Desarrollando el pensamiento estadístico y probabilístico en el aula escolar de matemática con situaciones de incertidumbre

Soledad **Estrella**
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
soledad.estrella@pucv.cl

Resumen

La estadística entendida como la ciencia de aprender desde los datos, es una disciplina que permite tomar decisiones fundadas haciendo inferencias con cierto grado de certeza. En la escuela tradicional, los estudiantes se enfrentan a una enseñanza caracterizada por situaciones determinísticas con respuestas cerradas y énfasis en la certeza, sin embargo, en la vida cotidiana el ser humano debe decidir con tiempo limitado y con información limitada, recurriendo a la intuición antes que a un razonamiento basado en la evidencia de los datos. Este minicurso busca que sus participantes comprendan que la estadística y la probabilidad en el aula escolar de matemática tienen que proveer de situaciones de aprendizaje que promuevan el desarrollo del pensamiento a través de razonar en escenarios de incertidumbre.

Palabras clave: educación estadística, didáctica de la probabilidad, pensamiento probabilístico, incertidumbre, sesgos.

Desarrollar el pensamiento desde la alfabetización

El estudiante del siglo XXI requiere de nuevas alfabetizaciones y competencias, que promuevan el desarrollo del pensamiento crítico, el cual es estimulado desde la estadística y la probabilidad. La alfabetización estadística incluye habilidades básicas que se usan para comprender la información estadística, como organizar datos, construir y presentar tablas, y trabajar con diferentes representaciones de datos; también incluyen la comprensión de conceptos, vocabulario y símbolos, y una comprensión de la probabilidad como una medida de incertidumbre.

El pensamiento estadístico es el proceso de pensamiento que los profesionales estadísticos ponen en juego en su práctica diaria al solucionar problemas reales. Desarrollar este pensamiento se relaciona con un aprendizaje a largo plazo que trasciende la lógica determinista y tiene en cuenta la variabilidad y la incertidumbre. En este sentido, la noción de incerteza es amplia e incluye fenómenos que están fuera del dominio de la estadística, cuyo foco sobre la incertidumbre se debe a la variabilidad aleatoria, haciendo posible hacer inferencias y predicciones. Dentro de esta incertidumbre, a veces es posible medir cuán incierto es un fenómeno, y a ello se le conoce con el término "probabilidad".

Gal (2005) señala que la alfabetización probabilística incluye la comprensión de ideas fundamentales como variabilidad, aleatoriedad e independencia; también involucra el cálculo de probabilidades, el uso de un lenguaje para comunicarse en escenarios de incertidumbre, entendiendo el papel y las implicancias de cuestiones probabilísticas, como los mensajes en diferentes contextos y en el discurso público y personal.

Si bien la probabilidad es matemática, enseñar estadística no es enseñar matemática, y aunque todavía persisten definiciones que caracterizan a la estadística como una rama de las matemáticas, ya se ha establecido la naturaleza distinta de la estadística como disciplina, la cual tiene carácter interdisciplinario puesto que los estadísticos requieren pensar interconectadamente, de forma estadística, matemática y computacional. Varias investigaciones han reportado el fenómeno que invisibiliza esta diferenciación disciplinaria, lo cual se refleja en la difusa diferenciación entre la enseñanza matemática y la enseñanza estadística (del Pino y Estrella, 2012).

El minicurso que se presenta abordará la enseñanza de la probabilidad para el desarrollo del pensamiento estadístico y probabilístico, a través de situaciones de incertidumbre reales (o simuladas) que conecten los conceptos. Para ello es esencial reconocer y diferenciar aspectos teóricos y experimentales de la probabilidad.

Conectando la probabilidad teórica y la probabilidad experimental

Aportes importantes. Bernoulli distinguió entre las probabilidades que pueden calcularse a priori (deductivamente, a partir de consideraciones de simetría) y aquellas que solo pueden calcularse a posteriori (inductivamente, a partir de frecuencias relativas). Él sostuvo que la probabilidad de una gran diferencia entre la probabilidad empírica y la probabilidad teórica tiende a cero a medida que aumenta el número de ensayos. La idea que la frecuencia relativa a largo plazo de un evento debe ser muy cercana a la probabilidad del evento es un corolario importante de este teorema. Esta ley experimental, conocida como ley de estabilidad de las frecuencias, tiene un respaldo matemático claro en un grupo de teoremas rigurosos que en conjunto configuran lo que llamamos Ley de los grandes números, y que inicia uno de los enfoques de la probabilidad (Batanero, Henry, & Parzysz, 2005) más usados en su enseñanza.

A continuación se entregan algunos de los enfoques útiles en esta enseñanza.

Enfoque intuitivo de la probabilidad. Las primeras ideas intuitivas y los juegos de azar son comunes en todas las civilizaciones primitivas. Ideas que aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, y usan frases y expresiones coloquiales para cuantificar los sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos. En esta aproximación intuitiva, se asignan cualitativamente probabilidades a los sucesos en base a las preferencias individuales, empleando diversas expresiones lingüísticas para referirse a estas comparaciones: "más probable", "muy probable". En algunos casos se ordenan por su mayor verosimilitud y se cuantifican sólo en casos sencillos, sin formalismo matemático.

Enfoque clásico de la probabilidad. Aunque a partir del siglo XVII varios matemáticos resuelven algunos problemas relacionados con los juegos de azar, el concepto de probabilidad no se llega a formalizar hasta comienzos del siglo XVIII. Es así que, la preocupación por las ganancias esperadas en estos juegos, lleva a definir la esperanza matemática antes que la probabilidad.

La correspondencia entre Pascal y Fermat, se considera como el punto de partida de la teoría de la probabilidad; aunque ellos usan la probabilidad en forma implícita, sin llegar a definirla. Laplace propone una forma de cálculo que implica reducir los acontecimientos aleatorios a un cierto número de casos igualmente posibles. Por tanto se encuentran pocos casos donde pueda aplicarse este significado, más allá de los juegos de azar.

Enfoque frecuencial de la probabilidad. Estudios teóricos sobre la predicción cuantitativa de eventos futuros desde la regularidad observada en ensayos repetidos de un fenómeno aleatorio solo aparece 3 siglos después que Bernoulli justificase una estimación frecuentista de la probabilidad y diera una primera demostración de un teorema de probabilidad, (la ley de los grandes números). La probabilidad se define como el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al estabilizarse, asumiendo la repetibilidad del ensayo. Sin embargo, hasta 1928 no se dio una definición formal de la probabilidad desde el punto de vista frecuencial (von Mises, 1952/1928).

Algunos problemas filosóficos del enfoque frecuencial que se discuten aún, son la ausencia de un valor exacto para la probabilidad, y siempre tener aproximaciones de la misma; no saber con certeza el número idóneo de experimentos para aceptar tal estimación; y la consideración que a veces es imposible contar con idénticas condiciones en la experimentación. Pese a ello, este enfoque frecuencial, didácticamente tiene la ventaja de conectar estadística y probabilidad.

Enfoque subjetivo de la probabilidad. La demostración por Bayes de su teorema indicó que la probabilidad (a priori) de un suceso puede revisarse a partir de nuevos datos para transformarse en una probabilidad a posteriori. Esta idea fue retomada más tarde por Ramsey (1931) y de Finetti (1974/1937), quienes definen las probabilidades como grados de creencia personal basados en el conocimiento y experiencia personal. La probabilidad pierde su carácter objetivo, pues está condicionada por un cierto sistema de conocimientos, y no es necesaria la repetición en idénticas condiciones, ampliándose el campo de aplicación de las probabilidades.

La controversia sobre el estatuto científico de esta visión de la probabilidad surge ante la dificultad de hallar una regla para asignar valores numéricos que expresen los grados de creencia personal. Didácticamente el interés de esta visión es que formaliza la idea intuitiva de aprender de la experiencia.

Aunque en la alfabetización probabilística escolar no se aborda el enfoque axiomático, el profesor debe tener una comprensión profunda de aquel para comprender los fenómenos propios de la enseñanza de la probabilidad.

Enfoque axiomático de la probabilidad. A lo largo del siglo XX, diferentes autores contribuyeron al desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad. Borel contempló la probabilidad como un tipo especial de medida, mientras que Kolmogorov usó esta idea, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida, para deducir una axiomática. Lo interesante de la axiomática de Kolmogorov es que fue aceptada por todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad.

Características del rol crítico desempeñado por los profesores.

Considerando que una vez que los niños entran a la escuela, ningún factor es tan importante como la calidad de los profesores (Bruns y Luque, 2014), este apartado lista diversos hallazgos de investigación que han determinado acciones para una enseñanza efectiva de la estadística y probabilidad en las aulas escolares de matemática. Algunas de tales acciones serán vivenciadas y discutidas en este minicurso:

- Ofrecer más experiencia empírica de variabilidad y aleatoriedad (Biehler, Ben-Zvi, Bakker, & Makar, 2013; Kazak & Pratt, 2017)

- Seleccionar herramientas digitales y otros tipos de representaciones externas (Pratt, 2000; Pratt & Kazak, 2018; Zahner & Corter, 2010; Lee & Lee, 2009; Biehler et al., 2013; Estrella, Olfos, Morales, & Vidal-Szabó, 2017; Estrella, Olfos, Vidal-Szabó, Morales, & Estrella, 2018)
- Dar oportunidades para predecir los resultados de una situación de probabilidad con resultados equiprobables sin realizar un experimento real (Kafoussi, 2004)
- Reconocer la complejidad de las diferentes epistemologías de probabilidad y ayudar a los estudiantes a superar las aparentes discrepancias mediante la simulación o herramientas especialmente diseñadas (Alvarado, Estrella, Retamal & Galindo, 2018; Liu & Thompson, 2007; Prediger, 2008)
- Reconocer la importancia del diseño de tareas con propósito y la relevancia de mantener las demandas cognitivas de la tarea, para llevar a los estudiantes a tomar sentido del poder de conceptos estadísticos y probabilísticos (Ainley, Pratt, & Hansen, 2006; Estrella, Zakaryan, Olfos & Espinoza, 2019)
- Ofrecer oportunidades para que los estudiantes argumenten sus ideas con sus pares, las negocien y usen tecnología (Ruthven y Hofmann, 2013; Ben-Zvi, Aridor, Makar & Bakker, 2012; Kazak et al., 2015).

Este desempeño docente implica que los profesores adquieran conocimientos y competencias que les ayuden en su actuar profesional. Así en el contenido de probabilidad en un contexto propio de la estadística, se espera que a largo plazo los profesores: (i) conecten ideas entre probabilidad, muestreo aleatorio e inferencia sobre una población; (ii) investiguen los procesos aleatorios y comprendan la probabilidad como una medida de la frecuencia relativa a largo plazo de un resultado, entendiendo las reglas básicas de probabilidad y sus enfoques a través de la experimentación y la simulación; (iii) comparen dos distribuciones de datos y hagan inferencias informales sobre las diferencias entre dos poblaciones; (iv) comprendan el rol de la aleatorización en el diseño de estudios y como base para la inferencia estadística; (v) comprendan las reglas de probabilidad, la probabilidad condicional y el uso de ellas en la toma de decisiones prácticas; y (vi) modelen relaciones entre variables, entre otras.

Lograr este desempeño es esencial para llegar a desarrollar el pensamiento estadístico y el probabilístico desde la alfabetización escolar de los estudiantes, pues muchas de estas ideas y procedimientos son complejas, difíciles y contraintuitivas.

Referencias y bibliografía

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32*(1), 23–38.

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L., & Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 131-156.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005) The nature of chance and probability . *En Graham A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* 16-42. *Kluwer Academic Publishers.*

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM, 44*(7), 913-925.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2013). Technologies for enhancing statistical reasoning at the school level. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, & J. Kilpatrick (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 643–688). New York: Springer Science+Business Media.

Bruns, B. & Luque, J. (2014). *Profesores excelentes: cómo mejorar el aprendizaje en América Latina y el Caribe*. Perú: Banco Mundial, Galese SAC.

del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49*(1), 53-64.

Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R., & Espinoza, G. (2019). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2,* 1-18.

Estrella, S., Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., & Estrella, P. (2018). Competencia meta-representacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 143-163.

Estrella, S. (2018). Data representations in Early Statistics: data sense, meta-representational competence and transnumeration. In A. Leavy, A., M. Meletiou, & E. Paparistodemou (Eds.). *Statistics in Early Childhood and Primary Education – Supporting early statistical and probabilistic thinking*, (pp. 239-256). ISBN 978-981-13-1044-7. Singapur: Springer.

Estrella, S., Olfos, R., Morales, S., & Vidal-Szabó, P. (2017). Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20*(3), 345-370. DOI 10.12802/relime.17.2034.

Kafoussi, S. (2004). Can kindergarten children be successfully involved in probabilistic tasks? *Statistics Education Research Journal, 3*(1), 29–39.

Kazak, S., & Pratt, D. (2017). Pre-service mathematics teachers' use of probability models in making informal inferences about a chance game. *Statistics Education Research Journal, 16*(2).

Pratt, D., & Kazak, S. (2018). *Research on uncertainty. In International handbook of research in statistics education* (pp. 193-227). Springer, Cham.

Franklin, C., A. Bargagliotti, C. Case, G. Kader, R. Scheaffer, & D. Spangler. 2015. The Statistics Education of Teachers. American Statistical Association.

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Nueva York: Springer.

Gómez, E., Batanero, C., & Contreras, J. (2014). Conocimiento Matemático de Futuros Profesores para la Enseñanza de la Probabilidad desde el Enfoque Frecuencial. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 209-229.

Lee, H. S., & Lee, J. T. (2009). Reasoning about probabilistic phenomena: Lessons learned and applied in software design. *Technology Innovations in Statistics Education, 3*(2). http://escholarship.org/uc/item/1b54h9s9.

Liu, Y., & Thompson, P. W. (2007). Teachers' understandings of probability. *Cognition and Instruction, 25*(2), 113–160.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 602–625.

Pratt, D., & Kazak, S. (2018). *Research on uncertainty. In International handbook of research in statistics education* (pp. 193-227). Springer, Cham.

Prediger, S. (2008). Do you want me to do it with probability or with my normal thinking?— Horizontal and vertical views on the formation of stochastic conceptions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *3*(3), 126–154.

Ruthven, K., & Hofmann, R. (2013). Chance by design: Devising an introductory probability module for implementation at scale in English early-secondary education. *ZDM Mathematics Education*, *45*(3), 409–423.

Wild, C., Utts, J., & Horton, N. (2018). What Is Statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5–36).

Zahner, D., & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 177–204.