



Constituyendo prácticas matemáticas en proyectos pedagógicos de modelación -PPM-

Fabian Arley Posada-Balvin

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte -UFRN-
Brasil

fabian@ccet.ufrn.br - fapoba@gmail.com

Resumen

La modelación matemática puede ser entendida como una forma de solucionar problemas no matemáticos mediante la matemática. Cuando ese proceso es usado en contextos pedagógicos, toma otras dimensionalidades que van más allá de la matemática aplicada. En este trabajo presentamos un análisis del proceso de constitución de prácticas matemáticas en contextos Pedagógicos de Proyectos de Modelación -PPM-, que por la manera como son constituidas, pueden ser entendidas con el significado de objetos e/o de instrumentos y por esa vía, de modelos matemáticos. Ejemplificamos el proceso mediante la producción de un grupo de alumnos de un curso de matemática para Biología de la universidad UNESP/SP/Brasil, a quienes se les propuso como tarea desarrollar un proyecto de modelación en una temática del propio interés. Concluimos que las prácticas matemáticas se constituyen por la coordinación de variaciones espacio-temporales de las cantidades escogidas como pertinentes, con formas generales de correlación entre esas mismas cantidades.

Palabras clave: modelación matemática, teoría de la actividad, producción de conocimiento matemático, enseñanza y aprendizaje de matemática.

A manera de Introducción

De acuerdo con tradiciones filosóficas racionalistas, la teoría y la práctica se encuentran categóricamente separadas, cada uno con sus propias características e identidades. De un lado, la teoría en forma de ideas, conceptos, creencias, hipótesis, conjeturas e imaginarios, cuya existencia ideal permite describir realidades posibles pasadas por apropiación y futuras por creación. Pero, de otro, la práctica caracterizada por acciones reales ejecutadas sobre objetos materiales (que existen independiente de la conciencia humana), a partir de la propia corporeidad extendida por instrumentos. Bajo esa perspectiva, teoría y práctica, además de diferentes, se presentan con carácter opuesto negándose mutuamente y, de cierta forma, caracterizándose con grados de importancia de acuerdo con intereses particulares.

Otra manera de plantear la relación entre teoría y práctica es a partir de perspectivas más contemporáneas de corte antropológico y socio-cultural. En estos casos, separar categóricamente la teoría de la práctica se torna insostenible. De acuerdo con estas posturas, aunque se puedan crear discursos que las categoricen con naturaleza diferente, en realidad son dos mundos que se condicionan y se co-determinan mutuamente. Teoría y práctica conviven dialécticamente en unidad, haciendo que la práctica, de un lado, pierda su carácter ingenuo por el enriquecimiento y la concreción de los constructos teóricos, y la teoría, de otro, su carácter de especulativa mediante criterios de verdad que solamente la práctica puede ofrecerle.

Tal indisolubilidad puede percibirse principalmente en las más variadas actividades humanas. Para Leontiev (1978, 1979), las actividades humanas se caracterizan por ser unidades moleculares, no aditivas, de acciones materiales y de reflexiones mentales de sujetos corpóreos en que converge tanto a capacidad de idealizar (teorizar) mediante anticipaciones y proyecciones, como acciones corpóreas externas (prácticas). En esas condiciones las actividades humanas se tornan materialmente objetivas siempre que la realidad sea pensada, idealizada y proyectada teóricamente, produciendo no solamente nuevas acciones prácticas y realidades materiales innovadoras, sino también creando condiciones de desarrollo para los sujetos que las realizan. Visto así, las acciones prácticas, además de ser puntos de partida para la construcción de teorías son su fin, en la medida que los avances teóricos dependen de los procesos transformadores del mundo material. Para transformar el pensamiento y producir nuevos conocimientos es necesario generar nuevos sistemas de prácticas en los sujetos.

De ese modo, las acciones prácticas de los sujetos no pueden verse únicamente como simples imitaciones o repeticiones mecánicas de tradiciones sociales. Son formas de los seres humanos controlan y transforman el mundo natural y social en que viven para satisfacer sus propias necesidades. Pero también son formas de resistencia; de exposición, de formación y transformación de sus creencias, sensibilidades, percepciones, idearios, conocimientos y comprensiones en un aquí (espacial) y un ahora (temporal). Por esa razón, aunque las acciones y operaciones sean desarrolladas principalmente por individuos, en realidad las prácticas son sociales, condicionadas por diferentes tipos de instituciones. Las prácticas, por tanto, son acciones proyectadas y realizadas por sujetos, mediante el uso de instrumentos culturales materiales y simbólicos, orientadas a transformar a naturaleza material y social con el propósito de satisfacer sus más diversas necesidades.

Las prácticas matemáticas como un tipo particular de práctica social.

En términos generales, la matemática puede ser considerada como un área de investigación históricamente consolidada y delimitada. Una manera de interpretar eso es que la matemática, como sucede con cualquier conocimiento, se constituye mediante un conjunto de acciones que indica una forma específica de pensar y actuar legitimadas culturalmente y por eso cambiantes en el tiempo y en el espacio. Llamaremos a este tipo de práctica de “práctica matemática”. Que el término matemática esté adjetivando al de práctica, indica que las acciones encarnan una forma particular en que los sujetos organizan sus acciones y reflexiones, de la misma manera como lo sería una práctica adjetivada de política, religiosa o económica. Pero, por otro lado, se refiere a que es posible diferenciar cada una de ellas como maneras de controlar el medio social y material en que se vive. Para (Obando, Arboleda, & Vasco, 2014) las prácticas matemáticas se refieren

“...a cierta forma de acción de los individuos, en sus relaciones entre sí, y con el medio, a través de los procesos de objetivación tanto de la cantidad y la

forma -por ejemplo, medir, contar, comprar, vender, intercambiar, construir, fabricar, estimar, describir, localizar-, como de la variación de una u otra - movimiento, cambio, comparación, transformación, y otras-...”

De ahí que al comprender a la matemática como una práctica social particular, no solo gana autonomía e identidad, sino también el carácter de instrumento que auxilia el desarrollo y consolidación de otros tipos de prácticas culturalmente diferenciadas.

La práctica de modelación: un contexto para la constitución de prácticas matemáticas.

Académicos preocupados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática han ponderado el potencial del proceso de modelación matemática como un camino didáctico y/o pedagógico para el desarrollo de contenidos curriculares y de formas de razonamiento matemático. (Bassanezi, 2002; Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007; Meyer, Caldeira, & Malheiros, 2011). Una de las tendencias del uso de este proceso es verlo como “una forma de estudiar el mundo real con el universo de la matemática” (Meyer et al., 2011) que, con propósitos didácticos/pedagógicos, se traduce en presentar diferentes problemas a los estudiantes, para que los resuelvan aplicando el conocimiento matemático aprendido en el aula de clase.

Esta forma de entender la modelación matemática en contextos escolares, resalta la idea de que los problemas que serán modelados conllevan consigo una carga intencional, previamente establecida por el profesor, para que de alguna forma emerjan ciertos contenidos conceptuales y/o procedimentales previamente establecidos en el currículo de matemática. De acuerdo con Borba (2009); Borba & Villarreal (2005), un trabajo en aula de clase así, está más próxima de una perspectiva de resolución de problemas que de modelación. Interpretando estos autores, uno de los valores didácticos, pedagógicos y cognitivos más importantes que el proceso de modelación matemática debería ofrecer a contextos escolares, tiene que ver con la posibilidad de entenderlo como un espacio para la producción de conocimiento en general, y matemático en particular. La propuesta, es dar la oportunidad a los alumnos para que sean los protagonistas, no únicamente en la resolución de los problemas propuestos por el profesor, sino también en la formulación de los mismos, según sus propios intereses.

Para alcanzar tal propósito, proponen asemejar el proceso de modelación con un trabajo por proyectos, que denominan “Proyectos Pedagógicos de Modelación –PPM–”, en donde los alumnos son convidados a: 1- escoger un tema de intereses colectivo; 2- plantear alguna situación problemática al interior del tema escogido y 3- construir argumentos para intentar resolver los problemas planteados y/o preguntas formuladas. La principal intención es crear un espacio pedagógico para el desarrollo de acciones análogas a las ejecutadas por investigadores cuando realizan sus respectivas investigaciones; o sea, escoger un campo de estudio de interés, delimitarlo por medio del planteamiento de cuestionamientos y/o definición de problemáticas, para finalmente buscar respuestas y/o soluciones.

En medio de este proceso se pueden crear condiciones de potencialidad para constituir prácticas matemáticas. Constitución que puede tornarse necesario, posible, deseable y/o importante de acuerdo con las características de cada proyecto. Esto significa que, en el contexto de los PPM, constituir prácticas matemáticas puede ser entendido en el mismo sentido que autores como Bassanezi (2002) consideran como modelación matemática, en términos de la

aplicación de la matemática a problemas del cotidiano.

Dispersión de semillas por zoocoría: un ejemplo de PPM

Los participantes de la investigación fueron alumnos de un curso de matemática aplicada para Biólogos en formación de la universidad Paulista “JúlioMesquitaFilho” (UNESP), sede Rio Claro del estado de San Pablo, Brasil. Al inicio del curso los alumnos fueron invitados por el profesor a formar grupos entre cuatro y seis alumnos para desarrollar un PPM. Como producto final del semestre, debían entregar un texto escrito síntesis del proceso de investigación, producir un video relacionado con la temática y realizar una presentación oral para el resto de los compañeros de clase. Uno de los proyectos desarrollados fue titulado “Dispersión de semillas por Zoocoría”

Aunque el proceso de desarrollo de los PPM consta de tres grandes momentos íntimamente conectados como ya explicado: 1- elección del tema; 2- planteamiento de la situación problema y 3- resolución, aquí nos concentraremos en algunos análisis del tercer momento, pues si bien es cierto que las prácticas matemáticas se van constituyendo paulatinamente en cada etapa hasta constituirse como parte importante del proyecto, es en el momento de construcción de los argumentos para dar solución al problema que las acciones orientadas a tal fin se hicieron más visibles.

Una vez fue escogida la temática, los alumnos formularon como pregunta problematizadora la siguiente: ¿Cómo aplicar los estudios sobre estrategias de dispersión de semillas por animales en la restauración de un área degradada? En entrevista con los alumnos, mencionaron que el interés por esta pregunta provenía de un trabajo previo en que una de las alunas había participado. Cuestión que también llamó la atención a una colega que también había trabajado recogiendo información en una empresa de São Paulo/Brasil que realizaba investigaciones prácticas de recuperación forestal. Formulada la pregunta problematizadora el PPM fue desarrollado en torno de dos conceptos estructurantes: estrategia y eficiencia en la dispersión de semillas por animales.

Siguiendo las ideas de Magurran(1988), texto recomendado por una investigadora del área con que los alumnos habían tenido clase en la universidad, los alumnos comentaron que el concepto de “estrategia” es definido como los métodos usado por las plantas para atraer a los animales dispersores y la “eficiencia” como la creación de condiciones para que el dispersor pueda efectuar la dispersión y la semilla logre su germinación y desarrollo. En ambos casos, enfatizan los alumnos, se está hablando de condiciones naturales de interacción mutua entre plantas y animales como un proceso de equilibrio ecológico, donde las plantas producen alimentos y los animales, al consumirlos, se encargan de diseminar las semillas.

Desde un punto de vista matemático, los alumnos proponen que la estrategia y la eficiencia deben ser comprendidas como cantidades potenciales de germinación a partir de la interrelación entre diferentes especies de animales y plantas, cuyas posibles formas de interacción responden a variables aleatorias. En palabras de Magurran (1988), es necesario medir la riqueza o abundancia relativa de cada especie de animal y planta con que interactúa cuya medida se da por la cantidad y la regularidad con que ciertos animales se aproxima a ciertas plantas. En otras palabras, es necesario contar el número de especies en un espacio muestral; construir modelos de patrones de distribución; y, crear índices de proporción de especies en grupos determinados. Básicamente, afirmaron los alumnos, se trata de un cuantitativo de remoción de semillas y de índice de importancia relativa, indicado por el porcentaje de alimento consumido por cada animal.

Para ejemplificar el proceso, los alumnos presentaron un ejercicio con aves. Los datos usados hacían parte de uno de los proyectos en el que de la alumna había participado. En entrevista explicaron que la técnica utilizada consiste en ir al campo que se estaba queriendo restaurar por un periodo de tiempo determinado (mínimamente 10 horas a la semana) y realizar un proceso de conteo de las aves que llegan e interactúan, categorizadas por especies, familias y géneros. Además de clasificar el tipo de planta y determinar si el ave consume o no los frutos.

Esa información, afirmaron, era colocada en las siguientes ecuaciones obteniendo así el cálculo final del cuantitativo de remoción de semillas y el índice de importancia de la planta.

$CR = \ln \left[\left(\frac{V}{T} \right) \cdot \left(\frac{N}{V} \right) \cdot \left(\frac{I}{N} \right) \right]$ y $I = \sum \frac{C_i / E_i}{S}$, donde V= número de visitas del ave; T= tiempo (10 horas); N= número de frutos manipulados, I= número de frutos ingeridos; E_i = número total de especies que se alimentan de los frutos de la planta i; S = número total de la especie de las plantas de la muestra y C_i indicador de si el ave consume o no el fruto de la planta i, con valor uno si lo consume o cero si no lo hace.

Discusión sobre la constitución de prácticas matemáticas en PPM.

Para diferentes investigadores la íntima relación entre las diferentes formas de conocimiento y los procesos de modelación es indiscutible, pues razonar basado en modelos y sus formas asociadas constituye uno de los núcleos epistemológicos de comprensión y transformación de sistemas científicos y sociales (Jurdak, 2016; Lehrer & Schauble, 2007; Williams & Goos, 2013). Para Lehrer & Schauble (2007), por ejemplo, las raíces de la modelación se encuentran en el concepto de analogía, considerando que, en su nivel más básico, un modelo es una analogía, donde un conjunto familiar de objetos y relaciones pueden sustituir, por analogía, otro conjunto tal vez de menor familiaridad con el objetivo de ganar nuevas comprensiones, otras formas de tratamiento y, por esa vía, nuevos procesos de conceptualización.

Una manera de interpretar esa idea es considerar los modelos como medios o instrumentos de observación, de entendimiento, de manipulación y por veces de control entre diferentes sistemas. Es en ese sentido, que la modelación matemática puede ser analizada en una doble vía y no apenas en una como acostumbra hacerse. De un lado, como una manera de representar, por medio de conceptos y relaciones matemáticas, una situación no matemática, como explica Bassanezi (2002). Y de otro lado, en términos del camino inverso: un sistema no matemático asumiendo el papel de modelo para un sistema matemático, como proponen Urquhart (2008) y Williams y Goos (2013). En ambos casos los objetos, relaciones y problemas de un sistema no solo representan y pueden ser representado análogamente por el otro sistema, mas también permite formas de acción relacionadas con el sistema modelado.

En ese sentido, puede decirse que el sistema modelo y el modelado se constituyen mutuamente y se co-determinan dialógicamente, pues modificaciones en uno de ellos puede implicar ajustes en el otro. Dependiendo del interés de los sujetos involucrados se define cual es el sistema modelado y cual el modelo. Generalmente tal decisión depende del tipo de problema que se desee y/o se requiera resolver. Esta manera de entender la modelación flexibiliza los análisis relacionados con procesos de producción de conocimiento y de creación de diferentes niveles de verdad y confianza mediante la resolución de algunas contradicciones dialécticas que se generan, no solo por la convergencia de diferentes campos teóricos, sino también por el encuentro de aspectos empíricos emergentes de la experiencia, con conceptos teóricos

provenientes de prácticas académicas científicas.

En los PPM no es diferente. Como fue brevemente presentado, el propósito de responder a la pregunta: ¿Cómo aplicar los estudios sobre estrategias de dispersión de semillas por animales en la restauración de un área degradada? llevó al grupo de alumnos a apropiarse de un conjunto de conceptos teóricos y usarlos en la comprensión, producción y transformación de su experiencia empírica de conteos multivariados y la dispersión de semillas en particular. En ese proceso los conceptos científicos de la ecología, de la estadística y la matemática jugaron un papel de particular importancia provisionando a la experiencia empírica con lenguajes formales y poniendo a un lado la intuición cotidiana del asunto, para enriquecerla con las reglas de tratamiento propias de los sistemas teóricos (en este caso estadístico y matemático). En este caso en particular, las técnicas estadísticas y los conceptos matemáticos representados en las ecuaciones de cuantitativo de remoción de semillas y de índice de importancia fueron escogidas como modelos matemáticos del fenómeno empírico.

Las prácticas matemáticas así constituidas, como modelos matemáticos, se tornan paulatinamente y de manera simultánea en instrumentos y objetos, pues mientras que forman parte de los argumentos construidos para intentar dar solución a la situación problemática formulada, se van objetivando. Tal interpretación permite comprender que, las prácticas matemáticas así constituidas cristalizan una permanente tensión entre contrarios de los cuales se pueden destacar: niveles de generalización-particularización, procesos de covariación-correlación, carácter de aleatoriedad-determinismo entre las cantidades de magnitud pertinentes a la situación estudiada.

Estas tensiones fueron apreciadas durante todo el proceso de desarrollo del proyecto de modelación mediante las diferentes formas de enunciación discursivas tanto verbales como escritas de los sujetos involucrados. Un ejemplo puede ser apreciado en el momento que los alumnos explicaron, en el trabajo escrito y en la presentación del proyecto para los colegas, las técnicas de recolección de información mediante el conteo empírico del número de aves que llegan al área de intervención, la clasificación en especies, familias y géneros y la interacción con las diferentes plantas y frutos, pero principalmente de como todo ese proceso se simplificaba a partir de introducir los resultados en los ordenadores previamente programados con los modelos matemáticos representados en las ecuaciones de cuantitativo de remoción y de índice de importancia.

Se puede percibir que la explicación conceptual usando las ecuaciones (para los alumnos fórmulas) en términos ecológicos y biológicos (modelo ecológico y biológico) apelan a una relación de covariación entre magnitudes discretas (número de aves y plantas) que interactúan aleatoriamente y cuyo proceso de cuantificación implica pensar las relaciones entre ellas de forma multivariado (modelo estadístico). Mientras que apelando a la fórmula (modelo matemático), hay un intento de retirar la temporalidad, la espacialidad y la naturaleza aleatoria del fenómeno con el propósito de programar un ordenador y producir nuevos conocimientos por simulación (Levy, 1997).

A manera de conclusión

Una primera conclusión que queremos destacar es que las prácticas matemáticas (modelos matemáticos) constituidas en el contexto de este PPM son fruto de la coordinación de procesos de variación espacio-temporales de las cantidades escogidas como pertinentes, con formas generales de correlación entre esas mismas cantidades y en las que, para el caso aquí presentado,

el procedimiento de comparación por cociente entre cantidades jugó un papel fundamental en dicha coordinación. Un importante aspecto del razonamiento proporcional. Relacionado con este aspecto, destacamos es que las relaciones proporcionales que permitió resolver algunas de las tensiones entre opuestos en conflicto antes mencionadas, en particular la coordinación entre la covariación y la correlación de variables, requirió de la interacción entre sujetos con diferentes niveles de experiencia con la situación, la estadística y la matemática.

Por esa razón, ya que los PPM son desarrollados en contextos educativos, resaltamos como segunda conclusión que el acompañamiento durante todo el semestre a los alumnos fue fundamental. Apoyados en las ideas de la teoría de la actividad (Engeström, 1987; Leontiev, 1978) y del constructo teórico Seres-humanos-con-medios (Borba & Villarreal, 2005), usamos la noción de acto instructivo, para este proceso. Los actos instructivos fueron entendidos como acciones intencionadas, realizadas por actores humano (generalmente representado por el profesor y otros expertos en el tema) para orientar a los actores menos experimentados (generalmente representado por los alumnos) mediante el uso de artefactos culturales materiales y simbólicos, generándose un espacio colectivo, en sala de aula, de producción y reproducción de conocimiento relativo a los conceptos que están en juego. Eso sin importar que tales conceptos formaran parte, en ese instante del contenido conceptual preestablecido en el currículo de la materia, invitando al profesor a romper protocolos rígidos comunes en contextos escolares.

Referencias y bibliografía

- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI Study*. New York: Springer.
- Borba, M. (2009). Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, 41, 453–465. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0188-2>
- Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. United States of America: Springer.
- Engeström, Y. (1987). Learning by Expanding: An Activity - Theoretical Approach to Developmental Research. Recuperado 29 de enero de 2014, de <http://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm>
- Jurdak, M. (2016). *Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics: A Multiple-Perspective Framework for Crossing the Boundary*. Switzerland: Springer International Publishing.
- Lehrer, R., & Schauble, L. (2007). A developmental approach for supporting the epistemology of modeling. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 153-160). New York: Springer.
- Leontiev, A. N. (1978). *Actividad, conciencia y personalidad*. Buenos Aires: Ediciones Ciencias del hombre.
- Leontiev, A. N. (1979). *La actividad en la psicología*. La Habana: Libros para la educación.

- Levy, P. (1997). *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Editora 34.
- Magurran, A. (1988). *Ecological diversity and its measurement*. United States of America: Princeton University press.
- Meyer, J. F., Caldeira, A., & Malheiros, A. P. (2011). *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.
- Obando, G., Arboleda, L. C., & Vasco, C. E. (2014). Filosofía, matemáticas y educación: una perspectiva histórico-cultural en educación matemática. *Revista Científica Universidad distrital*, 3(20), 72-90.
- Urquhart, A. (2008). The Boundary Between Mathematics and Physics. En *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford University Press: Paolo Mancosu.
- Williams, J., & Goos, M. (2013). Modelling with mathematics and technologies. En M. A. K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 549-569). London: Springer.