



Construcción del significado de las expresiones algebraicas a partir del Diseño de un experimento de enseñanza centrado en el álgebra como Actividad

Mónica Correa Ángel
Área de Educación Matemática, Universidad del Valle
Colegio Jefferson
Colombia
correa.monica@correounivalle.edu.co

Resumen

Este documento presenta los elementos teóricos y metodológicos que sustentan una situación de enseñanza para introducir el álgebra en nivel octavo. Esta se desarrolló en el marco de la maestría en educación matemática, y se organiza en relación con la metodología de los Experimentos de enseñanza y recoge la propuesta de Kieran (2007) y Radford (2006) sobre la concepción del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico, respectivamente. La búsqueda en la investigación se centró en un análisis pragmático del discurso, retomando elementos expuestos por van Dijk (1980) y Searle (1992, 2005, 2009) como una forma de reconocer y caracterizar, en los procesos discursivos de los estudiantes, una construcción de significado de las expresiones algebraicas; por lo que la situación de enseñanza introdujo a los estudiantes a las expresiones algebraicas mediante la comprensión y el uso con sentido de los diversos sistemas matemáticos, sin negar el desarrollo de habilidades procedimentales.

Palabras clave: Experimento de enseñanza, pensamiento algebraico, análisis pragmático del discurso, procesos discursivos, construcción de significado.

Introducción

Este trabajo presenta una propuesta de enseñanza guiada por la metodología de los Experimentos de enseñanza (Cobb, Steffe & Thompson, 2000), la cual retoma aspectos fundamentales de la práctica educativa, por ejemplo, la necesidad de reconocer al educador como sujeto crítico de su quehacer y la revisión analítica de las situaciones de clase para la enseñanza de las matemáticas. Particularmente, en esta comunicación se expone el resultado de la implementación de un Diseño que surge de una crítica de la enseñanza del álgebra, específicamente de su introducción en la escuela; pues si bien, es cierto que en el marco de distintas investigaciones y de los referentes curriculares (MEN, 1998, 2006) se explicita la necesidad de un aprendizaje del álgebra desde la comprensión de la variación y el cambio, la realidad de la enseñanza en Colombia parece no dar cuenta de esto.

La principal cuestión que dio lugar a la propuesta de enseñanza aquí expuesta fue la crítica

que se puede plantear en relación con las formas de introducción al álgebra en la escuela, pues la concepción que un educador tiene sobre el álgebra, sin lugar a dudas, determina sus prácticas de enseñanza; por ejemplo, si asume este tópico matemático como una manipulación de símbolos, entonces centrará su praxis en la movilización exclusiva de propiedades y operaciones posibles dentro del lenguaje alfanumérico. En este sentido, se retoma en este trabajo el modelo de Kieran (2007) en el que sintetiza y organiza la idea del álgebra como una *actividad*, a partir de las propuestas de otros autores, quienes han señalado que esta debe entenderse como una acción sobre los objetos que den lugar a una construcción de estos objetos algebraicos y a sus transformaciones posibles.

En coherencia con esta idea se propone el diseño de la situación de enseñanza en la que los estudiantes, a través de un proceso de análisis sobre las características de una manilla en mostacilla checa (ver *Ilustración 1*), cantidad de hilos y sus medidas, número de mostacillas y patrones tejidos, pudiesen comprender las magnitudes que se involucran en el tejido de dichas manillas, y las relaciones que se dan entre estas; para que posteriormente, mediante el diseño y elaboración de sus propias manillas, puedan avanzar en el desarrollo de un pensamiento algebraico, particularmente, en relación con tres elementos que ha propuesto Radford (2006): la designación simbólica, la indeterminancia y la analiticidad.



Ilustración 1. Manillas en mostacilla checa.

Así, la organización que se desarrolla en esta comunicación corresponde a la presentación del marco metodológico y cómo sus elementos posibilitaron el Diseño de un experimento de enseñanza; por tanto, se señalan los referentes teóricos, en particular se hace énfasis en la meta de aprendizaje planteada para el Diseño, la conjetura que guía la situación de enseñanza, el análisis local y retrospectivo.

Diseño de un experimento de enseñanza

Como se ha señalado en la introducción, los referentes centrales en esta investigación corresponden a la metodología de los Experimentos de enseñanza, la cual establece una estrecha relación entre los referentes teóricos, el diseño de una situación de enseñanza y el análisis del Diseño. Además, los referentes sobre el álgebra escolar y el desarrollo del pensamiento algebraico; y los referentes sobre un análisis pragmático del discurso. Estos se presentan a continuación con la intención de exponer su incidencia en el diseño de la situación de enseñanza, el análisis de esta y la determinación de cómo finalmente aportó a la construcción del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Así, este trabajo muestra el Diseño de un experimento de enseñanza para la introducción al álgebra en nivel octavo, el cual se fundamenta en la concepción del álgebra como una *Actividad* y un análisis pragmático del discurso para comprender el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. El diseño, que se compuso de dos situaciones, se propuso a tres grupos de estudiantes de nivel octavo, cuyas edades se encuentran entre los 14 – 15 años.

La primera situación, que es objeto de presentación en esta comunicación, se compone de tres actividades con las que se pretendía que los estudiantes conocieran los materiales requeridos

para el tejido de manillas en mostacilla, y a partir de ellos establecieron formas de calcular dichos materiales, lo cual supone que mediante estas formas los estudiantes se podrían acercar a las expresiones algebraicas. La segunda situación se propuso con el objetivo de que los estudiantes, al tener la necesidad de preparar los materiales para el tejido de su propia manilla, pusieran en juego las relaciones entre las magnitudes que tuvieron lugar en la situación 1 y avanzaran en la construcción de significado de las expresiones algebraicas.

Los Experimentos de enseñanza se enmarcan en la Investigación Basada en Diseño, y se constituyen de dos aspectos cíclicos, el primero correspondiente al diseño y planeación de su puesta en acto, y el segundo a los análisis; este último se da en dos momentos: los análisis locales y el análisis retrospectivo.

En la primera fase, *planeación del Diseño*, se establecen los elementos fundamentales que se consideran en el experimento, es decir que en esta se define el fenómeno y los elementos de análisis sobre los que gira el experimento. En particular, es indispensable en esta fase aclarar que el Diseño se concibe como todos aquellos elementos que constituyen la situación de enseñanza y no solo como el conjunto de tareas propuesto para dicha situación.

En el marco de esta metodología es fundamental la construcción de una meta de aprendizaje y una conjetura que guían el experimento, las cuales pueden ser revisadas y ajustadas en el transcurso de la implementación. Estas son expresiones que recogen las propuestas teóricas de la investigación, con la diferencia de que la primera da cuenta del propósito que se tiene con el Diseño del experimento, mientras la segunda es “una proposición en la que se determinan las condiciones que deben tener las situaciones propuestas para posibilitar el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, los procesos que se espera que ellos realicen, las intervenciones del docente y demás” (Correa, 2017, p. 32), esto implica que la conjetura expresa el qué y cómo se va a enseñar.

De manera específica, la meta de aprendizaje que se estableció para este Diseño pretendía promover la construcción de un significado de los elementos constitutivos de las expresiones algebraicas, a partir de la comprensión de las cantidades, que se involucran en el diseño y elaboración de manillas, y las relaciones entre estas (Correa, 2017). La conjetura de la primera situación establece la necesidad de identificar magnitudes para aproximarse a las expresiones algebraicas y comprender las relaciones entre ellas, para precisar aquello que se quiere enseñar; y, mediante la determinación de la cantidad de los materiales necesarios para tejer una manilla, establecer una estrategia de enseñanza, esta se expresó de la siguiente manera: “la identificación de cantidades variables y constantes, y establecer relaciones entre ellas para determinar la cantidad de materiales requeridos en la elaboración de distintos diseños de manillas, posibilita una aproximación a las expresiones algebraicas.” (Correa, 2017, p. 34)

En la primera actividad de la situación 1 se propuso una búsqueda de los materiales requeridos en el tejido de manillas en mostacilla checa, lo cual permitió establecer unos elementos básicos como el telar, el hilo, aguja, las mostacillas, entre otros; lo cual generó la discusión sobre aspectos más puntuales en el tejido como, por ejemplo, conocer qué condiciones tienen los hilos que se utilizan y cómo optimizar este material. Las anteriores observaciones posibilitaron, finalmente, establecer unos acuerdos para referirse al proceso de tejer la manilla, por ejemplo, al haber dos tipos de hilos se nombró hilo vertical a aquellos que determinan el largo de la manilla e hilo de entrelazar a aquel que atravesaba las mostacillas.

En la segunda actividad, se propuso el análisis de los materiales utilizados en una manilla

que se entregó a cada pareja. Este análisis centraba la atención en el hilo vertical, el hilo de entrelazar y el número de mostacillas, particularmente en la forma de sus medidas o cantidades, como se muestra en la ilustración 2.

E10: Y el hilo que entrelaza, en la b, pues el hilo que entrelaza la fila de mostacilla (señala la forma en que se ubica este hilo en la manilla), que pasa doble, sola es 0.8 (indica la operación que han realizado en su hoja) y lo multiplicamos por 2 porque pasa dos veces por la misma línea, y entonces da 1.6 y el 1.6 por el número de filas (señala en la manilla cómo se ubican las filas) lo multiplicamos, que son 56, y nos dio 89.6.

Ilustración 2. Expresión de los estudiantes sobre la forma de calcular el hilo de entrelazar

En cuanto a la actividad tres, los estudiantes establecieron algunas generalidades sobre el cálculo de los hilos y la cantidad de mostacilla, lo cual les permitió avanzar hacia el desarrollo del pensamiento algebraico en tanto a las formas de nombrar las magnitudes, las operaciones que proponen y, sobre todo, la posibilidad de no necesitar conocer el valor de una cantidad determinada para realizar dichas operaciones.

Respecto a la segunda fase, la *experimentación*, se incluye no solo la puesta en práctica de la situación de enseñanza propuesta, sino que se considera como parte de la experimentación las reuniones previas que tiene el equipo investigador para revisar la propuesta, ultimar detalles tanto de la conjetura como los métodos de selección de la información, entre otras.

En esta fase de experimentación tienen un lugar crucial los **análisis locales**, los cuales dieron lugar al reconocimiento de las magnitudes señaladas anteriormente (hilo vertical, hilo de entrelazar, y número de mostacillas), y las expresiones lingüísticas utilizadas por los estudiantes para referirse a las formas de calcular las cantidades asociadas a estas. Particularmente, los análisis locales posibilitaron el reconocimiento de unos elementos pragmáticos del discurso para comprender la construcción de significado de las expresiones algebraicas que los estudiantes habían desarrollado a través de la situación de enseñanza.

Finalmente, el **análisis retrospectivo**, se realiza al finalizar la aplicación de las situaciones de enseñanza, apunta al estudio de los resultados obtenidos en dicha aplicación, es decir configurar cuáles son los aportes a los que se llega, cuáles son las observaciones resultantes de la actividad, las limitaciones del experimento y los posibles caminos que se siguen. En esta fase se plantean dos propósitos esenciales: comprender la situación de enseñanza en su globalidad y reconocer los cambios generados a partir de las intervenciones del equipo investigador (Molina, 2011).

Para estos dos análisis se presentan, a continuación, los referentes teóricos que dieron lugar a la comprensión de la construcción que realizaron los estudiantes de las expresiones algebraicas a partir de la situación propuestas. Dichos referentes corresponden a una perspectiva sobre el álgebra escolar y el desarrollo del pensamiento algebraico y a un análisis pragmático del discurso; con base en estos, se pudo reconocer en las expresiones discursivas de los estudiantes relaciones entre las cantidades involucradas, las cuales vistas desde la perspectiva de Radford (2006) permiten establecer un acercamiento al álgebra escolar entendida como una actividad y no como una manipulación de símbolos.

Una perspectiva sobre el álgebra escolar

Como se ha señalado anteriormente, la situación de enseñanza surge de reconocer el álgebra como una actividad, cuyo sustento fundamental es el modelo de Kieran (2007) en el que la enseñanza del álgebra escolar implica tres tipos de actividades: Generacional, Transformacional y Global/meta – nivel (GTG). Este modelo defiende ante todo la idea de enseñar el álgebra con apoyo en estas tres actividades y hace hincapié en la posibilidad de plantear situaciones de enseñanza que involucren dos o tres tipos de actividades. Dichas actividades mantienen una relación cíclica, en la que hay una construcción constante de significados y una manipulación de los objetos algebraicos en contextos específicos.

Particularmente, en este trabajo el diseño propuesto se relaciona con la *actividad Generacional*, en tanto que pretendió que los estudiantes construyeran un significado de las expresiones algebraicas a partir del establecimiento de relaciones entre cantidades que se involucran en el diseño y la elaboración de manillas. Con esta propuesta, se espera que los estudiantes logren una construcción del pensamiento algebraico, el cual Radford (2006) ha caracterizado con tres elementos: el sentido de la indeterminancia, esto dado que se reconoce en el álgebra objetos como las variables, los parámetros y la incógnita; la analiticidad, en el sentido de poder operar con estos objetos; y la designación simbólica, en cuanto a la posibilidad de designar con determinados signos. Esto conlleva a asumir el pensamiento algebraico como una forma de reflexionar matemáticamente, por lo que se puede suponer la necesidad de reconocer el razonamiento y el lenguaje algebraico como inherentes al pensamiento algebraico, como lo ha señalado Radford (2006).

Un análisis pragmático del discurso

Un análisis pragmático del discurso se ocupa no solo de las emisiones que realizan los hablantes sino de establecer una conexión con el contexto de enunciación, en la cual se identifica una situación en la que un hablante interactúa con otros, razón por la cual aquello que es enunciado cumple con unas condiciones y características particulares. Así, una propuesta en el marco de un análisis pragmático involucra a los *Actos de habla* como unidad mínima del discurso (Searle, 2005, 2009) y el reconocimiento de una *Intencionalidad* (Searle, 1992) al decir lo que se dice o al hacer cierto tipo de movimientos o gestos.

Debido a lo anterior, se presentan dos elementos del análisis del discurso: primero, se parte de reconocer que los discursos o conversaciones no se dan a través de Actos de habla independientes, sino que es a través de una Secuencia de actos de habla que un hablante puede expresar una idea alrededor de un tema, específicamente los elementos constitutivos de las expresiones algebraicas; y segundo, la posibilidad de abstraer del discurso de los estudiantes Macroactos que den cuenta de la construcción que han realizado de dicho significado. Estos Macroactos están asociados principalmente a un acto global o idea principal que se expresa mediante una Secuencia de actos.

Un Macroacto de habla es un acto de habla que resulta de la realización de una secuencia de actos de habla linealmente conectados. Los actos de habla se dicen linealmente conectados si i) el discurso que los realiza es linealmente coherente y ii) satisfacen las condiciones para las secuencias... (van Dijk, 1996, p. 72)

Así, mediante un análisis del discurso se desarrolló el análisis local de la implementación de la situación 1, lo cual dio lugar al reconocimiento de expresiones lingüísticas que dan cuenta distintos procesos para calcular las cantidades asociadas a cada magnitud. Con base en la

implementación, se identificaron tres procesos sobre la forma de calcular la medida del hilo vertical y el hilo de entrelazar.

Tabla 1

Procesos de los estudiantes para calcular las medidas de las cantidades involucradas en el tejido de manillas.

		Cálculo de la medida el hilo vertical	Cálculo de la medida el hilo de entrelazar
Procesos realizados por los estudiantes	P1	Toma en cuenta la medida del hilo en el que se teje el diseño y la medida del hilo que se necesita para realizar la trenza de amarre, incluyendo unos centímetros adicionales porque con la trenza se encoje el hilo.	Toman la medida del largo de la manilla (correspondiente a la parte en la que hay mostacillas) y lo dividen entre la medida de una mostacilla (0.2 cm), para conocer cuántas filas habría en la manilla y estas multiplicarlas por el número de columnas, multiplicado por 2.
	P2	Solo toma en cuenta la medida del hilo en el que se teje el diseño y la medida del hilo que se necesita para realizar la trenza de amarre	Es el producto de las filas por 2 por el número de columnas
	P3	Solo toma en cuenta la medida del hilo en el que se teje el diseño, sin incluir en la medida del hilo unos centímetros adicionales para amarrar la manilla.	Se obtiene al multiplicar la fila por 2, sin considerar las veces que este debe pasar por toda la manilla.

Así, con base en los procedimientos realizados y las distintas expresiones de los estudiantes para referirse a las formas en que calcularon las cantidades correspondientes a las magnitudes involucradas en el tejido de manillas en mostacillas checas, se planteó el análisis retrospectivo en el que se estableció una relación entre la propuesta de desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2006) y las expresiones tanto lingüísticas como no lingüísticas, para identificar una construcción de significado de las expresiones algebraicas que surgieron en el Diseño.

Análisis retrospectivo

La realización de este análisis retrospectivo inició con la determinación de las Secuencias de actos de habla que enunciaron los estudiantes para referirse a las formas de calcular la medida de las magnitudes involucradas (análisis local), en este proceso surgieron distintas Secuencias de actos de habla, que permitieron identificar las formas en que los estudiantes comprenden las relaciones entre las magnitudes. Esto implicó reconocer distintas funciones de los Actos de habla, para luego establecer el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes en tanto a la indeterminancia, designación de objetos y analiticidad que se promueve a través de este Diseño.

Por ejemplo, se pueden identificar expresiones en las que los estudiantes señalan que el número de hilos verticales está asociado al número de columnas más uno, lo cual es muestra de que reconocen que hay cantidades que, aunque sus valores no siempre son conocidos, se pueden operar con un valor constante. En relación con este mismo componente, los estudiantes indican que el número de mostacillas se puede obtener del producto entre número de columnas y número de filas, más, el número de mostacillas que hay en la zona de cierre de la manilla.

Expresiones como *“Aquí para saber cuánto hilo de entrelazado es el ancho de la manilla*

por dos por el número de filas”, permiten señalar que los estudiantes identifican relaciones entre las cantidades sin necesidad de indicar unos casos específicos, lo que refleja un acercamiento a la construcción de expresiones algebraicas en un lenguaje natural, lo cual responde de manera parcial a la meta de aprendizaje propuesta, y da cuenta de la conjetura planteada para la situación 1, y posibilitó que en la situación 2 los estudiantes lograran después de las discusiones de clase, reconocer el sentido que tienen las expresiones algebraicas en un lenguaje alfanumérico, tal como se muestra en la Ilustración 3.

Hilo Vertical = Largo de la manilla + 20cm
Total de los hilos verticales = # de columnas · (Largo de la manilla + 20)
Hilo entrelazador = Ancho de la manilla · 2 · # Filas + 20

$$V = (C + L) \cdot (L + 20)$$
$$E = A \cdot 2 \cdot F + 20 = 2AF + 20$$

Ilustración 3. Producción de los estudiantes.

Conclusiones

Un primer resultado recoge la postura que se planteó sobre la concepción del álgebra como *actividad*, pues si bien se reconocen las perspectivas funcional, resolución de problemas, modelación y generalización como perspectivas potentes para la enseñanza; es necesario examinar en la práctica docente formas de ahondar en situaciones que, de alguna manera, engloben distintos aspectos que son propios del álgebra, tal como lo hacen dichas perspectivas de forma puntal. Es decir, se propone finalmente que la enseñanza del álgebra se pueda abordar en relación con las actividades Generacional, Transformacional y Global meta, debido a que en este marco se pueden potencializar las perspectivas antes mencionadas, y que los maestros propongan situaciones integradoras que den cuenta de la riqueza del álgebra no solo en sus formas de representación, sino en el desarrollo de un pensamiento algebraico.

La gestión de la profesora, durante las discusiones de cierre de la situación 1, se centró en establecer con los estudiantes formas de expresión más generales de las relaciones que habían planteado; esto conllevó a plenarias en las que los estudiantes ponían de manifiesto las formas de calcular las medidas de los hilos. En este sentido, se llegó a afirmaciones como: el hilo vertical es el largo de la manilla más 20 cm por el número de columnas más 1; y el hilo de entrelazar es el ancho de la manilla por 2, por el número de filas más 20 cm. Dichas expresiones, en las plenarias, fueron transformándose en representaciones propiamente algebraicas al convenir con los estudiantes que las cantidades como el largo de la manilla, el número de columnas, el número de filas, y demás cantidades se pueden representar mediante signos (letras) cuyas relaciones se marcan con operaciones. En este sentido, se resalta el lugar del investigador como profesor que se propone en los Experimentos de enseñanza, debido a que se posibilita una continuidad entre las situaciones propuestas en la investigación y otras actividades de clase, cuestión que en el trabajo investigativo permitió identificar un avance importante en planteamiento y resolución problemas en términos alfanuméricos como las ecuaciones e inecuaciones.

En relación con el diseño de la situación surgen inquietudes sobre otras formas de llevar a cabo la implementación de esta, pues bien podría plantearse que los estudiantes aprendan a tejer estas manillas y que luego se realice un análisis de este proceso en términos matemáticos. Así mismo, queda abierta una tercera situación sobre el análisis de los patrones que se tejen; dicho

análisis implicaría, por un lado, que con base en los diseños de manillas identificar la organización de los colores, esto es reconocer una variación de las mostacillas según el lugar que ocupan y la forma que producen, y por otro, promover la explicación sobre cómo fue pensado el diseño, potencializando la lengua natural para referirse a los aspectos que componen los patrones y las formas visuales de reconocerlos.

Finalmente, el trabajo investigativo permitió desarrollar una serie de actividades con las cuales los estudiantes lograron avanzar en su formación de pensamiento algebraico. Los análisis desarrollados pusieron en juego diversas perspectivas teóricas que permitieron avanzar en la comprensión del papel de la lengua natural en la formación de pensamiento matemático.

Referencias y bibliografía

- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. *Approaches to algebra* (pp. 3-12). Springer Netherlands.
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. *A. Kel & R. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education, Cap. 12* (pp. 307 - 326). N Jersey: Lawrence Earlbaum.
- Correa, M. (2017). *Un experimento de enseñanza para la introducción al álgebra. Análisis del discurso para la comprensión de la construcción de significado de las expresiones algebraicas*. Trabajo de maestría no publicado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- van Dijk, T. A. (1996). Estructuras y funciones del discurso: Una introducción interdisciplinaria a la lingüística del texto y a los estudios del discurso. México, D.F: Siglo XXI editores.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. *The handbook of research on mathematics education*. (Vol. 2,707-762). Greenwich, Conn: Information Age.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29,1, 75-88. MEN. (1998). Lineamientos curriculares. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional
- MEN (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional
- Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking & Learning*, 5, 1, 37-70.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, North American chapter (Vol. 1, pp. 2-21).
- Searle, J. (1992). Intencionalidad, un ensayo en la filosofía de la mente. Madrid, España: Tecnos
- Searle (2005). Una taxonomía de los actos ilocucionarios. *La búsqueda del significado: Lecturas de filosofía del lenguaje* (pp. 415- 430). Madrid, España. Tecnos.
- Searle, J. (2009). Actos de habla ensayo de filosofía del lenguaje. Madrid, España: Ediciones Cátedra.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.