XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
Universidad de Antioquia

La Resolución de Problemas Matemáticos: Conectando el trabajo de Polya con el desarrollo del razonamiento digital

Manuel Santos Trigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN
Mexico
msantos@cinvestav.mx

Resumen

La resolución de problemas como campo de investigación y práctica se ha desarrollado y continúa avanzando a partir de las contribuciones de los matemáticos, los educadores matemáticos y de los profesores de la disciplina. ¿Cuáles son los resultados más importantes de los programas de investigación sobre la resolución de problemas y cómo han contribuido en la comprensión y construcción de conocimiento matemático de los profesores/estudiantes? ¿Cómo o qué cambios han mostrado la agenda de investigación y práctica en la resolución de problemas en los últimos 30 años? En la discusión de estas preguntas se destaca el trabajo de la comunidad matemática que identifica a la resolución de problemas como una actividad crucial en el quehacer matemático; los desarrollos y contribuciones de la educación matemática que analizan los procesos cognitivos, metacognitivos y afectivos que muestra el individuo al resolver problemas; y la presencia y uso sistemático de tecnologías digitales en las tareas que involucran la formulación y resolución de problemas.

Palabras clave: resolución de problemas, marcos conceptuales, tecnologías digitales y razonamiento.

Introducción

El planteamiento de preguntas o problemas y la búsqueda de respuestas o soluciones son actividades fundamentales que permean el comportamiento de los individuos. Las preguntas son una forma importante de expresar la curiosidad por conocer y entender fenómenos y el mundo que nos rodea. En las matemáticas, la formulación de problemas y la búsqueda de diversas maneras de cómo resolverlos son aspectos esenciales del quehacer y desarrollo de la disciplina. En la educación matemática el estudio sistemático de los procesos que se involucran en la formulación y resolución de problemas aportan información importante sobre cómo organizar actividades de aprendizaje que guíen a los estudiantes en el desarrollo de competencias de resolución de problemas. ¿Cuáles han sido los resultados más importantes de los programas de investigación en el campo de la resolución de problemas? ¿Qué cambios ha mostrado la agenda de investigación y práctica en la resolución de problemas en los últimos 30 años? Tres elementos importantes han contribuido al desarrollo de la investigación en la resolución de problemas: (a) el trabajo de la comunidad matemática que identifica a la resolución de problemas como una actividad crucial en el quehacer matemático; (b) los desarrollos en la educación matemática, que enfocan la atención en el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes; y (c) la presencia y uso sistemático de las tecnologías digitales en los procesos de formular y resolver problemas.

Se presenta una revisión de algunos trabajos que reconocen a la actividad de resolver problemas como la esencia del quehacer matemático. El método introspectivo fue el medio para que algunos matemáticos comunicaran sus experiencias y analizaran sus modos de formular y resolver problemas. Posteriormente se analiza el programa de Schoenfeld, identificando resultados y cambios importantes en la agenda de investigación. Al final, se destaca cómo el desarrollo de tecnologías digitales (Sistemas de Geometría Dinámica) ha influido en las formas de razonar y trabajar los problemas matemáticos, y también cómo las tecnologías o aplicaciones de comunicación han ampliado las oportunidades para que los estudiantes compartan sus ideas y extiendan sus discusiones más allá de los ambientes formales de enseñanza.

Los matemáticos y la resolución de problemas

¿Cómo se desarrolla el conocimiento matemático? ¿Qué es lo esencial en el quehacer de la disciplina? En la resolución de problemas matemáticos como área de estudio, interesa analizar cómo se construye el conocimiento disciplinario, cómo se formulan los problemas y las formas de caracterizar y explicar el proceso de construcción de conceptos y la resolución de los problemas. Se sostiene que el análisis y la explicación del proceso que se involucra en la resolución de problemas proporciona información importante sobre el diseño de ambientes de aprendizaje que estructuren y promuevan actividades para la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes. Así, en la comunidad matemática se han generado desarrollos relevantes relacionados con la resolución de problemas. Cantor (1845-1918) reconoció la importancia de formular preguntas en el estudio de las matemáticas y enfatiza esta posición en el título de su tesis doctoral "en matemáticas el arte de plantear preguntas es de más valor que resolver problemas". Pólya (1945) analiza su propia actividad y quehacer matemático vía el método introspectivo, que lo conduce a plantear un modelo que identifica las fases fundamentales que aparecen durante el proceso de resolver problemas.

La comprensión del problema se relaciona con la importancia de analizar el enunciado del problema como punto de partida para buscar formas o métodos de solución. En esta fase, el individuo o estudiante problematiza el enunciado con la intención de identificar los conceptos y datos relevantes, y se analizan pertinencia, consistencia y sentido del enunciado (¿qué se pide?, ¿qué datos se tienen, son suficientes?, ¿qué conceptos son importantes?, etcétera).

El diseño de un plan de solución se refiere a encontrar relaciones entre los datos del enunciado y lo que se pide encontrar, con la idea de formular un plan de solución. ¿Conoces algún problema relacionado?, ¿puedes replantear el enunciado?, ¿identificas alguna estrategia que puedas aplicar para resolver el problema?, ¿estás usando todos los datos o condiciones del problema?, ¿se puede representar el problema dinámicamente?

La siguiente fase involucra *llevar a cabo el plan* y verificar que los pasos y operaciones realizadas sean correctas. Aquí es significativo que el individuo revise la consistencia de las unidades de los datos en las soluciones, y las diferentes representaciones que sean relevantes en el proceso de solución.

Finalmente, la fase *visión retrospectiva* implica considerar otros caminos para resolver el problema y analizar si los métodos de solución pueden aplicarse en la solución de otros problemas. Además, aquí resulta valioso transformar el enunciado inicial del problema en casos más generales y proponer nuevos problemas.

Pólya (1945) también aborda la importancia de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas. Las heurísticas son patrones de un razonamiento productivo que resultan trascendentes para lograr avances en la comprensión y solución de problemas no rutinarios. Algunos ejemplos de estrategias heurísticas que Pólya ilustra en la resolución de problemas son el uso de tablas o diagramas, resolver problemas más simples, establecer sub-metas, relajar condiciones iniciales, asumir el problema como resuelto y buscar relaciones, etcétera.

Hadamard (1945) contribuye también al entendimiento del proceso de resolver problemas y presenta un ensayo sobre cómo los matemáticos inventan o generan nuevas ideas. Su método consiste en analizar respuestas que recibe de matemáticos y científicos distinguidos de su época (Pólya, Einstein, Levi-Strauss, etc.) a un cuestionario con preguntas sobre sus experiencias al trabajar o desarrollar conocimiento en sus áreas o disciplinas. También recoge testimonios de matemáticos, revisa el trabajo de psicólogos, filósofos y científicos, e incorpora la introspección de su propio quehacer como elementos para explicar la invención de resultados matemáticos. En términos generales, el modelo que reporta Hadamard distingue un patrón que identifica tres elementos alrededor del proceso de invención: el estudio consciente del tema o problema (revisión), seguido por un proceso de madurez inconsciente (incubación), lo que conduce a un momento de inspiración o iluminación (*insight*) (la invención, revelación de la solución).

Tanto el trabajo de Pólya como el de Hadamard intentan caracterizar el proceso de resolver problemas o de generar conocimiento matemático. Pólya describe el proceso de trabajar los problemas y señala preguntas importantes asociadas con cada fase involucrada en la resolución de problemas. Por su parte, Hadamard centra más la atención en explicar cómo se genera una idea novedosa o resultado importante en el quehacer disciplinario. Este modelo comparte los desarrollos con la psicología de la Gestalt[1] que identifica cuatro fases en la resolución de problemas: a) el individuo se prepara para resolver un problema (revisa información, representa el problema, busca problemas relacionados); b) se involucra en el proceso de incubación del problema, que incluye pruebas de ensayo y error para resolverlo; c) se ilumina y el *insight* ocurre y resuelve el problema y, d) verifica la solución del problema.

La comunidad matemática reconoce que la resolución de problemas es una actividad crucial en el desarrollo del quehacer de la disciplina y varios autores han publicado libros que incluyen el análisis de problemas situados en diversas áreas (Dörrie, 1965; Hilbert, 1902; Steinhaus, 1964). Halmos (1980) expresa que los axiomas, teoremas, pruebas, conceptos, definiciones, fórmulas y métodos son ingredientes esenciales de las matemáticas, pero la principal razón del quehacer matemático es resolver problemas.

> Yo creo que los problemas son el corazón de las matemáticas, y espero que, como maestros, en el salón de clase, seminarios, y en los libros y artículos que escribimos, los enfaticemos más y más, y que entrenemos a nuestros estudiantes a ser mejores formuladores y resolutores de problemas que nosotros. (Halmos, 1980, p. 524)

[1] Ver: Wertheimer, https://es.wikipedia.org/wiki/Max_Wertheimer

> Para Halmos, el mejor camino para aprender matemáticas es resolver problemas y describe cómo él usa el método Moore2 en sus cursos universitarios, "método para crear una actitud para resolver problemas en los estudiantes, es una mezcla de método socrático y el espíritu competitivo de los juegos olímpicos" (Halmos, Moise y Piranian, 1975, p. 468). [Traducción propia]
> Durante su curso de álgebra lineal, en la primera clase les dio una lista de 50 teoremas, sin definiciones, sin explicaciones, sin pruebas. La tarea de los estudiantes fue entenderlos y explicarlos, mostrar ejemplos y contraejemplos, y finalmente demostrarlos. El método Moore ha sido usado en cursos universitarios con estudiantes que muestran interés y motivación en el estudio de las matemáticas (Santos-Trigo, 2014a).

La educación matemática, los educadores y la resolución de problemas

Un trabajo notable que influye en el desarrollo de la resolución de problemas como dominio de investigación es el estudio sobre las habilidades matemáticas de los niños con capacidades sobresalientes o tendencias hacia el estudio de la disciplina (Krutetskii, 1976). En particular, el estudio de Krutestkii no solo caracteriza un conjunto de habilidades matemáticas en los niños dotados o sobresalientes, sino que también contribuye al desarrollo metodológico de estudios de naturaleza cualitativa en la resolución de problemas.

> Analizamos el proceso natural de pensar mientras los problemas experimentales eran resueltos: por un registro de solución, la naturaleza de las operaciones, los diagramas y dibujos hechos por los participantes; por el registro del proceso verbal de reflexión durante el camino de solución; por el material desde la discusión acerca de la solución después de su obtención. (Krutetskii, 1976, p. 94)

Krutetskii analiza las habilidades matemáticas de niños de quinto y sexto grado de primaria usando problemas de aritmética ("para numerar el número de páginas de una enciclopedia se necesitan 6869 dígitos, ¿cuántas páginas contiene?"), geometría y razonamiento lógico. El método de aplicar los problemas también fue novedoso en esa época; al niño se le presentaba un problema difícil, si no lo resolvía se le proporcionaba otro fácil y después otra vez el difícil, etcétera. El propósito era determinar qué tan rápido el niño podía encontrar una generalidad y así observar la habilidad matemática como un proceso, y no solo como un resultado. Entre las habilidades matemáticas que mostraron los niños con talento matemático se destacan: la habilidad para hacer y usar generalizaciones; una habilidad para ofrecer y usar representaciones múltiples del mismo objeto matemático; una tendencia para pensar diferentes maneras de resolver un problema; una habilidad para usar analogías y establecer conexiones; una tendencia para abreviar acercamientos y buscar atajos en la resolución de problemas, etcétera.

Newell y Simon (1972) desarrollan, desde el campo de la inteligencia artificial, un programa "General Problem Solver" para resolver problemas de criptoaritmética, jugar ajedrez y probar teoremas. La estructura del algoritmo del programa para resolver los problemas se diseñó a partir de analizar y simular cómo los expertos en esos dominios resolvían los problemas. Así, el estudio del proceso cognitivo del individuo llegó a ser un área de interés y de investigación. En esta perspectiva, el dominio de la inteligencia artificial ofreció o aportó a la educación matemática herramientas como el análisis de protocolos de expertos o individuos resolviendo problemas para categorizar los patrones de comportamiento que mostraban durante el proceso de resolución.

[2] Ver: https://en.wikipedia.org/wiki/Moore_method

El trabajo de Schoenfeld (1985) retoma métodos como el análisis de protocolos, y lanza un programa de investigación que lo lleva a implementar las heurísticas mencionadas por Pólya (1945) en un curso de resolución de problemas. Santos (1992) destaca los resultados importantes del trabajo de Schoenfeld, quien enfoca la atención sobre las siguientes preguntas: ¿qué hacen los individuos que resuelven problemas de manera eficiente y qué es lo que les permite resolver problemas difíciles? ¿Qué dificultades muestran y cómo se comportan aquellos que no son efectivos en la resolución de problemas? ¿Qué pueden hacer los profesores para ayudar a los estudiantes a ser exitosos en la resolución de problemas?

Para responder estas preguntas, Schoenfeld (1985) presenta un marco conceptual que explica el éxito o fracaso de un individuo o estudiante al resolver problemas en términos de cuatro dimensiones (Santos-Trigo, 2014a):

1. *El conocimiento o recursos básicos*. Es decir, el conocimiento de hechos y conceptos básicos que el estudiante tiene potencialmente a su disposición resulta esencial durante el proceso de solución de un problema.

2. *Las heurísticas* o reglas generales que ayudan al estudiante a avanzar o progresar en el proceso de solución cuando no encuentra un camino directo para resolver el problema.

3. *Las estrategias metacognitivas* o el monitoreo o autorregulación del proceso de solución. Los que resuelven problemas de manera exitosa planean y monitorean la forma y el proceso de solución. Si observan que van progresando, entonces continúan; si encuentran dificultades, revalúan lo que están haciendo y consideran alternativas.

4. *Las creencias*. Lo que los estudiantes creen acerca de ellos mismos, de la naturaleza del quehacer matemático que se deriva de sus experiencias de aprendizaje, moldea y permea lo que hacen durante sus intentos de solución.

Por ejemplo, aquellos estudiantes que creen que los problemas matemáticos se resuelven en menos de cinco minutos abandonarán sus intentos después de agotar ese tiempo, aun cuando pudieran haber resuelto el problema si hubiesen perseverado en resolverlo. De manera similar, aquellos estudiantes que creen que las pruebas no tienen nada que ver con el desarrollo de alguna relación matemática, muchas veces plantean conjeturas o resultados que se contradicen o no toman en cuenta lo que antes habían probado.

Otro resultado importante del programa de Schoenfeld se relaciona con el uso de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014b). Schoenfeld (2010b) reportó que los métodos heurísticos identificados por Pólya son complejos y los estudiantes experimentan serias dificultades para aprenderlos y aplicarlos en la resolución de problemas. Schoenfeld señala que cada heurística no se reduce a una sola estrategia que se aplica en la resolución de un problema, sino que representa una colección o familia de estrategias. Así, para que un estudiante identifique lo que una heurística involucra y cómo usarla, debe pensar y experimentar lo que esa estrategia significa en un dominio particular (geometría/triángulos, álgebra/raíces, cálculo/sucesiones, etc.) y ensayar su aplicación o uso en una variedad de casos.

> …Por ejemplo, en el uso de la estrategia “buscar el sentido o pertinencia del problema y sentido del problema a través de ejemplos particulares”, uno debe (a) pensar en el uso de la estrategia, (b) saber qué versión de la estrategia usar, (c) generar y examinar los ejemplos apropiados, (d) analizar los resultados obtenidos, y (d) usarlos para resolver el problema. (Schoenfeld, 2010b, p. 106)

Schoenfeld (2015) afirma que el programa que desarrolló sobre la resolución de problemas le proporcionó bases para ayudar a los estudiantes a ser más efectivos al resolver problemas. Su agenda de investigación posterior se enfocó en cómo ayudar a los maestros en la construcción e implementación de ambientes de aprendizaje que facilitaran a los estudiantes incrementar una comprensión profunda de la disciplina. Su agenda se centró en el área relacionada con la toma de decisiones e incluyó las siguientes interrogantes:

> ¿Puedo desarrollar una comprensión y sustento teórico de la enseñanza que permita entender cómo y por qué los maestros toman las decisiones que toman cuando enseñan? ¿Pueden los maestros usar esos desarrollos teóricos y ayudarles a ser más efectivos? Además, ¿puede la descripción teórica de la enseñanza ser usada para caracterizar el proceso de tomar decisiones en otras áreas? (Schoenfeld, 2015, p. 230)

También, Schoenfeld (2010a) expresa que una actividad con una meta orientada, como la resolución de problemas, la enseñanza o una cirugía de cerebro, puede ser explicada y modelada a través de una arquitectura teórica en términos de: los *recursos* (conocimiento específico), las *metas*; *orientaciones* (una abstracción de creencias, incluyendo valores, preferencias, etc.) y una *toma de decisiones*. La estructura básica de esta teoría es recursiva: Los individuos se orientan hacia situaciones y deciden (a partir de creencias y recursos disponibles) cómo lograr sus metas. Si la situación es familiar, implementan rutinas familiares; si son problemáticas, reconsideran sus caminos.

En este contexto, el conocimiento acumulado en el campo de la resolución de problemas ha aportado información relevante sobre lo que significa e involucra pensar matemáticamente, y también ha identificado diversas maneras para que los estudiantes construyan conocimiento matemático vía la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014b). ¿Qué tipo de innovaciones debe incorporarse en los ambientes de aprendizaje para que los estudiantes tomen en cuenta los recursos y desarrollos tecnológicos para generar competencias en la resolución de problemas? En la discusión de esta pregunta resulta importante caracterizar las formas de representar y explorar los problemas con el uso de tecnologías digitales. En particular, el uso de un sistema de geometría dinámica (SGD) en la construcción de modelos dinámicos de los problemas ofrece al estudiante explorar el comportamiento de algunos atributos de los objetos matemáticos que resultan al mover algunos elementos dentro del mismo modelo. Se argumenta que el uso de la tecnología digital amplía las formas de representar, explorar, resolver los problemas y por lo tanto demanda una revisión de los marcos conceptuales que se generaron a partir de analizar procesos de resolución que esencialmente involucran el uso de lápiz y papel (Santos-Trigo, 2014b; Liljedahl et al., 2016).

La resolución de problemas y el uso de tecnología digital

¿Qué ofrece la tecnología digital al estudiante, en términos de formas de razonamiento en la resolución de problemas? ¿Qué información del proceso de resolución resulta importante en la discusión de los marcos conceptuales que explican cómo los estudiantes usan la tecnología en la resolución de problemas? En la discusión de estas preguntas (Santos-Trigo, 2019) se presenta un ejemplo que destaca el uso de la herramienta en la aplicación de algunas estrategias heurísticas y la búsqueda de propiedades y relaciones que resultan esenciales en el proceso de resolución del problema. El punto de partida es buscar el significado geométrico o propiedades de los conceptos involucrados en el enunciado del problema, y construir un modelo dinámico que permita explorar y encontrar relaciones. El uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como

GeoGebra genera una oportunidad para que el estudiante se involucre en un proceso de formulación de conjeturas y formas de exploración y validación de resultados. Una estrategia importante de resolución de problemas es la heurística de relajar las condiciones de un problema para plantear problemas más simples que ayuden a resolverlo. Esta estrategia se relaciona con el proceso de formular problemas por parte del individuo. ¿Cómo se puede implementar esta estrategia con el uso de GeoGebra? Se muestra un ejemplo de la implementación de esta heurística con ayuda de un SGD para resolver un problema que involucra el trazo de una circunferencia tangente a dos rectas (Figura 1):

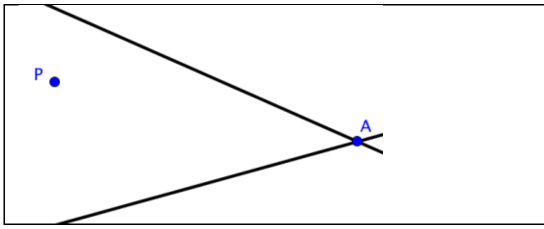
	Problema 3. Dadas dos rectas y un punto P que no pertenece a ellas, trazar una circunferencia que pase por el punto P y sea tangente a las rectas.

Figura 1. Problema que involucra el trazo de una circunferencia tangente a dos rectas.

Aplicando la heurística de relajar las condiciones del problema inicial para formular un problema más simple, se podría plantear el siguiente problema:

Problema 3.1. Dada una recta y un punto P, trazar una circunferencia que sea tangente a la recta y que pase por el punto P.

Así, el Problema 3 se puede descomponer en dos problemas análogos al considerar solo una de las rectas. Una solución dinámica al Problema 3.1 se muestra en la (figura 2).

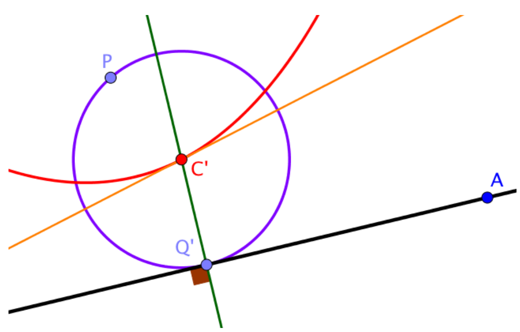
Solución	***Análisis***
Problema 3.1. Dada una recta y un punto P, trazar una circunferencia que sea tangente a la recta y que pase por el punto P.  *Descripción.* Q' es un punto móvil sobre la recta. Se traza la recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto Q' y la mediatriz del segmento PQ'. Se identifica la intersección C' de la mediatriz y la recta perpendicular. Se traza el lugar geométrico del punto C' al mover el punto Q'.	*Recursos.* El centro de una circunferencia tangente a una recta se ubica en la perpendicular a la recta que pasa por el punto de tangencia. Cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos. Lugar geométrico. *Heurísticas.* Relajar las condiciones del problema y formular un problema más simple. Analizar patrones. *Estrategias dinámicas.* Se traza la familia de circunferencias que pasan por el punto P a partir de un punto de tangencia Q' móvil. *Resultado importante.* El lugar geométrico descrito por el centro C' de la familia de circunferencias tangentes a una recta dada que pasan por un punto P dado es una parábola. El foco y directriz de la parábola son el punto P y la recta dada.

Figura 2. Solución dinámica del Problema 3.1

¿Por qué el centro de las circunferencias tangentes a una recta que pasan por un punto describe una parábola? Así, se puede argumentar que el punto C’ siempre está a la misma distancia del punto P y de la recta dada (definición de parábola); por ser el punto de intersección de la mediatriz de PQ’ y la perpendicular a la recta por Q’. Por lo tanto, la recta y el punto serían la directriz y el foco de la parábola, respectivamente.

Para este enfoque dinámico, la mediatriz y la parábola son algunos recursos fundamentales. Un aspecto importante en este acercamiento es el movimiento de elementos dentro de la configuración; el movimiento del punto Q’ sobre la recta, permite generar una familia de circunferencias tangentes a dicha recta y que pasan por el punto P. Posteriormente, se pueden analizar patrones en términos del lugar geométrico descrito por puntos móviles; el lugar geométrico descrito por el centro C’ en función del movimiento del punto Q’ es una parábola. Así, la visualización de lugares geométricos se convierte en una estrategia que permite resolver problemas. Luego, otra fase del proceso de solución de problemas con ayuda del SGD consiste en analizar los lugares geométricos; se argumentó que el lugar geométrico descrito por el punto C’ es una parábola.

Finalmente, el Problema 3 (uno de los problemas de Apolonio) se puede resolver mediante la transferencia de los resultados del Problema 3.1. Si se omite o se considera solo una de las rectas, sabemos que el centro de la familia de circunferencias tangentes a una recta y que pasan por un punto está sobre una parábola que tiene como foco y directriz el punto y la recta dados. Así, para resolver el Problema 3 basta con aplicar el resultado del Problema 3.1 para cada recta. La solución quedará en términos del punto de intersección de dos parábolas (figura 3). La parábola c está determinada por los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a la recta a y la parábola f está determinada por los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a la recta b. Así, los puntos de intersección de las parábolas c y f determinan los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a ambas rectas.

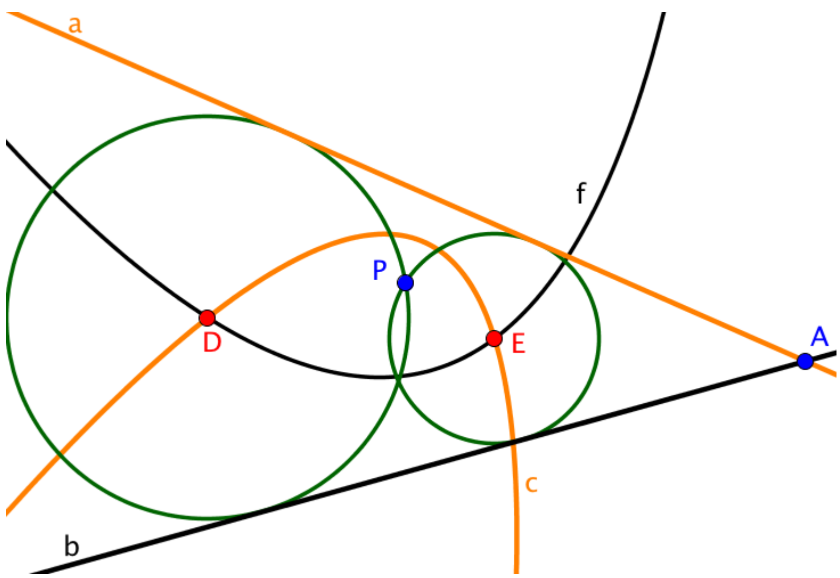


Figura 3. Solución al problema de Apolonio mediante la transferencia de los resultados del Problema 3.1

Una variante de este problema es cuando el punto P se encuentra en una de las rectas, y otra vez el mismo método que involucra el trazo de la parábola ayuda a resolver el problema (figura 4).

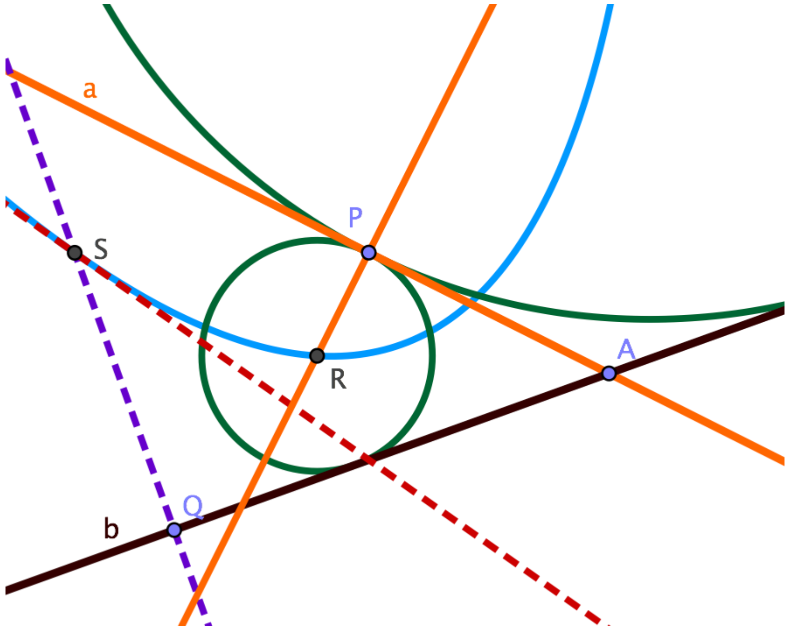


Figura 4. Trazo de circunferencias tangentes a dos rectas en el punto P que pertenece a una recta.

Comentario: Las estrategias heurísticas son esenciales en todas las fases de resolución de problemas y con el uso de tecnología digital algunas de ellas se potencian; en el proceso de implementarlas también se generan nuevas heurísticas. La aplicación de la heurística que implica *reducir o relajar* las condiciones del problema inicial proporciona al estudiante una oportunidad para involucrarse en un proceso de formulación de problemas que es una actividad esencial en el quehacer de la disciplina. ¿Cómo trazo una circunferencia tangente a una recta? Es una pregunta que se aborda desde la educación básica y se asocia con el trazo de la perpendicular a la recta que pasa por el punto de tangencia y que luego se conecta con el trazo de la mediatriz. El movimiento de puntos y objetos es otra estrategia fundamental que se robustece con el trazo de lugares geométricos. Así, el lugar geométrico de la intersección de la recta perpendicular y la mediatriz representa una parábola y se convierte en un objeto importante para resolver el problema. Es decir, la estrategia de enfocar la atención hacia un caso particular de trazar la circunferencia tangente a una recta y que pase por el punto dado P no solo proporcionó recursos e información significativa para resolver el problema, sino que también emergieron nuevos conceptos o relaciones que extienden el enunciado inicial del problema.

Discusión y reflexiones

Tres temas relacionados se identifican en la estructura y desarrollo de la resolución de problemas como un dominio de investigación y un modelo de enseñanza:

1. La contribución y el reconocimiento de la comunidad matemática hacia la actividad de resolver problemas como un elemento esencial del quehacer de la disciplina.

2. El trabajo desde la educación matemática como disciplina que provee bases metodológicas para estudiar sistemáticamente el comportamiento de los estudiantes o individuos

durante la resolución de problemas. Así, los aportes y reflexiones de los matemáticos influyen en la construcción y desarrollo de la agenda de investigación en el área de la resolución de problemas. Schoenfeld (1992) menciona que una caracterización robusta de lo que significa e involucra el pensar matemáticamente resulta fundamental en los temas de estudio de la resolución de problemas. En este contexto, el quehacer de la disciplina que muestran los expertos contribuye a la discusión sobre lo que caracteriza el pensamiento matemático.

3. Un tema transversal en la agenda académica del campo de la resolución de problemas es el uso de distintas herramientas en las distintas fases que se involucran en el proceso de búsqueda de soluciones de los problemas. Camacho y Santos-Trigo (2015) presentan aportes importantes y resultados en un programa de investigación relacionado con la formación de profesores.

Recientemente, los desarrollos y disponibilidad de tecnologías digitales (de usos múltiples como Internet o aplicaciones de comunicación y de acción matemática como GeoGebra) están influyendo y ampliando no solo las formas de representar y explorar los problemas o contenidos matemáticos, sino también las dinámicas que se generan en los ambientes de enseñanza (Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Aguilar-Magallón, 2016).

En la incorporación o uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales en la representación y exploración de los problemas y en los escenarios de enseñanza, resulta importante que los mismos profesores inicialmente se involucren en actividades que los lleven a analizar los recursos y estrategias que caractericen las formas de razonamiento que emergen con el uso de las tecnologías (Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín, 2016). Es decir, un ambiente de enseñanza basado en la resolución de problemas debe incorporar ya como un elemento esencial el uso de las tecnologías digitales en las formas de representar y de explorar las tareas o problemas matemáticos. Además, los desarrollos en línea o plataformas *ad hoc*[3] ofrecen recursos que los estudiantes pueden consultar y discutir en el estudio de los conceptos como parte de una comunidad de aprendizaje que promueva el intercambio de ideas y la formulación de nuevos problemas.

En el ejemplo aquí presentado, se involucra y destaca la construcción de modelos dinámicos de los problemas; se observa que el movimiento de algunos elementos (movimiento ordenado) dentro del modelo resulta central en la formulación de conjeturas y de nuevos problemas (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2016). Además, la misma exploración dinámica del modelo genera información relacionada con las propiedades de algunos objetos o de sus atributos. En términos de los marcos conceptuales que explican el proceso de resolución de problemas (Schoenfeld, 1985; 1992) existe evidencia del surgimiento de una dimensión importante en el proceso de resolución de los problemas, que se relaciona con la importancia de que el individuo o estudiante se involucre en actividades o en un proceso de apropiación de diversas herramientas (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016). Además, con el uso de la tecnología digital se amplía el conjunto de estrategias heurísticas disponibles durante todas las fases de resolución de los problemas.

El movimiento ordenado, la cuantificación y medición de atributos (medida de ángulos, longitud de segmentos, perímetro, área, etc.), la generación y visualización de lugares geométricos y el uso de deslizadores son algunas heurísticas propias de un sistema de geometría dinámica. Estas estrategias son vitales en el análisis y la caracterización de las formas de

[3] Por ejemplo, ver: https://www.khanacademy.org/coach/dashboard

razonamiento que muestra el individuo durante el proceso de resolución de las tareas o problemas.

Finalmente, el uso de tecnologías de usos múltiples como Internet o aplicaciones de comunicación (Skype, FaceTime, Padlet) permiten a los estudiantes y profesores extender las discusiones matemáticas más allá del salón de clase. Es decir, los acercamientos o ideas individuales se pueden compartir en un muro digital (Padlet) y el grupo o la comunidad de aprendizaje le puede dar seguimiento a esas contribuciones individuales para compartir otras ideas, proporcionar retroalimentación o proponer extensiones del problema inicial. En esta perspectiva, el estudiante o profesor se involucra en una discusión continua como parte de un grupo (incluyendo expertos o pares), que puede ser sincronizada (directa, vía alguna aplicación) o a través del uso de correo electrónico, con el objetivo de defender, contrastar y refinar sus ideas y acercamientos a los problemas. Además, el uso de tabletas o teléfonos móviles facilita la interacción entre estudiantes y promueve el intercambio de ideas y la búsqueda de distintos acercamientos o métodos de resolución de los problemas.

Agradecimientos:

Se agradece el apoyo parcial recibido del proyecto SEP-Cinvestav12 durante el desarrollo del presente trabajo.

Referencias

Camacho, M. y Santos-Trigo, M. (2015). Aportes sobre la resolución de problemas, tecnología digital y formación de profesores de matemáticas. En N. Planas (Coord.), *Avances y Realidades de la Educación Matemática* (pp. 113-131). Barcelona, España: GRAO.

Dörrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York, USA: Dover.

Hadamard, J. (1945). *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York, USA: Dover Publications.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519-524.

Halmos, P. R., Moise, E. E. y Piranian, G. (1975). The problem of learning to teach. *The American Mathematical Monthly, 82*(5), 466-577.

Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *8*, 437-479.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children* (J. Teller, Trad.). Chicago, USA: The University of Chicago Press.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. y Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. ICME-13 Topical Surveys. Doi: 10.1007/978-3-319-40730-2_1

Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. *A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical problem solving and the use of digital technologies. En P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving*, ICME-13 Monographs, https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_4. Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M. (2014a). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos* (2da. ed.). México: Trillas - Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.

Santos-Trigo, M. (2014b). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501). New York, USA: Springer.

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2016). Digital technologies and mathematical problem solving: Redesigning resources, materials, and extending learning environments. En K. Newton (Ed.), *Problem-Solving: Strategies, Challenges and Outcomes* (pp. 31-50). New York, USA: Nova Science Publishers.

Santos-Trigo, M. y Moreno-Armella, L. (2016). The use of digital technologies to frame and foster learners' problem-solving experiences. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives* (pp. 189-207). Cham, Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. y Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 827-842.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I. y Aguilar-Magallón, D. (2016). Digital technologies and a modelling approach to learn mathematics and develop problem solving competencies. En L. Uden, D. Liberona, y B. Feldmann (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud - The Changing Face of Education* (pp. 193-206). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-42147-6_17

Santos, L. M. (1992). Resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática*, *4*(2), 16-24.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida, USA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York, USA: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2010a). *How We think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and Its Educational Applications*. New York, USA: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (2010b). Reflections of an accidental theorist. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 104-116.

Schoenfeld, A. H. (2015). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-243). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-12688-3_16

Semanišinová, I., Harminc, M. y Jesenská, M. (2017). Competition aims to develop flexibility in the classroom. En A. Soifer (Ed.), *Competitions for Young Mathematicians*, *ICME-13 Monographs* (pp. 171-185). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-56585-9_7

Steinhaus, H. (1964). *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*. New York, USA: Basic Books.