



## Algunas perspectivas de investigación y enseñanza en el álgebra escolar

Ligia Amparo **Torres** Rengifo  
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle  
Colombia

[ligia.torres@correounivalle.edu.co](mailto:ligia.torres@correounivalle.edu.co)

Cristian Andrés **Hurtado** Moreno  
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle  
Colombia

[cristian.hurtado@correounivalle.edu.co](mailto:cristian.hurtado@correounivalle.edu.co)

### Resumen

En este taller se presentan tres perspectivas de investigación y enseñanza para la introducción y desarrollo del álgebra escolar, que potencian el desarrollo del pensamiento variacional, como son: la Generalización de patrones numéricos y geométricos, la Resolución de problemas y la Modelación matemática de fenómenos de distinta naturaleza. Estas perspectivas se han venido construyendo y desarrollando en las Licenciaturas y Maestría del Área de Educación Matemática y programas de extensión y proyección social, de la Universidad del Valle. Tienen su origen en resultados de investigaciones presentados por Kieran (2006), las propuestas curriculares nacionales en matemáticas como los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias (2006), y fundamentadas en desarrollos investigativos del campo de la Educación Matemática. En esta dirección en el taller inicialmente se presenta un panorama general de la investigación en este campo y luego se abordan con los participantes 6 propuestas de aula que abordan estas perspectivas.

*Palabras clave:* álgebra escolar, pensamiento variacional, generalización de patrones, resolución de problemas, modelación matemática.

### Planteamiento del problema y antecedentes

La investigación en didáctica del álgebra hasta finales del siglo pasado se caracterizó por identificar y especificar las dificultades, obstáculos y errores en el tránsito del pensamiento numérico al algebraico de los estudiantes en la escuela y en los del estudio formal de esta disciplina (Gallardo y Rojano, 1988; Kieran, 1992; Ursini, 1996; Amerom, 2002; Socas, 2011; Castro, 2012; Arcavi, 2013). Es así como desde el punto de vista didáctico existe una amplia literatura que presenta gran variedad de resultados investigativos sobre este campo problemático.

Además, con relación a la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra en la escuela, sobresalen compilaciones que organizan la producción investigativa en álgebra escolar desde diferentes perspectivas, como por ejemplo, la Agenda de investigación para la Educación Matemática, de la NCTM (1989), sobre el aprendizaje y enseñanza del álgebra, editado por Sigrid Wagner y Caroly Kieran. La NCTM en esta publicación expone 15 reportes de investigación, en la segunda parte la agenda de investigación y en la última algunas consideraciones teóricas. En los reportes de investigación se enfatiza, desde la perspectiva temática, obstáculos cognitivos en el aprendizaje del álgebra, estudios cognitivos sobre el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje de esta disciplina, la incorporación de sistemas tutoriales tecnológicos y en general de las tecnologías de la información en la enseñanza del álgebra. Así mismo, las reflexiones sobre teorías acerca de los sistemas de representación matemática y las perspectivas del álgebra escolar para el año 2000. Se proponen algunos tópicos sobre la agenda de investigación, relacionados con lo cognitivo y lo curricular.

Es importante anotar que en la publicación mencionada sobresale el trabajo de Kieran, sobre las ecuaciones algebraicas y en el último apartado, se considera, el estudio del desarrollo histórico del álgebra (como sistema simbólico), para entender ciertos desarrollos u obstáculos en la escuela. Estas investigaciones y otras más sobre esta problemática fueron objeto de estudio hace algunos años en el Área de Educación Matemática, del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, para, posteriormente, y en coherencia con los desarrollos mundiales en investigación en didáctica del álgebra, centrar la atención en propuestas para un acercamiento al álgebra desde lo numérico y geométrico, y para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico y variacional en los estudiantes en la escuela, que permitieran superar o abordar las dificultades antes caracterizadas.

En esta dirección, inicialmente en el marco de los trabajos de grado, tanto de pregrado como de maestría de esta área interesados en esta problemáticas, se abordan los estudios recopilados por Bednarz, Kieran y Lee (1996) que permiten determinar diversas perspectivas de iniciación al álgebra, en las cuales se abordan aspectos fundamentales de la problemática planteada por las investigaciones antes registradas sobre el paso de lo aritmético a lo algebraico. Se propone, en estos trabajos el ingreso en una forma más natural y constructiva al álgebra en la escuela. Perspectivas valoradas por la comunidad de educadores matemáticos: el establecimiento de actividades de generalización, el trabajo con el enfoque de funciones, el desarrollo de actividades de modelación, la resolución de problemas y el enfoque desde una perspectiva histórica. La introducción del texto, hace una síntesis importante de estas perspectivas para la iniciación del trabajo algebraico en la escuela. Aquí se presenta la manera como se perciben estos enfoques incluyendo otras investigaciones en esa misma dirección como el texto de Filloy, Puig y Rojano (2008) sobre el Algebra educativa, como una aproximación teórica y empírica en este campo. Es así que, en los trabajos de pregrado y maestría que abordan estas tipo de problemáticas, se reconoce que desde la etapa inicial del proceso de construcción de pensamiento algebraico es fundamental la movilización de elementos asociados a la variación, los cuales permiten pasar del mundo de la cantidad al mundo de las relaciones, a través de la identificación de relaciones funcionales; estableciendo que el pensamiento algebraico integra el concepto de variables con todas sus connotaciones, usos y conexiones, es decir acepta la existencia de lo desconocido o lo que varía, representarlo a través de símbolos y operar sobre ello.

Una muestra de estos trabajos se presentará en el Taller, por ejemplo, en los trabajos trabajo de grado de Rivera y Sánchez (2012) y Moreno (2015) sobre **la generalización de**

**patrones numéricos**, se enfatiza en la aproximación temprana al álgebra, en la educación básica primaria, desarrollando elementos fundamentales del pensamiento variacional a través de situaciones problemas contextualizadas donde el trabajo con patrones numéricos posibilitan un acercamiento a las relaciones de dependencia entre cantidades y magnitudes desde la estructura multiplicativa; en los trabajos de Calderón y Dávalos (2011) y Hurtado (2014) enfocados desde la perspectiva de **la resolución de problemas** algebraicos, se explora, de una parte, la potencialidades de algunas heurísticas utilizadas por los estudiantes de grado octavo de la Educación Básica colombiana en la resolución de problemas algebraicos, y de otra, el análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real en la resolución de problemas algebraicos, para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes y; en los trabajos de grado de Angulo (2014) y de Grueso y González (2016) sobre la modelación matemática, en uno, se analiza la articulación de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal a través de procesos de modelación de fenómenos en el marco de estos proyectos, y el otro, se aborda la función como covariación a través de la modelación de fenómenos geométricos.

En esta perspectiva, en el taller que aquí se propone se abordarán las situaciones de estos trabajos para ser analizadas con los participantes y dilucidar las potencialidades y limitaciones de sus enfoques de investigación y enseñanza.

### **Marco teórico de referencia**

El marco de referencia conceptual de estos trabajos tiene en común aproximaciones y desarrollo del trabajo algebraicos en la escuela, desde los enfoques de generalización de patrones o de leyes que rigen los números, la resolución de problemas específicos o clases de problemas, así como la modelación de fenómenos de distinta naturaleza.

Desde la perspectiva de generalización, se concibe el álgebra como el lenguaje para la expresión y manipulación de generalidades (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1999) y por lo tanto las tareas y actividades escolares para involucrar a los alumnos en el álgebra está relacionado con la generalización de patrones numéricos y geométricos y cuyo propósito es el tránsito de lo particular a lo general y viceversa. Estos trabajos, centran la atención en el proceso inductivo, como estrategia heurística para resolver problemas matemáticos. Así mismo considerar que el lenguaje numérico es una herramienta fundamental para la identificación de patrones y la forma de expresión de la generalidad se hace generalmente en forma retórica, el paso a la expresión algebraica es complejo. Es así, como el proceso de generalización comienza en cuanto se intuye un cierto esquema general subyacente, aunque todavía no se pueda expresar claramente. Este proceso lleva a hacer una conjetura sobre una gran cantidad de casos a partir de unos pocos ejemplos. El proceso de justificar la conjetura trae consigo una nueva generalización y ahora el énfasis se desplaza de intentar averiguar qué puede ser verdadero a tratar de ver por qué ha de ser verdadero. Radford (2013) también ha realizado importantes contribuciones a la perspectiva de la generalización de patrones para el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas. Para este autor la generalización de patrones, numéricos, geométricos, pictóricos, entre otros, comporta tres problemas fundamentales mutuamente relacionados. El primero de ellos es el fenomenológico, en el cual se deben considerar las determinaciones sensibles que se hacen sobre los casos particulares de la secuencia dada para tomar conciencia sobre lo que es común; el segundo es el epistemológico, sobre el cual se realizan las generalización (llamadas por él abducciones) de los aspectos comunes hallados sobre los hechos concretos, de tal modo que se produce un nuevo objeto matemático; y finalmente el tercer

problema está relacionado con los medios semióticos que se disponen para objetivar y comunicar la generalización lograda. Además, caracteriza dos tipos de generalización por las cuales es posible pasar en el tratamiento de este tipo de actividades, la aritmética, que es simplemente usada para pasar de un término de la secuencia al otro, anclada eminentemente al hecho concreto, al caso particular; y la propiamente algebraica, en la cual se deduce una fórmula que es usada apodóticamente para hallar cualquier término de la figura.

Coherente con lo anterior, es posible considerar que dentro del proceso de desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, es fundamental presentar situaciones donde se requiera establecer relaciones, identificar características comunes de los casos específicos dados y llegar a una lectura y escritura de lo general, que constituye el interés fundamental de dos de los trabajos de investigación que se compartirán en el taller.

En las investigaciones en las perspectivas de modelación, la elaboración de modelos matemáticos que den cuenta de fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas y con los que además se puedan predecir eventos futuros es considerada por autores como Freudenthal (1983). Esta actividad, al inscribirse situaciones de las matemáticas mismas, ha favorecido la construcción de teorías y el avance científico de la disciplina en cuestión. En la literatura especializada es posible encontrar diversos nombres para designar el proceso de elaboración de modelos, y aún en algunos casos, se establecen relaciones y/o diferencias entre ellos. Algunos de estos nombres son: modelación, matematización y modelaje. Este enfoque de Modelación ha cobrado en los últimos años un creciente y especial interés, más precisamente desde la Didáctica de las matemáticas, interés que ha arrojado como resultado de diversas investigaciones la identificación de diferentes perspectivas según la didáctica y los objetivos que se persigan. En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), la modelación se cataloga como un proceso presente en toda actividad matemática con el cual es posible describir las interrelaciones entre el mundo real y las matemáticas. Así, el proceso de modelación implica la identificación de una situación problemática real, la cual es puesta bajo observación con el objeto de formularla matemáticamente, es decir, encontrar los aspectos matemáticos presentes en ella; esto conducirá a la construcción del modelo, el cual será objeto de un proceso de validación a partir de su poder de predicción y descripción de los fenómenos que hacen parte de la situación problemática originaria. Para llegar a identificar las matemáticas presentes en distintas situaciones es preciso descubrir relaciones entre las variables de un problema, descubrir regularidades, transferir un problema de la vida real a un problema matemático, etc. Después de ello, el problema debe tratarse con herramientas matemáticas, para lo cual se puede representar una relación en una fórmula, utilizar distintos modelos, validarlos, entre otros aspectos. Janvier (1996) enmarca la modelación en el trabajo de construcción del lenguaje algebraico y la define como un proceso que comprende dos fases: la fase de formulación y la fase de validación. En la fase de formulación se establecen las relaciones claves entre las variables del problema, lo cual puede hacerse a partir de medidas o conjeturas; posteriormente, se ejecutan una serie de transformaciones de tipo matemático que conducen a expresar el modelo en una expresión simbólica. La fase de validación comprende la constatación de la validez del modelo a partir de la comparación con la situación que lo origina. Esta validación puede hacerse a través de mediciones, cálculos, etc, lo cual conduce a realizar ajustes en el modelo. Desde este enfoque, la fase de formulación es vital ya que en ella, desde la identificación de las relaciones claves entre las variables del problema, se deduce la regla que hace pertenecer esa relación a una familia de relaciones más general y que en últimas constituirían el modelo, en esta perspectiva se presentaran dos trabajos en el Taller.

Desde la perspectiva de resolución de problemas verbales, Bednarz y Janvier (1996) valoran el análisis de los problemas y el razonamiento usado por los estudiantes al identificar la estructura simbólica involucrada en el cálculo relacional, que permite examinar el paso de la aritmética al álgebra y estimar la dificultad de los diferentes tipos de problemas dados en álgebra. De acuerdo con estos autores la estructura de todo problema de índole algebraica propone cantidades tanto conocidas como desconocidas, relaciones entre estas cantidades y relaciones entre tipos de expresiones, muchas de las cuales son más implícitas que explícitas. La manera como estos dos investigadores aluden a la estructura general de todo enunciado de problema que requiere el uso de ecuaciones permite entonces reconocer dos actividades a las que se ven enfrentados los estudiantes al intentar resolver los problemas. De una parte, es necesario realizar una designación de las cantidades desconocidas dadas en el sistema de lenguaje natural en el nuevo sistema de representación, esto es, la elección de la, o las, incógnita(s); tal elección, a su vez, debe involucrar las relaciones posibles, tanto con los datos conocidos como desconocidos, para poner toda la información en términos de una sola variable. De otra parte, es necesario establecer una igualdad entre las relaciones existentes, es decir, nombrar de dos maneras diferentes la misma relación para obtener la ecuación. Estos investigadores llaman la atención sobre la exigencia y complejidad que se pone de manifiesto en la resolución de estos problemas, pues ello exige el análisis de las relaciones que se deben identificar en el problema, tanto en cantidad como en su naturaleza y sus vínculos, esto es, relaciones aditivas conjugadas con multiplicativas que posteriormente tendrán que operarse, mucha de las cuales son implícitas.

### **Metodología y propósito del taller**

Este taller, como espacio de interacción entre los proponentes y los maestros, investigadores y asistentes en general, mediado por la lectura y análisis de las situaciones problemáticas para movilizar reflexiones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela, se ha organizado en cuatro momentos. Un primer momento (15 minutos) donde se presentarán los aspectos más relevantes de los enfoques de teóricos y metodológicos desde donde se abordan las situaciones y tareas de los trabajos que se presentan; un segundo momento (40 minutos) donde se trabajará la situación 1 de cada uno de los seis trabajos de grado, en grupos de 4 o 5 personas asistentes al taller, donde cada grupo abordara una situación; un tercer momento (40 minutos) donde se trabajará la situación 2 de cada uno de los trabajos, se realizará utilizando el mismo esquema del segundo momento. Finalmente, se realizará una plenaria (15 minutos) para socializar el análisis y las reflexiones de los grupos de trabajo. Al finalizar el taller se recogerán las conclusiones y las recomendaciones para mejorar cada propuesta de trabajo en el aula.

Este taller tiene como propósito compartir algunas situaciones y tareas de las propuestas de aula de los trabajos de grado de pregrado y maestría del Área de Educación Matemática, de la Universidad del Valle, los cuales se denominan: (1) Desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria: Generalización de patrones numéricos, (2) Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos, (3) Análisis de la articulación de proyectos productivos agroindustriales y las función lineal, (4) El concepto de función como covariación en la escuela, (5) Potencialidades de algunas heurísticas utilizadas por estudiantes de grado octavo en la resolución de problemas algebraicos y (6) Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la Educación Básica. Además, interactuar con los participantes a través de sus análisis y reflexiones sobre la pertinencia de las tareas, sus contenidos matemáticos y los desempeños que movilizan.

### Plan de acción del taller

Algunas de las situaciones que se trabajarán en el taller son:

Del trabajo (1) de la Situación problemática 2 y 3:

#### Actividad 2: En búsqueda de la clave numérica

La jaula donde se encontraba encerrado Hansel estaba asegurada con un candado enorme que debía ser abierto con una combinación de 12 números. Cerca de allí, había una secuencia de números que podían ser la clave para liberar el candado, pero algunos de ellos estaban tapados y el niño no los podía ver. La secuencia es la siguiente:

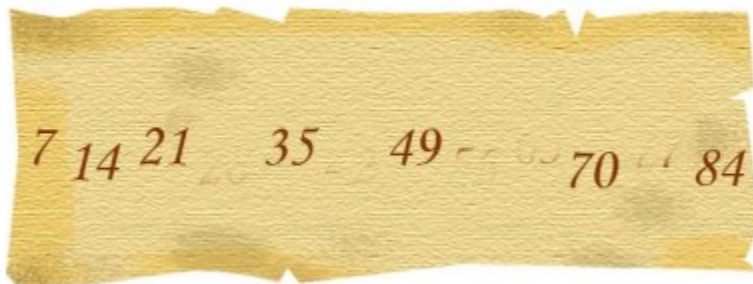


Figura 1. Secuencia numérica para completar.

1. Ayúdale a Hansel a completar la serie con los números faltantes.
2. ¿Qué tuviste en cuenta en el momento de buscar los números que faltaban para completar la que podría ser la clave del candado?
3. Hansel cree que uno de los números que completan la secuencia es el número 52, ¿estás de acuerdo con el niño? ¿Por qué?
4. Si esta serie continúa ¿Existe alguna forma de calcular cualquiera de los números que siguen? Explica tu respuesta, escribiendo la manera de hacerlo.
5. Construye una serie numérica que sea la clave para abrir una caja fuerte (no olvides que debe tener un patrón).

#### Situación 3: Patrones y producto con piedritas.

##### Actividad 1: El producto como organizador de arreglos con piedritas

Recuerda que Hansel y Gretel, cuando iban de camino a lo profundo del bosque, arrojaron un grupo de piedritas, imagina que no eran sino 500 piedritas y que riegan por el camino 240 de esas 500 piedritas en grupos a igual distancia.



1. Indica el número de piedritas que le quedaron a los niños, después de arrojar las 240 piedritas.
2. Hansel y Gretel deciden armar grupos de tres piedritas. ¿Cuántos grupos pudieron armar? ¿
3. Si no fueran grupos de tres piedritas ¿Cuántos grupos podrían formar?
4. Para hacer grupos iguales de piedritas, ¿Cuántas piedritas han de recoger a la vez?
5. Hansel y Gretel escribieron numéricamente las posibles organizaciones que podían hacer con las piedritas, pero se le borraron algunos datos. Ayúdale a completar la siguiente tabla.

Tabla 1

*Organizaciones de piedritas hechas por Hansel y Gretel*

Grupo de piedritas	Número de piedritas por grupo	Total
8		240
	60	240
12		240

6. Encuentra y escribe una forma de escribir el total, teniendo en cuenta que el número de grupos es  $a$ , el número de piedritas es  $b$ , y el total es  $c$ .

Los tres enfoques sobre los cuales versan las seis situaciones que se compartirán en el taller han mostrado, a través de los distintos trabajos de grado, el potencial que tienen para la introducción del álgebra en la escuela y sus procesos asociados. Este hecho, desde luego, ha nutrido la investigación que en el Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle se ha venido gestando en torno a la preocupación que la investigación en Didáctica del Álgebra ha reportado sobre las múltiples problemáticas que maestros y estudiantes enfrentan cuando el álgebra ingresa a la escuela, lo cual ha permitido que tanto la formación de los futuros maestros en las Licenciaturas de matemáticas de la Universidad, así como de profesores que están en ejercicio se nutra a partir de la reflexión conceptual y metodológica en aras de hacerles frente a dichas problemáticas.

### Bibliografía y referencias

- Amerom, B. (2002). Learning and teaching of school algebra. En B. Amerom, *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*, (pp. 3-32). Holanda: Freudenthal Institute.
- Angulo, O. (2014). *Análisis de la articulación de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Arcavi, A. (2013). Reflexiones sobre el álgebra escolar y su enseñanza. En Rico, L., Cañadas, M., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*.
- Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996) (Eds). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*. Londres: Kluwer Academics Publisher.
- Bednarz, N. & Janvier, C. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz et al. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 115-135). Londres: Kluwer Academics Publisher.
- Calderón, N. y Dávalos, P. (2011). *Potencialidades de algunas heurísticas utilizadas por estudiantes de grado octavo en la resolución de problemas algebraicos* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

- Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Board.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*. Dordrecht: Reidel.
- Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Researchs in Didactique dec Mathématiques*, 9, 155- 188. Granada, España: Comares.
- Grueso, R. & González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Hurtado, C. (2014). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la Educación Básica* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 225-236). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 390-419). New York:
- Kieran, C. (2006). Researchs on the learning and teaching of algebra. En Angel, G. y Paolo, B. (Eds), *Handbook of researchs on the psychology of mathematics educations. Past, present and future* (pp. 11-50). New York: Sense Publishers.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1999). *Rutas y raíces del álgebra*. Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Traducción y Edición: Cecilia Agudelo Valderrama.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Moreno, G. (2015). *Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Agenda de investigación para la Educación matemática*. Reston, VA: NCTM.
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En Rico, L., Cañadas, M., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*.
- Rivera, E. y Sánchez, L. (2012). *Desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria: Generalización de patrones numéricos* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.
- Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educación Matemática*, 8(2), 33-40.