XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Un acercamiento dinámico a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto

Sergio Alexander **Guarin** Amorocho
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
sergio_che93@hotmail.com
Sandra Evely **Parada** Rico
Universidad Industrial de Santander
Colombia
sanevepa@uis.edu.co

Resumen

Se presentan avances de una investigación en curso la cual tiene como objetivo caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo Diferencial. Para ello se ha tenido en cuenta la Teoría para la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren. Para lograr el objetivo se ha diseñado una secuencia de actividades y se han planteado las complementariedades de la acción y la expresión para los niveles de comprensión, las cuales se utilizan para el análisis de resultados luego de implementar las actividades. Aquí, se presentan resultados de una de las actividades y las complementariedades que se han construido a la luz del marco conceptual para el análisis.

Palabras clave: cálculo, límite de una función, comprensión, acciones y expresiones

Introducción

La Didáctica de la Matemática ha considerado cada vez más la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos y ya no como adquisición de competencias, lo cual ha evidenciado que las matemáticas de la educación superior se han centrado en el estudio del "Pensamiento Matemático Avanzado" propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios, donde se estudian los conceptos fundamentales del Cálculo.

En ese sentido algunos investigadores como Tall (1991), Sierpinska (1987), entre otros, se han interesado en profundizar en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral.

En particular, la enseñanza del Cálculo Diferencial se ha constituido uno de los mayores desafíos de la educación matemática actual, entre los cuales Blázquez y Ortega (2000) reportan que para los estudiantes el concepto de límite "es árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender" (p.331). Por otra parte Cornu (1991) afirma que una de las grandes dificultades al aprender el concepto de límite no emana solo de su complejidad o de su riqueza, sino en entender que todos los aspectos cognitivos no se pueden aprender a partir de su definición matemática.

Es así que nos planteamos como objetivo de investigación caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo Diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia.

Aspectos Teóricos y Conceptuales

Con el fin de analizar la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, se ha utilizado la Teoría para la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren (1989). La teoría nos ha permitido elaborar de manera a priori las complementariedades de la acción y la expresión para los niveles de comprensión matemática, que desarrollan los estudiantes en un curso de Cálculo Diferencial. Para el desarrollo de la investigación se han considerado los primeros 5 niveles de comprensión matemática asociados al concepto de límite de una función en un punto. A continuación, se describe cada uno de los niveles de comprensión matemática.

• Nivel 1. Conocimiento primitivo: Se refiere al punto inicial de la comprensión donde el estudiante atrae información básica a la situación de aprendizaje.

• Nivel 2. Creación de la imagen: En este nivel el estudiante es capaz de realizar distinciones con base a capacidades y conocimientos anteriores; como resultado, las acciones que se realizan en este nivel involucran el desarrollo de las concesiones entre los referentes y los símbolos. Estas imágenes no solo son pictóricas sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental.

• Nivel 3. Comprensión de la imagen: Las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente, imágenes orientadas por un proceso mental libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie y Kieren, 1992). El estudiante puede usar estas imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

• Nivel 4. Observación de la propiedad: El estudiante puede examinar una imagen mental y determinar distintos atributos asociados con dicha imagen. Además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. De acuerdo con Pirie y Kieren, la diferencia entre el nivel 3 y nivel 4 es la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión.

• Nivel 5. Formalización: El estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este nivel el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona (Pirie y Kieren, 1989). La descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas.

Además, se tiene en cuenta el primer acercamiento que tienen los estudiantes con el concepto de límite de una función, que es a través de la noción de aproximación y mediante la concepción dinámica del límite planteada por Blázquez y Ortega (2002) de la siguiente manera:

"Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe $\lim_{x\to a} f(x)$, si cuando "x" se tiende al número "a", siendo distinto de "a", sus imágenes "$f(x)$" tienden a "L"" (p. 14).

Estos elementos teóricos y conceptuales nos permitieron diseñar y rediseñar las actividades de la secuencia, en la que se pretende favorecer la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo diferencial de la UIS.

Aspectos Metodológicos

La investigación que se reporta sigue una metodología cualitativa que se estructura en las fases de diseño, implementación y análisis de resultados a la luz de los elementos teóricos y conceptuales antes descritos. El punto de partida de la investigación fue el diseño didáctico para el estudio del concepto de límite de una función en estudiantes de bachillerato o de primer semestre universitario, realizada por Betancur, Guarin, Parada y Fiallo (2015).

Para el diseño de la secuencia de actividades, se tienen en cuenta algunos acercamientos epistemológicos y didácticos en la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, como es el caso de Pons (2014), para el autor ese acercamiento necesita usar las nociones de aproximación, tendencia, la concepción dinámica del límite, la concepción optima del límite, la concepción métrica del límite y el uso de las diferentes formas de representar una función (tabular, grafica, algebraica). Para el diseño se tienen en cuenta los aspectos metodológicos propuestos por Fiallo y Parada (2018), quienes plantean que la interacción con un Software Matemático Interactivo debe favorecer la actividad matemática por parte de los estudiantes. La secuencia didáctica del curso engrana la manipulación de medios computacionales con el trabajo con papel y lápiz, y el debate en el aula, la secuencia presenta una estructura intencional que responde a las siguientes fases: exploración libre, socialización de los resultados obtenidos, exploración dirigida, explicación y por último una tarea retadora.

A continuación se describen resultados de las actividades del Taller 2 que tiene como objetivo ilustrar las nociones de aproximación y tendencia que permitirán crear una noción intuitiva del concepto de límite de una función en un punto de manera dinámica con el uso de GeoGebra.

Acercamiento a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto

Para realizar el análisis de las actividades del Taller 2, se tienen en cuenta las complementariedades de la acción y expresión planteadas a partir de los elementos teóricos y conceptuales, que permiten describir la comprensión del concepto de límite de una función un punto. Con este taller se pretende ilustrar de manera dinámica las nociones de aproximación y tendencia, inicialmente se presentan las nociones de manera unidimensional (recta numérica), luego se propone una actividad en un contexto geométrico pero de manera bidimensional para analizar las dos nociones y por último la relación de aproximación y tendencia pero ya de tipo funcional, todas estas actividades se proponen haciendo uso de GeoGebra.

En la actividad 1, se tiene como objetivo identificar la comprensión del estudiante sobre la noción de aproximación, y se espera que el estudiante pueda identificar dos sucesiones numéricas, una a izquierda que está dada por la variable “b” y otra a derecha que está dada por la variable “a”; pero ambas se aproximan a un mismo valor en este caso a 5.

Para este caso podemos observar (ver Figura 1) que el estudiante utiliza la representación gráfica (reta real) y la representación numérica (notación decimal) para ubicar los valores de ambas sucesiones una por izquierda y la otra a derecha de 5 en la recta real (acciones). En ese sentido se evidencia que el estudiante logra interpretar y explicar la existencia de la aproximación representada por las dos flechas direccionadas a 5 (expresión).

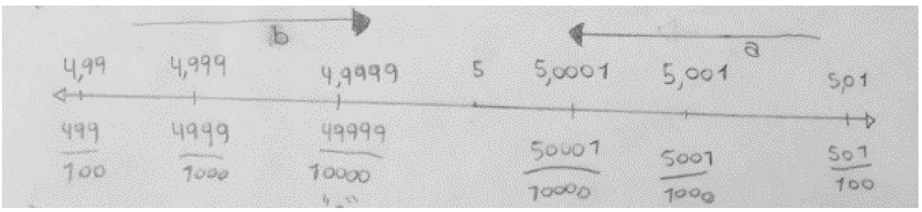

Figura 1. Interpretación de Aproximación

En la segunda actividad (ver Figura 2), se ilustran las nociones de aproximación y tendencia de manera dinámica con GeoGebra. Allí el estudiante reconoce que numéricamente es posible aproximarse a un número real tanto como se quiera (por izquierda y por derecha). Además que el estudiante identificó que es posible acercarse a un punto a partir de la disminución de la distancia, haciendo referencia en que cada vez que se acerca al punto rojo la distancia se hace más pequeña respecto a la anterior, es decir el estudiante está comparando magnitudes. En esta actividad el estudiante con ayuda del zoom (utiliza el deslizador “m”) puede reconocer la existencia de otros puntos. De manera que logre identificar que existe una sucesión de valores que se aproximan a 8, posición donde se encuentra ubicado el punto rojo.

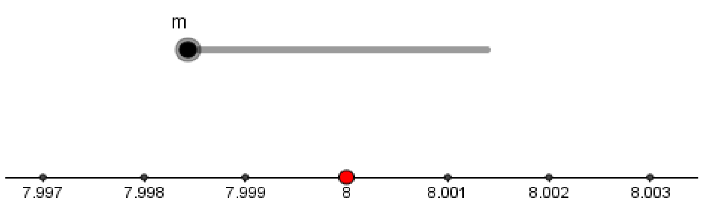

Figura 2. Simulación de la noción de Tendencia

En este caso el estudiante explica (ver Figura 3) que se pueden construir infinitos puntos más cerca al punto rojo. Es decir, la aproximación puede ser cada vez mejorada, el estudiante para explicar esta interpretación da el ejemplo de 8.0001 comparándolo con el último valor que genera el archivo propuesto. Estas respuestas planteadas por el estudiante permiten inferir que está interpretando la diferencia entre aproximación y tendencia como *“una aproximación que mejora cualquier otra*”.

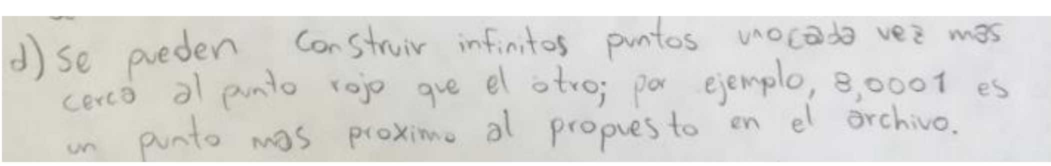

Figura 3. Interpretación de la noción de Tendencia

En la actividad 4, el estudiante establece aproximaciones a "$x = 3$" en el dominio de la función, relacionándolas con las tendencias de $f(x)$, con el fin de analizar el límite de la función en ese punto. Para obtener información de cómo el estudiante interpreta las aproximaciones, se le solicitó elegir valores próximos a $x = 3$, los cuales utilizó para analizar que sucede con la tendencia de la función. En este caso el estudiante decide realizar una tabla de valores relacionando valores en el dominio de la función que a medida que se aproxima a $x = 3$, $f(x)$ tiende a 8, y ese valor sería el límite de la función en ese punto.

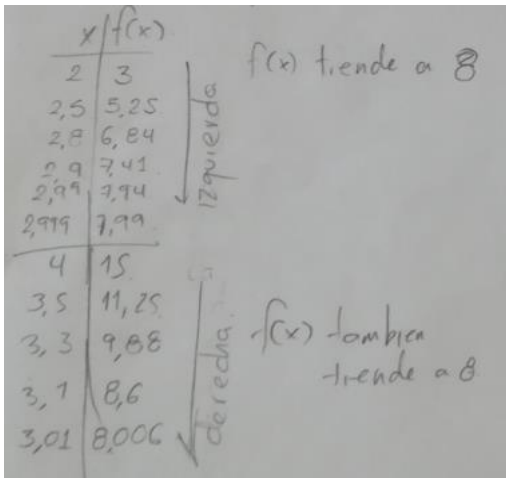

Figura 4. Interpretación del límite de una función en un punto

Esas aproximaciones son acciones que realizó el estudiante, que le permiten expresar que a medida que *"se aproxima a $x = 3$, $f(x)$ tiende a 8 por izquierda y por derecha"* (realizando dos flechas que indican tendencia en la Figura 4), y ese valor sería el límite de la función en ese punto

Reflexiones

Un acercamiento al concepto de límite mediante la aproximación y la tendencia posibilita que el estudiante logre entender el límite de una función como lo que sucede cerca del punto y no en el punto.

El primer momento en la comprensión de un concepto matemático según Thom y Pirie (2006) surge cuando se realizan acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto. En este caso se evidencia que el estudiante inicia a crear la imagen del límite de una función en un punto, a través del uso de la representación tabular, el uso de la hoja de cálculo de GeoGebra. Además, el estudiante logra establecer aproximaciones en el dominio y en el rango de la función a través del registro numérico.

Una contribución importante que lleva las nociones de aproximación y tendencia es, precisar las ideas que se tienen de aproximación por medio de distancias y tomar estas para entender la tendencia a través de la disminución de las mismas.

Referencias y bibliografía

Betancur, A., Guarin, S., Parada, S., y Fiallo J. (2015). La noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite. IX Simposio Nororiental de matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En El futuro del cálculo infinitesimal. Grupo Editorial Iberoamérica. México. 331-354.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8(30), 67-82.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, (Ed). Advanced Mathematical Thinking. (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Fiallo, J., y Parada, S. (2018). Estudio dinámico del cambio y la variación. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Pirie, S., y Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. For the learning of mathematics, 9(3), 7-11.

Pirie, S., y Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. Educational Studies in Mathematics, 23(5), 505-528.

Pons, J. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto. (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante. España.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students y epistemological obstacles related the limitis. Educational Studies in Mathematics. 18(4), 371-397.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed). Advanced mathematical thinking. (pp. 3-24). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Thom, J. S., & Pirie, S. E. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. Jounal of mathematical Behavior, 25, 185-195.