



El concepto de función como covariación en la escuela secundaria

Ronald Andrés **Grueso**

Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia

ronald.grueso@correounivalle.edu.co

Resumen

La presente comunicación es un reporte de un trabajo de grado de maestría de la Universidad del Valle y muestra aspectos teóricos, el diseño y algunos resultados de la implementación de una secuencia de actividades relacionada con el estudio de la función a través de situaciones de covariación, en grado noveno de una Institución Educativa de Colombia.

La secuencia consta de tres situaciones, cuyo diseño se fundamentó en el marco conceptual del razonamiento covariacional y se basó en una situación problema sobre la maximización del área de un rectángulo inscrito en una forma cuadrada. En algunos resultados se pudo evidenciar la importancia de enseñar la función desde una perspectiva de dependencia y cambio sin hacerlo únicamente desde la correspondencia. Igualmente, que la consideración de la razón de cambio, les permitió a algunos estudiantes poder caracterizar el comportamiento y tendencia de una función.

Palabras clave: Razonamiento covariacional; modelos teóricos locales; Covariación; Concepto de Función.

Introducción y contextualización de la problemática

En la literatura se encuentra un acervo considerable de investigaciones sobre el concepto de función, específicamente, estudios asociados a su enseñanza y aprendizaje. En este sentido, se puede citar estudios como los de Kaput (1992), Dubinsky & Harel (1992), Sierpinska (1992), Carlson (1998), Hitt (1998), Guzmán (1998) y Ruiz (1994). En dichas investigaciones, además de caracterizar las distintas dificultades que tienen los estudiantes al abordar dicho concepto, se propone la enseñanza de la función desde una perspectiva variacional que privilegie la relación de dependencia entre magnitudes.

A pesar de estas propuestas y otros estudios sobre la enseñanza del concepto de función, en la actualidad, se sigue abordando la función desde una perspectiva de correspondencia o de asignación. Además, muestran que su enseñanza obedece a ideas netamente algorítmicas o

estáticas, sin privilegiar que la comprensión del concepto de función va más allá de las letras o de los símbolos que lo representan. Lo que significa, que su estudio se continua haciendo de forma estática, donde predomina la importancia por generar habilidades en la sintaxis y en los procesos algorítmicos, más que en la comprensión de su significado y elementos constitutivos.

En consecuencia, no se puede desconocer que los estudiantes, además de cometer errores en el manejo y tratamiento de funciones, no tienen claro dicho concepto; por consiguiente, enseñar y aprender este concepto es una tarea compleja, dispendiosa y de mucho cuidado, tal como lo expresan López y Sosa (2008)

La enseñanza del concepto de función actualmente gira alrededor del registro algebraico, la internación de este registro con otros, como el gráfico, suele ser limitado a una simple ejemplificación. Por ello, se sugieren tratamientos alternativos del concepto, como el numérico, geométrico, etc., con especial énfasis en el aspecto discursivo para la resolución de problemas y la modelación de fenómenos (p. 317)

De otra parte, los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas (1998) en Colombia proponen que: “Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio” (p.51). Sin embargo, esta directriz no se concretiza en las propuestas de enseñanza para trabajar el concepto de función en el aula. Además, direccionan, para los procesos de enseñanza, la movilización de diferentes registros de representación y las transformaciones que son consecuencia del cambio de un registro a otro. “El cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación”. (Duval, 2004, p.62). Pese a lo anterior, es frecuente que en la escuela, la función se aborde desde dos o tres registros de representación (algebraico, tabular y gráfico) de forma aislada, es decir, sin considerar las implicaciones que tienen las variaciones de un registro en los de otro registro. Así pues, ni siquiera el estudio de una gráfica cartesiana puede asegurar el acercamiento dinámico a la función, si dicha gráfica sólo se considera como el conjunto de unas parejas ordenadas en un plano cartesiano. Si no se estudia el comportamiento de los cambios, la gráfica puede esconder la *covariación*. Cuando hay una relación de dependencia entre dos magnitudes, la *covariación*, debe entenderse como el estudio de los cambios de una magnitud atendiendo a los cambios de la otra (Carlson, 2003).

Por otra parte, el quehacer de la enseñanza para un docente, está permeado por distintas mediaciones que acompañan o complementan su intervención directa con los estudiantes. Un ejemplo particular de un recurso usado con frecuencia es el libro de texto, que en muchas ocasiones se convierte en una fuente para preparar sus clases y actividades a proponer, por consiguiente, muchas de las definiciones y ejercicios son tomados de forma explícita de dicho texto escolar. Es por esta razón que los libros de texto pueden ser un indicador de lo que pasa en una clase promedio, y de ahí la importancia de estudiar y analizar la forma en que estos textos presentan un concepto tan relevante para el desarrollo del pensamiento variacional, como lo es la función. En la mayoría de los libros utilizados en Colombia, privilegian el concepto de función desde una perspectiva estática, donde la correspondencia y asignación son aspectos centrales bajo un enfoque conjuntista. Como consecuencia, se presenta una definición formal que propone una abstracción de los fenómenos de cambio, a través de la generalización de cuantificaciones y notaciones matemáticas. Aunque se suelen presentar aplicaciones, estas aparecen desligadas de la necesidad de introducir el concepto, es decir, después de trabajar lo algorítmico se establecen ejemplos que sirven de guía para resolver problemas de aplicaciones, lo cual implica la

contemplación, desde la instrucción, de la discriminación de unas estrategias estandarizadas. De esta manera, la covariación difícilmente se logra trabajar desde la propuesta de enseñanza de los textos.

Teniendo en cuenta la problemática descrita en este estudio, que se hizo en el marco de un trabajo de grado para optar por el título de Magíster en Educación Matemática, se trata de dar respuesta a la siguiente pregunta: *¿Qué elementos o rasgos del concepto de función se identifican, en un grupo de estudiantes de grado 9º, a través del desarrollo de situaciones problema de covariación?*

Algunos elementos teóricos de referencia

El marco teórico y metodológico usado en el estudio fue el de los Modelos Teóricos Locales (MTL) Filloy (1999), entendiéndolo que los MTL se fundamentan en la observación experimental y la replicabilidad de diseños experimentales. Asimismo, en la determinación de un MTL, se hace énfasis en la caracterización de cuatro componentes interrelacionados entre sí, y la consideración de unas etapas durante la observación experimental. Las cuatro componentes teóricas son: Componente de enseñanza del Modelo Teórico Local o, de forma abreviada, Modelo de enseñanza. Componente de cognición del Modelo Teórico Local o Modelo para los procesos cognitivos. Componente de competencia formal del Modelo Teórico Local o Modelo de competencia formal y Componente de comunicación del Modelo Teórico Local o Modelo de comunicación. Dentro de cada componente se consideran elementos o referentes teóricos para ayudar a documentar la problemática y poder proponer una secuencia de enseñanza que consolide o sea acorde a dichos referentes.

El modelo de competencia formal, está direccionado por un análisis fenomenológico de la función. En este orden de ideas, en el modelo de competencia formal, el análisis fenomenológico del concepto de función se hace a partir de la fenomenología histórico-epistemológica y la fenomenología pura. De esta manera, se menciona de forma breve el transitar del concepto de función a través de la historia, para contemplar de forma paralela su visión epistemológica y por consiguiente, las distintas concepciones que ha tomado, lo cual dará indicios de sus usos, formas de difusión y posibles obstáculos epistemológicos. Asimismo, se hace énfasis en la concepción actual y usos del concepto de función. Para ello, se detalla cómo se concibe el concepto de función desde el saber sabio, antes de ser transpuesto a un contexto escolar.

En el Modelo de enseñanza se estudia y analiza el marco legal curricular que propone el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), en particular, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006). Este acercamiento al marco legal curricular se hace con el fin de identificar su papel en el estudio y enseñanza del concepto de función. Igualmente, se hace revisión del concepto de función en algunos libros de texto y revisión de la propuesta curricular de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta con el propósito de caracterizar el modelo de enseñanza predominante en el sistema educativo y que, en últimas, ha permeado la enseñanza que han recibido los estudiantes que son objeto de observación en este estudio.

En el modelo cognitivo y de Comunicación, es vital reflexionar y analizar sobre la forma en que los estudiantes aprenden y logran adquirir o acumular conocimientos matemáticos nuevos. Para ello, se requiere contar con un instrumento bien estructurado, soportado en un marco conceptual, que permita clasificar las actuaciones de los estudiantes en torno a las actividades de covariación. Este modelo se apoya fundamentalmente en el Razonamiento

Covariacional (Carlson, et al. 2003). Este razonamiento es definido como: “Actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 130).

El estudio y desarrollo del razonamiento covariacional va ligado a fenómenos o situaciones dinámicas que no necesariamente deben ser modeladas en un software como Cabri o GeoGebra. Estas situaciones dinámicas permiten que el estudiante construya imágenes de dos variables dependientes de una función que cambia simultáneamente con el cambio imaginado de una variable independiente, por ejemplo el área de la sombra de un edificio con respecto a la hora del día. Como no se puede percibir directamente lo que piensan los estudiantes, los comportamientos se convierten en el mayor insumo para saber qué acción mental se encuentra asociada. Por ejemplo, para Carlson, los estudiantes deben ser capaces de analizar patrones de cambio en varios contextos y esto debe ir ligado a cómo los estudiantes interpretan y construyen enunciados. Así pues, Carlson contempla cinco acciones mentales relacionadas con el grado de evolución que muestra el estudiante al desarrollar tareas que implican la covariación. Las acciones mentales en orden ascendente de complejidad, están dadas por la coordinación: del valor de una variable con los cambios de la otra, dirección del cambio entre las cantidades, cantidad de cambio entre las variables, razón de cambio promedio de la función que relaciona las variables, razón instantánea de dicha función.

Además de estas cinco acciones mentales, Carlson propone cinco niveles de Razonamiento covariacional donde se puede evidenciar el grado de pensamiento covariacional desarrollado por el estudiante. Para la covariación, propone que cada nivel se va alcanzando de acuerdo a su desarrollo en la sustentación de las anteriores acciones mentales, por ejemplo, si un estudiante está en el nivel 3, es porque manifiesta los tres comportamientos que sustentan cada uno de estos tres niveles, es decir que de manera acumulada muestra las características de las acciones mentales uno, dos y tres (AM1, AM2 y AM3).

Para la clasificación de los estudiantes, Carlson también manifiesta que hay que tener cuidado con los pensamientos pseudo-analíticos ya que estos derivan comportamientos pseudo-analíticos. Un comportamiento pseudo-analítico se entiende como un comportamiento que no está ligado a los características o propiedades de un concepto, más bien está ligado a la memoria del estudiante porque seguramente lo vio, pero no lo comprende, es decir, está ligado a procesos más mecánicos o algorítmicos, por ello, al mostrar estos comportamientos, se pueden clasificar a los estudiantes de manera errónea.

A continuación se explicitan los niveles de razonamiento covariacional que guiaron el estudio.

Tabla 1
Niveles de razonamiento covariacional

NIVELES	CARACTERÍSTICAS
Nivel 1 Coordinación	Las imágenes de la Covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 Dirección	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. (AM1 y AM2).

Nivel 3 Coordinación Cuantitativa	Las imágenes de la Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. (AM1, AM2 y AM3).
Nivel 4 Razón Promedio	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada (AM1 hasta AM4).
Nivel 5 Razón Instantánea	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de los puntos de inflexión (AM1 hasta AM5).

Tomado de Carlson et al. (2003)

En cuanto a las demás componentes que integran el MTL, El modelo de competencia formal, está direccionado por un análisis fenomenológico de la función. En este orden de ideas, en el modelo de competencia formal, el análisis fenomenológico del concepto de función se hace a partir de la fenomenología histórico-epistemológica y la fenomenología pura. En cuanto al modelo de enseñanza, se estudia y analiza el marco legal curricular que propone el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), en particular, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006). Este acercamiento al marco legal curricular se hace con el fin de identificar su papel en el estudio y enseñanza del concepto de función. Igualmente, se hace revisión del concepto de función en algunos libros de texto y revisión de la propuesta curricular de la Institución Educativa.

Al indagar sobre el aprendizaje y estudio del concepto de función, mediante la secuencia de tareas que proponen los componentes de los MTL, este estudio o investigación es de carácter cualitativo y cuantitativo en el marco de un enfoque descriptivo en la medida en que se quieren detallar procesos, actitudes y aptitudes de los estudiantes al desarrollar unas tareas propuestas. La primera fase consiste en identificar la problemática y posteriormente hacer un análisis previo del problema.

Como consecuencia del análisis previo, en una segunda fase, se formula una hipótesis que a su vez, sugiere el diseño de una propuesta de aula a partir de la articulación de los componentes mencionados anteriormente. Dicha propuesta se implementa con 22 estudiantes de grado 9° de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta (de carácter rural) de la ciudad de Yumbo. De acuerdo con el análisis previo de la fase 1, la secuencia de tareas se enfoca en poder tener en cuenta en cada pregunta, la forma de que las posibles respuestas puedan ser analizadas en el marco del Razonamiento Covariacional y por ende, permitan dar una respuesta a la hipótesis. A partir de los resultados, se categorizan las actuaciones de los estudiantes mediante una tipificación de las respuestas, para posteriormente analizar esos resultados a la luz de unas variables de análisis predeterminadas por los referentes teóricos mencionados en cada componente del MTL.

El análisis de los resultados permite, que en una fase final, se puedan consolidar unas conclusiones y reflexiones didácticas en términos, también de los referentes teóricos y la posible respuesta a la hipótesis planteada.

Algunas conclusiones y reflexiones

Tanto la fenomenología pura como la epistemológica, proponen una definición que actualmente, está en términos de una visión conjuntista, sin embargo, para el diseño de las tareas de covariación se retoma la definición dinámica, pues lo histórico la presenta como prevalente, además, el no hacerlo, sería desconocer el largo camino que ha sido necesario recorrer para llegar a las definiciones clásicas que respondían a la necesidad de estudiar el movimiento. Adicional a lo anterior y pese a la definición conjuntista, en la revisión de la literatura, los usos que se proponen se dan en el marco del estudio del cambio. La puesta en escena de tareas en torno a la covariación permitió evidenciar en los razonamientos de los estudiantes, el acercamiento a nociones asociadas al concepto de función, como: variables independientes, variables dependientes, dominio, rango, máximos y mínimos relativos, monotonía en el comportamiento creciente o decreciente de una función.

Con las tareas de covariación se logró que los estudiantes pasaran del reconocimiento de una relación entre magnitudes, a capturar la covariación como tal. En este orden de ideas, es importante resaltar que los puntos en el plano cartesiano representan relaciones entre magnitudes, a su vez, la comparación de dos puntos da cuenta del cambio, cambio que relacionado con otros de la misma gráfica, da cuenta de la variación. Así pues, con las tareas se logró que los estudiantes analizaran los cambios de los cambios, es decir, que compararan los cambios; esto implicó el reconocimiento de la correlación de la forma de cambio entre dos cambios.

En el estudio realizado, el razonamiento covariacional (Carlson, 2003) fue una herramienta importante para clasificar las actuaciones de los estudiantes como consecuencia de comportamientos asociados a determinadas acciones mentales, para posteriormente situar a los estudiantes en unos niveles de razonamiento covariacional. Esto pone de manifiesto la importancia de que los profesores puedan contar con herramientas que permitan poder clasificar y observar las actuaciones de los aprendices, en procura de poder analizar los procesos cognitivos que subyacen a las respuestas de sus estudiantes y que por consiguiente le permitan reflexionar y reorientar sus prácticas pedagógicas.

La metodología propuesta para la aplicación y evaluación de las tareas de covariación, se caracterizó por tener en algunos momentos trabajos en parejas (trabajo colaborativo) lo cual permitió la discusión y confrontación de saberes que posteriormente condujo a la institucionalización de saberes.

El trabajo con la covariación se puede articular en instrumentos de intervención en el aula, sin importar la edad. Esto se vio reflejado cuando los estudiantes enunciaban aspectos relacionados con el comportamiento de los cambios y no necesariamente requerían de pre-requisitos de carácter sintáctico del álgebra escolar.

De acuerdo al marco conceptual de Carlson, el nivel N5 no fue abordado en las tareas, lo cual es una limitación en el estudio de la razón instantánea y su relación con la función derivada. De esta manera, un posible estudio futuro podría estar basado en el diseño y posterior aplicación, de actividades donde las respuestas esperadas estén relacionadas con la función derivada y casos asociados al límite cuando la variación de una variable tienda a ser cero.

La puesta en escena de tareas en torno a la covariación permitió que los estudiantes, con preguntas específicas se fueran encaminando y obteniendo avances en las formas del razonamiento que usaban. En dichos razonamientos fue evidente el acercamiento a nociones asociadas al concepto de función, como: variables independientes, variables dependientes, dominio, rango, máximos y mínimos relativos, monotonía en el comportamiento creciente o decreciente de una función. Esta conclusión se hace a partir de los resultados de las actuaciones de los estudiantes en las tres tareas de la situación 2, donde las preguntas también tenían la intención de observar elementos presentes en el discurso de sus explicaciones para poder tener más información acerca de la forma en que están entendiendo o comprendiendo alguna situación. Asimismo, estos comportamientos observados en los estudiantes dan cuenta del porqué se les clasificó en el nivel N3 de razonamiento covariacional del marco conceptual propuesto por Carlson, puesto que los estudiantes, en sus actuaciones, dieron cuenta de la comprensión del comportamiento de los cambios desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo.

Algunos estudiantes llegaron a reconocer que para esbozar una gráfica, no necesariamente se debe tener una expresión algebraica que la soporte predeterminadamente. Esto se evidenció cuando ellos esbozaban la forma de la curva dependiendo del comportamiento de los cambios de una variable respecto a la otra, en términos de la coordinación cualitativa y cuantitativa de las cantidades involucradas.

En relación con la hipótesis que se pretendía contrastar en el MTL inicial, se puede afirmar que en efecto, el concepto de función se puede y se debería trabajar a partir de tareas de covariación, ya que estas permiten observar el comportamiento dinámico que subyace a dicho concepto. El desarrollo del pensamiento variacional y en particular, el aprendizaje de la función, se ve potencializado a partir del estudio del razonamiento covariacional.

Teniendo en cuenta que el estudio de la función es el eje principal para la comprensión del cálculo, es importante destacar que la función debe ser estudiada no sólo desde la definición de sus elementos asociados, sino también desde los aspectos dinámicos que ella modela o representa. En este orden de ideas, el estudio del comportamiento de los cambios posibilita que la función realmente sea el epicentro del estudio del cálculo. En la escuela, normalmente, la función se muestra aislada de otros aspectos como los límites, la derivada y las integrales, es decir, el cálculo diferencial e integral pierde sentido si no se le ha adjudicado al concepto de función su carácter dinámico.

Referencias y bibliografía

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 8(2), pp. 121-156.
- Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in collegiatemathematicseducation*, 3, pp. 114-62.
- Dubinsky, E., & Harel, G. (Eds.) (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington: Mathematical Association of America.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

- Fillooy, E. (1999). Modelos Teóricos Locales: Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa. En *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamericana.
- Grueso, R. A., y González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela* (Tesis de Maestría). Universidad del valle, Cali.
- Guzmán, I. (1998). Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 1(1), 5-21.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), pp. 123-134.
- Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En Grouws, D. (Ed.) *Handbook on research in mathematics teaching and learning*. 515-556. New York: Macmillan.
- López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, (21), pp. 308-318.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Serie Lineamientos curriculares. República de Colombia. Bogotá, D.C. Colombia. MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. En MEN, Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.
- Ruíz Higuera, L. (1994). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Ph D. Universidad de Granada.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes # 25 (pp. 3-58). Washington, DC: Mathematical Association of America
- Villa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), 9-25