XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Razonamiento covariacional y habilidades cognitivas en el diseño de tareas para la comprensión de la derivada

César Augusto **Rodríguez** Plata
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
rodces121@gmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

En el análisis de una situación que involucre cambio y variación, es esencial relacionar y cuantificar los atributos en él. Por lo tanto, el uso de la derivada como razón de cambio se hace necesario. En este documento se presenta la descripción de un diseño de talleres apoyados con un software matemático interactivo (GeoGebra), con la intención de promover la compresión de la derivada en un punto. Con base en la perspectiva del Razonamiento Covariacional y las Entrevistas Basadas en Tareas, se estructura el diseño, la implementación y el análisis de los talleres. Tras la implementación y su posterior análisis, se pretende caracterizar las habilidades cognitivas que un estudiante deberá tener para sustentar su comprensión de la derivada.

Palabras clave: derivada, razonamiento covariacional, habilidades cognitivas, procesos matemáticos, entrevistas basadas en tareas.

Fenómeno de estudio

Diferentes investigaciones han manifestado que las dificultades en la compresión del concepto derivada son debido a la falta de conceptualizaciones y procesos subyacentes en su definición. Conceptos como función, límite, razón, cociente y proporcionalidad; y procesos como representar y razonar están presentes en el proceso de aprendizaje de la derivada. Debido a la complejidad de estos conceptos y procesos, se producen diversas dificultades a nivel cognitivo cuando se construye este concepto desde sus diferentes representaciones; la pendiente de la recta tangente, el límite del cociente incremental y como razón de cambio (Villa-Ochoa, 2011; Robles, Del Castillo y Font, 2012; Thompson y Carlson, 2017). Además, la ausencia de las ideas de cambio y variación, en esta definición, no permite dotar de importancia a la derivada en la resolución de problemas elementales del cálculo diferencial (Dolores, 2007).

Sin embargo, en la educación actual se han priorizado los procesos de construcción y validación de procedimientos y algoritmos derivados del álgebra y la geometría analítica (Cantoral, 2000), los cuales llevan a desconocer la importancia y el uso de la derivada por el estudiante. Si se quiere analizar y describir una situación que implique variación será necesario relacionar y cuantificar los atributos en él. De acuerdo con Font y Godino (2011), la Didáctica de las Matemáticas solicita tanto la descripción y explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje como también su respectiva de evaluación y progreso.

Bajo esa mirada y con ánimos de aportar a la problemática expuesta, en la investigación que estamos desarrollando, se busca caracterizar las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos, para la compresión de la derivada en un punto. En esta comunicación se plantea la descripción y explicitación de un diseño de talleres para promover la compresión de la derivada en un punto. A continuación, se muestran los elementos teóricos y metodológicos que sustentan la estructura del diseño y una mirada preliminar al análisis de los talleres. Estos son los instrumentos de recolección de datos para observar y analizar el trabajo de los estudiantes en un curso de cálculo diferencial.

Marco conceptual

Tanto el diseño de los talleres como la investigación en curso están articulados con un marco el conceptual de Razonamiento Covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2003) y con los Procesos Matemáticos del Cambio y la Variación (Fiallo y Parada, 2018). Juntos direccionan la construcción de la derivada en un punto. Asimismo, las Entrevistas estructuradas y basadas en tareas e ideas metodológicas de un curso de precálculo (Fiallo y Parada, 2018) estructuran las fases de los talleres.

La articulación entre el Razonamiento Covariacional y los Procesos Matemáticos es posible debido a lo cognitivo que denotan sus constructos teóricos, más precisamente de las operaciones mentales que estructura una persona para la solución a un problema (ver figura 1).

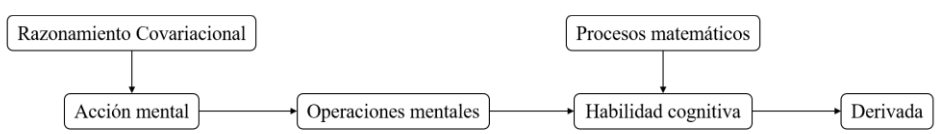

Figura1. Marco conceptual.

Razonamiento covariacional.

El “problema de la escalera”

> A partir de una posición vertical contra una pared, desde su parte inferior, una escalera se separa de la pared a una razón constante. Describa la velocidad de la parte superior de la escalera a medida que ésta se desliza hacia abajo sobre la pared. Justifique su afirmación. (Carlson et al., 2003, p. 145).

El “problema de la escalera” es una situación que implica variación. El estudiante tendrá que imaginar el deslizamiento de la escalera y notar que a medida que el tiempo avanza la distancia vertical cambia. Para describir la velocidad del fenómeno, tendrá que cuantificar y relacionar los cambios de la distancia vertical con los cambio en el tiempo a medida que se desliza la escalera a razón constante.

Para apreciar los cambios, el estudiante necesita coordinar el comportamiento de las variables en juego, en este caso el tiempo y la posición vertical que describe el movimiento de la escalera, es decir necesita el razonamiento covariacional. El razonamiento covariacional es definido por Carlson et al. (2003) como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 124). Por tal razón, los autores proponen un marco conceptual para analizar el razonamiento covariacional de una persona, fundamentado principalmente por las acciones mentales que éste realiza.

Las acciones mentales son evocadas por querer coordinar dos variables, así que estas son determinadas por la construcción de imágenes de covariación. La noción de imagen está basada en la perspectiva de Thompson que la establece como “dinámica, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como la fuente y el vehículo de operaciones mentales.” (citado en Carlson et al, 2003, p. 124). Por tanto, a medida que la imagen de covariación se desarrolla en la persona, sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado.

Carlson y colaboradores consideran estas acciones mentales como evolutivas, y conjeturan y muestran en sus estudios que se desarrollan (Carlson et al., 2003). Debido a este hecho, estructuran los niveles de razonamiento covariacional y las acciones mentales que sustentan cada de uno de los niveles.

Nivel de coordinación (N1): sustentada por la acción mental 1, descrita como la coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.

Nivel de dirección (N2): sustentada por la acción mental 2, descrita como la coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.

Nivel de coordinación cuantitativa (N3): sustentada por la acción mental 3, descrita como la coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.

Nivel de razón promedio (N4): sustentada por la acción mental 4, descrita como la coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.

Nivel de razón instantánea (N5): sustentada por la acción mental 5, descrita como la coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

Ya que el N5 alude a la derivada como la razón instantánea, el diseño de la estructura de los talleres tiene en cuenta estos niveles y se explicará en la sección de Método.

Habilidades cognitivas.

Fiallo y Parada (2018) presentan las reflexiones teóricas y metodológicas que se han incorporado al diseño de un curso laboratorio de precálculo, basados en las configuraciones actuales de los procesos de aprendizaje y enseñanza y a la incorporación de la tecnología en el aula. Se establece que, desde un enfoque de resolución de problemas, el desarrollo de procesos matemáticos como el de la comunicación, la representación, el elaborar, comparar y ejercitar procedimientos y el razonamiento, son necesarios para la comprensión del concepto de función, límite y derivada, agrupados desde los núcleos conceptuales del cambio, la aproximación y la tendencia. Como lo mencionan los autores, los procesos presentados por secciones, no deben interpretarse de manera independiente, sino que todos los procesos son dependientes y complementarios entre sí.

El desarrollo de estos procesos es posible a través de las habilidades asociados a estos, los cuales ayudarán a los estudiantes a comprender y resolver un problema. Según Rueda (2016) la habilidad cognitiva: "consiste en las operaciones mentales que resultan de la coordinación de acciones tendientes a la consecución de un objetivo ligado a una rama de conocimiento institucionalizado." (p. 57)

Como resultado de la implementación y el análisis del curso de precálculo, en Fiallo y Parada (2018) se han caracterizado diversas habilidades asociados a los procesos matemáticos (ver Tabla 1):

Tabla 1

Habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos

Procesos	Comunicar ideas sobre variación	Representar la variación	Elaborar, comparar y ejercitar procedimientos para analizar la variación	Razonar sobre fenómenos de variación
Habilidades	Interpretar enunciados.	Reconocer representaciones.	Reconocer los números reales, establecer relaciones entre ellos y operar con ellos.	Explicar una afirmación matemática.
	Explicar ideas.	Interpretar representaciones.	Medir, comparar y calcular magnitudes.	Justificar una afirmación matemática.
	Justificar ideas.	Construir representaciones.	Elaborar procedimientos con apoyo de la geometría.	Argumentar racionalmente.
	Argumentar ideas.	Transformar representaciones (tratamiento y conversión).	Razonar y estructurar procedimientos analíticos.	Convencerse y convencer a los demás.
		Coordinar representaciones.		Validar con reglas y procedimientos teóricos.

Fuente: Fiallo y Parada (2018, p. 228)

Como ya se mencionó en la sección del fenómeno de estudio el diseño de los talleres busca determinar qué habilidades cognitivas dan sustento a la compresión de la derivada.

Método

El estudio se enmarca en un enfoque de investigación de tipo descriptivo e interpretativo, y es diseñado para realizar un análisis en contexto real del fenómeno de estudio. Como lo menciona Rojas (2012), la fiabilidad del proceso investigativo se mejora proporcionando la mayor información posible tanto de la situación en que se desarrolla la experiencia y de la selección de la población o muestra, como de los métodos de recolección de datos y el análisis posterior, permitiendo la posibilidad de una revisión o réplica del trabajo por otros investigadores. Por lo tanto, hacer explícito el diseño del taller es necesario.

Se optó metodológicamente por las entrevistas estructuradas y basadas en tareas (Goldin, 2000) en la que es posible realizar entrevistas grupales. De esta manera se ofrece un ambiente menos artificial para cada uno de los entrevistados y pueden interactuar entre sí, con la posibilidad de poner en discusión sus afirmaciones y argumentos con los demás; además, tienen la posibilidad de conocer, analizar y contar con ideas adicionales en relación con las tareas propuestas y con los argumentos considerados inicialmente.

La entrevista basada en tareas es un entorno diseñado cuidadosamente, siendo éste un componente clave de esta metodología (Goldin, 2000). Su objetivo es obtener de los entrevistados las estimaciones y la evolución de su conocimiento, también, sus representaciones de ideas particulares, estructurales y formas de razonamiento, en este caso para la derivada como razón de cambio.

Algunas entrevistas están estructuradas, con protocolos detallados que determinan de manera preliminar, la interacción y las preguntas del entrevistador. Otros protocolos son semiestructurados, lo que permite modificaciones en función del criterio del investigador, como la de este diseño en la que una exploración a la entrevista prevista proporcionará una base para el diseño de un protocolo más detallado.

A continuación, se expone el taller 1 (entrevista 1) en el que, a través del problema del lanzamiento vertical, los niveles del razonamiento covariacional, los procesos matemáticos, aspectos metodológicos del curso de precálculo y el apoyo de la tecnología, los estudiantes de cálculo diferencial darán paso a resolver.

El taller de lanzamiento vertical está estructurado por 4 actividades en las que cada una tiene una serie de preguntas (tareas) que organizan la solución del problema a lo largo de los niveles del razonamiento covariacional. Cada actividad será acompañada por dos archivos específicos en GeoGebra. El papel de la tecnología, en los talleres y en el curso de precálculo, es brindar la posibilidad de que los estudiantes interactúan con representaciones del objeto matemático en cuestión, es decir la derivada. Asimismo, el uso de artefactos computacionales permite crear y conectar esas representaciones (Fiallo y Parada, 2018). Para el desarrollo de cada actividad se tienen 2 fases. En la fase inicial se le presenta el enunciado y las tareas a desarrollar. El trabajo es llevado a cabo de manera individual por los estudiantes. Posteriormente se dará paso a la fase denominada comunicando y compartiendo en la que lo estudiantes expondrán sus soluciones y podrán trabajar de manera grupal para responder a las tareas propuestas; además, el profesor (entrevistador-investigador) podrá realizar preguntas heurísticas y retrospectivas para obtener la información sobre cómo los estudiantes abordan cada tarea.

Hay que explicitar que existe una diferencia entre la actividad 1 y las demás. El trabajo de las tareas es orientado por archivos diferentes. En la actividad 1 (ver Tabla 2), se presenta el problema a resolver junto con un archivo en GeoGebra que muestra la simulación del problema y las representaciones de los objetos matemáticos implicados, como la algebraica, la tabular y la gráfica (ver figura 2). En las demás actividades se proponen tareas direccionadas por los niveles del Razonamiento Covariacional (ver Tabla 3) y otro archivo en GeoGebra, adicionando al anterior, una configuración en forma de botones con los que el estudiante puede interactuar y observar en la pantalla comportamientos de manera dinámica en torno a los incrementos de las variables, las razones de cambio promedio y las rectas secantes (ver Figura 3).

Tabla 2

Primera parte del taller de lanzamiento vertical.

<table>
<tr><th>Fases del taller</th><th>Actividad 1</th></tr>
<tr><td>1. Trabajo individual</td><td>Una maquina lanza un objeto verticalmente hacia arriba. Se han colocado tres sensores en posiciones distintas con el fin de determinar la velocidad del objeto en diferentes instantes de tiempo. Los registros de los sensores se muestran en la siguiente tabla:
<table>
<tr><th>Sensor</th><th>Tiempo s</th><th>Posición m</th><th>Velocidad $\frac{m}{s}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0.25</td><td>2.65</td><td>7.25</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\mathbf{0.8}$</td><td>$\mathbf{5.1}$</td><td>$\mathbf{1.75}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\frac{8}{5}$</td><td>$\frac{33}{10}$</td><td>$-\frac{25}{4}$</td></tr>
</table>
Abra el archivo Problemalanzamiento.ggb y muestre matemáticamente que el registro de la velocidad por cada sensor es verdadero.</td></tr>
<tr><td>2.Trabajo grupal</td><td>Comunicando y compartiendo</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

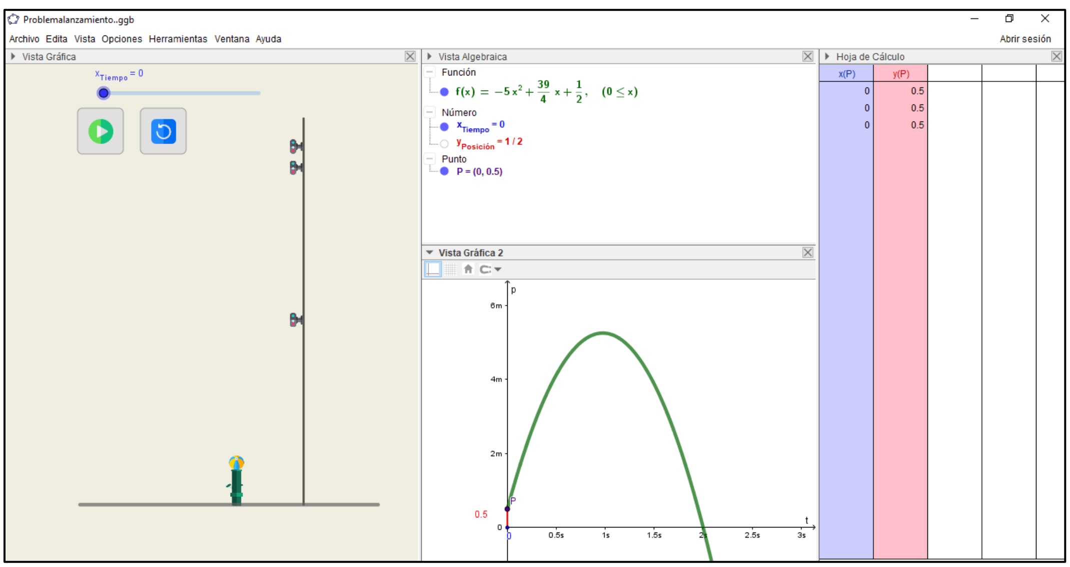

Figura 2. Archivo primera parte del taller lanzamiento vertical.

Tabla 3

Segunda parte del taller lanzamiento vertical.

Fases del taller	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4
1. Trabajo individual	Tareas para los niveles: N1. ¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Existe una relación de interdependencia entre las magnitudes variables? ¿Por qué? N2. ¿Cómo se comportan los valores de la posición respecto al tiempo? Explique su respuesta. N3. ¿Cuál es el comportamiento de la cantidad del incremento en los valores de la posición respecto al tiempo? Justifique su respuesta.	Tarea para el nivel: N4. ¿Aproximadamente con que velocidad se mueve el objeto alrededor de $x = 0.8\ s$? Justifique su respuesta.	Tarea para el nivel: N5. ¿Qué sucede cuando $\Delta x \to 0$? Escribe una expresión que represente la razón de cambio instantánea para $x = 0.8\ s$. Justifique su respuesta.
2. Trabajo grupal	Comunicando y compartiendo		

Fuente: elaboración propia.

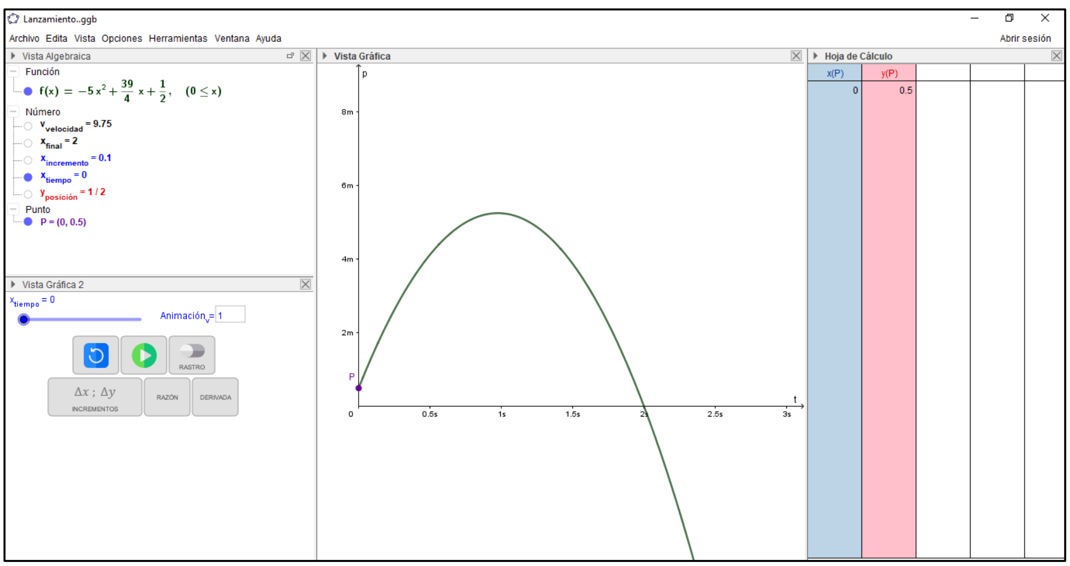

Figura 3. Archivo segunda parte del taller lanzamiento vertical.

Reflexiones

En la implementación del diseño esperamos que los estudiantes tras la solución de cada tarea vayan conceptualizando la derivada en un punto, dotándola de características y propiedades basados en las ideas de cambio y variación.

Cuestionar en los tres primeros niveles sobre qué, cómo y cuánto varían las magnitudes implicadas en el problema, calcular razones promedio para el cuarto nivel y proponer el uso de límite como aproximación y tendencia para determinar la razón instantánea en el quinto nivel, permitirán que los estudiantes puedan definir la derivada en un punto al finalizar los demás talleres.

Referencias y bibliografía

Cantoral, R. (2000). Pensamiento matemático avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza (Eds.). *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 205-218). México: Editorial Trillas.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *EMA, 8*(2), 121-156.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México D.F.: Ediciones Días de Santos – Universidad Autónoma de Guerrero.

Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico de la variación y el cambio*. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Font, V. y Godino, J. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. n J. M. Goñi (Ed.). *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas.* Barcelona, España, Graó, pp. 9-55.

Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research. In Kelly, A. & Lesh, R. (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). New Jersey-London: LEA.

Robles Arredondo, M. G., Del Castillo Bojórquez, A. G., y Font Moll, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación matemática, 24*(1), 35-71.

Rojas, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos* (Tesis de doctorado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

Rueda, N. (2016). *Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación* (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

Thompson, P. y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compedium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Villa-Ochoa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación del concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren* (Tesis doctoral). Universidad de Antioquia. Medellín.