Comprensión de conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial

Diego Antonio **Rolong** Molinares
Universidad de Antioquia
Colombia
Diego.rolong@udea.edu.co
René Alejandro **Londoño** Cano
Universidad de Antioquia
Colombia
renelondono@gmail.com
Carlos Mario **Jaramillo** López
Universidad de Antioquia
Colombia
Camaja59@gmail.com

Resumen

La propuesta busca divulgar divulgación de una investigación a nivel doctoral que analizará la comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti derivada involucrados en el proceso de resolución de una ecuación diferencial en el marco de la Teoría de Pirie y Kieren; para llevar a cabo el estudio se elegirán estudiantes matriculados en un curso regular de ecuaciones diferenciales. Para la recolección de la información se emplearán los experimentos de enseñanza ubicados en el paradigma metodológico llamado investigación de diseño, así mismo, se emplearán algunas técnicas como: observaciones y entrevistas semi-estructuradas que serán parte de las actividades de complementariedad de la acción y expresión. Para el análisis cualitativo de la información recolectada, se utilizará la técnica de triangulación y el software Atlas. Ti. Se espera que sea posible describir los niveles de comprensión de los estudiantes con respecto a los conceptos matemáticos ya mencionados.

Palabras clave: Comprensión, razón de cambio, derivada, experimento de enseñanza.

Antecedentes

Aspectos de comprensión

A continuación, se presentan estudios sobre las ideas que tienen algunos investigadores en aspectos relacionados con la comprensión de conceptos matemáticos tales como: razón de cambio, derivada y antiderivada. La revisión de la literatura reporta hasta el momento investigaciones que muestran ciertas dificultades presentes en los estudiantes para comprender, interpretar, analizar y establecer relaciones entre dichos conceptos en la resolución de problemas.

Bajo la perspectiva de la comprensión, por un lado, Villa (2011) realiza una interpretación alterna de la tasa de variación, empleando para ello, representaciones geométricas, numéricas y cinemáticas simultáneamente haciendo uso de un triángulo, para tratar de elaborar una imagen del crecimiento de una variable con respecto a otra. Por otro lado, Londoño (2011) muestra que mediante la comprensión de procesos de razonamiento infinito se puede establecer la comprensión de la relación inversa entre los conceptos de área bajo una curva y pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, inherentes al teorema fundamental del cálculo.

En lo mencionado anteriormente, se observa que se pueden efectuar procesos cognitivos que permiten transitar entre los conceptos y sus significados al tratar de establecer una relación entre ellos (Sierpinska, 2000). En el contexto de las ecuaciones diferenciales, los estudiantes pocas veces establecen este tipo de relación. Más aún, exhiben un escaso dominio para realizar procesos cognitivos, en los que muestran una comprensión conceptual de objetos matemáticos, y a su vez, tratan de representar e interpretar gráficamente cada concepto en un registro de representación (Duval, 2004) de manera errónea, sin embargo, se evidencian carencias para representarlos en otros sistemas. Se puede inferir que representar un concepto en diferentes sistemas permite comprender su significado de manera paralela.

Después de lo manifestado anteriormente es posible preguntar si un estudiante exhibe comprensión de un concepto involucrado en la resolución de una ecuación diferencial. ¿Podría exhibir comprensión de su solución?; ¿es un factor que puede ser determinante o no?, además, ¿qué tanto influye la comprensión de estos conceptos en la compresión de la solución de una ecuación diferencial?; esta y otras preguntas emergen al tratar la comprensión de los objetos matemáticos que gravitan alrededor de una solución de una ecuación diferencial.

Por su parte, Sfard (2001) considera la comprensión como una elaboración de esquemas mentales en el que participan artefactos y símbolos, considerados como una herramienta que regulan una comunicación. En el contexto de las ecuaciones diferenciales se emplea un lenguaje simbólico como una herramienta para tratar de establecer una relación entre: las expresiones algebraicas de un enunciado y los conceptos involucrados en el proceso de resolución de una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con su gráfica, de tal manera, que le permita comprender su solución. En las actividades de clase se observa que estos procesos son realizados por los estudiantes de manera mecánica, además, pocas veces logran establecer las relaciones requeridas, lo que dificulta la comprensión de los conceptos y por ende la comprensión de la solución de una ecuación diferencial.

Con la revisión de la literatura realizada, se observa que las posturas epistémicas de los autores antes mencionados, involucran procesos de elaboración, relación, construcción y abstracción que permiten reorganizar un conocimiento para comprender un concepto matemático.

Aspectos sobre ecuaciones diferenciales

A continuación, se mencionan algunas investigaciones en el campo de las matemáticas avanzadas, relacionadas con aspectos de las ecuaciones diferenciales, que permiten obtener información valiosa sobre las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de comprensión de su solución en una actividad matemática dada.

Guerrero, Camacho y Mejía (2010) afirman que los estudiantes presentan dificultades para comprender la solución de una ecuación diferencial ordinaria, al expresarse ésta en forma algebraica o gráfica; estas dificultades están relacionadas con conceptos propios de las ecuaciones diferenciales, objetos matemáticos, técnicas y métodos empleados en la resolución de la misma.

En las actividades de clase algunos estudiantes manifiestan estas dificultades al tratar de expresar de manera algebraica la gráfica del campo direccional de la solución de una ecuación diferencial o viceversa. Por ejemplo, dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - e^{-x} = -2y$ cuya solución es $y = e^{-x} + ce^{2x}$ donde c es una constante arbitraria, es posible que un estudiante reconozca esta expresión algebraica, pero se le dificulte asociarla con la gráfica de su campo direccional correspondiente.

Por otra parte, las dificultades mencionadas por Rasmussen (2001) para comprender aspectos relacionados con la solución de una ecuación diferencial, son también tomadas por Guerrero, Camacho y Mejía (2010) cuando manifiestan que al ignorar una expresión algebraica vinculada a la solución de una ecuación diferencial, se afecta la comprensión de la misma, influenciada quizás, por la desconexión que exhibe un estudiante de los conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada, entre otros, además de las generadas al tratar de expresar dicha solución al utilizar diferentes sistemas de representación.

Con el fin de establecer mecanismos que propicien la solución de un problema real por medio de una ecuación diferencial, Rasmussen & Kwon (2007) presentan un proyecto llamado *An inquiry-oriented approach to Undergraduate mathematics (IO-ED)* que ofrece un marco que distingue dos categorías, la primera, centrada en aprender matemática a través de la buena argumentación, y la segunda, desarrolla en el estudiante la capacidad de reconstrucción de sus conceptos matemáticos como punto de partida para la investigación, en la que se desarrollan técnicas analíticas, gráficas y numéricas para examinar las soluciones de ecuaciones diferenciales.

A continuación, se manifiestan algunos aspectos en los que se relacionan las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la solución de una ecuación diferencial y los conceptos involucrados.

Planteamiento del problema

Las ecuaciones diferenciales son expresiones algebraicas que tratan de representar o modelar problemas físicos, biológicos, químicos, entre otros, para conjeturar soluciones a corto y mediano plazo. Si bien es cierto que antes del siglo XVII existían investigaciones que contribuyeron en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales, es a partir de esta fecha que se consolidan conceptos fundamentales para formar la base de una teoría rica y abundante inherente a este campo específico de las ecuaciones diferenciales, en la que los investigadores matemáticos han podido brindar importantes soluciones a problemas propios de las ciencias, por lo tanto, ha sido un conocimiento indispensable a tener en cuenta en los currículos de los programas de ciencias e ingenierías en los que tanto estudiantes como profesores han tenido que enfrentar arduos razonamientos para interpretar y comprender una ecuación diferencial y su solución.

En este orden de ideas, las ecuaciones diferenciales han sido orientadas mediante programas revestidos de una matemática formal que emplea técnicas de solución analítica (Dullius, 2009, p.37). Los estudiantes bajo los programas reciben una formación para solucionar problemas, mediante el uso de definiciones y procedimientos matemáticos que aplican de manera mecánica. Estos procedimientos requieren procesos de conceptualización, razonamiento, análisis, abstracción y generalización, los cuales requieren de distintas formas de expresión y representación (Duval, 2004).

A pesar de que existen cambios tanto de contenido como de forma, dado los asistentes de computación matemáticos relacionados con los programas para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, las técnicas analíticas han sido un punto de apoyo en la resolución de ecuaciones diferenciales en estos cursos (Rasmussen, 2001). Más aún, los estudiantes dan muestra que se aprenden las definiciones de manera mecánica sin comprenderlas y reproducen lo visto en clases, con lo cual afectan su creatividad y raciocinio (Moreno & Azcárate, 2003). Además, estas técnicas las utilizan de manera mecánica para resolver y hallar una expresión algebraica como una solución de una ecuación diferencial (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2009) y, exhiben dificultades al relacionarlas con otros sistemas de representación. Asumiendo esta postura, podría entonces considerarse que la relación entre registros de representación puede coadyuvar al proceso de comprensión de una ecuación diferencial.

Es así, como puede observarse que en las actividades de clase, dada una solución de una ecuación diferencial en un sistema de representación que involucra conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada, pocas veces los estudiantes tratan de establecer relaciones entre ellos y con otros sistemas, por lo que se identifican conexiones cognitivas débiles para interpretar y comprender dicha solución (Duval 1999) de manera gráfica, algebraica, numérica y cualitativa. Esto influenciado quizás por las preferencias que tienen los profesores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma en las cuales involucran aspectos conceptuales y procedimentales.

Esta investigación pretende Analizar cómo comprenden los estudiantes los conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada involucrados en el proceso de resolución de una ecuación diferencial al expresarlos en otros sistemas de representación.

Formulación del problema de investigación:

Teniendo en cuenta las dificultades que exhiben los estudiantes de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial, por cuanto están relacionados con razonamientos asociados al concepto de razón de cambio como proceso inverso al de anti-derivación, me permito plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo es la comprensión de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial al emplear procesos analíticos, gráficos y algebraicos?

Objetivo

Analizar la comprensión que los estudiantes exhiben de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti derivada al emplear métodos analíticos, gráficos y algebraicos en el proceso de solución de una ecuación diferencial en el marco de la teoría para la comprensión matemática de Pirie y Kieren.

Marco teórico: Teoría para el crecimiento de la comprensión matemática

El concepto de comprensión se ha empleado de manera amplia en la literatura relacionada con la Educación Matemática; durante muchos años se ha indagado por una definición que permita esclarecer su significado, dada su alta complejidad para definirla. Dadas las diversas contribuciones que se han hecho al respecto, a continuación, se presentan algunos estudios sobre la comprensión.

La teoría para el crecimiento de la comprensión matemática emerge desde un enfoque constructivista; Pirie y Kieren apoyados en la definición propuesta por Von Glasersfeld (1987) consideran la comprensión matemática como un todo dinámico, no lineal, recursivo y jerarquizado de una reorganización de las estructuras cognitivas. Esta teoría se constituye en una herramienta que actúa como una lente a través de la cual puede observarse el proceso de evolución de la comprensión de un concepto matemático de un individuo o de un grupo de individuos. La teoría propone un modelo compuesto por ocho niveles que describen la evolución de la comprensión de conceptos matemáticos, los cuales son: Nivel 1. Primitive Knowing. (Conocimiento primitivo); Nivel 2. Image Making. (Construcción de la Imagen); Nivel 3. Image Having. (Comprensión de la Imagen); Nivel 4. Property Noticing. (Observación de la propiedad).

Así mismo, está dotado de unas características, de las cuales mencionaré una que es objeto de este estudio. En ella se exponen los procesos, las acciones y expresiones que realiza un estudiante en la medida que avanza en la comprensión de un concepto matemático determinado. Se hace referencia a las c*omplementariedades de la acción y la expresión.* Al respecto, Pirie & Kieren (1994) afirman que más allá del conocimiento primitivo o Primitive Knowing, cada nivel está compuesto por dos aspectos complementarios, una acción y una expresión, presentes en los demás niveles excepto el primero y el último. En ella se considera que el crecimiento de la comprensión acontece primero actuando y luego expresando, la primera incluye una comprensión previa y la segunda se articula de diferentes formas para cada nivel en particular.

En las actividades de clase, se observa que los estudiantes pocas veces relacionan los conceptos de razón de cambio, derivada y anti derivada con su gráfica, o realizan descripciones dada la gráfica de un concepto o función; de igual manera, se les dificulta comprender las características de una gráfica y formalizarlas por medio de una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que las represente. Para comprender una solución de una ecuación diferencial se considera que estos procesos se pueden complementar. Es así que a través de las complementariedades de la acción y expresión se realizará un análisis de crecimiento de la comprensión de estudiantes de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial. De este modo, los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y de ecuaciones diferenciales en términos de la teoría de Pirie y Kieren se pueden expresar grosso modo mediante la figura 1. Las abreviaturas relacionadas en la figura se describen a continuación. RC: Razón de cambio; DR: Derivada; AD: anti derivada; ED: Ecuación diferencial.

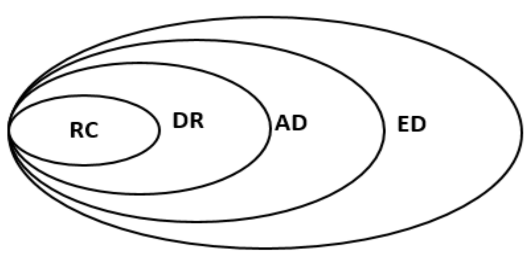

Figura 1 Representación de conceptos en términos de la teoría de Pirie y Kieren.

Metodología

Este estudio es de carácter cualitativo y para llevar a cabo esta investigación se propone como método el denominado *experimentos de enseñanza*, considerado como un tipo de estudio ubicado dentro del paradigma de investigación de diseño o investigación basada en diseño

(Confrey, J & Lachance, A., 2000). Este método tiene en cuenta las interacciones, acciones, eventos y circunstancias que rodean a un estudiante para comprender los procesos de nseñanza y aprendizaje (Creswell, 2005). El método es considerado por Molina, J. & Castro, E. (2011) como un tipo de metodología de naturaleza cualitativa desarrollada dentro de las ciencias del aprendizaje en contextos naturales con toda su complejidad para comprender y mejorar la realidad educativa.

Al respecto, Steffe & Thompson, P. W. (2000) lo consideran como una sucesión de episodios de enseñanza que constan de cuatro elementos básicos: un profesor investigador, uno o más estudiantes y un testigo de episodios de enseñanza quien aportará interpretaciones alternativas a las hechas por un cuarto que es el profesor investigador. Este tipo de estudio según Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Leher, R., & Scauble, L. (2003) busca crear conocimiento y hacer progresar teorías de aprendizaje y enseñanza en ambientes complejos, que mediante el estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, permite analizar su desarrollo en un contexto natural. El objetivo de este tipo de estudio es generar conocimiento mediante el apoyo en la información obtenida y en las decisones sobre la práctica educativa para mejorar el aprendizaje en estudiantes (Molina, M.,2006).

Una característica que se destaca en este tipo de estudios es la ruptura entre docente e investigador cuyo motivo es el propósito de los investigadores para experimentar de primera mano el aprendizaje y el razonamiento de los estudiantes (Kelly, A. E. & Lesh, R. A., 2000). Los experimentos de enseñanza se hacen con el fin de testar y generar hipótesis, durante cada uno de los episodios de enseñanza en la duración del experimento o de manera general. Estas hipótesis son reformuladas en la medida que se analiza la información recolectada, de tal manera que se pueda elaborar un modelo de aprendizaje que permita el desarrollo del conocimiento en un estudiante, siendo éste, un producto que se obtiene de la forma de operar situaciones planteadas por el profesor investigador (Molina, M, Castro, E. , Molina, J., & Castro, E, 2011).

Teniendo en cuenta lo anterior, y en el marco de los desarrollos teóricos y metodológicos de Molina, J., & CasTro, E, (2011), en la presente investigación se emplearán dos tipos de análisis de datos, por un lado, un análisis de datos continuo y preliminar, que consiste en analizar los datos después de cada episodio de enseñanza, facilitando la revisión y el desarrollo de las conclusiones de la investigación y guiando la toma de decisiones hacia futuras intervenciones. Por el otro, un análisis final, el cual consiste en examinar todos los datos recolectados y todo el proceso de investigación para la obtención y evaluación de los resultados. Este análisis permite describir la evolución de las conjeturas y el progreso del pensamiento de los estudiantes durante el desarrollo de la investigación.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, la información obtenida se analizará teniendo en cuenta la respectiva categorización. En esta investigación se empleará una triangulación de la información proveniente de los datos recolectados en cada episodio de enseñanza propuesto, registros escritos, verbales, de audio, de video y de las observaciones de los investigadores. Adicional a lo anterior, se empleará el software Atlas. Ti, para analizar un análisis cualitativo de la información recolectada, lo cual permitirá indagar sobre el crecimiento de la comprensión de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial.

La investigación se hará en tres fases de acuerdo con lo manifiestado por Cobb & Gravemeijer (2008), las cuales son: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo. En la preparación del experimento, se diseña una situación problema y se plantean hipótesis para cada diseño. En esta etapa se recolecta información y se analiza con el propósito de refinar el experimento y las hipótesis. En la etapa de experimentación, mientras que ocurren los episodios de enseñanza, se podrán refinar o modificar con justa causa según las necesidades que el investigador requiera. Finalmente, se realiza un análisis retrospectivo el cual es un análisis cuidadoso de los registros de audio y video para traer a colación aquellas interacciones en las que se manifiesta o no la comprensión de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial.

Los participantes en esta investigación son estudiantes de quinto semestre del programa de ingenierías, en los que el departamento de ciencias básicas ofrece la asignatura de ecuaciones diferenciales. Los estudiantes se seleccionarán por la manera en que realizan los procesos mecánicos, la forma de abordar una ecuación diferencial, las dificultades que presenten al solucionar una ecuación diferencial, entre otros.

Resultados esperados

En la presente investigación se esperan alcanzar los siguientes resultados:

- Expresar en términos de las complementariedades de la acción y la expresión, manifestaciones de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti-derivada.

- Plantear descriptores para los niveles de comprensión de la teoría de Pirie y Kieren que permitan establecer el nivel de comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti-derivada, involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial; tales descriptores, a su vez, facilitarán el refinamiento de la entrevista semi estructurada.

- Determinar si las complementariedades de la acción y la expresión son adecuadas para describir el nivel adquirido por los estudiantes en la comprensión de los conceptos asociados en la solución de una ecuación diferencial.

Referencias Bibliográficas

Camacho, M., Perdomo,J, & Santos Trigo, M. (2009). Revisiting university students´ knowledge that involves básic differential equation questions. PNA, 3(3), 123-1333. .

Cobb, P, Confrey, J., Disessa, A, Lehrer, R, & Schauble, L. (2003). desing experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), pp.9-13.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, en Kelly, A. E Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (eds.). (L. E. Associates, Ed.) *Handbook of design research mathods in education. innovation in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 68-95.

Confrey, J, & Lachance; A. (2000). Transformative teaching experiments through conjeture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A: Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, 231-265. New Jersy: Lawrence Erlbaum associates.

Creswell, J. (2005). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research.* Upper Saddle River: Perarson Education.

Dullius, M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y análitico.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano resgistros semióticos y aprendizajes intelectuales.

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. REgistro Semiótico y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

Guerrero, C., & Camacho, M. &. (2010). Dificultades de los estudiantes en interpretación de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de la ciencias*, 341-352.

Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (2000). Handbook of research design in mathematics and science education. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Londoño, R. (2011). La relación inversa entre cuadrátura y tangentes en el modelo de Pirie y Kieren. Tesis doctoral. Colombia: Departamento de Educación Matemática. Universidad de Antioquia. Disponible en tesis.udea.edu.co/bitstream/10495/6920/1/ReneLondoño_2011_teoriapirie.

Molina, M, Castro, E. , Molina, J., & CasTro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñana. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.

Molina, M. (2006). Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual (Tesis para optar por el grado de doctora en Didpactica de la Mtemática). *Departamento de Didáctica dela Matemática.*, Universidad de Granada, España.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de las enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 265-280.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in the mathematical understanding how can we characterise it and how we represent it? *Educational Students in Mathematical*, 165-190.

Rasmussen, C. (2001). New directions equations differential a framework for interpreting student´s understandings and difficulties. *Journal Mathematical Behavior, 20,* 55-87.

Rasmussen, C., & Kwon, O. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *Journal Mathematical Behavior, 26,* 189-194.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse then meets the ears: Loking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematicac 46*, 13-57.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students´thinking in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Eds.) The Teaching of linear Algebra in Question (pp. 209-246). Netherlands: Kluwe Academic Publishers.

Steffe, L., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306. Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Villa ochoa, J. (2011). La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis de la teoría de Pirie y Kieren. Tesis doctoral. Colombia Departamento de Educación Matemática. Universidad de Antioquia. Disponible en ayura.udea.edu.co:808.

Von, G. E. (1987). The cosntruction of Knowledge, Seaside. *Intersystems Publications*.