea 1 fueron abordados de manera natural por los estudiantes, llevando a cabo procedimientos que son similares a las prácticas habituales en clases de matemáticas, pero que para este caso constituye principalmente el acercamiento a las características básicas de la situación planteada para el estudio posterior de la covariación. De acuerdo al nivel situacional de modelación, los estudiantes percibieron características de las magnitudes como la cantidad de socios, valor de la mensualidad y la última en identificar de manera clara fue el número de rebajas, mostrando ciertas dificultades al comprender esta última como una de las magnitudes en cuestión y que para el propósito de esta situación constituye un elemento fundamental en el proceso de modelación y posteriormente el análisis de la covariación.

En la tarea 2, al emplearse una tabla como otro registro de trabajo de situaciones con relaciones funcionales, la mayoría de estudiantes tuvo facilidad para completar la tabla mediante cálculos e identificar las relaciones de dependencia, como la del total de socios en relación con la cantidad de rebajas, el total de ingresos en relación al total de socios, con el propósito de comprender el papel que advierte la cantidad de rebajas en la identificación de dependencias y la construcción de los primeros modelos mentales y algebraicos, aspecto clave en el estudio de la covariación. En los resultados de las tareas 1 y 2 no se evidenciaron de manera clara acciones mentales relacionadas con el razonamiento covariacional.

En el desarrollo de la tarea 3 la mayoría de estudiantes realizaron los cálculos y completaron con cierta facilidad la tabla que comprendía suficiente información de las cantidades en el estudio de la situación. Los primeros modelos de (modelación referencial) la situación fueron desarrollados por algunos estudiantes, por ejemplo al realizar preguntas como: Escribe una expresión que permita calcular el valor total de cada rebaja, según una cantidad de veces (x). Lo anterior permitió evidenciar resultados de estudios previos en los cuales se hace mención a la dificultad que muestran los estudiantes en la construcción de modelos de situaciones problema, esto debido a las rutinas habituales de trabajo y ejercitación en forma mecánica principalmente de ejercicios de cálculo aritmético durante los niveles educativos anteriores al año lectivo en estudio. En la misma tarea se movilizaron en los estudiantes las primeras acciones mentales del razonamiento covariacional, AM1, en las cuales justificaron las relaciones entre cantidades presentes y en relación a esto establecer la coordinación de los valores de una variable en relación a los cambios de la otra, acciones mentales esenciales para el desarrollo de las siguientes tareas.

Referencias y bibliografía

Andrade, C (1998). Dificultades en el aprendizaje de la Noción de variación. *Revista EMA*, 3 (3), 241-253.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA,* 8(2), 121-156.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Dolores, C., Salgado, G., (2009). Elementos para la graficación covariacional. *Números, Revista de didáctica de las matemáticas*. 72, 63-74.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel Publishing Co.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos en Competencias Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ruiz Munzón, N; Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con WIRIS. En L. Ruiz–Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 677–702). Jaén, España: Universidad de Jaén.

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau* (Vol. 9).

Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis,* 31, 9-25.