Matematización del Teorema Fundamental del Cálculo en el Nivel Situacional con el uso de tecnologías digitales

Ingrid Janeth **Jácome** Anaya
Universidad Industrial de Santander
Colombia
jacomeaij@hotmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

En este documento se presentan avances de una investigación en desarrollo que pretende caracterizar los niveles de matematización que alcanzan los estudiantes de un curso de Cálculo Integral en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), mediante el uso de tecnologías digitales, a través del diseño, implementación y evaluación de una secuencia de situaciones. Para lo anterior usamos la Educación Matemática Realista (EMR) y a continuación, mostramos la caracterización a priori del Nivel Situacional y la descripción de una secuencia de tareas planteadas en dos situaciones problemáticas realistas en el fenómeno Llenado de Recipientes, el cual está dado a partir de los primeros resultados de un análisis fenomenológico didáctico en construcción.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo, tecnologías digitales, Matematización, Educación Matemática Realista.

Introducción

La comprensión de los objetos matemáticos asociados a las ideas de variación y acumulación son complejos, y lo es más la articulación entre éstos, la cual se establece a través del TFC (Robles, Tellechea y Font, 2014). En cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de dichos objetos, Muñoz (2000) menciona que una de las problemáticas principales es la separación entre lo algorítmico y lo conceptual. Para propiciar un enlace, este autor identifica una condición necesaria que se refiere a la existencia de situaciones problema. Freudenthal (1991) las define como contextos y situaciones problemáticas realistas, en el sentido de representables, razonables e imaginables para los estudiantes. Asimismo, estas situaciones son las generadoras de su actividad matematizadora., que se concibe como el proceso que conlleva a la organización de la realidad con medios matemáticos, incluida la matemática misma. Además, de ser un proceso discontinuo que pasa por distintos niveles: *Situacional, Referencial, General* y *Formal.*

Teniendo en cuenta que las representaciones estáticas y limitadas de los libros de texto, utilizados tradicionalmente en la enseñanza del cálculo, restringen la naturaleza dinámica de los objetos y la limitan a ejemplos, que conducen a desarrollar una imagen restringida del concepto en cuestión (Tall y Sheath, 1983), se hace relevante la introducción de las tecnologías digitales en la educación matemática. Éstas permiten la visualización dinámica de conceptos matemáticos que no se logra fácilmente en el papel. Por tal razón, elaboramos una secuencia de tareas, planteadas en dos situaciones problemáticas realistas, con el uso de tecnologías digitales.

A continuación, describimos la secuencia de tareas y la caracterización *a priori* del Nivel Situacional, propiciando los principios de interacción y reinvención guiada.

Educación Matemática Realista

En este enfoque, los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos, estas son, situaciones realistas. "El término "realista" se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan imaginar que a la realidad o autenticidad de estos" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p.10). El desarrollo del proceso de aprendizaje se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado *reinvención guiada*, proceso en el cual los estudiantes reinventan las matemáticas a partir de la organización o estructuración de situaciones problemas en *interacción* con sus pares y bajo la guía del docente, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

Freudenthal (1971) concibe la idea de las matemáticas como una actividad humana. Para él, las matemáticas son la actividad de plantear y resolver problemas, más explícitamente, la actividad de organizar la matemática desde la realidad. Freudenthal explica: "No hay matemáticas sin matematización" (Freudenthal, 1973, p. 134). Según su punto de vista, la mejor forma de aprender matemáticas es haciendo y la matematización es el sentido central de la educación matemática: "Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible, el de matematizar las matemáticas" (Freudenthal, 1968, p.7).

Treffers (1987) formuló la idea de dos formas de matematización; i). La *matematización horizontal*. Proceso en el cual los estudiantes presentan herramientas que pueden ayudar a organizar y resolver un problema del mundo real; esto es, traducir al mundo matemático una situación del "mundo real", comprendiendo así las relaciones entre el lenguaje cotidiano y el matemático, ii). La *matematización vertical*. Proceso de reorganización dentro del propio sistema matemático, esto es, encontrar atajos, probar regularidades, descubrir conexiones y estrategias para luego usar dichos descubrimientos, acciones que llevan a procesos tales como argumentación y generalización. En términos de Freudenthal (1991) moverse dentro del mundo de los símbolos.

Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower (2016), con base en las ideas de la EMR, proponen los niveles de matematización: *Situacional, Referencial, General y Formal*. Estos niveles representan el pasaje de conocimiento informal al formal y están caracterizados por el tipo de modelos que surgen cuando los estudiantes se enfrentan a una situación problemática realista. Acá, no se refieren a modelos preconstruidos e impuestos desde la matemática formal sino a modelos emergentes.

En el *Nivel Situacional*, los estudiantes se enfocan en el conocimiento de la situación. Está asociado al uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma. Las estrategias que utilizan, para dar respuesta a los problemas y/o descubrir la matemática existente en el contexto, son apoyadas en los conocimientos formales previos, en los conocimientos informales, en el sentido común y en la experiencia. A este proceso se le denomina *matematización horizontal*.

Los otros niveles están enmarcados dentro de la *matematización vertical*, por lo que se caracterizan por la búsqueda de fórmulas, prueba de regularidades, formulación de un concepto nuevo, generalización, evolución y ajuste de modelos, entre otros.

En el *Nivel Referencial* aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, siempre referidos a la situación particular, los cuales describen y esquematizan los conocimientos y procedimientos de la situación problema. De allí que los modelos se consideren como "modelos de".

El *Nivel General* se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior. Da lugar al surgimiento de aspectos generalizables de los mismos que son utilizables en un conjunto de problemas. Las estrategias, ahí encontradas, superan la referencia al contexto, por lo que surgen los modelos para la resolución de los mismos; esto es, modelos generales y descontextualizados, los cuales sirven para organizar matemáticamente otras situaciones.

El *Nivel Formal* comprende los conceptos, procedimientos, utilización de conceptos, y notaciones convencionales propias de la rama de la matemática que hacen parte de la matemática vinculada al contexto que se venía trabajando.

Según Drijvers, Boon, Doorman, Bokhove, y Tacoma (2013) el desafío está en encontrar situaciones que pidan el desarrollo de modelos emergentes y permitan un proceso de abstracción progresiva. Para encontrarlas, Freudenthal propone la realización de un Análisis Fenomenológico Didáctico, el cual inicia con la identificación de los contextos donde tienen sentido los objetos matemáticos, los fenómenos donde surgen o son organizadores y las situaciones donde tienen uso.

Proceso metodológico

Para la identificación de los contextos, fenómenos y situaciones matemáticas donde el TFC tiene sentido, surge y tiene uso, es importante analizar y responder los cuestionamientos ¿para qué se usa el TFC?, ¿a qué problemas da respuesta el TFC? Para ello, estamos realizando una revisión epistemológica, general, de los objetos matemáticos inmersos en el TFC, derivada e integral, y un análisis del contenido matemático escolar teniendo como referencia algunos libros utilizados usualmente en la enseñanza del Cálculo Integral.

A través de dicho análisis hemos logrado identificar el fenómeno de Llenado de Recipientes. Resaltamos las situaciones de, teniendo en cuenta al video del llenado de una copa en forma de cono circular recto, hallar el área de la sección transversal en función del nivel del líquido a partir del volumen de este y hallar el volumen del líquido en función del nivel del líquido a partir del área de la sección transversal, donde las tareas enmarcadas en dichas situaciones se diseñaron con el fin de caracterizar los tres primeros niveles de matematización del TFC.

La secuencia de tareas planteadas en las dos situaciones anteriores está dirigido a estudiantes de Cálculo Integral que no han visto el TFC. Dichas tareas conducen a la construcción de modelos y la abstracción de estos. Para el desarrollo de la secuencia los estudiantes usarán el software Tracker, el cual les permitirá estudiar un fenómeno a través del seguimiento manual y automatizado de objetos, obteniendo de forma inmediata información tabular y gráfica acerca de área de la sección transversal del líquido y el volumen de este, así como la exploración de ideas de variación y acumulación.

Teniendo en cuenta las situaciones, las tareas diseñadas para cada situación y las acciones descriptoras planteadas por Henao y Vanegas (2012) y Gonzales (2015), elaboramos el análisis a priori para el *Nivel Situacional* del TFC. En este caso, se espera que los estudiantes identifiquen y reconozcan el comportamiento de las magnitudes variables involucradas y planteen supuestos acerca de la relación de las magnitudes, área de la sección transversal y volumen del líquido, a partir de las ideas de variación y acumulación (Tabla 1).

Tabla 1

Descriptores Nivel Situacional del Teorema Fundamental del Cálculo

Descriptores generales	Descriptores a priori (TFC)
Identificar los elementos matemáticos pertinentes al problema situado en la realidad. Esquematizar, formular y visualizar un problema de varias maneras. Representar el problema de acuerdo con los conceptos matemáticos pertinentes y plantear supuestos, donde dichas representaciones están ligadas al contexto.	Identificar y conocer el comportamiento del área de la sección transversal y el volumen del líquido en un recipiente en forma de cono circular recto con la información suministrada en el video y el uso de estrategias intuitivas y/o conocimientos previos. Interpretar información tabular y predecir el comportamiento de las magnitudes variables (área, volumen) implicados en la situación problema. Plantear supuestos acerca de la relación de las magnitudes variables (área, volumen) con las ideas de pendiente de la recta tangente a una curva y acumulación del cambio.

Para el fenómeno, Llenado de Recipientes, se diseñaron dos situaciones matemáticas realistas que consisten en:

A partir del volumen del líquido que se vierte en una copa, hallar la expresión algebraica que representa el área de la sección transversal en función del nivel del líquido (y).

A partir del área de la sección transversal del líquido, hallar la expresión algebraica que representa el volumen en función del nivel del líquido (y).

Con algunas de las tareas planteadas para estas dos situaciones se espera que el estudiante, en primera instancia, identifique la razón de cambio instantánea del volumen con respecto al nivel del líquido (y) como la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto. Y con la ayuda del software, hallando la pendiente de la recta tangente al volumen para niveles del líquido específicos (slope) y el área de la sección transversal formada para los mismos niveles (Figura 1), logre conjeturar que la derivada del volumen del líquido corresponde al área de la sección transversal en función del nivel.

Posteriormente, se espera que el estudiante, a partir del cálculo del área desde el inicio del llenado hasta niveles específicos del líquido bajo la curva Área de la sección transversal y el cálculo del volumen del líquido en los mismos niveles, logre conjeturar que la integral del Área de la sección transversal corresponde al volumen del líquido y con ello representen, validen y cuestionen la relación entre derivada e integral.

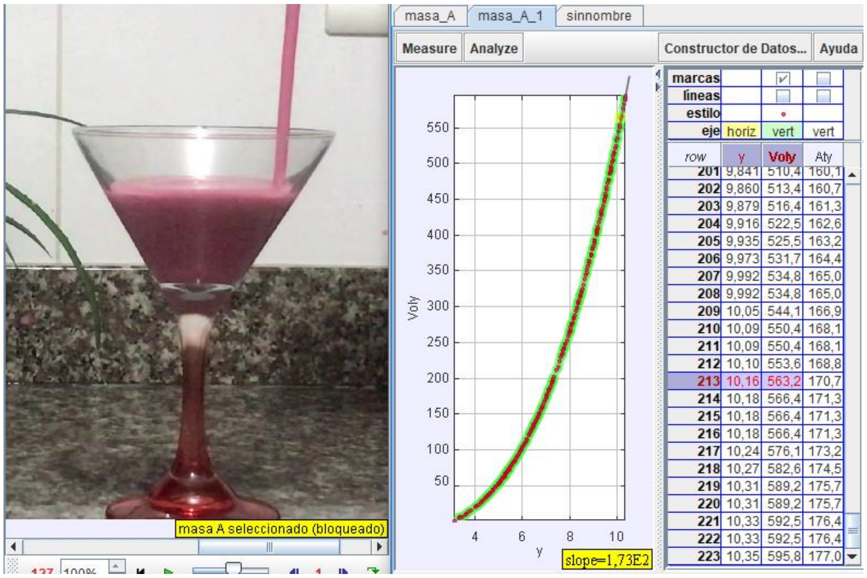

Figura 1. Simulación del llenado de una copa en Tracker.

Primeras reflexiones

Se espera que los estudiantes lleguen al Nivel General del TFC, esto es, que logren conjeturar que los objetos matemáticos, derivada e integral, están relacionados, modelen dicha relación y cuestionen la validez de este. Para que esto se logre es fundamental tener en cuenta, en el diseño de la secuencia de tareas enmarcadas en cada situación matemática realista, el uso de la tecnología digital y los principios de interacción y reinvención guiada puesto que dichos principios promueven la matematización progresiva, y el uso de la tecnología facilita la actividad matemática promoviendo la creación de modelos y la abstracción de los mismos a partir de la observación dinámica de los objetos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases Teóricas.* GPDM, Agentina.

Drijvers, P., Boon, P., Doorman, M., Bokhove, C. y Tacoma, S. (2013). Digital design: RME principles for designing online tasks. En Margolinas, C. (Ed). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22 (1)*, (pp. 56-62). Oxford, Inglaterra.

Freudenthal, H (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics 1*, 3 - 8.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics 3*, 413 – 435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Gonzales, O. (2015). *Caracterización de la actividad argumentativa de estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones* (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Henao, S. y Vanegas, J. (2012) *La modelación Matemática en la Educación Matemática Realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos* (Tesis de Pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3 (2), 131-170.

Robles, M., Tellechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, 26 (2), 69-109.

Tall, D. y Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 357–362.

Treffers, A. (1987) *Three Dimensions. A model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction.* Netherlands, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54*, 9-35.