Educación Matemática en las Américas 2019



CIAEM
desde - since 1961

© 2020
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.



Estos materiales están bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.



EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS AMÉRICAS 2019

Presentación

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es un placer y un honor ofrecer a la comunidad educativa *Educación Matemática en las Américas 2019*, en donde se pueden encontrar muy importantes insumos para comprender el momento histórico que atraviesa la Educación Matemática desde la perspectiva de las Américas.

La *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se realizó entre el 5 y 10 de mayo del 2019 en Medellín, Colombia. La Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia fueron las organizaciones académicas anfitrionas del evento. Las sesiones fueron realizadas en el campus de la Universidad de Medellín. Participaron 700 personas provenientes de 25 países de cuatro continentes: Europa, Asia, África y las Américas. Participaron centenares de docentes en servicio de la ciudad de Medellín y del Departamento de Antioquia.

Alrededor de 400 trabajos fueron presentados: conferencias plenarias y paralelas, mesas plenarias, minicursos, sesiones temáticas, comunicaciones cortas, talleres y posters. Unas 50 personalidades del mayor nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática expusieron sobre sus investigaciones. Entre ellas Jill Adler (Suráfrica), Ferdinando Arzarello (Italia), Salvador Llinares (España), Yoshinori Shimizu (Japón), Michael Shaughnessy (EUA), Luis Rico (España), Fidel Oteiza (Chile), Carlos Vasco (Colombia), Carlos Sánchez (Cuba), Luis Carlos Arboleda (Colombia), Edwin Chaves (Costa Rica), Nelly León (Venezuela), Vilma Mesa (EUA). Aunque físicamente no pudo estar presente envió su contribución en forma de video Ubiratan D'Ambrosio (Brasil). Los trabajos dentro de la plataforma del congreso se pueden consultar en https://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

La revisión científica de todos los trabajos fue responsabilidad de un Comité Asesor Internacional, un Comité Internacional del Programa y el Comité Ejecutivo del CIAEM. Se contó con la coordinación central de Directores de tema y la Dirección de la plataforma científica realizada por el académico Yuri Morales con el apoyo de la profesora Johanna Mena (ambos de Costa Rica) y con la participación voluntaria de muchísimos revisores científicos de muchos países.

Este libro incluye trabajos que fueron efectivamente presentados en ese congreso.

Está dividido en las siguientes partes:

- Conferencias plenarias
- Mesas plenarias
- Conferencias paralelas
- Minicursos

- Sesiones temáticas
- Comunicaciones, talleres, posters

Expreso mi agradecimiento a todos los miembros de los comités científicos, directores de tema, revisores científicos, y directores de la plataforma científica. También deseo agradecer por su apoyo en el registro de este libro a Sarah González y a la Pontificia Universidad Madre y Maestra en República Dominicana. Agradezco mucho a todos los autores que decidieron compartir su trabajo en las instancias que abrimos mediante la XV CIAEM. También a Yuri Morales quien técnica y formalmente generó este volumen para su registro.

En las diversas dimensiones del congreso, de cuya realización este libro es producto, quiero aprovechar esta ocasión para reconocer la valiosa contribución de las Universidades de Medellín y de Antioquia y al Comité Organizador Local de la XV CIAEM, y, además, agradecer al equipo humano del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* que ha sido durante muchos años un sostén crucial en la organización de todos los eventos del CIAEM y de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*; y en particular de este libro que hoy sacamos a la luz pública.

Invitamos a los lectores de este libro a promoverlo en sus diversas actividades de docencia, investigación, extensión y divulgación en todos sus países.

Con afecto



Ángel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática
18 de julio de 2020
Costa Rica

Índice

Basado en la información suministrada durante la postulación de cada trabajo

Conferencias plenarias

Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes 2

Salvador Llinares

The why, what and how of working with exemplification in mathematics teacher education 15

Jill Adler, Craig Pournara

La Resolución de Problemas Matemáticos: Conectando el trabajo de Polya con el desarrollo del razonamiento digital 29

Manuel Santos Trigo

La covariación instrumentada: un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica 41

Ferdinando Arzarello

Lesson Study as a vehicle for the Synergy of Research and Practices: A Japanese Perspective 56

Yoshinori Shimizu

Mesas plenarias

Una visión actual del CIAEM 70

Carlos Sánchez Fernández

Las capacidades superiores en el currículo matemático de Costa Rica y los retos para evaluarlas 76

Edwin Chaves Esquivel

Breve historia del CIAEM en el siglo XX: 1961-2000 86

Carlos Eduardo Vasco Uribe

Undergraduate teaching and learning of mathematics with open source textbooks: Uso de textos universitarios de matemáticas 89

Vilma Mesa

Visión desde Colombia del impacto de las Matemática Moderna y el papel del CIAEM 97

Luis Carlos Arboleda

Las capacidades superiores en el currículo matemático de Costa Rica y los retos para evaluarlas 103

Edwin Chaves Esquivel

Conferencias paralelas

Textos escolares desde una visión crítica de la Matemática 114

Nelly León Gómez

Criterios valorativos y normativos en la didáctica de una disciplina científica 126

Vicenç Font Moll

Aprendizagem profissional do professor de Matemática e o ensino de Álgebra: buscando articulações entre a escola básica e a universidade 134

Alessandro Ribeiro

Categorías para análisis de los contenidos didácticos en el currículo de matemáticas 140
Luis Rico

Experiencias de modelización en la formación de futuros profesores de matemática 148
Mónica Ester Villarreal

Interpretando o letramento estatístico dentro do currículo de matemática do ensino básico: um projeto internacional de ensino integrado sobre o tema de energia com dados reais. 157
Yuriko Yamamoto Baldin

Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza 165
Hugo Barrantes

Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales 174
José Chamoso Sánchez, María José Cáceres

GeoGebra como recurso para favorecer la interpretación matemática 183
Agustín Carrillo de Albornoz Torres

La fértil sencillez de las irracionalidades enteras y el uso de las prácticas argumentativas en el aula 191
Carlos Sánchez Fernández

Undergraduate teaching and learning of mathematics with open source textbooks: Uso de textos universitarios de matemáticas 199
Vilma Mesa

The Big Ideas in the statistics education of our students: Which ones are the biggest? 207
J. Michael Shaughnessy

Princípios didáticos para uma prática matemática transdisciplinar 223
Ettiène Guérios

Capacidades superiores matemáticas en la enseñanza de la Probabilidad 231
Edwin Chaves Esquivel

Refletindo sobre a inclusão das Tecnologias Digitais no Currículo de Matemática 242
Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Modelación en la Educación de las Ciencias y Matemática en la Primaria 249
Maria Salett Biembengut

El Programa Cronotopía: un enfoque modelo-teorético para las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica 262
Carlos Eduardo Vasco

Introducción histórica del método analítico en la Enseñanza de las matemáticas en Colombia 281
Luis Carlos Arboleda

Lesson Study as a vehicle for the Synergy of Research and Practices: A Japanese Perspective 296
Yoshinori Shimizu

¿Es la excelencia matemática una prioridad curricular? 308
José Luis Lupiáñez Gómez

Minicursos

Mini curso de Comunicación de la Matemática en el Aula Escolar para futuros profesores y futuras profesoras 317

Claudia Lorena Vargas Díaz

Desarrollando el pensamiento estadístico y probabilístico en el aula escolar de matemática con situaciones de incertidumbre 324

Soledad Estrella

Experiencias para la formación de profesores de matemáticas en atención a la diversidad 330

Sandra Evely Parada Rico

Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática 338

Leonor Camargo Uribe

Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico 346

Rodolfo Vergel Causado

Desarrollo de estándares de matemáticas y finanzas funcionales en adolescentes. 364

Claudia María Lara Galo

La idoneidad didáctica en la formación de profesores de matemáticas 372

Adriana Breda, Vicenç Font Moll, Carmen Eulalia Calle Palomeque

Recursos Educativos Abiertos para Matemáticas: impacto y retos 381

Edison De Faria Campos

Dime con qué gráfica andas y te diré qué función eres 389

Eduardo Basurto Hidalgo

Computer science for all. Computer science and computational thinking for STEM integration 396

Paige Prescott

CANP 5: La formación docente inicial y continua en Educación Matemática en Bolivia, Ecuador, Paraguay y Perú 403

María del Carmen Bonilla Tumialán

Sesiones temáticas

La investigación sobre la formación del profesor de Matemática en el marco de la XV CIAEM 416

Nelly León, Ricardo Poveda, Claudia Vargas Díaz

Comunicaciones, talleres y pósteres

1. Formación inicial de profesores.

Análise de atividades matemáticas na perspectiva da bncc e níveis de demandas cognitivas 427

Charlani Ferreira Batista Rafael, Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Design de enunciados de problemas abertos para propiciar a (re)formulação e resolução desses problemas com o uso de tecnologias digitais na formação de futuros professores de Matemática 437

Fabiane Fischer Figueiredo, Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Ruta crítica en la construcción del MTSK. Meta-análisis del análisis didáctico de los docentes en formación inicial. 445

Eugenio Lizarde Flores, Francisco Javier Hernández Gutiérrez, Ana María Reyes Camacho

Formación profesoral para atender población diversa desde una educación matemática inclusiva 453

Eliécer Aldana Bermúdez, Heiller Gutiérrez Zuluaga, Graciela Wagner Osorio, Jhon Darwin Erazo Hurtado

Análisis de los planes de estudio (1997, 2012 y 2018) para la formación docente inicial en México desde el modelo MTSK. 461

Eugenio Lizarde Flores

Aprendiendo Topología como profesores de matemáticas en formación 469

Angie Lizeth Galán Cipagauta, María Andrea del Pilar Patiño Cifuentes, María Nubia Soler Álvarez

Límites de funciones en una variable y principales dificultades conceptuales de estudiantes en formación inicial 471

Cristian Eduardo Quesada Fernández, Eric Padilla Mora

Formación de docentes sordos para una Educación Matemática Especialmente Inclusiva (EMEI) 480

Angelica María Martínez, Fredy González

La discusión grupal con futuros maestros como herramienta en la transición de un pensamiento absoluto a uno relativo 488

Javier Monje Parrilla, Patricia Pérez-Tyteca

De Ptolomeo a la formación inicial docente en matemáticas 496

Gerardo Cruz-Márquez, Gisela Montiel Espinosa

La formación de profesores de estadística como ciudadanos críticos 504

Cindy Alejandra Martínez-Castro, Lucía Zapata-Cardona

Investigación en Educación Matemática. Experiencias en el Semillero MATHEMA 512

Alexander Castrillón Yepes, Gilberto de Jesús Obando Zapata

Uso de una trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual para anticipar la comprensión e interpretar el pensamiento de los niños 514

Julia Valls, Gloria Sánchez-Matamoros, González Mar Moreno

El proceso de derivación en GeoGebra: un estudio sobre el conocimiento matemático de futuros profesores 522

Cesar Martínez Hernández, Yuliana Marmolejo Rebolledo, David Sadrac Parra Soto

La wiki como recurso educativo en el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas en la formación de docentes de Matemática 530
Luis Armando Hernández Solís, Cristian Quesada Fernández

La clasificación en Educación Infantil: cómo diseñan actividades los maestros en formación 539
Noemi Pizarro Contreras, Blanca Arteaga Martínez

Visualización y producción de enunciados en las propiedades del triángulo 547
Griselda González Arriaga, Luis Manuel Aguayo Rendón

O futuro professor de Matemática em Estágio 555
Patrícia Perlin, Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes

Quehacer matemático y validación: ideas de futuros profesores 557
Cristina Esteley, María Florencia Cruz, Sara Scaglia

Acciones formativas en el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Salta 566
María de las Mercedes Moya, Mario Ubaldo Avila

Desde la Razón Áurea a la infinitud de los Fractales 574
Lilian Vargas Villar, Daniel Sánchez Ibáñez

A trajetória de uma professora formadora em uma disciplina de Estágio Supervisionado na Licenciatura em Matemática 582
Línlya Sachs, Henrique Rizek Elias

O ensino da matemática em sala de aula por meio do lúdico 590
Cintia Schneider, Dirlei Salete de Souza, Felipe Junior Crozetta, Karla Aparecida Lovis

O Ensino de Funções Trigonométricas Com o Software GeoGebra 598
Sonner Arfux de Figueiredo, Nielce Meneguelo Lobo da Costa

A abordagem TPACK para a integração da calculadora científica na prática docente através da metodologia Lesson Study 606
Jalman Lima, Yuriko Yamamoto Baldin

Desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años de la educación primaria: la suma y resta de números naturales 614
Ana Patricia Maroto Vargas, Ignacio Alberto Arias Gómez

Oportunidades de aprendizaje en la formación inicial de los licenciados en matemáticas de la costa Caribe de Colombia visto desde la aplicación del TEDS-M 621
Evelyn del Carmen Ariza Muñoz, José Antonio González Calero, Ramón Cózar Gutiérrez, Mónica Patricia Borjas

Formación en el Pensamiento Computacional a través de juegos de mesa 630
Jaime Andrés Carmona-Mesa, Mónica Eliana Cardona Zapata

Estudio de la parábola como lugar geométrico: una forma de ampliar el conocimiento especializado del profesor 638
Isabel Zoraida Torres Céspedes, Elizabeth Advíncula Clemente, Jose Carlos León Ríos, Ángel Homero Flores Samariego

Programa de Estágio Supervisionado: uma real integração entre Universidade e Escola da Educação Básica 645
Barbara Corominas Valério, Claudia Cueva Candido

Formação de profesores de Matemática: percepção de estudantes sobre pesquisa 652
Maria Elizabete de Souza Couto, Zulma Elizabete de Freitas Madruga

Experiências avaliativas na formação inicial de professores: o contexto das Práticas de Ensino de Matemática 660

Vivilí Maria Silva Gomes

Demanda Cognitiva e a Competência Observar com Sentido: análise de atividades com a temática Funções Exponenciais 662

Marcos Vinicius Calazans, Claudia Lisete Oliveira Groenwald, Salvador Llinares

A formação compartilhada de professores no Clube de Matemática 670

Halana Garcez Borowsky, Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes

Ações e formações de professores sobre ensino e aprendizagem de matemática: movimentos de um grupo de pesquisa 678

Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes, Halana Garcez Borowsky, Patrícia Perlin, Sandra Aparecida Fraga da Silva

Educação inclusiva na formação inicial: percepções de licenciandos em Pedagogia e Matemática. 685

Marina Andrades Felipe, Marlise Geller

O estudo de aula como mecanismo didático em Residência Pedagógica 693

João Marcos Almeida Ferreira, José Emanuel Barbosa Alves, Mariana Almeida Ferreira, Roger Ruben Huaman Huanca

Una comunidad de práctica de profesores en formación que reflexiona sobre el concepto de función 700

Andrea Carolina Quintero Baños, Sandra Evely Parada Rico

Jogos e aplicativos matemáticos para os anos iniciais 707

Alexandre Wegner, Cláudio José de Oliveira, Daiane Kipper

Ensino de Geometria com o SketchUp: atividades investigativas a partir da Teoria de van Hiele 715

Edite Resende Vieira

Significados sobre la demostración matemática en una comunidad de práctica de clase 723

Edwin Andrés Amaya Sánchez, Jorge Enrique Fiallo Leal

Formación inicial de profesores de matemáticas en atención a la diversidad 727

Silvia Johanna Pineda Garavito, Sandra Evely Parada Rico

A Atividade coletiva na formação inicial do professor de matemática: a elaboração do jogo como tarefa 732

Bruno Silva Silvestre, Wellinton Lima Cedro

O Conhecimento Matemático como Fator Determinante no Ensino e na Aprendizagem: Percepções de Professores Brasileiros que Ensinam Matemática 741

Marlo Mendes de Souza Junior, Rafaela Oliveira Carvalho, Raquel Carneiro Dörr, Rebeca de Miranda Silva, Regina Silva Pina Neves

A Análise Matemática na constituição de Conhecimentos Didático-Matemáticos para a atuação de professores de Matemática no Ensino Médio: uma análise epistêmica de uma atividade sobre Números Racionais 749

Paulo Cesar Pereira Napar, Carmen Teresa Kaiber

Uso de materiais manipuláveis como recurso didático no curso de formação de professores de matemática 757

Barbara Corominas Valério

Um curso presencial sobre o teorema da incompletude de Gödel para estudantes de licenciatura em Matemática 759

Rosemeire de Fátima Batistela

Uma caracterização das tarefas desenvolvidas na disciplina Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental em Matemática de uma instituição privada brasileira 767

Diego Fogaça Carvalho, Osmar Pedrochi Junior, Fátima Aparecida da Silva Dias

Circuito de vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, Brasil: formação para a docência e intervenção social 776

Janaína Mendes Pereira da Silva, Mauro Luiz Rabelo, Raquel Carneiro Dörr, Vitor Estevan dos Santos, Paulo Victor Mourão Silva

2. Formación continua y desarrollo profesional

Tarefas de aprendizagem profissional e suas potencialidades para formação continuada de professores dos anos iniciais 786

Lilian Cristina Barboza, Alessandro Jacques Ribeiro

Estrategia de enseñanza para fracciones y problemas multiplicativos 793

Marta Ramírez Cruz, Marta Elena Valdemoros Alvarez

Literatura Infantil e Matemática: uma ação formativa 801

Edvonete Souza de Alencar

Estudio del sistema documental de una profesora de primaria para enseñar estimación y medición de longitudes 808

Marisol Santacruz Rodríguez, Ana Isabel Sacristán

La transición de maestro a formador de maestros de matemáticas: Aprendiendo a establecer discusiones didáctico-matemáticas con maestros en ejercicio. 816

Luz Valoyes-Chávez, Natalia Ruiz

Análisis sobre situaciones de enseñanza del Teorema de Pitágoras entre universidad y escuela 824

Noemi Pizarro Contreras, Gabriela Nuñez Contarlo, Guillermo Arancibia Canales, Tomás Cruces

Álgebra y Pensamiento Algebraico. Una experiencia de reconceptualización 833

Leslie Mariel Torres Burgos, Karla Margarita Gómez Osalde

Desenvolvimento profissional do professor de matemática: reflexões sobre currículo e competências 840

Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Rosangela de Souza Jorge Ando

O trabalho colaborativo na formação continuada de professores de Matemática: uma aproximação entre Universidade e Escola Básica 848

Marcos Antônio Petrucci de Assis, Roger Ruben Huaman Huanca

Gestão da Aprendizagem Escolar II (GESTAR II) e o Curso de Formação Docente (CFD): un análisis de dos programas de formación continua de profesores que enseñan matemática 856

Emerson Rolkouski, Jeser Caleb Candray Menjívar

A formação continuada em matemática no pacto nacional pela alfabetização na idade certa 864

Rute Cristina Palma, Daniela Maria Almeida de Lima, Suelene Rezende

Dificultades para razonar inductivamente en profesores de secundaria al resolver un problema de generalización 872

Landy Sosa Moguel, Guadalupe Cabañas Sánchez, Eddie Aparicio Landa

Uso de algunos constructos del modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemático para el estudio de informes de práctica de futuros profesores de matemáticas 880

Vicenç Font-Moll, Yuri Morales-López, Marianela Alpízar-Vargas

Los estudios de caso: una posibilidad para movilizar el sentido personal de profesores que enseñan matemáticas en programas de administración 887

Diego Alejandro Pérez Galeano, Diana Victoria Jaramillo Quiceno

Desarrollo de la modelación por medio de una gestión argumentativa en el aula de matemáticas 895

Horacio Solar Bezmalinovic, María Aravena Díaz, Manuel Goizueta, Rodrigo Ulloa Sánchez

Las nociones didácticas en la investigación en Educación Matemática: comparación del simposio de la SEIEM y la RELME 903

Paola Castro, Pedro Gómez, María C. Cañadas

Análisis de las respuestas de escolares de 7 años al resolver problemas de comparación e igualación 911

Carmen Paz Oval Soto, Paola Donoso Riquelme

Desarrollo del sentido de la medida en educación primaria 919

Marianela Alpízar Vargas

Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas en ingeniería: un primer acercamiento 928

Rafael Antonio Arana-Pedraza, Silvia Elena Ibarra Olmos, Vicenç Font Moll

Conocimiento Matemático de Probabilidad que ponen en acción Profesores de Bachillerato 936

José Miguel León Banguero, Leciticia Sosa Guerrero, Diego Díaz

Repensando os caminhos de uma formação continuada para professores dos anos iniciais 944

Marli Teresinha Quartieri, Ieda Maria Giongo, Márcia Jussara Hepp Rehfeldt, Thulie Nunes dos Santos

Conhecimentos matemáticos: investigação com tarefas de aprendizagem profissional 952

Lilian Cristina de Souza Barboza

Curso de Formação para Professores de Matemática: Aula Investigativa no Ensino de Probabilidade 954

Albano Dias Pereira Filho, Nielce Meneguelo Lobo da Costa Nielce

La enseñanza de la multiplicación: una propuesta a partir de la medida de longitudes 962

Liliana Quintero López, Francisco José Brabo Bezerra

La Didáctica de Matemáticas y Ecología de Saberes 970

Abdón Pari Condori

Percepciones del profesorado sobre las TIC (GeoGebra) como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica 978

Abdón Pari Condori, Roxana Auccahuallpa Fernández

Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico 987

Sandra Milena Zapata, Zaida Margot Santa Ramírez, Carlos Mario Jaramillo López

A formação de professores de Matemática da Educação Superior em Comunidades de Prática Online e a construção do TPACK: Algumas Reflexões 996

Andriceli Richit, Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

Produção do Conhecimento em Pesquisas sobre a Formação de Professores; Publicadas no VI SIPEM 1004

Sibeli Mallmann Pacheco, Gabriele de Sousa Lins Mutti, Tiago Emanuel Klüber

Reconceptualización de la geometría escolar como medio para la profesionalización docente en matemáticas de educación básica 1012

Karla Gómez Osalde, Leslie Torres Burgos

Reconceptualización de la transformación geométrica en profesores de matemáticas 1021

Eddie de Jesús Aparicio Landa, Guadalupe Cabañas Sánchez, Landy Sosa Moguel

Apropiación de la metodología de la indagación en la práctica docente de matemáticas 1030

Vivian Libeth Uzuriaga López, Héctor Gerardo Sánchez Bedoya

Extensión del modelo MTSK al dominio estadístico 1036

Pedro Felipe Vidal-Szabó, Soledad Estrella

Mapas conceituais como ferramenta para reflexão do professor de matemática 1043

Claudete Cargnin, Adriele Carolini Waideman, Silvia Teresinha Frizzarini

Reflexões sobre a formação de professores na perspectiva do ensino de matemática para uma aluna com Síndrome de Jacobsen 1051

Ana Paula de Souza Colling, Marlise Geller

O trabalho matemático e o autismo temático institucional 1059

Silvia Teresinha Frizzarini, Claudete Cargnin, Cristiane Schlagenhaufer

Características recomendables para propuestas de actualización en Educación Matemática para docentes de 1.° a 6.° grado. 1067

Gabriela Gómez Pasquali, Verónica Rojas, Joel Prieto

La gestión del docente de matemáticas cuando usa las herramientas computacionales, como recurso pedagógico en el aula para el aprendizaje de sus estudiantes 1075

Alisson Dayan Rodríguez Carlosama, Alison Vanessa Martínez Sarria, Ronald Andrés Grueso

Usando el cuerpo para aprender matemática, diseño de tareas enactivas 1083

Paula Fernández Padilla, Elisabeth Ramos-Rodríguez, Patricia Vásquez Saldías

A abordagem TPACK para a integração da calculadora científica na prática docente através da metodologia Lesson Study 1088

Jalman Alves de Lima, Yuriko Yamamoto Baldin

El profesor que enseña matemáticas en la inclusión escolar de niños con Trastorno de Espectro Autista (TEA) 1096

Claudia Franceschette, Lucía Zapata-Cardona

Dos experiencias de formación de maestros en la perspectiva de la etnomatemática 1103

Carolina Tamayo Osorio, Hilbert Blanco Álvarez

Herramienta desmos en la creación de tareas o actividades matemáticas 1111

Emanuelle Soto Cascante

Conocimiento del profesor con ayuda de Geogebra 1119

Fernando Mejía Rodríguez

Formação para a docência em matemática na Educação Básica no Brasil: experiência na formação inicial e continuada 1127

Janaína Mendes Pereira da Silva, Regina da Silva Pina Neves, Wesley Pereira da Silva, Maria Luísa Piantamar de Oliveira, Jenifer de Sousa Sales

Estudio de clase en la formación de maestros reflexivos 1136

María Teresa Castellanos, Hilbert Blanco-Álvarez

3. Perspectivas socioculturales: Etnomatemáticas, sociología, comunicación

The Role of Ethnomathematics and Social Justice in Mathematics Education 1146

Milton Rosa, Daniel Clark Orey

A Cultural Approach to Mathematical Modelling: An Ethnomathematical Perspective 1152

Daniel Clark Orey, Milton Rosa

O Aluno cego e os registros de representações matemáticas 1168

Elisabete Marcon Mello

O diálogo com estudantes dv's como instrumento formativo para um ensino de matemática inclusivo 1170

Fábio Alexandre Borges, Tiago Pereira

WhatsApp no ensino-aprendizagem de matemática 1178

Ademir Basso, María José Cáceres García, María Mercedes Rodríguez Sánchez

O ensino de geometria para alunos surdos inclusos 1186

Walber Christiano Lima da Costa, Fábio Alexandre Borges, Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Uma abordagem de trabalho colaborativo em Educação Matemática Inclusiva no contexto da Economia Solidária 1194

Renata Cristina Geromel Meneghetti, Edinei de Oliveira Filho

El signo cultural como protagonista de la planificación: implementando etnomatemáticas regionales en la escuela 1201

Ma. Elena Gavarrete Villaverde, Jesennia Chavarría Vásquez, Margot Martínez Rodríguez, Marcela García Borbón

Teatro no Ensino da Matemática: o lúdico como estratégia para humanizar a Matemática 1209

Cláudia Ferreira Reis Concordido, Jeanne Denise Bezerra de Barros, Mauricio Mendes, Daniele da Silva Motta

La competencia democrática en la clase de matemáticas: ¿Cuánto se tarda en desaparecer el alcohol del cuerpo? 1217

Edna Paola Fresneda Patiño, Sergio Andrés Sarmiento Pulido, Julio Hernando Romero Rey

Videojuegos: un asunto de la educación matemática 1225

Sindy Alejandra Vasco Alvarez, Valeria Lebrun Llano

Proceso de enseñanza de las Matemáticas dentro del resguardo Indígena San Lorenzo de Caldono: Obstáculos - retos 1227

Daniela Andrea Mostacilla

La contextualización activa y artificial en el currículo matemático costarricense 1231

Gilberto Alonso Chavarría Arroyo, Veronica Albanese

Problematización indisciplinar de prácticas sociales del trapiche para pensar la Educación [Matemática] Rural 1241

Nancy Milena Quintero Serna, Carolina Tamayo Osorio

Paz y Educación Matemática 1250

Daniela Montoya Osorio, Angela Maria Quiceno Restrepo, Carolina Tamayo Osorio

Prácticas racistas en la escuela: un análisis de las prácticas de maestros y maestras de matemáticas 1259

Angela Patricia Valencia Salas

Las etnomatemáticas de las danzas típicas en Costa Rica: el caso del Punto Guanacasteco desde la visión emic y etic 1267

Steven Eduardo Quesada Segura

Evolución de un proceso de análisis etnomatemático del Palo de Mayo utilizado en las danzas folclóricas en Costa Rica 1274

Steven Eduardo Quesada Segura

(Re)significación del currículo de matemáticas a partir del estudio indisciplinar de prácticas sociales 1276

Oscar Guillermo Charry Gutiérrez, Diana Victoria Jaramillo Quiceno, Carolina Tamayo Osorio

Metáforas en el discurso matemático de algunos profesores en la región del Eje Cafetero 1285

Oscar Fernández Sánchez, Mónica Angulo Cruz

A tendência das pesquisas envolvendo estudantes com autismo 1293

Elton de Andrade Viana, Ana Lucia Manrique

Resolución de problemas usando el algoritmo de la sustracción en una persona con discapacidad mental leve 1302

Diana Carolina Galvis Santamaria, Angie Yulieth Gómez Julio

Profesores Aimaras de Educación Intercultural Bilingüe y sus emociones en la clase de matemáticas 1304

María del Carmen Bonilla Tumialán, María García González, Felipe Huayhua Pari

La competencia democrática desde ambientes de modelación matemática: reflexiones con estudiantes de grado quinto 1312

Edna Paola Fresneda Patiño, Francisco Javier Camelo Bustos

Desarrollo del pensamiento teórico de estudiantes de undécimo grado mediante un proceso de objetivación del concepto de límite de una función en un punto 1321

Claudia Patricia Quintero, Diana Victoria Jaramillo Quiceno

Antecedentes, intenciones y porvenires en el Colegio Sierra Morena IED: Un pretexto para desarrollar un ambiente de Modelación Matemática desde la perspectiva socio crítica 1329

Claudia María Arias Arias, Julieth Marcela Tamayo, Francisco Javier Camelo Bustos

Viaje hacia el pasado: Multiplicación 1337

Fabiola Delgado Navarro, Marianella Jiménez Fernández

La escuela multigrado en México. Un estudio sobre la toma de decisiones docentes durante la enseñanza de las matemáticas. 1343

Gabriela Zepeda Padilla, Erika García Torres

Una propuesta de articulación entre geometría y aritmética desde problemas sobre situaciones contextualizadas 1351

Sandra Liceth Solarte Alvear, Luz Ayda Muños Mamiam, Ana María Palacios Rojas

Conceptos matemáticos subyacentes al quehacer de los cortadores de papel del gremio de las artes gráficas 1354

Rosa Juleidy Alvarez Diaz, Victoria Andrea Arango Morales

Resolver o no el problema: El rol de las identidades sociales y matemáticas de los estudiantes durante el trabajo en grupo 1356

Teresa Sánchez Vecilla, Nicole Fuenzalida, Luz Valoyes-Chávez

La clase de matemáticas: potenciando el pensamiento crítico a partir del cuidado del medio ambiente 1364

Lina Marcela Patiño Londoño, Liliana Quintero López, Carolina Higuita Ramírez

Conceptos matemáticos subyacentes al quehacer de los cortadores de papel del gremio de las artes gráficas 1372

Rosa Juleidy Alvarez Diaz, Victoria Andrea Arango Morales

4. Currículo, competencias y evaluación

Análisis de las reflexiones de estudiantes del máster en formación del profesorado de matemáticas de educación secundaria obligatoria y bachillerato sobre su motivación hacia la enseñanza 1380

Marisol Salomón Plata, José María Chamoso Sánchez, M. Mercedes Rodríguez Sánchez, Beatriz Sánchez Barbero

Análisis de la interacción profesor-alumnos cuando resuelven problemas realistas en el aula 1382

Marta Escribano Gallardo, Beatriz Sánchez Barbero, José María Chamoso Sánchez

El análisis de textos como metodología de investigación en educación matemática 1390

Flor Monserrat Rodríguez Vásquez, Ademir Basso, María S. García González

Evolución del aprendizaje en matemáticas 1398

José Vidal Jiménez Ramírez, Faustino Vizcarra Para

Presencia de habilidades propias del pensamiento matemático definidas en el curriculum chileno en ítems de elaboración cotidiana de 4º básico 1406

Marcelo Palacios Donoso

Actualización de los programas de estudio de Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria: retos y horizontes 1414

Cristina Alvarado Valencia, Leticia Sánchez López, Maricela Lugo Zacarías

Un camino hacia la resignificación del currículo de matemáticas, en relación con la multiplicación y la división 1422

Juan David Bedoya Torres, Daniel Stiven Rojas Zuleta, Gilberto de Jesús Obando Zapata, Norma Lorena Vásquez Lasprilla

Normas Educativas en Colombia primera mitad del siglo XX: el caso de la educación matemática 1424

Norma Lorena Vásquez Lasprilla, Gilberto Obando Zapata

La enseñanza de las fracciones y sus significados en documentos oficiales de educación primaria en México. Programas de estudio 2011 y Guía para el maestro. 1432

Ana María Reyes Camacho, Leticia Sosa Guerrero

Situación transversal como estrategia curricular de la matemática escolar en Telesecundaria 1440

Felipe de Jesús Santiago Flores, Erika García Torres

Hacia una resignificación del currículo de matemáticas de la educación básica primaria, a partir de una educación matemática crítica 1448

Mónica María García Quintero, Diana Victoria Jaramillo Quiceno

TRI: uma abordagem frente a TCT no processo de avaliação 1456

Thamara Marques Rodrigues, Rafael Aparecido Pereira Lopes, Romulo Barbosa Veloso, Renê Rodrigues Veloso

Uma revisão de literatura das pesquisas sobre Currículo, Avaliação em Larga Escala e Números Racionais 1458

Alessandra Carvalho Teixeira, Norma Suely Gomes Allevato

Avaliação da satisfação de alunos em relação à sua instituição de Ensino Superior 1466

Ailton Paulo de Oliveira Júnior, Thiago Costa de Souza, Pedro Rosental Zamora

A importância de tópicos de matemática a serem ensinados para alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental 1474

Lucia Arruda de Albuquerque Tinoco, Gilda Maria Quitete Portela, Maria Palmira da Costa Silva

A análise da produção escrita em matemática de estudantes para a melhoria do ensino e aprendizagem de matemática 1482

Paulo Pereira Lima, Geraldo Eustáquio Moreira, Regina da Silva Pina Neves

Reflexos da prática avaliativa: uma proposta de avaliação formativa sobre a luz dos portfólios nas aulas de matemática 1490

Paulo Pereira Lima, Geraldo Eustáquio Moreira, Josinalva Estácio Menezes

Enfoques en evaluación matemática a nivel escolar 1499

Myrian Luz Ricaldi Echevarria

Temáticas no Currículo de Matemática do Ensino Médio 1506

Clarissa de Assis Olgin

Codificando e decodificando com os conteúdos matemáticos do Ensino Médio 1515

Clarissa de Assis Olgin

Estudo de regressão para análise da proficiência em Matematica no SAEB 2015 1521

Carlos Augusto Aguilar Júnior, Maria Isabel Ramalho Ortigão

Análise da produção escrita das crianças como estratégia de Avaliação 1530

Alessandra Silva de Souza, Camile de Araujo Aguiar, Mariana Honório de Alencastro Teles

Atitudes de alunos do Ensino Fundamental em relação à Matemática 1538

Vera Cristina de Quadros, Luiza de Souza Oliveira

Luz e Cores: uma abordagem investigativa envolvendo Física, Matemática e Biologia na EJA 1546

Juliana Dias de Moraes, Rogério Fernando Pires

Tecnologias Assistivas no processo de aquisição do conceito de número: estudo na perspectiva da deficiência visual 1554

Maria Adelina Raupp Sganzerla, Marlise Geller

Um estudo de multicorreção com professores de matemática 1563

Rafael Filipe Novôa Vaz, Lilian Nasser

Uma análise da estrutura de questões de múltipla escolha: um exercício de validação 1571

Osmar Pedrochi Junior, Diego Fogaça Carvalho, Fátima Aparecida da Silva Dias

Ideas para valorar el nivel de complejidad de un problema: una experiencia costarricense 1579

Ricardo Poveda Vásquez, Johanna Mena González

5. Estadística y Probabilidad

A apreensão de conceitos básicos de Probabilidade considerando abordagens históricas para o Ensino Fundamental 1588

Ailton Paulo de Oliveira Oliveira Júnior, Karoline Marcolino Cardoso, Nilceia Datori Barbosa, Natalia Galvão Simão de Souza

Desarrollo de las ideas estadísticas fundamentales en la práctica profesional. 1596

Daniel Eudave-Muñoz, Margarita Carvajal Ciprés, David Alfonso Páez

Una experiencia en aula desde la experimentación y la simulación para la enseñanza de la probabilidad frecuentista y clásica 1604

Michelle Alejandra Penagos Vargas

Construcción del significado de la volatilidad en estudiantes de pregrado en ciencias administrativas. 1612

Carenne Ludueña Cronic, Miguel Andrés Díaz, Fernando Pérez Duarte

Estatística como aproximação entre ensino e pesquisa das demais ciências 1620

Janilson Lotério, Marluse Castro Maciel

Software R aplicado na educação superior 1628

Thamara Marques Rodrigues, Rafael Aparecido Pereira Lopes, Romulo Barbosa Veloso, Renê Rodrigues Veloso

Niveles de comprensión, tablas y gráficas estadísticas en grado 5º de básica primaria 1630

David Fernando Méndez Vargas, Pedro Vicente Esteban Duarte

Comprensión de datos estadísticos para la toma de decisiones: proyecto de emprendimiento con estudiantes de grado quinto 1644

Enith Cristina Ortiz Sarrazola, Zaida Margot Santa Ramírez, Diego Alejandro Castrillón Osorio

La influencia del pensamiento absoluto en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades con el modelo de urna 1662

Maribel Aguas Hidalgo, Ricardo Quintero Zazueta

Competencia estadística: metodología seis sigma en el proceso de investigación 1660

Jesús Vilchez Guizado, Julia Ángela Ramón Ortiz

Estatística para a leitura de mundo 1669

Irene Mauricio Cazorla, Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

O problema da amostragem no contexto da Educação Estatística Crítica 1678
Celso Ribeiro Campos, Cileda Queiroz e Silva Coutinho

6. Geometría

Recursos para la gestión de problemas de modelaje en clases de geometría 1687
Patricio Herbst

Estudo dos sólidos geométricos por meio do gênero literário popular "cordel": uma abordagem interdisciplinar nas aulas de Matemática 1696
Ana Nonato Trigueiro, Rodiney Marcelo Braga dos Santos

Recreando el triángulo de Pascal 1704
Luis Eduardo Guerra Betancourt, Yannelly del Valle Núñez Ruiz

Sobre el teorema de Pompeiu 1713
Geovanni Figueroa Mata

A beleza da matemática 1721
María José Cáceres, Ademir Basso

Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área 1723
Melissa Denisse Castillo Medrano, Jesús Victoria Flores Salazar

La medida, en el bosque de los colores 1731
Paula Fernanda Martinez Ravelo, Jenny Patricia Acevedo-Rincón

Pesquisas em Psicologia da Educação Matemática: contribuições para o ensino e a aprendizagem da geometria 1734
Nelson Antonio Pirola

La elipse en la métrica del taxista 1741
Wilson Jairo Pinzón Casallas, Wilson Gordillo Thiriat, Orlando García Hurtado

Reflexión por partes de profesores y futuros profesores en matemática en torno a definiciones 1748
Ana María Mantica, María Florencia Cruz

¡Fractales! Factor motivador para el estudio de las matemáticas 1756
Dorenis Josefina Mota Villegas, Ricardo Enrique Valles Pereira

La entrevista socrática como medio para detectar el nivel de comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico en el marco del modelo de van Hiele 1758
William Eduardo Calderón Gualdrón, René Alejandro Londoño Cano

El uso de software educativo GeoGebra en el estudio de las transformaciones isométricas. 1766
Jocelyn Vanessa Aguilera Aravena

Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en operaciones cognitivas 1773
Jorge Enrique Galeano Cano

O Ensino de Geometria nos Anos Finais do Ensino Fundamental: Uma Análise Epistêmica das Orientações Curriculares Brasileiras 1781
Miriam Ferrazza Heck, Carmem Teresa Kaiber

Características de la comprensión de niños de 9 años de las relaciones de inclusión entre figuras geométricas 1789

Melania Bernabeu Martínez, Salvador Llinares Ciscar, Mar Moreno Moreno

Trayectorias de aprendizaje de la visualización espacial con incorporación de hipótesis sobre género 1797

William Andrey Suárez Moya

Sistematizando "La vuelta al mundo con la geometría" hacia el Minecraft 1805

Camilo Arévalo Vanegas, Oscar Javier González, Mónica Andrea Díaz Guarín

Medida de volume do dodecaedro e do icosaedro: uma visão diferente 1812

Amarildo Aparecido dos Santos

Jogos educativos como ferramenta no ensino aprendizagem de Geometria 1814

Isadora Freitas de Oliveira, Laura Marco Reginaldo, Giovana Melchiades Melendi, Bruna da Cunha Castilho, Danielle Gonçalves de Oliveira Prado

Relações entre geometria e aritmética: um estudo a partir da experiência 1817

Jhone Caldeira Silva, Euler José de Assis Garcia, Alexandre de Almeida Xavier, Renato Sardinha de Souza

Aprendizagem significativa de conceitos geométricos para a trigonometria no 9º ano do ensino fundamenta 1825

Marli Teresinha Quartieri, Romildo Pereira Cruz, Geovana Luiza Kliemman

Contribuições do uso das Tecnologias Digitais no ensino e aprendizagem de conceitos geométricos espaciais 1834

Danielle dos Santos Rodrigues, Carmen Teresa Kaiber

Conocimiento geométrico en contextos escolares 1843

Myrian Luz Ricaldi Echevarria

Enseñanza del pensamiento espacial y geométrico mediado por herramientas tecnológicas 1851

Yessica Paola Díaz Lugo, Yeny Leonor Rosero Rosero

Triángulos en el GeoGebra: experiencia en el desarrollo de una unidad didáctica en geometría 1859

Luis Eduardo Guerra Betancourt

El papel de la refutación en los procesos de argumentación. Una aproximación desde el estudio las propiedades de los triángulos 1867

Sara Marcela Henao

Un referente para analizar los campos de conocimiento conceptual y procedimental del teorema de Pitágoras 1875

Nathalia Katerin Valderrama, Diana Isabel Quintero Suica

Comprensión del concepto de área y perímetro de figuras planas, mediadas por las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele en estudiantes de grado tercero 1883

Diana Luz Arcia, David Fernando Méndez Vargas, Pedro Vicente Esteban Duarte

La geometría en el salón de clases a través del uso de algunos elementos del arte 1891

Fernando González Aldana, Osvaldo Jesús Rojas Vélazquez

Perspectivas para a formação inicial de professores de matemática a partir de um projeto de monitoria em geometria 1899

Andriceli Richit, Cleiton Fornari, Eliane Paim, Felipe Junior Crozetta, Mariane Bissolotti

7. Aritmética y sistemas numéricos

O método Montessori no ensino e aprendizagem de números na Educação Infantil 1908

Caroline de Paula Ribeiro, Reginaldo Fernando Carneiro

O Lúdico dos Jogos Digitais na Interpretação e Resolução de Problemas Matemáticos no Ensino Fundamental I: Um relato de uso 1916

Márcia Regina Kaminski, Clodis Boscarioli

Ábaco, regletas, bloques multibase y billetes decimales: posibilidades y restricciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración. 1924

Olga Emilia Botero Hernández, Ana María Jiménez Echavarría

El número natural como obstáculo en la comprensión del racional 1932

Juan Manuel González-Forte, Ceneida Fernández, Salvador Llinares

Erros de alunos nos algoritmos das operações aritméticas e o sistema de numeração decimal 1940

Leila Pessôa Da Costa, Regina Maria Pavanello

La interdisciplinaridad para el estudio de las fracciones 1945

Luis Alexander Conde Solano, Gerardo Elias Sepúlveda Restrepo, Marco Antonio Ayala Chauvin

Comprensión de problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva 1952

Alexander Largo Cañaveral, Gladys María Rivera Gonzáles

Comprensión del concepto de número en Preescolar 1961

Maribel Gil Villegas, Dora Mercedes Bedoya Vélez, Tanith Celeny Ibarra Muñoz

Un Modelo de Enseñanza para la adquisición de las nociones de los números naturales con base en von Neumann 1968

María Leticia Rodríguez González, Eugenio Filloy Yagüe, Bernardo Gómez Alonso

Fracción como reparto. Una experiencia en el aula con GeoGebra. 1977

Ibeth Nathalia Moreno Bermúdez, María Fernanda Castro Sabogal, William Alfredo Jiménez Gómez

La interdisciplinaridad para el estudio de las fracciones 1984

Marco Antonio Ayala Chauvin, Gerardo Elias Sepúlveda Restrepo, Luis Alexander Conde Solano

Zahira en la resolución de problemas multiplicativos con fracciones 1991

Maribel Hernández Cobarrubias, Marta Elena Valdemoros Álvarez

Una Aproximación al Aprendizaje de los Fraccionarios como Relación Parte-Todo mediante una Propuesta de Aula para el Grado Tercero de Educación Básica 1999

Cristian Andrés Hurtado Moreno, Juan Sebastián Cortés Monroy, Raúl Fernando Mendoza Yela,

Análisis de una prueba diagnóstica relativa a la multiplicación en la Educación Básica Primaria. Una experiencia desde la cualificación y formación docente 2007

Johnny Alfredo Vanegas, Teresa García, Liliana Escudero

La importancia de los ambientes para el aprendizaje una experiencia desde multiplicación de los números Naturales. 2014

Mary Luz Bernal Pinzón, Alba Soraida Gutiérrez

Enseñanza de la división, basada en justificaciones, con estudiantes de primaria 2019

Candy Clara Ordoñez Montañez

8. Álgebra y Funciones

Estructuras y generalización de estudiantes de segundo de primaria 2028

María Dolores Torres González, María Consuelo Cañadas Santiago, Antonio Moreno Verdejo, Pedro Gómez Guzmán

Pensamiento funcional en estudiantes de quinto grado de primaria cuando resuelven actividades con patrones numéricos 2037

Genny Rocío Uicab Ballote, Montserrat García Campos

Razonamiento Covariacional al estudiar la función por partes mediado por GeoGebra. 2045

Álvaro Javier Saa-Vernaza, Edinsson Fernández Mosquera

Comprensión del producto vectorial desde los Modos de Pensamiento: El caso de profesores en formación inicial 2047

Marcela Cecilia Parraguez, Rosario Guerra Martínez

Explorando la función lineal a través de la física 2055

María Fernanda Molina, Victor Hugo Gil Avendaño, Jairo Carvajal, Edinsson Durán García

Enseñar en Telebachillerato el método gráfico para el sistema de ecuaciones lineales 2x2 2057

David Alfonso Páez, Teresa de Jesús Cañedo Ortiz, Daniel Eudave Muñoz

O Ensino de Polinômios na Perspectiva da Filosofia de Wittgenstein 2065

Gabrielle Janaina Barros de Menezes, Walber Christiano Lima da Costa, José Wanderson Sousa de Carvalho, Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Gráficos de funções utilizando o GeoGebra em smartphones 2072

Bruno Guimarães da Silva, Augusto Cesar de Castro Barbosa, Cláudia Ferreira Reis Concordido

Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: análise de uma tarefa 2074

William José Gonçalves, André Luis Trevisan, Daniel Daré Luziano da Silva, Alessandro Jacques Ribeiro

Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo: propostas de tarefas 2082

Daniel Daré Luziano da Silva, André Luis Trevisan, William José Gonçalves

Atividades investigativas com o GeoGebra: reflexões no estudo do gráfico da função quadrática 2084

Elisama de Mendonça Felipe, Edite Resende Vieira

Uma investigação sobre o conhecimento da álgebra e a Resolução de Problemas em anais de dois eventos 2092

Beatriz Rodrigues de Almeida, Roger Ruben Huaman Huanca

Propuesta para la enseñanza/aprendizaje de las coordenadas polares con GeoGebra 2099

Ronnys Jesús Vicent Millán, Fray Rafael de Dios Granados Pérez, Anner Luis Pariche Valdivieso

Mat ou morra: uma atividade lúdica envolvendo enigmas matemáticos 2107

Luciana Ávila Rodrigues, Leonardo Melo Batista, José Teixeira Moura Júnior

Algunas perspectivas de investigación y enseñanza en el álgebra escolar 2114

Ligia Amparo Torres Rengifo, Cristian Andrés Hurtado Moreno

Un estudio sobre creencias de autoeficacia en la solución de tareas de sucesiones por estudiantes de Educación Básica secundaria en Colombia 2122

Katerine Edith Tobio Gutierrez, Martha Mogollón Rodriguez, Nelson Antonio Pirola

Analizando funciones lineales a partir de situaciones del entorno 2130

Lina Marcela Angulo Valencia

Construcción del significado de las expresiones algebraicas a partir del Diseño de un experimento de enseñanza centrado en el álgebra como Actividad 2132

Mónica Correa Ángel

Sobre la configuración de un modelo local para identificar y caracterizar formas de pensamiento algebraico 2140

Johnny Alfredo Vanegas Díaz

Análisis Ontosemiótico de la noción Ecuación Lineal en libros de texto mexicanos 2148

Graciela Rubi Acevedo Cardelas, Ramiro Ávila Godoy

Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática 2156

Jhonatan Elias Posso Torres, Ligia Amparo Torres

Razonamiento Covariacional mediado por Geogebra en Estudiantes de Quinto Grado de Educación Primaria (11-12 años) 2164

Iván Eduardo Gálvez Giraldo, Diana Marcela Tamayo González

Construcción del concepto de función desde la Teoría APOE: La coordinación entre representaciones como apoyo 2172

Hellen Catherine Serrano Iglesias, Solange Roa-Fuentes

El concepto de función como covariación en la escuela secundaria 2180

Ronald Andrés Grueso

Dificultades en la comprensión de la función por tramos en estudiantes universitarios 2188

Roger Leandro Díaz Villegas, Candy Clara Ordoñez Montañez

Del Contexto Geométrico al Razonamiento Funcional 2190

César Briseño Miranda, Ernesto A. Sánchez Sánchez

Movilización de las Concepciones en la Actividad Matemática para la Enseñanza del Álgebra Temprana 2199

July Marcela Londoño Ospina, Sandra Milena Zapata, Carlos Mario Jaramillo López

9. Educación Matemática en la educación superior

Derivada clássica e derivada fraca: uma análise da compreensão dos conceitos com base na teoria APOS 2208

Janice Rachelli, Vanilde Bisognin

Entorno virtual de aprendizaje: EIF-203 Estructuras Discretas para Informática bajo un enfoque bimodal 2216

Enrique Rodolfo Vílchez Quesada

Teorema Fundamental do Cálculo: aplicações para o cálculo de área utilizando o GeoGebra 2225

Natália Oliveira do Nascimento, Rogerio Fernando Pires

Conhecimentos docentes em ação no Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo) 2233

Barbara Lutaif Bianchini, Gabriel Loureiro de Lima, Eloiza Gomes

Habilidade de visualização de rotação mental: um comparativo por meio da resolução de tarefas 2241

Raquel Polizeli Corradi, Valdeni Soliani Franco, Vinicius Murilo Fratucci, Yesica Milena Garzón Pacheco

A experiência do Cálculo no universo das histórias em quadrinhos 2250

Tatiane da Silva Evangelista

Objetos matemáticos no ensino e na aprendizagem da Matemática: dos modelos concretos à realidade virtual 2257

André Lúcio Grande Dé

Una mirada cognitiva a la construcción de los conceptos de Eigenvectores y Eigenvalores a partir de las transformaciones lineales 2266

Alexander Betancur Sánchez, Solange Roa Fuentes

Construcción y deducción de la fórmula del plano tangente a una superficie apoyado en GeoGebra 3D 2273

Reiman Acuña Chacón, Bolívar Alonso Ramírez Santamaría

O conhecimento matemático para o ensino: um olhar a partir dos professores em formação continuada 2280

Eleni Bisognin, Luis Sebastião Barbosa Bemme, Vanilde Bisognin, Silvia Maria de Aguiar Isaia

Conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por licenciandos sobre números racionais 2288

Eleni Bisognin, Patricia Pujol Goulart Carpes

Investigando estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I 2296

Lilian Nasser, Angela Cassia Biazutti, Marcelo André Torraca, Jeanne Barros

O grupo de estudos de Cálculo como alternativa de apoio a estudantes do ensino superior 2304

Paulo Eduardo Sulczinscki, Paulo Victor Ximenes de Oliveira, Raquel Carneiro Dörr

The Challenge of Proof in Abstract Algebra: Undergraduate Mathematics Students' Perceptions 2311

Marios Ioannou

Uma introdução ao estudo das superfícies parametrizadas regulares utilizando o GeoGebra 2321

André Lúcio Grande Dé

Reflexiones sobre el Aprendizaje Activo en la Educación Superior: el caso de cambio de rutinas en las clases de Matemáticas 2329

Jesennia María Chavarría Vásquez, María Elena Gavarrette Villaverde

Construcciones mentales para la comprensión del concepto de Ortogonalidad 2337

Brandon Andrey Moreno Solares, Solange Roa Fuentes

El álgebra subyacente al transformar ecuaciones paramétricas en la ecuación cartesiana correspondiente: los mediadores papel y lápiz y tecnología 2345

José Zambrano-Ayala, Gonzalo Zubieta-Badillo, Verónica Vargas-Alejo

Construcción de ecuaciones de rectas y planos en R3 en laboratorio interactivo con GeoGebra y plataforma Moodle 2354

Antonio Rivero Alexanderson

Estrategias en el aula de matemáticas según los estilos de aprendizaje 2361

Luis Moctezuma Cervantes Espinosa, Jazmín Adriana Juárez Ramírez, Ricardo Ceballos Sebastián

Propuesta didáctica para un curso de matemáticas discretas 2364

Jazmín Adriana Juárez Ramírez, José María Chamoso Sánchez, María Araceli Queiruga Dios

Comprensión de conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial 2366

Diego Antonio Rolong Molinares, René Alejandro Londoño Cano, Carlos Mario Jaramillo López

Representaciones Multimedia en matemática. Análisis de la Teoría Conectivista del Aprendizaje. 2374

Ricardo Enrique Valles Pereira, Dorenis Josefina Mota Villegas

Modelo didáctico para la enseñanza de la demostración de proposiciones matemáticas 2381

Carlos Díez-Fonnegra, Alejandro Fandiño-Benavides, Fabio Alejandro Jiménez-Chacón

Transición del bachillerato a universidad en matemáticas desde la visión del docente 2389

Luz Marina Rodríguez-Cisneros, Josefa Perdomo-Díaz

Escalar un proyecto con tecnología, el caso de las evaluaciones en línea en matemáticas 2397

Jorge Luis Gaona

Matematización del Teorema Fundamental del Cálculo en el Nivel Situacional con el uso de tecnologías digitales 2405

Ingrid Janeth Jácome Anaya, Jorge Enrique Fiallo Leal

Razonamiento covariacional y habilidades cognitivas en el diseño de tareas para la comprensión de la derivada 2411

César Augusto Rodríguez, Jorge Enrique Fiallo Leal

Las prácticas pedagógicas en la enseñanza del cálculo diferencial 2419

Luisa Fernanda Martínez Rojas, Dora Solange Roa Fuentes

Un acercamiento dinámico a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto 2427

Sergio Alexander Guarin Amorocho, Sandra Evely Parada Rico

Descriptores preliminares para la comprensión del concepto de Infinito y su relación con las funciones de variable real, en el contexto del Modelo de van Hiele 2433

Alba Soraida Gutiérrez, René Alejandro Londoño Cano

La Génesis Instrumental: El caso de la derivada direccional, un estudio del proceso de enseñanza y de aprendizaje mediado por objetos dinámicos en estudiantes de ingeniería 2441
Pedro Vicente Esteban Duarte, Hugo Rogelio Mejía Velasco, Luis Carlos Rojas Flórez

Análisis teórico de los operadores lineales diagonalizables con base en la teoría APOE 2448
Esteban Mendoza, Flor Monserrat Rodríguez Vázquez, Jesús Romero Valencia, Ademir Basso

Análisis de Significados que se Confieren a la Antiderivada 2456
Wilson Gordillo Thiriat, Luis R. Pino-Fan

Comprensión del concepto de independencia lineal: una perspectiva de las estructuras y mecanismos mentales de estudiantes universitarios de primer año 2464
Silvia Juliana Ballesteros, Solange Roa Fuentes, Darly Kú Euán

Curvas: Entre la división de lo continuo y la continuidad de lo discreto 2472
Carlos Mario Pulgarín Pulgarín, Carlos Mario Jaramillo López, René Alejandro Londoño Cano

10. Historia y epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática

Curiosidades matemáticas no Pequeno Luterano na década de 1940 2481
Malcus Cassiano Kuhn

Una problematización del concepto de topología en su dimensión epistemológica 2489
Gabriela Márquez García, Gisela Montiel Espinosa

História da Razão Áurea na formação continuada de professores 2503
Arlete de Jesus Brito, Sérgio Candido de Gouveia Neto

A relevância dos conteúdos de Matemática ensinados nas décadas de 1940 e 1950 no município de Canoas/RS (Brasil) 2511
Alexandre Ausani Huff, Arno Bayer

Concepto de determinante: una revisión de los libros de álgebra lineal. 2519
John Jairo Ariza Lopez, Sterling Castañeda Jaimes

Aproximações entre História da Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação: um primeiro exercício 2527
Adriana de Bortoli, Zionice Garbelini Martos Rodrigues, Mário Eduardo Alves Mari

Os diamantes que os garimpeiros não encontraram: histórias da formação dos professores (de Matemática) em uma região de garimpo 2535
Eliete Grasiela Both, Ivete Maria Baraldi

Tratado de Aritmética Elemental (Indalecio Liévano, 1856): un texto con mucho que enseñarnos 2543
Gilberto de Jesús Obando Zapata

Ingeniería Didáctica para el estudio de la variación de las funciones: Análisis preliminar 2552
Noé Oswaldo Cabañas Ramírez, Edgardo Locia Espinoza, Armando Morales Carballo

História da matemática e formação de professores: uma relação possível a partir de pesquisas acadêmicas 2561
Virgínia Cardia Cardoso

Interpretaciones del método de Descartes en Didáctica del álgebra. Estudio documental 2569
Jhon Helver Bello Chávez

Hacia un Diálogo entre Teorías Relacionadas con las Nociones de Obstáculo y Conflicto Semiótico en Educación Matemática 2577
Gloria Inés Neira Sanabria

La teoría de los indivisibles matemáticos en el siglo XVII 2586
Leonardo Solanilla Chavarro, Juan Felipe Gutiérrez Flórez, Ana Celi Tamayo Acevedo

11. Resolución de problemas y modelización en Educación Matemática

Matemática Divertida: uma maneira fácil de aprender Matemática jogando 2596
Flávia de Oliveira Carvalho, Maria Dalvirene Braga, Josinalva Estacio Menezes

Representaciones matemáticas y la invención de problemas desde la modelización 2604
Karen Yolanda Porras Lizano, Enrique Castro Martínez

Desarrollo de Talento matemático y la Creatividad 2612
María Alejandra Solano Delgado, Solange Roa Fuentes, Erika García Torres

Evento contextualizado: estudo de um problema da Engenharia Civil para o ensino de Matemática 2620
Eloiza Gomes, Gabriel Loureiro de Lima, Barbara Lutaif Bianchini, Karina Bradaschia Rocha, Paula Meirelles Bolelli

Potencialidades do Aprender com Modelagem 2628
Zulma Elizabete de Freitas Madruga, Maria Elizabete de Souza Couto, Valderez Marina do Rosário Lima

Conectando la matemática con la vida cotidiana 2636
José Vidal Jiménez Ramírez, Faustino Vizcarra Parra

La tecnología digital como herramienta mediadora para la modelización e interpretación de problemas en contexto: el caso del plano inclinado y la cicloide invertida 2638
Freddy Yesid Villamizar Araque, Alfredo Martínez Uribe, Carlos Armando Cuevas Vallejo

Resolução de Problemas e Modelização Matemática na Sala de Aula 2646
Roger Ruben Huaman Huanca, Marcos Antônio Petrucci de Assis

Un medio para la enseñanza de magnitudes directamente proporcionales 2653
Angela Katherine Trochez Tapia, Yeny Leonor Rosero Rosero

Análisis de la construcción de modelos matemáticos de estudiantes de ingeniería 2655
Jazmín Adriana Juárez Ramírez, José María Chamoso Sánchez, María Teresa González Astudillo

Modelagem Matemática e projetos temáticos na Educação Básica: exemplos de duas maneiras de conduzir 2663

Regina Helena de Oliveira Lino Franchi

Propuesta de enseñanza: Los recorridos del Sol 2671

Orfa Yanet Quintero Alzate, Diana Marcela Cadavid Urrego, Octavio Arley Velásquez Londoño

A (re) construção de saberes matemáticos proporcionada pela metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de derivadas através da Resolução de Problemas 2676

Erica Marlúcia Leite Pagani

Elementos de prueba en geometría euclidiana en ambiente de papel-y-lápiz: estudio con alumnos de bachillerato 2684

José Luis López Hernández

Modelos matemáticos emergentes en transformaciones de superficies con reciclables 2692

Evelio Marcial Plaza Montes

Dominios de la geometría y del análisis y su articulación por medio de la modelización y la tecnología digital 2694

Jesús Victoria Flores Salazar, Verónica Neira Fernández, Flor Isabel Carrillo Lara, Elizabeth Montoya Delgadillo

Caracterizando las estrategias heurísticas de pruebas estandarizadas 2702

Ana María Palacios Rojas, Sandra Marcela Chito Cerón, Sandra Liceth Solarte Alvear

Juegos de estrategia potencializadores del proceso de comunicación en la resolución de problemas 2704

Leonilde Pardo Aguilera

Un estudio sobre el razonamiento probabilístico de estudiantes de grado once de un colegio del sector público de Cali 2712

Juan Carlos Galindo Realpe, Karen Velasco Restrepo

La tienda de Matemáticas: Estrategia de ayuda entre iguales. 2718

M. Guadalupe Leal Zamorano

Classificando os Quadriláteros: uma Situação Didática envolvendo leitura 2726

Luciano Soares Gabriel Luciano, Cidimar Andreatta

Una aproximación al álgebra escolar desde la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación 2735

Sebastián Castañeda Martínez, Carolina Castañeda Martínez, Ligia Amparo Torres Rengifo

Operaciones básicas con algoritmo gráfico en la escuela primaria 2743

Angel Totolhua Tlaque, Marta Valdemoros Alvarez

Constituyendo prácticas matemáticas en proyectos pedagógicos de modelación -PPM- 2751

Fabian Posada Balvin

LEM na escola: O primeiro ano de um projeto de Ensino, Extensão e Pesquisa 2759

Fabian Posada Balvin, Alexandre Silva de Oliveira, Ayronn da Silva Santos, Kelvin Leysson Bulhões da Silveira

Experiencia de modelización matemática con profesores y futuros profesores 2767

María Florencia Cruz, Sara Scaglia, Cristina Esteley

Modelación con Tracker para el aprendizaje de movimientos en el plano 2775
Guillermina Avila García, Liliana Suárez Téllez

Experimentación discursiva y figuración 2783
Leonora Díaz Moreno, Maximiliano Núñez

Organización por métodos y estrategias en el cálculo de áreas de triángulos 2791
Vicente Carrión Miranda, François Pluvinage

Actividad Matemática como objeto de investigación: Comprensiones y perspectivas teóricas 2799
Maria Camila Ocampo-Arenas, Mónica Marcela Parra-Zapata

Possíveis contribuições do uso de jogos aliados a resolução de problemas como estratégia para o ensino da Matemática no 6º ano 2804
Lúcia Vera Lima Teixeira, Maria Dalvirene Braga, Rui Seimetz

Modelización en el aula matemática 2813
Andrés Iván Ortiz Jiménez, María Aravena Díaz, Horacio Solar Bezmalinovic, Leonardo Cárdenas Calderón

Um cenário das pesquisas envolvendo Resolução de Problemas em edições da CIAEM 2821
Cidimar Andreatta, Suely Gomes Allevato

Metacognición a través de la solución de problemas matemáticos en la escuela Primaria. 2830
Cristina Sánchez Montes

Construcción de trayectorias en el plano con Scratch 2839
María Mina, Mónica Villarreal

Diferentes representações na solução de uma tarefa de contagem 2847
Natália Alcazar de Matos, Mariana Moran, Valdirene Maria dos Santos

Posicionamiento de los estudiantes y la efectividad en resolución de problemas en trabajo colaborativo 2855
Nicole Fuenzalida Díaz, Carmen Gloria Espinoza, Farzaneh Saadati

La evaluación en la modelación matemática. Una revisión crítica de literatura 2863
Jonathan Sánchez Cardona, Paula Andrea Rendón-Mesa

Articulación entre el conocimiento en matemática y física a través de la modelación 2870
Alexander Castrillón Yepes, Ana Carolina González Grisales, Sebastián Mejía Arango, Paula Andrea Rendón Mesa

Constitución comprensiva del objeto mental "límite matemático" realizada por estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones 2872
Oscar Javier González Pinilla, Camilo Arevalo Vanegas

Matemática, Física y Música: Interdisciplina entre Arte y Ciencia 2880
Lucas Josué Villagra, María de las Mercedes Moya, Andrea Carolina Monaldi

Formalización de fenómenos físicos en actividades experimentales a través de la modelación 2882
Nicolás Adolfo Amaya Lozano, Diego Alejandro Ríos Pérez, Paula Andrea Rendón Mesa

Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA): un planteamiento desde la Teoría de la Situaciones Didácticas (TSD) 2884

Juddy Amparo Valderrama Moreno, Dora Solange Roa Fuentes

La práctica de actividad científica en la escuela para el desarrollo de habilidades y actitudes para matemática 2892

Ximena Andrea Colipan Uribe

Desarrollo del Pensamiento Geométrico (PG) a través del uso de las tecnologías digitales 2898

Juddy Amparo Valderrama Moreno, Daniel Moreno Caicedo

A resolução de problemas por estimativas 2904

Malcus Cassiano Kuhn

Conferencias plenarias

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes

Salvador **Llinares**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumen

La enseñanza de las matemáticas se articula a través de diferentes tareas profesionales que ponen de relieve la influencia del contexto en cómo el profesor de matemáticas usa el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. Esta situación introduce la idea de competencia docente del profesor como usar el conocimiento de manera pertinente en el desarrollo de las tareas profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. Desde esta perspectiva, la competencia docente "mirar de manera profesional" la enseñanza de las matemáticas como una componente de la práctica profesional del profesor de matemáticas se entiende cómo interpretar las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en las que el profesor se encuentra para apoyar las decisiones de acción según los objetivos de aprendizaje planteados. Esta perspectiva deriva desafíos para los formadores de profesores de matemáticas.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, competencia docente, conocimiento de matemáticas para enseñar, formación de profesores de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas como un sistema de actividades prácticas

Desde hace algunos años se insiste en la necesidad de que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la forma de pensar matemáticamente de los niños para ayudarles en su aprendizaje de las matemáticas. Ayudar a los estudiantes a razonar matemáticamente implica que los profesores deben elegir tareas matemáticamente relevantes para sus estudiantes e identificar oportunidades durante la enseñanza para que los estudiantes se impliquen en procesos matemáticos como particularizar y generalizar, conjeturar y argumentar/probar y así. Desde esta perspectiva, la práctica de enseñar matemáticas se puede entender como un sistema de actividades del profesor que en un contexto de aula podemos identificar como (i) seleccionar y diseñar tareas matemáticamente relevantes para los objetivos de aprendizaje, (ii) gestionar las diferentes fases de una lección y en particular la gestión de las discusiones matemáticas en el aula, e (iii) interpretar y analizar el pensamiento matemático de los estudiantes (Figura 1). Este

sistema de actividades del profesor que articulan la práctica de enseñar matemáticas se puede concretar en actividades particulares. Por ejemplo, la selección o diseño de tareas matemáticamente relevantes implica la necesidad de anticipar respuestas probables de los estudiantes a dichas tareas. La gestión de las discusiones matemáticas en el aula implica la posibilidad de seleccionar estudiantes particulares para presentar sus respuestas e ideas durante la puesta en común, secuenciando con un propósito explicito el orden en el que los estudiantes se les da la oportunidad de discutir sus resoluciones y reconocer la posibilidad de hacer conexiones entre las respuestas de los diferentes estudiantes y entre estas y las ideas matemáticas clave que son el objetivo de la lección (Stein, Engle, Smith, y Hughes, 2008).

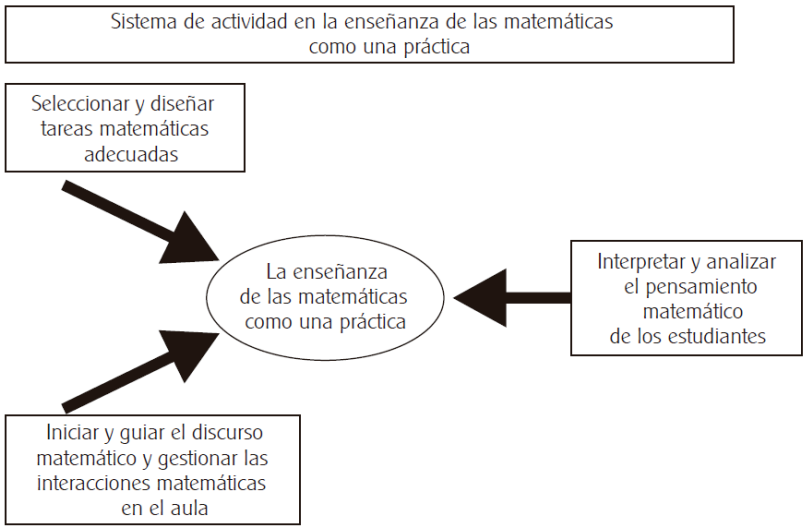


Figura 1. Sistema de actividad en la enseñanza de las matemáticas como una práctica en Llinares, Valls, y Roig (2008), pag. 34.

Estas actividades pueden contextualizarse desde los momentos en los que el profesor piensa sobre la enseñanza (planificación), hasta momentos imprevistos durante la enseñanza. Entre los primeros, están los momentos en los que el profesor tiene que planificar las lecciones, y tiene que pensar cómo secuenciar actividades con diferente demanda cognitiva teniendo en cuenta la diversidad de los alumnos en su clase. Entre las segundas, podemos encontrar el aprovechamiento de situaciones imprevistas durante la enseñanza que pueden ser usadas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, reconocer alguna cuestión planteada por los estudiantes y generada durante las discusiones matemáticas en el aula a partir de la cual el profesor puede decidir una determinada dirección de la clase para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes.

Esta variedad amplia de situaciones y con características tan diversas en las que los profesores deben responder en y durante la enseñanza de las matemáticas ha puesto de manifiesto la relevancia del conocimiento de matemáticas para la enseñanza (Ball & Bass, 2000; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Davis, & Renert 2013; Rowland, et al. 2009). Desde esta perspectiva se asume la influencia del conocimiento del profesor en determinar la calidad de la enseñanza. Ya que, en particular, la falta de este conocimiento limita la competencia del profesor para elegir o diseñar tareas matemáticas con alta demanda cognitiva para los estudiantes de su clase, en reconocer oportunidades matemáticamente relevantes durante la lección, en observar y

analizar el pensamiento matemático de los estudiantes y para generar un discurso profesional sobre lo que sucede en el aula de matemáticas.

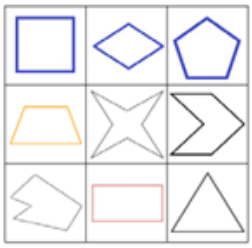
Diferentes estudios han estado caracterizando los dominios de conocimiento del profesor necesario para enseñar matemáticas y que resultan relevantes para la realización de estas actividades (Davis & Renert, 2013; Scheiner, Montes, Godino, Carrillo, Pino-Fan, 2019). Una de las características que han revelado estos estudios es la compleja relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento que es movilizado en las diferentes actividades que estructuran la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, un aspecto común en esta aproximación a la caracterización del conocimiento necesario para enseñar es el reconocimiento de la importancia de las actividades que articulan la práctica y el uso que el profesor hace de su conocimiento en la resolución de dichas actividades. Relacionar la práctica de enseñar matemáticas con resolver problemas profesionales subraya la idea de la competencia del profesor. En particular, cuando hay que considerar tareas relevantes según el nivel de sus estudiantes, y para realizar inferencias sobe el pensamiento matemático de los estudiantes basados en las evidencias dadas por lo que los estudiantes dicen, hacen o escriben.

Por ejemplo, el reconocimiento por parte del profesor de oportunidades durante la enseñanza aprovechándolas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes es una manifestación de la manera en la que el profesor usa diferentes dominios de conocimiento para realizar inferencias basadas en las evidencias para tomar decisiones de enseñanza (Stockero, Van Zoest, 2013; Van Zoest Stockero, Leatham, Peterson Atanga y Ochieng, 2017). De esta manera, apoyar la enseñanza de las matemáticas en el pensamiento matemático de los estudiantes está vinculado a la competencia del profesor para realizar inferencias sobre el pensamiento de los estudiantes. En este sentido, para ayudar a los estudiantes a progresar en su aprendizaje, los profesores deben diseñar, adaptar o seleccionar tareas matemáticas relevantes, interpretar lo que dicen y hacen sus estudiantes al resolverlas, para poder decidir cómo continuar la enseñanza. Estas actividades (prácticas profesionales) – diseñar/adaptar/seleccionar, interpretar y tomar decisiones requieren conocimiento especializado. En particular en relación a los estudiantes como aprendices, sobre el currículo y sobre estrategias instruccionales.

Competencia docente: uso del conocimiento para resolver actividades en la enseñanza

La especificidad del conocimiento del profesor en la realización de las actividades vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas conlleva el reconocimiento del papel de diferentes dominios de conocimiento. Por ejemplo, un contenido curricular en la educación primaria son las figuras geométricas y los polígonos. Este contenido define como objetivo el desarrollar en los estudiantes formas de razonar con las figuras geométricas y sus atributos. Este objetivo implica ayudar a los estudiantes a comprender los procesos de clasificación de las figuras geométricas que se apoyan en el reconocimiento de atributos comunes a grupos de figuras. En este contexto ante una tarea como la que aparece en la Figura 2, cuando el profesor anticipa posibles respuestas de los estudiantes para justificar su introducción en la planificación de la lección debe movilizar conocimiento desde diferentes dominios.

De entre todas estas figuras hay una que no corresponde a este grupo, ¿Por qué?



1a-cuadrado; 1b-rombo; 1c-pentagono regular

2a- trapecio isósceles; 2b- octógono cóncavo simétrico; 2c-hexágono cóncavo simétrico

3a- hexágono no simétrico cóncavo; 3b-rectángulo; 3c- triángulo equilátero

Figura 2. Actividad de reconocer semejanzas y diferencias entre figuras geométricas. (Bernabéu, Moreno y Llinares, 2018)

La selección de esta tarea (Figura 2) refleja el conocimiento del objetivo curricular (aprender a identificar y razonar con los atributos de las figuras). La tarea implica reconocer un atributo común a un grupo de figuras, lo que permite agruparlas en relación a otras, y poder justificar por qué una figura no tiene el atributo identificado. Además, la tarea tiene en cuenta que los estudiantes de educación primaria pueden desarrollar una comprensión amplia sobre las figuras geométricas si tienen la posibilidad de analizar múltiples ejemplos de figuras y discutir sobre sus semejanzas y diferencias. Desde este punto vista introducir ejemplos de figuras que cumplan ciertos requisitos junto con figuras que no los cumplan es clave. Esta tarea refleja aspectos del currículo (tipo de figuras y atributos) y de los procesos cognitivos que se tiene que desarrollar en los estudiantes (reconocer atributos, y semejanzas y diferencias entre las figuras). En este sentido, preguntas que pueden ayudar a movilizar el conocimiento del profesor sobre estos aspectos son ¿las actividades previstas en el plan de la lección presentan variedad de ejemplos y contraejemplos? En este ejemplo, la tarea tiene como objetivo que los niños/as reconozcan atributos de las figuras geométricas y que sean capaces de establecer listas de estos atributos vinculados a diferentes figuras para poder establecer diferencias entre las figuras (regularidad, cóncavo /convexo, numero de lados, simetría, paralelismo, diagonales, etc.). En la tarea propuesta, los atributos que permiten diferenciar una figura de las otras pueden ser (i) la simetría que permite diferenciar hexágono cóncavo que no tiene ejes de simetría del resto de figuras, (ii) el tener más de un ángulo mayor de 180º, que permite diferenciar el octógono cóncavo (la estrella) del resto de las figuras, y (iii) no tener diagonales, que permite diferenciar al triángulo equilátero del resto de las figuras.

Desde el punto de vista del conocimiento del profesor sobre los estudiantes y el aprendizaje matemático, el profesor debería reconocer que cuando se da la oportunidad a los estudiantes de generar diferentes aproximaciones a la resolución de las tareas pueden generarse diferentes soluciones. En este tipo de situaciones los profesores deben anticipar posibles respuestas de los estudiantes, aunque algunas veces se tiene que asumir que las respuestas de los estudiantes pueden ser imprevisibles. Es, en este contexto, en el que la capacidad del profesor de pensar sobre su enseñanza a lo largo del tiempo genera la posibilidad de incrementar su conocimiento sobre cómo los estudiantes aprenden, además del conocimiento reunido por las investigaciones en Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, en relación a la tarea anterior

(Figura 2), una referencia puede ser las características de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico proporcionada por el modelo de van Hiele relativos a la capacidad de reconocer atributos de las figuras (Figura 3).

Durante muchos años la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha estado proporcionando información sobre características de cómo los estudiantes aprenden contenidos matemáticos y desarrollan procesos matemáticos. Esta información es la que los profesores pueden usar para realizar inferencias sobre qué y cómo los estudiantes están aprendiendo desde lo que los estudiantes dicen o hacen cuando resuelven problemas y justificar, como consecuencia, las direcciones de la enseñanza generadas.

NIVEL	RECONOCER
1. Los estudiantes reconocen las figuras **como un todo.**	• Asocian las figuras a objetos conocidos. "*Esta se parece a un reloj de arena*". • Hacen uso de artículos demostrativos para indicar las diferencias de las figuras. Usan los demostrativos "eso" o "esto" para indicar las diferencias de las figuras. • Tienen dificultades para reconocer los atributos de las figuras. • Usan términos perceptuales para nombrar algunos atributos aunque estén descontextualizados (no conocen los términos o no los usan adecuadamente).
2. Los estudiantes describen **las partes y los atributos** de las figuras.	• Los estudiantes reconocen de manera progresiva los atributos de las figuras: Figuras cerradas/abiertas, Lados rectos/curvos, Lados no-cruzados/cruzados. Aunque inicialmente pueden tener dificultades en reconocer algunos atributos, (Cóncavo/convexo, Número de lados elevado, Altura triángulos,….) finalmente los reconocen de manera sistemática. • Empiezan a incorporar los nombres de las figuras para diferenciarlas (rombo, cuadrado, triangulo rectángulo, cuadriláteros, … • Finalmente, reconocen los atributos de las figuras, y los usan para diferenciarlas entre sí. – Diagonales (tamaño, perpendicularidad). – Ejes de simetría. – Paralelismo, perpendicularidad de los lados (ángulos rectos) • Usan un vocabulario adecuado, incorporando los términos adecuados de los atributos para explicar las diferencias entre las figuras (figuras cerradas/abiertas, lados curvos/rectos, triángulos rectángulos/acutángulos/obtusángulos,…).

Figura 3. Características de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico en relación a la actividad de Reconocer (Bernabéu, Moreno, y Llinares, 2018, Pag. 63)

En relación al conocimiento de las estrategias instruccionales en este tipo de tareas el profesor puede ayudar a los estudiantes a realizar comparaciones y conexiones. En el ejemplo propuesto indicando a los estudiantes que generen listas de atributos que cumplan las diferentes figuras y comparando las diferencias y semejanzas entre ellas. Facilitar la discusión en clase sobre los atributos reconocidos en las figuras y sobre las diferencias y semejanzas es una estrategia instruccional que facilita la generación de ideas. Además, otra estrategia instruccional es permitir a los estudiantes comparar las respuestas de sus compañeros con las suyas propias para generar la oportunidad de justificar y explicar sus propias resoluciones. La implementación de todas estas estrategias instruccionales en el aula por parte del profesor está relacionada con el conocimiento movilizado en relación al currículum (¿qué deben conocer los estudiantes?) y en relación al aprendizaje (¿cómo aprenden los estudiantes?) lo que subraya las fuertes relaciones entre los diferentes dominios de conocimiento relevante para la enseñanza de las matemáticas.

Desarrollando competencias docentes para aprender una profesión

La caracterización de la enseñanza de las matemáticas realizada en las secciones anteriores a través de la identificación de diferentes tareas profesionales pone de relieve la influencia del contexto en cómo el profesor de matemáticas usa el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. Esta caracterización nos ha permitido introducir la idea de competencia docente del profesor como usar el conocimiento de manera pertinente en el desarrollo de las actividades profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. La consideración de la idea de la competencia docente como un proceso basado en el conocimiento lo hemos caracterizado mediante un ejemplo vinculado a la elección de tareas matemáticas con alta demanda cognitiva para ejemplificar el uso de diferentes dominios de conocimiento. Esta caracterización de la enseñanza de las matemáticas como una práctica en la que se movilizan diferentes dominios de conocimiento (competencia docente) tiene reflejos en las propuestas de formación de profesores (Llinares, 2012).

En particular, en propuestas basadas en la práctica que inciden en maximizar la relación entre la teoría y la práctica en contextos que favorezcan el uso del conocimiento teórico en el análisis de las situaciones prácticas (Fernández, Callejo & Márquez, 2014; Oonk, Verloop, Gravemeijer, 2015). En particular, en el sentido de proporcionar a los estudiantes para profesor con oportunidades de analizar la práctica como un contexto para el desarrollo de competencias docentes. Uno de los objetivos en esta aproximación a la formación de profesores es ayudar a los estudiantes para profesor a desarrollar un discurso profesional vinculado a la práctica (Ivars, Fernández y Llinares, & Choy, 2018). Es decir, favorecer el desarrollo de argumentos prácticos como una elaboración formal de formas de razonar sobre la práctica. En el desarrollo de los argumentos prácticos de los estudiantes para profesor se pretende que estos establezcan razones de sus decisiones vinculando las evidencias proporcionadas por los registros de la práctica con principios más generales procedentes de la teoría (Fenstermacher y Richardson, 1993; Roig, Llinares, & Penalva, 2011).

En este contexto se ha empezado a subrayar en los últimos años el papel que puede desempeñar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza (Llinares, 2013, 2015; Seibert y Groenwald, 2013). Mirar de manera estructurada "las situaciones de enseñanza para generar información sobre lo que está sucediendo y proponer nuevas tareas se considera un proceso basado en el conocimiento (Mason, 2002; Llinares, Ivars, Buforn y Groenwald, 2019). Desde la perspectiva de la formación de profesores se plantea la necesidad de caracterizar cómo se va a entender el desarrollo de esta competencia, y cuáles pueden ser las características de los contextos de aprendizaje que apoyen dicho desarrollo. Estas dos cuestiones generan desafíos a los formadores de profesores en el sentido de tener que conceptualizar modelos de desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" (Sánchez-Matamoros, Moreno, Perez-Tyteca & Callejo, 2018) y maneras de pensar sobre el diseño de intervenciones en los programas de formación (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, & Callejo, 2018; Ivars, Buforn, & Llinares, 2017; Llinares, 2016; Llinares, Valls, &, Roig, 2008).

Una línea de actuación que intenta aportar información a estas cuestiones enfatiza el uso de diferentes tipos de registros de la práctica para crear los contextos de desarrollo de la competencia docente. Un registro de la práctica puede ser un video de una lección en una clase, las respuestas escritas de los estudiantes a uno o varios problemas, una planificación de una lección o grupos de planificaciones de una lección. A partir de estos registros de la práctica es

posible generar tareas para los estudiantes para profesor en el sentido de ayudarles a estructurar su mirada: qué aspectos mirar del registro de la práctica, que conocimiento es pertinente para analizar estos aspectos, cómo justificar las decisiones de enseñanza considerando las interpretaciones realizadas, etc. En el apéndice de este texto se muestra un ejemplo de este tipo de tareas en un programa de formación de maestros (Educación Primaria).

Este tipo de tareas mantienen una estructura similar. En primer lugar, se contextualiza el registro de la práctica y luego se introducen las evidencias, en este caso, el texto escrito de la interacción entre una maestra y un alumno motivada por la resolución de una actividad centrada en el desarrollo de la comprensión de los números de tres cifras. Finalmente, se presentan una serie de cuestiones para el estudiante para profesor para organizar su aproximación al análisis de la situación. Esta estructura del diseño de las tareas en el programa de formación permite tener la oportunidad de desarrollar diferentes aspectos de lo que constituye la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Mason (2002) concreta estos aspectos como: (i) desarrollar la sensibilidad y mirar con sentido que se vincula a la identificación de lo que puede ser considerado relevante, teniendo en cuenta un cierto objetivo que guía la observación (*intentional noticing*), (ii) describir los aspectos observados manteniendo registros de lo observado, separando la descripción de los juicios (*marking and recording*), (iii) reconocer posibles alternativas de acción (*recognizing choices*), y validar lo observado intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido (*validating with others*).

La secuencia de este tipo de actividades en el programa de formación (Figura, 4) crea el contexto para favorecer el desarrollo de un discurso profesional vinculado a la acción sobre la enseñanza de las matemáticas de los estudiantes para profesor (Ivars, et al. 2018). El desarrollo de este discurso profesional es el que puede evidenciar la relación entre (i) identificar los aspectos relevantes en una situación de enseñanza, (ii) usar el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las evidencias proporcionadas, y (iii) realizar conexiones entre los sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje (Van Es y Sherin 2002).

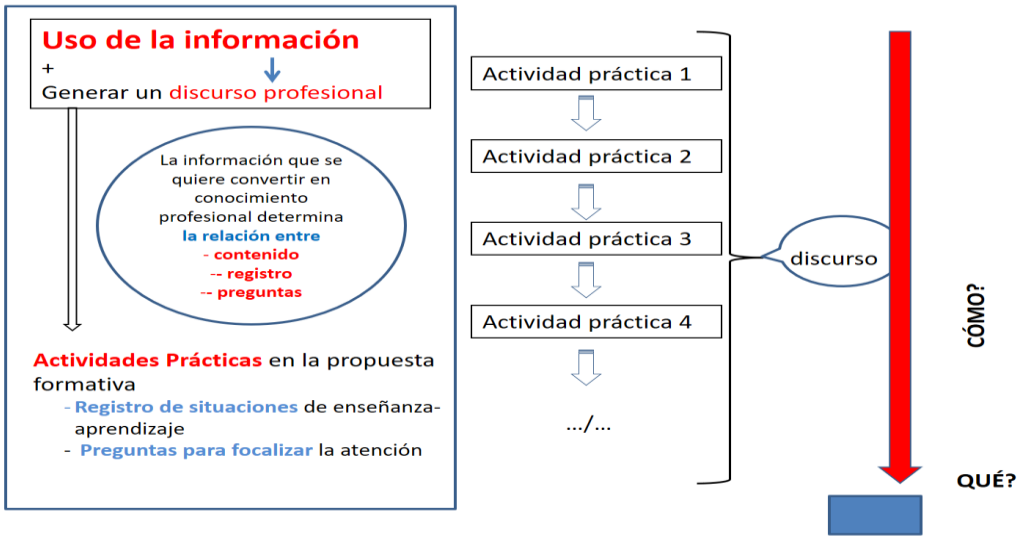


Figura 4. Interacción del análisis de la práctica y conocimiento teórico en el desarrollo de un discurso profesional vinculado a la competencia docente "mirar profesionalmente" (Ivars,

Buforn, y Llinares, 2017; pag. 77).

A modo de conclusión: Desafíos en aprender la práctica de enseñar matemáticas

Desde la perspectiva de la formación de profesores de matemáticas, reconocer que el proceso de llegar a ser profesor significa aprender una práctica basada en el conocimiento, genera desafíos para los formadores de profesores. En primer lugar, por la necesidad de identificar sistemas de actividad que articulan la práctica de enseñar matemáticas (Lampert, 2001). La descomposición de la práctica en sus aspectos constituyentes permite a los estudiantes para profesor tener la oportunidad de estudiar componentes separados pero relevantes de la práctica (Figura 1). En segundo lugar, por la posibilidad de asumir diferentes representaciones de la práctica de enseñar que puedan ayudar a determinar qué tipo de registros de la práctica y qué tipo de actividades con ellos deben insertarse en los programas de formación *(core practices*) de manera que los estudiantes para profesor puedan aprenderlas (Grossman, 2018). En este aprendizaje resulta relevante la manera en la que los estudiantes para profesor se apropian de instrumentos conceptuales para guiar sus decisiones sobre la enseñanza (Ivars, Buforn y Llinares, 2016). En tercer lugar, la necesidad de hacer explícito cómo los formadores de profesores conceptualizan el desarrollo de las competencias docentes (Sánchez-Matamoros et al, 2018). Los diferentes modelos a través de los cuales los formadores caracterizan el aprendizaje de los estudiantes para profesor permiten justificar las decisiones sobre cómo organizar los entornos de aprendizaje en el programa de formación.

Las ideas y principios que ayudan a dar respuesta a estos desafíos (identificar sistemas de actividad relevantes, determinar diferentes registros de la práctica, y el modelo de desarrollo de las competencias adoptado) se están considerando como referentes para articular los programas de formación reconociendo la dificultad de aprender la práctica de enseñar matemáticas.

La posibilidad de descomponer la práctica de enseñar matemáticas en actividades relevantes puede verse como una simplificación de la práctica, pero permite a los formadores de profesores generar entornos de aprendizaje en el programa de formación centrados sobre aspectos específicos sin perder de vista la mayor complejidad que se genera en situaciones reales de clase. Por ejemplo, el poder analizar aspectos particulares de la interacción entre un alumno y su maestra (ver el apéndice) puede ayudar a los estudiantes para maestro a detenerse e interpretar aspectos particulares de la interacción que sería más complicado en una situación de clase real. En el desarrollo de este tipo de actividades de análisis de registros de la práctica los estudiantes para profesor pueden empezar a identificar aspectos relevantes, nombrarlos de manera que facilite la comunicación con otros y a interpretarlos. En este proceso resulta clave los instrumentos conceptuales que el formador de profesores puede ponerle a su alcance de manera que puedan ser usados para identificar, nombrar e interpretar los aspectos de la práctica que centran su atención. Estos instrumentos conceptuales, como esquemas para analizar la interacción en el aula o trayectorias de aprendizaje de las nociones matemáticas, proporcionan a los estudiantes para profesor el lenguaje para describir e interpretar los aspectos de la práctica y formas de ver y comprender la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, 2015).

Finalmente indicar que, la identificación de desafíos en la formación de profesores de matemáticas al adoptar la perspectiva de que llegar a ser profesor implica aprender una práctica, se apoya en el trabajo, reflexión sobre la práctica e investigación de los formadores de profesores en sus intentos de mejorar su propia práctica.

Reconocimiento. La investigación mencionada en este trabajo ha sido realizada con el apoyo del Ministerio de Economía y Competitividad –MINECO - a través de la Agencia Estatal de Investigación- AEI, España mediante el proyecto nº EDU2017-87411-R; y de la Generalitat Valenciana- GVA- a través del grupo de Excelencia PROMETEO2017/135.

Referencias

Ball, D., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics (pp. 83–104). Westport: Ablex.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59, 389–407.

Bernabéu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2018). ¿Cómo estudiantes para maestro/a anticipan posibles respuestas de niños/as en actividades de reconocimiento de figuras geométrica? En Roig-Vila, R. (ed.), El compromiso académico y social a través de la investigación e innovación educativas en la Enseñanza superior. Barcelona: Octaedro.

Davis, B. & Renert M. (2013). The Math Teachers Know. Profound Understanding of Emergent Mathematics. London: Routledge

Fernández, C., Callejo, M.L., & Márquez, M. (2014). Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división medida. Enseñanza de las Ciencias, 32(3), 407-424.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 13, 39-61.

Fenstermacher, G. & Richardson, V. (1993). The elicitation and reconstruction of practical arguments in teaching. Journal of Curriculum Studies, 25(2), 101-114.

Grossman, P. (2018). Teaching core practices in teacher education. Harvard Education Press: Cambridge, MA.

Ivars, P., Buforn, A. & Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente. Acta Scientiae, 18(4), 48-66.

Ivars, P., Buforn, A., & Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una Mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (ed). Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI (pp. 65-88). Caracas, Venezuela: CIES.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., & Choy, B.H. (2018). Enhancing Noticing: Using a Hypothetical Learning Trajectory to Improve Pre-service Primary Teachers' Professional Discourse. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14(11), em1599.

Lampert, M. (2001). Teaching problems and the problems of teaching. New York: Yale University Press

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7, nº 10, 53-62.

Llinares, S. (2015). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente el aprendizaje de las matemáticas". Algunas características en la formación inicial de profesores de matemáticas. En B.

D'Amore & M.I. Fandiño (Comp.), Didáctica de la matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica. Bogotá, Colombia: Ediciones Universidad de la Sabana

Llinares, S. (2016). Enseñar matemáticas y aprender a mirar de forma profesional la enseñanza (Del análisis del conocimiento y práctica del profesor al desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente. En G.A. Perafan, E. Badillo, & A. Aduriz (eds.), Conocimiento y emociones del profesorado para su desarrollo e implicaciones didácticas (pp. 211-236). Bogotá: Colombia: Editorial Aula de Humanidades.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, A. & Groenwald, C. (2019). "Mirar Profesionalmente" las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M.T. González (eds.), Investigación sobre el profesor de Matemáticas: Formación, Práctica de aula, conocimiento y competencia profesional. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Llinares, S., Valls, J. &, Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. Educación Matemática, 20(3), 31-54

Mason, J. (2002). Researching your own practice. The discipline of noticing. London: Routledge-Falmer.

Oonk, W.; Verloop, N., & Gravemeijer, K. (2015). Enriching Practical Knowledge: Exploring Student Teachers' Competence in Integrating Theory and Practice of Mathematics Teaching. Journal for Research in Mathematics Education, 46(5), 559-598.

Roig, A.I., Llinares, S. & Penalva, M.C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. Educación Matemática, 23(3), 39-65.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the Knowledge Quartet. Londres: SAGE

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Perez-Tyteca, P., Callejo, M.L. (2018). Trayectorias de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21(2), 203-228.

Scheiner, Th., Montes, M., Godino, J.D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. (2018). What makes mathematics Teachers Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. International Journal of Science and Mathematics, 17(1), 153-172.

Seibert, L.G., Groenwald, Cl. (2013). Observar com Sentido: una competencia importante na vida professional do professor de Matemática. Acta Scientiae, 15(1), 133-152.

Stein, M.K., Engle, R.A.; Smith, M.S.; Hughes, E.K. (2008). Orchestrating Productive mathematical Discussions: five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. Mathematical Thinking and Learning, 10(4), 313-340.

Stockero, S. L., & Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. Journal of Mathematics Teacher Educators, 16, 125–147.

Van Zoest, L., Stockero, Sh., Leatham, K., Peterson, B., Atanga, N. & Ochieng, M. (2017). Attributes of Instances of Student Mathematical Thinking that Are Worth Building on in Whole-Class Discussion. Mathematical Thinking and Learning, 19(1), 33-54.

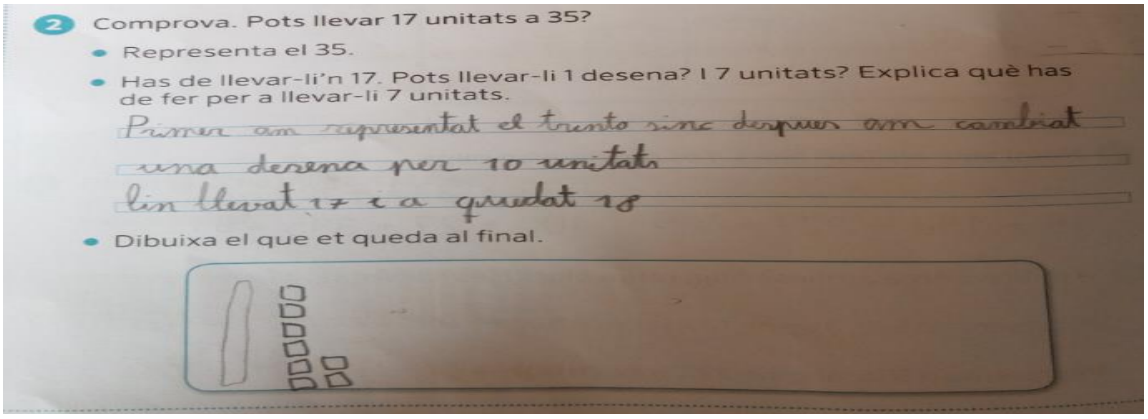
Van Es, E. & Sherin, M. (2002). Learning to Notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. Journal of Information Technology for Teacher Education, 10(4), 571-596.

Apendice- El caso de Mikel y el significado de los números de tres cifras

Mikel tiene 7 años y 7 meses. Está en 2º Educación primaria. Estamos en enero. Texto: *Taller de Matemàtiques Manipulatives. Matemàtiques 2º de Primaria.* Edt. SM-arrels	

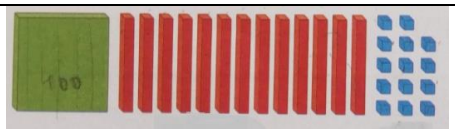
Contexto: Mikel está en el tema de la resta llevando con números de dos cifras. Él usa bloques multibase en cartulina (los lleva en una bolsita a clase) para realizar las actividades. Representa los números con los bloques, dibuja los bloques en el cuaderno/libro y escribe los números –símbolos- que representan las cantidades que tiene con los bloques multibase.

Lo que sigue es una de las actividades que ha realizado en su libro unos días antes[1]:



Unos días después se plantea la siguiente tarea que tiene

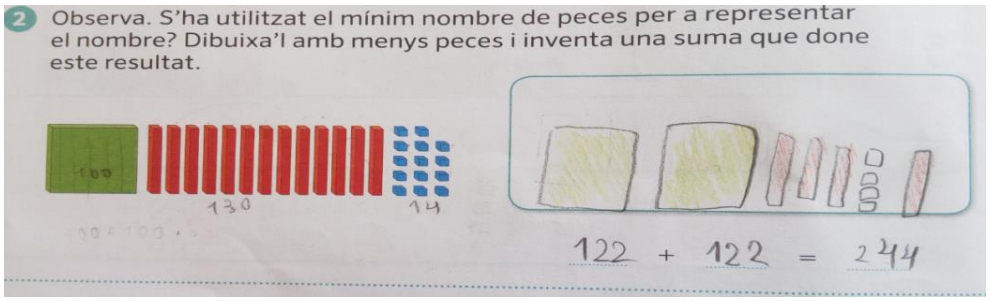
La tarea

Observa, s'ha utilitzat el mínim nombre de peces per a representar el nombre? Dibuixa'l amb menys peces i inventa una suma que done este resultat.	

La respuesta de Mikel y la interacción con la maestra

Mikel proporciona como respuesta 122 +122

[1] El idioma del texto usado y las respuestas de Mikel es el valenciano, lengua vernácula del contexto de donde procede el registro de la práctica



La maestra al ver la respuesta de Mikel, comprueba que está bien, pero le gustaría averiguar cómo está pensando y qué **comprensión tiene de los números de tres cifras y de la relación entre las diferentes unidades**. Para ello le pide a ver si puede darle otra solución

Maestra: ¿puedes encontrar otros números que sumados den 244?
Mikel: Sí. [Piensa un momento, levanta una mano con sus dedos extendidos, y escribe]
113 + 131
Maestra: ¿Cómo lo sabes?
Mikel: Porque, tres y uno son cuatro (señalando el 4 de las unidades). Uno y tres son cuatro (señalando el 4 de las decenas), y uno y uno son dos (señalando el dos de las centenas).
Maestra: ¿puedes encontrar otros números?
Mikel: [Piensa un momento]. Sí, (y escribe)
121 + 123
Maestra: ¡Muy bien Mikel!

Aunque Mikel ha resuelto bien las tres tareas, la maestra se da cuenta de que ella no tiene evidencias de la comprensión de Mikel de las relaciones entre las diferentes unidades en el número de tres cifras, y por tanto de su comprensión del número. Es decir, ella cree que la resolución correcta de la tarea del libro de texto y de las tareas adicionales que le había pedido, no le dan información sobre la comprensión de Mikel de los números de tres cifras que es el objetivo de la tarea. Por ello, le plantea la siguiente tarea:

Maestra: Bien Mikel, vamos a hacer otro problema igual. ¿Puedes encontrar dos números que sumados den 210?
Mikel se pone a pensar un rato más largo que en las actividades anteriores. Aunque tiene los bloques multibase encima de la mesa, no los utiliza. Después de un rato escribe lo siguiente, pero dudando
15 + 15 = 210
Maestra: ¿cómo lo has hecho?
Mikel: Pues, …, como cinco y cinco son diez (señalando al 10 del número), y uno y uno son dos (señalando al 2).
[Mikel mira dudando lo que ha escrito]
Maestra: ¿Estás seguro?
Mikel: No.

CUESTIONES

a) Sobre la tarea. Características

¿Qué elementos matemáticos deben usarse para resolver la actividad? Tras la respuesta de Mikel, la maestra le pide que encuentre la suma de otros dos números ¿qué pretendía conseguir la maestra? ¿Por qué finalmente le plantea una tarea similar, pero cambiando el número a 210? ¿Cuál era el objetivo de esta nueva tarea?

b) Sobre la comprensión de Mikel

¿Qué elemento matemático debe mejorar en su comprensión? ¿Por qué la tarea del libro de texto no era suficiente para determinar la comprensión de Mikel de los números de tres cifras?

c) Sobre lo que hacer a continuación

¿Cómo ayudarías a Mikel? ¿Qué tarea (y qué números usarías) para ello?

Lo que sigue es una actividad que propone el libro de texto. Diseña una actividad anterior y una posterior a la dada que podrías utilizar para apoyar a Mikel en la comprensión de los números de tres cifras. Justifica tu decisión en función del elemento matemático que debe consolidar y los números que usas en las tareas.

Com lleves 4 unitats a una placa de 100? Comprova i explica pas a pas el procés seguit.

Dibuixa el que queda al final.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

The why, what and how of working with exemplification in mathematics teacher education[1]

Jill **Adler** and Craig Pournara

University of the Witwatersrand

South Africa

jill.adler@wits.ac.za; craig.pournara@wits.ac.za

Summary

This paper focuses on working deliberately with secondary mathematics teachers on exemplification. The context is the Wits Maths Connect Secondary (WMCS) longitudinal research and professional development project in South Africa, where exemplification, specifically example sets informed by principles of variation, is a key focus in our work with teachers. We describe *why* we have come to focus on exemplification. We illustrate the *what and how* of this work through a selection of tasks where teachers are offered opportunity to learn about variance amidst invariance in example sets and what they afford.

Key Words: mathematics, teacher professional development, exemplification, secondary

Introduction

Theoretical and empirically supported arguments have been made for the centrality of examples in mathematics teaching and learning (e.g. Bills & Watson, 2008; Zaslavsky, online first) and how such learning is made possible by 'careful and knowledgeable' use of examples in mathematics teaching (Watson & Chick, 2011), and in mathematics teacher education (e.g. Peled & Balacheff, 2011). Building on this domain of work, this paper focuses on the *why, what and how* of working deliberately with secondary mathematics teachers on their use of examples in their teaching, or what we refer to more simply as *exemplification*. The context of our work is the Wits Maths Connect Secondary (WMCS) project where *exemplification*, and more specifically example sets informed by principles of variation, is a key element of our professional development work with teachers. We distinguish between the *modelling* of exemplification and *mediating* exemplification with teachers. Modelling takes place in our mathematics-focused professional development work. Mediation, on the other hand, is central to the teaching-focused

[1] An substantially extended version of this paper will appear in the forthcoming *Handbook on Mathematics Teacher Education, Volume 1.*

aspects of our work. We will illustrate this distinction as we describe opportunities for teachers to learn about exemplification, and how the notion of variation provides a means for teachers to construct, critique and revise examples sets for use with their learners[2].

Why exemplification? The WMCS theory of teaching and initial research

The WMCS is a longitudinal research-linked professional development project aimed at improving mathematics teaching in socio-economically disadvantaged schools in one province in South Africa. Our work is shaped, on the one hand, by on-the-ground realities of mathematics teaching and learning, and on the other, by an orientation to the activity of teaching as 'social'. We draw from key tenets of sociocultural theory, where *mathematics* is viewed as an inter-connected network of scientific concepts, and *mathematics teaching* therefore as geared towards the mediation and appropriation of the increasingly sophisticated and increasingly general ways of thinking that constitute progression in the discipline (Vygotsky, 1978). Teaching as an activity is not only goal-directed but also always about *something* (Alexander, 2000). Bringing what students are to know and be able to do into focus – its mediation - is the teacher's work. We call this 'something' the *object of learning*. In practical terms, it is akin to a lesson goal, but worded so that the mathematics of the goal is made clear. In line with previous research, mediational means are understood as cultural tools and/or resources in the practice of teaching (Adler, 2001).

Traditional forms of teaching are common across the world (Nachlieli & Tabach, online first), and unsurprisingly were the dominant forms observed in initial observations in our project schools and classrooms. Our analysis of video-records of lessons showed that they were characteristically incoherent. While teachers were following high levels of curriculum prescription, and learners were attentive and 'working', the intended mathematical message in a lesson was often not clear leading us to wonder how specific mathematical goals influenced lesson development activity for teachers. In our terms, the mathematical object of learning was out of focus. There was no apparent mathematical 'story' linking what learners were to know and be able to do. For example, in a four-part lesson ostensibly on multiplying algebraic expressions, each part offered a different rule, thus presenting an incoherent and fragmented notion of the products (Adler & Venkat, 2014).

In the context described above, and a principle that good professional development begins with what teachers bring and so who and where they are, it made sense that our professional development work should attend to strengthening teachers' exemplification and the quality of their explanations. From a Vygostkian perspective, examples are *symbolic mediators* of mathematics. Symbolic mediators include different signs, symbols, writing, formulae and graphic organisers – all possible elements of mathematical examples. As Kozulin (2003) explains, one cannot take for granted that learners will detect symbolic relations, no matter how obvious they might seem to the teacher.

> Symbols may remain useless unless their meaning as cognitive tools is properly mediated … the mere availability of signs or texts does not imply that they will be used by students as psychological tools … (Kozulin, 2003 p.24)

The implications for teaching and learning follow. Appropriation of psychological tools and more connected scientific mathematical concepts requires deliberate teaching of symbolic tools. This includes their systematic organisation and an emphasis on their generality and

[2] We use the terms learner/s and student/s interchangeably.

application.

Symbolic tools (e.g. letters, codes, mathematical signs) have no meaning whatsoever outside the cultural convention that infuses them with meaning and purpose. (Kozulin, op cit p.26).

Indeed, instructional examples are just such cultural conventions. Examples and exemplification thus form part of a framework we have developed over time that informs both our research and development work. This framing, named *Mathematical Discourse in Instruction* (MDI), enables us to describe and analyse what it is teachers do, and then to work with them developmentally on the mathematical quality of their teaching.

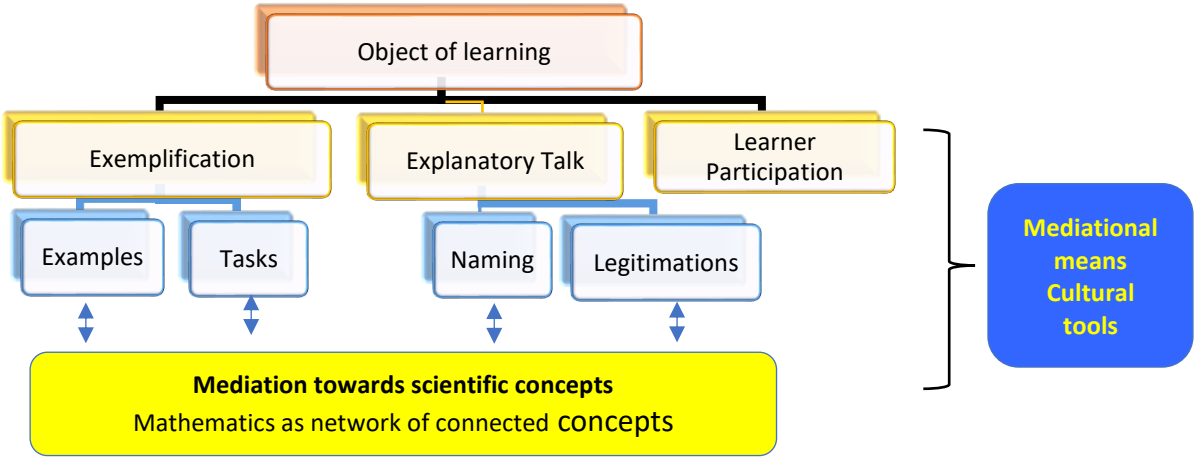


Fig.1: Constitutive elements of MDI (Adapted from Adler & Ronda, 2015)

As represented in figure 1, MDI focuses on four key elements of mathematics teaching, with *a lesson* as our *unit of analysis*: the *object of learning*, or lesson goal, and three mediational means, or cultural tools, *exemplification*, *explanatory talk* and *learner participation*. The *object of learning* in any lesson could be a concept, a procedure or mathematical practice, together with the relevant capability. This leads to *exemplification* and more specifically to examples and associated tasks that can be used to bring the object of learning into focus with learners. With respect to examples, we are interested in their selection and sequencing and how these accumulate within and across lessons. We draw on the work of Watson & Mason (2006), who in turn draw on Marton & Tsui (2004), to describe key features of a mathematical object and/or movement towards generality across a sequence of examples. An example set that brings attention to *similarity* across examples, and so to that which is invariant, offers opportunity to identify key features and/or to generalise. If a set of examples brings attention to *contrast*, and so to what something *is* in relation to what it *is not*, or to a different class, opportunities are made available to recognise boundaries between classes of examples. This provides further opportunity to generalise but not overgeneralise. When two examples that are carefully varied are *juxtaposed*, they can draw quite specific attention to a key feature of an object.

We note the third and fourth elements of MDI, though they are not in focus here. *Explanatory communication*, includes attention to naming/word use (what is said and what is written) and substantiations of mathematics as specialised knowledge (what counts as mathematical knowledge). *Learner participation* focuses on what learners do and say with regards to the mathematics they are learning. We consider whether and how learner talk moves

beyond the very prevalent but limited offering of single words in chorus, to responding to and asking questions, and to more open dialogue with the teacher and/or other learners.

The overarching importance of the framework is the emphasis on the coherence of a lesson and thus how all elements interact, how they link back to the object of learning and open opportunities to learn mathematics. The constitutive elements of MDI apply to any mathematics classroom, whatever the pedagogy.

Why exemplification? Mathematics education research

Interest in exemplification as a research field in mathematics education goes back many years. For example, Mason and Pimm (1984) explored the role of generic examples in mathematics education. Dahlberg and Housman (1997) investigated the generation of examples in learning advanced mathematics. It is fair to say that interest in examples in mathematics and mathematics education follows from a basic maxim that initial experiences of mathematical concepts and procedures, given their abstract nature, will be through some exemplification: through examples and the tasks in which they are embedded. Goldenberg & Mason (2008) described examples as cultural mediating tools, and linked examples with the notion of variation:

> Examples can … usefully be seen as *cultural mediating tools* between learners and mathematical concepts, theorems, and techniques. They are a major means for 'making contact' with abstract ideas and a major means of mathematical communication, whether 'with oneself', or with others. Examples can also provide context, while *the variation in examples* can help learners distinguish essential from incidental features and, if well selected, the range over which that variation is permitted. (Goldenberg & Mason, 2008 p. 184, *our emphasis*).

The resonance with our theoretical orientation to examples as symbolic tools, and to our work on and with exemplification in the WMCS project is apparent.

A 2006 PME Research Forum on exemplification culminated in a special issue of *Educational Studies in Mathematics* in 2008 (Bills & Watson 2008) and was a catalyst for a follow-on conference focused on the role of examples in argumentation and proof, and a related special issue of the *Journal of Mathematical Behavior* (JMB) in 2011 (Antonini, Presmeg, Mariotti, & Zaslavsky, 2011). Both issues provide reviews of research in the field. Here we zoom in on the papers focused on the role of examples in *teachers' learning of mathematics in teacher educatio*n, or *teachers' use and awareness of examples in their te*aching. In this way, the crucial role in teaching of choosing and using (instructional) examples becomes evident. The value of a deliberate focus on exemplification in mathematics teacher education follows.

Studies of the forms and functions of teachers' example-use have extended to both elementary and secondary mathematics teaching, and to pre-service and experienced teachers. Rowland (2008) explored example-use across 24 lessons taught by pre-service elementary teachers. He identified four categories of example-use: variability, sequencing, representations, and lesson objectives. These analytic distinctions in turn provided insight into aspects of teachers' mathematical knowledge-in-use in teaching: that this entails variation across a set of examples, their sequencing and link with lesson goals. Each of these aspects features in MDI.

Using their own experience of example-use when working on a task about polynomial functions, and example-use in the lessons of an experienced secondary teacher teaching decimals, fractions and percentages, Watson & Chick (2011) reinforce "how careful and

knowledgeable teachers need to be" to bring about "alignment between the learners' engagement and teacher's intentions" (p.294). Put differently, the affordances of an example or an example set are not self-evident to learners. It takes a knowledgeable teacher, with some fluency in example-use to draw learners' attention to, and engage them with what is significant for their mathematics learning.

In an earlier study of example-use by experienced secondary teachers, Zodik & Zaslavsky's (2008) illuminated that teachers were not necessarily aware of their example-use and related rationales. From their observations and analysis of teaching, they distinguished between teachers' pre-planned use of examples, and their spontaneous use as these arose in the course of teaching. They also revealed that example choices can either facilitate or impede students' learning, and consequently the choice of examples in teachers' work is not trivial. They went on to lament the lack of deliberate attention to exemplification in mathematics teacher education.

> … numerous mathematics teacher education programmes do not explicitly address this issue and do not systematically prepare prospective teachers to deal with the choice and use of instructional examples in an educated way. (p.166)

Zodik & Zaslavsky have argued further for its place as part of specialised knowledge for teaching (Ball, Thames, & Phelps, 2008):

> The knowledge teachers need for meeting the challenge of judiciously constructing and selecting mathematical examples is a special kind of knowledge. It can be seen as core knowledge needed for teaching mathematics. … engaging teachers in generating or choosing instructional examples can be a driving force for enhancing these elements of their knowledge (Zodik & Zaslavsky, 2009).

Zazkis & Leikin's (2008) study of the role of examples in defining and definitions also argues for the development of this specialized content knowledge for teaching mathematics. They presented a group of 40 pre-service secondary teachers with the task of giving "as many examples as possible for a definition of a square" (p. 134). They were interested in the prospective teachers' concepts of a square in the first instance, and then their meta-mathematical concept of a definition. An additional research question related to the usefulness of a three-dimensional framework for analysing examples: accessibility and correctness, richness, and generality. The student teachers' definitions and related example-use generated a large number of examples of definitions, including more and less rigorous definitions, as well as some incorrect ones. Of interest to us in Zazkis & Leikin's study was the follow-on task given to the same group of prospective teachers later in the year. They presented the prospective teachers with 24 examples of definitions, most of which were selected from their teacher-generated examples of definitions and with additions of some produced by 'experts'. The task for the prospective teachers was to evaluate the validity of each of the definitions provided. The discussion amongst the teachers about the validity of the various definitions revealed movement between mathematical validations and pedagogical ones. Some teachers evaluated validity in terms of what they thought would be appropriate for school teachers, without attention to related mathematical rigour. Zazkis & Leikin concluded by suggesting that the tasks offered "a valuable activity, both mathematical and pedagogical, to promote a deeper conceptual understanding of mathematics in general and of the nature and role of definitions in particular" (p.147). The critical point here is that these tasks in a teacher education setting were mathematical and meta-mathematical, intended to strengthen teachers' knowledge of examples of definitions and

defining. The tasks were not designed for explicit attention to choosing and using instructional examples. The value of this study is that it points to the value of such activities in mathematics teacher education, and the specialized knowledge these can lever up for teachers.

There is thus a considerable literature foregrounding the significance exemplification as specialised knowledge for teaching. This leads to the question of what and how this is attended to in mathematics teacher education, and hence the focus of this paper. Such attention, we will argue can be fostered through the use of variation. The importance of variation in mathematics teaching has a long history, dating back to Dienes' (1960) work on perceptual variation. In mathematics education variation has come back into focus in more recent years through the work of Watson & Mason (2006), particularly through their vivid illustration of variance amidst invariance as a tool for engaging with generality and with mathematical structure, and through carefully structured example sets.

More generally, application of Variation Theory (Marton & Tsui, 2004) to mathematics education has ranged from studies of variation in textbook example sets (e.g. Sun, 2011) to teachers' learning through lesson study informed by variation theory (e.g. Runesson, 2008) and to learners' learning (e.g. Kullberg, Runesson Kempe & Marton, 2017). Kullberg et al (op cit) emphasise how attention to variation can enable critical features of the object of learning to come into focus. They make the important observation that multiple examples are not simply cumulative. The ordering of examples, their simultaneous presentation, and the teacher drawing attention to similarities and differences are critical. We agree, and we have argued previously that research related to an entire lesson needs to attend to the accumulating example space.

> The research on examples, [however,] while illuminating of what teachers do and why, does not enable a view of whether and how examples accumulate to bring the object of learning into focus for learners, and whether there is movement towards generality (Adler & Ronda, 2017, p. 68).

In Variation Theory terms, learners' attention needs to be drawn to key features of a mathematical object such as aspects of mathematical structure the teacher wishes to make visible. This is a function of a set of examples, how they are organized to illuminate variance amidst invariance and thus possibilities made available for generalizing, and/or recognizing structure or key features.

Of course, examples are always embedded in a task. Thus while examples are selected as particular instances of the general case in focus, and for drawing attention to relevant features, generality and/or structure, tasks are designed to bring particular capabilities to the fore (Marton & Pang, 2006). For example, expanding $a(b+c)$ and factoring $ab+ac$ are different tasks. Different tasks require different actions, at different levels of complexity, and so make available different opportunities for mathematics learning. In our work, we link examples and tasks in our consideration of exemplification, since an example or an example set is always embedded in a task. Indeed, it is this that makes an example 'instructional'.

Exemplification: the what and how

As we noted earlier, the MDI framework informs our teaching of our mathematics-for-teaching course called Transition Maths 1. We focus on the course since it is the major context in which we deliberately "teach" exemplifying/exemplification as a key mathematics teaching practice. TM1 is structured so that approximately two-thirds of the time teachers focus on their

own learning of mathematics. In these mathematics sessions, we *model* exemplification as a mathematics teaching practice. Teachers work on mathematical tasks where the objects of learning are key mathematical concepts, procedures and/or practices, the selection of which has been influenced by the South African school curriculum. In general, these tasks and activities provide opportunities to revisit and deepen their knowledge of the mathematics they teach (Zazkis, 2011), as well as activities that extend their knowledge of school mathematics. From this activity they build generality, focus on mathematical structure and engage with mathematical procedures and their rationales. The tasks and example sets offered to teachers are carefully selected to model and illustrate the forms of variation described earlier. For example, the task in figure 2 deals with informal methods of finding solutions to quadratic equations in factorised form. We ask teachers to find numerical values without using formal procedures. We also ask them to reflect on "what changes" and "what stays the same" and to consider the impact of this variation on how they approached each example. All this work has a mathematical focus.

Give values for x to make the statements true:

a) $x(x-2)=8$

b) $x(x-2)=0$

c) $x(x-2)=x$

d) $(x-1)(x+2)=4$

e) $(x-1)(x+2)=0$

Fig. 2: Mathematics tasks for quadratic equations

While the course presenter frequently points to the variance amidst invariance in the example sets, this is to mediate the mathematics in play and only an implicit form of drawing attention to exemplification with variation. It is in the teaching sessions that we deliberately *mediate exemplification* as a teaching practice.

The remaining one-third of the course, and our particular interest in this paper, focuses on mathematics teaching. These teaching-focused sessions are structured to mediate all the components of the MDI framework. We work from the assumption that better teaching is characterised by more thoughtful selections of examples and tasks, and by mathematical explanations that focus explicitly on the mathematics the teacher intends the learners to learn. With respect to exemplification, we work with teachers on articulating the mathematical goals for a lesson (objects of learning), and then on choosing and using examples. Using principles of variation, we examine sets of examples that either we have constructed, or are available in textbooks or in a prescribed lesson plan, to ascertain what is possible to come into focus. A key strength here is that our focus is on issues that are sufficiently close to teachers' current practice, and to curriculum demands, as to be possible to implement. In the remainder of this paper, we elaborate our attention to exemplification as a key focus in our work and specifically how we mediate this with teachers.

Mediating exemplification in mathematics teacher education

We provide two illustrative cases of how we work with exemplification using variation in professional development. The cases involve algebra and function both of which are given substantial attention in the course. We distinguish between the learner task and the teacher

education task, and hence make explicit what it is about exemplification that we intend teachers to learn. Case 1 illustrates how we introduce teachers to ideas of variation in an example set. Case 2 extends ideas of variation in an example set to focus on connections between representations, leading to generalisation. Our work with teachers extends beyond this to having teachers apply ideas of variation to produce a new example set, as well as reflect and critique such, but space restrictions preclude a third case here. In the presentation, I will include a third case to illustrate more adequately, the progression in our mediation of exemplification.

Case 1 – Introducing teachers to variation in an example set to address learner error

Our first case has its roots in lesson study work with teachers (see Adler & Alshwaikh, in press) who had already completed the course and so had been introduced to variation. Case 1 connects directly into teachers' practices in two ways: (1) it deals with a prevalent and persistent error in the application of the distributive law and the use of brackets; and (2) it deals with meaning of algebraic forms. We have drawn on this very specific problem of practice to construct a learning opportunity in teacher education for the introduction of ideas of variation.

The **learner task** is framed by the following object of learning: "learners must be able to simplify expressions with brackets that appear in different positions" and contains the example set in figure 3. Teachers would typically ask learners to attempt the task individually and may then invite learners to work in pairs to compare their answers. Thereafter the answers might be discussed in a whole-class setting. The teacher would then draw attention to what is the same and different about each of the expressions and so the application of the distributive law.

Learner task

Simplify the following expressions:

a) $x + 3(x + 5)$
b) $(x + 3)x + 5$
c) $x - 3(x + 5)$
d) $(x + 3)(x + 5)$
e) $(x + 3) - (x + 5)$

Fig. 3: Learner example set involving application of the distributive law

Invariance here lies in the selection and order of symbols (numeric and algebraic). Variance is introduced in how the symbols are combined through operations and the position of brackets.

In the **teacher education task,** the five examples are set up as a collection of pairs of expressions, numbered 1-8, and with answers provided for convenience (see figure 4). These pairs are carefully juxtaposed to focus on particular learner errors. In this way teachers are invited to compare the following pairs from the learner task: (a)-(b), (a)-(c), (a)-(d) and (d)-(e). In comparing (a) and (b), we address the common error where learners do not consider a letter to the right of the bracket to be an instance of the distributive law. By contrast, in comparing (d) and (e) we address the overgeneralisation "brackets mean multiply".

Teacher task

Look at each pair of expressions:

1) $x + 3(x + 5) = 4x + 15$
2) $(x + 3)x + 5 = x^2 + 3x + 5$

3) $x + 3(x + 5) = 4x + 15$
4) $x - 3(x + 5) = -2x - 15$

5) $x + 3(x + 5) = 4x + 15$
6) $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$

7) $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$
8) $(x + 3) - (x + 5) = -2$

What varies?

What is invariant?

What mathematics is possible to learn through the variation?

Fig. 4: Teacher example set for application of the distributive law

When the task is presented as pairs of expressions, the contrast is more explicit because of the juxtaposition of items with minor visual differences. We ask teachers three key questions which we ask of all example sets: "what varies?", "what is invariant"? and "what mathematics is possible to learn from this variation?" This teacher education task provides several learning opportunities for teachers. Firstly, teachers see that working with variance amidst invariance provides a teaching strategy for choosing and/or designing example sets to focus on particular learner errors. Secondly, by focusing on pairs of examples, it is easier for teachers to identify variance amidst invariance. This shows how juxtaposition with minor variation has the potential to bring the object of learning more clearly into focus than it might in the original learner task.

Having identified variance amidst invariance, the next step is for teachers to produce a similar pairing and then a full example set related to the distributive law. The extent to which teachers can do this successfully gives us some insight into the sense they have made of this introduction to the principles of variation as well as their grasp of the structural aspects of the mathematics in focus. In figure 5 we illustrate two typical pairings that teachers propose:

$x + 3(x + 5) = 4x + 15$	$x + 3(x + 5) = 4x + 15$
$(x + 3x) + 5 = 4x + 5$	$x(+3x) + 5 = 3x^2 + 5$
Fig. 5a	*Fig. 5b*

Fig. 5: Teachers' extensions of the given example set

In figure 5a, the pairing draws attention to the matter of "do the brackets first". This new addition will provide the only instance in the example set where the bracket can first be simplified. Thereafter it is similar to example (2) in figure 4, where the 5 is then added. There is thus further potential for juxtaposition with another example in the set. In figure 5b the pairing draws attention to the distinction between sign and operation. The bracket in the new expression

shifts the meaning from "add 3" to "positive 3". This inevitably leads to some discussion about whether the new example maintains the focus on the distributive law or whether the focus on sign versus operation diverts attention away from the intended object of learning.

We have learnt that teachers are easily able to identify the surface features of the variation and to produce their own examples of variation. However, in doing so, they may lose focus on the object of learning. Consequently, their suggested changes may simply generate an expression that varies rather than maintaining focus on the intended object of learning. So we recognise this as part of the journey of learning to work with principles of variation.

Case 2: Extending ideas of variation in an example set to attend to connections between representations and to generalise

This case is similar to the first in that it is drawn and adapted from lesson study work (see Adler & Ronda, 2017), and also close to teachers' practice. Here the example set (figure 6) is constructed to lead learners to generalise the impact of parameters on the graph of the quadratic function $y = ax^2 + q$ and hence to make connections between the equation and the graph.

The **learner task** involved a card matching activity where learners were given an example set containing six equations and six graphs on separate cards. They were required to match each graph with an equation. As the lesson progressed, the teacher worked with learners to generalise the impact of a change in the sign of a and the value of q on the graph.

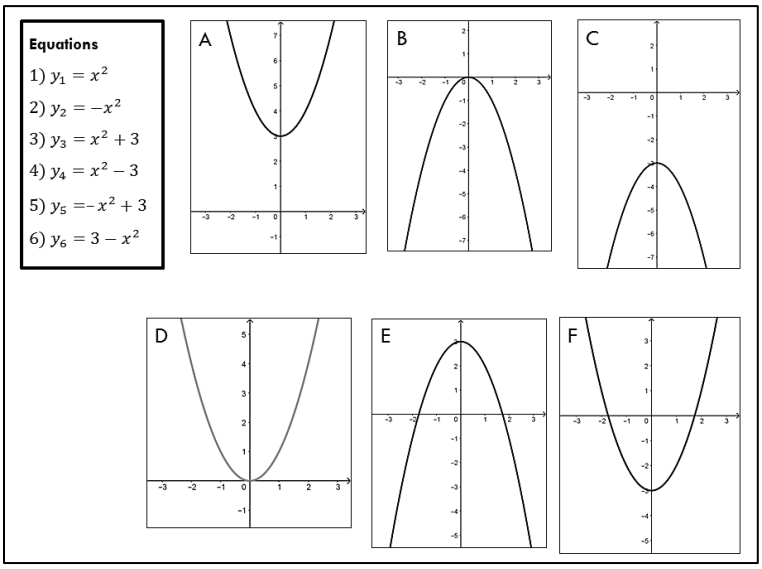


Fig. 6: Example set for learner task to match equations and graphs

In the session, teachers were first required to complete the card matching task. They spotted the "twist" designed into the original example set by the teacher in the lesson study: that equations 5 and 6 are the same and therefore there is no corresponding equation for graph C. Hence the learner task also involved producing an equation for graph C.

The **teacher education task** required teachers to compare the pairs of equations and graphs shown in figure 7, and to identify what varies, what is invariant and what mathematics is possible to learn through the variation.

Teacher task

Look at the following pairs of equations and graphs:

a) equation 1/graph D and equation 3/graph A
b) equation 1/graph D and equation 4/graph F
c) equation 1/graph D and equation 2/graph B

What varies?

What is invariant?

What mathematics is possible to learn through the variation?

Fig. 7: Teacher task for function matching task

As can be seen in the example set for the teacher education task, equation 1/graph D is held constant and the other member of the pair changes. This is intended to draw teachers' attention to how one might structure an investigation of the impact of two parameters across two different representations. Teachers were able to identify that in (a) and (b) the focus was the impact of q on the vertical position of the graph, and in (c) attention moves to the impact of the sign of a on the orientation of the graph. We then invited teachers to choose their own pair of equations/graphs to compare and to identify what mathematics was possible to learn from the pairing. As expected, a common pairing was equation 2/ graph B and equation 5/graph E which drew attention to the effect of q. We were encouraged that many groups also selected pairs that led to the following generalisations: "if a and q have the same sign, then the graph has no roots", and conversely, "if a and q have opposite signs, then the graph has two roots".

The use of juxtaposition in the teacher education task provides a structure for introducing variation in task design when more than one representation and more than one feature are in focus. In other words, the prompts for teachers provide a scaffold to think about which elements to attend to when designing future card matching tasks, and how to vary these features. At the same time, the design of the teacher education task suggests a possible teaching strategy for making the learner task more accessible to learners who may have difficulty in dealing with twelve different cards all at once.

Cases 1 and 2 provide some evidence of teachers' take up of the principles of variation in extending example sets during the course. As noted, we have additional cases that point to the range of issues that need attention when constructing a carefully designed and focused example set, for examplepaying attention to juxtaposition and what be generalised from the combination of pairs of examples. We are reminded here of Kullberg et al's warning that collections of examples are not necessarily cumulative.

Discussion and conclusion

Teaching, whatever its context and/or pedagogy, is purposive work. At the heart of this paper is how we work with teachers to develop their purposive and deliberate choice and use of examples in their teaching. We have argued both from the growing literature base and from our own research with teachers in the project, that focusing on exemplification in conjunction with principles of variation, and in particular attention to variance amidst invariance, is an important and necessary component of secondary mathematics professional development.

Through the cases above we have illustrated three important features of this work. Firstly, separating the learner and teacher education task is critical for being able to focus teachers' attention on what it is they are to be coming to know and be able to do: principles of variation and how to apply these to structure focused example sets. Secondly, the mathematical task for the learners needs to be familiar to teachers so that their attention is on the learning of exemplification. Thirdly, it is important to organise the teacher education tasks so that there is progression from becoming familiar with principles of variation at work in an example set, to being able to work with these when there are two (and possibly more) representational forms. As noted, applying these principles to constructing such sets will be illustrated in the presentation of this paper.

In conclusion, we reflect first on the nature of the tasks we use, and then on some of the challenges we have faced in our work. We have indicated how our tasks for mediating aspects of mathematics teaching remain close to teachers' 'predominantly traditional' practices. Much of the literature on exemplification tends to be related to teaching with rich tasks and inquiry-based pedagogies. We hope we have shown the importance of explicit attention to exemplification in relation to more traditional tasks focusing on key concepts and procedures in school mathematics. We have also hinted at point some challenges as teachers engage with exemplification informed by principles of variation. Teachers easily notice variation at a visual level such as changes in numbers, letters, orders of symbols, etc. While this is an important first step, it is insufficient to engage only with the visual features of an example in its particular representation. For example, example sets of algebraic equations do not immediately reveal the nature of their solutions. Drawing teachers' attention to variance amidst invariance is not trivial if it is to move them beyond superficial use of such in their teaching. We are cognisant that there is much still to explore in working with mathematics teachers on examples and example sets.

Acknowledgement

This work is based on the research supported by the South African Research Chairs Initiative of the Department of Science and Technology and National Research Foundation (Grant No. 71218). Any opinion, finding and conclusion or recommendation expressed in this material is that of the author(s) and the NRF does not accept any liability in this regard.

References

Adler, J. (2001). Teaching mathematics in multilingual classrooms. Dordrecht: Kluwer.

Adler, J., & Alshwaikh, J. (in press). A Case of Lesson Study in South Africa. In R. Huang, A. Takahashi & J. da Ponte (Eds.), Theory and practices of lesson study in mathematics: An international perspective. Dordrecht: Springer.

Adler, J., & Ronda, E. (2015). A framework for describing mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education. doi: 10.1080/10288457.2015.1089677

Adler, J., & Ronda, E. (2017). Mathematical discourse in instruction matters. In J. Adler & A. Sfard (Eds.), Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning (pp. 64-81). Abingdon: Routledge

Adler, J., & Venkat, H. (2014). Teachers' mathematical discourse in instruction: Focus on examples and explanations. In H. Venkat, M. Rollnick, J. Loughran & M. Askew (Eds.), Exploring mathematics and science teachers' knowledge: Windows into teacher thinking (pp. 132-146). Abingdon, Oxon: Routledge.

Alexander, R. (2000). Culture and pedagogy: International comparisons in primary education. Oxford: Blackwell.

Antonini, S., Presmeg, N., Mariotti, M. A., & Zaslavsky, O. (2011). On examples in mathematical thinking and learning. ZDM: Mathematics Education, 43(2), 191-194. doi: doi:10.1007/s11858-011-0334-5

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59, 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Bills, L., & Watson, A. (2008). Editorial introduction, Editorial, Educational Studies in Mathematics, pp. 77-79. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?

direct=true&db=ehh&AN=34227504&site=ehost-live

Dahlberg, R. P., & Housman, D. L. (1997). Facilitating learning events through example generation. Educational Studies in Mathematics, 33, 283-299. doi: doi:10.1023/A:1002999415887

Dienes, Z. (1960). Building up mathematics. London: Hutchinson Educational Ltd.

Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. [Article]. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 183-194. doi: 10.1007/s10649-008-9143-3

Kozulin, A. (2003). Psychological tools and mediated learning. In A. Kozulin, B. Gindis, V. Ageyev & s. Miller (Eds.), Vygotsky's educational theory in cultural context (pp. 15-38). New York: Cambridge University Press.

Kullberg, A., Runesson, K. & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? ZDM Mathematics Education, 49, 559–569. DOI 10.1007/s11858-017-0858-4

Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. The Journal of the Learning Sciences, 15(2), 193–220.

Marton, F., & Tsui, A. B. M. (2004). Classroom discourse and the space of learning. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. Educational Studies in Mathematics, 15(3), 277-289.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (online first). Ritual-enabling opportunities to learn in mathematics classrooms. Educational Studies in Mathematics.

Peled, I., & Balacheff, N. (2011). Beyond realistic considerations: modeling conceptions and controls in task examples with simple word problems. ZDM Mathematics Education, 43, 307-315. doi: DOI 10.1007/s11858-011-0310-0

Pournara, C., Hodgen, J., Adler, J., & Pillay, V. (2015). Can improving teachers' knowledge of mathematics lead to gains in learners' attainment in mathematics? South African Journal of Education, 35(3), 1-10. doi: 10.15700/saje.v35n3a1083

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 149-163.

Runesson, U. (2008). Learning to design for learning. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teacher development (pp. 153-172). Leiden: Sense.

Sun, X. (2011). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. Educational Studies in Mathematics, 76(1), 65-85. doi:10.1007/s10649-010-9263-4

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society : the development of higher psychological processes. Cambridge: Harvard University Press.

Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. ZDM, 43(2), 283-294. doi: 10.1007/s11858-010-0301-6

Watson, A., & Mason, J. (2005). Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. Mathematical Thinking and Learning, 8(2), 91-111.

Zaslavsky, O. (online first). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. The Journal of Mathematical Behavior.

Zazkis, R. (2011). Relearning mathematics: A challenge for prospective elementary school teachers. Charlotte, NC: Information Age Publishing

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 131-148. doi: DOI: 10.1007/s10649-008-9131-7

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 69(2), 165-182. doi: DOI: 10.1007/s10649-008-9140-6

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2009). Teachers' treatment of examples as learning opportunities. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33rd conference of the International Group of the Psychology of mathematics education (Vol. 5, pp. 425-432). Thessaloniki, Greece: PME.



La Resolución de Problemas Matemáticos: Conectando el trabajo de Polya con el desarrollo del razonamiento digital

Manuel Santos Trigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN
Mexico
msantos@cinvestav.mx

Resumen

La resolución de problemas como campo de investigación y práctica se ha desarrollado y continúa avanzando a partir de las contribuciones de los matemáticos, los educadores matemáticos y de los profesores de la disciplina. ¿Cuáles son los resultados más importantes de los programas de investigación sobre la resolución de problemas y cómo han contribuido en la comprensión y construcción de conocimiento matemático de los profesores/estudiantes? ¿Cómo o qué cambios han mostrado la agenda de investigación y práctica en la resolución de problemas en los últimos 30 años? En la discusión de estas preguntas se destaca el trabajo de la comunidad matemática que identifica a la resolución de problemas como una actividad crucial en el quehacer matemático; los desarrollos y contribuciones de la educación matemática que analizan los procesos cognitivos, metacognitivos y afectivos que muestra el individuo al resolver problemas; y la presencia y uso sistemático de tecnologías digitales en las tareas que involucran la formulación y resolución de problemas.

Palabras clave: resolución de problemas, marcos conceptuales, tecnologías digitales y razonamiento.

Introducción

El planteamiento de preguntas o problemas y la búsqueda de respuestas o soluciones son actividades fundamentales que permean el comportamiento de los individuos. Las preguntas son una forma importante de expresar la curiosidad por conocer y entender fenómenos y el mundo que nos rodea. En las matemáticas, la formulación de problemas y la búsqueda de diversas maneras de cómo resolverlos son aspectos esenciales del quehacer y desarrollo de la disciplina. En la educación matemática el estudio sistemático de los procesos que se involucran en la formulación y resolución de problemas aportan información importante sobre cómo organizar actividades de aprendizaje que guíen a los estudiantes en el desarrollo de competencias de resolución de problemas. ¿Cuáles han sido los resultados más importantes de los programas de investigación en el campo de la resolución de problemas? ¿Qué cambios ha mostrado la agenda de investigación y práctica en la resolución de problemas en los últimos 30 años? Tres elementos

importantes han contribuido al desarrollo de la investigación en la resolución de problemas: (a) el trabajo de la comunidad matemática que identifica a la resolución de problemas como una actividad crucial en el quehacer matemático; (b) los desarrollos en la educación matemática, que enfocan la atención en el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes; y (c) la presencia y uso sistemático de las tecnologías digitales en los procesos de formular y resolver problemas.

Se presenta una revisión de algunos trabajos que reconocen a la actividad de resolver problemas como la esencia del quehacer matemático. El método introspectivo fue el medio para que algunos matemáticos comunicaran sus experiencias y analizaran sus modos de formular y resolver problemas. Posteriormente se analiza el programa de Schoenfeld, identificando resultados y cambios importantes en la agenda de investigación. Al final, se destaca cómo el desarrollo de tecnologías digitales (Sistemas de Geometría Dinámica) ha influido en las formas de razonar y trabajar los problemas matemáticos, y también cómo las tecnologías o aplicaciones de comunicación han ampliado las oportunidades para que los estudiantes compartan sus ideas y extiendan sus discusiones más allá de los ambientes formales de enseñanza.

Los matemáticos y la resolución de problemas

¿Cómo se desarrolla el conocimiento matemático? ¿Qué es lo esencial en el quehacer de la disciplina? En la resolución de problemas matemáticos como área de estudio, interesa analizar cómo se construye el conocimiento disciplinario, cómo se formulan los problemas y las formas de caracterizar y explicar el proceso de construcción de conceptos y la resolución de los problemas. Se sostiene que el análisis y la explicación del proceso que se involucra en la resolución de problemas proporciona información importante sobre el diseño de ambientes de aprendizaje que estructuren y promuevan actividades para la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes. Así, en la comunidad matemática se han generado desarrollos relevantes relacionados con la resolución de problemas. Cantor (1845-1918) reconoció la importancia de formular preguntas en el estudio de las matemáticas y enfatiza esta posición en el título de su tesis doctoral “en matemáticas el arte de plantear preguntas es de más valor que resolver problemas”. Pólya (1945) analiza su propia actividad y quehacer matemático vía el método introspectivo, que lo conduce a plantear un modelo que identifica las fases fundamentales que aparecen durante el proceso de resolver problemas.

La comprensión del problema se relaciona con la importancia de analizar el enunciado del problema como punto de partida para buscar formas o métodos de solución. En esta fase, el individuo o estudiante problematiza el enunciado con la intención de identificar los conceptos y datos relevantes, y se analizan pertinencia, consistencia y sentido del enunciado (¿qué se pide?, ¿qué datos se tienen, son suficientes?, ¿qué conceptos son importantes?, etcétera).

El diseño de un plan de solución se refiere a encontrar relaciones entre los datos del enunciado y lo que se pide encontrar, con la idea de formular un plan de solución. ¿Conoces algún problema relacionado?, ¿puedes replantear el enunciado?, ¿identificas alguna estrategia que puedas aplicar para resolver el problema?, ¿estás usando todos los datos o condiciones del problema?, ¿se puede representar el problema dinámicamente?

La siguiente fase involucra *llevar a cabo el plan* y verificar que los pasos y operaciones realizadas sean correctas. Aquí es significativo que el individuo revise la consistencia de las unidades de los datos en las soluciones, y las diferentes representaciones que sean relevantes en el proceso de solución.

Finalmente, la fase *visión retrospectiva* implica considerar otros caminos para resolver el problema y analizar si los métodos de solución pueden aplicarse en la solución de otros problemas. Además, aquí resulta valioso transformar el enunciado inicial del problema en casos más generales y proponer nuevos problemas.

Pólya (1945) también aborda la importancia de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas. Las heurísticas son patrones de un razonamiento productivo que resultan trascendentes para lograr avances en la comprensión y solución de problemas no rutinarios. Algunos ejemplos de estrategias heurísticas que Pólya ilustra en la resolución de problemas son el uso de tablas o diagramas, resolver problemas más simples, establecer sub-metas, relajar condiciones iniciales, asumir el problema como resuelto y buscar relaciones, etcétera.

Hadamard (1945) contribuye también al entendimiento del proceso de resolver problemas y presenta un ensayo sobre cómo los matemáticos inventan o generan nuevas ideas. Su método consiste en analizar respuestas que recibe de matemáticos y científicos distinguidos de su época (Pólya, Einstein, Levi-Strauss, etc.) a un cuestionario con preguntas sobre sus experiencias al trabajar o desarrollar conocimiento en sus áreas o disciplinas. También recoge testimonios de matemáticos, revisa el trabajo de psicólogos, filósofos y científicos, e incorpora la introspección de su propio quehacer como elementos para explicar la invención de resultados matemáticos. En términos generales, el modelo que reporta Hadamard distingue un patrón que identifica tres elementos alrededor del proceso de invención: el estudio consciente del tema o problema (revisión), seguido por un proceso de madurez inconsciente (incubación), lo que conduce a un momento de inspiración o iluminación (*insight*) (la invención, revelación de la solución).

Tanto el trabajo de Pólya como el de Hadamard intentan caracterizar el proceso de resolver problemas o de generar conocimiento matemático. Pólya describe el proceso de trabajar los problemas y señala preguntas importantes asociadas con cada fase involucrada en la resolución de problemas. Por su parte, Hadamard centra más la atención en explicar cómo se genera una idea novedosa o resultado importante en el quehacer disciplinario. Este modelo comparte los desarrollos con la psicología de la Gestalt[1] que identifica cuatro fases en la resolución de problemas: a) el individuo se prepara para resolver un problema (revisa información, representa el problema, busca problemas relacionados); b) se involucra en el proceso de incubación del problema, que incluye pruebas de ensayo y error para resolverlo; c) se ilumina y el *insight* ocurre y resuelve el problema y, d) verifica la solución del problema.

La comunidad matemática reconoce que la resolución de problemas es una actividad crucial en el desarrollo del quehacer de la disciplina y varios autores han publicado libros que incluyen el análisis de problemas situados en diversas áreas (Dörrie, 1965; Hilbert, 1902; Steinhaus, 1964). Halmos (1980) expresa que los axiomas, teoremas, pruebas, conceptos, definiciones, fórmulas y métodos son ingredientes esenciales de las matemáticas, pero la principal razón del quehacer matemático es resolver problemas.

> Yo creo que los problemas son el corazón de las matemáticas, y espero que, como maestros, en el salón de clase, seminarios, y en los libros y artículos que escribimos, los enfaticemos más y más, y que entrenemos a nuestros estudiantes a ser mejores formuladores y resolutores de problemas que nosotros. (Halmos, 1980, p. 524)

[1] Ver: Wertheimer, https://es.wikipedia.org/wiki/Max_Wertheimer

> Para Halmos, el mejor camino para aprender matemáticas es resolver problemas y describe cómo él usa el método Moore2 en sus cursos universitarios, "método para crear una actitud para resolver problemas en los estudiantes, es una mezcla de método socrático y el espíritu competitivo de los juegos olímpicos" (Halmos, Moise y Piranian, 1975, p. 468). [Traducción propia]
> Durante su curso de álgebra lineal, en la primera clase les dio una lista de 50 teoremas, sin definiciones, sin explicaciones, sin pruebas. La tarea de los estudiantes fue entenderlos y explicarlos, mostrar ejemplos y contraejemplos, y finalmente demostrarlos. El método Moore ha sido usado en cursos universitarios con estudiantes que muestran interés y motivación en el estudio de las matemáticas (Santos-Trigo, 2014a).

La educación matemática, los educadores y la resolución de problemas

Un trabajo notable que influye en el desarrollo de la resolución de problemas como dominio de investigación es el estudio sobre las habilidades matemáticas de los niños con capacidades sobresalientes o tendencias hacia el estudio de la disciplina (Krutetskii, 1976). En particular, el estudio de Krutestkii no solo caracteriza un conjunto de habilidades matemáticas en los niños dotados o sobresalientes, sino que también contribuye al desarrollo metodológico de estudios de naturaleza cualitativa en la resolución de problemas.

> Analizamos el proceso natural de pensar mientras los problemas experimentales eran resueltos: por un registro de solución, la naturaleza de las operaciones, los diagramas y dibujos hechos por los participantes; por el registro del proceso verbal de reflexión durante el camino de solución; por el material desde la discusión acerca de la solución después de su obtención. (Krutetskii, 1976, p. 94)

Krutetskii analiza las habilidades matemáticas de niños de quinto y sexto grado de primaria usando problemas de aritmética ("para numerar el número de páginas de una enciclopedia se necesitan 6869 dígitos, ¿cuántas páginas contiene?"), geometría y razonamiento lógico. El método de aplicar los problemas también fue novedoso en esa época; al niño se le presentaba un problema difícil, si no lo resolvía se le proporcionaba otro fácil y después otra vez el difícil, etcétera. El propósito era determinar qué tan rápido el niño podía encontrar una generalidad y así observar la habilidad matemática como un proceso, y no solo como un resultado. Entre las habilidades matemáticas que mostraron los niños con talento matemático se destacan: la habilidad para hacer y usar generalizaciones; una habilidad para ofrecer y usar representaciones múltiples del mismo objeto matemático; una tendencia para pensar diferentes maneras de resolver un problema; una habilidad para usar analogías y establecer conexiones; una tendencia para abreviar acercamientos y buscar atajos en la resolución de problemas, etcétera.

Newell y Simon (1972) desarrollan, desde el campo de la inteligencia artificial, un programa "General Problem Solver" para resolver problemas de criptoaritmética, jugar ajedrez y probar teoremas. La estructura del algoritmo del programa para resolver los problemas se diseñó a partir de analizar y simular cómo los expertos en esos dominios resolvían los problemas. Así, el estudio del proceso cognitivo del individuo llegó a ser un área de interés y de investigación. En esta perspectiva, el dominio de la inteligencia artificial ofreció o aportó a la educación matemática herramientas como el análisis de protocolos de expertos o individuos resolviendo problemas para categorizar los patrones de comportamiento que mostraban durante el proceso de resolución.

[2] Ver: https://en.wikipedia.org/wiki/Moore_method

El trabajo de Schoenfeld (1985) retoma métodos como el análisis de protocolos, y lanza un programa de investigación que lo lleva a implementar las heurísticas mencionadas por Pólya (1945) en un curso de resolución de problemas. Santos (1992) destaca los resultados importantes del trabajo de Schoenfeld, quien enfoca la atención sobre las siguientes preguntas: ¿qué hacen los individuos que resuelven problemas de manera eficiente y qué es lo que les permite resolver problemas difíciles? ¿Qué dificultades muestran y cómo se comportan aquellos que no son efectivos en la resolución de problemas? ¿Qué pueden hacer los profesores para ayudar a los estudiantes a ser exitosos en la resolución de problemas?

Para responder estas preguntas, Schoenfeld (1985) presenta un marco conceptual que explica el éxito o fracaso de un individuo o estudiante al resolver problemas en términos de cuatro dimensiones (Santos-Trigo, 2014a):

1. *El conocimiento o recursos básicos*. Es decir, el conocimiento de hechos y conceptos básicos que el estudiante tiene potencialmente a su disposición resulta esencial durante el proceso de solución de un problema.

2. *Las heurísticas* o reglas generales que ayudan al estudiante a avanzar o progresar en el proceso de solución cuando no encuentra un camino directo para resolver el problema.

3. *Las estrategias metacognitivas* o el monitoreo o autorregulación del proceso de solución. Los que resuelven problemas de manera exitosa planean y monitorean la forma y el proceso de solución. Si observan que van progresando, entonces continúan; si encuentran dificultades, revalúan lo que están haciendo y consideran alternativas.

4. *Las creencias*. Lo que los estudiantes creen acerca de ellos mismos, de la naturaleza del quehacer matemático que se deriva de sus experiencias de aprendizaje, moldea y permea lo que hacen durante sus intentos de solución.

Por ejemplo, aquellos estudiantes que creen que los problemas matemáticos se resuelven en menos de cinco minutos abandonarán sus intentos después de agotar ese tiempo, aun cuando pudieran haber resuelto el problema si hubiesen perseverado en resolverlo. De manera similar, aquellos estudiantes que creen que las pruebas no tienen nada que ver con el desarrollo de alguna relación matemática, muchas veces plantean conjeturas o resultados que se contradicen o no toman en cuenta lo que antes habían probado.

Otro resultado importante del programa de Schoenfeld se relaciona con el uso de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014b). Schoenfeld (2010b) reportó que los métodos heurísticos identificados por Pólya son complejos y los estudiantes experimentan serias dificultades para aprenderlos y aplicarlos en la resolución de problemas. Schoenfeld señala que cada heurística no se reduce a una sola estrategia que se aplica en la resolución de un problema, sino que representa una colección o familia de estrategias. Así, para que un estudiante identifique lo que una heurística involucra y cómo usarla, debe pensar y experimentar lo que esa estrategia significa en un dominio particular (geometría/triángulos, álgebra/raíces, cálculo/sucesiones, etc.) y ensayar su aplicación o uso en una variedad de casos.

> …Por ejemplo, en el uso de la estrategia "buscar el sentido o pertinencia del problema y sentido del problema a través de ejemplos particulares", uno debe (a) pensar en el uso de la estrategia, (b) saber qué versión de la estrategia usar, (c) generar y examinar los ejemplos apropiados, (d) analizar los resultados obtenidos, y (d) usarlos para resolver el problema. (Schoenfeld, 2010b, p. 106)

Schoenfeld (2015) afirma que el programa que desarrolló sobre la resolución de problemas le proporcionó bases para ayudar a los estudiantes a ser más efectivos al resolver problemas. Su agenda de investigación posterior se enfocó en cómo ayudar a los maestros en la construcción e implementación de ambientes de aprendizaje que facilitaran a los estudiantes incrementar una comprensión profunda de la disciplina. Su agenda se centró en el área relacionada con la toma de decisiones e incluyó las siguientes interrogantes:

> ¿Puedo desarrollar una comprensión y sustento teórico de la enseñanza que permita entender cómo y por qué los maestros toman las decisiones que toman cuando enseñan? ¿Pueden los maestros usar esos desarrollos teóricos y ayudarles a ser más efectivos? Además, ¿puede la descripción teórica de la enseñanza ser usada para caracterizar el proceso de tomar decisiones en otras áreas? (Schoenfeld, 2015, p. 230)

También, Schoenfeld (2010a) expresa que una actividad con una meta orientada, como la resolución de problemas, la enseñanza o una cirugía de cerebro, puede ser explicada y modelada a través de una arquitectura teórica en términos de: los *recursos* (conocimiento específico), las *metas*; *orientaciones* (una abstracción de creencias, incluyendo valores, preferencias, etc.) y una *toma de decisiones*. La estructura básica de esta teoría es recursiva: Los individuos se orientan hacia situaciones y deciden (a partir de creencias y recursos disponibles) cómo lograr sus metas. Si la situación es familiar, implementan rutinas familiares; si son problemáticas, reconsideran sus caminos.

En este contexto, el conocimiento acumulado en el campo de la resolución de problemas ha aportado información relevante sobre lo que significa e involucra pensar matemáticamente, y también ha identificado diversas maneras para que los estudiantes construyan conocimiento matemático vía la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014b). ¿Qué tipo de innovaciones debe incorporarse en los ambientes de aprendizaje para que los estudiantes tomen en cuenta los recursos y desarrollos tecnológicos para generar competencias en la resolución de problemas? En la discusión de esta pregunta resulta importante caracterizar las formas de representar y explorar los problemas con el uso de tecnologías digitales. En particular, el uso de un sistema de geometría dinámica (SGD) en la construcción de modelos dinámicos de los problemas ofrece al estudiante explorar el comportamiento de algunos atributos de los objetos matemáticos que resultan al mover algunos elementos dentro del mismo modelo. Se argumenta que el uso de la tecnología digital amplía las formas de representar, explorar, resolver los problemas y por lo tanto demanda una revisión de los marcos conceptuales que se generaron a partir de analizar procesos de resolución que esencialmente involucran el uso de lápiz y papel (Santos-Trigo, 2014b; Liljedahl et al., 2016).

La resolución de problemas y el uso de tecnología digital

¿Qué ofrece la tecnología digital al estudiante, en términos de formas de razonamiento en la resolución de problemas? ¿Qué información del proceso de resolución resulta importante en la discusión de los marcos conceptuales que explican cómo los estudiantes usan la tecnología en la resolución de problemas? En la discusión de estas preguntas (Santos-Trigo, 2019) se presenta un ejemplo que destaca el uso de la herramienta en la aplicación de algunas estrategias heurísticas y la búsqueda de propiedades y relaciones que resultan esenciales en el proceso de resolución del problema. El punto de partida es buscar el significado geométrico o propiedades de los conceptos involucrados en el enunciado del problema, y construir un modelo dinámico que permita explorar y encontrar relaciones. El uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como

GeoGebra genera una oportunidad para que el estudiante se involucre en un proceso de formulación de conjeturas y formas de exploración y validación de resultados. Una estrategia importante de resolución de problemas es la heurística de relajar las condiciones de un problema para plantear problemas más simples que ayuden a resolverlo. Esta estrategia se relaciona con el proceso de formular problemas por parte del individuo. ¿Cómo se puede implementar esta estrategia con el uso de GeoGebra? Se muestra un ejemplo de la implementación de esta heurística con ayuda de un SGD para resolver un problema que involucra el trazo de una circunferencia tangente a dos rectas (Figura 1):

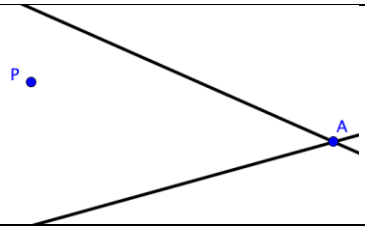
	Problema 3. Dadas dos rectas y un punto P que no pertenece a ellas, trazar una circunferencia que pase por el punto P y sea tangente a las rectas.

Figura 1. Problema que involucra el trazo de una circunferencia tangente a dos rectas.

Aplicando la heurística de relajar las condiciones del problema inicial para formular un problema más simple, se podría plantear el siguiente problema:

Problema 3.1. Dada una recta y un punto P, trazar una circunferencia que sea tangente a la recta y que pase por el punto P.

Así, el Problema 3 se puede descomponer en dos problemas análogos al considerar solo una de las rectas. Una solución dinámica al Problema 3.1 se muestra en la (figura 2).

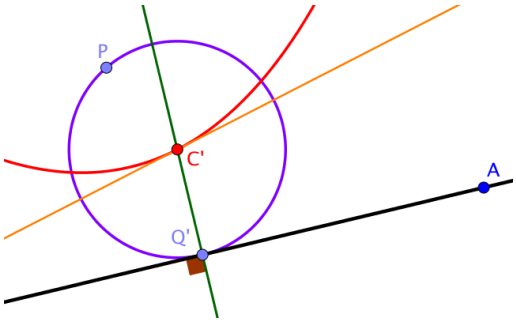
Solución	***Análisis***
Problema 3.1. Dada una recta y un punto P, trazar una circunferencia que sea tangente a la recta y que pase por el punto P.  *Descripción.* Q' es un punto móvil sobre la recta. Se traza la recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto Q' y la mediatriz del segmento PQ'. Se identifica la intersección C' de la mediatriz y la recta perpendicular. Se traza el lugar geométrico del punto C' al mover el punto Q'.	*Recursos.* El centro de una circunferencia tangente a una recta se ubica en la perpendicular a la recta que pasa por el punto de tangencia. Cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos. Lugar geométrico. *Heurísticas.* Relajar las condiciones del problema y formular un problema más simple. Analizar patrones. *Estrategias dinámicas.* Se traza la familia de circunferencias que pasan por el punto P a partir de un punto de tangencia Q' móvil. *Resultado importante.* El lugar geométrico descrito por el centro C' de la familia de circunferencias tangentes a una recta dada que pasan por un punto P dado es una parábola. El foco y directriz de la parábola son el punto P y la recta dada.

Figura 2. Solución dinámica del Problema 3.1

¿Por qué el centro de las circunferencias tangentes a una recta que pasan por un punto describe una parábola? Así, se puede argumentar que el punto C' siempre está a la misma distancia del punto P y de la recta dada (definición de parábola); por ser el punto de intersección de la mediatriz de PQ' y la perpendicular a la recta por Q'. Por lo tanto, la recta y el punto serían la directriz y el foco de la parábola, respectivamente.

Para este enfoque dinámico, la mediatriz y la parábola son algunos recursos fundamentales. Un aspecto importante en este acercamiento es el movimiento de elementos dentro de la configuración; el movimiento del punto Q' sobre la recta, permite generar una familia de circunferencias tangentes a dicha recta y que pasan por el punto P. Posteriormente, se pueden analizar patrones en términos del lugar geométrico descrito por puntos móviles; el lugar geométrico descrito por el centro C' en función del movimiento del punto Q' es una parábola. Así, la visualización de lugares geométricos se convierte en una estrategia que permite resolver problemas. Luego, otra fase del proceso de solución de problemas con ayuda del SGD consiste en analizar los lugares geométricos; se argumentó que el lugar geométrico descrito por el punto C' es una parábola.

Finalmente, el Problema 3 (uno de los problemas de Apolonio) se puede resolver mediante la transferencia de los resultados del Problema 3.1. Si se omite o se considera solo una de las rectas, sabemos que el centro de la familia de circunferencias tangentes a una recta y que pasan por un punto está sobre una parábola que tiene como foco y directriz el punto y la recta dados. Así, para resolver el Problema 3 basta con aplicar el resultado del Problema 3.1 para cada recta. La solución quedará en términos del punto de intersección de dos parábolas (figura 3). La parábola c está determinada por los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a la recta a y la parábola f está determinada por los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a la recta b. Así, los puntos de intersección de las parábolas c y f determinan los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a ambas rectas.

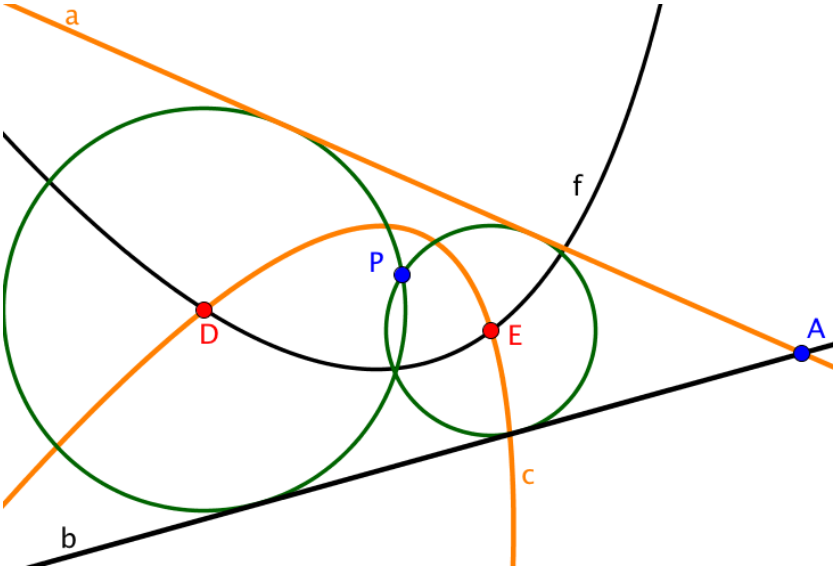


Figura 3. Solución al problema de Apolonio mediante la transferencia de los resultados del Problema 3.1

Una variante de este problema es cuando el punto P se encuentra en una de las rectas, y otra vez el mismo método que involucra el trazo de la parábola ayuda a resolver el problema (figura 4).

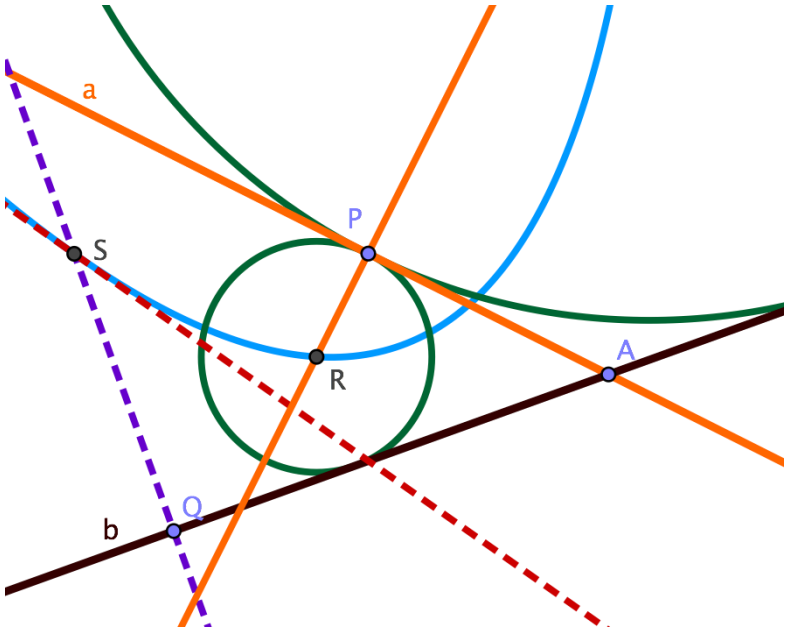


Figura 4. Trazo de circunferencias tangentes a dos rectas en el punto P que pertenece a una recta.

Comentario: Las estrategias heurísticas son esenciales en todas las fases de resolución de problemas y con el uso de tecnología digital algunas de ellas se potencian; en el proceso de implementarlas también se generan nuevas heurísticas. La aplicación de la heurística que implica *reducir o relajar* las condiciones del problema inicial proporciona al estudiante una oportunidad para involucrarse en un proceso de formulación de problemas que es una actividad esencial en el quehacer de la disciplina. ¿Cómo trazo una circunferencia tangente a una recta? Es una pregunta que se aborda desde la educación básica y se asocia con el trazo de la perpendicular a la recta que pasa por el punto de tangencia y que luego se conecta con el trazo de la mediatriz. El movimiento de puntos y objetos es otra estrategia fundamental que se robustece con el trazo de lugares geométricos. Así, el lugar geométrico de la intersección de la recta perpendicular y la mediatriz representa una parábola y se convierte en un objeto importante para resolver el problema. Es decir, la estrategia de enfocar la atención hacia un caso particular de trazar la circunferencia tangente a una recta y que pase por el punto dado P no solo proporcionó recursos e información significativa para resolver el problema, sino que también emergieron nuevos conceptos o relaciones que extienden el enunciado inicial del problema.

Discusión y reflexiones

Tres temas relacionados se identifican en la estructura y desarrollo de la resolución de problemas como un dominio de investigación y un modelo de enseñanza:

1. La contribución y el reconocimiento de la comunidad matemática hacia la actividad de resolver problemas como un elemento esencial del quehacer de la disciplina.

2. El trabajo desde la educación matemática como disciplina que provee bases metodológicas para estudiar sistemáticamente el comportamiento de los estudiantes o individuos

durante la resolución de problemas. Así, los aportes y reflexiones de los matemáticos influyen en la construcción y desarrollo de la agenda de investigación en el área de la resolución de problemas. Schoenfeld (1992) menciona que una caracterización robusta de lo que significa e involucra el pensar matemáticamente resulta fundamental en los temas de estudio de la resolución de problemas. En este contexto, el quehacer de la disciplina que muestran los expertos contribuye a la discusión sobre lo que caracteriza el pensamiento matemático.

3. Un tema transversal en la agenda académica del campo de la resolución de problemas es el uso de distintas herramientas en las distintas fases que se involucran en el proceso de búsqueda de soluciones de los problemas. Camacho y Santos-Trigo (2015) presentan aportes importantes y resultados en un programa de investigación relacionado con la formación de profesores.

Recientemente, los desarrollos y disponibilidad de tecnologías digitales (de usos múltiples como Internet o aplicaciones de comunicación y de acción matemática como GeoGebra) están influyendo y ampliando no solo las formas de representar y explorar los problemas o contenidos matemáticos, sino también las dinámicas que se generan en los ambientes de enseñanza (Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Aguilar-Magallón, 2016).

En la incorporación o uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales en la representación y exploración de los problemas y en los escenarios de enseñanza, resulta importante que los mismos profesores inicialmente se involucren en actividades que los lleven a analizar los recursos y estrategias que caractericen las formas de razonamiento que emergen con el uso de las tecnologías (Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín, 2016). Es decir, un ambiente de enseñanza basado en la resolución de problemas debe incorporar ya como un elemento esencial el uso de las tecnologías digitales en las formas de representar y de explorar las tareas o problemas matemáticos. Además, los desarrollos en línea o plataformas *ad hoc*[3] ofrecen recursos que los estudiantes pueden consultar y discutir en el estudio de los conceptos como parte de una comunidad de aprendizaje que promueva el intercambio de ideas y la formulación de nuevos problemas.

En el ejemplo aquí presentado, se involucra y destaca la construcción de modelos dinámicos de los problemas; se observa que el movimiento de algunos elementos (movimiento ordenado) dentro del modelo resulta central en la formulación de conjeturas y de nuevos problemas (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2016). Además, la misma exploración dinámica del modelo genera información relacionada con las propiedades de algunos objetos o de sus atributos. En términos de los marcos conceptuales que explican el proceso de resolución de problemas (Schoenfeld, 1985; 1992) existe evidencia del surgimiento de una dimensión importante en el proceso de resolución de los problemas, que se relaciona con la importancia de que el individuo o estudiante se involucre en actividades o en un proceso de apropiación de diversas herramientas (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016). Además, con el uso de la tecnología digital se amplía el conjunto de estrategias heurísticas disponibles durante todas las fases de resolución de los problemas.

El movimiento ordenado, la cuantificación y medición de atributos (medida de ángulos, longitud de segmentos, perímetro, área, etc.), la generación y visualización de lugares geométricos y el uso de deslizadores son algunas heurísticas propias de un sistema de geometría dinámica. Estas estrategias son vitales en el análisis y la caracterización de las formas de

[3] Por ejemplo, ver: https://www.khanacademy.org/coach/dashboard

razonamiento que muestra el individuo durante el proceso de resolución de las tareas o problemas.

Finalmente, el uso de tecnologías de usos múltiples como Internet o aplicaciones de comunicación (Skype, FaceTime, Padlet) permiten a los estudiantes y profesores extender las discusiones matemáticas más allá del salón de clase. Es decir, los acercamientos o ideas individuales se pueden compartir en un muro digital (Padlet) y el grupo o la comunidad de aprendizaje le puede dar seguimiento a esas contribuciones individuales para compartir otras ideas, proporcionar retroalimentación o proponer extensiones del problema inicial. En esta perspectiva, el estudiante o profesor se involucra en una discusión continua como parte de un grupo (incluyendo expertos o pares), que puede ser sincronizada (directa, vía alguna aplicación) o a través del uso de correo electrónico, con el objetivo de defender, contrastar y refinar sus ideas y acercamientos a los problemas. Además, el uso de tabletas o teléfonos móviles facilita la interacción entre estudiantes y promueve el intercambio de ideas y la búsqueda de distintos acercamientos o métodos de resolución de los problemas.

Agradecimientos:

Se agradece el apoyo parcial recibido del proyecto SEP-Cinvestav12 durante el desarrollo del presente trabajo.

Referencias

Camacho, M. y Santos-Trigo, M. (2015). Aportes sobre la resolución de problemas, tecnología digital y formación de profesores de matemáticas. En N. Planas (Coord.), *Avances y Realidades de la Educación Matemática* (pp. 113-131). Barcelona, España: GRAO.

Dörrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York, USA: Dover.

Hadamard, J. (1945). *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York, USA: Dover Publications.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519-524.

Halmos, P. R., Moise, E. E. y Piranian, G. (1975). The problem of learning to teach. *The American Mathematical Monthly*, *82*(5), 466-577.

Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *8*, 437-479.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children* (J. Teller, Trad.). Chicago, USA: The University of Chicago Press.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. y Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. ICME-13 Topical Surveys. Doi: 10.1007/978-3-319-40730-2_1

Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. *A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical problem solving and the use of digital technologies. En P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving*, ICME-13 Monographs, https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_4. Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M. (2014a). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos* (2da. ed.). México: Trillas - Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.

Santos-Trigo, M. (2014b). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501). New York, USA: Springer.

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2016). Digital technologies and mathematical problem solving: Redesigning resources, materials, and extending learning environments. En K. Newton (Ed.), *Problem-Solving: Strategies, Challenges and Outcomes* (pp. 31-50). New York, USA: Nova Science Publishers.

Santos-Trigo, M. y Moreno-Armella, L. (2016). The use of digital technologies to frame and foster learners' problem-solving experiences. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives* (pp. 189-207). Cham, Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. y Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 827-842.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I. y Aguilar-Magallón, D. (2016). Digital technologies and a modelling approach to learn mathematics and develop problem solving competencies. En L. Uden, D. Liberona, y B. Feldmann (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud - The Changing Face of Education* (pp. 193-206). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-42147-6_17

Santos, L. M. (1992). Resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática*, *4*(2), 16-24.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida, USA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York, USA: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2010a). *How We think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and Its Educational Applications*. New York, USA: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (2010b). Reflections of an accidental theorist. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 104-116.

Schoenfeld, A. H. (2015). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-243). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-12688-3_16

Semanišinová, I., Harminc, M. y Jesenská, M. (2017). Competition aims to develop flexibility in the classroom. En A. Soifer (Ed.), *Competitions for Young Mathematicians, ICME-13 Monographs* (pp. 171-185). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-56585-9_7

Steinhaus, H. (1964). *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*. New York, USA: Basic Books.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La covariación instrumentada: un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica

Ferdinando **Arzarello**
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
Italia
ferdinando.arzarello@unito.it

Resumen

El artículo describe la *covariación* como un aspecto importante y teóricamente ubicuo del pensamiento matemático, pero no tanto en términos de enseñanza. Se enfoca en la forma multimodal en la cual los procesos de aprendizaje relativo ocurren y se desarrollan en la clase de matemáticas y como recursos semióticos son cruciales para este desarrollo. El artículo se centra en la génesis dinámica de una variedad de signos, cuando se utilizan artefactos para instruir los procesos de aprendizaje. Más precisamente, en la segunda parte se introduce la noción de *covariación instrumentada*. La instrumentación coordinada con múltiples artefactos puede ayudar al aprendizaje a través de una cuidadosa planificación didáctica. Esto se ilustra con ejemplos que muestran la sinergia positiva producida por su potencial semiótico utilizado en el aula en diferentes niveles de grado.

Palabras clave: covariación, instrumentación, haz semiótico, problema abierto, sinergia de artefactos.

Introducción

Una excelente profesora de matemáticas del Liceo Classico italiano (secundaria superior: grados 9-12), que participó en un experimento de enseñanza sobre el uso de las matemáticas para modelar fenómenos físicos me dijo un día: "Esta mañana hicimos una actividad sobre la ley de Hook [...] En mi opinión, hubo un malentendido muy importante entre el sentido del estiramiento y el de la longitud [allungamento - lunghezza en italiano] del resorte. Esto les impidió encontrar las respuestas correctas. ¡Y mis alumnos están en Liceo Classico! ". Los malentendidos similares son comunes y difusos y se refieren a un gran fenómeno, que tiene profundas raíces cognitivas y epistemológicas, y destaca un importante problema didáctico. Su conciencia tiene consecuencias relevantes para el diseño de la enseñanza.

El propósito de esta contribución es enmarcar teóricamente estos problemas y discutir estrategias de enseñanza apropiadas para superarlos. Compartiré algunas ideas sobre un campo de investigación con fundamento semiótico y epistemológico, que yo y otros hemos desarrollado en los últimos años.

Estos problemas me llevan a centrarme en una raíz común a los diferentes fenómenos semióticos descritos en la literatura, que pueden servir como base para la concepción de tareas matemáticas en la escuela: la noción de covariación, ampliamente estudiada (para un excelente resumen, vea Thompson y Carlson, 2017). Basándome en esta noción y utilizando un punto de vista semiótico, he desarrollado una herramienta de análisis más compleja, que tiene una contraparte didáctica, a la que llamo covariación instrumentada (CI).

En esta contribución, definiré la CI como una posible metodología didáctica que puede desencadenar y apoyar un enfoque covariante de las matemáticas.

Covariación en matemática.

Muchos estudios muestran la relevancia del razonamiento covariante en matemáticas desde un punto de vista epistemológico: de hecho, la covarianza es crucial para comprender la noción de función, una herramienta indispensable para modelar el mundo (físico, económico, etc.) y para ingresar a las matemáticas modernas: todo el Análisis depende de esta noción. Correctamente, muchos currículos matemáticos lo ponen como el principal objetivo de enseñanza.

> Enfatizamos que el razonamiento covariante continuo, o el razonamiento acerca de los valores de dos o más cantidades que varían simultáneamente, desempeñó un papel crucial en la invención de los matemáticos de los conceptos que llevaron a la definición moderna de la función, el uso de ecuaciones para representar una variación restringida a representaciones explícitas de relaciones deterministas entre cantidades. (Thompson & M.P. Carlson, 2017, pp. 423, traducido por el autor)

El razonamiento covariante apareció dramáticamente en las matemáticas con el nacimiento y el desarrollo del álgebra moderna gracias a los trabajos de Viète, Descartes y otros. Los métodos de análisis y síntesis en álgebra, tomados de la geometría de los Griegos, introducen una forma revolucionaria de abordar los problemas de las matemáticas, que Lagrange a principios del siglo XIX podría resumir de la siguiente manera:

> El álgebra, tomado en el sentido más amplio, es el arte de determinar las incógnitas por funciones de las cantidades conocidas, o lo que consideramos conocido. (Lagrange, 1806, pp. vii; traducido por el autor).

La ruptura del nuevo paradigma con la idea de un álgebra elemental como aritmética generalizada, de acuerdo con una imagen a menudo presente en los libros de texto (pero no solo), fue discutida en un artículo muy importante de Chevallard (1989), donde destaca el papel crucial que desempeñan las variables y los parámetros en el nuevo álgebra, tanto desde un punto de vista epistemológico como didáctico. Por ejemplo, la solución "aritmética" (verbal) de un problema básico como el siguiente *"Divida un número dado en dos partes, de manera que la primera exceda la segunda en un exceso dado",* se puede traducir a términos algebraicos solo si uno hace un razonamiento covariante, utilizando parámetros para representar (y manipular) los números (supuestos) dados.

De hecho, el nuevo método de razonamiento covariante con cantidades físicas fue una de las raíces que hizo posible el nacimiento de la ciencia moderna con los experimentos sensibles y las demostraciones matemáticas (le sensate esperienze e le dimostrazioni matematiche) de G. Galilei. Este tipo de razonamiento se desarrolló como una búsqueda de relaciones entre variables concretas, dinámicas y continuas, para expresar la idea de cambio y los fenómenos del movimiento.

Esta es una historia muy antigua: los antiguos eruditos carecían de una descripción matemática del movimiento; vieron la distancia y el tiempo como cantidades medibles, pero no como velocidad. De hecho, la noción de cambio, según la filosofía de Aristóteles, era solo de naturaleza cualitativa y tenía un significado muy amplio (Generación y Corrupción, Alteración, Aumento y Disminución, Movimiento Local). Las ideas cambiaron desde la Edad Media y fue en el siglo XIV cuando las nuevas ideas revolucionarias maduraron en Oxford al Merton College, y en París con Nicole Oresme (1325-1380). Los filósofos de la Edad Media se dieron cuenta de que las cualidades también tienen una intensidad (Arzarello, 2008). Las leyes matemáticas de la nueva ciencia se pueden expresar porque comenzamos a razonar de manera covariante. El álgebra, sin embargo, ya no es suficiente y es necesario un nuevo cálculo. Desafortunadamente, esta forma fundamental de razonamiento se ha descuidado en las escuelas: como el álgebra se enseña como una aritmética generalizada, las funciones también se enseñan a menudo de acuerdo con la definición estática de Bourbaki, que congela su naturaleza dinámica en el lenguaje estático de la teoría de conjuntos.

Esta declaración sobre la conveniencia de apoyar el razonamiento covariable en la escuela también se menciona en el documento citado por P.W. Thompson y M.P. Carlson (2017), con muchas referencias:

> [Argumentamos] que la variante y el razonamiento covariante son fundamentales para el desarrollo matemático de los estudiantes. Basamos esta afirmación en investigaciones que resaltan las dificultades experimentadas por los estudiantes con respecto a las relaciones funcionales, porque carecen de la capacidad de razonar de forma alternativa o covariante, y en investigaciones que muestran cambios productivos en sus relaciones. Concepciones y usos de las funciones por parte de profesores y alumnos, cuando utilizan el razonamiento covariante. (*ibid.*, traducción del autor)

La misma pregunta fue analizada desde un punto de vista diferente en psicología por J. Piaget (1950) y en matemáticas por W. Lawvere (1991): el primero definiendo la noción de operador multiplicativo; el último al discutir la noción de productos, coproductos y adiciones dentro de la teoría de las categorías.

Saldanha y Thompson (1998) repiten el trabajo de Piaget:

> La idea de Saldanha y Thompson de un objeto multiplicativo se deriva de la noción de Piaget de 'y' [conjunción] como un operador multiplicativo, una operación que Piaget describió como una clasificación operativa subyacente y seriación en el pensamiento de los niños. (Thompson & Carlson, 2017, 433, traducción del autor)

Este trabajo ilustra la covariación desde dos puntos de vista competidores, epistemológicos y cognitivos.

Para el primero: en su libro introductorio sobre la teoría de categorías, Lawvere (1991) también introduce el fenómeno de la covariación con la noción de objeto multiplicativo basado en un ejemplo histórico, que muestra tanto su relación directa con la noción de Piaget (de hecho, él usa la misma terminología), y su relevancia para la revolución científica:

> Comencemos con Galileo, hace cuatro siglos, que cuestiona el problema del movimiento. Quería entender el movimiento preciso de una piedra lanzada o un chorro de agua de una fuente. Todos han observado los graciosos arcos parabólicos que producen; pero el movimiento de una roca significa más que su trayectoria. El movimiento implica, para cada momento, la posición de la roca en este momento; para grabarlo requiere una imagen animada en lugar de una exposición temporal. Decimos que el movimiento es un "mapa" (o función) del tiempo en el espacio. [...]

Estos dos mapas, sombra y nivel, parecen reducir cada problema de espacio a dos problemas más simples, uno para el plano y otro para la línea. Por ejemplo, si hay un ave en su espacio y solo conoce la sombra y la altitud del ave, puede reconstruir la posición del ave. Hay más, sin embargo. Supongamos que tiene una película que muestra la sombra del ave mientras vuela, y una película de su altitud […] A partir de estas dos películas, ¡podrás reconstruir todo el vuelo del ave! Por lo tanto, no solo se reduce una posición en el espacio a una posición en el plano y otra a la línea, sino que también se reduce el movimiento en el espacio al movimiento en el plano y otra en la línea. [...]

El descubrimiento de Galileo es que, de estos dos movimientos más simples, en el plano y en la línea, pudo encontrar completamente el complejo movimiento en el espacio.

(Lawvere, 1991, pp. 3-6, traducido por el autor).

Para el segundo: una persona forma un objeto multiplicativo a partir de dos cantidades cuando mentalmente une sus atributos para crear un nuevo objeto conceptual que es simultáneamente uno y el otro. Saldanha y Thompson (1998) ilustran esto considerando la participación de los estudiantes en tareas basadas en actividades para rastrear y describir el comportamiento de las distancias entre un automóvil y dos aldeas a medida que el automóvil avanza por una carretera.

Presento aquí un ejemplo que ilustra este punto: es sustancialmente tomado de la obra citada de Saldanha y Thompson.

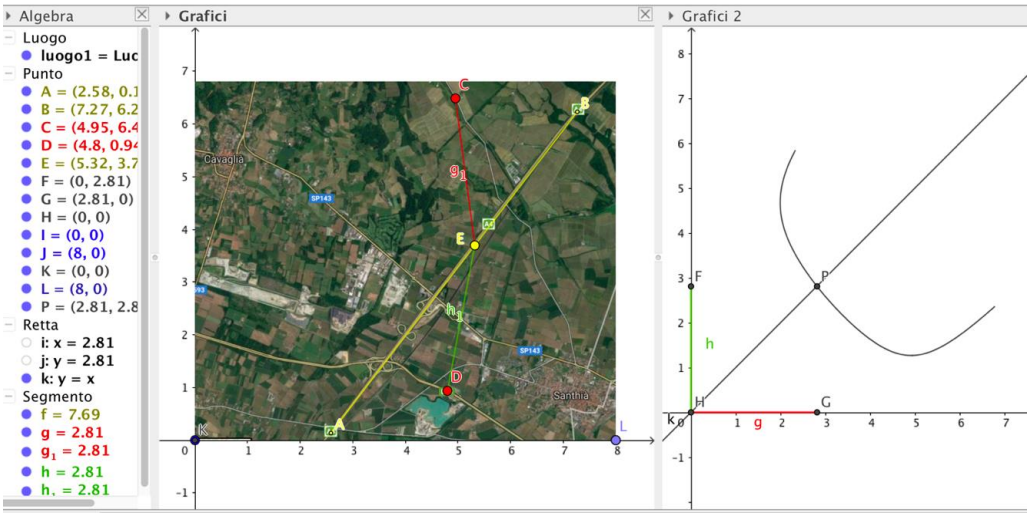


Figura 1.

La Figura 1 (construida con Geogebra) representa el movimiento de un automóvil (E) que recorre la autopista de A a B; en D y C hay dos repetidores para teléfonos móviles y es necesario identificar cuándo el teléfono móvil en el automóvil pasa de la celda C a la de D. En el gráfico cartesiano la abscisa representa la distancia EC, mientras que la ordenada representa la distancia ED. Se deduce que el punto P identifica la posición en la que las dos distancias son iguales y, por lo tanto, el punto en el que comienza la transición de una celda a la otra.

Detrás de este problema encontramos un importante fenómeno didáctico, la *covariación instrumentada*: puede ayudar a los profesores a diseñar situaciones didácticas apropiadas, cuyo propósito es introducir a los estudiantes al razonamiento covariante en entornos de geometría dinámica.

Un enfoque covariante es un fenómeno profundo que no está ni epistemológica ni

didácticamente presente, por ejemplo, en la formulación didáctica habitual de la Geometría Euclidiana (GE). Por eso los hábitos escolares van en la dirección opuesta. Por lo tanto, un enfoque covariante:

- implica un cambio epistemológico con respecto a GE;

- tiene consecuencias cognitivas (razonamiento "hacia atrás");

- puede tener consecuencias didácticas en el aula.

Esto demuestra una discontinuidad epistemológica entre la formulación habitual de problemas tales como "demuestra que ..." y en el que, en cambio, se pide explorar una situación abierta (Arsac, Germain y Mante, 1991). Cognitivamente, la discontinuidad es particularmente marcada cuando el problema se aborda en entorno de geometría dinámica (EGD). El valor agregado en este caso viene dado por el enfoque covariante, que está ausente en el entorno de GE. Muchas diferencias cognitivas entre los dos entornos son solo la contrapartida cognitiva de esta discontinuidad.

La investigación / descubrimiento de la covarianza, a la que apuntan los problemas abiertos, es el pegamento que une los pasos de los argumentos. El trabajo con el software constituye una “instrumentación” de este proceso de búsqueda covariante. También puede tener lugar en el entorno de papel y lápiz, pero por lo general requiere más solucionadores expertos. El entorno de geometría dinámica es un artefacto que amplifica los fenómenos que dependen de la formulación del problema y permite su instrumentación. Una lente semiótica puede ayudarnos a describir adecuadamente estos fenómenos de covariación instrumentada producidos por la ingeniería didáctica apropiada con los artefactos.

Por supuesto, la palabra instrumentación deriva del enfoque instrumental de Verillon y Rabardel (1995), que enfatiza la distinción entre un artefacto (un objeto material o abstracto, ya producido por la actividad humana) y un instrumento (una entidad mixta con un componente de artefacto y un componente cognitivo, representado por patrones de uso).

Ahora presento los extractos de una discusión en el noven grado (primera clase de escuela secundaria), donde hay ejemplos de covariación instrumentada.

La covariación instrumentada en la escuela secundaria

Discutiré brevemente un ejemplo de un experimento didáctico realizado en 2017 en una escuela secundaria (estudiantes de grado 9) con la profesora S. Beltramino y la colaboración del profesor O. Swidan, de la Universidad Ben Gurion del Negev (Israel). Se verá, así como la covariación instrumental puede ser una consecuencia de un método basado en la investigación en un contexto tecnológico (Fibonacci 2012); más precisamente, cómo los estudiantes pueden comprender el complejo proceso de covariación de cantidades involucradas en un fenómeno físico (el movimiento de una bola a lo largo de un plano inclinado), gracias a sus investigaciones en un entorno donde hay dos artefactos tecnológicos presentes. El primer artefacto es un video profesional (producido por el museo Galilei en Florencia), que retoma el famoso experimento de Galilei (descrito en Galilei, 1638), en el que se introduce y subraya la covariación entre las cantidades en juego (Fig. 2a); el segundo es una simulación en Geogebra del mismo fenómeno, en el que los estudiantes pueden variar la inclinación del plano inclinado: los datos relativos al tiempo

y al espacio se representan en el plano cartesiano y en la hoja de cálculo del software (Fig. 2b).

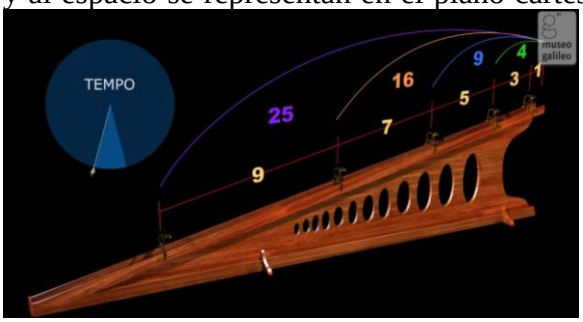


Figura 2a. Video (Museo Galilei, Florencia)

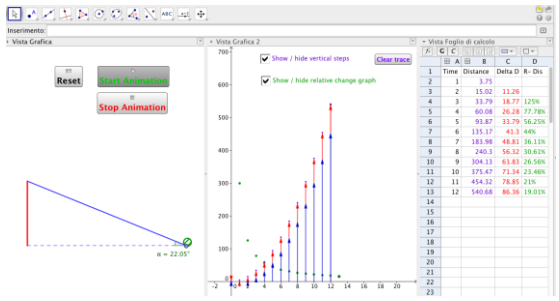


Figura 2b. Applet en Geogebra

En este proceso, tanto las intervenciones de la profesora como los signos producidos por los estudiantes o a las que los estudiantes están expuestos, juegan gradualmente un papel esencial.

Los dos artefactos son de una naturaleza diferente: el video reproduce un experimento real, el segundo lo simula. Por tanto, podemos hablar de un dúo de artefactos en el sentido de Maschietto y Soury-Lavergne (2013), incluso si se trata de una situación diferente, ya que aquí los dos artefactos reproducen o simulan un fenómeno adicional, mientras que en su caso un artefacto digital simula un artefacto físico. Sin embargo, también podemos considerar el posible "valor agregado" (*ibid.*, p.969) proporcionado por los dos artefactos - es decir, cómo la interacción con ambos ayuda los estudiantes a comprender el fenómeno físico examinado-, y cuánto se produce esta interacción de manera consonante o disonante entre los dos artefactos: hablaremos respectivamente de continuidad o discontinuidad entre los efectos de tal interacción.

Nos limitaremos aquí a esbozar los puntos cruciales en este proceso de aprendizaje, enfatizando las dificultades y el progreso del proceso de comprensión de las covariancias entre las cantidades involucradas en el experimento y el papel desempeñado por el maestro, por los dos artefactos y por los signos en él ([1]).

Dividimos este proceso en cuatro pasos, que corresponden a cuatro episodios en el transcurso de una discusión matemática de 40' con la profesora, que tuvo lugar después de que los estudiantes, trabajando en grupos pequeños, habían visto el video, usado el applet de Geogebra, contestado algunas preguntas que les hicieron para describir las características sobresalientes del experimento. En la discusión los estudiantes todavía están divididos en grupos (A, B, C, D, E) de 4-5 personas; las respuestas son a menudo "grupo" y por esta razón generalmente solo indicamos el grupo (a veces indicamos con Xi un alumno / alumna del grupo X).

El magma inicial de las magnitudes en juego

22.37 I (profesora). ¿Qué podemos ver mientras vemos el video?
22:50 A: La velocidad aumenta a medida que baja
Al principio es más lento luego más tarde ...

[1] En otro experimento didáctico, construimos físicamente el plano inclinado con los estudiantes e hicimos el experimento de manera concreta con ellos, con las mismas modalidades que las del video, y luego utilizamos la simulación en Geogebra. Sin embargo, los resultados de aprendizaje parecen ser más bajos que los descritos en este artículo. Estamos tratando de entender estas diferencias, pero está más allá de esta exposición para discutir este importante problema.

23:30 B: el tiempo es siempre el mismo, la velocidad cambia
23:50 C: la distancia entre las puertas [en el video] siempre fue dos
Yo: ¿era?
C: aumentado
24:15 B: 1, 3, 5, 7 [son los números que en el video indican el espacio cubierto gradualmente]
24:23 I: ¿Entre una puerta y otra aumentó la distancia o el tiempo?
24:39 C: El mismo tiempo para correr más rápido
24: 52 I: ¿Y variando la inclinación del plan?
25:00 C: Cuanto más se inclina, más rápida será la velocidad.

Aquí se resaltan muchas variables por lo que dicen los estudiantes: velocidad, distancia entre puertas, tiempo, inclinación. La relación más obvia para ellos es el aumento, incluso si no está tan claro qué aumenta y qué no. Las variables siguen constituyendo un revoltijo indistinto, en el que comenzamos a captar de una manera no tan clara rastros de encubrimiento. El lenguaje es el de todos los días, aún no científico, según la distinción de Vygotski (1985). También existe una confusión entre el valor de una cantidad (la distancia) y el valor de su incremento (23:50). En un cierto punto (24:39), un primer boceto de covariación, atrapado entre el momento en que un aumento constante corresponde a un aumento creciente de la velocidad (pero el lenguaje aplasta estas variaciones en las variaciones en los valores de las mismas cantidades). La covariación es más evidente entre el cambio de inclinación y el aumento de velocidad (25:00). Como resultado de una petición de la profesora (24:52), el lenguaje cotidiano de C es capaz de apoyar el discurso sobre las diferencias entre las diferencias sin tener que aplastar esto en los valores de las cantidades. El artefacto video es lo que más influye en este episodio: las referencias son numerosas y obvias.

Desajuste entre trayectoria y movimiento

27:00 Vosotros están atrapados con la pregunta: "¿Puedes encontrar una ecuación, una fórmula que describa el movimiento de la pelota?"
27:27 A1: Necesitamos encontrar la x, y la y; para el eje x algo que aumenta y para el eje y algo que disminuye.
27:46 I: ¿Qué es la línea decreciente?
27:55 A1: la línea rosa [en el applet es el color de la trayectoria de la bola] ... debe haber algo
28:17 I repite las palabras de A1: Necesitamos encontrar una x que crezca y una y que disminuya porque la línea rosa representa el movimiento de la pelota.
[A los estudiantes les resulta difícil encontrar las cantidades para poner en los dos ejes]
28:42 I: ¿Cuál es el algo, las variables que nos ayudan a describir el movimiento?
Voces diversas: tiempo y espacio; alguien dice: la inclinación
29:04 I: Mantengamos la inclinación fija; Más adelante veremos qué pasa variándola.
29:38 I: ¿Qué elementos debemos considerar para poder describir el movimiento?
29: 47 I: A1 dice tiempo y espacio.
30:00 I: algo que aumenta y algo que disminuye.
30: 05 E1: creo que su idea está mal:
30:08 I: ¡según E1, su idea está mal!
30:10 E1: ¡sí, ambos aumentan!
30:15 I: ¡según E1, ambos aumentan!
30:20 B1: la línea rosa es el plano en el que corre la bola,
30:30 I: la línea rosa es el plano en el que corre la bola, pero ¿cómo podría describirse el movimiento?

Una confusión típica entre la trayectoria y el movimiento de un cuerpo es evidente aquí, bien conocida en la literatura (Clement, 1985). Aquí es importante la intervención de la profesora, quien "refuerza" la discusión para evitar por ahora la superposición de la variable de

inclinación y de tiempo (29:04), concentrando así a los estudiantes en las relaciones espacio - tiempo insiste en buscar dos variables que crezcan / disminuir juntos, hasta que un alumno (E1) diga que las dos variables aumentan (30:10). El artefacto Geogebra es lo que más influye en este episodio: la referencia a la línea rosa se deriva de esto, así como la variación de la inclinación (ya presente, sin embargo, en el primer episodio).

Discontinuidad entre tres artefactos (Video-Geogebra-Tabla)

30:58 I: ¿Por qué ambos [tiempo y espacio] aumentan?
31.05 E1: cuando aumentas la longitud, la bola tarda más en hacerlo, entonces, si inclinas el piano, la bola es más rápida ...
31:11 I: no entendí
31:21 E1: según la inclinación del plano, aumenta el tiempo y ... toma menos tiempo ... la bola tarda menos en recorrer esa distancia ...
31:29 I: la pelota tarda menos tiempo en recorrer esa distancia.
31: 35 E1: la misma distancia, pero como el plano está más inclinado, la bola tiene más velocidad, es más rápida. [E1 con gestos imita el plano y el exceso de velocidad de la bola]
31:41 I: a la misma distancia ...
31: 45 E1: menor tiempo
31:48 yo: ¿y al mismo tiempo?
31:49 E1: mayor distancia.
...
32:27 C: la relación entre el espacio y el tiempo no aumentaba constantemente
32:42 I: ¿Qué aparece en el applet?
[La respuesta es que hay una tabla en la que el tiempo está en la primera columna, el espacio en la segunda, las primeras diferencias en el espacio en la tercera]
33:12 I: ¿Cómo leer la tabla?
33:20 más voces: basado en un cierto tiempo, la bola corre a través de un espacio determinado.
33:45 C: el espacio aumenta cada vez más; el tiempo es constante: 1, 2, 3
33:51 I: el espacio siempre aumenta como sucedió en el video: las puertas estaban más distantes porque el tiempo era el mismo y el espacio aumentó.
34:02 I: ¿Cómo escribo una relación entre este espacio y este tiempo?
[con preguntas oportunas, I indica a los alumnos a descartar que es una línea recta; el grupo E trabaja con Geogebra y encuentra que una parábola sale usando el comando cónico por 5 puntos, pero no pueden explicarlo]
37:00 B: si es una parábola, ¿hay algo en la segunda?
37:05 I repite las palabras de B.
37:10 A: en el video de arriba está escrito s: t ^ 2
37:15 I escribe la fórmula del video en el tablero.
37:34 I: ¿entonces?
... [rumor]
38:10 B1: en el video había las sumas de todas las rutas y, por ejemplo, cuando s tenía 16, el tiempo era 4
38:15 I dibuja un boceto de plano inclinado en la pizarra.
38:26 B1: si contamos el tiempo, vemos que s es t ^ 2: 4 ^ 2 = 16
39:13 B1: en el video hacia el final había sumas de todas las diferentes piezas ... las dos primeras ... las tres primeras ... y las diferentes piezas se dividieron según el tiempo que tomaron ... por ejemplo, las dos primeras piezas tomaron dos como tiempo y valieron 4 juntas ... así que si uno mira esa división e indica el espacio como **y** y el tiempo como **x** ... el tiempo en ese caso valió 2 y el espacio 4 ... Entonces, como dice allí, el tiempo para el segundo hace espacio porque 2 para el segundo es igual a 4 ... entonces y = x ^ 2
40:11 E1: es correcto, pero aquí es diferente si hacemos 2 ^ 2 no nos llega a nosotros ...
[el maestro repite lo que dijo B1 y acompaña las palabras que los ilustran en el dibujo del plano inclinado y finalmente escribe y = x ^ 2]

41:15 I: Pero E1 dice "está bien" aunque ...
E1: pero no viene.
41:19 I. Es correcto, sin embargo, no es tan correcto según E1, porque en los ejemplos no vino de esta manera.

En esta parte, además de los dos artefactos, Video y Geogebra, aparece un tercer artefacto, la tabla escrita en la pizarra por la profesora, bajo el dictado de un grupo de estudiantes. La discusión, apoyada por las intervenciones oportunas de la profesora, hace que los procesos de los estudiantes evolucionen hacia una primera formulación de la ley del movimiento, es decir, s = t ^ 2. Se alcanza a través de tres episodios, al final de los cuales, en un cuarto episodio breve pero importante, la ley es impugnada por un estudiante. En los cuatro episodios, los tres artefactos (indicados con V = video, G = Geogebra, T = tabla) están presentes en distintos momentos y se utilizan, a veces espontáneamente por los alumnos, a petición del profesor, para llevar a cabo investigaciones y verificaciones de tesis. Para explicar racionalmente el movimiento de la pelota (llamaremos a estos comportamientos de los estudiantes acciones epistémicas y semióticas[2]). Por lo tanto, un hilo de relaciones entre V, G, T, que va de una a otra y que generalmente son de discontinuidad, se crea a través de la discusión y las acciones epistémicas ([3]).

Es decir, el valor epistémico de las acciones que los estudiantes realizan con tales artefactos a menudo es inconsistente. Esta discontinuidad culmina en el cuarto episodio, en el que E1 (40:11) hace explícito un conflicto entre lo que se dijo anteriormente y los resultados obtenidos en G por su grupo (E).

En lo que sigue usaremos dos tipos de notación, que indican dos formas opuestas en las que un artefacto X ingresa en los procesos de los estudiantes. Por un lado, se puede realizar una acción epistémica para investigar / descubrir qué sucede en una situación dada utilizando el artefacto, sin tener en cuenta ninguna hipótesis al respecto; vamos a escribir: X→. Por otro lado, el artefacto se puede usar con un objetivo específico, por ejemplo, para probar una hipótesis; vamos a escribir: →X. De manera análoga, indicaremos con I→ las intervenciones específicas de

[2] Los signos siempre están involucrados en las acciones epistémicas que veremos, en un sentido amplio de la palabra signo. Por eso prefiero hablar de acciones epistémicas y semióticas. Para una discusión sobre las relaciones entre los dos aspectos, vea los capítulos 9 y 11 de Bikner y Prediger (2014).

[3] *Acción epistémica*. El término fue introducido en las ciencias cognitivas por Kirsch & Maglio (1994) para designar "acciones que los humanos (u otros agentes) toman para alterar su entorno físico con la intención de recopilar información y facilitar la cognición". Las acciones epistémicas pueden descubrir información que está oculta, o reducir la memoria requerida en la computación mental, o reducir el número de pasos involucrados en el cálculo mental, o reducir la probabilidad de error en el cálculo mental. Para la enseñanza de las matemáticas, el término fue utilizado por Hershkowitz, Schwarz y Dreyfus, T. (2001), quienes a su vez lo derivaron de Pontecorvo & Girardet (1993), quienes las definieron como "acciones mentales por las cuales uno usa o construye conocimiento ". Dreyfus & Kydron (2014), usar la noción de acción epistémica para definir los micro procesos de abstracción como Acciones en Contexto (AiC): esto constructo teórico central de AiC es un modelo teórico-metodológico, según el cual se describe y analiza el surgimiento de un nuevo constructo "por medio de tres acciones epistémicas observables: reconocer (R), construir con (B) y construir (C). Reconocer se refiere a que el alumno vea la relevancia de un conocimiento específico anterior para el problema en cuestión. Construir-con comprende la combinación de constructos reconocidos, para lograr un objetivo localizado, como la actualización de una estrategia, una justificación o la solución de un problema. El modelo sugiere construir como la acción epistémica central de la abstracción matemática" (Dreyfus & Kydron, p.89 ss).
Aquí usaremos este marco sin entrar en detalles por razones de espacio.

la profesora, mientras que lo indicaremos con I⇓ cuando la profesora repite (resuena) una oración pronunciada por un alumno para subrayar la importancia o la corrección, posiblemente incluso recurriendo a gestos.

El primer episodio va de 32:27 a 33:51. E1 (de 31:05 a 31:30) en una modalidad predominantemente G→, y posteriormente (31: 41-31: 49) producido después de la intervención de la profesora (I→). Aquí hay una primera forma de covariación (32:27), formulada exclusivamente con lenguaje natural, posiblemente junto con la producción de gestos icónicos o metafóricos ([4]).

En *el segundo episodio* (32: 27-33: 51), C primero describe la covariación (32:27) de manera diferente que antes, nuevamente en lenguaje natural. I (32:42) empuja a los estudiantes (I→) a usar G y subraya la tabla numérica contenida en ellos, invitándolos a leerla, es decir, a experimentar una modalidad T→.

Las intervenciones de los estudiantes (33: 20-33: 45) explican lo que se informa en T con referencia al video visto (V→), una referencia que se hace explícita en (33:51).

El tercer episodio (34: 02-33: 45) es decisivo. I pides a los alumnos (34:02: I→) que escriban una fórmula que exprese la relación entre *t* y *s* en el movimiento de la pelota. Así evoca un cuarto artefacto: la fórmula (F) con sus varias representaciones (algebraica, cartesiana): →F. Una vez que se ha descartado la línea, para los estudiantes, dado su conocimiento, la parábola comparece, evocada primero por ellos como "algo al cuadrado" (37:00). La evocación se ve nuevamente reforzada por la referencia a V (37:10: V→) y la acción de I (37:15: I→). Aún con referencia al video, B1 es capaz de evocar la fórmula (38:26: V→) y explicarla (39:13: V→).

En *el cuarto episodio*, E1 socava la fórmula de B1 basándose en su investigación en G (G→).

Aquí surge un conflicto entre lo que se vio en V y las experiencias realizadas en G: lo indicaremos con V←→G. Está subrayado por I (I→) y se pasará en episodios posteriores.

Tabla 1

Datos escritos en la pizarra

t (sec)	1	2	3	4
s (cm)	2.13	6.51	19.15	36.64

Continuidad entre cuatro artefactos: Video-Geogebra-Tabla-Formula

[El grupo D mira el video nuevamente en el punto citado. Hay zumbido en el aula. El grupo B finalmente interviene]
43:00 B: Hemos hecho con Geogebra y el ángulo de 25 ° y estos resultados vienen [I escribe en la pizarra: Tabla 1]
43:53 B: hicimos 19.15 / 3 ^ 2 y es 2.13
44:04 B: tratamos de hacerlo con otros y siempre hay el mismo resultado [2.13]

[4] En la clasificación de Mc Neill (1992) los gestos se definen como *icónicos*, si tienen una relación de similitud con el contenido semántico del discurso que lo acompaña y *metafóricos* si son similar a los gestos icónicos, pero el contenido semántico es una idea abstracta.

44:12 I repite las palabras de B y escribe los cálculos en la pizarra.
44:47 I: ¿y qué?
44:50 B: siempre tienes un valor constante ... No creo que sea algo aleatorio.
…
45:25 I: ¿por qué dijiste "entonces esa es la fórmula escrita allí"?
[la fórmula, en el video, es s: t ^ 2; hasta ahora el signo: tal vez ha sido posiblemente interpretado como un signo de puntuación. Ahora I escribe en la pizarra el signo / en lugar de: subrayando lo que sugiere B]
...
45:55 I: entonces, ¿qué podemos concluir?
46:04 B: que la relación entre el espacio recorrido y el tiempo hasta el segundo da una constante.
[I resume lo que se ha hecho hasta ahora; señala que en lugar de escribir **y** y **x** escribimos s para el espacio y t para el tiempo]
47:14 E2: en este caso podría ser y = 2.13 * x ^ 2, en este caso con 25 °, porque es en este caso que viene un valor constante de 2.13 ... El valor puede variar.
...
47: 45 I: ¿si el ángulo varía?
47:48 E2: el valor constante puede variar
[I sugiere probar con diferentes valores de inclinación y los estudiantes intentan usar Geogebra]
…
48:20 B: [ininteligible] el número constante también depende del ángulo
48:28 I: Repito porque habla en voz baja; dijo: si cambiamos el ángulo de 28 ° [con los dedos índice y medio simula una ampliación de un ángulo], la constante cambia y se convierte en 2.36, pero siempre es 2.36.
48:45 E2: Podría ser y = kx ^ 2, donde k es la constante que varía con la inclinación.
[I escribe la fórmula en la pizarra]
48:53 I: B1 dice que podría ser una cosa así, ¿donde k varía? ... [girando a E2]
49:00 E2: basado en inclinación
[I repite sus palabras]
49:12 E2: en consecuencia, el espacio varía.
[I repite sus palabras]
49:19 E2: cambiando todos los coeficientes
49:26 I: podría ser correcto
[invita a todos a consultar con Geogebra si la fórmula es correcta]
...
[en los últimos 10 minutos, los alumnos: comprueban la fórmula con varios ángulos y observan que k crece mientras el ángulo crece; observan que se puede encontrar k considerando el valor de s para t = 1, o dividiendo por 2 las segundas diferencias de s con la variación de t, segundas diferencias que asumen un valor constante igual a 2k; el grupo C considera las parábolas de la gráfica s = s (t) que se obtienen con dos valores de k vecinos: parecen superponerse, pero al usar el zoom se dan cuenta de que las curvas son distintas; lo describen diciendo que "la pelota siempre baja a la misma velocidad" y alguien señala que "tiene la misma tendencia"].

En esta parte tenemos la evolución positiva del conflicto V←→G, que concluyó la parte anterior. Su superación tiene tres aspectos:

(i) el entretejido sinérgico (en el sentido descrito para el tercer ejemplo) entre G y V, y de estos a su vez con T, cuya introducción ha sido solicitada por I varias veces;

(ii) una comprensión más profunda de la covariación *s-t* a través de la construcción de una nueva fórmula que surge de las acciones epistémicas y semióticas generadas por la sinergia V-G-T;

(iii) la generación (y comprensión) de una nueva covariación de segundo nivel más compleja, en la que también entra un parámetro, que depende de la inclinación del plano inclinado.

Esta parte tiene tres episodios.

En *el primer episodio* (43: 00-45: 25), un grupo describe el resultado de sus exploraciones de la tabla en G y explica cómo puede aparecer una constante en la fórmula, que en su lugar no se mostró en el video y que E1 había resaltado (43: 00-44: 04: G→). Evidentemente, este resultado es el resultado de una investigación dirigida con G (→G). En 44:50 el estudiante asume la no aleatoriedad del valor constante. En este punto (45:25) llega una nueva lectura de lo que apareció en V (→V), subrayada por la reescritura con un nuevo signo de la fórmula del video.

En *el segundo episodio* (45: 55-49: 26) llegamos a la covariación descrita en (iii). Varios estudiantes encuentran que la constante depende del valor del ángulo de inclinación del plano (46: 04-47: 48). La propiedad se experimenta en G con diferentes valores del ángulo (→G). La covariación de segundo nivel se explica en 48:28 y 48:45 con contribuciones de diferentes estudiantes. Se dan cuenta de que *k* es un parámetro ("la constante cambia [con el ángulo], pero siempre es 2.36"). Estas últimas intervenciones expresan la capacidad de los estudiantes para leer la fórmula $s = kt^2$ en un "nivel doble": al primero nivel la covariación *s, t*; al segundo nivel la covariación de (*s*,*t*) y *k*.

El tercer episodio contiene varios refinamientos del resultado anterior esencialmente debido a las re-lecturas de la fórmula F y a varias exploraciones en G, en las cuales tenemos ambos modalidades en ambos casos: G→, →G, F→, →F.

El progreso de las distintas modalidades en los episodios de continuidad y discontinuidad se resume en la Tabla 2.

Tabla 2

Continuidad y discontinuidad entre artefactos en los diversos episodios

Discontinuidad	G→	I→	T→	F→	V→	V ←→ G
	2	5	1	1	3	1
Continuidad	G→	→ G	→V	F→	→ F	
	2	3	1	1	1	

Discusión

Donde llegamos

En este artículo, presentamos una introducción didáctica a la covariación en matemáticas. Este objetivo planteó inmediatamente cuatro tipos de problemas:

a) la conveniencia de un cuidadoso análisis epistemológico y cognitivo del concepto de covariación;
b) la necesidad de desarrollar situaciones didácticas (en el sentido de Brousseau) que permitan a los estudiantes desarrollar problemas de covariación, definidos de acuerdo con el estado analizado en a);
c) la importancia de definir el papel de las tecnologías en estas situaciones;

d) la necesidad de contar con herramientas para observar los fenómenos didácticos que ocurren en clase con la propuesta de tales situaciones.

El artículo responde a estos cuatro puntos ilustrando las respuestas con un ejemplo, tanto por razones de espacio como para no sobrecargar el hilo del discurso.

Para a): la covariación es una idea que está presente en el pensamiento matemático moderno, el nacimiento del álgebra moderna y el pensamiento funcional relacionado con la revolución científica, un aspecto paralelo del cual es el análisis elemental del Cálculo, y específicamente del concepto de función. Como lo han demostrado varios estudios, este aspecto, con pocas excepciones, está apenas presente en los libros de texto de matemáticas, que dan una definición de función abstracta y estática, o en el mejor de los casos se refieren a la metáfora de entrada-salida de las máquinas. No es una coincidencia que este enfoque esté más presente en los textos que tratan sobre problemas físicos, biológicos, económicos, etc. en el que es necesario modelar fenómenos que evolucionan con el tiempo. Así que preferimos considerar la covariación como una forma más amplia de pensamiento, razonamiento covariante, que considera los objetos matemáticos considerando y buscando sus relaciones mutuas.

Para b) A diferencia de otras obras, el razonamiento covariante no se considera aquí como limitado a la introducción de funciones. Como se señala en a), tiene un valor epistemológico y cognitivo mucho más amplio: su contraparte didáctica está constituida por la forma covariante que se esconde detrás de la formulación abierta de los problemas, que contrasta la forma estándar generalmente presente en los libros de texto ("muestra que" en lugar de "explora"). La referencia a los objetos multiplicativos de Piaget y Lawvere ilustró los significados cognitivos y epistemológicos de esta elección didáctica, que reestructura las situaciones didácticas para poner en juego el razonamiento covariante en general, incluido, por supuesto, un enfoque no estático de las funciones conjunto.

Para c): tratar con la covariación en un entorno de papel y lápiz es muy abstracto y puede ser difícil de entender: por ejemplo, las barreras cognitivas pueden atribuirse a lo que algunas personas llaman confusión entre vías y trayectorias en el caso de que se consideran cronogramas (pero esto también puede aparecer en otras situaciones). La tesis del artículo es que la covariación se puede abordar con cierto éxito desde los primeros años de la escuela utilizando herramientas tecnológicas. De este modo se ha introducido la covariación instrumentada. De hecho, es posible concebir situaciones educativas en las que el razonamiento covariante se produce mediante una mediación adecuada de herramientas tecnológicas en las que se explota su potencial semiótico para producir una forma de covariación instrumentada.

Para d). Los diversos ejemplos ilustran la complejidad de los fenómenos de enseñanza / aprendizaje relacionados con la covariación instrumentada. No solo las herramientas tecnológicas desempeñan un papel esencial en esto, sino todos los recursos semióticos utilizados: desde el discurso verbal hasta inscripciones (esbozos, fórmulas), gestos, etc. Hemos visto cómo es la competencia entrelazada, a veces conflictiva, a veces sinérgica, de todos estos recursos, la que estimula y apoya los procesos de aprendizaje de los estudiantes. También hemos visto que el papel del profesor es crucial para estimular, apoyar y guiar estos procesos. En otros trabajos, el autor ha introducido una herramienta de análisis semiótico adecuada para leer la estructura y dinámica de este complejo entrelazamiento de recursos semióticos presentes en el aula: el haz semiótico (“semiotic bundle” en inglés: Arzarello, 2006). Esto amplía la noción del sistema semiótico clásico para sistemas de signos como gestos e inscripciones, todos presentes en los procesos observados en el aula, como lo ilustra abundantemente la literatura. El haz semiótico es

una estructura dinámica que integra todos estos recursos semióticos en un solo todo, considerando tanto las relaciones mutuas entre ellos como su evolución en el tiempo. En este sentido, es una generalización del estudio por parte del sistema de gestos y discursos de McNeill (1992) y otros, porque por un lado integra en el modelo no solo el habla y los gestos, sino también las inscripciones (de fórmulas a las gráficas) en las que se basa el pensamiento matemático. Por otro lado, presenta un modelo que evoluciona con el tiempo: debido a su estructura rica, el modelo de haz semiótico permite capturar la dinámica compleja del pensamiento matemático en variables observables cuando ocurren en una situación de interacción, y así hacerlas accesibles a la investigación científica. Naturalmente, para lograr esto, también es necesario filmar con varias cámaras lo que sucede en las interacciones en clase entre los estudiantes y entre los estudiantes y los profesores, mientras se mantiene un registro de sus producciones escritas. En el análisis final de estos documentos, también utilizamos el modelo de microgénesis de un problema adaptado de las investigaciónes de Saada-Robert (1989). Desafortunadamente, el espacio permitido no nos permite ilustrar este aspecto aquí.

A donde nos gustaría llegar

Hay diferentes problemas que deja abierta esta investigación. Por un lado, necesitamos una mayor colección de datos sobre el trabajo en el aula, que se centre en la introducción del razonamiento covariante para proporcionar más información sobre la dinámica de su aprendizaje, especialmente sobre las dificultades de los estudiantes, y posiblemente en ingeniería didáctica apropiada para superarlos. Por otro lado, es importante desarrollar una profundización cognitiva y epistemológica de la noción de covariación: por ejemplo, las ideas de Piaget y Lawvere sobre los objetos multiplicativos deben estudiarse en relación con los procesos de resolución específicos de problemas abiertos y los fenómenos de la microgénesis de la representación de un problema, discutidos por Saada—Robert (1989).

Reconocimiento. Agradezco al Dr. Eduardo Basurto, quien ha revisado pacientemente el texto en español de mi artículo.

Referencias y bibliografía

Arsac, G. & Mante, M. (2007), Les pratiques du problème ouvert, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

Arsac, G., German, G., & Mante, M. (1991). Problème ouvert et situation-problème, IREM de Lyon.

Arzarello F., (2006). Semiosis as a multimodal process. Revista Latino Americana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. Especial, 267-299.

Arzarello F., (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. 10th International Congress on Mathematical Education, Plenary lecture (Editor: M. Niss). IMFUFA, Roskilde University: Copenhagen, Denmark. 158-181.

Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (2014). Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Heidelberg: Springer.

Chevallard, Y. (1989). Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. The Netherlands. (http://people.umass.edu/~clement/pdf/Misconceptions%20in%20Graphing.pdf)

Dreyfus, T. y Kydron. I. (2014). Introduction to Abstraction in Context (AiC). In: Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (Editors). Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education.

Heidelberg: Springer. Cap. 6, pp. 85-96.

Fibonacci (2012) Inquiry in Mathematics Education, (http://fibonacci.uni-bayreuth.de/resources/resources-for-implementing-inquiry.html).

Galilei, G. (1615), Lettera a Madama Cristina di Lorena Granduchessa di Toscana. In: Opere, Edizione Nazionale a cura di Antonio Favaro, Giunti-Barbera, Firenze 1968, vol. V, pp. 309-348. (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k94893t/f16.image)

Galilei, G. (1638), Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali. Leyden: Ludovico Elzeviro. (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k94893t/f16.image)

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. Journal for Research in Mathematics Education. 32, 195-222.

Kirsh, D., Maglio, P. (1994). On distinguishing epistemic from pragmatic action. Cognitive Science 18, 513-549.

Lawvere, F.W. & Shanuel, S.H. (1991). Conceptual Mathematics, Buffalo Workshop Press. Published by Cambridge University Press in 1997.

Maschietto, M., & Soury-Lavergne S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 45(7). 959-971.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: what gestures reveal about thought*. Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique*. Tome I: La pensée mathématique. Presses universitaires de France.

Plano inclinado. Vídeo del Museo Galilei (Florencia) https://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinato.html

Pontecorvo and Girardet (1993): Arguing and reasoning in understanding historical topics. *Cognition and Instruction*, 11, 365-395.

Saada-Robert, M. (1989). La microgenèse de la représentation d'un problème. Psychologie française, 34(2-3), 193-206.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In: Berenson, S.B. & Coulombe, W.N. (Editors), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education* - North America Vol 1. Raleigh, NC: North Carolina State University. 298-304.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1). 77–101.

Vygotsky L.S. (1985). *Thought and Language*. Second revised and expanded edition, edited and translated by E. Hanfmann, G. Vakar, and A. Kozulin. Cambridge, MA: MIT Press.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Lesson Study as a vehicle for the Synergy of Research and Practices: A Japanese Perspective

Yoshinori **Shimizu**
University of Tsukuba
Japan
yshimizu@human.tsukuba.ac.jp

Summary

Given the distinctive characteristics of Japanese mathematics lessons found by the international studies and the subsequent focus of the attention to Lesson Study originated in Japan in education community, the author discusses the relationships between the scientific studies and endeavour for the improvement of teaching and learning from an insider's perspective. Reflecting on how mathematics educators have been struggling with studying the complex phenomena called "lesson" in the Japanese context, it is argued that orchestrating the scientific goal of building theories and the goal of improving teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching.

Key Words: Lesson study, mathematics, international comparisons, LPS

Introduction

The findings of large-scale international studies of classroom practices in mathematics include aspects of instruction as identified among participating countries while instruction in Japan is seemingly unique (Hiebert, et al., 2003; Stigler & Hiebert, 1999). Japanese mathematics teachers, for example, appeared to spend more time on the same task in one lesson than their counterparts in other countries (Hiebert et al., 2003, p.46), maybe because they have students work on a challenging problem and discuss alternative solutions to it. Also, experienced teachers in Japan tend to highlight and summarise the main points at particular phases of their lesson to have their students reflect on what they have learned (Shimizu, 2006). These striking characteristics can be regarded as indicating some indispensable elements of "structured problem-solving" in classroom that are valued and emphasized by Japanese teachers.

While much has been documented and analysed about mathematics classrooms in Japan, after the publication of The Teaching Gap (Stigler & Hiebert, 1999), in particular, Lesson Study became one of the notable topics in the mathematics education community (e.g. Huang & Shimizu, 2016). Lesson Study, 'jugyo kenkyu' in Japanese, is a common element in Japanese

approach to improving teaching and learning in classroom whereby a group of teachers collaborate to study the subject matter, students' thinking and learning in the classroom, and how classroom instruction can be improved (Fernandez & Yoshida, 2004; Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2014). Two major functions of Lesson Study are as a way of doing research with a hypothesis in the form of conducting lesson and as a place for presenting and discussing new findings based on classroom practice (Hirabayashi, 2002). These functions are related to the rationale for conducting Lesson Study as an opportunity of professional development for teachers to study the effectiveness of mathematics teaching and learning in their own classrooms. Also, practical knowledge related to the improvement of classroom instruction is accumulated as 'research' findings tested against the classroom practices of many teachers for many years.

Given the tradition of Lesson Study in more than a century, Japanese mathematics educators have often been challenged by teachers who have been engaged in Lesson Study whether results of "scientific" studies would or would not be usefully applicable to the improvement of teaching and learning in the classroom (Sekiguchi, 1994). The expectations by teachers for mathematics education research are high because they have their own problems to be resolved in their own contexts. How can a researcher productively and collaboratively work with teachers who have an access to the accumulation of practical knowledge tested against the classroom practices of many teachers for many years? How can research influence on classroom practices in such contexts?

An essential characteristic of the field of mathematics education is that its questions and concerns are deeply tied to matters related to the teaching and learning of mathematics (Silver & Herbst, 2007). Research in mathematics education has not only scientific goal of building theories but also the goal of improving of teaching and learning of mathematics. Then, examining the connections between 'scientific' study of a lesson and Lesson Study can shed light on a long-standing issue of the separation between research and practice in the education community, in general, and mathematics education community, in particular.

Educational Research as Socially and Culturally Situated

International Comparative Studies on Classroom Practices

Research in mathematics education that crosses national boundaries provides new insights into the development and improvement of the teaching and learning of mathematics (Shimizu & Kaur, 2013). In the course of discussing the characteristics of teaching and learning in classrooms by cross-national comparisons, researchers have gained more explicit understanding of their own implicit theories about how teachers teach and how children learn mathematics in their local contexts as well as what is going on in school mathematics in other countries (Stigler, Gallimore, & Hiebert, 2000). This is the key driving force to conduct international comparative studies in classroom practices.

The TIMSS 1995 Video Study of mathematics teachers' practices, a video component of the Third International Mathematics and Science Study, was the first attempt to collect and analyse videotapes from the classrooms of national probability samples of teacher at work (Stigler & Hiebert, 1999). Focusing on the actions of teachers, it has provided a rich source of information regarding what goes on inside eighth-grade mathematics classes in Germany, Japan and the United States with certain contrasts among three countries. One of the sharp contrasts

between the lessons in Japan and those in the other two countries relates to how lessons were structured and delivered by the teacher. The structure of Japanese lessons was characterized as 'structured problem solving', while a focus was on procedures in the characterisations of lessons in the other two countries. The following sequence of five activities was described as the 'Japanese pattern': reviewing the previous lesson; presenting the problems for the day; students working individually or in groups; discussing solution methods; and highlighting and summarizing the main point.

The 'Japanese pattern' seems to naturally fit within the teacher's planning of mathematics lessons. Japanese teachers, in elementary and junior high schools, in particular, often organise an entire mathematics lesson around the multiple solutions to a single problem in a whole-class instructional mode (Shimizu, 1999a). This organization is particularly useful when a new concept or a new procedure is going to be introduced during the initial phase of a teaching unit. Even during the middle or final phases of the teaching unit, teachers often organize lessons by posing a few problems with a focus on the various solutions students come up with. Also, the characterisation of Japanese lessons as 'structured problem solving' seems to be consistent with what teachers typically discuss in the post-lesson discussion in Lesson Study (Takahashi, 2008).

Characterization of the practices of a nation's or a culture's mathematics classrooms with a single lesson pattern was, however, problematised by the results of the Learner's Perspective Study (Clarke, Mesiti, O'Keefe, Jablonka, Mok & Shimizu, 2007). The analysis suggested that, in particular, the process of mathematics teaching and learning in Japanese classrooms could not be adequately represented by a single lesson pattern by, at least, the following two reasons. First, lesson pattern differs considerably within one teaching unit, which can be a topic or a series of topics, depending on the teacher's intentions throughout the sequence of lessons. Second, elements in the pattern themselves can have different meanings and functions in the sequence of multiple lessons. Needless to say, it is an important aspect of teacher's work not only to implement a single lesson but also to weave multiple lessons that can stretch out over several days, or even a few weeks, into a coherent body of the unit. It would not be possible for us to capture the dynamic nature of activities in teaching and learning process if each lesson was analysed as isolated.

An alternative approach was proposed to the international comparisons of lessons by the researchers in LPS team. That is, a postulated 'lesson event' was regarded to serve as the basis for comparisons of classroom practice internationally. In LPS, an analytical approach was taken to explore the form and functions of the particular lesson events such as 'between desk instruction', 'students at the front', and 'highlighting and summarizing the main point' (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006).

In particular, the form and functions of the particular lesson event 'highlighting and summarizing the main point', or 'Matome' in Japanese, were analysed in eighth-grade 'well-taught' mathematics classrooms in Australia, Germany, Hong Kong, Japan, Mainland China (Shanghai), and the USA (Shimizu, 2006). For the Japanese teachers, the event 'Matome' appeared to have the following principal functions: (i) highlighting and summarizing the main point, (ii) promote students' reflection on what they have done, (iii) setting the context for introducing a new mathematical concept or term based on the previous experiences, and (iv) making connections between the current topic and previous one. For the teachers to be successful in maintaining these functions, the goals of lesson should be very clear to themselves, activities in the lesson as a whole need to be coherent, and students need to be involved deeply in the

process of teaching and learning. The results suggest that clear goals of the lesson, a coherence of activities in the entire lesson, active students' involvement into the lesson, are all to be noted for the quality instruction in Japanese classrooms.

Mathematics Education Research as Socially and Culturally Situated

In the Japanese contexts, the activity of Lesson Study includes careful planning and implementing the research lesson as a core of the whole activity, followed by post-lesson discussion and reflection by participants. In the discourse of teachers in planning, implementing, and reflecting on lessons, particular pedagogical terms are often shared and used in the contexts of examining classroom instruction (Shimizu, 1999). Through the participation in lesson study, beginning teachers learn these terms together with values attached to them. These terms reflect what Japanese teachers value in planning and implementing lesson within Japanese culture. 'Matome' as a category of 'lesson event', as was mentioned in the previous section, is one of such pedagogical terms often used by teachers. "Hatsumon" is another example of shared term that means asking a key question to provoke and facilitate students' thinking at a particular point of the lesson. The teacher may ask a question for probing students' understanding of the topic at the beginning of the lesson or for facilitating students' thinking on the specific aspect of the problem.

"Yamaba", on the other hand, means a highlight or climax of a lesson. Japanese teachers think that any lesson should include at least one "Yamaba" and the term often appears in planning a lesson and the post-lesson discussion in Lesson Study. This climax usually appears as a highlight during the whole-class discussion. The point here is that all the activities, or some variations of them, constitute a coherent system called a lesson that hopefully include a climax. Further, among Japanese teachers, a lesson is often regarded as a drama, which has a beginning, leads to a climax, and then invites a conclusion. The idea of "ki-sho-ten-ketsu" which was originated in the Chinese poem, is often referred by Japanese teachers in their planning and implementation of a lesson. It is suggested that Japanese lessons have a particular structure or a flow, moving from the beginning ("ki", a starting point) toward the end ("ketsu", summary of the whole story).

As teaching is a cultural activity and is socially and culturally situated, research is also socially and culturally situated. Sekiguchi (2015) argues that there are at least three major sources of Japanese mathematics education research; lesson study tradition, influence from Western countries, and existence of national syllabus. Then, in addition to focus on pedagogical terms shared and used in Lesson Study by teachers with values and beliefs on lessons, it would be productive for researchers to take into account the following contexts to have better understanding of classroom practices. First, in Japan we have national curriculum standards, which have been revised roughly every 10 years. In order to examine the trends and issues in most areas of mathematics research in Japan, we cannot neglect their connections with the goals and emphases described in the national curriculum standards. Second, the mathematics education community in Japan has a long tradition of lesson study by teachers as practical research methodologies in the form of action research. Researchers and teachers work closely within the community with local theories of students' learning in their perspective. Then, to grasp the ongoing research agendas, we also need to pay careful attention to their accumulated findings with respect to teaching materials and ways of teaching and learning in each research area. Third, developments of mathematics education research in Japan have been influenced by Western educational theories in various areas of inquiry, while educational activities themselves are

rooted in East Asian cultural tradition.

Lesson Study as Embedded in Cultural Contexts

The ultimate goal of any study of classroom practice is to improve teaching for the purpose of enhancing students' learning, even if its major focus would be on, for example, constructing a theoretical model of teaching or comparing teaching methods among countries. For this goal, various approaches and methodologies can be adapted. The TIMSS Video Study was a breakthrough as a scientific exploration into the classroom, showing the feasibility of applying videotape methodology in a wide-scale national and international survey of classroom instructional practice. It has provided a rich source of information regarding what goes on inside eighth-grade mathematics classes in the three countries. Also, objective observational measures of classroom instruction were developed to serve as valid quantitative indicators, at a national level, of teaching practices in the three countries.

There are opportunities for Japanese teachers to learn with and from their experienced colleagues to pursue an excellent lesson with a focus on students' thinking in classrooms. "Lesson study" is an approach to develop and maintain quality mathematics instruction through a particular form of activity (Fernandez & Yoshida, 2004; Shimizu, 2002). Valuing students' thinking as necessary elements to be incorporated into the development of a lesson is a key to the approach taken by Japanese teachers.

Another type of approach to improve teaching practice has traditionally been taken by Japanese teachers in a practical way. In Japanese schools, workshops of particular style, "Jugyo Kenkyu-kai" ("lesson study meeting"), are regularly held at each school level or at the other levels. This opportunity has a strong impact on teacher development (Shimizu, 1999). These workshops include an actual lesson (a "research lesson") observed by many teachers as well as an extended discussion after the lesson (Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2014). Teachers exchange ideas about the lesson they have just observed focusing on the task on which students worked, the content taught, students' responses to the problem, and the teacher's roles. Experienced teachers or mathematics educators are often invited to comment on the development of the lesson observed, interpretations of the topic taught, and how the lesson could be improved. By observing and discussing an actual lesson, aspects of lessons are examined and explored.

The Origin and the Development of Lesson Study

Although Fernandez and Yoshida (2004) mention that the origin of lesson study can be traced back to the early 1890s, it seems to have appeared earlier. At the beginning of the modern era, the Japanese government established normal schools, where teachers set the goals of the lesson, prepared experimental lessons, and conducted those lessons in actual classrooms while other teachers were observing them. In the late 1890s, teachers at elementary schools affiliated to the normal schools started to study lessons by observing and examining them critically. Makinae (2010) argues that the origin of Japanese lesson study was influenced during the late 1880's by U.S. books for educators that introduced new approaches to teach. He points out that a book by Sheldon (1862) describes methods to learn about new teaching approaches, called 'criticism lesson' and 'model lesson'. This may be the beginning of Japanese lesson study. In fact, Inagaki (1995) argues that 'criticism lesson' was already practiced among elementary schools affiliated to the normal schools in Japan as early as the late 1890s. Teacher conferences utilising criticism lessons were conducted by local school districts in the early 1900s. Some of these conferences were already called 'lesson study conferences', or jugyo-kenkyu-kai in Japanese (Makinae,

2010). In this sense, lesson study has a history of more than a century.

In the early stages of development of Japanese lesson study, 'criticism lesson' (Sheldon, 1862) included a particular function of studying lessons, carefully examining the effectiveness of teaching, and publicly discussing ways to improve teaching and learning. The term 'research lesson', or kenkyu-jugyo, might come from this particular function of lesson study with its major focus on producing a new idea, or testing a hypothesis in the form of an operationalized teaching method or teaching materials. On the other hand, 'model lesson' (Sheldon, 1862) included another function of studying lessons; demonstrating or showcasing exemplary lessons, or presenting new approaches for teaching. For this purpose, the lesson should be carefully planned and based on research conducted by a teacher or a group of teachers. Participants can observe and discuss actual lessons with a hypothesis, instead of simply reading papers or hand-outs that describe the results of the study. The two different functions of lesson study – 'criticism lesson' and 'model lesson' – can be the original model of a variety of lesson study practiced around the country.

Despite the long history of lesson study in their own country, Japanese mathematics educators and researchers in other areas have not been much interested in studying lesson study itself until recently. After the publication of The Teaching Gap (Stigler & Hiebert, 1999), and of a Japanese translation of the book (Minato, 2002), Japanese educators, who often deeply involved in lesson study, have "found" the importance of this particular cultural activity.

Today, lesson study takes place in various institutions and contexts (Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2002). Pre-service teacher training programs at universities and colleges, for example, include lesson study as a crucial and challenging part in the final week of student teaching practice, which usually lasts three or four weeks. In-service teachers also have opportunities to participate, held within their school (konai-kenshu), outside their school but in the same school district or city, at the level of prefecture, and even at the national level for several objectives. Teachers at public schools may just participate in lesson study in their school to develop their teaching skills, since the school is their working place. Other teachers may play the major roles in planning and conducting research lesson, for testing critically their hypothesis in the use of particular method for teaching mathematics. Teachers at university-affiliated schools that have a mission to developing a new approach to teaching, often open their lesson study meeting for demonstrating an approach or new teaching materials they have developed. Thus, we can still see two major functions of lesson study that seems to have arisen from the original form of it.

The Role of Outside Expert in Lesson Study

In lesson study, an outside expert is often invited as an advisor who facilitates the post-lesson discussion and/or makes comments on the possible improvement of lesson from a broader viewpoint (Fernandez and Yoshida, 2004; Shimizu, 2008). The expert may be an experienced teacher, a supervisor at local board of education, a principal of a different school, or a professor from the nearby university. In some cases, not only inviting an expert as a commentator in the post-lesson discussion, the group of teachers may meet with him/her several times prior to conducting the research lesson to discuss issues such as reshaping the objective of the lesson, clarifying the rationale of a particular task to be presented in the classroom, a range of anticipatory student responses to the task, and so on. In this context, an outside expert can be a collaborator who shares responsibility for the quality of a lesson with the teachers, not just an

outside authority which directs the team of teachers.

As for the university professor invited as an outside expert, he or she is expected as a researcher to provide new visions on curriculum reform and teaching practices, trends and issues in local and national educational policies, and also some concrete suggestions for improving daily classroom practices, as well as commenting on what was observed in research lesson. Given the tradition of lesson study, mathematics educators have often been challenged by school teachers who deeply engaged in lesson study whether "research results" provided by researchers are useful for improving classroom practices.

There is another role of an outside expert. Namely, the expert can be as a collaborator and a contributor who joins the process of planning, implementing, and reflecting on a research lesson together with the group of teachers. In this case, an outside expert can be seen as a part of the community of practice, not an authority that has come from outside the school.

Studying and Improving of Teaching and Learning of Mathematics

Working with and Learning from Teachers

There has been a concern in mathematics education community, at least in Japan, with the relevance and usefulness of the results of research. Also, it is often argued that there is a long-standing issue of the separation between research and practice in education community, in general, and mathematics education community, in particular. Given the tradition of lesson study, it is very important for Japanese mathematics educators to work with and to learn from teachers. The relationship between research and practice may be seen differently in other countries.

Among five crucial relationships in research in mathematics education that he identified as important, Bishop (1992) lists the relationship between the teacher and the researcher as a particularly significant one. He characterizes three theoretical traditions, pedagogue, empirical scientist, and scholastic philosopher, and each tradition has the goal of enquiry, role of evidence, and role of theory in different ways. If the goal of study is direct improvement of teaching, and role of theory is accumulated and sharable wisdom of expert teachers, the study is in the pedagogue tradition. The evidence presented is usually highly selective and exemplary here. He noted that in both empirical scientist and scholastic philosopher traditions, the roles of teacher and researcher are incompatible. He wrote:

> The teacher is the practitioner whose practice, it is felt, needs to be informed by the research of the researcher. So, we have a clear hierarchy involved, with the researcher informing the teacher, but not necessary vice versa (p.717).

Bishop (1992) noted that the analysis and study of mathematics teaching from both these perspectives can make the teacher an object – not a subject – in the research. The role of outside expert who is invited to Lesson Study as an advisor can be considered in light of this hierarchy. The expert can facilitate the post-lesson discussion and/or makes comments on the possible improvement of lesson from a broader viewpoint. Or, being involved in Lesson Study can invite the consequence for the researcher being just an outside authority coming into the classroom to direct the group of teachers and develop theories for them, if the researcher is not aware of their role and does not understand the significance of working with and learning from teachers.

There is a possibility that the gap may become larger between the efforts in mathematics education research and the problems tackled by the teachers. Lerman (1990) noted that to make

separation between those who practice, and those who develop theories for the practitioners, is not an adequate characterization of the business of good teaching. Also, Wiliam & Lester (2008) wrote as follows.

> We promote a renewal of a sense of purpose for our research activity that seems to be disappearing, namely, a concern for making real, positive, lasting changes in what goes on in classrooms. We suggest that such changes will occur only when we become more aware of and concerned with sharing of meaning across researchers and practitioners. (p. 38)

One of the major characteristics of Lesson Study is that, as the historical development illustrates, the approach was initiated by a group of teachers to improve teaching and learning in classrooms. The problem tackled by teachers has rooted in the reality of the school and the classroom. Research questions can be posed in responding to problems derived from teachers' works. In working with teachers and learning from teachers in Lesson Study, mathematics educators can have an opportunity for identifying implicit wisdom and accommodating craft knowledge to scholarly knowledge. Ellerton & Clement (1994) raised the issues to be confronted by the international mathematics education research community and noted the need to demonstrate a greater respect for the wisdom of practice deriving from the classroom knowledge and the action-oriented theories of practicing teachers of mathematics in different countries around the world. As Lesson Study has become a focus of attention in countries including Australia, Malaysia, and the United States, for example, we have more chances to learn from the voice of teachers.

Studying One Lesson Intensively

Lesson study usually is conducted in a few classrooms and then its results have very limited validity in the beginning. If those results are shared among other teachers, and replicated in many other classrooms in different schools, they could increasingly obtain higher validity and relevance. Therefore, a larger community of teachers who wish to learn from other teachers are key for the success of lesson study with certain generalizability. The key is a particular focus on aspects of developing a lesson. Participating in lesson study provides opportunities for teachers to learn shared values of teaching mathematics as a school subject, with and from experienced colleagues. Such values are related to teachers' views on a 'good' lesson and an 'excellent' teacher.

Ruthven & Goodchild (2008) discuss the significant of craft knowledge, the professional knowledge used by teachers in their day-to-day classroom teaching; action-oriented knowledge which is not generally made explicit by teachers, which they may indeed find difficult to articulate, or which they may even be unaware of using. Orchestrating scientific goal of building theories and the goal of improving of teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching. Lewis et al. (2006) argues that development of a descriptive knowledge base, explication of an innovation's mechanism, and iterative cycles of improvement research. By studying a good lesson continuously, practical knowledge tested against the classroom practices of many teachers for many years is accumulated. Here research can inform practice by providing a tool for explaining in broader views or providing teachers categories for describing the meaning of their vocabulary.

To develop better understandings of educational activities in local contexts, researchers need to consider the underlying values and beliefs shared by that local community (Shimizu & Williams, 2012). It should be noted, for instance, that valuing students' thinking as necessary elements to be incorporated into the development of a lesson is key to the approach taken by Japanese

teachers (Shimizu, 2009). Describing anticipated students' responses, is, amongst other activities, key to lesson planning because the whole-class discussion depends on the solution methods the students actually come up with. Having a very clear sense of the ways students are likely to think about and solve a problem prior to the start of a lesson makes it easier for teachers to know what to look for when they are observing students work on the problem.

Mary Hesse (1980) pointed out that any theory is value-laden, and that an awareness of the value behind a theory is crucial, in social science, in particular. In any science, criteria for theory choices contain value judgments, but those values tend to be filtered out as theories are developed. We need to be conscious that educational theories are value-laden and that those values derived in part from our experience with educational practices in a broader sense. Japanese mathematics educators who are engaged in Lesson Study are interested in "good" or "successful" classroom practice. The tendency is derived from their experiences with Lesson Study that has the goal of building theories and the goal of improving teaching and learning of mathematics at the same time.

Studying Values Attached to Teachers' Behavior

The countries in East Asia in the Confucian Heritage Culture certainly share commonalities, and mathematics classroom practices in this region exhibit similarities in various aspects of teaching and learning (Leung, Park, Shimizu, & Xu, 2015). However, classroom practices are embedded in their particular cultural and historical backgrounds. Thus, when we look into mathematics classrooms in different countries, even within East Asia, we immediately realize the diversity of practices in teaching and learning. Teachers in different countries or regions behave differently when teaching the same mathematical content, and consequently students in each country learn the topic differently. The key to understand the similarities and differences are the values attached to teaching and learning in classrooms.

When we compare teachers' behavior in classrooms between Tokyo and Shanghai, significant differences appeared (Shimizu, 2017). While teachers from both countries highlighted and summarized the main points of the lesson, the Japanese teacher summed things up even in the middle of the lesson, while the Shanghai teachers mainly focused on mathematical content taught in their lessons. Japanese mathematics teachers often organize an entire lesson around the multiple solutions to a single problem, in a whole-class instruction mode. Since the teachers emphasize finding alternative ways to solve a problem, Japanese classes often consider several strategies. It would be natural, then, for the classes to discuss problem-solving strategies from various viewpoints, such as mathematical correctness, brevity, efficiency, and so on. A teaching style with an emphasis on finding many ways to solve a problem naturally invites certain summarizing behaviors. If the whole-class discussion reaches a point of thinking retrospectively about what they have considered, even in the middle of the lesson, a teacher may have Matome.

There seem to be supporting conditions and shared beliefs among the Japanese teachers that justify often having Matome at the end of the lessons or at the end of sub-units. Every lesson has an opening, a core, and a closing. This is particularly the case for Japanese lessons, which begin and end with the students bowing. Teachers regard their lessons as dramas, which have a beginning and leads to a climax. In fact, one of the characteristics of Japanese teachers' lesson planning is the deliberate structuring of the lesson around a climax, "Yamaba" in Japanese (Shimizu, 2006, p. 143). Most teachers think that a lesson should have a highlight. The essential point is that Japanese mathematics teachers have access to a sophisticated and coherent

vocabulary that allows them to discuss the components of the mathematics lesson, reflect on their teaching, and offer and receive advice. This structure provides a powerful tool for pre-service and in-service teacher education. These pedagogical terms are learned by teachers through participation in Lesson Study, which is a Japanese approach to improving teaching and learning mathematics through a particular form of activities by a group of teachers, including planning, implementing, and discussing actual lessons (Shimizu, 1999). It is important to note that these pedagogical terms are used in the discourse of particular contexts embedded in a whole system, to describe a particular style of teaching. Japanese mathematics teachers often organize an entire lesson by posing just a few problems, and focus on students' various solutions to them. Educating teachers about lesson plans includes helping them with key pedagogical terms.

Given the tradition of lesson study, it is very important for Japanese mathematics educators to work with and to learn from teachers. With the study of classroom instruction researchers can have a manifestation of values attached to teaching and learning in classroom, as well as elements and structure of classroom practices. The manifestation in turn can provide an endorsement to the practical approaches taken by teachers to the improvement of classroom instruction. By participating in Lesson Study, mathematics educators can have a window through which researchers can "touch" the issues in the practices rooted in the contexts where teachers working.

Concluding Remarks

For more than a decade, educators and researchers in the field of mathematics education have been interested in Lesson Study as a promising source of ideas for improving education. For a Japanese mathematics educator who has been deeply involved in lesson study for more than two decades, this 'movement' has provided an opportunity for reflecting on how Lesson Study as a cultural activity works as a system embedded in the entire society as well as local community of teachers with shared values and beliefs. It is argued that orchestrating the scientific goal of building theories and the goal of improving of teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching.

International comparative studies have started to recognize the need to focus more on existing diverse voices and perspectives among members of the local communities. As the globalization and internationalization of research activities has continued to expand, the field of mathematics education research has clearly shown the diversification of perspectives on teaching and learning in classrooms embedded in local contexts. As the classroom practices are socially and culturally situated, and shared values and beliefs by teachers are key for continuous development and of the quality teaching, research in mathematics education is socially and culturally situated. Continuous working with, and learning from, teachers raises the issues and shapes the research questions originated in the efforts of improvement of teaching and learning mathematics in the classroom.

References

Bishop, A. (1992). International perspectives on research in mathematics education. In D. A. Grouws (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clarke, D. J., Keitel, C. & Shimizu, Y. (Eds.) (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Clarke, D. Mesiti, C., O'Keefe, C. Jablonka, E. Mok, I.A.C. & Shimizu, Y. (2007) Addressing the challenge of legitimate international comparisons of classroom practice. *International Journal of Educational Research.46*, 280-293.

Ellerton, N. F. & Clement, M.A. (1994). Transforming the international mathematics education research agenda. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fernandez, C. & Yoshida, M (2004). *Lesson Study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,

Hesse, M. B. [1980]: *Revolutions and Reconstruction in the Philosophy of Science*, Brighton: Harvester Press.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chiu, A.M.-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., and Stigler, J. (2003*). Teaching mathematics in seven countries ： Results from the TIMSS 1999 Video Study*. U.S. Department of Education. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Hirabayashi, I. (2002). Lesson as a drama and lesson as another form of thesis presentation. In H. Bass, Z. P. Usiskin & G. Burrill (Eds.), *Studying classroom teaching as a medium for professional development. Proceedings of a U.S. - Japan workshop*. Washington, DC: National Academy Press.

Huang, R. & Shimizu,Y. (2016). Improving teaching, developing teachers and teacher developers, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: An international perspective. *ZDM- Mathematics Education, Vol.48(4)*

Japan Society of Mathematical Education (2010). *The handbook of research in mathematics education*. Tokyo: Toyokan (in Japanese).

Leung, F.K.S., Park, K., Shimizu, Y., & Xu, B. (2015). Mathematics education in east Asia. In S.J. **Cho** (ed.) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp.123-143). New York, NY: Springer.Lewis, C., & Tsuchida, I. (1998). A lesson like a swiftly flowing river: Research lessons and the improvement of Japanese education. *American Educator, 22*(4).

Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational Researcher, 35(3)*, 3-14.

Li, Y., & Shimizu, Y. (eds.). (2009). Exemplary mathematics instruction and its development in East Asia. ZDM—The International Journal of Mathematics Education 41(3), (Special Issue).

Makinae, N. (2010). The Origin of Lesson Study in Japan. Y. Shimizu, Y. Sekiguchi & K. Hino (eds.) The proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education: In search of excellence in mathematics education, Tokyo: Japan Society of Mathematical Education.

Malara, N.A. & Zan, R. (2008) The complex interplay between theory in mathematics education and teachers' practice. In L.D. English (ed). *Handbook of international research in mathematics education (second edition).* New York, NY: Routledge.

Minato, S. (2002). Learn from Japanese mathematics education: Jugyou-kenkyuu as becoming the focus in the United States. A translation with annotations of The teaching gap (Stigler & Hiebert, 1999). Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Ruthven, K. & Goodchild, S. (2008) Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L.D. English (ed). *Handbook of international research in mathematics education (second edition). New York, NY. Routledge*.

Sekiguchi, Y. (1994). Mathematics education research as socially and culturally situated. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sekiguchi, Y. (2015). The development of mathematics education as a research field in Japan. In B. Sriraman, J. Cai, K-H. Lee, L. Fan, Y. Shimizu, C.S Lim & K. Subramaniam (eds.) *The first sourcebook on Asian research in mathematics education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India*. Information Age Publishing.

Shimizu, Y. (1999). Aspects of mathematics teacher education in Japan: Focusing on teachers' role. *Journal of Mathematics Teacher Education. 2(1),* 107-116.

Shimizu, Y. (2002) Lesson study: what, why, and how? In H. Bass, Z. P. Usiskin & G. Burrill (eds.) *Studying classroom teaching as a medium for professional development: Proceedings of a U.S.-Japan workshop*. Washington DC: National Academy Press, 53-57, 154-156.

Shimizu, Y. (2006) How do you conclude today's lesson? The form and functions of "Matome" in mathematics lessons. In D. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka & I. Ah Chee Mok (eds.) *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world*. Rotterdam: Sense Publishers.

Shimizu, Y. (2008). The role of outside expert in lesson study in Japan. Paper presented at the interactive symposium, "Teacher-Academic partnerships: International approaches to teacher professional development", Annual Meeting of the American Educational Research Association (New York) March 27.

Shimizu, Y. (2014). Lesson study in mathematics education. In S. Lerman (ed.) *Encyclopedia of mathematics education*. New York, NY: Springer

Shimizu, Y. (2017). Uncovering the label "Asian" in international comparative studies of mathematics education. In Ji-Won Son, Tad Watanabe and Jane-Jane Lo (eds). *What matters? Research trends in international comparative studies in mathematics education.* (pp. 83-94), Springer.

Shimizu, Y. & Kaur, B. (2013) Learning from similarities and differences: a reflection on the potentials and constraints of cross-national studies in mathematics. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, Vol.45(1), 1-5.*

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R., & Clarke, D. J. (eds.). (2010). *Mathematical tasks in classrooms around the world.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Shimizu, Y. & Williams, G. (2012). Studying learners in intercultural contexts. In M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, and F. Leung (eds.) *Third international handbook of mathematics education*, New York, NY: Springer.

Sliver, E.A. & Herbst, P. G. Theory in mathematics education scholarship. In F. K. Lester (ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing.

Stigler, J. W., Gallimore, R., & Hiebert, J. (2000). Using video surveys to compare classrooms and teaching across cultures: Examples and lessons from the TIMSS and TIMSS-R video studies. *Educational Psychologist, 35(*2), 87–100.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York, NY: Free Press.

Takahashi, A. (2008). Beyond show and tell: Neriage for teaching through problem-solving: Ideas from Japanese problem-solving approaches for teaching mathematics. *Paper presented at TSG 19: Research and Development in Problem Solving in Mathematics Education,* 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Mexico.

Wiliam, D. & Lester, F. K. (2008). On the purpose of mathematics education research: Making productive contributions to policy and practice. In L. English (ed.) *Handbook of international research in mathematics education (second edition)* (pp. 32-48). New York, NY: Routledge.

Mesas plenarias

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Una visión actual del CIAEM: primeros años del siglo XXI[1]

Carlos **Sánchez** Fernández
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

Resumen

¿Cuál ha sido la evolución del *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) en el siglo XXI? ¿Cuáles sus principales objetivos y realizaciones? ¿Cuál ha sido su relación con la comunidad internacional de Educación Matemática y en particular con la *International Commission on Mathematical Instruction* ICMI? ¿Su participación en la creación y fortalecimiento de nuevos espacios regionales de la Educación Matemática? Y más allá de las dimensiones organizacionales: ¿cuáles han sido los temas dominantes en las actividades plenarias de las *Conferencias Interamericanas de Educación Matemática*? Desde estas interrogantes básicas, trataremos de encauzar una reflexión prudente, pluralista y crítica, sobre el pasado más reciente del CIAEM.

En estos pocos años vividos en el siglo XXI-concretamente a partir de la XI Conferencia (2003, Blumenau)- ha habido un posicionamiento del CIAEM a partir del cultivo de la calidad académica, una innegable vinculación más estrecha con la comunidad internacional, usos de medios tecnológicos, dinámicas y características que bien nos permiten afirmar que se ha dado una nueva etapa en la historia de esta agrupación. Nuestro propósito es estimular la reflexión consciente, para extraer las ideas fértiles y sugerir acciones eficaces que mantengan un alto nivel de servicio social en las Américas.

Palabras clave: educación matemática, historia de la educación matemática, CIAEM, cultura matemática.

Contexto histórico socio cultural: **Comienzos del tercer milenio**

En los últimos años se ha dado un notable avance en la Educación Matemática internacional y particularmente el CIAEM ha conseguido una gran proyección en el ámbito americano y un posicionamiento sobresaliente en esa comunidad internacional, especialmente alrededor de las acciones desarrolladas por el ICMI y eso constituye un logro incuestionable que

[1] Para redactar esta ponencia hemos utilizado en especial, y profusamente, el lúcido trabajo del presidente del CIAEM Angel Ruiz Zúñiga, publicado como Ruiz, A. (2013). El autor asume toda la responsabilidad en las afirmaciones y criterios expuestos en el presente análisis.

ha representado compromiso, sapiencia y, sobre todo, liderazgo. Pero también este avance se ha visto influido por condiciones globales que tanto han favorecido nuevos desarrollos autóctonos en el área interamericana. Destaquemos las características siguientes:

- Cambios en las ideologías que dominaron en América Latina durante la Guerra Fría y el periodo neoliberal. Primero tuvimos la "Ola Rosa" desde la izquierda y ahora nos invade otra ola por la derecha, que algunos ya llaman la "Ola Lila".
- Demanda por más instituciones de educación superior, lo que ha promovido la creación de muchas instituciones privadas de un nivel muy diverso. En los últimos años en algunos países del área ha existido un impulso a privatizar todo el sector educativo que en reacción ha promovido la inestabilidad del sistema a través de manifestaciones de protesta y paros laborales.
- Intensificación de la internacionalización y globalización de la vida económica, social y cultural, con lo que se ha facilitado el intercambio de experiencias, pero también han penetrado fácilmente costumbres y vicios que provocan una diversión al margen de las necesidades para el aprendizaje de las matemáticas.
- Impacto extraordinario de las tecnologías digitales, Internet y las redes sociales en la comunicación y en la conciencia sobre la complejidad de la realidad. El mundo ha hecho de las redes sociales virtuales una forma clave de comunicación y de organización que ha revolucionado el sistema educativo y también distrae al joven.
- Leve mejoría de la situación socioeconómica de la región sin que se haya eliminado, ni con la "Ola Rosa" de la izquierda, ni con la "Ola Lila" de la derecha, el cada vez más peligroso desequilibrio entre los grupos que poseen las riquezas y las clases desposeídas.

Características de la última etapa del CIAEM: 2003-2018

Se puede decir que el CIAEM inició una nueva etapa histórica en la primera década del siglo XXI, con el empeño de lograr 10 objetivos principales:

1. Potenciar la calidad académica y la proyección de las conferencias interamericanas. Esto se logró con dos acciones muy claras: por un lado, mediante un aumento considerable en especialistas de alto nivel de la comunidad internacional de Educación Matemática (el número de oradores invitados de las CIAEM ha oscilado entre 30 y 50 personalidades); y por otra parte, con demandas mayores de excelencia científica, mediante revisiones rigurosas y toda una estructura científica muy cuidadosa. Esto ha sido más notable a partir del XIII CIAEM de Recife, Brasil. Las CIAEM se han convertido en este periodo en una referencia regional de calidad para el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.
2. Consolidar la publicación regular de trabajos seleccionados de las Conferencias. Esto se consiguió a través de un convenio con la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada por la Universidad de Costa Rica).
3. Crear mecanismos de reconocimiento a personalidades de la comunidad internacional de Educación Matemática tanto por sus trayectorias académicas como por su apoyo a la región latinoamericana y también al CIAEM. En este sentido se crearon la Medalla *Luis Santaló* (que se entrega en cada CIAEM desde 2011) y la *Medalla Marshall Stone* (se entregará por primera vez en la XV CIAEM, 2019).

4. Incrementar la asociación con la comunidad internacional de Educación Matemática. Esto se ha logrado con el protagonismo de directivos del CIAEM en las actividades del ICMI y de la *International Mathematical Union* IMU.
5. Apoyar la creación y desarrollo de nuevos espacios regionales para la Educación Matemática. Esto se logró especialmente mediante el apoyo a la creación de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (REDUMATE), que nació en un taller seminario del *Capacity and Networking Project* CANP del ICMI, Costa Rica, 2012.
6. Apoyar vitalmente congresos regionales de Educación Matemática. Esto se ha realizado con la organización de los *Congresos de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (CEMACYC), celebrados con sonado éxito, el primero en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013 y el segundo en Santiago de Cali, Colombia, en noviembre del 2017 y ya se apoya la realización del siguiente en Costa Rica en el 2021.
7. Consolidar el uso intensivo de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM, tanto en la organización de sus eventos como en su proyección y desarrollo. Evidenciado a través de un conjunto de plataformas alimentadas hábilmente desde Costa Rica que nutren sitios web, redes sociales y la plataforma que organiza las conferencias internacionales.
8. Crear y velar por el desarrollo de una comunidad virtual del CIAEM. No ha tenido todo el impacto generalizado que se desea, pero sin dudas ha jugado un papel definitivo en los últimos años.
9. Dinamizar y formalizar su estructura organizativa. Esto se consignó mediante *Términos de Referencia* y en particular con la obtención de personalidad jurídica en México para el *Comité Interamericano de Educación Matemática.* En este periodo que analizamos, el CIAEM se concibe como una Red, como una Comunidad académica y no como una sociedad profesional de carácter internacional.
10. Mantener una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) de los Estados Unidos de América. En este periodo, además de continuar una presencia en las reuniones nacionales del NCTM se han traducido al español varios textos del NCTM, por ejemplo *Principles to actions: Ensuring Mathematical Success for All* que apareció en febrero 2014. Estos se han distribuido en las actividades del CIAEM. Estas traducciones han sido realizadas por medio de convenios y contratos formales entre las directivas del NCTM y el CIAEM.

Un detalle interesante en esta nueva etapa fue la participación de directivos, expresidentes y varios miembros de la red del CIAEM apoyando una profunda reforma curricular de la enseñanza de las matemáticas en la educación preuniversitaria en Costa Rica (véase http://www.reformamatematica.net-), aprobada por las autoridades educativas de ese país en 2012 (Ruiz, 2013 y 2018). Varias acciones del CIAEM y de REDUMATE han permitido difundir las lecciones de esa importante reforma en toda la región.

CIAEM, ICMI y nuevos espacios regionales para la Educación Matemática

El CIAEM siempre ha mantenido una perspectiva interamericana, en particular, entre los países más desarrollados y los que todavía están en vías de desarrollo. Pero también entre la región americana y el resto del mundo. Una de las relaciones más importantes para el CIAEM siempre ha sido con el ICMI. D'Ambrosio (2008). Marshall Stone siendo presidente del ICMI fundó el CIAEM, y distinguidos directivos del CIAEM han estado en el Ejecutivo del ICMI (U. D'Ambrosio, E. Luna, C. Vasco). La relación o cercanía sin embargo ha tenido altibajos. Particularmente, entre 1998 y el 2008 no hubo un representante del CIAEM en el Comité Ejecutivo del ICMI y tampoco lo hay entre el 2017 y el 2020.

Entre el 2007 y el 2016, esto debe subrayarse, se dio una relación especial entre el CIAEM y el ICMI. En la XII CIAEM de Querétaro participó Michèle Artigue en ese entonces presidenta del ICMI (aunque había participado también en la XI CIAEM en Blumenau). Uno de los elementos especiales, sin embargo, fue que este evento sirvió a su vez para apoyar al ICME 11 que se desarrollaría en Monterrey en el 2008.

Un factor que profundizó la nueva relación fue la incorporación del presidente del CIAEM, Angel Ruiz Zúñiga, dentro del *International Program Committee* del ICME 11, lo que permitió concertar diversas acciones de miembros del CIAEM en el congreso. La cercanía entre CIAEM-ICMI se intensificó aún más cuando el presidente del CIAEM fue electo uno de los vicepresidentes de ICMI para el periodo 2010-2012, lo que se anunció en ICME 11, y luego fue re-elegido para el periodo 2013-2016 (esto nunca había sucedido anteriormente). Por decisión del Ejecutivo del ICMI el presidente del CIAEM fue designado para formar parte de la *Commission for Developing Countries* CDC de la IMU entre 2010 y 2018 (una de las comisiones más importantes del IMU). Estas posiciones ofrecieron oportunidades muy valiosas para fortalecer los lazos de CIAEM con ICMI y con IMU y, en particular, promover acciones en América Latina.

Una de las acciones más importantes dentro de esa nueva relación (y de las oportunidades abiertas) se dio alrededor del *Capacity and Networking Project* (CANP) del ICMI, el programa más importante del ICMI para países en desarrollo; este decidió realizar su segundo "workshop" (el primero había sido en Mali, Africa) para favorecer América Central y El Caribe. Así es como se organizó la Escuela seminario *Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática* (CAMP 2012) en agosto de 2012, en Costa Rica. El "workshop" contó con la principal iniciativa del ICMI para propiciar el progreso de la Educación Matemática en regiones en vías de desarrollo, con el patrocinio del *International Council for Science* ICSU e IMU (cf. CANP, 2012). El nivel de apoyo financiero y académico dado por ICMI al CAMP de Costa Rica nunca se había dado en la región latinoamericana. El apoyo del CIAEM a este workshop fue muy fuerte (especialistas, representantes nacionales, seguimiento, coordinación, elaboración intelectual, ...). No habría sido posible ese evento sin el compromiso del CIAEM.

En el CAMP 2012 se fundó la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (REDUMATE, http ://redumate.org) con una perspectiva hacia América Central y El Caribe, pero con una visión internacional muy amplia. Ya en noviembre del 2013 REDUMATE organizó el I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (http://i.cemacyc.org), en República Dominicana, que tuvo un gran éxito (más de 600 participantes, 150 oradores de 19 países) y en noviembre del 2017 se repitió el éxito logrado con un II CEMACYC entonces en Santiago de Cali, Colombia (con 400 participantes). El apoyo del

CIAEM a la Red y a estos congresos ha sido decisivo. Existe entonces una relación estratégica de cooperación entre CIAEM y REDUMATE (y una "intersección no vacía" entre ambos espacios).

El ICMI decidió realizar un CANP 5 en Lima en 2016 para favorecer una nueva región de América Latina (Bolivia, Ecuador, Perú, Paraguay). Tanto el presidente del CIAEM como uno de sus vicepresidentes estuvieron en el "workshop" de este CANP en donde nació una nueva organización: *Comunidad de Educación Matemática de América del Sur* CEMAS: Esta iniciativa también se inscribió dentro de las oportunidades abiertas por la participación del presidente del CIAEM en el Ejecutivo del ICMI. Miembros de CEMAS y REDUMATE participan en las actividades de la otra Red y de las CIAEM.

Aunque el Comité Ejecutivo del ICMI no haya incluido en el periodo 2017-2020 un representante del CIAEM, eso no significa que las relaciones entre ambas organizaciones se vayan a debilitar. El periodo 2007-2017 afianzó una fructífera relación de cooperación académica. El CIAEM sigue siendo la organización multinacional oficial del ICMI en la región americana.

Tendencias promovidas a través de las actividades plenarias de las CIAEM y los CEMACYC

Revisando los temas de las conferencias plenarias y las mesas redondas que se han organizado en los cuatro CIAEM y los dos CEMACYC realizados a partir de 2003 hasta el 2019 encontramos una diversidad y énfasis muy similar al observado en los ICME (*International Congress on Mathematical Education*). Hemos resumido temas y nacionalidad de las personalidades invitadas para facilitar la reflexión.

Temáticas principales de las actividades plenarias:

Resolución de problemas: [6 act.]

Formación de profesores: [6 act.]

Experiencias de la Educación Matemática en las Américas: [6 act.]

Tecnologías digitales en Educación Matemática: [6 act.]

Historia y epistemología de las matemáticas: [5 act.]

Otros temas de Didáctica de la Matemática: [5 act.] (Competencias (2 act.), Situaciones didácticas (1 act.); Semiótica (1 act.), Currículo (1 act.).

Nacionalidad de los participantes en actividades plenarias:

Del área interamericana (contando repeticiones): Argentina [2]; Brasil [5]; Chile [1]; Colombia [7]; Costa Rica [3]; Cuba [3]; Guatemala [1]; México [4]; República Dominicana [2]; USA [5]; Venezuela [2].

De otras áreas (contando repeticiones): España [3]; Dinamarca [2]; Francia [6]; Italia [1]; Japón [1]; Nueva Zelandia [1]; Reino Unido [1]; Suráfrica [1]

Destacamos en todo este periodo la notable y contundente participación plenaria del infatigable Maestro Ubiratan de Ambrosio y la destacada Educadora Michèle Artigue, ambos con una larga y exitosa trayectoria profesional que, con sobrados méritos, ha sido reconocida internacionalmente.

Un comentario: aunque en las conferencias paralelas y en las temáticas principales de las CIAEM se ha incluido como temas centrales la formación inicial y continua de maestros y

profesores, sería conveniente darle un lugar mayor en las plenarias. En particular, haciendo un llamado efectivo al desarrollo del pensamiento matemático y sobre todo en el uso adecuado de las prácticas argumentativas en el nivel secundario de enseñanza.

Perspectivas

El CIAEM tendrá desafíos importantes en los próximos años. El escenario internacional ha cambiado mucho desde que nació en 1961, y aunque desde el 2003 solo han pasado poco más de 15 años, los cambios planetarios han sido extraordinarios. Las condiciones y las expectativas de individuos y organizaciones son otras. Estar atentos a los cambios generacionales y a los que provocan la tecnología y la sociedad contemporánea, será apenas un punto de partida.

Las acciones del CIAEM del futuro deberán asumir como una base los extraordinarios resultados obtenidos mediante los diez objetivos que se han desarrollado en los pasados años, y en esa dirección: velar dar continuidad a una labor por el fomento de la calidad intelectual de sus conferencias, la regularidad de sus publicaciones, el uso sabio de las tecnologías en sus quehaceres, la potenciación de los espacios en la Educación Matemática que se han creado con el patrocinio y la inspiración de ICMI (en particular con REDUMATE y CEMAS) y seguir cultivando la rica relación con el ICMI, el IMU y el NCTM que se ha logrado fortalecer mucho en los últimos años.

Finalmente, en los últimos años, el equipo directivo del CIAEM ha logrado mantener una relación de no confrontación con las otras organizaciones multinacionales que trabajan en la región (como la FISEM y el CLAME). De lo que se trata para todos es de colocar los objetivos de calidad, pertinencia y seriedad académicas como la base para que los profesionales de la Educación Matemática, investigadores, docentes y estudiantes sigan sumándose al esfuerzo por lograr un impacto mayor en la extensión de una cultura matemática integral sólida y pluralista en toda la región.

Referencias y bibliografía

Comité Interamericano de Educación Matemática CIAEM (2011). Términos de referencia. Descargado de http ://ciaem-iacme.com en enero 2019.

D'Ambrosio, U. (2008). ICMI and its influence in Latin America, in M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008*). *Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education*, Roma: Instituto Della Encyclopedia Italiana–Collana Scienze e Filosofia.

Escuela seminario Construcción de capacidades en Matemáticas y Educación Matemática, CAMP (2012). Descargado de http ://www.cimm.ucr.ac.cr/canp en enero 2019.

International Commision on Mathematical Instruction ICMI (2012). Multi-national Mathematical Education Societies Affiliated to ICMI. Descargado en enero 2019 de http//www.mathunion.org/icmi/abouticmi/affiliate-organizations/math-education-societies.

Ruiz, A. (2013). El CIAEM y las organizaciones internacionales de Educación Matemática en América Latina. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 8. Número 11, pp. 15-25. Costa Rica

Ruiz, A. (2018). *Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de matemáticas que enfatiza capacidades superiores*. México: Comité Interamericano de Educación Matemática Descargado de https://www.angelruizz.com/wp-content/uploads/2019/02/Angel-Ruiz-Evaluacion-y-pruebas-2018.pdf en febrero de 2019.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Las capacidades superiores en el currículo matemático de Costa Rica y los retos para evaluarlas

Edwin Chaves Esquivel
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Costa Rica
echavese@gmail.com

Resumen

En el 2013 Costa Rica se inició la implementación de un currículo matemático para educación preuniversitaria, el cual está enfocado a la generación de capacidades cognoscitivas superiores y finalmente alcanzar una competencia matemática dirigida al uso de la disciplina en la interacción del individuo con el medio. Se pretende generar habilidades específicas y generales en su relación con los conceptos y el desarrollo transversal de capacidades matemáticas mediante la estrategia didáctica de resolución de problemas.

Por la complejidad del currículo, la evaluación ha constituido un reto; pero además la reglamentación evaluativa en el país no se adapta a los fundamentos teóricos que lo sustentan. Por ello, el Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica ha elaborado una propuesta para valorar las tareas matemáticas que se plantean para la implementación del currículo. Se espera que esta propuesta constituya una herramienta en la planificación de la acción docente y un insumo para alcanzar evaluaciones de calidad.

Palabras clave: educación matemática, didáctica de la matemática, currículo matemático, evaluación matemática.

Introducción

En el año 2012, el Consejo Superior de Educación de Costa Rica aprobó nuevos programas de Matemáticas para la educación primaria y secundaria. Con ello se pretendía generar un cambio drástico a la forma tradicional en que se venía enfrentando la enseñanza de las Matemáticas en el país. Para el diseño de este currículo se aprovecharon insumos generados en diferentes estudios investigativos en el país, así como la experiencia internacional en la Educación Matemática.

Este currículo propone a los docentes aprovechar el potencial de las Matemáticas como herramienta fundamental para el desarrollo de las diferentes disciplinas científicas. Se plantea como objetivo principal el fortalecimiento de capacidades cognoscitivas para enfrentar los retos

de la sociedad moderna, para la cual tiene especial relevancia: el conocimiento, la información, la demanda de habilidades y capacidades de razonamiento lógico, así como la toma de decisiones basadas en evidencia concreta.

Para lograr este objetivo se plantearon dos propósitos básicos: primeramente que cada estudiante debería asumir la responsabilidad de participar activamente en la construcción de su aprendizaje y, en segundo lugar, que la acción docente se enfocara a la generación de situaciones de aprendizaje que facilitaran el logro del primer propósito en forma motivadora.

Elementos claves del currículo

La competencia matemática

Como fue mencionado previamente, el enfoque o dirección de este currículo se vincula con la construcción de capacidades ciudadanas en el uso de las Matemáticas para la vida. En este sentido se promueve la adquisición de destrezas y habilidades intelectuales para alcanzar una competencia matemática que permita utilizar adecuadamente los conocimientos disciplinares en su diario vivir. Desde este punto de vista, la idea de *competencia matemática* se resume en: "… *una capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales, subraya una relación de esta disciplina con los entornos físicos y socioculturales y también brinda un lugar privilegiado al planteamiento y resolución de problemas…"* (MEP 2012. p. 14)

Con lo anterior se generó una ruptura con la visión tradicional de currículos previos que estaban centrados en contenidos, que promovían una horizontalidad a partir de ellos. A manera de ejemplo, observe la siguiente ilustración del formato que se aplicaba en el currículo de Matemáticas modificado en el 2005 y que venía desde 1995:

Objetivos	Contenidos	Procedimientos	Valores y actitudes	Aprendizajes por evaluar
4. Aplicar la desigualdad triangular, en la determinación de tripletas correspondientes o no a las medidas de los lados de un triángulo.	Desigualdad triangular.	Reconocimiento, en ejemplos concretos, de la desigualdad triangular. Formulación de la desigualdad triangular. Utilización de la desigualdad triangular en la estimación de posibles medidas de un lado de un triángulo, conociendo la medida de los otros dos. Utilización de la desigualdad triangular en la identificación de tripletas que corresponden a las medidas de los lados de un triángulo.	Autoconocimiento en sus capacidades, sus potencialidades y limitaciones, al desarrollar actividades propias del quehacer escolar.	Resolución de ejercicios y problemas donde utilice la desigualdad triangular.

Figura 1. Ejemplo presente en la Malla curricular de los Programas de estudio de Matemáticas, 2005.

Fuente: MEP 2005. p. 65

Como puede notarse, para el caso particular, todos los elementos de la malla curricular incluso la evaluación giraban alrededor del contenido "*Desigualdad triangular*", el cual aparece como un ente aislado, si se revisara con más detalle este instrumento, el contenido matemático que sigue es tratado de igual manera, y así se puede describir el comportamiento de la malla curricular completa en dichos programas de estudio. Esta estructura no posibilitaba que, por ejemplo, este contenido se integrara con el análisis de otros conceptos geométricos o incluso de otras áreas matemáticas.

Las habilidades y su integración

El currículo incluye cinco áreas matemáticas: Geometría, Números, Relaciones y Álgebra, Medidas y Probabilidad y Estadística, las cuales tienen diferentes pesos relativos en los distintos niveles educativos. Para cada una de las áreas matemáticas, se definen habilidades que se espera logren los estudiantes durante el proceso educativo. Se establecen dos tipos de habilidades: *generales* y *específicas*, que permiten establecer diversas formas de integración con los conocimientos matemáticos, según se muestra:

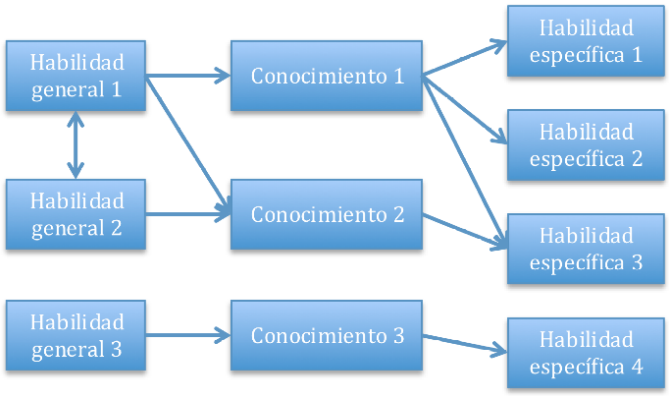


Figura 2. Integración de habilidades generales, específicas y conocimientos.

Desde la perspectiva de la acción de aula, primeramente se consideran las habilidades específicas, que son capacidades a corto plazo e intervienen en el quehacer diario. A un nivel macro, para cada ciclo educativo[1] el conjunto de habilidades específicas se sistematiza en habilidades generales, que son capacidades que se obtienen a lo largo del ciclo. Para lograr la articulación dentro del plan de estudios, la cantidad y calidad de conceptos o conocimientos matemáticos se ha formulado en función del progreso de las habilidades. En este sentido, el conocimiento o contenido matemático sigue teniendo un importante papel articulador, pero el proceso gira en torno a la adquisición de habilidades que se procuran lograr en el corto o largo plazo. Esta idea fue concebida para facilitar la integración de los diferentes elementos curriculares, de modo que las habilidades específicas por ejemplo, no son entes aislados, por el contrario, en todo momento se propone llevar a cabo la integración en ellas en las diferentes actividades o tareas de aprendizaje que se realicen (MEP 2012).

Momentos de la lección y construcción de aprendizajes

Debido a que el trabajo de aula constituye la puesta en práctica del currículo, se consideró pertinente en los programas de estudio explicitar al máximo esta acción. Para ello se estableció como estrategia didáctica la *resolución de problemas* visualizada a partir de cuatro momentos: *presentación del problema*, *trabajo independiente de los estudiantes*, *contrastación y comunicación de estrategias*, y *cierre o clausura* (MEP 2012. p.13). En cada uno de estos momentos el docente y sus estudiantes tienen roles muy particulares y realizan tareas específicas.

En relación con lo anterior, el currículo establece dos etapas, la primera consiste en el planteamiento de uno o más problemas orientados a la generación de nuevos conocimientos o habilidades. Acá se pretende que el estudiante pueda construir el aprendizaje y alcanzar

[1] La educación primaria está constituida de dos ciclos de tres años cada uno y la secundaria académica incluye un ciclo de tres años y el último de dos años.

habilidades por medio de la búsqueda de soluciones a los problemas. En la segunda etapa, en forma complementariamente, se deben plantear problemas dirigidos a la movilización de los conocimientos o habilidades adquiridas, en donde se pretende que los estudiantes puedan adquirir la memorización y automatización de ellos en su implementación en diversos contextos (MEP 2012).

Además del rol de orientar y moderar cada uno de los cuatro momentos, el docente tiene el reto de proporcionar los problemas que mejor se adapten a cada etapa, los cuales deben ser retadores y motivadores, además de estar direccionados estratégicamente al logro de habilidades que se integran con los conocimientos disciplinares.

Los procesos matemáticos y otros elementos articuladores del currículo

Sin embargo, este vínculo en el corto plazo entre los conocimientos matemáticos y las habilidades específicas no es capaz de generar, por sí solo, capacidades cognitivas más amplias (habilidades generales) que puedan encaminar hacia la competencia matemática. Es necesario que los estudiantes adquieran capacidades transversales, en el corto y mediano plazo en relación con el uso de estos conocimientos y habilidades específicas en la resolución de problemas. Estas capacidades transversales del currículo se adquieren mediante procesos matemáticos que se concentran en: *razonar y argumentar*, *plantear y resolver problemas*, *conectar*, *representar* y *comunicar*, y se pueden catalogar como "*actividades transversales que se asocian a capacidades presentes en cada área para comprender y usar conocimientos, apoyando el desarrollo de la competencia matemática"* (MEP 2012. p. 16). Entonces los procesos matemáticos son actividades cognitivas que realizan los individuos dentro de las distintas áreas matemáticas y que se vinculan con las capacidades para la comprensión y uso de los conocimientos. En resumen, cada proceso se pueden definir de la siguiente manera:

- ***Razonar y argumentar****: incluye actividades mentales que desencadenan formas del pensamiento matemático para desarrollar capacidades en la comprensión de una justificación, además desarrollar argumentaciones y conjeturas, entre otras.*
- ***Plantear y resolver problemas****: Refiere al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos. Aquí se dará un lugar privilegiado a los problemas en contextos reales. Se trata de capacidades para determinar las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema.*
- ***Comunicar****: es la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y argumentos matemáticos. Busca generar la capacidad para expresar ideas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático de manera escrita y oral a otras personas.*
- ***Conectar****: pretende el entrenamiento estudiantil para la obtención de relaciones entre las diferentes áreas matemáticas. De igual manera, persigue motivar conexiones con otras asignaturas y con los distintos contextos.*
- ***Representar****: Pretende fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares). También pretende desarrollar capacidades para traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas.* (Chaves 2017. p.4)

En relación con lo anterior, además de los procesos matemáticos también deben interactuar con cinco *ejes disciplinares* que afectan transversalmente el plan de estudios y fortalecen el currículo:

- *La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.*
- *La contextualización activa como un componente pedagógico especial.*
- *El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales.*
- *La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.*
- *El uso de la historia de las Matemáticas.* (MEP 2012. p. 35)

Los dos primeros se asumen como articuladores, por lo que además sirven para modular los otros ejes. La resolución de problemas crea la necesidad de asumir patrones de trabajo. La contextualización pretende fortalecer y motivar la interacción de los estudiantes en su relación con la realidad. Con estos dos ejes se establece una asociación crucial para el actual currículo: *la resolución de problemas en contextos reales*. En cuanto al uso de la tecnología, se propone emplear las tecnologías digitales como una herramienta para favorecer la visualización, realizar simulaciones, simplificar cálculos o propiciar representaciones mejor ajustadas a la realidad. El fortalecimiento de actitudes, creencias y valores positivos sobre las Matemáticas no sólo contribuye al desarrollo de la personalidad individual, sino que amplía el espacio de los valores y las actitudes en general, tales como la cooperación y la solidaridad. Por su parte, con el uso de la historia de las Matemáticas se propone brindar un rostro humano a la disciplina, de modo que la discusión sobre hechos históricos permita que el estudiante valore los desarrollos matemáticos como construcciones particulares para resolver algún problema del momento, con ello además se fortalece la herencia cultural (Ruiz 2017).

Los niveles de complejidad y el desarrollo de capacidades cognitivas superiores

De acuerdo con lo planteado hasta ahora en este currículo, por un lado se proponen habilidades vinculadas con las áreas matemáticas y por otro se plantean procesos que favorecen la reproducción de capacidades cognitivas transversales. La estrategia didáctica de resolución de problemas tal como ha sido concebida viene a contribuir en este propósito. Sin embargo, para lograrlo plenamente se requiere posibilitar una acción cognitiva que supere meras acciones rutinarias, por ello se necesita que los problemas planteados contengan diferentes niveles de complejidad, esto permite dar mayor profundidad según los intereses del momento académico en que se encentren. Los niveles de profundidad propuestos se resumen por:

- **Reproducción**: se refiere a ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados.
- **Conexión**: remite a la resolución de problemas que no son rutinarios pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante, la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación.
- **Reflexión**: incluye la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. (MEP 2012).

Existe una relación directa entre los niveles de complejidad y las posibilidades de activar diferentes procesos matemáticos en estos mismos niveles, con ello se puede avanzar hacia la consolidación de la competencia matemática y posibilitar en los estudiantes el tránsito en forma creciente del logro de capacidades cognitivas moderadas hacia las capacidades cognitivas superiores. Al respecto Rico & Lupiáñez (2008) establecen "*La consecución de competencias en el aula debe buscar su desarrollo mediante el avance y la progresión en los niveles de cada una de ellas, avance que se lleva a cabo mediante secuencias de tareas de complejidad creciente* ".

(p. 153). El siguiente esquema resume la interacción entre deferentes elementos curriculares y la forma en que ellos apuntan la competencia matemática, según se ha descrito previamente:



Figura 3. La competencia matemática general como constructo curricular. Ruiz 2017. p.66

El reto evaluativo en el marco el currículo matemático

El tema de evaluación fue excluido casi por completo en los programas de estudio de Matemáticas y únicamente aparecen algunas recomendaciones generales. Esta ausencia de elementos de evaluación al momento de elaboración y aprobación del currículo obedeció a que no estaban dadas las condiciones académicas para lograr un consenso en esta materia, no solamente a lo interno del Ministerio de Educación Pública sino en el ámbito nacional. El principal problema radicó en que para este ministerio existe un Reglamento General de los Aprendizajes que involucra a todas las materias académicas tanto para la educación primaria como secundaria, además al final de la secundaria se ha venido realizando una prueba estandarizada de bachillerato[2] en varias asignaturas, entre ellas Matemáticas. Por esta razón, cualquier reforma evaluativa que se hiciera para Matemáticas tendría que plantearse en un marco mucho más amplio que involucrara a las demás asignaturas.

Por otro lado, la reglamentación evaluativa vigente no articula coherentemente con los fundamentos teóricos de un currículo matemático que gira en torno a capacidades cognitivas superiores. A pesar que la implementación del currículo se encuentra en su sétimo año, este problema no ha podido ser resuelto a nivel ministerial. Por ello, el reto ha consistido en posibilitar una estrategia evaluativa que se aproxime a las necesidades curriculares en el marco de un reglamento que no ha sido diseñado para eso.

En el país, la evaluación tradicional en Matemáticas ha tenido características meramente sumativas y se han basado mayoritariamente en exámenes y trabajos extra-clase, los cuales normalmente se abocan a medir la capacidad del estudiante para memorizar y aplicar procedimientos rutinarios (Chaves, Castillo, Chaves Fonseca y Loría 2010). Por ejemplo, si se analiza nuevamente el contenido de la figura 1, el proceso evaluativo tradicional consiste básicamente en identificar si un estudiante es capaz de utilizar la desigualdad triangular para identificar posibles medidas de un lado de un triángulo conociendo la medida de los otros dos lados, o para identificar tripletas de números que puedan corresponder a las medidas de los lados

[2] En el año 2019 será la última vez que se apliquen las Pruebas Nacionales de Bachillerato en la educación regular, se ha decido sustituirla por una prueba en el penúltimo año de la educación media.

de un triángulo. Sin embargo, en una nueva perspectiva, resulta mucho más complejo identificar si un estudiante tiene la capacidad de razonar y argumentar en relación con el uso de la desigualdad triangular en diferentes contextos o si es capaz de realizar conexiones de este conocimiento con otros, tanto dentro del área de la Geometría como con otras áreas matemáticas. Esta dificultad obedece a que no es posible observar las capacidades directamente, se requiere de observar las acciones y el desempeño del estudiante en diferentes momentos (Ruiz 2017). Al respecto Ruiz señala que las capacidades superiores:

> *"tienen un grado mayor de "invisibilidad"; pero hay más: solo pueden evaluarse en situaciones específicas donde hay conocimientos y habilidades. Es decir: no se pueden extraer como si fueran entes aislados todos estos elementos (conocimientos, habilidades capacidades superiores), todos participan de diferente manera integradamente en la construcción cognoscitiva.*
>
> *Ahora bien, precisamente por ese carácter invisible y complejo no es posible establecer juicios absolutos sobre la intervención de estas capacidades. Esto implica que en la evaluación siempre se obtendrá una aproximación …"*(p. 211).

Este investigador apunta que para que la evaluación proporcione una adecuada cobertura del conjunto de competencias matemáticas se necesita un grupo diverso de actividades. En este sentido, diferentes investigadores señalan para una prueba en sí misma no puede ser exhaustiva en relación a la evaluación adecuada del pensamiento matemático en los estudiantes y, más bien, es necesario desarrollar diferentes estrategias para evaluar procesos complejos como los establecidos en el currículo matemático nacional (Ruiz 2017; Niss 2003; OCDE 2013).

Con lo cual, un currículo que enfatiza capacidades superiores requiere de utilizar varias dimensiones y diversos instrumentos evaluativos tanto en las aulas como para las pruebas estandarizadas, en donde la evaluación formativa debe jugar un rol preponderante (Ruiz 2017).

En virtud de lo anterior, la evaluación constituye un componente transversal del proceso educativo que debe ser considerado en el mismo momento de la planificación educativa. Entonces el primer componente para articular una evaluación coherente con los fundamentos curriculares, consiste en evaluar cada una de las tareas matemáticas que se planifican para la acción educativa. Esto incluye el valorar los problemas que se plantean no solamente en las evaluaciones (sea de aula o en pruebas nacionales) sino también lo que se proponen para las dos etapas de la acción de aula, tal como se muestra en la figura 4.

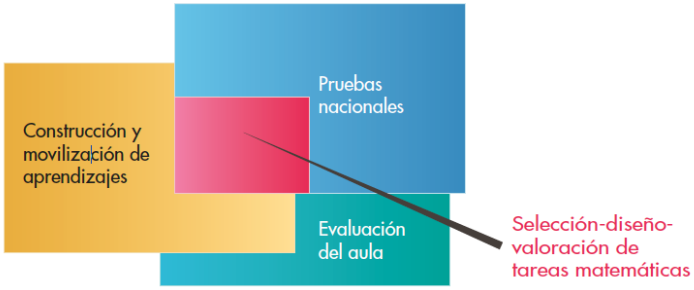


Figura 4. Selección-diseño-valoración de tareas matemáticas. Ruiz 2017. p.214

De acuerdo con lo anterior, con el propósito de contribuir en la relación entre currículo y evaluación, el proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, elaboró un modelo que incluye indicadores para valorar la intervención de los procesos matemáticos y criterios para

identificar los niveles de complejidad de los problemas que se plantean para las diferentes tareas de aula. Los aspectos teóricos que se proporcionan en dicho modelo pretenden ofrecer orientaciones a los actores del proceso educativo para tener un mayor acercamiento a la implementación del currículo.

A manera de resumen, la propuesta detalla el papel de los diferentes componentes curriculares; sin embargo, acá únicamente se describirá un modelo para valorar capacidades superiores y niveles de complejidad[3]. De acuerdo con Ruiz (2017), "*Las capacidades superiores participan de manera múltiple y sinérgica, a veces todas ellas actúan y a veces solo algunas; puesto de otra manera: existe una intersección no vacía entre las diversas capacidades superiores*." (p.100).

Tal como se describió previamente, las activación constante de los diferentes procesos matemáticos posibilita la adquisición de capacidades superiores (que oportunamente llevan el mismo nombre) por parte de los estudiantes. Entonces, no solamente es relevante sino también práctico el potenciar una estrategia evaluativa de tareas matemáticas que valore el rol de los procesos de acuerdo con sus niveles de interacción y complejidad, de este modo, indirectamente se puede valorar el potencial de la tarea matemática en la generación de las capacidades cognitivas.

La propuesta establece una estrategia para valorar la participación de los procesos matemáticos en cada problema y al mismo tiempo determinar su nivel de complejidad a partir de ello. El modelo está constituido por dos elementos:

- *61 indicadores que consignan la intervención de los procesos matemáticos en un problema organizados en tres grados distintos*
- *5 criterios para que a partir de los indicadores y de la estructura de su intervención se pueda realizar valoración.* (Ruiz 2017. p. 103)

El siguiente esquema muestra la forma en que aparece la relación entre los procesos o capacidades y los niveles de complejidad.



Figura 10. Grados de procesos / capacidades superiores

Figura 5. Grados de procesos/ capacidades superiores. Ruiz 2017. p.104

Para cada proceso se han establecido diferentes indicadores que permiten ubicar al problema que se está analizando en uno u otro grado de complejidad según corresponda, para

[3] Si usted quiere mayores detalles sobre la propuesta puede consultar a Ruiz (2017) en https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916 .

ello se prioriza en cada caso el indicador o indicadores que presentan un mayor grado. Para valorar el problema integralmente se realiza un análisis ponderativo de acuerdo con el grado de complejidad que presentó en cada proceso, considerando para ello los siguientes criterios:

- *NC1: cuando en un problema la intervención de los procesos no supera el grado 1, se acepta que el problema es de reproducción.*
- *NC2: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 2 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de conexión.*
- *NC3: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 3 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de reflexión*. (Ruiz 2017. p.124-125)

Cuando no se satisfaga alguna de las condiciones previas se establecen otros criterios secundarios para realizar la clasificación, tomando en consideración los indicadores del mayor grado y otras valoraciones específicas de cada problema, se considera que los procesos "*Razonar y argumentar"* y "*Plantear y resolver problemas*" deben ocupar un lugar preponderante para valorar el estímulo de capacidades cognitivas superiores y la competencia matemática.

Conclusión

A manera de conclusión, para un currículo enfocado a la generación de capacidades superiores, la experiencia que ha tenido Costa Rica con su implementación deja importantes enseñanzas que no ha sido posible incluir acá pero que están disponibles en los diferentes insumos que han generado dentro del Proyecto denominado Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica[4]. En el presente documento se ha querido resumir brevemente la propuesta curricular y resaltar el trabajo que se ha venido realizando a lo interno de este proyecto para avanzar en los retos que la evaluación requiere para un currículo ambicioso como este.

La posibilidad de realizar esta descripción y clasificación en las diferentes tareas matemáticas que se propongan, permite al docente valorar la pertinencia de cada una ellas, ya sea para la acción de aula o para las evaluaciones, en un marco mucho más amplio como es un planeamiento educativo en congruencia con los fundamentos del currículo. La capacidad de precisar el grado de participación de cada proceso matemático permite mapear las acciones que se estarían estableciendo para avanzar de acuerdo con las posibilidades de los estudiantes hacia el logro de capacidades matemáticas. Desde el punto de vista de una sana planificación educativa, la realización de esta práctica permite ir haciendo los ajustes necesarios para consolidar la intervención de los procesos en el corto, mediano y largo plazo, por lo que apunta sólidamente al fortalecimiento de la competencia matemática. Al mismo tiempo, en el caso de la evaluación, los resultados que se puedan obtener mediante la puesta en práctica de este proceso de planificación en las acciones de aula, suministran información sobre el avance de los estudiantes y su rendimiento, de modo que se puedan establecer las acciones correctivas correspondientes.

La propuesta para la valoración de los problemas, es un importante insumo para avanzar en materia evaluativa y se espera venga a contribuir en la articulación de una estrategia evaluativa que sea congruente con el potencial de los principios curriculares que se han plasmado en los programas de estudio.

[4] https://www.reformamatematica.net/

Referencias y bibliografía

Chaves, E., Castillo, M., Chaves, E., Fonseca, J. y Loría, R. (2010). *La enseñanza de las matemáticas en la secundaria costarricense: entre la realidad y la utopía. Tercer Informe del Estado de la Educación*, San José, Costa Rica. Descargado de https://estadonacion.or.cr/files/biblioteca_virtual/educacion/003/Chavez_2010_Matematica.pdf

Chaves, E. (2017). *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica: 2010-2017. Memorias del II CEMACYC*. Cali, Colombia, 2017. Descargado de http://ciaem-redumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/494/154

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2005). *Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas. Costa Rica*: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado.* Costa Rica: autor. Descargado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Niss, M. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project.* En A. Gagatsis & S. Papastavrides (Eds.) 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education (pp. 115-124). Athens: Hellenic Mathematical Society.

Organization for Economic Co-operation and Development (OCDE) (2013). *Synergies for better Learning: An International Perspective on Evaluation ans Assesment*. Paris: OCDE.

Rico, L. & Lupiáñez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Ruiz, A. (2017). *Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial, diciembre. ISSN 1659-2573. Costa Rica. Descargado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

BREVE HISTORIA DEL CIAEM EN EL SIGLO XX: 1961-2000

Carlos Eduardo Vasco Uribe
Colombia
carlosevasco@gmail.com

A finales de los años cincuenta, el lanzamiento del Sputnik 1 por la Unión Soviética (1957) y la Revolución Cubana (1959) llevaron al gobierno de los Estados Unidos a la decisión de hacer un esfuerzo nacional e internacional en todos los frentes para superar el atraso tecnológico en computación y cohetería que los ponía en desventaja en la Guerra Fría. Entre las distintas estrategias para lograrlo, se incentivó la investigación científica en la recién fundada NASA y en la National Science Foundation y se iniciaron programas y proyectos para mejorar la educación en matemáticas y ciencias en Estados Unidos y lograr su extensión a todos los países latinoamericanos. En esta última política se pueden conjeturar dos finalidades complementarias: modernizar en nuestros países la preparación de los trabajadores, empleados y mandos medios para la naciente industrialización orientada a la maquila y a la sustitución de importaciones, a la vez que se neutralizaba el énfasis de la educación secundaria en filosofía, ciencias sociales y humanidades que podría inclinar a la juventud hacia el socialismo.

Cualquier parecido con la situación actual de generalizar la STEM: Science, Technology, Engineering and Mathematics en todos nuestros países, no es pura coincidencia.

La Organización de Estados Americanos (OEA), las reuniones de Ministros de Educación, los préstamos para educación del Banco Mundial y el Banco Interamericano de Desarrollo (BID), la Alianza para el Progreso y los Cuerpos de Paz del presidente John F. Kennedy promovieron una serie de reformas curriculares en todos nuestros países durante las décadas de los sesenta y setenta. Para el caso de las Matemáticas, un grupo de prestigiosos matemáticos norteamericanos formó un grupo de trabajo del cual resultó el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM-IACME), fundado en 1961 por Marshall Stone, entonces presidente del ICMI. La primera conferencia I-CIAEM se celebró en Bogotá.

Inicialmente, su misión fue la de impulsar las Matemáticas Modernas o “Nuevas Matemáticas” (“New Math”), inspiradas en los fascículos del grupo francés “Nicolás Bourbaki”, en todo el continente y asesorar a los Ministerios de Educación en la implementación de reformas curriculares que las difundieran desde los primeros años escolares. Para ello se contó con apoyo de la Organización de Estados Americanos OEA y de la Unesco.

Después de esa primera etapa orientada por Marshall Stone y Luis Santaló, asumió la dirección del CIAEM Ubiratán d'Ambrosio de 1979 a 1987, quien extendió la acción de nuestra organización a distintos frentes de investigación en educación matemática; en particular, inició en Latinoamérica la etnomatemática y fomentó las investigaciones sobre las Tecnologías de la Información y Comunicación TIC en la educación matemática; para ello, buscó la colaboración de algunas empresas que entraron en el campo de la Tecnología Computacional en la educación, posteriormente llamadas "TIC", Tecnologías de la Información y la Comunicación, como la Texas Instruments, la Hewlett-Packard y los desarrolladores de software para computadores y calculadoras gráficas como los programas "Geometer's Sketch-Pad" y "Cabri Geomètre".

La preocupación etnomatemática de Ubiratán y Paulus Gerdes no tuvo mucha acogida inicialmente fuera del Brasil, y se tardó unos 20 años —de 1980 al 2000— en avanzar hacia el abandono gradual de las Nuevas Matemáticas al estilo Bourbaki como modelo para imitar e impulsar en nuestros países. Pero esos cambios se dieron por otras iniciativas y tendencias; en realidad, los trabajos de los miembros del CIAEM y de los organizadores de los congresos en nuestros países poco tuvieron que ver con esos cambios en la dinámica inicial de la organización CIAEM-IACME, pues durante la dirección del CIEAM de Eduardo Luna, del 87 al 95, se fue perdiendo el apoyo de la Unesco y el contacto con los Ministerios de Educación. Las nuevas orientaciones y la renovada energía que trajo al CIAEM el liderazgo de Eduardo Luna no tuvieron efectos apreciables en la mayoría de los países suramericanos más allá de la región Caribe.

En forma semejante, desde la presidencia de Fidel Oteiza de 1995 a 1999 y la mía de 1999 a 2003, tenemos que confesar que no fueron años muy favorables para el CIAEM. No notamos los cambios que se iban viendo poco a poco en las contribuciones presentadas en los eventos cada cuatro años, sobre todo respecto a las nuevas tecnologías TIC, a las nuevas tendencias de la didáctica francesa y a los avances en la educación matemática con las ideas de Hans Freudenthal en Holanda y luego en España, especialmente en Granada.

Solo a comienzos del siglo XXI, período del que no me ocuparé, la renovada energía que se sintió en el CIAEM, inspirada por María Salett Biembengut, impulsó la línea de modelación matemática en el Brasil; pero también tendríamos que decir que no tuvo mayor resonancia en los demás países Latinoamericanos, y fue más bien en Medellín en donde empezó a tener un impulso sustantivo la línea de modelación, pero de manera independiente del CIAEM.

Así pues, ni la didáctica francesa de los 80 con las contribuciones de Guy Brousseau e Yves Chevallard; ni la matemática auténtica de Utrecht en la línea de la fenomenología de Freudenthal, que impulsaron el análisis didáctico de Luis Rico, Pedro Gómez y Evelio Bedoya en Granada; ni los inicios del Enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font en Granada y en Barcelona; ni el enfoque noético-semiótico de Raymond Duval; ni el enfoque semiótico-cultural de Luis Radford en el Canadá entraron en Latinoamérica fueron apoyados ni impulsaron por el parte del CIAEM, que se redujo a preparar la conferencia cada cuatro años sin ninguna especificidad ni misión definida. Durante los últimos 20 años del siglo XX, nuestras conferencias, así fueran las mejores académicamente en toda Latinoamérica, no se distinguían ni misional ni temáticamente de los ICME, de las conferencias como los CIBEM, las del grupo PME, ni de las mejores conferencias subregionales como las de la RELME.

Afortunadamente, con la llegada del siglo XX, María Salett Biembengut le dio un nuevo impulso al CIAEM, y con la presidencia de Ángel Ruiz hemos vivido otra vez tiempos mejores.

Esta historia del comité del CIAEM y de las conferencias CIAEM del siglo XX se está viviendo y escribiendo año por año por todos ustedes, y serán otros futuros historiadores quienes la escriban.

El CIAEM, que llegó a los 50 años en 2011, ha organizado exitosas conferencias en Blumenau, Brasil en 2003; en Querétaro, México, en 2007; Recife, Brasil, en 2011, en Tuxtla-Gutiérrez, México, en 2015; los CEMACyC en Santo Domingo y en Cali. Estas conferencias y, en especial, el presente congreso de Medellín, nos auguran muchos éxitos para nuestra organización y para la educación matemática en toda Latinoamérica en los próximos cincuenta años.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Undergraduate teaching and learning of mathematics with open source textbooks: Uso de textos universitarios de matemáticas

Vilma **Mesa**
School of Education, University of Michigan
Ann Arbor, Michigan, USA
vmesa@umich.edu

Resumen

In the Undergraduate Teaching and Learning in Mathematics with Open Software and Textbooks project we study the use of open source computational resources in the teaching and learning of mathematics at undergraduate level (Beezer et al., 2018). The project gathers (a) real-time, individualized viewing data from three dynamic undergraduate textbooks for calculus, linear algebra, and abstract algebra; (b) ongoing surveys of users' descriptions of the textbook use; (c) users' questionnaires (beliefs and attitudes towards mathematics, technology, teaching, and learning); and (d) student performance (tests of knowledge and grades). The textbooks have been enhanced with WeBWorK, Geogebra, and interactive Reading Questions for which instructors can see the responses in real time, and computational cells. In this article I highlight features of the textbooks and the theoretical and methodological approaches to answer two questions: How do students and instructors use textbooks? and How can we develop textbooks that will improve teaching and learning?

Palabras clave: open-source textbooks, textbook use, data analytics, calculus, linear algebra, abstract algebra

Within the array of resources for teaching and learning, the textbook continues to be the most prevalent one for instructors and students. Textbook formats have been changing from paper to digital, open source formats, including sophisticated tools such as computing cells, annotation tools, and powerful search engines, easing access at relatively low cost. Importantly, open source textbooks never expire or go out of print and can be distributed at no cost to students, making them practically fully accessible. The study we report here is part of a large U.S. funded project that seeks to describe how instructors and students use three open-source, technologically enhanced textbooks: Active Calculus (Boelkins, 2018), Linear Algebra (Beezer, 2017), and Abstract Algebra (Judson, 2017). These textbooks have been created in PreTexT, a markup language that allows for the textbooks to be viewed in any device and in any platform.

We use Rezat and Strässer's (2012) didactical tetrahedron to investigate how resources support instruction (Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003, which is depicted in the base of the tetrahedron in Figure 1).

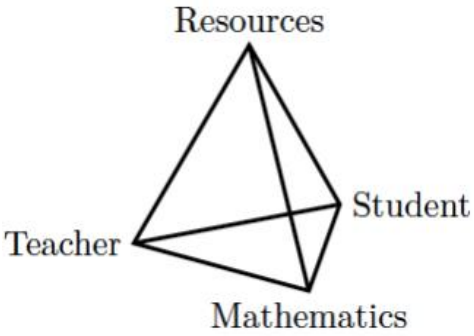


Figure 1. Resources can mediate instruction; the didactical tetrahedron (Rezat & Strässer, 2012, p. 241)

We follow Gueudet and Trouche (2009) in their definition of documents: the combination of a set of resources plus the schemes of utilization. Resources are defined as the collection instruments gathered for a particular purpose (e.g., textbook, past lecture notes, syllabi). Schemes of utilization include the processes that users engage in as they use the resources. These schemes have three distinct components, a material component (how the physical textbook or software is manipulated), a mathematical component (e.g., how the mathematical definitions are changed from canonical definitions), and the didactical component (e.g., how specific features are used). We seek to describe two documentation processes, *instrumentation*, that considers the influences on the user of the set of available resources, and *instrumentalization*, how the users change the resources as they use them (see *Figure 2*).

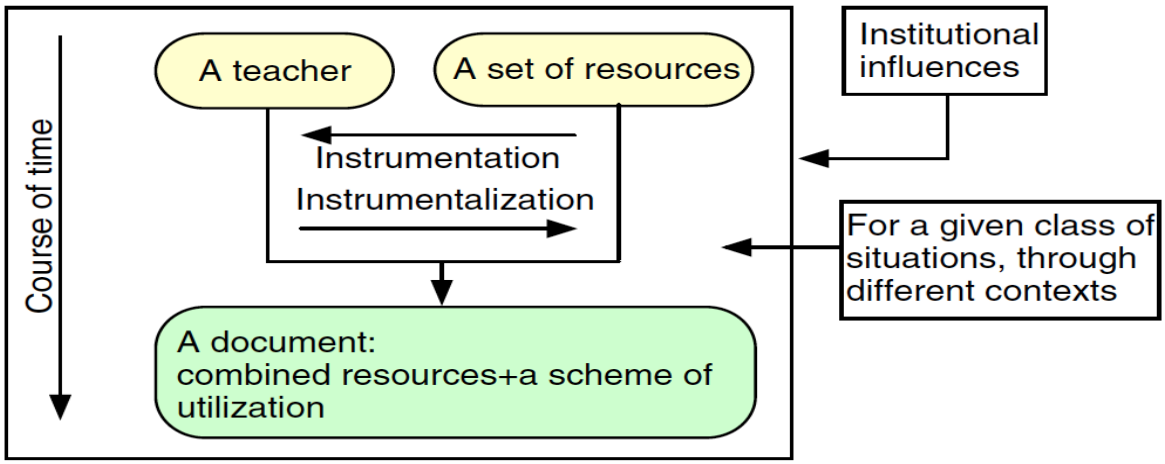


Figure 2: The documentational approach (Gueudet and Trouche 2009).

We do these by attending to two areas of instructors' work, lesson planning and its enactment seeking to identify operational invariants, instructors' beliefs that shape the design and use of resources (e.g., beliefs about ways with which students better understand definitions).

Methods

We use a mixed method design to gather use data from students and instructors as they engage with the textbooks (see *Figure 3*).

	Beginning of term	Week in the term						End of term
		2	4	6	8	10	12	14
Teacher surveys	X							
Teacher logs		X	X	X	X	X	X	
Course syllabi	X							
Computer-generated data of teacher and student textbook viewing								
Student logs		X	X	X	X	X	X	
Student survey					X			
Student tests	X							X

Figure 3. Data collection over a term.

Instructors and students fill out surveys at different points in time to describe their beliefs and attitudes towards mathematics and technology. We collect tests of students' knowledge at the beginning and at the end of the semester to gather information about their knowledge growth. In addition we collect student and instructor logs (online surveys with four to seven questions about the use of the textbook during the past two weeks). In addition we collect computer generated viewing data (see *Figure 4*) which can be navigated at the user level (see *Figure 5*), time spent and number of clicks done on each textbook section and element (see *Figure 6*).

To analyze the data we use ongoing natural language processing (Blei, Ng, & Jordan, 2003) to gather themes from all the student responses to logs. Instructors' responses are analyzed manually, to identify the schemes of use of their textbooks. We aggregate across semesters to identify recurring themes and triangulate the log and viewing data with the time data to corroborate themes and patterns of viewing.

Results

I report briefly on findings from (1) the analysis of bi-weekly log data from 102 students from four instructors in four different states who were using a dynamic linear algebra textbook (Beezer, 2017) in the Spring semester of 2018 and (2) the various documents that instructors and students created as they used the textbooks. The textbook includes common linear algebra chapters (e.g., systems of linear equations, matrices, vector spaces, etc.).

Analysis of bi-weekly log data

The analysis of the viewing data revealed, unsurprisingly, that viewing tended to occur during the days when the classes were offered (mostly during class sessions), close to exams days, or when homework was due. The students mainly used solutions of exercises—in 17,405 viewings, 81% of the viewing time was for solutions of exercises, 15% for examples, and 5% for all the other elements. In the log responses students reported that they checked the textbook the day before class or the last day of their break; they also used it to study for the upcoming class, or when they were stuck, missed class, or had not understood their instructor's explanation. Students reported using mainly problems, exercises, and examples as they were preparing for class. When asked about their use of theorems, definitions, and examples, students said those

were mainly used when producing notes for later use because they wanted to make sure they were connecting ideas and knew the basic definitions.

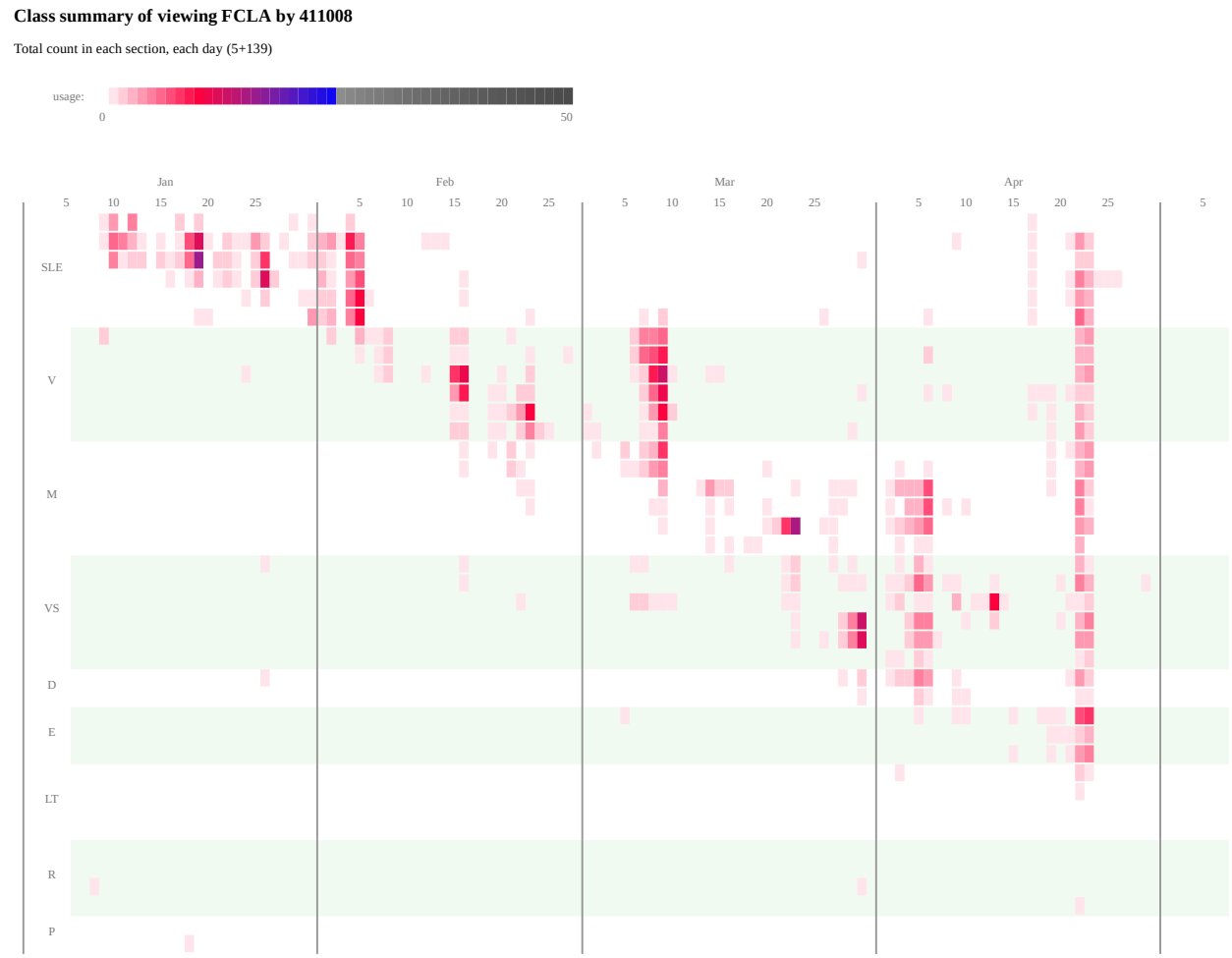


Figure 4. Viewing data for a course using the linear algebra textbook.

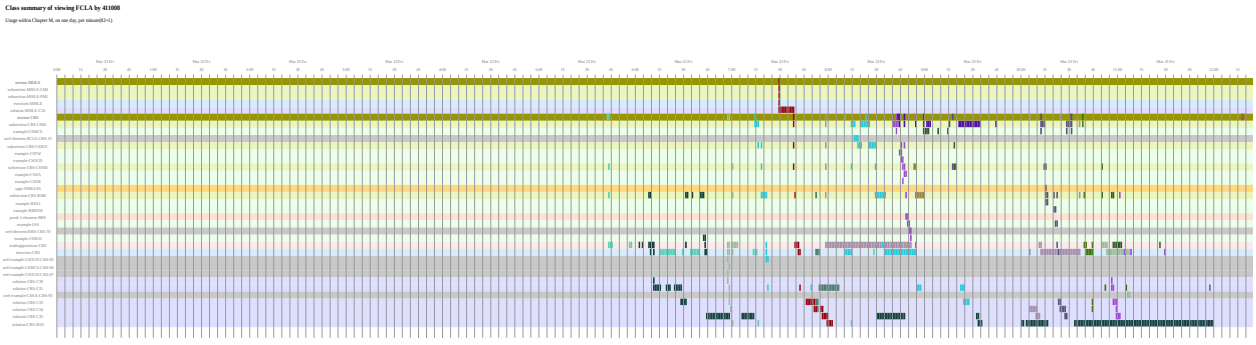


Figure 5. Viewing data at the individual level for a course using the linear algebra textbook.

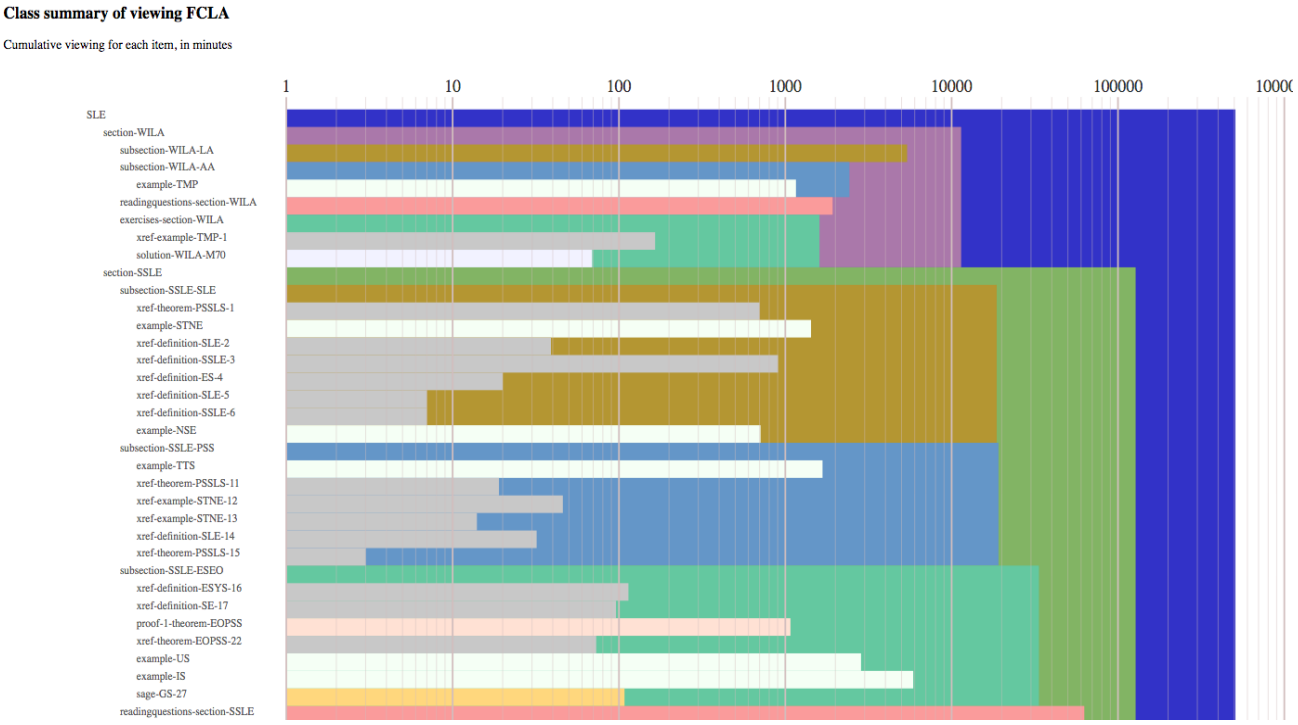


Figure 6. Data collection over a full term.

We found six themes in the analysis of student responses to their viewing of the linear algebra textbook (n = 120). The students indicated:

- Theme 1: viewing the textbook to study the material (58%); in addition, they mentioned some ways in which they do so. Students said that they:
- Theme 2: Start viewing examples (skipping text); then attempt the examples; and if need be, view the text to clarify ideas (17%).
- Theme 3: Start viewing homework; if the solution is wrong, read solution in detail to understand what problems they had (10%)
- Theme 4: Viewing to read word for word (8%)
- Theme 5: Viewing to cross-reference with class work (5%)
- Theme 6: Viewing formulas and definitions and keep track on personal document (3%)

Here are some illustrative examples:

- "I normally spend a couple of hours studying the book, I don't have a set schedule or timetable for my studying. I also use my textbook to review and touch up on things I haven't looked at in a while." (Theme 1)
- "Feb 19 Mon, Chapter M 6-9 PM: I was looking over example problems to help me prepare for my quiz, and I looked at definitions and theorems to help explain notation and solutions." (Theme 2)

Analysis of documents

Instructors created lecture notes, syllabi, personal notes, and assessments, all with the goal of facilitating their teaching of the course. Students created class notes, homework documents or solutions, and textbook notes in order to improve their understanding, for practice, and reminders or memorization. Both students and instructors used many other resources. In terms of the instructors, they relied on colleagues, past notes, notes from when they were students, other textbooks, Wolfram alpha and other mathematical programs such as Sage, Maple or Mathematica, the textbook authors, and programming software, such as Python. Students mentioning working with classmates, the Internet, Google, YouTube, Chegg, Khan Academy, class lecture videos, other printed and HTML textbooks, family members, and their instructors. Students did not use the open-source feature and infrequently used computational cells.

Figure 7 summarizes the instrumentation and instrumentalization processes for the document lecture notes that we have found. They range from the less to more dynamic uses; the figure also highlights how instructors made use of their textbook.

Less to More Dynamic

Lecture Notes	Connection to the Textbook
Handwritten notes in paper (from points of reference to full notes)	References to the textbook
Online videos using the textbook	• Whole parts of the textbook • Practice problems from the textbook in accompanying problem sheets
Beamer/Power Point presentations	Hyperlinks to the textbook
Sage worksheets	• Hyperlinks to the textbook • Capabilities for the production of graphs and calculations of the textbook

Figure 7. Variation in use of the document *Lecture notes*, from less to more dynamic, and connections to the textbooks.

During classroom, some instructors copied their notes on the blackboard, whereas some distribute them ahead of time to the students, either as PowerPoints that they could annotate by printing them, or as Sage worksheets that students could manipulate in real time. The rules of actions and the reasons students and instructors had to use various documents are given in Figure 8.

	Rules of Action	When/Why
Students	"Read"	Study for examinations/class (study notes)
	Look for definitions	Clarify meaning to work out homework (homework solution)
	Study examples/proofs	Work out the homework (homework solution)
Instructor	Identify major course topics	Create syllabus before the term starts
	Identify theorems and definitions	Create lecture notes to be consistent
	Identify examples	Clarify definitions/theorems in class (lecture notes) Visualize definitions (lecture notes)

Figure 8. Rules of action and reasons for using documents by students and instructors.

Discussion

In general, the students and instructors seemed reluctant to take full advantage of novel features (such as the programming cells) or the reading questions. We speculated that by itself, the design of the textbooks is insufficient for facilitating the adoption of different ways of using these textbooks in teaching and learning. We noticed that students did not use features that were not required by their instructors and that they used those that their instructors said were important to use (e.g., definitions, theorems, examples, proofs).

Instructors might need training about ways to take advantage of the open nature of the textbooks. Some instructors, for example, only associated open source with the free access of the textbooks. We are planning gatherings and conversations with designers, authors, and instructors, so that the process of creating the textbooks becomes more transparent. Textbook production is expensive, and thus, research that documents how open access textbooks can be made widely available is important. Yet, without knowing how to best take advantage of the new technologies, we might not realize their potential within mathematics classrooms.

Acknowledgment

Funding for this work has been provided by the National Science Foundation (IUSE 1624634). Any opinions, findings, and conclusions or recommendations expressed in this material are those of the author(s) and do not necessarily reflect the views of the National Science Foundation. Thanks to David Farmer and the American Institute of Mathematics for their research support.

References

Beezer, R. (2017). *First course in linear algebra*. Gig Harbour, WA: Congruent Press. Available at http://linear.pugetsound.edu. HTML available at http://linear.ups.edu/html/fcla.html.

Beezer, R., Judson, T., Farmer, D., Morrison, K., Mesa, V., & Lynds, S. (2018). Undergraduate Teaching

and learning in Mathematics with Open Software and Textbooks (UTMOST): National Science Foundation (DUE 1821706,1821329,1821114,1821509).

Blei, D. M., Ng, A. Y., & Jordan, M. I. (2003). Latent Dirichlet allocation. *Journal of machine Learning research, 3*(Jan), 993-1022.

Boelkins, M. (2018). *Active Calculus*. Available at https://activecalculus.org/single/: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 25*, 119-142.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*, 199-218.

Judson, T. (2017). *Abstract algebra: Theory and applications*. Available at http://abstract.pugetsound.edu. HTML available at http://abstract.ups.edu/aata/. Orthogonal Publishing L3C.

Rezat, S., & Strässer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM Mathematics Education, 44*, 641-651. doi:10.1007/s11858-012-0448-4

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

VISIÓN DESDE COLOMBIA DEL IMPACTO DE LA MATEMÁTICA MODERNA Y EL PAPEL DEL CIAEM

Luis Carlos **Arboleda**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
luis.carlos.arboleda@gmail.com

Resumen

Esta intervención dentro de la Mesa Plenaria sobre la historia del CIAEM se centrará en analizar el contexto social y político en el que se realiza la Primera Conferencia CIAEM de 1961 en Bogotá. Se examinan en particular los discursos inaugurales de las dos más importantes autoridades presentes en la reunión. Por parte del gobierno colombiano, el ministro de educación de Jaime Posada Díaz. Por parte de la comunidad académica, el célebre matemático Marshall Stone. Se mostrarán las diferencias de fondo en la manera como políticos y académicos se representaban la importancia de la conferencia en cuanto a fines, criterios y procedimientos para promover la reforma de la enseñanza de las matemáticas en el hemisferio.

Palabras clave: educación matemática, historia del CIAEM, matemáticas modernas.

El discurso de Jaime Posada Díaz en la apertura de la Conferencia

El discurso de apertura de la Primera Conferencia Inter-Americana en Educación Matemática estuvo a cargo del Ministro de Educación Jaime Posada Díaz. La frase de inicio se refiere al ambiente social y político de la época en el que se realiza la conferencia (Fehr, 1962, p.1): “En América, estamos construyendo una nueva forma de vida y cultura. Hay muchas manifestaciones de lo que estamos haciendo que delinean claramente un nuevo mundo y una nueva época”.

Posada da cuenta de un contexto hemisférico nuevo, pleno de optimismo y confianza en el cambio social y cultural, y fuertemente impregnado por una ideología de modernidad y desarrollo. El discurso expresa en general el punto de vista dominante de la mayoría de los gobiernos americanos y, en particular, del gobierno de Alberto Lleras Camargo, del cual Posada hizo parte como ministro entre 1961 y 1962. Este gobierno fue uno de los más comprometidos de la región con la creación de la *Alianza para el Progreso*-APP. Colombia llegó a convertirse en la vitrina del programa en cuanto fue uno de los primeros países de América Latina en recibir ayuda económica por parte del Banco Mundial y del Fondo Monetario Internacional. Sus élites

expresaban mejor que otras la vocación modernizante y de cambio de modelo económico representado en la APP. (Rojas, 2011).

Recordemos que Lleras Camargo fue el primer presidente liberal (1958-1962) del Frente Nacional, el pacto político con el cual los partidos liberal y conservador se hicieron el reparto hegemónico del ejercicio del poder del Estado entre 1958 y 1974. Después de más de un siglo de violencia partidista, el Frente Nacional se propuso transformar la cultura política del país y modernizar la economía colombiana. En lo personal, Lleras Camargo había acumulado un amplio liderazgo hemisférico como fundador y primer secretario de la Organización de Estados Americanos-OEA. Su talante pro-norteamericano, defensor de los principios de la libre empresa y enemigo declarado del comunismo y de la revolución cubana, lo convirtieron en el interlocutor más importante de los Estados Unidos en la región.

En tal condición, el gobierno de Lleras Camargo fue uno de los principales promotores del nuevo enfoque de cooperación inter-americana. Tanto en lo que se refiere al *Acta de Bogotá*, uno de los antecedentes más importantes en la constitución de la APP, como en la adopción de acciones y compromisos para el desarrollo del programa. Los gobiernos siguientes mantuvieron estos compromisos e implementaron las medidas contempladas en los documentos fundadores, encaminadas a promover el desarrollo económico y social. Varios destacados dirigentes latinoamericanos se consagraron a estas tareas.

Un caso notable es el de Posada, quien al finalizar el periodo de su ministerio, asumió el cargo de Embajador en Misión Especial de Colombia ante la APP en Washington hasta 1964. Luego, entre 1964 y 1966, dirigió la División de Educación, Ciencia y Cultura, de la OEA. Precisamente en el discurso inaugural de 1961 Posada se refiere a esta División como uno de los pilares de la organización, al estar encargada de expandir el programa inter-americano de la APP en las esferas cultural, científica y universitaria. Sugiere que una de sus funciones sea precisamente la realización permanente de conferencias como la de educación matemática, para lo cual formula la idea de conformar comisiones permanentes en matemáticas, física, química, biología y asuntos nucleares. Estas comisiones deberían permitirnos, dice Posada, adelantar a escala nacional y continental las transformaciones requeridas en "los métodos de enseñanza de la ciencia, utilizar los textos y tipos de laboratorios experimentales más recientes y apropiados, y mantenerse al tanto de los nuevos desarrollos" (Fehr, 1961, p. 2).

Volviendo al ambiente social y político en el cual se realiza la Conferencia, en el discurso de Posada se registran el *Acta de Bogotá* y la *Declaración de Punta del Este*, los dos documentos fundadores del programa de integración hemisférica. El Acta contiene las medidas que el Consejo de la OEA del 13 de septiembre de 1960 propuso como bases del programa decenal de la APP para el mejoramiento social y el desarrollo económico de la región (The Avalon Project, 1960). El programa será finalmente adoptado por todos los miembros de la OEA, excepto Cuba, en Punta del Este, Uruguay, el 17 de agosto de 1961. Al final de la *Declaración de Punta del Este* se fija el propósito reformista de las élites y gobiernos de la época de acuerdo con la ideología que lo inspiraba (The Avalon Project, 1961):

> [L]a comunidad interamericana está comenzando una nueva era, [una era] en la cual los logros institucionales, legales, culturales y sociales se complementarán con acciones inmediatas y concretas para asegurar una vida mejor, en condiciones de libertad y democracia, para las generaciones presentes y futuras.

Como antes se mencionó, Posada empieza su discurso explicando el contexto de los acontecimientos políticos del último año que enmarcan y resaltan la importancia de la Conferencia de Bogotá. Al dirigirse a los organizadores, participantes, observadores y conferencistas invitados provenientes de veintitrés naciones de América Latina, Estados Unidos y Europa, Posada afirma que el inter-americanismo del *Acta de Bogotá* y la *Declaración de Punta del Este* no es un sueño infructuoso, sino que corresponde a "la determinación de brindar a las personas un mejor y más progresivo marco de seguridad para el ejercicio de su dignidad" (Fehr, 1962, p.1).

Pero para concretar este gran propósito, continúa Posada, se requiere de la intervención de un fuerte programa intelectual de mejoramiento de la educación a todos los niveles. Como parecerá obvio a los presentes a la conferencia, este programa comporta la expansión y transformación de los servicios universitarios, incentivos a la investigación, a las publicaciones, a la enseñanza, y el establecimiento de relaciones de cooperación entre los hombres de ciencia de América Latina y quienes adelantan su estudio de manera prodigiosa y creativa a nivel internacional. Estas son las acciones futuras que Posada espera que se desprendan de la Conferencia, la cual no podría reducirse a este solo encuentro. Para ello confía particularmente en el soporte que puedan dar a estas iniciativas los conferencistas invitados, a quienes se dirige por su nombre: Profesores Schwartz, Choquet, Stone, Fehr, Bundgaard, Pauli, Cansado y Torres.

El discurso de Marshall Stone en respuesta a Posada

Marshall Stone dio respuesta al discurso de bienvenida de Posada en su calidad de Presidente desde 1959 de la *Comisión Internacional de Instrucción Matemática* (ICMI, por sus siglas en inglés). Fue de este organismo que partió la iniciativa de realizar la Primera Conferencia Inter-Americana de Educación Matemática en Bogotá. Aparte de su bien ganada notoriedad científica, Stone llegaba a la ciudad – a la cual se refiere en su discurso de manera galante como la "Atenas de las Américas"-, precedido de la fama de un matemático de talla mundial comprometido con reformas de la enseñanza de las matemáticas, tanto en Estados Unidos y Europa, como en América Latina y África. Stone había trabajado intensamente en la promoción dentro de la Unión Internacional de Matemáticas (IMU) de una esfera propia de actividades en educación matemática.

Fue precisamente durante su Presidencia del IMU (1952-1954) que revivió la antigua comisión de educación matemática inicialmente creada a instancias de Felix Klein, Guido Castelnuovo y Jacques Hadamard en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1908 en Bolonia, y que a partir de 1952 se transformará en el actual ICMI. Stone consideraba que precisamente por la importancia del papel de las matemáticas en la sociedad era necesario ocuparse de las consideraciones técnicas sobre los métodos de su enseñanza (Parshall, p. 19-20):

> Si juzgamos por los resultados nos resulta difícil no concluir que nuestros intentos de enseñar matemáticas como parte de un programa de masificación de la enseñanza han conducido, para decirlo sin rodeos, a un fracaso colosal, que evidencia nuestra ignorancia y conformidad con el arte de enseñar.

A finales de la década de 1950 el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas no solo era una preocupación central de la comunidad matemática, sino que los organismos económicos de los países industrializados empezaban a considerarla un asunto estratégico para el desarrollo. La expansión industrial y la superación del retardo tecnológico del mundo occidental imponían

una transformación en los contenidos y métodos de la educación, así como en los limitados alcances de la formación. La Organización para la Cooperación Económica y el Desarrollo (OECD; OECE antes de 1963) había creado desde 1958 la Oficina de Personal Científico y Técnico precisamente con el propósito de "hacer más eficiente la enseñanza de la ciencia y de las matemáticas". La reforma de la enseñanza empezaba pues a ser reconocida como una condición de fondo de la modernización económica (Charlot, 1986).

Probablemente fue a través del discurso de Stone que los matemáticos y las autoridades colombianas tomaron conciencia de la realidad política de la reforma. Stone informó sobre las acciones que estaba emprendiendo la OCDE en esta dirección y que ya sabemos fueron adelantadas bajo la asesoría y coordinación del mismo Stone. En primer lugar, la convocatoria a una docena de expertos reunidos durante diez días en las cercanías de París en noviembre de 1959 para establecer los propósitos de un nuevo currículo para la enseñanza secundaria de las matemáticas en el *Coloquio de Royaumont*. Meses después, se realizó la reunión de Dubrovnik, Yugoeslavia, en donde una docena de expertos durante cuatro semanas establecieron el *Programa para las matemáticas modernas de la escuela secundaria*, que sería publicado en 1961 en París con el nombre de *Mathématiques nouvelles* (Charlot, 1986, p. 17).

Stone agrega otra línea de acciones de la OECD que consistía en fomentar en algunas instituciones europeas la enseñanza experimental de cursos inspirados en este programa (Fehr, 1962, p. 5). Se trataba concretamente del lanzamiento el año anterior (1960) en Dinamarca de un programa de escuelas de verano para profesores de matemáticas sobre la producción de materiales de base para la reforma. Estas experiencias fueron presentadas con gran detalle en la conferencia del profesor Svan Bundgaard representante de ese país en la Conferencia.

Por último, Stone plantea su recomendación, como presidente del ICMI, de que antes de la clausura de la Conferencia se acuerde una forma de cooperación permanente entre los países de la región, siguiendo el ejemplo de Argentina y Estados Unidos. Esta cooperación debería sustentarse en dos principios (Fehr, 1962, p. 6):

- "[l]os problemas de la educación matemática tienen un carácter universal no obstante las variaciones y matices producidos por las condiciones locales", y
- "[s]u solución demanda la más estrecha colaboración de los matemáticos y profesores de matemáticas a nivel internacional.

En nombre del ICMI, órgano del IMU, Stone expresa su disposición de estimular esta nueva cooperación regional en educación matemática a través de las relaciones que la organización mantenía entonces con veintidós países en seis continentes. Efectivamente, la resolución final de la Conferencia acordó la creación de la *Comisión Inter-Americana en Educación Matemática* (CIAEM) de carácter permanente, con el propósito de "promover acciones orientadas a elevar el nivel y la eficiencia de la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria y la universidad." (Fehr, 1962, p. 168). También se conformó un equipo de dirección *pro tempore* con delegados de países de América Latina y bajo la presidencia de Stone quien desempeñó este cargo hasta la Conferencia de Bahía Blanca de 1972.

En la historia del CIAEM preparada en los 35 años de su existencia, Ruiz y Barrantes, en nombre de los educadores matemáticos de la región, subrayan el papel decisivo de Stone en la creación e impulso de la nueva organización (Barrantes & Ruiz, 1998, p. 28-29). Su capacidad de trabajo, su autoridad científica, el liderazgo que ejercía en la comunidad matemática internacional, su relación con los organismos de fomento a la ciencia y la educación, explican el

firme desarrollo del CIAEM en esta primera etapa. Pero ante todo se le reconoce a Stone su "gran aprecio por la región latinoamericana […] que le permitió involucrarse tan decisivamente en la construcción y permanencia del CIAEM durante tantos años". (Barrantes & Ruiz, 1998, p. 29).

En su presentación de la obra (Barrantes & Ruiz, 1998), Ubiratan D'Ambrosio se expresa en este mismo sentido, destacando en su reconocimiento a los fundadores (Stone, Fehr y Santaló), el hecho que hayan logrado crear, "en una región de países económica y culturalmente tan diversos, y políticamente tan diferentes" […] un foro donde poder reunirnos a discutir nuestros problemas comunes, y trabajar en la búsqueda de un entendimiento común entre nosotros. Nuestras actividades tienen como objetivo proponer directrices y soluciones que sean útiles y factibles para todos nuestros países". (p., i). Los ideales de Stone a los que se refieren Ruiz, Barrantes y D'Ambrosio y que obraron tan decisivamente en la conformación de la comunidad de educación matemática en el CIAEM, no corresponden al contexto inter-Americano de la *Alianza para el Progreso*, sino más bien a la política de la *Buena vecindad* ("good neighbor") de Roosevelt.

Es pertinente recordar aquí algunas de las impresiones de Stone en su informe oficial sobre su visita de los años 1940 a Argentina y otros países del cono sur de América Latina, a partir de la cual se inició su larga colaboración científica con la región. Después de declarar que ha quedado fuertemente interesado en las relaciones culturales con América Latina recomienda a las autoridades que patrocinaron el viaje, centrar la cooperación en donde se hacía más necesaria: el campo del desarrollo científico y tecnológico. Pero teniendo en cuenta que este desarrollo es imposible sin la investigación en ciencia fundamental y matemáticas. Luego pasa a expresar los ideales y valores que a su manera de ver debían orientar esta cooperación (Parshall, 2009, p. 8):

> Si se cree, como yo pienso, que las relaciones más sólidas entre las naciones resultarán de la asistencia mutua sin pensar en beneficios o en crear obligaciones permanentes, entonces se puede concluir que cualquier cosa que podamos hacer para promover la ciencia y la tecnología en América Latina contribuirá a largo plazo al bien de todos. Es sumamente importante […] que todo lo que Estados Unidos se comprometa a hacer lo haga dentro del espíritu de ayuda, y en absoluto con la esperanza de influir en la política interna o externa de los países a los que prestamos asistencia. También es de la mayor importancia que cada paso que tomemos esté orientado a descubrir y cultivar la autosuficiencia en nuestros colegas latinoamericanos.

Referencias y bibliografía

Barrantes, H. & Ruiz, A. (1998). *La historia del Comité Interamericano de Educación Matemática.* Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Charlot, B. (1986). Histoire de la réforme des "maths modernes"; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique. *Bulletin de l'APMEP,* 352, 15-31.

Fehr, H. F. (ed.)(1962). *Mathematical Education in the Americas. A report of the First Inter-American Conference on Mathematical Education.* New York: Columbia University.

Parshall, K. H. (2009). Marshal Stone and the Internationalization of the American Mathematical Research Community. *Bulletin of the American Mathematical Society* (New series), 46(3):459-482.

Rojas, D. (2011). Colombia como "vitrina" de la Alianza para el Progreso. En: *50 años de la Alianza para el Progreso en Colombia: Lecciones para el presente.* Relatoría del evento. Bogotá: Universidad de los Andes; 6-8.

The Avalon Project: Act of Bogota, September 13, 1960. Yale Law School. Recuperado el 10 de Abril de

2019 de: http://avalon.law.yale.edu/20th_century/intam08.asp

The Avalon Project: Declaration of Punta del Este, August 17, 1961. Yale Law School. Recuperado el 10 de Abril de 2019 de: http://avalon.law.yale.edu/20th_century/intam15.asp

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Las capacidades superiores en el currículo matemático de Costa Rica y los retos para evaluarlas

Edwin Chaves Esquivel
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Costa Rica
echavese@gmail.com

Resumen

En el 2013 Costa Rica se inició la implementación de un currículo matemático para educación preuniversitaria, el cual está enfocado a la generación de capacidades cognoscitivas superiores y finalmente alcanzar una competencia matemática dirigida al uso de la disciplina en la interacción del individuo con el medio. Se pretende generar habilidades específicas y generales en su relación con los conceptos y el desarrollo transversal de capacidades matemáticas mediante la estrategia didáctica de resolución de problemas.

Por la complejidad del currículo, la evaluación ha constituido un reto; pero además la reglamentación evaluativa en el país no se adapta a los fundamentos teóricos que lo sustentan. Por ello, el Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica ha elaborado una propuesta para valorar las tareas matemáticas que se plantean para la implementación del currículo. Se espera que esta propuesta constituya una herramienta en la planificación de la acción docente y un insumo para alcanzar evaluaciones de calidad.

Palabras clave: educación matemática, didáctica de la matemática, currículo matemático, evaluación matemática.

Introducción

En el año 2012, el Consejo Superior de Educación de Costa Rica aprobó nuevos programas de Matemáticas para la educación primaria y secundaria. Con ello se pretendía generar un cambio drástico a la forma tradicional en que se venía enfrentando la enseñanza de las Matemáticas en el país. Para el diseño de este currículo se aprovecharon insumos generados en diferentes estudios investigativos en el país, así como la experiencia internacional en la Educación Matemática.

Este currículo propone a los docentes aprovechar el potencial de las Matemáticas como herramienta fundamental para el desarrollo de las diferentes disciplinas científicas. Se plantea como objetivo principal el fortalecimiento de capacidades cognoscitivas para enfrentar los retos

de la sociedad moderna, para la cual tiene especial relevancia: el conocimiento, la información, la demanda de habilidades y capacidades de razonamiento lógico, así como la toma de decisiones basadas en evidencia concreta.

Para lograr este objetivo se plantearon dos propósitos básicos: primeramente que cada estudiante debería asumir la responsabilidad de participar activamente en la construcción de su aprendizaje y, en segundo lugar, que la acción docente se enfocara a la generación de situaciones de aprendizaje que facilitaran el logro del primer propósito en forma motivadora.

Elementos claves del currículo

La competencia matemática

Como fue mencionado previamente, el enfoque o dirección de este currículo se vincula con la construcción de capacidades ciudadanas en el uso de las Matemáticas para la vida. En este sentido se promueve la adquisición de destrezas y habilidades intelectuales para alcanzar una competencia matemática que permita utilizar adecuadamente los conocimientos disciplinares en su diario vivir. Desde este punto de vista, la idea de *competencia matemática* se resume en: "… *una capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales, subraya una relación de esta disciplina con los entornos físicos y socioculturales y también brinda un lugar privilegiado al planteamiento y resolución de problemas…"* (MEP 2012. p. 14)

Con lo anterior se generó una ruptura con la visión tradicional de currículos previos que estaban centrados en contenidos, que promovían una horizontalidad a partir de ellos. A manera de ejemplo, observe la siguiente ilustración del formato que se aplicaba en el currículo de Matemáticas modificado en el 2005 y que venía desde 1995:

Objetivos	Contenidos	Procedimientos	Valores y actitudes	Aprendizajes por evaluar
4. Aplicar la desigualdad triangular, en la determinación de tripletas correspondientes o no a las medidas de los lados de un triángulo.	Desigualdad triangular.	Reconocimiento, en ejemplos concretos, de la desigualdad triangular. Formulación de la desigualdad triangular. Utilización de la desigualdad triangular en la estimación de posibles medidas de un lado de un triángulo, conociendo la medida de los otros dos. Utilización de la desigualdad triangular en la identificación de tripletas que corresponden a las medidas de los lados de un triángulo.	Autoconocimiento en sus capacidades, sus potencialidades y limitaciones, al desarrollar actividades propias del quehacer escolar.	Resolución de ejercicios y problemas donde utilice la desigualdad triangular.

Figura 1. Ejemplo presente en la Malla curricular de los Programas de estudio de Matemáticas, 2005.

Fuente: MEP 2005. p. 65

Como puede notarse, para el caso particular, todos los elementos de la malla curricular incluso la evaluación giraban alrededor del contenido "*Desigualdad triangular*", el cual aparece como un ente aislado, si se revisara con más detalle este instrumento, el contenido matemático que sigue es tratado de igual manera, y así se puede describir el comportamiento de la malla curricular completa en dichos programas de estudio. Esta estructura no posibilitaba que, por ejemplo, este contenido se integrara con el análisis de otros conceptos geométricos o incluso de otras áreas matemáticas.

Las habilidades y su integración

El currículo incluye cinco áreas matemáticas: Geometría, Números, Relaciones y Álgebra, Medidas y Probabilidad y Estadística, las cuales tienen diferentes pesos relativos en los distintos niveles educativos. Para cada una de las áreas matemáticas, se definen habilidades que se espera logren los estudiantes durante el proceso educativo. Se establecen dos tipos de habilidades: *generales* y *específicas*, que permiten establecer diversas formas de integración con los conocimientos matemáticos, según se muestra:

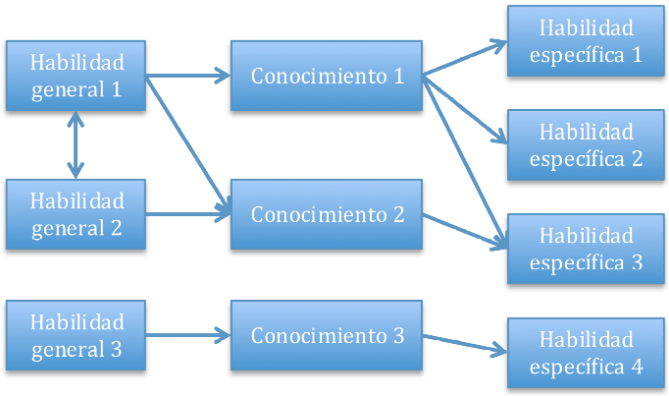


Figura 2. Integración de habilidades generales, específicas y conocimientos.

Desde la perspectiva de la acción de aula, primeramente se consideran las habilidades específicas, que son capacidades a corto plazo e intervienen en el quehacer diario. A un nivel macro, para cada ciclo educativo[1] el conjunto de habilidades específicas se sistematiza en habilidades generales, que son capacidades que se obtienen a lo largo del ciclo. Para lograr la articulación dentro del plan de estudios, la cantidad y calidad de conceptos o conocimientos matemáticos se ha formulado en función del progreso de las habilidades. En este sentido, el conocimiento o contenido matemático sigue teniendo un importante papel articulador, pero el proceso gira en torno a la adquisición de habilidades que se procuran lograr en el corto o largo plazo. Esta idea fue concebida para facilitar la integración de los diferentes elementos curriculares, de modo que las habilidades específicas por ejemplo, no son entes aislados, por el contrario, en todo momento se propone llevar a cabo la integración en ellas en las diferentes actividades o tareas de aprendizaje que se realicen (MEP 2012).

Momentos de la lección y construcción de aprendizajes

Debido a que el trabajo de aula constituye la puesta en práctica del currículo, se consideró pertinente en los programas de estudio explicitar al máximo esta acción. Para ello se estableció como estrategia didáctica la *resolución de problemas* visualizada a partir de cuatro momentos: *presentación del problema*, *trabajo independiente de los estudiantes*, *contrastación y comunicación de estrategias*, y *cierre o clausura* (MEP 2012. p.13). En cada uno de estos momentos el docente y sus estudiantes tienen roles muy particulares y realizan tareas específicas.

En relación con lo anterior, el currículo establece dos etapas, la primera consiste en el planteamiento de uno o más problemas orientados a la generación de nuevos conocimientos o habilidades. Acá se pretende que el estudiante pueda construir el aprendizaje y alcanzar

[1] La educación primaria está constituida de dos ciclos de tres años cada uno y la secundaria académica incluye un ciclo de tres años y el último de dos años.

habilidades por medio de la búsqueda de soluciones a los problemas. En la segunda etapa, en forma complementariamente, se deben plantear problemas dirigidos a la movilización de los conocimientos o habilidades adquiridas, en donde se pretende que los estudiantes puedan adquirir la memorización y automatización de ellos en su implementación en diversos contextos (MEP 2012).

Además del rol de orientar y moderar cada uno de los cuatro momentos, el docente tiene el reto de proporcionar los problemas que mejor se adapten a cada etapa, los cuales deben ser retadores y motivadores, además de estar direccionados estratégicamente al logro de habilidades que se integran con los conocimientos disciplinares.

Los procesos matemáticos y otros elementos articuladores del currículo

Sin embargo, este vínculo en el corto plazo entre los conocimientos matemáticos y las habilidades específicas no es capaz de generar, por sí solo, capacidades cognitivas más amplias (habilidades generales) que puedan encaminar hacia la competencia matemática. Es necesario que los estudiantes adquieran capacidades transversales, en el corto y mediano plazo en relación con el uso de estos conocimientos y habilidades específicas en la resolución de problemas. Estas capacidades transversales del currículo se adquieren mediante procesos matemáticos que se concentran en: *razonar y argumentar*, *plantear y resolver problemas*, *conectar*, *representar* y *comunicar*, y se pueden catalogar como "*actividades transversales que se asocian a capacidades presentes en cada área para comprender y usar conocimientos, apoyando el desarrollo de la competencia matemática"* (MEP 2012. p. 16). Entonces los procesos matemáticos son actividades cognitivas que realizan los individuos dentro de las distintas áreas matemáticas y que se vinculan con las capacidades para la comprensión y uso de los conocimientos. En resumen, cada proceso se pueden definir de la siguiente manera:

- ***Razonar y argumentar****: incluye actividades mentales que desencadenan formas del pensamiento matemático para desarrollar capacidades en la comprensión de una justificación, además desarrollar argumentaciones y conjeturas, entre otras.*
- ***Plantear y resolver problemas****: Refiere al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos. Aquí se dará un lugar privilegiado a los problemas en contextos reales. Se trata de capacidades para determinar las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema.*
- ***Comunicar****: es la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y argumentos matemáticos. Busca generar la capacidad para expresar ideas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático de manera escrita y oral a otras personas.*
- ***Conectar****: pretende el entrenamiento estudiantil para la obtención de relaciones entre las diferentes áreas matemáticas. De igual manera, persigue motivar conexiones con otras asignaturas y con los distintos contextos.*
- ***Representar****: Pretende fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares). También pretende desarrollar capacidades para traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas.* (Chaves 2017. p.4)

En relación con lo anterior, además de los procesos matemáticos también deben interactuar con cinco *ejes disciplinares* que afectan transversalmente el plan de estudios y fortalecen el currículo:

- *La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.*
- *La contextualización activa como un componente pedagógico especial.*
- *El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales.*
- *La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.*
- *El uso de la historia de las Matemáticas.* (MEP 2012. p. 35)

Los dos primeros se asumen como articuladores, por lo que además sirven para modular los otros ejes. La resolución de problemas crea la necesidad de asumir patrones de trabajo. La contextualización pretende fortalecer y motivar la interacción de los estudiantes en su relación con la realidad. Con estos dos ejes se establece una asociación crucial para el actual currículo: *la resolución de problemas en contextos reales*. En cuanto al uso de la tecnología, se propone emplear las tecnologías digitales como una herramienta para favorecer la visualización, realizar simulaciones, simplificar cálculos o propiciar representaciones mejor ajustadas a la realidad. El fortalecimiento de actitudes, creencias y valores positivos sobre las Matemáticas no sólo contribuye al desarrollo de la personalidad individual, sino que amplía el espacio de los valores y las actitudes en general, tales como la cooperación y la solidaridad. Por su parte, con el uso de la historia de las Matemáticas se propone brindar un rostro humano a la disciplina, de modo que la discusión sobre hechos históricos permita que el estudiante valore los desarrollos matemáticos como construcciones particulares para resolver algún problema del momento, con ello además se fortalece la herencia cultural (Ruiz 2017).

Los niveles de complejidad y el desarrollo de capacidades cognitivas superiores

De acuerdo con lo planteado hasta ahora en este currículo, por un lado se proponen habilidades vinculadas con las áreas matemáticas y por otro se plantean procesos que favorecen la reproducción de capacidades cognitivas transversales. La estrategia didáctica de resolución de problemas tal como ha sido concebida viene a contribuir en este propósito. Sin embargo, para lograrlo plenamente se requiere posibilitar una acción cognitiva que supere meras acciones rutinarias, por ello se necesita que los problemas planteados contengan diferentes niveles de complejidad, esto permite dar mayor profundidad según los intereses del momento académico en que se encentren. Los niveles de profundidad propuestos se resumen por:

- **Reproducción**: se refiere a ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados.
- **Conexión**: remite a la resolución de problemas que no son rutinarios pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante, la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación.
- **Reflexión**: incluye la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. (MEP 2012).

Existe una relación directa entre los niveles de complejidad y las posibilidades de activar diferentes procesos matemáticos en estos mismos niveles, con ello se puede avanzar hacia la consolidación de la competencia matemática y posibilitar en los estudiantes el tránsito en forma creciente del logro de capacidades cognitivas moderadas hacia las capacidades cognitivas superiores. Al respecto Rico & Lupiáñez (2008) establecen "*La consecución de competencias en el aula debe buscar su desarrollo mediante el avance y la progresión en los niveles de cada una de ellas, avance que se lleva a cabo mediante secuencias de tareas de complejidad creciente* ".

(p. 153). El siguiente esquema resume la interacción entre deferentes elementos curriculares y la forma en que ellos apuntan la competencia matemática, según se ha descrito previamente:



Figura 3. La competencia matemática general como constructo curricular. Ruiz 2017. p.66

El reto evaluativo en el marco el currículo matemático

El tema de evaluación fue excluido casi por completo en los programas de estudio de Matemáticas y únicamente aparecen algunas recomendaciones generales. Esta ausencia de elementos de evaluación al momento de elaboración y aprobación del currículo obedeció a que no estaban dadas las condiciones académicas para lograr un consenso en esta materia, no solamente a lo interno del Ministerio de Educación Pública sino en el ámbito nacional. El principal problema radicó en que para este ministerio existe un Reglamento General de los Aprendizajes que involucra a todas las materias académicas tanto para la educación primaria como secundaria, además al final de la secundaria se ha venido realizando una prueba estandarizada de bachillerato[2] en varias asignaturas, entre ellas Matemáticas. Por esta razón, cualquier reforma evaluativa que se hiciera para Matemáticas tendría que plantearse en un marco mucho más amplio que involucrara a las demás asignaturas.

Por otro lado, la reglamentación evaluativa vigente no articula coherentemente con los fundamentos teóricos de un currículo matemático que gira en torno a capacidades cognitivas superiores. A pesar que la implementación del currículo se encuentra en su sétimo año, este problema no ha podido ser resuelto a nivel ministerial. Por ello, el reto ha consistido en posibilitar una estrategia evaluativa que se aproxime a las necesidades curriculares en el marco de un reglamento que no ha sido diseñado para eso.

En el país, la evaluación tradicional en Matemáticas ha tenido características meramente sumativas y se han basado mayoritariamente en exámenes y trabajos extra-clase, los cuales normalmente se abocan a medir la capacidad del estudiante para memorizar y aplicar procedimientos rutinarios (Chaves, Castillo, Chaves Fonseca y Loría 2010). Por ejemplo, si se analiza nuevamente el contenido de la figura 1, el proceso evaluativo tradicional consiste básicamente en identificar si un estudiante es capaz de utilizar la desigualdad triangular para identificar posibles medidas de un lado de un triángulo conociendo la medida de los otros dos lados, o para identificar tripletas de números que puedan corresponder a las medidas de los lados

[2] En el año 2019 será la última vez que se apliquen las Pruebas Nacionales de Bachillerato en la educación regular, se ha decido sustituirla por una prueba en el penúltimo año de la educación media.

de un triángulo. Sin embargo, en una nueva perspectiva, resulta mucho más complejo identificar si un estudiante tiene la capacidad de razonar y argumentar en relación con el uso de la desigualdad triangular en diferentes contextos o si es capaz de realizar conexiones de este conocimiento con otros, tanto dentro del área de la Geometría como con otras áreas matemáticas. Esta dificultad obedece a que no es posible observar las capacidades directamente, se requiere de observar las acciones y el desempeño del estudiante en diferentes momentos (Ruiz 2017). Al respecto Ruiz señala que las capacidades superiores:

> *"tienen un grado mayor de "invisibilidad"; pero hay más: solo pueden evaluarse en situaciones específicas donde hay conocimientos y habilidades. Es decir: no se pueden extraer como si fueran entes aislados todos estos elementos (conocimientos, habilidades capacidades superiores), todos participan de diferente manera integradamente en la construcción cognoscitiva.*
>
> *Ahora bien, precisamente por ese carácter invisible y complejo no es posible establecer juicios absolutos sobre la intervención de estas capacidades. Esto implica que en la evaluación siempre se obtendrá una aproximación …"*(p. 211).

Este investigador apunta que para que la evaluación proporcione una adecuada cobertura del conjunto de competencias matemáticas se necesita un grupo diverso de actividades. En este sentido, diferentes investigadores señalan para una prueba en sí misma no puede ser exhaustiva en relación a la evaluación adecuada del pensamiento matemático en los estudiantes y, más bien, es necesario desarrollar diferentes estrategias para evaluar procesos complejos como los establecidos en el currículo matemático nacional (Ruiz 2017; Niss 2003; OCDE 2013).

Con lo cual, un currículo que enfatiza capacidades superiores requiere de utilizar varias dimensiones y diversos instrumentos evaluativos tanto en las aulas como para las pruebas estandarizadas, en donde la evaluación formativa debe jugar un rol preponderante (Ruiz 2017).

En virtud de lo anterior, la evaluación constituye un componente transversal del proceso educativo que debe ser considerado en el mismo momento de la planificación educativa. Entonces el primer componente para articular una evaluación coherente con los fundamentos curriculares, consiste en evaluar cada una de las tareas matemáticas que se planifican para la acción educativa. Esto incluye el valorar los problemas que se plantean no solamente en las evaluaciones (sea de aula o en pruebas nacionales) sino también lo que se proponen para las dos etapas de la acción de aula, tal como se muestra en la figura 4.

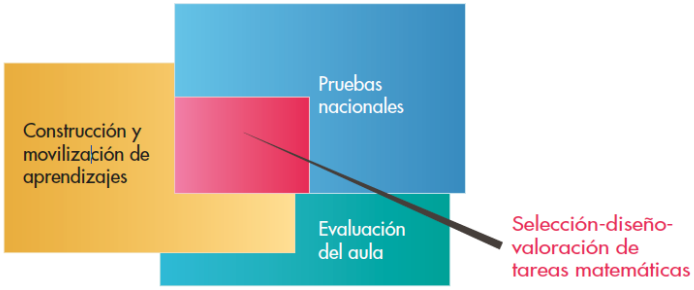


Figura 4. Selección-diseño-valoración de tareas matemáticas. Ruiz 2017. p.214

De acuerdo con lo anterior, con el propósito de contribuir en la relación entre currículo y evaluación, el proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, elaboró un modelo que incluye indicadores para valorar la intervención de los procesos matemáticos y criterios para

identificar los niveles de complejidad de los problemas que se plantean para las diferentes tareas de aula. Los aspectos teóricos que se proporcionan en dicho modelo pretenden ofrecer orientaciones a los actores del proceso educativo para tener un mayor acercamiento a la implementación del currículo.

A manera de resumen, la propuesta detalla el papel de los diferentes componentes curriculares; sin embargo, acá únicamente se describirá un modelo para valorar capacidades superiores y niveles de complejidad[3]. De acuerdo con Ruiz (2017), "*Las capacidades superiores participan de manera múltiple y sinérgica, a veces todas ellas actúan y a veces solo algunas; puesto de otra manera: existe una intersección no vacía entre las diversas capacidades superiores*." (p.100).

Tal como se describió previamente, las activación constante de los diferentes procesos matemáticos posibilita la adquisición de capacidades superiores (que oportunamente llevan el mismo nombre) por parte de los estudiantes. Entonces, no solamente es relevante sino también práctico el potenciar una estrategia evaluativa de tareas matemáticas que valore el rol de los procesos de acuerdo con sus niveles de interacción y complejidad, de este modo, indirectamente se puede valorar el potencial de la tarea matemática en la generación de las capacidades cognitivas.

La propuesta establece una estrategia para valorar la participación de los procesos matemáticos en cada problema y al mismo tiempo determinar su nivel de complejidad a partir de ello. El modelo está constituido por dos elementos:

- *61 indicadores que consignan la intervención de los procesos matemáticos en un problema organizados en tres grados distintos*
- *5 criterios para que a partir de los indicadores y de la estructura de su intervención se pueda realizar valoración.* (Ruiz 2017. p. 103)

El siguiente esquema muestra la forma en que aparece la relación entre los procesos o capacidades y los niveles de complejidad.



Figura 10. Grados de procesos / capacidades superiores

Figura 5. Grados de procesos/ capacidades superiores. Ruiz 2017. p.104

Para cada proceso se han establecido diferentes indicadores que permiten ubicar al problema que se está analizando en uno u otro grado de complejidad según corresponda, para

[3] Si usted quiere mayores detalles sobre la propuesta puede consultar a Ruiz (2017) en https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916 .

ello se prioriza en cada caso el indicador o indicadores que presentan un mayor grado. Para valorar el problema integralmente se realiza un análisis ponderativo de acuerdo con el grado de complejidad que presentó en cada proceso, considerando para ello los siguientes criterios:

- *NC1: cuando en un problema la intervención de los procesos no supera el grado 1, se acepta que el problema es de reproducción.*
- *NC2: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 2 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de conexión.*
- *NC3: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 3 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de reflexión*. (Ruiz 2017. p.124-125)

Cuando no se satisfaga alguna de las condiciones previas se establecen otros criterios secundarios para realizar la clasificación, tomando en consideración los indicadores del mayor grado y otras valoraciones específicas de cada problema, se considera que los procesos "*Razonar y argumentar"* y "*Plantear y resolver problemas*" deben ocupar un lugar preponderante para valorar el estímulo de capacidades cognitivas superiores y la competencia matemática.

Conclusión

A manera de conclusión, para un currículo enfocado a la generación de capacidades superiores, la experiencia que ha tenido Costa Rica con su implementación deja importantes enseñanzas que no ha sido posible incluir acá pero que están disponibles en los diferentes insumos que han generado dentro del Proyecto denominado Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica[4]. En el presente documento se ha querido resumir brevemente la propuesta curricular y resaltar el trabajo que se ha venido realizando a lo interno de este proyecto para avanzar en los retos que la evaluación requiere para un currículo ambicioso como este.

La posibilidad de realizar esta descripción y clasificación en las diferentes tareas matemáticas que se propongan, permite al docente valorar la pertinencia de cada una ellas, ya sea para la acción de aula o para las evaluaciones, en un marco mucho más amplio como es un planeamiento educativo en congruencia con los fundamentos del currículo. La capacidad de precisar el grado de participación de cada proceso matemático permite mapear las acciones que se estarían estableciendo para avanzar de acuerdo con las posibilidades de los estudiantes hacia el logro de capacidades matemáticas. Desde el punto de vista de una sana planificación educativa, la realización de esta práctica permite ir haciendo los ajustes necesarios para consolidar la intervención de los procesos en el corto, mediano y largo plazo, por lo que apunta sólidamente al fortalecimiento de la competencia matemática. Al mismo tiempo, en el caso de la evaluación, los resultados que se puedan obtener mediante la puesta en práctica de este proceso de planificación en las acciones de aula, suministran información sobre el avance de los estudiantes y su rendimiento, de modo que se puedan establecer las acciones correctivas correspondientes.

La propuesta para la valoración de las problemas, es un importante insumo para avanzar en materia evaluativa y se espera venga a contribuir en la articulación de una estrategia evaluativa que sea congruente con el potencial de los principios curriculares que se han plasmado en los

[4] https://www.reformamatematica.net/

programas de estudio.

Referencias y bibliografía

Chaves, E., Castillo, M., Chaves, E., Fonseca, J. y Loría, R. (2010). La enseñanza de las matemáticas en la secundaria costarricense: entre la realidad y la utopía. *Tercer Informe del Estado de la Educación*, San José, Costa Rica. Descargado de https://estadonacion.or.cr/files/biblioteca_virtual/educacion/003/Chavez_2010_Matematica.pdf

Chaves, E. (2017). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica: 2010-2017. *Memorias del II CEMACYC.* Cali, Colombia, 2017. Descargado de http://ciaem-redumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/494/154

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2005). Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado. Costa Rica: autor. Descargado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis & S. Papastavrides (Eds.) 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education (pp. 115-124). Athens: Hellenic Mathematical Society.

Organization for Economic Co-operation and Development (OCDE) (2013). Synergies for better Learning: An International Perspective on Evaluation ans Assesment. Paris: OCDE.

Rico, L. & Lupiáñez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Ruiz, A. (2017). Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial, diciembre. ISSN 1659-2573. Costa Rica. Descargado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916

Conferencias paralelas



Textos escolares desde una visión crítica de la Matemática

Nelly **León** Gómez
Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Maturín
Venezuela
nellyleong@hotmail.com

Resumen

Se inicia la disertación con una visión general del sistema educativo venezolano y del proceso de transformación curricular del nivel de Educación Media en Venezuela. Luego, se hace referencia a los libros de Matemática de la Colección Bicentenario (CB), editados por el Ministerio del Poder Popular para la Educación en el marco de dicha reforma con carácter de textos escolares, concebidos bajo una aproximación crítica y realista de la Educación Matemática. Se presentan y discuten los resultados más relevantes de un estudio valorativo de dichos textos, realizado por León y Vicent (2015) siguiendo el modelo de Monterrubio y Ortega (2009), entre los que destacan como elementos positivos el lenguaje natural accesible al alumno, la contextualización de la matemática y la promoción de valores y, como aspectos negativos, desarrollo incompleto de los temas matemáticos, limitaciones en la formalidad y el lenguaje matemático y, sobre todo, la intencionalidad política de los textos.

Palabras clave: Educación Matemática Crítica, Matemática Realista, textos escolares, Colección Bicentenario.

Introducción

La aprobación en el año 1999 de la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (CRBV) significó el punto de partida del proceso de cambios que derivaron en una nueva concepción educativa en ella expresada y que condujo al establecimiento de lo que se conoce como Educación Bolivariana. Esta se sustenta en la corriente de la pedagogía crítica como medio de concientización hacia una nueva comprensión de los conflictos sociales, de los mecanismos de dominación y de ideologización y de la depredadora relación del hombre con el ambiente (Mora, 2005). Obviamente, los cambios implícitos son de gran envergadura y chocan con los esquemas establecidos durante largo tiempo.

Para el año 2007, se propone el Currículo Nacional Bolivariano (CNB) como una guía en la que se establecen los objetivos formativos y los medios de acción para lograrlos (MPPE,

2007), en atención al tipo de sociedad que se prefigura en la CRBV y del ser humano que ésta dibuja: crítico, democrático, con conciencia social y ambiental, entre otras características.

Han sido muchos los vaivenes por los que ha pasado la implementación de este currículo debido a las cambiantes normativas educativas y al rechazo derivado de confrontaciones políticas ineludibles. Para el año 2014, como producto de una amplia consulta a nivel nacional, se da inicio al proceso de cambio curricular del nivel de Educación Media General y al año siguiente se presenta el Plan de Estudios correspondiente, visto más como un documento orientador de la aproximación curricular que se desea desplegar, en el entendido de que es el propio docente quien hace el currículo (MPPE, 2015).

Tales orientaciones curriculares también quedan reflejadas en los libros de textos de la denominada Colección Bicentenario, que acompañan dicha transformación como recurso didáctico con un enfoque realista y transdisciplinar y acorde a los principios de la Teoría Crítica de la Educación, según los señalamientos de sus autores.

En una sociedad tan polarizada políticamente como la de Venezuela, estos textos han sido alabados por un sector de la comunidad nacional y ferozmente atacados por otro, por diversas razones entre las que sobresalen una supuesta intención ideologizante y un tratamiento inadecuado e incompleto de los contenidos de las diversas áreas de conocimiento para los que han sido editados, entre ellas la Matemática (Andonegui, en entrevista a Pérez Terán, 2014).

Ante esta situación, desde el Núcleo de Investigación de Educación Matemática (NIEMAT) de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Maturín (UPEL-IPM), hemos realizado una investigación con el propósito de hacer una valoración de los textos de Matemática de Educación Media de dicha colección y proponer a los autores algunas ideas y sugerencias a tomar en cuenta en futuras ediciones de los mismos.

La investigación se enfocó desde una perspectiva fenomenológica centrada en los puntos de vista de la muestra (12 profesores de Matemática de la UPEL-IPM, que actuaron como revisores y los cuales se identifican como Rij, donde i representa el año del texto revisado y j el número asignado al revisor para ese año: R12 corresponde al segundo revisor del libro de primer año), tratando de interpretar a partir de sus testimonios su percepción respecto a dichos textos y destacando los alcances, limitaciones, aciertos, desviaciones, errores, entre otros aspectos, para su uso por los estudiantes y los profesores como texto oficial en el aprendizaje de los temas matemáticos.

Dado que se buscó hacer juicios de valor, se consultó distintos modelos y trabajos sobre evaluación de libros de textos escolares (Andonegui, 2015; Beyer, 2004; Miguez, 2004; Pinto y González, 2013; Ramírez, 2002 y 2012 y Monterrubio y Ortega, 2009), escogiéndose el modelo expuesto por los dos últimos autores, adaptando las categorías previas a las particularidades de la CB: contenidos, conexiones, actividades, aspectos metodológicos, lenguaje y motivación. Más adelante se presentan los resultados más destacados en relación a las siguientes categorías emergentes: Contextualización de la Matemática, Desarrollo de los Contenidos Matemáticos, Matemática e Ideologización en los textos de Matemática de la CB.

La matemática en el Diseño Curricular Bolivariano (DCB)

La Matemática, como área de formación en el DCB, atiende a los principios de la filosofía de la Educación Crítica (Skovsmosse , 1999; Skovsmosse y Valero, 2001; Mora, 2005; Becerra (2005) y al Enfoque Realista (Freudenthal, 1991). En tal sentido, contrario a la visión

predominante como ciencia netamente formalista, abstracta y deductiva de esta ciencia, en la acción de enseñar y aprender se busca acercarla a otra que satisfaga las expectativas de formación de ciudadanos hacia la comprensión dialéctica de la sociedad y hacia su participación democrática y comprometida en procesos de transformación por el bienestar individual y comunitario y la preservación del planeta (Skovsmose, 1999); es decir, una visión humanista, culturalmente situada y necesaria para la sostenibilidad de la vida presente y futura del hombre (MPPE, 2007).

La educación matemática bajo una perspectiva crítica sustenta "la participación social, la comunicación horizontal entre los diferentes actores, … la humanización de los procesos educativos, la contextualización del proceso educativo y la transformación de la realidad social" (Ramírez, 2008, p. 109). Así emerge la relación educación matemática-democracia, expresada en el dialogo continuo entre profesores y estudiantes que conlleva a la atribución de sentido y a la comprensión individual y colectiva a través de la negociación de significados y el respeto de normas y formas de actuación (Sierpinska,1998). El respeto por el otro, por sus opiniones y sus diferencias conlleva al desarrollo pleno de la persona, suministrándole herramientas para aprender a pensar, comprender, razonar, de manera que vea a la Matemática y sus aplicaciones como una materia significativa en el devenir de la sociedad (Skovsmose, 2011). Esta biyección entre educación matemática y democracia trasciende hacia una formación en la que se es capaz de cuestionar lo que se enseña, lo que se lee, de relacionar hechos y situaciones reales, de buscar nuevas ideas a partir de lo aprendido. De allí la pertinencia de estimular en los jóvenes la criticidad de lo que se expone, desde el mismo objeto matemático hasta la forma de matematizar situaciones del contexto (Serrano, 2016).

Dentro de los fines de la educación en Venezuela, establecidos en la Ley Orgánica de Educación (LOE), está "Desarrollar la capacidad de abstracción y el pensamiento crítico mediante la formación en filosofía, lógica y matemáticas, con métodos innovadores que privilegien el aprendizaje desde la cotidianidad y la experiencia". (LOE, 2009, pp. 19-20). Cotidianidad y experiencia que le imprimen sentido a los conocimientos de la disciplina, al separarla del "paradigma del ejercicio" (Skovsmose, 2000) que pone énfasis en ejercicios rutinarios y descontextualizados carentes de sentido más allá del aula. Igualmente se busca separar la enseñanza de la Matemática de la corriente estructuralista enclaustrada a partir de la reforma de la Matemática Moderna, según la cual se privilegian los aspectos formales y abstractos de la disciplina; por el contrario, se aboga por el uso de métodos inductivos y de reconstrucción de conceptos en situaciones contextualizadas y mediante el trabajo cooperativo (MPPE, 2015).

Es recurrente en el discurso de la transformación curricular de Educación Media el presentar los temas matemáticos unidos al contexto y a las vivencias de los estudiantes y al mundo extra-matemático en general. La corriente de la Matemática Realista de Hans Freudenthal ha hecho interesantes aportes en este sentido. Se propone partir de la realidad, buscar modelos y esquemas que permitan profundizar en el conocimiento de la misma y aprender la Matemática en contextos de aplicación.

En este marco conceptual se organiza el currículo atendiendo entre otros a los siguientes elementos: temas generadores, tejido temático y referentes teórico-prácticos.

Los temas generadores, como su nombre lo indica, generan aprendizajes con sentido y pertinencia con respecto a los considerados temas indispensables y los enlaza a los referentes teórico-prácticos a través del tejido temático (MPPE, 2015), con el que se busca la integración

interdisciplinar a través de la Matemática. Veamos esto con algunos ejemplos correspondientes a las Unidades de Aprendizaje 1 y 3 de cuarto año de Educación Media:

UA	Tema generador-Tejido temático	Referentes teórico-práctico
1	**Análisis de factores de riesgo en la comunidad** Situaciones que aumentan las probabilidades de afectación de la salud. Determinación de los resultados posibles y probabilidades en cuanto a factores de riesgos. Tratamientos de fenómenos sociales y naturales. Ley de Gestión Integral de Riesgos Socionaturales y Tecnológicos (2009). Toma de decisiones en función de estudios estadísticos.	Estadística: análisis descriptivo univariante. Distribución de probabilidades. Distribución binomial Series de tiempo. Números índices.
3	**Sistemas económicos y sociales en el mundo** Crecimiento de la población mundial y la generación de riqueza vs satisfacción de necesidades. Indicadores económicos vs solución de problemas sociales en el planeta. Índice de desarrollo humano. Las desigualdades y desequilibrios en el mundo. Capitalismo, socialismo. Variación de los salarios mínimos en los últimos cinco años en la República Bolivariana de Venezuela.	Gráficos Proporción, fracción, porcentaje Mapas Índices. Lectura de índices. Variaciones interanuales Proyecciones Funciones exponenciales y funciones logarítmicas.

En los textos de la Colección Bicentenario encontraremos la misma organización de los contenidos, como veremos más adelante.

Los textos de Matemática de la Colección Bicentenario

Partimos de considerar el papel de los libros de texto en el proceso de enseñanza y aprendizaje al actuar como una importante guía para el docente en la planificación y puesta en escena de las unidades didácticas o lecciones de matemática en el aula (Cabero, Duerto y Romero, 2002; López, 2007). Los libros de texto direccionan la selección y secuenciación de contenidos matemáticos a la par que muestran la visión de la Matemática que tiene el autor y su posición filosófica, pedagógica y didáctica (Gascón, 2001), por lo que estipulan el tipo de enseñanza que asume el profesor (Parcerisa, 1996). Más aún, como señala Schubring (1987), éstos determinan en la práctica la enseñanza de la Matemática por encima de cualquier disposición institucional al respecto. Por eso, debido al poder del libro de texto como soporte del conocimiento y modelador de procesos de enseñanza, cabe preguntarse si es siempre apropiado el contenido que aparece en este recurso didáctico y la forma como es presentado al lector. Autores como Ramirez (2012) llaman la atención sobre las limitaciones didácticas, los sesgos ideológicos y los intereses comerciales latentes en dichos textos; mientras que para Torres (1991), citado por Duarte y Bustamante (2013), los libros de texto llegan a actuar como filtros de conocimientos según los intereses formativos de los grupos de poder en un momento socio-histórico determinado.

Precisamente, en el contexto socio-político actual de Venezuela nace la Colección Bicentenario como un programa del gobierno nacional que acompaña la implementación del Currículo Nacional Bolivariano. Consiste en una serie de textos de las diferentes áreas del conocimiento, entre ellas la Matemática, que abarca todos los años escolares de los niveles de Educación Primaria (1° a 6° grado) y de Educación Media General (1° a 5° año), de distribución gratuita a nivel nacional en las escuelas y liceos públicos del país y con un carácter de textos guía para ambos grupos de actores del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática: estudiantes y docentes (León y Vicent, 2015). En esta oportunidad sólo nos referiremos a los libros de Matemática para Educación Media General. Éstos fueron elaborados por un grupo de profesores y egresados de la UPEL que además forman parte del Grupo de Investigación de Educación Matemática (GIDEM). Este grupo "defiende una matemática inclusiva, al servicio de la humanidad, que nos sirva para entender el universo, que acabe con su monopolio ideologizante, que nos sea útil para la emancipación, para la transformación" (Fondo Editorial del IPASME, citado por Aguirre, 2014, p. 59), principios de la Educación Matemática Crítica que, como veremos, quedan reflejados en dichos textos.

La estructura de los textos de Matemática dista mucho de la de los libros tradicionales. En estos últimos aparece en el índice la secuenciación detallada de los contenidos contemplados en programas anteriores. Por ejemplo, los textos de la Editorial Santillana plantean la siguiente metodología de trabajo: 1) Desarrollo de conceptos y planteamiento de ejercicios resueltos; 2) Propuesta de actividades para desarrollar habilidades de razonamiento, modelación, análisis, interpretación y argumentación 3) Actividades que muestran la matemática en su vinculación con otras ciencias y 4) Solución de problemas. (Álvarez y otros, 2012). Por su parte, en el índice de los libros de la CB aparecerán los nombres de las unidades (que no necesariamente coinciden con las planteadas en el CNB, asociados a temas generadores, acompañados de los temas matemáticos que se desarrollarán. El esquema de las unidades es el siguiente: se inicia con el tema generador de aprendizajes y enseñanza, se sigue con trabajo investigativo extradisciplinario; análisis, formalización conceptual; desarrollo de actividades dentro y fuera de las disciplinas; Trabajo intramatemático (conceptualización y formalización), y se cierra con Trabajo de consolidación, ejercitación, ejemplificación y ampliación.

En los mensajes dirigidos tanto a los estudiantes como a los representantes y los docentes, los libros se presentan como *instrumento para la liberación* donde los contenidos matemáticos se desarrollan partiendo de un tema generador vinculado a la realidad venezolana. En los textos, la Educación Matemática se guía bajo ciertas premisas como la contextualización real de la Matemática, no una pseudo-contextualización; el aprendizaje de la Matemática como posibilidad de generación de valores en consonancia con la formación de una ciudadanía crítica y una sociedad verdaderamente democrática; y el aprendizaje de la disciplina mediante actividades de investigación, no solo en el ambiente tradicional del aula sino también en espacios alternos donde se desarrolla la vida cotidiana del estudiante. (MPPE, 2012a,b,c,d,e)

Impacto de la Colección Bicentenario en la sociedad venezolana

Como reacción inmediata a la aparición de los textos de la CB, producto de las confrontaciones políticas en el país, se generaron dos matrices de opinión completamente opuestas entre aquellos que los aceptan a ciegas y los que los rechazan a priori, con pocos matices entre ellos. Por un lado se les califica como *textos para la liberación* o *vanguardia de la educación revolucionaria;* mientras que por el otro se les asigna epítetos como *textos de la discordia* o *libros para perpetuar la pobreza.*

Aparte de la diatriba política también se ha generado una discusión más académica en torno a este recurso didáctico. Martín Andonegui, destacado educador matemático de la UPEL, en entrevista a Pérez Terán (2014), destaca algunos elementos referidos a: 1) *contenido matemático*: se reflejan algunos aciertos en el abordaje contextualizado, pero también fallas de profundización y de dar significado matemático a los contenidos; 2) *procesos cognitivos*: no se establecen de forma adecuada los parámetros psicológicos de aprendizaje sobre la zona de desarrollo próximo, ya que no se enfrenta al niño a problemas de mayor complejidad matemática; 3) *variables afectivas y de tipo sociocultural*: se ven reflejadas en los textos a través de las lecturas e ilustraciones y en problemas que se adecuan a las realidades del país mediante la inclusión.

Sumamos a esto la diatriba sobre si dichos libros deben considerarse como libros de texto de uso obligatorio, o libros de consulta o complementarios de empleo discrecional o en conjunto con otros textos comerciales.

Revisión de los textos de matemática de la Colección Bicentenario: un estudio necesario

A partir del análisis de las diversas categorías preestablecidas en esta investigación para la valoración de los textos de Matemática de la Colección Bicentenario y de los aportes de todos aquellos que participaron en este estudio, se presenta a continuación la percepción general sobre los textos con sus aciertos y desaciertos. Esta visión general la resumimos en tres renglones: conexiones (una valoración positiva), desarrollo de los contenidos matemáticos (una valoración no tan favorable) y elementos políticos-ideologización (una valoración negativa)

Conexiones

Una de las intencionalidades declaradas en la CB es ofrecer a los estudiantes una matemática con un enfoque transdisciplinar y en estrecha vinculación con el contexto, sus vivencias e intereses. Esto nos ha motivado a pulsar la opinión de los revisores de los textos, guiándonos por tres dimensiones concretadas en las posibilidades de conexión intra y extra matemática que se generan a partir de la forma como son tratados los diversos temas, y la vinculación de éstos con temas transversales como lenguaje, ambiente, trabajo, valores y tecnología.

Este parece ser el elemento que caracteriza a los textos objeto de estudio y de alguna manera marca distancia con libros de editoriales comerciales que se distribuyen en Venezuela. Nada más al tomar uno de los libros de la CB, ver su carátula y observar el título, el lector se percata que está ante un libro de Matemática diferente. Las opiniones de los revisores sobre las cuestiones tratadas en esta sección del trabajo son bastante favorables.

En algunas lecciones se observa la intención de establecer cierta relación entre conceptos matemáticos; no obstante, varios revisores coinciden en señalar que en estos libros se presentan muchas ocasiones para establecer este tipo de conexión, pero que éstas no se aprovechan debidamente, y con el ánimo de darle mayor cohesión a los tópicos matemáticos se recomienda a los autores que en futuras ediciones de los textos se profundice en ese tipo de conexión intra-matemática, con la finalidad que los estudiantes se percaten de que los conceptos que estudian en esta materia no son parcelas aisladas, sino un entramado de ideas que se soportan entre ellas para darle solidez al "edificio matemático".

Para los revisores, la incorporación de reseñas biográficas de destacados matemáticos que han hecho aportes significativos a los tópicos que se estudian permite que los estudiantes

adviertan que la Matemática es una construcción del hombre; que todos los objetos matemáticos son productos de la mente humana, que se han generado en determinadas circunstancias sociales, contextuales e históricas. Igualmente las semblanzas a personajes que han contribuido con la Educación Matemática en Venezuela es motivo de regocijo.

Hay otro tipo de reseñas de personas o hechos históricos no vinculados directamente a la Matemática o a la Educación Matemática que aportan a la cultura general y a la formación integral de los educandos, a la vez que pueden incentivar el gusto por la lectura (R43, R12, R22). No obstante, algunos revisores piensan que estas reseñas pueden convertirse en elementos distractores y desviar el verdadero propósito de los libros; mientras que para otros estarían bien siempre que, de alguna manera, se vinculen a la temática tratada y no se abuse de ellas (R31, R52.

Los revisores perciben claramente que hay relación con otras disciplinas como Química, Economía, Geografía, Física; con algún oficio como la pesca y la construcción; o con situaciones del contexto y de la vida diaria a las cuales se van hilvanando los conceptos matemáticos. Esto se visualiza con más claridad en los primeros niveles, pero a medida que la complejidad del contenido se hace mayor esta contextualización se vuelve menos palpable a pesar de seguir sustentando el desarrollo matemático sobre una situación contextual de partida (R51). Se aboga por la incorporación de lecturas sobre la historia de la Matemática que permita a los estudiantes conocer el proceso de creación de los conceptos que están estudiando, pues, "Cuando se trata del rigor y la formalidad matemática, se debe apegar a la verdadera historia de la Matemática, según el tema a tratar" (R42).

Otras lecturas se relacionan a consideraciones extra-matemática inmersas dentro de lo que podríamos llamar la fenomenología didáctica del tópico matemático de interés. Estas lecturas permiten abordar temas transversales como lengua, ambiente, trabajo, valores y tecnología. Con el eje trabajo hay conexión pero podría insistirse más (R42). Hay interés por crear consciencia sobre la preservación del ambiente (R42, R12).

Algunos revisores cuestionan algunas actividades extra-matemática, sobre todo el peso que éstas tienen en algunas lecciones en comparación con el contenido matemático propiamente dicho. También cuestionan el carácter temporal de algunas de ellas, "por lo que pueden quedar obsoletas a poco caminar, o carecer de relevancia con sólo pasar algunos años" (R51). Para evitar que los textos se desactualicen rápidamente, los revisores sugieren presentar situaciones más estables en el tiempo. Un claro ejemplo de esta cuestión son las actividades enunciadas en el contexto de la economía nacional, referidas a costos de productos y servicios o al salario mínimo, que claramente quedaron desvirtuados en la realidad hiperinflacionaria que actualmente reina en el país.

Por otro lado, las lecturas van acompañadas de una profusión de ilustraciones cuyo uso en los textos hemos querido analizar desde dos ángulos que se complementan: como elemento motivador y como coadyuvante a la contextualización. Con excepción de un revisor, hay acuerdo sobre la pertinencia en el uso de las ilustraciones pues potencian el alcance de los textos en términos de ubicar el conocimiento matemático en el contexto, se aprovecha el impacto visual que hace que el mensaje llegue con más facilidad a los lectores (sobre todo en aquellos que tienen un estilo de aprendizaje marcadamente visual), y en ese mismo sentido se convierten en vectores hacia la motivación del estudiante a la vez que los invita "al diálogo sobre lo que se reseña en las mismas" (R43). En el ánimo de mejorar los textos y hacer un uso más provechoso

del espacio en cuanto al desarrollo matemático en sí, se recomienda a los editores revisar el tamaño de algunas de las ilustraciones. Algunos opinan que no hace falta exagerar en cuanto al tamaño y la cantidad de ellas pues el mensaje igualmente se logra siendo más ponderados en su uso.

Contenidos

Todos los libros de Matemática de la CB siguen la misma estructura: un título que hace una referencia general a la contextualización de la mayoría de las lecciones consideradas en ellos; dos mensajes: uno dirigido a los estudiantes y otro a los profesores y las familias; un índice en el que aparece un listado de temas identificados con un título que hace referencia a una situación contextualizada, resaltada en un tamaño de letra grande en comparación con el del contenido matemático (R41).

En los mensajes ya referidos se leen unos "propósitos macros" (R12) sobre la intencionalidad que se persigue con el estudio de la Matemática; además, "Hay un planteamiento que es el desarrollo de la capacidad investigativa del estudiante" (R51). No obstante, los objetivos que se espera lograr y las competencias que deben alcanzar los estudiantes en términos del aprendizaje de las diferentes temáticas en cada año escolar no son enunciados explícitamente.

Detengámonos ahora en la organización y secuenciación de los contenidos. Los revisores llaman la atención de que los contenidos no mantienen una secuenciación del todo apropiada, los temas se desarrollan parcialmente dejando vacíos que pueden generar confusión en los estudiantes (R11, R22), por lo que se requiere que se incluyan desarrollos explicativos que garanticen la secuencia lógico-matemática (R51). Se evidencia la falta de coherencia interna con los temas, pues "no se profundizan hasta finalizarlos, sino que se cortan y luego se retoman" (R21).

Igualmente se señala que los contenidos no están secuenciados en su totalidad atendiendo al nivel de complejidad. Además, en la estructura del libro, cada tema es tratado más que todo en conexión con la situación generadora que se presenta al introducir cada lección; en tal sentido "tratan de 'fundamentarlo' en hechos propios del entorno" (R32), en menoscabo de la interconexión entre ellos desde la matemática misma (R22, R42).

Casi unánimemente los revisores concuerdan en que se hace énfasis principalmente en las representaciones, un poco menos en los significados y, definitivamente, insuficiente abordaje conceptual, lo cual genera preocupación entre los evaluadores.

Igualmente hay acuerdos en cuanto a la claridad que se evidencia en la exposición de los temas, haciéndolos manejables y claros para el nivel cognitivo de los estudiantes. Pero, ésta no es una opinión unánime. R51, refiriéndose al libro de 5° año, considera que las exposiciones matemáticamente son claras "pero se requiere una buena base tanto en conocimiento como en madurez matemática para su aprendizaje efectivo mediante este texto". Desde otra óptica, R23 argumenta que en el ánimo de contextualizar los contenidos se cae en situaciones extra-matemáticas que desvirtúan la presentación de algunos de ellos. Sólo los revisores del libro de 5° año consideran que el nivel de complejidad, el rigor y la formalidad matemática están más allá de ese nivel educativo. Para los grados inferiores, la mayoría coincide en que los temas se presentan con un grado de complejidad acorde con el nivel cognitivo del grupo al cual van dirigidos; no así en lo que toca al rigor y a la formalidad.

Ahora bien, en concordancia con los principios de la didáctica centrada en procesos, como

lo estipula la Ley Orgánica de Educación (2009) en su artículo 14 se cuestionó: ¿se procura una enseñanza que promueva el desarrollo de los procesos de pensamiento y su uso consciente por el estudiantado?. El revisor R43 afirma que el texto promueve no sólo el razonamiento inductivo y deductivo, sino también el relacional y el crítico. Igualmente R12, sostiene que, al comulgar con una visión crítica de la educación Matemática, la CB en su conjunto fomenta este tipo de pensamiento que, de alguna manera, lleva implícito el pensamiento relacional y el razonamiento inductivo; pero no así el pensamiento deductivo que es inherente a la producción del conocimiento matemático a través de la argumentación lógica. Ateniéndose a los alcances de la pregunta planteada, la mayoría de los revisores reconocen que la forma como se presentan los contenidos, a partir de una situación motivadora de la que se deriva un problema o un ejercicio específico, favorece el razonamiento inductivo, habiendo poco espacio para el deductivo. Además, al plantear situaciones del contexto del estudiante o más generales para que sean matematizadas, pudiera traducirse, en opinión de la mayoría, como un intento por consolidar el pensamiento flexible, reversible y divergente, "aunque a veces se cae en la imposición" (R51), al tratar estos conceptos o sus propiedades que no son fáciles de visualizar o derivar de manera inductiva. En los libros hay oportunidades que podrían aprovecharse mejor en el intento de favorecer estos tipos de pensamiento.

En general, hay cierto descuido en la formalidad matemática, en el lenguaje matemático y en la simbología, problemas en el abordaje de los contenidos matemáticos, desarrollos incompletos, saltos en la presentación de los conceptos, secuenciación algunas veces no apropiada, ausencia de modelos de resolución de problemas, presencia insuficiente de problemas y ejercicios propuestos y resueltos, poca diversidad en las actividades propuestas que puedan servir para la evaluación, en particular la auto-evaluación.

Elementos políticos - ideologización

Otro cuestionamiento tiene que ver con la "intencionalidad política" que perciben algunos revisores, lo cual se refleja en testimonios como los siguientes: "Sí hay vinculación. Sin embargo, hay que tener cuidado con su presentación, pues se observan claramente 'elementos políticos' que pueden, según el lector, desvirtuar el mensaje" (R23); "Hay, sin embargo, planteamientos que pueden producir rechazo en el estudiante y en el grupo familiar. Son aquellos de contingencia política donde podría presentarse una vinculación forzosa o problemas políticos filosóficos" (R51); En el libro de 5° año, "A raíz de un problema de programación matemática se recomienda 'estudiar' y discutir, entre otros, los escritos de Marx, Istvan Meszaros y Luis 'Ludovico' Silva. ¿A qué viene esta sugerencia?" (R52); "Es notorio que, tal como se señala en el mensaje a los estudiantes, el texto persigue una formación crítica a través del estudio de la Matemática, pero esto quiere lograrse en muchos casos realzando la acción del gobierno y rechazando lo que se opone a su filosofía y a su pensamiento, lo que deriva en algunos matices de intolerancia" (R12); "… esto quiere lograrse con un sesgo político que incline la balanza hacia una nueva forma de ideología, que condena todo aquello que se opone" (R32). Estos comentarios recogen una crítica al elemento político partidista que pudiera desplegarse en los textos y sin el cual los mismos tendrían una mayor aceptación entre los usuarios de este importante recurso educativo pensado para todos los venezolanos que cursan el nivel de Educación Media.

En fin, en opinión de los revisores se destacan los esfuerzos sostenidos por mostrar los logros de una gestión de gobierno (aun cuando para algunos ya hay evidencias de que no se han cumplido); el énfasis en lo político-ideológico, la intencionalidad de anular la pluralidad de ideas

y la disensión, desde lo político partidista; el intento de constituirse en libro único, rechazado por los docentes de Educación Media quienes ven la necesidad y la pertinencia de usarlos conjuntamente con otros textos de Matemática de editoriales comerciales que permitan variaciones en la didáctica, rellenar lagunas conceptuales y la ejercitación.

Reflexiones finales

Concebida bajo las premisas de la Educación Matemática Crítica, la Colección Bicentenario ha sido presentada como una serie de libros con una aproximación didáctica y pedagógica que conlleva la intencionalidad de lograr una formación matemática *participativa, colaborativa*, *activa*, *productiva*, *inter* e *intra cultural*, *intra* e *inter disciplinaria*, pero además "liberadora, emancipadora, revolucionaria, comunitaria, antiimperialista". (Miguez y Duarte, 2014, p. 76)

Como hemos visto en los resultados de la valoración de dichos textos, los calificativos destacados en cursivas hacen de estos libros un recurso propicio para una enseñanza-aprendizaje de la matemática contextualizada, democrática, más humanizada y afectiva, modeladora de valores, ambientalista. Recurso que debe complementarse con la consulta de otros libros de matemática escolar para complementar el abordaje disciplinar sobre el cual se han detectado muchas fallas, limitaciones y errores.

Son los últimos calificativos los que se constituyen en la manzana de la discordia, pues develan la direccionalidad hacia una ideologización acorde con el modelo económico y social que se viene construyendo o imponiendo, según se vea, en el país. Como reflexiones de cierre nos preguntamos ¿Por qué es esto tan cuestionable?, ¿Debe la educación ser aséptica en este sentido?, ¿No ha habido siempre mecanismos de ideologización a través de la Educación Matemática y en particular en los libros de texto de la disciplina?, y si es así ¿Por qué no ha habido con anterioridad un rechazo tan marcado como ahora?.

Wladimir Serrano, coordinador de la CB en Matemática, en entrevista concedida a Barrios (s/f), afirma que "Marcamos una diferencia sustancial con el enfoque que caracterizaba la educación matemática en los libros de las grandes casas comerciales y que hoy siguen publicando con todo el aparato ideológico", y complementa esto destacando que "en estudios que han realizado a textos publicados por editoriales transnacionales, de 20 imágenes que se presentan, en 19 aparecen hombres, y solo en una, una mujer. El sexo femenino es presentado realizando actividades que lo dejan en minusvalía frente al hombre, y su fenotipo obedece a patrones eurocéntricos". Nos questionamos, ¿No lleva esto implícito una profunda carga ideológica, pero que la hemos tomado de una manera natural acorde al orden establecido?. . En la misma entrevista, Norberto Reaño, uno de los autores de los libros, se pregunta "¿Qué tiene de malo que señalemos un Café Venezuela o un Chocolate Cimarrón, o enseñemos fracciones con las pastillas del CDI? ¿Qué tiene de malo que aparezca el Satélite Simón Bolívar o Miranda? En los libros de sellos privadas reseñan a un transbordador que dice USA o NASA y me parece bien porque habla de avance tecnológico". Quizás aquí esté el punto de quiebre, pues parece ser que lo que más se cuestiona no es que los textos estén contextualizados en la realidad venezolana, sino que, en opinión de algunos revisores, con la cual concuerdan los detractores de la CB, "promocionan descaradamente la acción del gobierno"(R21) e "intentan anular la pluralidad de ideas buscando pasar de la ideologia predominante hasta ahora a una nueva forma de ideologización, rechazada por un grueso de la población"(R32). **Al respecto queda mucho por discutir…..**

Bibliografía y referencias

Andonegui, M. (2015). Los libros de texto de Matemática. El caso de la Colección Bicentenario. Ponencia presentada en la X Jornada Centro Occidental de Educación Matemática. Barquisimeto: UPEL-IPB, Departamento de Matemática

Álvarez R. y otros (2012). *Matemática 1*, Caracas: Santillana.

Aguirre, M. (2014). *Libros para perpetrar la pobreza*. Foro Cerpe, Serie EDUCALIDAD, Cuaderno nº 1. Caracas.

Barrios, A, (s/f). Coordinador de la Colección Bicentenario: "Estos textos escolares explican y eso es terriblemente revolucionario". Entrevista a Wladimir Serrano y Noeberto Reaño para Agencia Venezolana de Noticias. Disponible en https://www.noticias24.com/venezuela/noticia/196300/coordinador-de...

Becerra, R. (2005*). La Educación Matemática Crítica. Orígenes y Perspectivas*. En "Didáctica Crítica, Educación Crítica de las Matemáticas y Etnomatemática. D. Mora (Coord.). 165-203. Bolívia: Editorial Campo Iris.

Beyer, W. (2004). *Algunos antecedentes de los libros de aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1969: descripción de las aritméticas de Romero y Serrano de Landáez y de algunos catálogos.* En II Simposio de Investigación en Educación Matemática. Pp. 13-32- Caracas: UNA

Cabero, J.; Duarte, A. y Romero, R. (2002, Junio 9). Los Libros de Texto y sus Potencialidades para el Aprendizaje. [Documento en línea]. Disponible: http://tecnologiaedu.us.es/revistaslibros/public5.htm [Consulta: 2018, Octubre 17].

Duarte, A. y Bustamante, k.(2013). Colección Bicentenario: una mirada desde los libros de Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 23-30.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*: China Lectures, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 4 (2), 129-159.

León, N. y Vicent, R. (2015). *Aportes para la revisión de los textos de matemática de la Colección Bicentenario.* Conferencia presentada en el IX Congreso Venezolano de Educación Matemática. Barquisimeto: Venezuela.

Ley Orgánica de Educación (2009). Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela N° 5929 (Extraordinario), 15 de agosto de 2009.

López, A. (2007). Libros de texto y profesionalidad docente. *Revista Adide* nº 6

Miguez, A. (2004) . *Los ejemplos, ejercicios, problemas y preguntas en los libros de texto de Matemática*. En II Simposio de Investigación en Educación Matemática. Pp. 67-78- Caracas: UNA.

Miguez, A. y Duarte, A. (2014) Análisis del tratamiento de la aritmética en los libros de matemática de la Colección Bicentenario. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 27, 73-81.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2007). *Subsistema de Educación Secundaria Bolivariana: Liceos Bolivarianos: Currículo*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012a). *Matemática para la vida: 1er año*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012b). *Conciencia Matemática: 2do año*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012c). *La Matemática de la Belleza: 3er año*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012d). *Naturaleza Matemática: 4to año*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2012e). *La Matemática y el vivir bien: 5to año*. Caracas: Autor

Ministerio del Poder Popular para la Educación (2015). *Plan de estudios de la Educación Media*. Caracas: Autor.

Monterrubio, M y Ortega T (2009). *Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones*. [Documento en Línea] Ponencia presentada en el 13 SEIEM. Disponible: http://www.revistaeducacion.educacion.es/ doi/358_087.pdf [Consulta: 2014, noviembre 20]

Mora, D. (2005). *Didáctica Crítica y Educación Crítica de las Matemáticas*. En "Didáctica Crítica, Educación Crítica del as Matemáticas y Etnomatemática. D. Mora (Coord.) 17-164. Editorial Campo Iris: Bolívia.

Parcerisa, A. (1996). Materiales Curriculares: como elaborarlos, seleccionarlos y usarlos. Barcelona:Graó.

Pérez Terán, Daniel (2014, junio 30). Análisis de los textos bicentenario: Matemáticas con defectos de exigencia y razonamiento [Entrevista a Prof. Martín Andonegui]. *El Impulso*. Disponible: http://elimpulso.com/articulo/matematicas-con-defectos-de-exigencia-y-razonamiento [Consulta: 2015, junio 11]

Pinto, E. y González, F. (2013). Historia social de la educación matemática en Iberoamérica: Las ecuaciones lineales en los libros de texto de matemáticas para Educación Básica en Venezuela. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 35, 177-201.

Ramírez, R. (2008). La pedagogía crítica: una manera ética de generar procesos educativos. *Folios*, Segunda Época, N° 28, 108-119.

Ramírez, T. (2002). El Texto Escolar como Objeto de Reflexión e Investigación. *Docencia Universitaria*, Vol. III, Nº 1, 101-124.

Ramírez, T. (2012). *El texto escolar en Venezuela. Políticas Públicas y Representaciones Sociales*. Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

Serrano, W. (2016). *La educación crítica de la Matemática en el contexto de la sociedad venezolana: hacia su filosofía y praxis.* Caracas:GIDEM

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una Filosofía de la Educación Matemática Crítica* (2da Ed.) (P. Valero, Trad.). Bogotá: Una Empresa Docente.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6 (1), 3-26.

Skovsmose, O. (2011). *Educação Matemática Crítica a questão da Democracia* (6ta edición). Campiñas: Papirus.

Skovsmose, O. y Valero, P (2001). Breaking Political neutrality: The critical engagemnete of Mathematics Education With Democracy. Disponible en http://www.learning.aau.dk/download/Medarbejdere/Paola-Valero/Breaking_Political_Neutrality.pdf.

Sierpinska, A. (1998). *Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism*. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), Language and communication in the mathematics classroom (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbook. Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics.*7(3), pp 41-51.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Criterios valorativos y normativos en la didáctica de una disciplina científica

Vicenç **Font** Moll
Facultad de Educación, Universidad de Barcelona
España
vfont@ub.edu

Resumen

A la Didáctica de las Matemáticas se le pide que dé respuesta a dos demandas diferentes. La primera pretende que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la segunda que éstos sirvan para guiar la mejora de dichos procesos. La primera demanda exige herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para responder ¿qué ha ocurrido aquí, ¿cómo y por qué? La segunda necesita herramientas para una didáctica valorativa que sirva para responder la pregunta ¿qué se podría mejorar? Se trata de demandas diferentes, pero estrechamente relacionadas. En este trabajo se reflexiona sobre el constructo criterios de idoneidad didáctica en el marco de la problemática del papel que deben jugar las valoraciones y los principios normativos en la práctica del profesor (segunda demanda). Más en general, se realiza un trabajo de desarrollo teórico del constructo idoneidad didáctica: cómo se originó, hacia qué nos conduce y cómo puede afectar a la práctica del profesor de matemáticas.

Palabras clave: criterios normativos, idoneidad didáctica, enfoque ontosemiótico.

Introducción

En la revista *For the Learning of Mathematics* recientemente se han publicado varios artículos (Bartolini, 2018; Davis, 2018; Gascón y Nicolás, 2017; Godino, Batanero y Font, 2019; Oktaç, Trigueros y Romo, 2019) que reflexionan sobre la siguiente pregunta: ¿Hasta qué punto, en qué forma y en qué condiciones, la didáctica puede (o incluso debe) proponer juicios valorativos y normativos que proporcionen criterios sobre cómo organizar y gestionar los procesos de estudio? Se trata de una cuestión sobre el carácter prescriptivo de los resultados consolidados de la investigación científica en Didáctica de la Matemática (Gascón y Nicolás, 2017, p. 26).

En el artículo citado, Gascón y Nicolás analizan las respuestas dadas a la pregunta anterior por varios autores, aplicando la perspectiva específica de la Teoría Antropológica de lo

Didáctico. Finalizan el trabajo planteando cuestiones más específicas para concretar la cuestión general acabada de comentar , que pueden ser abordadas desde diferentes marcos teóricos, con la intención de iniciar un debate de articulación de teorías. Concretamente plantean las siguientes preguntas (p. 30): ¿Cuáles son los principios o asunciones básicas de cada uno de los enfoques o teorías didácticas? ¿Qué fenómenos didácticos se proponen explicar y qué problemas prioriza? ¿Cómo inciden dichos principios sobre los fines de la educación que cada enfoque considera «valiosos» (lo que puede dar lugar a prescripciones normativas) y sobre el tipo de problemas de investigación que el enfoque en cuestión privilegia? Las asunciones básicas de los diferentes enfoques o teorías didácticas y los correspondientes fines que propugnan, ¿son compatibles entre sí? En caso contrario, ¿en qué medida podemos afirmar que los diferentes enfoques forman parte de la misma disciplina? Dichas cuestiones implican una concepción de la Didáctica de la Matemática como campo de investigación, y, por tanto, asumir la naturaleza de los resultados de dicha investigación, como conocimientos didácticos.

En Godino, Batanero y Font (2019) se responde a la cuestión general formulada por Gascón y Nicolás (2017) a partir de los principios y herramientas teóricas desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013). Según estos autores, El EOS asume una concepción amplia de la Didáctica de las Matemáticas (DM) como ciencia y tecnología, al considerar que esta disciplina debe abordar cuestiones descriptivas, explicativas, predictivas, propias del conocimiento científico, y también prescriptivas y valorativas, propias del conocimiento tecnológico. Dicho de otra manera (Font y Godino, 2011), la DM tiene que dar respuesta a dos demandas diferentes. La primera pretende que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la segunda que éstos sirvan para guiar su mejora, lo cual nos lleva a una reflexión sobre valores y normas que funcionan como una guía para obrar que orienta acerca de qué acciones son correctas (buenas) y cuáles son incorrectas (malas). Se trata de dos demandas diferentes, pero estrechamente relacionadas, ya que sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es posible conseguir su mejora.

En general, los enfoques teóricos que se han generado en la DM están más cómodos con la primera demanda que con la segunda. La razón es que con la segunda demanda (concepción de la didáctica como generadora de criterios normativos) es, usando la metáfora de la moral, que nos adentramos en un terreno en que los términos a utilizar son más bien propios del discurso moralista, ya que son del tipo: calidad, bien, mal, mejor, peor, correcto, incorrecto etc. Es decir, nos adentramos en una reflexión sobre valores y normas que funcionan como una guía para obrar que orienta acerca de qué acciones se deben hacer. Dicho de otra manera, dejamos el terreno firme de la ciencia (sea esta de tipo positivista o antipositivista) para adentrarnos en un terreno menos firme.

Ahora bien, hay programas de investigación que consideran que la razón de la primera demanda (concepción de la didáctica como ciencia descriptiva/ explicativa) es poder afrontar la segunda. Una revisión de la literatura muestra que una parte importante de los trabajos de investigación relacionan ambas demandas de facto, aunque en muchos casos sin justificar fundadamente dicha conexión.

Hay dos aserciones que, probablemente, pueden ser aceptadas por la mayoría de marcos teóricos en Didáctica de las Matemáticas: a) cuanto mejor podamos describir, comprender y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje (primera demanda), estaremos en mejores

condiciones para conseguir una mejora de la enseñanza (segunda demanda), b) los resultados generados como consecuencia de la primera demanda influyen, de alguna manera, en la generación de valores y normas que guían la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Es decir, en general se asume algún tipo de conexión entre las dos demandas, aunque los diferentes enfoques teóricos difieren en la manera de fundamentarla.

En el EOS, se considera que la naturaleza del conocimiento que se pretende construir tiene un carácter científico y, además, tecnológico. Esto quiere decir que, por una parte, se abordan problemas teóricos de clarificación ontológica, epistemológica y semiótica sobre el conocimiento matemático, en cuanto tales problemas tienen relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje (componente científico, descriptivo, explicativo, predictivo), y, por otra parte, se trata de intervenir en dichos procesos para hacerlos lo más efectivos posible (componente tecnológico - prescriptivo). Se entiende que la descripción, explicación y predicción, son los fines de la actividad científica, mientras que la prescripción y valoración, son los principales objetivos correspondientes a la actividad tecnológica, aunque ésta también incluye elementos de investigación aplicada a la resolución de problemas concretos. Por tanto, en el marco del EOS se ha decidido afrontar la segunda demanda a partir de la generación de constructos teóricos, siendo el más relevante el constructo criterios de idoneidad didáctica (CI). En los apartados siguientes explicaremos primero un breve resumen de este constructo y, a continuación, profundizaremos en su génesis y desarrollo, para finalizar con unas consideraciones generales.

Problema de optimización del aprendizaje: criterios de idoneidad didáctica

El constructo *idoneidad didáctica* surge como respuesta a la siguiente pregunta *¿Qué tipo de acciones y recursos se debería implementar en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático?* En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la noción de *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*).

La Didáctica puede ofrecer principios provisionales (normas que son llamadas en el EOS criterios de idoneidad) consensuados por la comunidad interesada en la educación matemática, que pueden servir, primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje y, segundo, para valorar sus implementaciones. Estos principios son útiles en dos momentos:1) a priori, los criterios de idoneidad orientan cómo se debe llevar a cabo un proceso de instrucción, 2) a posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje efectivamente implementado e identificar posibles aspectos de mejora en el rediseño. Para generar estos principios los investigadores en educación matemática deben dialogar y colaborar con todos los demás sectores interesados en la mejora de la enseñanza de las matemáticas (profesores, padres, administración, etc.). Esto permitirá crear consensos que generen principios para orientar y valorar los procesos de instrucción, con la finalidad de conseguir una enseñanza idónea de las matemáticas. Se reconoce, no obstante, que la identificación de criterios de idoneidad, tanto generales como específicos, requiere de una agenda de investigación que se abre a discusión y desarrollo en la comunidad de educación matemática.

Dicho constructo general de idoneidad se ha particularizado en seis criterios parciales, lo cuales a su vez se concretan en componentes e indicadores (Godino, 2013; Breda, Font y Pino-Fan, 2018). Por ejemplo, para el criterio de idoneidad epistémica se puede formular el siguiente criterio parcial (componente): Los significados de los objetos institucionales pretendidos en cada contexto educativo deben ser una muestra representativa del significado de referencia global del objeto y tener en cuenta las restricciones de los contextos y sujetos implicados.

El logro de una alta idoneidad didáctica requiere un equilibrio entre los diferentes criterios parciales, teniendo en cuenta el contexto en que tiene lugar. Supongamos, por ejemplo, que hay consenso en que uno de los criterios es que los alumnos hayan aprendido (criterio cognitivo), que otro sea que se les haya enseñado unas matemáticas relevantes (con resolución de problemas, modelización, etc.) (criterio epistémico) y otro sea que se debe motivar a los alumnos para conseguir su implicación (criterio afectivo). Es relativamente fácil conseguir alguno de estos tres criterios por separado, pero lo que es más difícil y valioso es conseguir un cierto equilibrio entre los tres. Metafóricamente, un barco se hunde si no lleva la carga equilibrada.

La idoneidad es relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo. Implica la asunción de una racionalidad axiológica en educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, y en definitiva responder a la pregunta genérica, ¿sobre qué aspectos se puede incidir para la mejora progresiva de los procesos de instrucción matemática?

La noción de idoneidad está inspirada en la teoría consensual de la verdad de Peirce y de sus desarrollos y adaptaciones posteriores realizadas por autores como Apel (1991) y Habermas (1979). En esta teoría, "verdadero" es, en principio, un enunciado para un usuario cuando cree que cualquier otro sujeto racional estaría dispuesto a asignar el mismo predicado al enunciado. La verdad no se piensa en relación a un mundo separado de ideas, no como "conformidad" con ideas trascendentes, sino como aquello que podría ser defendido ante un conjunto de interlocutores y aceptado por ellos.

Génesis y desarrollo del constructo idoneidad didáctica

Las decisiones adoptadas para delimitar las bases que han permitido el desarrollo del constructo idoneidad didáctica han sido (Breda, Font y Pino-Fan, 2018):

1) La primera decisión es que debe ser un constructo que permita al profesor reflexionar sobre su práctica y poder guiar su mejora en el contexto donde se realiza.

2) La segunda decisión, derivada de la primera, es utilizar un término que tenga un cierto aire de familia con el término calidad, pero en el que los aspectos contextuales sean más predominantes que los estructurales o inherentes. Por esta razón, se optó por el término idoneidad para introducir el constructo CI.

3) La tercera decisión es considerar que lo que nos dice cómo guiar la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad científica, cuando éste se orienta a conseguir un consenso sobre lo que se puede considerar como mejor. Desde esta perspectiva, la DM nos puede ofrecer principios provisionales (un tipo de normas llamados aquí criterios de idoneidad) consensuados por la comunidad interesada en la educación matemática, o bien por un sector importante de ella, que pueden servir primero para

guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones.

4) La cuarta decisión es que el constructo de idoneidad didáctica ha de ser multidimensional y, por tanto, ha de descomponerse en idoneidades parciales y, a su vez, cada una de ellas hacerlo en componentes e indicadores.

5) la quinta decisión es que un proceso de instrucción se considera idóneo cuando se consigue un cierto equilibrio entre los diferentes criterios parciales de idoneidad, y no cuando sólo se dan algunos de ellos.

6) La sexta decisión es que los criterios de idoneidad parciales (en tanto que consensos a priori) pueden entrar en conflicto con el contexto en que trabaja el docente, lo cual comporta, primero, tratar los CI de manera conjunta (y no como criterios independientes como frecuentemente se hace en el caso de la calidad) y, segundo, a cuestionar o relativizar la validez de un determinado criterio en un contexto específico, lo cual lleva a dar pesos relativos diferentes a cada criterio en función del contexto.

Esta sexta decisión es posible porque los CI se consideran como normas que son principios en lugar de normas que son reglas. Los principios tienen un aspecto de peso o importancia que las reglas no tienen, de modo que los conflictos entre principios se resuelven por peso. Dicho de otra manera, los CI, en tanto que principios, no son binarios, son graduales.

7) La posible contradicción entre la quinta y la sexta decisión se puede resolver mediante el rediseño del proceso de enseñanza y aprendizaje. En efecto, de acuerdo con la sexta decisión, el mayor peso dado a algunos principios en función del contexto inclina las decisiones en una dirección. Ahora bien, los principios con menor peso sobreviven intactos aun cuando no prevalezcan, lo cual permite darles más peso en un rediseño del proceso de enseñanza y aprendizaje de cara a una implementación futura más equilibrada.

La opción de considerar que el constructo idoneidad didáctica debe contar con un cierto grado de consenso, da una manera de generar criterios parciales que permitan responder a la pregunta ¿qué se debe entender por mejora de la enseñanza de las matemáticas? ya que es cuestión de explorar, en una primera fase, cómo se ha generado un conjunto de tendencias y principios que gozan de un cierto consenso en la comunidad relacionada con la educación matemática; clarificando, a ser posible, qué papel juegan los resultados de la investigación didáctica en su generación. En una segunda fase, se tiene que relacionar, relativizar, subordinar, etc., estos principios para generar una lista de CI, con sus componentes e indicadores, que sirvan al profesor para organizar la reflexión sobre su práctica.

A continuación, explicamos brevemente estas dos fases que han llevado al constructo CI, compuesto por seis criterios de idoneidad didáctica parciales, cada uno, a su vez, desglosado en componentes e indicadores, cuya función es señalar aspectos a mejorar en la práctica del profesor.

Para el desarrollo del constructo CI, se han considerado las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) y los aportes de los diferentes enfoques teóricos del área de la DM (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

Las principales tendencias que se tuvieron en cuenta fueron: la incorporación de nuevos contenidos, presentación de una matemática contextualizada, dar importancia a la enseñanza de

los procesos matemáticos (resolución de problemas, modelización matemática, etc.), enseñanza y aprendizaje de tipo activo (constructivista), considerar que saber las matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos, principio de equidad en la educación matemática obligatoria y la incorporación de nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

El caso paradigmático de reconversión de algunas de estas tendencias en principios explícitos es el caso de los principios del NCTM (2000): currículum, enseñanza, aprendizaje, evaluación, tecnología e igualdad. En el EOS se consideró que, dado el amplio consenso que generan, los principios del NCTM, reinterpretados, podían ser el origen de algunos de los CI, o bien podían contemplarse como componentes suyos. En concreto, se reinterpretaron los principios del NCTM como se explica en Breda, Font y Pino-Fan (2018). Por ejemplo, el principio del currículum del NCTM señala claramente la idea de unas matemáticas importantes. Por esta razón, este principio, en la propuesta de criterios de idoneidad, se descompone en dos. Uno llamado criterio de idoneidad epistémica, que se relaciona con la idea de matemáticas importantes, y otro, llamado criterio de idoneidad ecológica, que se refiere al hecho de que los procesos de enseñanza y aprendizaje tienen que tener en cuenta el entorno en que se realizan. Por entorno se entiende todo aquello que está alrededor del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en ella, en particular el currículum oficial.

Además de las tendencias y principios comentados anteriormente en el área de la DM se han generado conocimientos y resultados que gozan de amplio consenso. Algunos de los aportes de los diferentes enfoques del área de la DM también se han tenido en cuenta para el desarrollo del constructo CI (Godino, 2013).

Consideraciones finales

En diversas investigaciones (Seckel y Font, 2015; Morales y Font, 2017; Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Morales y Font, en prensa) se ha observado el uso implícito de los criterios de idoneidad didáctica por parte del profesorado de matemática en formación inicial y continua cuando reflexionan sobre su propia práctica o la de otros; puesto que los criterios de idoneidad didáctica funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que justificar que sus propuestas representan una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta noción para guiar su reflexión . Una posible explicación está relacionada con los orígenes del constructo ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de Didáctica de las Matemáticas, aunque fuese local. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores funcionen como regularidades en el discurso del profesor es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Ahora bien, otra explicación también plausible es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma como regularidades en su discurso simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable. Esta última explicación donde más plausible parece es en la formación de futuros profesores, ya que es evidente que ellos no han participado en la generación de los consensos que son el soporte de los criterios de idoneidad didáctica. Por tanto, en la formación inicial de profesores, parece razonable que, en lugar de presentar los criterios de idoneidad como principios ya elaborados, se creen espacios para su generación como

resultado de consensos en el grupo.

Con relación a la cuestión de cómo afecta a la práctica del profesor un constructo como el de idoneidad didáctica, la primera consideración es que es una herramienta que se puede enseñar a los profesores en formación y en servicio para organizar la reflexión sobre su práctica (Breda, Font y Lima, 2015). En particular, los criterios de idoneidad didáctica se están enseñando como contenido para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica en diferentes postgrados.

La segunda, es que su aplicación concreta debe ser situada. Es decir, la aplicación, priorización, relegación etc., de dichos criterios depende del contexto institucional en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje, y del criterio pedagógico y didáctico del profesor que los debe tener en cuenta. Se trata de contrastar el ideal con la realidad, pero en lugar de responsabilizar al profesor del desfase inevitable entre ambos, el uso de los criterios de idoneidad didáctica le da la posibilidad al profesor de reflexionar y decidir, de manera autónoma y en función del contexto, acciones para conseguir una mejora de sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Los criterios de idoneidad son una guía de orientación para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y no unos principios o criterios que produzcan la frustración del profesor normal al no poder alcanzarlos.

En cada contexto el profesor puede cuestionar ciertas verdades que tienen un amplio consenso. Por ejemplo, puede haber un gran consenso en que organizar la clase en forma de proyecto de trabajo y dando mucho peso a la modelización es, a priori, lo más deseable; pero, si tenemos que hacerlo con un grupo de alumnos heterogéneos, en los que la capacidad de concentración dura poco tiempo, quizás esta verdad deba ser cuestionada en este contexto particular. Con este ejemplo se pretende señalar que un consenso asumido en el área de la Didáctica de las Matemáticas como una buena manera de enseñar las matemáticas puede funcionar de modo incoherente o producir contra efectos no previstos, al encarnarse en unas prácticas de enseñanza en un contexto de aula (espacio-temporal) determinado.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-100 (MINECO/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias y bibliografía

Apel, K.O. (1991). *Teoría de la verdad y ética del discurso*. Barcelona: Paidós e I.C.E. de la Universidad de Barcelona.

Bartolini, M. G. (2018). Answer to Gascón & Nicolás. *For the Learning of Mathematics*, 38 (3), 50-53.

Breda, A., Font, V. & Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal Of Mathematics Science And Technology Education*, *13*(6), 1893-1918.

Davis, B. (2018). What sort of science is didactics? *For the Learning of Mathematics*, 38 (3), 44-49.

Font, V. y Godino, J. D. (2011), Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en J. M. Goñi (ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 9-55). Barcelona: Graó.

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.

Gascón, J. & Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics*, 37 (3), 26-30.

Godino, J. D. (2013) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Autores (en prensa).

Habermas, J. (1997). Teorías de la verdad. En, J. A. Nicolás y M. J. Frápoli (Eds.), *Teorías de la verdad en el siglo XX* (pp. 543-596). Madrid: Tecnos.

Morales, Y. y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae*, *19*(1), 122-137.

Morales, Y. y Font, V. (en prensa). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa*.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Oktaç, A., Trigueros, M. & Romo, A. (2019). APOS Theory: connecting research and teaching. *For the Learning of Mathematics*. 39 (1), 30-34.

Seckel, M.J. y Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Práxis educacional*, 19, 55-75.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Aprendizagem profissional do professor de Matemática e o ensino de Álgebra: buscando articulações entre a escola básica e a universidade

Alessandro Jacques **Ribeiro**
Universidade Federal do ABC (UFABC)
Brasil
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo

A literatura internacional tem indicado a carência de pesquisas que se proponham a investigar e a desvelar qual é e como se constitui a gênese da aprendizagem profissional dos professores para o ensino de álgebra na escola básica. Há também um importante desafio a ser enfrentado que é o distanciamento entre a matemática ensinada na formação inicial e as práticas matemáticas das salas de aula. Com isso, temos desenvolvido estudos que tematizam e consideram a aprendizagem profissional do professor como sendo construída na prática da sala de aula e a partir dela, e que essa aprendizagem é mediada por tarefas de aprendizagem profissional, por discussões matemáticas coletivas e pelo papel e as ações do formador durante processos de formação. Serão apresentados durante a conferência resultados de investigações (i) sobre à aproximação da matemática escolar e da matemática acadêmica e (ii) sobre a presença e a interlocução da prática como um componente essencial nos conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores para o ensino de álgebra, da escola básica à universidade.

Palavras-chave: aprendizagem do professor, ensino de álgebra, matemática universitária e matemática escolar, formação de professores.

Pretende-se, nesta conferência, colocar em discussão resultados de pesquisas que temos desenvolvido no Brasil[1] (Alves; Aguiar; Ribeiro, 2018; Elias; Ribeiro; Savioli, 2019; Ferreira; Ribeiro, M.; Ribeiro, A., 2017; Lautenschlager; Ribeiro, 2017; Pazuch; Ribeiro, 2017; Ribeiro; Aguiar; Pazuch, 2018; Ribeiro; Bezerra; Gomes, 2017; Ribeiro; Cury, 2015), as quais tem

[1] *"FORMATE - Formação Matemática para o Ensino"*, grupo de pesquisa credenciado no CNPq e que desenvolve pesquisas sobre conhecimentos profissionais do professor de matemática. Disponível em 13 mar. 2019, em: <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/8814738426604861>

apontado para as especificidades dos conhecimentos e das práticas dos professores que ensinam matemática, da escola básica à universidade, no que tange ao ensino de álgebra.

Ainda que se tenha dado um grande destaque à formação de professores que ensinam matemática nas últimas décadas (Fiorentini; Passos; Lima, 2016; Gellert; Hernandéz; Chapman, 2013; Ponte, 2014; Stahnke; Schueler; Roesken-Winter, 2016), é possível perceber que há ainda uma demanda por pesquisas que priorizem a prática do professor como elemento fundante e como ponto de partida para a compreensão do que esse professor conhece, de como ele conhece e de para que ele conhece (Cochran-Smith; Lytle, 1999; Lampert, 2010; Ponte; Chapman, 2008).

Buscando-se particularizar ainda mais a problemática acerca da formação - inicial e continuada - de professores que ensinam matemática, há de se desenvolver (novas) investigações que se proponham a desvelar qual é e como se constitui a gênese da aprendizagem profissional dos professores (Opfer; Pedder, 2011; Webster-Wright, 2009) para o ensino de Álgebra na escola básica (Mc Crory et al., 2012). Um dos elementos centrais investigados em nossas pesquisas fazem referência aos conhecimentos matemáticos e didáticos (Ball; Thames; Phelps, 2008; Ponte, 1999) desses professores que ensinam matemática.

A preocupação que parece justificar os esforços envidados em nossos estudos emergem de resultados apontados por pesquisas acerca dos processos de ensino e de aprendizagem de álgebra, resultados estes que demonstram o insucesso dos estudantes na aprendizagem deste tema (Cyrino; Oliveira, 2011; Dorigo; Ribeiro, 2010; Kaput, 2008; Matos; Ponte, 2009; Stephens; Ribeiro, 2012), ao mesmo tempo que documentam as dificuldades encontradas pelos professores no ensino de álgebra nos diferentes níveis escolares (Barbosa; Ribeiro, 2013; Doerr, 2004; Mccrory et al., 2012; Pazuch; Ribeiro, 2017; Ponte; Branco, 2013; Ribeiro, 2012; Ribeiro; Cury, 2015; Ribeiro; Oliveira, 2015; Wasserman, 2015).

Quando se atua na e se investiga a formação de professores que ensinam matemática, um dos principais desafios a superar é o distanciamento entre a matemática ensinada nos cursos de formação inicial de professores (as Licenciaturas) e as práticas matemáticas efetivamente relacionadas à atuação na Escola Básica. Tal situação já chamava a atenção de pesquisadores há quase um século, quando Felix Klein ([1932]- 2004) e, em nosso grupo, temos nos debruçados sobre questões desta natureza, por exemplo, nos trabalhos de Elias, Ribeiro e Savioli (2019), Lautenschlager e Ribeiro (2017), Ribeiro e Oliveira (2015).

Ao retomar o objeto de estudo de nosso grupo, quer seja, a aprendizagem profissional dos professores, nota-se que tal temática tem sido estudada, discutida e investigada há mais de duas décadas (Opfer; Pedder, 2011). Dentre os resultados de estudos sobre a temática, no campo da Educação Matemática, emergiu uma perspectiva de aprendizagem profissional de professores fortemente ancorada na prática da sala de aula (Ball; Cohen, 1999; Lampert, 2010; Ponte; Chapman, 2008; Smith, 2001) e facilitadora de uma "aprendizagem profissional autêntica" (Webster-Wright, 2009).

Em seu estudo, Webster-Wright (2009) destaca ainda, que a formação inicial na universidade é apenas a primeira fase do processo de aprendizagem da vida profissional de muitos trabalhadores, como é o caso dos professores, uma vez que a eficácia dessa aprendizagem ocorre ao longo de muitos anos e no contexto da prática profissional. Essa visão holística sobre a aprendizagem profissional, em especial do professor, é também sustentada por Opfer e Pedder (2011), os quais defendem uma análise da aprendizagem profissional docente como um sistema complexo, e não como eventos episódicos.

Mas como se possibilitar uma aprendizagem profissional do professor que, ao mesmo tempo, tenha início na universidade, considere a prática da sala de aula, e seja desenvolvida (e acompanhada) em sua vida profissional futura? Nesse sentido, temos buscado debruçar nossas atenções para a importância de elaborar e desenvolver oportunidades de aprendizagem profissional, fundamentadas na prática dos professores, de modo a proporcionar aprendizagem profissional aos docentes ao longo de suas carreiras (Loucks-Horsley, 1997). Tal perspectiva é corroborada por Bruce et al. (2010), que indicam em seu estudo, que o ambiente da sala de aula deve ser considerado como base para construir oportunidades de aprendizagem profissional para os professores, de modo que eles se envolvam com o "uso de ciclos interativos de planejamento, desenvolvimento e reflexão [de aulas]" e que isso possibilite "conhecer como essas oportunidades de aprendizagem impactam para a eficiência dos professores e desempenho dos alunos (p. 1599)".

Fundamentado na literatura discutida até o momento, adotamos um entendimento que nessas oportunidades de aprendizagem profissional (OAP) há de se considerar o papel-chave das tarefas de aprendizagem profissional (TAP), as quais consideramos como sendo "tarefas que envolvem professores no trabalho do ensino, podem ser desenvolvidas a fim de encontrar um objetivo específico para a aprendizagem do professor e levam em consideração o conhecimento prévio e a experiência que os professores trazem de sua atividade" (Ball; Cohen, 1999, p. 27). Como apontam Watson e Mason (2007), há uma lacuna considerável na literatura acerca de estudos que analisem o papel das tarefas na aprendizagem dos professores, diferentemente da significativa produção relativa ao papel das tarefas na aprendizagem dos estudantes. Alguns resultados acerca desta temática, no que tange ao ensino de álgebra, podem ser melhor compreendidos em Ribeiro e Ponte (2019, no prelo).

Em nosso trabalho de investigação, temos tomado por base, um entendimento de que a aprendizagem do professor situa-se na prática diária, incluindo aí não apenas os momentos de sala de aula, mas também planejamento, avaliação, colaboração com colegas, entre outros (Davis & Krajcik, 2005); e que a aprendizagem do professor está distribuída entre indivíduos, bem como em artefatos, como o caso de tarefas que são preparadas para sua formação (Putnam & Borko, 2000); consideramos a aprendizagem do professor como algo que:

envolve o desenvolvimento e a integração de uma base de conhecimento sobre conteúdo, ensino e aprendizagem; tornando-se [o professor] capaz de aplicar esse conhecimento em tempo real para tomar decisões no ensino; participar do discurso do ensino; e tornar-se enculturado (e engajado) em uma variedade de práticas de professores (Davis & Krajcik, 2005, p. 3).

Atualmente, como resposta às lacunas identificadas na literatura e, ao mesmo tempo, como uma necessidade vivenciada em nosso grupo de pesquisa, temos buscado organizar um *framework*, que chamamos de *"Oportunidades de Aprendizagem do Professor (OAP)",* o qual tem por tem por intenção se constituir como um modelo teórico-metodológico para dar apoio para (i) organizar o *design* de processos formativos que objetivem promover aprendizagem aos professores e (ii) identificar se e avaliar como as três dimensões do *modelo* geram oportunidades para os professores aprenderem durante os processos formativos. O *modelo* que está sendo proposto contempla, de forma articulada e interativa, as três dimensões que o compõem: (a) Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), (b) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP), (c) Papel e Ações do Formador (PAF).

Com isso, fica o convite para que participem da conferência paralela a ser realizada na *XV*

Conferencia Inter-Americana de Educação Matemática (XV CIAEM), na qual poderão conhecer resultados já alcançados, questões em aberto, assim como nossa agenda de pesquisa.

Referencias

Alves, K. A.; Aguiar, M.; Ribeiro, A. J. (2018). As dimensões do conhecimento do professor que ensina matemática: o *knowledge quartet* como ferramenta de análise da prática docente. *Acta Scientiae* – ULBRA, Canoas, v. 20, 22-42.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). *Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education.* In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco, CA: Jossey Bass.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barbosa, Y. O., & Ribeiro, A. J. (2013). Multisignificados de equação: Uma investigação acerca das concepções de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*, 379-398.

Bruce, C. D., Esmonde, I., Ross, J., Dookie, L., & Beatty, R. (2010). The effects of sustained classroom-embedded teacher professional learning on teacher efficacy and related student achievement. *Teaching and Teacher Education*, *26,* 1598-1608.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, *24*(1), 249-305.

Cyrino, M., & Oliveira, H. (2011). Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. *Bolema*, *24*(38), 97-126.

Davis, E. A., & Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher*, 34(3), 3–14.

Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and teaching of algebra. In K Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Ed.). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 267-289). Boston, MA: Kluwer,

Dorigo, M.; Ribeiro, A. J. (2010). Significados de equação: um estudo realizado com alunos do Ensino Médio. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, São Paulo, v. 3, 154-182.

Elias, H. R.; Ribeiro, A. J.; Savioli, A. M. P. D. (2019, no prelo). Epistemological Matrix of Rational Number: a Look at the Different Meanings of Rational Numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education.* DOI: 10.1007/s10763-019-09965-4

Ferreira, M. C. N.; Ribeiro, C. M.; Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Zetetiké* (on line), v. 25, 494-511.

Fiorentini, D.; Passos, C. L. B.; Lima, R. C. R. (Org.). (2016). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática:* Período 2001 a 2012. 1. ed. Campinas: FE-Unicamp, v. 1, 488p.

Gellert, U.; Hernandéz, R. B.; Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. In: CLEMENTS, M. A. et al. (Ed.). *Third international handbook of mathematics education*. New York, NY: Springer, 327-360.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? *Journal of Teacher Education*, 61(1-2) 21–34

Lautenschlanger, E.; Ribeiro, A. J. (2017). Formação de professores de matemática e o ensino de polinômios. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 19, 237-263.

Loucks-Horsley, S. (1997). Teacher change, staff development, and systemic change: Reflections from the eye of the paradigm. In S. N. Friel & G.W. Bright (Eds.), *Reflecting on our work: NSF teacher enhancement in K-6 mathematics* (pp. 133–150). Lanham, MD: University Press of America.

Loucks-Horsley, S., Hewson, P. W., Love, N., & Stiles, K. E. (1998). *Designing professional development for teachers of science and mathematics*. Thousand Oaks: Corwin Press.

Matos, A. S., & Ponte, J. P. (2009). Exploring functional relationships to foster algebraic thinking in grade 8. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*, Itália, Supplemento n.2 al n. 19,.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S. L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584-615.

Opfer, V. D., & Pedder, D. (2011). Conceptualizing teacher professional learning. *Review of Educational Research*, 81(3), 376-407.

Pazuch, V.; Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 19, pp. 465-496.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares (Eds.). *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE* (pp. 59-72), Porto: SPCE.

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de matemática: perspectivas atuais. In: PONTE, J. P. (Org.). *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Lisboa: IE/UL, 343-358.

Ponte, J. P.; Branco, N. (2013). Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista*, Curitiba, n. 50, 135-155.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: English, L. D. (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed. pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Putnam, R., & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? Educational Researcher, 29(1), 4–15.

Ribeiro, A. J. (2012). Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema*, *26*(42), 535-557.

Ribeiro, A. J., & Cury, H. N. (2015). *Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ribeiro, A. J.; Aguiar, M.; Pazuch, V. (2018). O uso de vídeos em um processo formativo sobre o ensino de álgebra. In: Silva, R. S. R. (Org.). *Processos formativos em educação matemática: perspectivas filosóficas e pragmáticas*. Porto Alegre, RS: Fi, 213p.

Ribeiro, A. J.; Oliveira, F. A. P. V. S. (2015). Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações. *Zetetiké*, Campinas, v. 23, n. 44, 311-327.

Ribeiro, A. J.; Ponte, J. P. (2019, no prelo). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae*.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Stahnke, R.; Schueler, S.; Roeskâ Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision‐making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM*, Heidelberg, v. 48, n. 1, 1-27.

Stephens, M., & Ribeiro, A. J. (2012). Working towards algebra: The importance of relational thinking. *RELIME*, *15*, 307-401.

Wasserman, N. H. (2015). Unpacking teachers' moves in the classroom: navigating micro-and macro-levels of mathematical complexity. *Educational Studies in Mathematics*, Rotterdam, n. 90, p. 75-93.

Watson, A.; Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education,* Springer Netherlands, v. 10, n. 4-6, 205-215.

Webber, E., Tallman, M. A., & Middleton, J. A. (2015). Developing elementary teachers' knowledge about functions and rate of change through modeling, *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 1-33, DOI: 10.1080/10986065.2015.981940

Webster-Wright, A. (2009). Reframing professional development through understanding authentic professional learning. *Review of Educational Research*, *79*(2), 702–739.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Categorías para análisis de los contenidos didácticos en el currículo de matemáticas

Luis **Rico**
Universidad de Granada
España
lrico@ugr.es

Resumen

Al preparar esta presentación me interrogué sobre mi papel en este encuentro y el interés que una reflexión sobre el currículo de matemáticas –experiencias, conocimientos, significados y apreciaciones– pudieran tener para los congresistas del XV CIAEM. Entiendo que mi presencia aquí es a título de experto, actuación que de mí se espera, con la que enfoco estas ideas. Ahora bien, considero que la interpretación del currículo en el campo de la educación matemática, con criterios de demarcación todavía en discusión, es una cuestión abierta. Por eso, como contribución al debate, presento unas ideas y observaciones para su clarificación.

El título del trabajo consta de cuatro términos: Categorías; Análisis; Contenidos didácticos; y Currículo de matemáticas. Sobre cada uno de ellos haré unas reflexiones, estableceré ciertas relaciones y concluiré con una síntesis. Estas consideraciones me han llevado a optar por argumentos derivados de esas nociones, pensados para la formación de profesores de matemáticas en el sistema escolar, durante el periodo de la educación obligatoria.

Palabras clave: currículo, educación matemática, estructura del currículo, organizadores curriculares, análisis didáctico, significado y comprensión.

Currículo en educación matemática

Noción general de currículo

En sentido educativo general, 'currículo' es un término establecido para denotar la *planificación y puesta en práctica de un programa de formación*. Un currículo consiste en una propuesta de actuación educativa y su realización; se sitúa entre la declaración de principios generales y su traducción práctica, entre lo que se prescribe y lo que sucede realmente en el aula. Cada currículo concreta una serie de principios ideológicos, pedagógicos y psicopedagógicos que, en su conjunto, proponen una orientación para el sistema educativo o para una institución (Stenhouse, 1984).

Cuestiones a las que responde un currículo de matemáticas

En la planificación de las matemáticas escolares un currículo consiste en una formulación de respuestas operativas y concretas a las siguientes preguntas: ¿para qué aprender matemáticas?, ¿qué conocimientos matemáticos?, ¿cuándo y cómo enseñar y organizar el trabajo docente?, ¿cuáles criterios de evaluación muestran el desarrollo de competencias y cuáles el logro de los objetivos?

Objetivos y competencias responden a la pregunta ¿para qué aprender?

Los contenidos atienden a la pregunta ¿qué conocimientos matemáticos?

La metodología didáctica se ocupa de ¿cómo y cuándo llevar a cabo la enseñanza?

Los estándares de aprendizaje y criterios de evaluación consideran ¿cuáles datos muestran el desarrollo y logro de los aprendizajes?

A cada documento curricular corresponde plantear respuestas claras y precisas sobre las cuestiones anteriores, si bien hay diversidad de respuestas para cada una de las preguntas clave.

Dimensiones del currículo

Las cuatro cuestiones examinadas requieren estudios específicos que, a su vez, forman parte de disciplinas académicas especializadas, relacionadas mediante la noción general de currículo. Las cuestiones anteriores se consideran sustantivas y permiten postular dimensiones para estudiar y analizar una propuesta curricular. Esas dimensiones organizan los contenidos sobre currículo, marcan un objeto de estudio y, en cada caso, establecen unas variables para su análisis. Las cuatro dimensiones quedan recogidas en la figura 1.

Dimensiones del currículo de matemáticas

Cognitiva	Cultural/Conceptual	Ética/Formativa	Social

Figura 1. Esquema con las dimensiones del currículo institucional

Niveles de reflexión curricular

Los niveles de reflexión que se abordan y estudian desde un marco curricular son diversos. Los niveles se presentan al trabajar documentos curriculares concretos.

Así, cuando se asume el currículo como plan de trabajo para el profesor, como plan de acción, la *actuación en el aula* es su nivel de precisión. La normativa suele regular la concreción curricular, centra el plan de trabajo para unas condiciones espacio temporales dadas y lo expresa mediante unos contenidos, objetivos, metodología y criterios de evaluación propios.

La administración educativa marca otro nivel, que contempla el currículo como instrumento de *actuación en el sistema escolar* y propone otro nivel de concreción curricular. Los conocimientos se sistematizan mediante materias y asignaturas, los aprendizajes escolares se organizan por niveles y ciclos, los profesores asumen responsabilidades, el centro escolar realiza la evaluación.

También el currículo se trabaja desde un nivel de *reflexión disciplinar y académica*, donde se estudian sus fundamentos teóricos y su implementación técnica desde distintas disciplinas.

Dimensiones y componentes proporcionan una estructura conceptual adecuada para organizar las respuestas a las cuestiones curriculares básicas en cada nivel (Rico, 1997, pp. 377-409).

Estructura del currículo de matemáticas

Para formar profesores de matemáticas consideramos necesario disponer de un marco compartido de ideas bien fundadas, basadas en conceptos y relaciones, que estructure el plan que propone cada currículo, sistematice su estudio, lo caracterice y facilite su comparación con otras propuestas distintas. Las dimensiones y niveles curriculares proporcionan una primera estructura para el marco conceptual que proponemos. Igualmente, en cada dimensión y nivel, elegimos un concepto central como objeto de análisis preferente para organizar la información disponible. Dicho concepto se manejará con el método de análisis, mediante el cual se identificarán, extractarán y sintetizarán las nociones subordinadas y las representaciones intencionales relevantes relacionadas. Tal método de análisis se sustenta en la identificación, organización, secuenciación, clasificación y jerarquización de las proposiciones elementales o unidades de información intencionales obtenidas de textos, documentos y materiales curriculares, según dimensiones, categorías y componentes didácticos, haciendo parte de la estructura conceptual derivada de la noción de currículo. Cada propuesta se ha de ubicar en la estructura conjunta y responder a un mismo marco interpretativo (Rico, 2016).

Análisis didáctico en educación matemática

Análisis conceptual

El análisis es un *método que trabaja y profundiza sobre conceptos*, es decir, una técnica de escrutinio, reducción e interpretación, para lograr precisión, expresión adecuada y dominio en nociones y conceptos específicos (Beaney, 2018). Al iniciar una investigación o al profundizar sobre un tema en educación matemática se requiere analizar los conceptos centrales que tienen cierta relevancia por el conocimiento que proporcionan (Rico, 2001).

Características del análisis conceptual en educación matemática

El análisis conceptual es una herramienta metodológica que controla la complejidad semántica, selecciona sentidos, y dispone de aparato teórico para una investigación educativa.
Unidades para el análisis conceptual son los enunciados textuales, las descripciones, definiciones, listas extensivas, ejemplos de uso, contraposición de textos con significados alternativos y formulaciones simbólicas, relativas al aprendizaje, enseñanza y evaluación de las matemáticas escolares. No son datos empíricos, ni de naturaleza sensible. Vienen expresados por oraciones que aseveran un estado de cosas que tienen lugar en un cierto momento temporal.
En mi trabajo he llevado a cabo análisis conceptuales de distintos conceptos relevantes para la educación matemática. Ejemplos documentados de análisis conceptuales se muestran para las nociones de *error en el aprendizaje* (Rico, 1995, pp. 69-96), de *modelo matemático* (Rico, 2001, pp. 187-191), de *representación* (Rico, 2009, pp. 1-14), de *expectativas de aprendizaje* (Rico y Lupiáñez, 2010, pp. 61-106), de *análisis* (Rico y Fernández-Cano, 2013, pp. 1-22).

Cuestiones que aborda el análisis conceptual

El análisis conceptual ayuda al investigador en la consecución de varios logros:

- Proporciona un conocimiento amplio de un campo de estudio para enunciar un problema de investigación de modo coherente.
- Establece un marco teórico fundado en conceptos en el que plantear cuestiones significativas.
- Evita la polisemia de conceptos que se utilizan en investigación educativa.
- Objetiva el conocimiento: los conceptos científicos son públicos, son el tipo de cosas que muchas personas pueden compartir y comparten y que pueden manejarse normativamente.

- Rechaza la atribución arbitraria de significado o la desconsideración de significados centrales que, como usos patológicos, han de quedar eliminados.

El análisis conceptual es un método para trabajar y profundizar sobre los conceptos, que emplea las opciones técnicas del método analítico para conseguir precisión y dominio en su uso. Al iniciar una investigación o al profundizar sobre un tema en educación matemática corresponde identificar y analizar aquellos conceptos centrales en que se fundamenta, o bien escoger un sistema de interpretaciones ya validadas por otros autores (Rico, 2001).

Contenidos didácticos y dimensiones del currículo

Desde hace más de un siglo la comunidad de expertos en educación matemática ha fijado su atención y centrado sus indagaciones en determinados conceptos educativos nucleares y ciertas nociones matemática básicas, aceptadas como relevantes en educación matemática, a las que llamaremos *contenidos didácticos*.

El carácter central de esos contenidos lo reconocemos por su ubicuidad en documentos y textos que organizan, desarrollan y comunican la riqueza y diversidad de conocimientos vigentes sobre el currículo escolar de matemáticas; también se seleccionan por su amplitud y profundidad conceptual, por la abundancia de sus relaciones; igualmente, destacan por su adecuación a las dimensiones curriculares postuladas.

Dimensiones curriculares			
Dimensión cognitiva	Dimensión cultural/ conceptual	Dimensión ético/ formativa	Dimensión social
Objeto de estudio/ contenidos didácticos			
Expectativas y condiciones de aprendizaje para las matemáticas escolares	Significados de los contenidos matemáticos escolares	Planificación e implementación para enseñanza de las matemáticas	Evaluación y toma de decisiones en base a los logros de aprendizaje
Modalidad de análisis didáctico			
Análisis cognitivo del contenido	Análisis conceptual del contenido	Análisis metodológico del contenido	Análisis evaluativo del contenido

Figura 2. Contenidos didácticos y modalidades de análisis según dimensiones

Textos y documentos curriculares abordan sistemáticamente las expectativas de aprendizaje, los significados de las nociones matemáticas, el diseño y la planificación de las tareas escolares o los fundamentos para la toma de decisiones en base a la valoración de los logros alcanzados. Todas son nociones didácticas actuales, teórica y técnicamente hablando. Los textos escolares de matemáticas no trabajan solo nociones matemáticas, ya que se refieren a la educación y al hecho cultural del aprendizaje de las matemáticas por los escolares, a su enseñanza y evaluación.

Los expertos han profundizado en los contenidos didácticos vigentes guiándose por las dimensiones del currículo, articulados según los niveles citados; trabajan sobre los contenidos didácticos de acuerdo con diferentes tipos de categorías u organizadores curriculares que estudian y sus análisis los llevan a término a través de componentes, sistemas y elementos, teóricamente articulados y confrontados en la práctica con la experiencia y la investigación.

Categorías para clasificar los contenidos didácticos

Organizadores curriculares

¿Qué son los organizadores del currículo? Por organizadores curriculares entendemos aquellos conceptos que se adoptan como categorías para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. Para detectar la presencia en los textos normativos y en los manuales de cada una de esas dimensiones del currículo y analizar así su utilidad y sus funciones, elegimos y trabajamos con unas categorías denominadas *organizadores curriculares* que vinculamos con las dimensiones del currículo. Esas categorías reconocen y clasifican las unidades de información que, en cada documento, trabajan en las dimensiones consideradas.

¿Para qué sirven los organizadores del currículo? Los organizadores aportan información objetiva y fundada sobre cada contenido didáctico de la matemática escolar relacionándolo con las dimensiones mencionadas, con lo cual contribuyen a profundizar sobre el conocimiento considerado. A su vez, han de proporcionar diversas opciones, con vistas a planificar su enseñanza y aprendizaje. Los organizadores aportan un método para identificar el conocimiento didáctico, relevante para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares

¿Cómo trabaja el experto los organizadores? En su práctica el experto, para cada programa matemático escolar, o cada tema o unidad didáctica en cuestión, realiza un análisis según distintas dimensiones y organizadores, lo cual lleva a cabo mediante los textos a su alcance. Mediante esos análisis, obtiene información útil para elaborar propuestas didácticas, apropiadas para su implementación bien en el aula de matemáticas, bien en el sistema educativo o en una investigación. Una vez obtenida esa información procederá a realizar una síntesis, que concreta en su plan de acción.

Organizadores según dimensiones

Cada una de las cuatro dimensiones –cognitiva, cultural, ética y social– requiere un tipo de análisis específico, que se concreta y detalla por medio de organizadores propios. En lo que sigue describimos los organizadores seleccionados para cada una de las dimensiones.

Categorías cognitivas para estudiar los contenidos sobre aprendizaje

La información y los conocimientos didácticos destacables sobre el aprendizaje de un conocimiento matemático escolar se estudian a través de organizadores propios, que suministran categorías cognitivas, convenientes para analizar y establecer los contenidos didácticos propios del aprendizaje matemático escolar en cada tema (Rico, 2016). Por su relevancia destacan:

Expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, que destacan por su carácter intencional; suelen venir expresadas mediante capacidades o competencias. Las expectativas expresan proyectos y compromisos (Rico y Lupiañez, 2010)

Limitaciones en el aprendizaje que se presentan a los escolares, las cuales abarcan tanto las dificultades como los errores que pueden surgir en el proceso (Rico, 1995).

Oportunidades de aprendizaje con que el alumno puede contar y que promueve el profesor para incentivar el aprendizaje del contenido por los escolares, generalmente planteadas en forma de retos y tareas matemáticas escolares.

Categorías para estudiar los significados de los contenidos matemáticos

Para estudiar la dimensión cultural/conceptual es importante disponer de datos generales sobre la historia de los conceptos implicados, conocimiento que identifica e interpreta los hechos relevantes, destaca los momentos históricos y muestra la evolución del contenido matemático.

La dimensión cultural-conceptual se ocupa de los significados de los conceptos que conforman el contenido matemático escolar que, en cada caso, estudia y analiza (Rico, 2016). Esta dimensión trabaja con diversas categorías curriculares, como son:

Estructura formal y cognitiva de los conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos y actitudes que articulan los contenidos matemáticos escolares.

Sistemas de representación, sistemas de signos gráficos o simbólicos, utilizados en cada concepto, relación o estructura, sus reglas de transformación internas, las traducciones entre distintos sistemas, junto con algunas modelizaciones usuales de los correspondientes conceptos (Rico, 2009)

Sentidos y modos de uso, categorías que examinan el empleo de los conceptos, los fenómenos de los que surgen, los contextos en que se realizan, las situaciones en que se aplican y que dotan de sentido a los contenidos matemáticos.

Categorías para los contenidos sobre instrucción y enseñanza

Igualmente, para estructurar los aspectos formativos y de instrucción relativos a una determinada estructura o concepto matemático escolar, es decir, para sistematizar los contenidos, técnicas y prácticas, sobre su enseñanza, se consideran los organizadores de instrucción (Rico, 2016). Esos organizadores determinan los procesos formativos y regulan las correspondientes enseñanzas; entre ellos destacan:

Las *variables, funciones y tipos de tareas matemáticas escolares* que pueden ponerse en juego, junto con su organización mediante secuencias (Rico, 2001).

Diversidad de *materiales y de recursos* que pueden emplearse en su enseñanza.

Modos de *organización y gestión* de la actividad escolar para conseguir interacciones y procesos de comunicación acordes con las expectativas concebidas sobre aprendizaje.

Categorías para estudiar los contenidos sobre evaluación

Para organizar y estructurar la dimensión social en relación con un determinado tema matemático escolar, es decir, para sistematizar los conocimientos sobre su evaluación y su análisis estratégico de resultados, se consideran los organizadores evaluativos (Rico, 2016):

Modalidades y diseño de la evaluación, que vienen establecidos por las *funciones, normativa y* los *momentos* que caracterizan los procesos de valoración.

La *intervención y toma de decisiones*, determinados por los *criterios e instrumentos* que permiten diagnosticar, orientar y valorar los aprendizajes matemáticos de los escolares.

Los *indicadores de calidad* del sistema y estrategias para revisar el proceso formativo, determinados por el rendimiento escolar, los resultados de aprendizaje y otros indicadores de calidad, verificados por estudios comparativos internacionales.

Análisis didáctico

Por *análisis didáctico de un contenido matemático escolar* entiendo un método para identificar, escudriñar, estructurar e interpretar, dentro de un marco curricular, sus contenidos didácticos con el propósito de su planificación, su implementación en el aula y/o su evaluación, que hacen parte de las matemáticas escolares. El análisis didáctico es una variante del análisis de contenido, precedido por un análisis conceptual de aquellos conceptos o contenidos didácticos que sean relevantes en cada caso.

Las informaciones obtenidas en cada contenido matemático según las distintas dimensiones que conforman su análisis didáctico, constituyen sus *contenidos didácticos*.

El análisis didáctico se lleva a efecto cuando se sigue un procedimiento de análisis en la estructura que establecen las dimensiones curriculares, la totalidad de sus organizadores y las relaciones entre ellos. El profesor de matemáticas desarrolla y mejora sus competencias profesionales mediante el análisis didáctico, de modo especial su competencia de planificación. (Rico, 2016, pp. 95-99).

Significar y comprender

Intencionalidad

El término intencionalidad expresa una característica distintiva de las ideas: el hecho de que 'son relativos a' o 'representan cosas', lo cual es previo a su comprensión; el carácter distintivo de esos estados consiste en que no se puede creer, desear o esperar, sin creer o desear algo. "Creencias, deseos, esperanzas y cosas semejantes se llaman *estados intencionales* (Honderich, 2001, pp. 553-554). "La intencionalidad consiste en la referencia a un objeto, existente o no, común a percepciones y fantasías, recuerdos y esperanzas, deseos y decisiones, conceptos y juicios" (Mosterín y Torreni, 2002, p. 304).

Significado de un concepto matemático escolar

Entender un concepto matemático es conocer su definición, representarlo, mostrar su operaciones, relaciones y propiedades y sus modo de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas. El profesor necesita un dominio en profundidad sobre los contenidos que se propone enseñar, a partir de los cuales planificar y orientar el aprendizaje de los escolares. El contenido didáctico en cada concepto se inicia mediante el análisis y demarcación de sus significados (Rico, 2016). "A un signo (nombre, unión de palabras, signo escrito), además de lo designado, que podría llamarse la referencia del signo, va unido lo que yo quisiera llamar el sentido del signo, en el cual se halla contenido el modo de darse. (…) Un nombre propio (palabra, signo, fila de signos o expresión) expresa su sentido, se refiere a su referencia o la designa. Con un signo expresamos su sentido y designamos su referencia" (Frege, 1996). "Referencia, representación y sentido son los tres organizadores o categorías semánticas que empleamos para el estudio e interpretación del significado de los contenidos matemáticos escolares" (Rico, 2016). Comprender un contenido matemático en profundidad implica interpretar sus conceptos y ejecutar sus procedimientos con significado coherente, "entender algo significa asimilarlo en un esquema apropiado" (Skemp, 1987).

La comprensión de los escolares

Las unidades básicas de información para llevar a cabo el análisis didáctico de un proceso formativo las obtenemos de las manifestaciones que hacen alumnos, profesores u otros agentes educativos participantes cuando se les interroga al efecto; se manifiestan mediante expresiones verbales las cuales transmiten las ideas o representaciones mentales del sujeto que las manifiesta. Hay oraciones que aseveran un *estado de cosas que tienen lugar en un cierto momento del tiempo*; son oraciones que aseveran la existencia de una *idea* o *estado mental*.
Opiniones, creencias, conocimientos, percepciones, deseos, intenciones, etc. son tipos de estados mentales. Cuando esos estados mentales son relativos al aprendizaje, enseñanza y evaluación de nociones o contenidos matemáticos escolares se dice que son ideas didácticas. El contenido de las ideas sobre educación matemática se obtiene de las oraciones que los expresan. Un sujeto se dice que comprende un concepto cuando lo describe y procesa en una estructura significativa.

Es en virtud de la proposición que expresan los enunciados (también aquellos sobre educación matemática) que *representan* el mundo como siendo de un modo u otro; y es en virtud de cómo lo representan (i.e. de la proposición que expresan) –y, naturalmente, de cómo de hecho es el mundo– que el enunciado es verdadero o falso. De modo similar puede decirse que opiniones, percepciones, conocimientos, deseos o intenciones representan el mundo como siendo de un cierto modo, y en virtud de cómo lo representan, y de cómo de hecho es el mundo, que las opiniones y las percepciones son verdaderas o falsas. (Honderich, 2001, pp. 553-554)

Organizar el pensamiento del profesor de matemáticas en torno a juicios, textos y documentos sobre el currículo de matemática para sistematizar sus capacidades de análisis y abordar ese estudio como campo de conocimiento, es nuestro propósito. Los resultados de tales análisis impulsan la investigación y desarrollan las competencias profesionales del docente de matemáticas, con las cuales efectuar el diseño y puesta en práctica de unidades didácticas.

El contenido de las ideas sobre educación matemática se obtiene de las oraciones que lo expresan y de los procedimientos con que los procesan. Un sujeto se dice que comprende un concepto cuando lo describe y procesa en una estructura significativa. Comprender un concepto es requisito necesario para su análisis didáctico.

Referencias y bibliografía

Beaney, M., "Analysis", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL= https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/analysis/

Honderich, T. (Ed.) (2001). Intencionalidad. En: *Enciclopedia Oxford de Filosofía*, pp. 553-554. Madrid: Tecnos.

Mosterín, J. y Torreni, R. (2002). Intencionalidad. En: *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, p. 304. Madrid: Alianza.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En: J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Educación Matemática,* 69-96. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En: L. Rico (Ed.) *Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria.* Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En: P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro,* pp. 179- 193. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Rico, L. (2009) Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA 4(2)*, pp. 1-14.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013) Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En: L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular*, pp. 1-22. Granada: Comares.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2010). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En: L. Rico y A. Moreno, (Eds.) *Elementos de Didáctica de la Matemática para el Profesor de Secundaria*. Madrid: Pirámide

Skemp, R. (1987). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículo*. Madrid: Morata.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Experiencias de modelización en la formación de futuros profesores de matemática

Mónica E. **Villarreal**
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
mvilla@famaf.unc.edu.ar

Resumen

El desarrollo de actividades y proyectos de modelización matemática en la formación de futuros profesores resulta de vital importancia debido a que, tanto en documentos curriculares para la formación inicial de profesores de matemática, como en documentos curriculares para la educación secundaria, se recomienda la introducción de aplicaciones y modelización para la enseñanza de la matemática. Estudios desarrollados por diversos investigadores indican desde hace tiempo que, si se pretende que los futuros profesores diseñen actividades de modelización para sus clases en la escuela secundaria, es necesario que tengan experiencias de modelización durante su formación inicial, pasando por un ciclo completo de modelización matemática. En base a datos recopilados durante siete años, en esta conferencia presentaré experiencias de modelización llevadas adelante por futuros profesores. Centraré la atención en los contenidos matemáticos que utilizaron o necesitaron aprender para dar cuenta de los problemas formulados, el tipo de temas que seleccionaron, el papel de las tecnologías y las dificultades detectadas en el desarrollo de sus proyectos de modelización.

Palabras clave: educación, matemática, modelización matemática, formación de profesores, tecnologías

Breve introducción: problemática y contexto

Esta conferencia aborda aspectos de la problemática de la formación de futuros profesores de matemática en torno a la modelización matemática como proceso científico y como abordaje pedagógico. Desde hace unos diez años un grupo de docentes e investigadores de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC), del cual soy integrante, investiga en torno a la temática del desarrollo profesional de futuros profesores de matemática que llevan adelante proyectos de

modelización[1], esto es, actúan como modelizadores; o que diseñan e implementan actividades de modelización durante el transcurso de sus primeras prácticas docentes en aula. Estas investigaciones han sido desarrolladas con estudiantes[2] que cursan la carrera de Profesorado en Matemática en la UNC. Esta carrera tiene una duración de 4 años, siendo que el 66% de las disciplinas que componen el plan de estudios son cursos de matemática impartidos por matemáticos, y el 34% restante, cursos de carácter didáctico-pedagógico impartidos por pedagogos o educadores matemáticos.

En las siguientes secciones, se presentan algunas discusiones que vinculan modelización, curriculum y formación inicial de profesores de matemática. Se hace referencia a los desafíos que implica la modelización para el trabajo docente y se describe un escenario de modelización particular creado en un contexto de formación inicial de profesores. Finalmente se reportan algunos resultados de investigaciones desarrolladas en ese escenario de modelización.

Modelización y curriculum

Según Kaiser (2014), la importancia de la modelización a nivel internacional se ve reflejada en muchos curriculum nacionales, sin embargo, todavía no es claro cómo integrar la modelización en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En el ámbito local (Argentina), y en coincidencia con lo observado por Kaiser, la modelización es mencionada en documentos curriculares destinados a la educación secundaria. Por ejemplo, en el Diseño Curricular para la Educación Secundaria de la Provincia de Córdoba se encuentran propuestas de situaciones de enseñanza relacionadas con la modelización, y se señala que el docente:

- Considerará la ***modelización*** para resolver problemas tanto externos como internos a la matemática. Además, propiciará el estudio de límites del modelo matemático para explicar un problema o fenómeno que se intenta resolver o explicar. Para que el estudiante pueda describir, analizar o predecir el fenómeno de la realidad modelado (por ejemplo, fenómenos sociales y/o naturales) mediante la matemática puesta en juego, se requiere que los estudiantes observen la realidad; la describan en forma simplificada; construyan un modelo; trabajen matemáticamente con él para arribar a resultados y conclusiones matemáticas; interpreten los resultados; evalúen la validez del modelo para poder explicar esa realidad.
- Incluirá problemas que se modelen matemáticamente para el ***tratamiento del álgebra***, acudiendo a generalizaciones y contemplando una perspectiva amplia del álgebra como instrumento de modelización. Desde esta postura, las variables, ecuaciones y funciones, son instrumentos de modelización de problemas desde dentro y fuera de la matemática. Su visión como instrumento de modelización, implica que el docente deberá proponer tareas que apunten a cada uno de los pasos de la modelización matemática: identificación y designación de variables que caracterizan el sistema a modelizar, establecimiento de relaciones entre variables, trabajo a partir de expresiones simbólicas que permiten conocer el sistema modelado, interpretación y aplicación del trabajo realizado con el modelo algebraico. (Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, 2011, p. 48, énfasis en el original).

En el primer ítem se destaca la propuesta de trabajar tanto con modelización intra-matemática como extra-matemática. Asimismo, se menciona el estudio de los límites de un modelo para explicar un determinado fenómeno de la realidad, y se explicitan las fases de un proceso de modelización. En el segundo ítem, el proceso de modelización se vincula más

[1] Para evitar repeticiones, a veces se usa "modelización" en lugar de "modelización matemática".
[2] De no mediar una aclaración, "estudiantes" se refiere siempre a "futuros profesores".

específicamente al álgebra como instrumento privilegiado para modelizar y se especifica la necesidad de proponer tareas que den cuenta de las fases del proceso para ese caso particular.

Ante las propuestas de enseñanza como las que se acaban de citar, cabe preguntarse, ¿qué perspectiva de modelización subyace en las mismas? Por un lado, el proceso de modelización es visto en estos diseños curriculares como un *vehículo* para aprender matemática (Julie y Mudaly, 2007), lo que se busca es ofrecer aplicaciones de contenidos matemáticos ya estudiados. Aquí puede verse que se denomina modelización al uso de modelos ya creados para resolver ciertos problemas reales. En estos casos estamos en presencia de la aplicación de un modelo matemático ya estudiando que resulta adecuado para resolver un problema. Se trata de lo que Muller y Burkhardt (2007) denominan *aplicaciones ilustrativas*.

Por otro lado, se pone de manifiesto una postura que busca que los estudiantes se adentren en un proceso de modelización y sean creadores de modelos para fenómenos de la realidad. El desarrollo de este proceso en clases de matemática promueve lo que Muller y Burkhardt (2007) denominan *modelización activa*. Estos autores afirman que en este caso puede existir una variedad de herramientas matemáticas útiles para dar cuenta del problema y que elegirlas y usarlas apropiadamente es el mayor desafío para los estudiantes. En este caso, interesa la modelización en sí, como actividad matemática y como *contenido* a ser abordado (Julie y Mudaly, 2007). Si se espera que los profesores lleven adelante procesos de modelización activa en sus clases, es necesario que ellos mismos vivan esa experiencia. En esta conferencia me voy a referir a este tipo de experiencia de modelización con futuros profesores de matemática.

Modelización y formación inicial de profesores de matemática

Los requerimientos de diseños curriculares para la educación secundaria en relación con la modelización –tales como los mostrados en la sección anterior–, la existencia de diferentes perspectivas asociadas a ese proceso y la variedad de tareas de modelización destinadas para clases de matemática (ver, por ejemplo, Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, 2017) plantean desafíos para la formación de futuros profesores. ¿Qué ambientes de aprendizaje es necesario crear en el ámbito de la formación inicial si se pretende que los futuros profesores tengan condiciones para dar cuenta de requerimientos curriculares en torno a la modelización? Estos desafíos también son mencionados en el contexto internacional y muchos investigadores manifiestan sus preocupaciones, propuestas y reflexiones en relación con la modelización matemática en la formación de futuros profesores.

Doerr (2007) afirma que es necesario que los futuros profesores encuentren "experiencias de modelización que proporcionen una variedad de contextos y herramientas y que los involucren en análisis de meta-nivel de su actividad de modelización" (p. 77). Niss, Blum y Galbraith (2007) enfatizan que, si se pretende que los profesores de matemática incluyan "aplicaciones y modelización en sus agendas de enseñanza de manera eficiente, exitosa y reflexiva, necesitan oportunidades para desarrollar esa capacidad durante su educación inicial y a través de actividades regulares de desarrollo profesional en servicio" (p. 7). Blum (2015) se refiere a la necesidad de proporcionar a los futuros profesores el conocimiento profesional necesario para llevar adelante actividades de modelización y desarrollar experiencias de enseñanza con modelización. Por su parte, Gastón y Lawrence (2015) sostienen que la formación de los futuros profesores debería incluir conocimientos acerca de qué es la modelización matemática, cómo puede ser incorporada en la enseñanza y cómo se pueden evaluar las actividades de modelización. Estos autores afirman que es deseable que los futuros profesores

ganen experiencia significativa con la modelización, sea a través de la realización de actividades de modelización en cursos de matemática, o a través de cursos específicos de modelización. Se puede decir que todos los autores presentados en esta revisión coinciden en la necesidad de ofrecer a los futuros profesores oportunidades para experimentar la modelización durante su formación inicial. La próxima sección presenta una propuesta para la formación inicial de profesores de matemática que pretende atender esa necesidad.

Un escenario de modelización para la formación de futuros profesores

Las recomendaciones de los expertos en relación a la formación de futuros profesores de matemática en torno a la modelización, e incluso la presencia formal de la modelización en los estándares locales para la formación de profesores no garantizan su tratamiento en el trayecto de la formación inicial. La realidad en nuestro contexto local, en particular, en el programa de formación de profesores en la UNC, está lejos de atender esos requerimientos. Los cursos disciplinares específicos de matemática ofrecen escasos ejemplos de aplicaciones de la matemática en la resolución de problemas extra-matemáticos y, además, se brinda poco (o ningún) espacio para la modelización activa.

Dadas las dificultades que significa intentar introducir cambios en los formatos pedagógicos y contenidos de los cursos de matemática que forman parte del plan de estudios del Profesorado en Matemática de la UNC, y a fin de ofrecer oportunidades de vivenciar experiencias con el proceso de modelización matemática, en 2010 decidimos crear un ambiente de aprendizaje especial, un *escenario de modelización*[3], en el marco del curso de Didáctica de la Matemática (DM). Desde entonces hemos mantenido esta práctica y hoy en día este escenario de modelización matemática está consolidado.

El curso de DM tiene modalidad anual, se dicta en el tercer año del plan de estudios y se extiende por 30 semanas con dos clases de cuatro horas por semana. En este curso, se estudian diferentes tendencias en educación matemática: resolución de problemas, educación matemática crítica, uso de tecnologías en la educación, modelización matemática.

Nociones de modelo, modelo matemático y proceso de modelización matemática son debatidas en el curso. Las fases de un proceso de modelización matemática son descriptas y discutidas con los estudiantes en base al trabajo de Bassanezi (2012). Según este autor, un proceso de modelización consta de varias fases. Comienza con la *selección de un tema o fenómeno* del mundo real[4], que por algún motivo sea de interés, y continúa con la *formulación de problemas* o preguntas asociadas con el mismo. Posteriormente se inicia una búsqueda de datos o se diseña un experimento para obtenerlos (*experimentación*). Una fase de *abstracción* comienza cuando se seleccionan variables y se levantan hipótesis o conjeturas. Al traducir las preguntas o problemas enunciados en lenguaje natural para el lenguaje matemático, se inicia un proceso de *matematización* para obtener un modelo matemático. La aceptación o rechazo de tal modelo es la *validación*. Si el modelo es rechazado, puede comenzar una fase de *modificación* y un nuevo ciclo se inicia.

Una vez presentadas las fases de un proceso de modelización matemática, se muestran

[3] La noción de *escenario de modelización* que aquí se emplea fue desarrollada por Esteley (2014).
[4] Blum (2003) denomina *mundo real* a "todo lo que tiene que ver con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo la vida cotidiana, así como la escuela y la universidad o disciplinas científicas y académicas diferentes de la matemática" (p. 152, traducción propia).

experiencias de actividades de modelización en diferentes contextos educativos y se resuelven varios problemas que requieren la creación de un modelo. Por último, se invita a los futuros profesores a que desarrollen sus propios proyectos de modelización, siguiendo las fases del proceso y utilizando libremente tecnologías digitales, si así lo desean. Para ello, se pide a los estudiantes que formen pequeños grupos y seleccionen un tema del mundo real de su interés, formulen problemas relacionados con este tema, seleccionen variables, planteen hipótesis, diseñen experimentos (si es necesario), busquen información, recopilen y procesen datos, resuelvan el problema y trabajen en una fase de validación.

Algunas de las actividades relacionadas con los proyectos de modelización son realizadas por los estudiantes de forma autónoma en horarios extra-clase. Los profesores de DM actúan como guías que pueden ayudar a formular o reformular los problemas, informar sobre posibles fuentes de datos y sugerir nuevas preguntas para que los estudiantes se involucren en procesos de modelización más complejos.

Al final del proceso, cada grupo escribe un informe y hace una presentación oral para toda la clase. Durante estas presentaciones, que duran unos 40 minutos, el resto de la clase hace preguntas y comentarios sobre el proyecto que está siendo presentado. En muchos casos, surgen discusiones sobre la modelización como parte de la futura tarea docente en la escuela, o reflexiones sobre el papel de la tecnología en el proceso de modelización. La ejecución de todas las actividades de modelización descritas anteriormente requiere aproximadamente seis semanas.

En síntesis, se puede decir que el escenario propuesto está caracterizado por: (a) la naturaleza abierta de los proyectos a desarrollar, debido a la libre elección de un tema del mundo real para estudiar y formular preguntas; (b) la ausencia de contenidos matemáticos predeterminados que deban ser enseñados, el foco está puesto en la modelización como una actividad matemática que merece ser enseñada en sí misma; (c) el carácter interdisciplinario del trabajo; (d) la promoción de la reflexión sobre la matemática, los modelos creados y el papel social de la matemática y la modelización; y (e) el dominio del proceso completo de modelización. Este escenario creado con fines educativos, también se tornó en un escenario a ser investigado. La próxima sección se refiere a este aspecto.

El escenario de modelización como escenario investigado

Las experiencias de modelización llevadas adelante en el escenario de modelización descrito en la sección anterior, se han registrado de diferentes maneras: informes finales escritos de los estudiantes, notas de campo durante las clases, vídeos de las presentaciones orales finales. Estas fuentes de datos nos han permitido desarrollar diferentes estudios en el periodo 2010-2016. En Villarreal, Esteley y Smith (2015) abordamos las siguientes preguntas de investigación: ¿qué contenidos matemáticos utilizan los futuros profesores en sus proyectos?, ¿qué tipo de temas eligen y por qué razones? y ¿qué dificultades u obstáculos experimentan durante el proceso de modelización? El estudio, se basó en 11 proyectos desarrollados por 41 estudiantes de las cohortes 2010, 2011 y 2012. La Tabla 1 muestra, de manera sintética, el tema de cada proyecto, el tipo de problemática abordada y el contenido matemático involucrado en cada uno.

El análisis reveló que la libre elección de un tema para iniciar un proyecto de modelización fue un obstáculo importante para los estudiantes, pero también fue posible constatar que la creación de escenarios de modelización en el curso de DM habilitó espacios de reflexión en torno al rol docente en tales escenarios.

Tabla 1

Problemáticas abordadas y contenidos matemáticos involucrados en los proyectos de modelización.

Proyectos de modelización de los futuros profesores	Problemática	Contenido matemático
Captación de agua en zonas secas	Socio-económica	Función de dos variables
Consumo de agua en el hogar	Ecológica	Estadística
Consumo de energía eléctrica en el hogar		Estadística
Basura y recolección de residuos reciclables		Funciones de proporcionalidad directa e inversa
Tiempo de espera en el comedor universitario	Interés personal	Función lineal
Abastecimiento de gas en garrafas en una localidad rural		Función lineal
Consumo de soja		Función lineal
Transmisión genética y características humanas		Probabilidad
Gastos de viaje escolar de fin de curso	Preocupación didáctica	Programación lineal
Juegos de lotería	Matemática	Probabilidad
Recuperación de la inversión para un cierto negocio		Funciones exp y log

Fuente: elaboración propia en base a resultados presentados en Villarreal, Esteley y Smith (2015).

En las sucesivas cohortes del curso de DM, a partir de 2010, fue posible observar que el uso de tecnologías digitales fue aumentando de manera significativa en los proyectos de modelización. Así, en Villarreal, Esteley y Smith (2018) se abordaron las siguientes cuestiones: ¿qué tecnologías seleccionan los futuros profesores para utilizar en sus proyectos de modelización, y con qué propósitos?, y ¿en qué fases del proceso de modelización el uso de tecnologías fue significativo? En este trabajo se analizaron 32 proyectos de modelización que involucraron a 108 estudiantes del Profesorado en Matemática a lo largo de siete cohortes consecutivas, entre 2010 y 2016.

Las tecnologías utilizadas en los proyectos se clasificaron en cuatro categorías: Internet, planillas de cálculo, software matemático (GeoGebra, Mathlab) y lenguajes de programación (Python y Octave). El uso de Internet se manifestó en el 75% de los proyectos, principalmente como fuente de datos e información relacionada con el tema elegido. Las planillas de cálculo se emplearon en el 56% de los proyectos. La Tabla 2 muestra una categorización de los propósitos de uso de Internet o planillas de cálculo, indicando la fase del proceso de modelización que se vio enriquecida por ese uso. La tabla pone en evidencia que las fases del proceso de modelización en las cuales estas tecnologías resultaron más significativas fueron las fases de experimentación y de matematización.

El software matemático y los lenguajes de programación se utilizaron principalmente en la fase de matematización y no se crearon categorías específicas ya que los propósitos de uso estaban relacionados con el tema particular de cada proyecto.

Tabla 2

Categorías de usos de Internet y planillas de cálculo y fases del proceso de modelización.

Tipo de tecnología	Propósitos de uso (fase del proceso de modelización)
Internet	Buscar datos o información para iniciar la construcción del modelo (Formulación-Experimentación). Seleccionar variables (Abstracción). Formular o reformular el problema (Formulación-Modificación). Generar datos usando aplicaciones on-line (Experimentación). Validar el modelo (Validación).
Planilla de cálculo	Mostrar datos usando tablas o diferentes tipos de representación gráfica para comunicar resultados (Matematización). Realizar cálculos sencillos utilizando las prestaciones automáticas de las planillas de cálculo (Matematización). Programar funciones personalizadas utilizando las funciones originales de la planilla para realizar cálculos de una manera más eficiente, ejecutar simulaciones o aplicar el modelo creado (Matematización - Validación).

Fuente: elaboración propia en base a resultados presentados en Villarreal, Esteley y Smith (2018).

En los dos artículos aquí citados (Villarreal, Esteley y Smith, 2015, 2018) pueden verse análisis detallados de algunos de los proyectos desarrollados por los estudiantes.

En los años 2017 y 2018, nuevos proyectos de modelización fueron desarrollados por los futuros profesores que cursaban DM. En particular, en 2018, solicitamos a los estudiantes que manifestaran qué habían aprendido durante el proceso. Los futuros profesores reconocían haber aprendido a aplicar contenidos matemáticos ya conocidos y que eso les había permitido dar sentido a esos contenidos (por ejemplo: grafos o regresión lineal). También señalaron como aprendizajes: el manejo de datos de la realidad, el empleo de prestaciones de programación en las planillas de cálculo y la aplicación de lenguajes de programación. Todos los grupos destacaron sus aprendizajes en torno a los temas específicos elegidos (recorridos en parques nacionales de la Patagonia argentina, termotanques solares, autos eléctricos, aborto inducido, viajes en Argentina). En el caso del proyecto dedicado al aborto, la pregunta formulada fue: ¿Cuántos abortos inducidos se producen por año en Argentina? La complejidad de la misma condujo hacia el estudio de un modelo ya existente que presenta la construcción de un multiplicador que es utilizado para estimar el número "real" de abortos a partir de datos proporcionados por hospitales y encuestas a agentes de salud. Así, en el escenario de modelización en el marco de DM, no solo se crearon modelos, sino que también se estudiaron y aplicaron modelos creados por otros.

Concluido el curso de DM, al año siguiente, los estudiantes cursan la materia llamada *Metodología y Práctica de la Enseñanza*, en el marco de la cual desarrollarán sus primeras prácticas docentes en la escuela secundaria. Algunos de los estudiantes que en el año anterior han vivenciado la experiencia de un proyecto de modelización, tendrán la posibilidad de diseñar e implementar propuestas didácticas de modelización en escuelas secundarias. Este es un segundo escenario de modelización para los futuros profesores. Debido a limitaciones de espacio no es posible extenderse en el análisis de este segundo escenario, pero algunos resultados pueden verse

en Villarreal y Esteley (2017); Smith, Esteley y Villarreal (2013); Villarreal y Mina (2013).

Reflexiones finales

Algunos de los proyectos de modelización llevados a cabo por los futuros profesores y sus reflexiones, expresadas durante las presentaciones orales o escritas en el informe final, son evidencia de experiencias transformadoras. En particular, algunos estudiantes dieron sentido a la experiencia previendo posibles implicaciones para su futuro como profesores, tal es el caso de dos estudiantes que, en las conclusiones de su trabajo, escribieron:

> Consideramos que es muy importante haber experimentado el proceso de modelización ya que nuestras experiencias personales influirán en la forma en que seremos como profesores en el futuro. Al experimentarlo, sentimos y vivimos el proceso como lo harían nuestros futuros alumnos, y este hecho nos convenció de que la modelización matemática puede ser implementada como una estrategia pedagógica.

La experiencia vivida por los estudiantes les permitió visualizar que la modelización podría ser una propuesta pedagógica en su futuro como profesores. Mientras tanto, también es importante reconocer que no todos los estudiantes vivieron una experiencia transformadora en el escenario de modelización creado en DM. En estos casos, podía observarse que los estudiantes no se involucraban en sus proyectos de modelización.

Diferentes razones pueden explicar estas situaciones: gran demanda de tiempo, dificultad para seleccionar un tema de interés y plantear problemas relacionados con él, dificultad para trabajar en colaboración con colegas. Asimismo, la ausencia de aplicaciones y actividades de modelización extra-matemáticas en los cursos de matemática y el escaso uso de tecnologías en la carrera del Profesorado en Matemática podrían actuar como barreras para la propuesta. Es posible que muchos estudiantes no estuvieran convencidos de la relevancia de la modelización y de la importancia de las tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, o quizás los profesores no fuimos capaces de hacer evidente la esencia de esta propuesta abierta y guiarlos hacia un proceso exitoso.

Es importante reconocer también, que el tipo de actividad de modelización propuesto quizás significa un salto en relación a las actividades matemáticas a las que los estudiantes están habituados. Tal vez sea necesario desarrollar previamente pequeños proyectos, más acotados y sencillos, que aborden las distintas fases de un proceso de modelización de manera más gradual y que preparen el camino para luego poder abordar proyectos de modelización completos. Tal como lo señalan Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona (2017), los tipos de tareas de modelización matemática recorren un abanico de posibilidades, del cual los proyectos abiertos es solo uno.

A pesar de las dificultades mencionadas, y en base a la evidencia positiva obtenida a lo largo de estos años, puede afirmarse que la implementación de actividades de modelización y el uso de tecnologías proporcionan aportes significativos para la formación inicial, por muchas razones: pueden potenciar el aprendizaje de los estudiantes, pueden contribuir a una educación inclusiva y pueden hacer que los futuros profesores sean sensibles hacia diferentes maneras de dar sentido a la matemática.

Referencias y bibliografía

Bassanezi, R. (2012). *Temas y modelos*. Campinas, Brasil: UFABC.

Blum, M. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: what do we know, what can we do? En

S.J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Cham: Springer.

Blum, W. (2003). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1–2), 149–171.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 69–78). New York: Springer.

Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: voces y sentidos*. (Tesis doctoral). Facultad de Filosofía y Humanidades - Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Recuperado de: https://ffyh.unc.edu.ar/editorial/wp-content/uploads/sites/5/2013/05/EBOOK_ESTELEY.pdf

Gastón, J., & Lawrence, B. (2015). Supporting teachers' learning about mathematical modeling. *Journal of Mathematics Research*, 7(4), 1–11.

Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 503–510). New York: Springer.

Kaiser, G. (2014). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396-403). New York: Springer.

Ministerio de Educación del Gobierno de la Provincia de Córdoba (2011). *Diseño Curricular. Ciclo Básico de la Educación Secundaria*. Recuperado de: http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/DiseniosCurricSec-v2.php

Muller, E. & Burkhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education - The 14th ICMI Study* (pp. 267-274). New York: Springer.

Niss, M.; Blum, W & Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 3-32). New York: Springer.

Smith, S.; Esteley, C. & Villarreal, M. (2013) Modelización matemática en la formación de futuros profesores: desarrollo de proyectos y prácticas profesionales docentes con modelización. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevideo. p. 4526-4535.

Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A. & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. *Espaço Plural*, Año XVIII, 36, 219-251.

Villarreal, M., & Esteley, C. (2017). Futuros profesores de matemática: narrativas de sus primeras prácticas en escenarios de modelización. En D. Fregona, S. Smith, M. Villarreal, F. Viola (Eds.). *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la Educación Matemática* (pp. 25-50). Córdoba: FAMAF-UNC.

Villarreal, M., Esteley, C., & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2): 327-341.

Villarreal, M.; Esteley, M. & Smith, S. (2015) Pre-service mathematics teachers' experiences in modelling projects from a socio-critical modelling perspective. En Stillman, G.; Blum, W. y Biembengut, M. (Eds). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 567-578). Cham: Springer.

Villarreal, M. & Mina, M. (2013). Modelización en la formación inicial de profesores de matemática. *Actas de la VIII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática*. 16 páginas.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Interpretando o letramento estatístico dentro do currículo de matemática do ensino básico: *um projeto internacional de ensino integrado sobre o tema de energia com dados reais*.

Yuriko Yamamoto **Baldin**
Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos
Brasil
yuriko@dm.ufscar.br

Resumo

O tema de produção de energias de natureza renovável se liga à discussão sobre a sustentabilidade do planeta e a educação escolar para cidadania responsável, quando um problema de consumo responsável de energia pode ser trabalhado dentro do currículo de ensino básico, promovendo uma postura crítica na leitura de dados reais e sua interpretação. O conceito de letramento estatístico em nível básico, no contexto de ensino de matemática integrado com temas interdisciplinares, implica desafios de interpretação e análise de propostas de aulas inovadoras. Este texto tem como objetivo discutir um projeto de colaboração internacional entre Chile, Brasil e Japão, realizado em 2017, trazendo referências teóricas do letramento estatístico para interpretar uma aula-pesquisa realizada em classes de 6º ano do ensino básico. O projeto utilizou a metodologia de Lesson Study em uma aula STEM, mediada por tecnologia de comunicação à distância. A aula alcançou resultados replicáveis em outros contextos.

Palavras chave: letramento estatístico em ensino básico; ensino integrado STEM; educação para cidadania; Lesson Study e sequência didática; aula mediada por tecnologia de comunicação.

Resumen

El tema de la producción de energía renovable está vinculado a la discusión sobre la sostenibilidad del planeta y con la educación en la escuela para la ciudadanía responsable, cuando se puede elaborar un problema de consumo responsable de energía en el currículo de Educación básica, promoviendo una postura crítica en la lectura de datos reales y su interpretación. El concepto de letramento estadístico en el

nivel básico, en el contexto de la enseñanza integrada de las matemáticas, implica retos de interpretación y análisis de clases innovadoras. Este texto pretende debatir un proyecto de colaboración internacional entre Chile, Brasil y Japón, realizado en 2017, buscando referencias teóricas del letramento estadístico para interpretar una clase para sexto año de la Básica. El proyecto utilizó la metodología de Lesson Study en una clase STEM, mediada por la tecnología de comunicación a distancia. La clase ha logrado resultados replicables en otros contextos.

Palabras clave: letramento estadístico en la educación básica; enseñanza STEM integrada; Educación ciudadana; Lesson Study y la secuencia didáctica; clase mediada por la tecnología de comunicación.

Introdução

A Estatística se consolidou durante o século 20 como uma disciplina que possui características próprias, entre as quais no tratamento de dados, especialmente dos dados numéricos que, por se expressarem por notações e operações/fórmulas matemáticas, aparecem como parte do currículo escolar em níveis desde iniciais a secundários, e com mais ênfase em nível superior, sendo ensinado em nível de escola básica como tópicos de matemática (Garfield & Ben-Zvi, 2007; Garfield & Ben-Zvi, 2008). Segundo (Garfield & Ben-Zvi, 2008), a Educação Estatística, que cresceu a partir das investigações da Educação Matemática, distingue uma diferença essencial da disciplina Estatística em relação à Matemática na abordagem do estudo sobre dados numéricos, o que leva ao conceito de *letramento estatístico*, que será elaborado adiante. Na página 8 da referência citada, encontramos citação de Moore que aponta a diferença entre a abordagem matemática de dados numéricos, que os trabalha como números em abstrato, regidos pela estrutura matemática, e a da estatística, que trabalha dados como "números com contexto", quando o contexto traz significados para os números que representam dados, não podendo estes ser analisados sem levar em consideração "como foram coletados" e "o que representam (Cobb & Moore, 1997 apud Garfield & Ben-Zvi, 2008). Garfield e Bem-Zvi (2008) argumentam que as diferenças essenciais entre a matemática e a estatística levam necessariamente a uma análise diferenciada das dificuldades de *ensino da estatística*, quando consideradas como parte da formação de professores, e do estudo das dificuldades de aprendizagem dos alunos, que por sua vez, reagem diferentemente em relação a atividades de matemática e de estatística. Enquanto o ensino da matemática se fundamenta na estrutura subjacente da teoria matemática que se manifesta por meio de definições, fórmulas, expressões e resolução de problemas através de procedimentos de operações e raciocínios abstratos, as atividades de estatística trabalham com incertezas, análise de dados obtidos em contextos reais, a variabilidade de dados, a leitura de condições por trás dos dados e inferências a partir da análise de dados. As diferenças percebidas pelos avanços nas investigações sobre Educação Estatística implicaram maior compreensão sobre as necessidades de reformas curriculares em todos os níveis para focar o letramento estatístico, em paralelo ao letramento matemático e de alfabetização. Documentos como (NCTM,2000) e (CBMS, 2012) são contribuições que detalham orientações sobre as tendências dos currículos atuais, refletindo os conhecimentos gerados pela pesquisa, reforçando a preparação dos professores em Ensino Básico no Conhecimento Pedagógico de Conteúdo para Matemática e Estatística.

No Brasil, o recente documento de Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil-

MEC, 2018) é um documento que estabelece, para o Ensino Fundamental e Médio, as orientações para o ensino de tópicos básicos de matemática, no eixo *Probabilidade e estatística*, que substitui a denominação anterior da área *Tratamento de Informação*, estabelecendo as competências e habilidades alinhadas com os conceitos do letramento estatístico, Há, entretanto, muito a investigar durante a implementação do novo Currículo para constituir um conhecimento sólido que promova mudanças significativas e efetivas na prática escolar.

A questão de pesquisa que focamos neste trabalho se origina a partir de um projeto de parceria internacional (Baldin, Isoda, Olfos & Estrella, 2018), tendo como objetivo um estudo de caso para interpretar os conceitos do letramento estatístico:

"*Como podemos desenvolver as competências indicadas pelo letramento estatístico dentro do currículo de matemática em nível básico?"*

O texto está organizado em seguintes seções: Fundamentação teórica do conceito de letramento estatístico; Projeto de ensino integrado sobre o tema de consumo responsável de energia; Metodologia de Lesson Study (Pesquisa de Aula) para uma aula cross-border; Análise da aula segundo os princípios do letramento estatístico; Conclusão.

Fundamentação teórica do conceito de letramento estatístico

Seguimos fundamentalmente (Garfield & Ben-Zvi, 2007) para conceituar o letramento estatístico. Segundo estes autores, o letramento estatístico constitui "uma habilidade essencial esperada de cidadãos em sociedades imersas em informações, e é frequentemente considerado um resultado esperado da educação escolar como um componente necessário de letramento numérico e estatístico". O letramento estatístico envolve em especial o reconhecimento e a capacidade de interpretar diferentes representações de dados.

Entendemos também as perspectivas de outros autores como a de Gal (2002) que consideramos complementar à definição de letramento estatístico: "Letramento estatístico constitui habilidade para interpretar, avaliar criticamente e comunicar sobre informação estatística e mensagens". Além disso, o letramento estatístico permite a uma pessoa desenvolver uma habilidade de avaliar informações de caráter estatístico que aparecem na mídia, assim como apreciar o valor do conhecimento estatístico na vida cotidiana, cívica e profissional como consumidores e produtores de dados (del Pino & Estrella, 2012). Esta visão conecta o letramento estatístico à educação escolar para formação de cidadão consciente e responsável.

Para elucidar a posição de letramento estatístico como base da educação estatística e sua distinção da matemática e letramento numérico, Garfield e Ben-Zvi (2007) ressaltam os conceitos de "raciocínio estatístico (*statistical reasoning*)" e de "pensamento estatístico (*statistical thinking*)" que fazem parte da teoria de educação estatística, que se juntam ao "letramento estatístico", apresentando hierarquias entre eles, assim como suas interseções. O pensamento estatístico, próprio da disciplina Estatística como ciência, não será abordado neste trabalho, por não implicar primariamente na análise do projeto de ensino que é objeto de estudo de caso.

O conceito de "raciocínio estatístico" corresponde a um avanço do estágio de habilidade básica de um cidadão para a habilidade de raciocinar com ideias estatísticas, atribuindo sentidos e significados para informação estatística (Garfield & Ben-Zvi, 2007). O raciocínio estatístico pode envolver o conectar um conceito a outro, ou combinar ideias sobre os dados e a chance. O

raciocínio estatístico significa também compreender e explicar processos estatísticos, e também interpretar resultados estatísticos. Em especial, quando a exploração de dados é feita por representação gráfica, Shaughnessy (2007) oferece um critério de quatro níveis de leitura de gráficos para a análise de informações extraídas da leitura: a) leitura de gráfico/dados; b) leitura *dentro* do gráfico/dados; c) leitura *além* do gráfico/dados; d) leitura *por trás* do gráfico/dados. Os níveis representam gradativamente as competências que se aprofundam na direção do letramento estatístico, que iniciando com a identificação dos dados representados graficamente, avançam para o nível de compreender os significados (ler dentro) para poder inferir para além dos dados iniciais(ler além), e finalmente conjecturar outros contextos ou as causas do fenômeno cujos dados estão representados (ler por trás).

No estado atual da investigação em Educação Estatística, há um crescente desenvolvimento no estudo sobre o letramento estatístico, raciocínio e pensamento dos alunos, voltado para promover mudanças no ensino, da "estatística procedimental" com fórmulas, técnicas e cálculos para um desenvolvimento da "compreensão conceitual" na direção do letramento estatístico (Garfield & Ben-Zvi, 2007).

Projeto de ensino integrado sobre o tema de consumo responsável de energia

O tema de produção de energias de natureza renovável se liga à discussão sobre a sustentabilidade do planeta e a educação escolar para cidadania responsável, quando um problema de consumo responsável de energia pode ser trabalhado dentro do currículo de ensino básico, promovendo uma postura crítica na leitura de dados reais e sua interpretação. Entretanto, o planejamento de uma aula que incorpore os princípios de letramento estatístico desde o ensino básico em contexto de interdisciplinaridade é um desafio inovador para pesquisadores e professores em exercício.

Shaugnessy, na página 11 de (Rossman & Shaughnessy, 2013) discute o desafio de trabalhar o letramento estatístico em níveis básicos do ensino escolar, pela preparação insuficiente em matemática dos professores que atuam nos anos iniciais, e pelo fato do conteúdo escolar relacionados à aquisição de habilidades do letramento estatístico estar "embutido dentro do amplo eixo de *Medidas e Dados,* com progressão orientado para medição (linear, área e medida de volume) do que para estatística. ... (...) recomendações para coleta e apresentação de dados são orientadas para representar frações e decimais na reta numérica ...sem raciocínio sobre a distribuição de dados."

No contexto desse desafio, com o tema de Energia para Sustentabilidade, e objetivo de investigar e produzir experiências didáticas para nível básico, o APEC- Lesson Study Project (http: //www.criced.tsukuba.ac.jp) trabalha as aulas interdisciplinares na perspectiva STEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática) com características de letramento estatístico, com colaboração internacional de vários países e realizações trans-fronteira (cross-border). O artigo (Isoda, Araya, Eddy et al., 2017) traz uma experiência de Aula Pública sobre Eficiência Energética, realizada à distância, com transmissão via Skype, entre uma classe em Chile e outra nos Estados Unidos. Nesse artigo, as características de uma Aula Pública nos moldes concebidos como Lesson Study, em que uma aula demonstrativa é observada por professores colaboradores e convidados, e é comentada após a aula, são detalhadas de forma a implicar em comunidades de aprendizagem coletiva que reduz o isolamento de professores e de salas de aula.

Ainda em 2017, González e Isoda realizaram para o Projeto APEC uma oficina de tarefa estatística que utilizou tabelas de dados reais sobre os gastos com energia elétrica em escala internacional, para instigar os participantes a "explorar os dados" para raciocinar com conceitos estatísticos, como de "percepção sobre indícios de variabilidade dos dados", "desenvolvimento e compartilhamento de pensamentos sobre as fontes de variação dos dados em períodos de tempo", e "desenvolvimento de raciocínio informal de inferência usando os dados como recursos para estimativas, predições e generalizações".

A oficina utilizou recursos de representação gráfica para leitura de dados, apoiada nos critérios de Shaughnessy (2007) para desenvolver o letramento estatístico em nível de ensino secundário, o que motivou o projeto de uma Aula-pesquisa para 6º ano do ensino fundamental com o tema de "consumo responsável de energia", que destacasse as etapas de Lesson Study, desde a fase de planejamento até a análise final, com enfoque STEM e de letramento estatístico, e em caráter trans-fronteira (cross-border) entre Chile e Brasil. A avaliação qualitativa do projeto focou nas evidencias da possibilidade de replicar a aula em diferentes contextos e dentro do currículo de matemática dos países participantes. (Baldin et al, 2018)

Metodología de Lesson Study (Pesquisa de Aula) para uma aula cross-border

As etapas de Lesson Study (Fernandez & Yoshida, 2004) basearam a estrutura do projeto de Aula-pesquisa, que assim se denomina por ser uma aula especialmente desenhada coletivamente por pesquisadores e professores de sala de aula, em busca de evidências para fundamentar a análise de resultados desejados de uma aula inédita. Resumidamente, as etapas da Lesson Study constituem de: *Pesquisa para o plano de aula; Elaboração do plano de aula com estabelecimento de questão/problema norteador da atividade em sala de aula; Implementação do plano de aula acompanhada por observação e registro da atividade; Análise pós-aula com reflexão e síntese dos resultados com auxílio de folhas atividade dos alunos questionários aos professores e observadores.*

A metodologia de Lesson Study para implementação de uma aula-pesquisa com tema interdisciplinar de energia, além de estar alinhado com os conhecimentos esperados para 6º ano do ensino básico de países diferentes, facilita a análise de conceitos de letramento estatístico que é o foco deste trabalho.

A ***pesquisa*** para a elaboração do plano de aula envolveu extenso intercâmbio, entre os dois grupos de estudo no Brasil e no Chile, de estudos sobre o conteúdo curricular dos dois países, assim como de desenho especial dos objetivos da aula que deixem claros os conceitos de letramento estatístico.

Após filtrar os conhecimentos previstos para 6º ano (11 ~12 anos de idade) em duas escolas públicas, do Brasil e Chile, assim como considerar os conhecimentos prévios das duas turmas, o ***plano de aula*** foi desenhado com as características de execução simultânea, comunicação sincronizada, gravação da aula durante a execução, socialização interativa facilitada pela tecnologia de comunicação, tradução simultânea de espanhol e português na sala brasileira.

Os dados reais de produção e consumo de energia renováveis e não renováveis dos dois países, nos anos 1990 e 2013, foram extraídas da base de dados do Banco Mundial (//wdi.worldbank.org/table/3.6) e apresentados aos alunos com representação em barras de

coluna, acessíveis ao conhecimento dos estudantes, ilustrados na Figura 1. Esta parte faz parte da pesquisa para o planejamento da aula para adequar o conteúdo e as estratégias didáticas ao conhecimento dos alunos e ao currículo escolar.

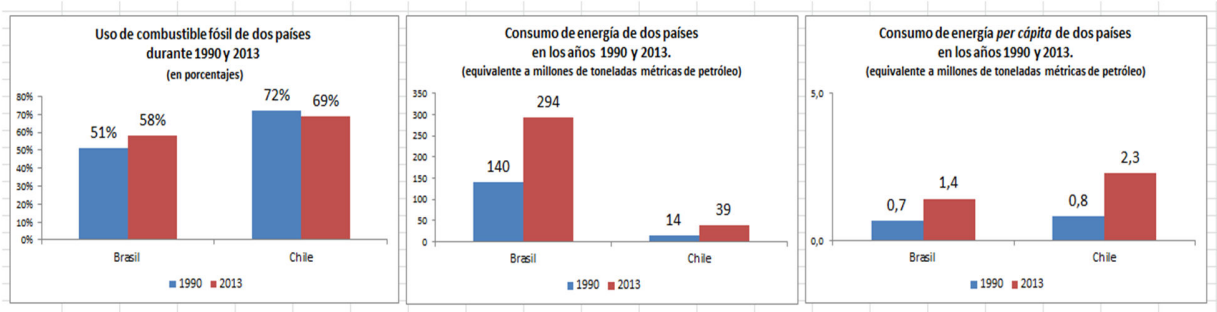


Figura 1 Gráficos de colunas duplas para trabalho dos alunos.

O objetivo disciplinar foi estabelecido como "analisar e extrair informação a partir de gráficos de barras duplas que representam os dados", enquanto o objetivo transversal da atividade foi "argumentar e comunicar as conclusões".

A tarefa/problema da atividade foi estabelecida como responder à questão: "*Temos sido consumidores responsáveis?*". Esta questão aberta instiga os alunos a trabalhar colaborativamente, reflexivamente, e interpretar os dados para respostas que conectem a aula a questões mundiais de sustentabilidade do planeta, e a utilizar conhecimentos de matemática curricular como de porcentagem, estudo de unidades de medida não usuais para energia, escalamento de unidades nos eixos gráficos, uso de representações decimais na comparação entre os consumos e conceitos de proporcionalidade, conceito de *per capita* que exige o conhecimento de razão para sua representação, entre outros, para argumentar, justificar e comunicar.

O plano elaborado foi resultado do trabalho colaborativo entre dois Grupos de Estudo em projetos de Lesson Study, respectivamente no Brasil e Chile. A aula foi organizada para 60 minutos, com previsão dentro do plano de eventuais dificuldades dos alunos e estratégias de intervenção das professoras em sua classe por meio de questionamentos que estimulem o raciocínio.

A ***execução da aula-pesquisa*** foi gravada, com transmissão sincronizada com tecnologia Skype que permitiu interação direta dos alunos durante a aula, com diálogos e compartilhamento de respostas e ideias. As folhas atividades com os gráficos da Figura 1 e questionamentos para responder foram trabalhadas individual e em grupo e entregues para as respectivas professoras.

A ***análise posterior a aula*** foi realizada por meio de questionários semiestruturados para orientar os observadores nas avaliações do plano executado, desempenho da classe, e resultado global obtido. Esta opção se alinha a (Sharma,2010) que discute teorias de avaliação de pesquisa qualitativa em educação estatística.

Desta forma, as etapas básicas da metodologia Lesson Study estiveram presentes na Aula-pesquisa, e se conectam com as tendências recentes da investigação em educação estatística sobre como a compreensão e o raciocínio sobre conceitos estatísticos poderiam ser "desenvolvidos através de sequencias de atividades cuidadosamente planejadas e como essas poderiam ser levadas para a sala de aula" (Garfield et al, 2008).

Análise da aula segundo os princípios do letramento estatístico

Os princípios da aula STEM utilizando representação gráfica de dados, alinhados com os conceitos de letramento estatístico permearam o desenho do plano de aula:

- Entender a problemática da eficiência energética no planeta (*leitura de gráfico*);
- Entender a comparação entre os dados estatísticos representados por gráficos de colunas duplas, explorando, lendo as propriedades das medidas e escalas dos gráficos e interpretando-as em contexto real dos dados (*leitura dentro dos dados*);
- Avaliar criticamente as informações para responder a uma questão aberta, justificando a resposta e comunicando aos colgas (*leitura além e por trás dos dados*).

A execução da aula mostrou a possibilidade de levar atividades que trabalham as competências em tratamento estatístico de dados reais para sala de aula de 6º ano, com questões que estimulam os alunos a pensar sobre o consumo responsável de energia, fontes de energia não poluente, e também o desenvolvimento de senso de cidadania num mundo global, por meio de interação sincronizada com colegas de países diferentes, com população e condições geográficas diferenciadas. A análise comparativa na leitura de dados por meio de barras duplas propiciou oportunidades de reflexão crítica aos alunos.

Para as professoras e os participantes observadores das aulas, a aula pesquisa permitiu esclarecer as dimensões do conhecimento pedagógico de conteúdo para entender os conteúdos de matemática curricular relacionados ao desenvolvimento de conceitos estatísticos, assim como os processos de aprendizagem dos alunos na compreensão e raciocínio estatístico.

Conclusão

As respostas dos alunos e suas reações obtidas na experiência de Aula Pública com enfoque de Lesson Study sobre o tema de Eficiência Energética (Isoda, Araya et al. 2017), do projeto APEC- HRD, que se assemelham aos obtidos na Aula Pesquisa, nos animam a arriscar que, a aula, estudada neste texto à luz dos princípios de letramento estatístico, corrobora indícios de que a metodologia de Lesson Study e aulas interdisciplinares auxiliam a trazer significados na interpretação de dados reais no contexto que educam para a cidadania, e contribuem para desenvolver o conhecimento pedagógico de conteúdo para a formação dos professores. O plano de aula mostrou-se ainda replicável em contexto de estudo comparativo entre três países, com os dados em barras triplas, envolvendo dados de Brasil, Chile e Peru, o que mostra a robustez do desenho da aula pesquisa, e possibilidade de generalizar o estudo para anos subsequentes com outras formas de representação de dados. A questão posta para discussão na introdução ofereceu um estudo que abriu caminhos para mais investigações sobre o letramento estatístico, raciocínio e pensamento.

Referencias e bibliografía

Baldin, Y. Y., Isoda, M. Olfos, R. & Estrella, S. (2018). A STEM Cross-Border Lesson on Energy for Basic Education under APEC Lesson Study Project. In *Proceedings of 8th ICMI-EARCOME*, vol 1, p. 236-247. Taipei- Taiwan: Dept of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Brasil-MEC (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasilia: Ministério de Educação.

CBMS (2012). *The Mathematical Education of Teachers II*. Providence, RI: American Mathematical

Society. http://www.cbmsweb.org/MET2/met2.pdf

del Pino, G. & Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, 49 (1), p. 53-64.

Fernandez, C. & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Gal, I. (2002). Adult´s Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, 70, 1. P. 1-51. The Netherlands: International Statistical Institute.

Garfield, J., Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students´ statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer Science + Business Media B. V. doi: 10.1007/978-1-4020-8383-9

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007)). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review75, 3, p. 372-396* doi:10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x

González, O. & Isoda, M. (2017) How to Develop Statistical Tasks on Energy Resiliency Using Data from the APEC Energy Database, http://www.criced.tsukuba.ac.jp/,ath/apec/apec2017/GonzalezWorkshop

Isoda, M., Araya, R., Eddy, C., Matney, G., Williams, J., Calfucura, P., Aguirre, C., Becerra. P., Gormaz, R., Soto-Andrade, J., Noine, T., Mena-Lorca, A., Olfos, R., Baldin, Y, Malaspina, U. (2017) Teaching Energy Efficiency: A Cross-Border Public Class and Lesson Study in STEM. *Interaction Design and Architecture(s) Journal- IxD&A,* N. 35, p. 7-31.

Mochizuki, Y. (2017) Understanding SDGs and SDG Target 4.7, http://www.criced.tsukuba.ac.jp/,ath/apec/apec2017/MochizukiKeyNote.pdf

NCTM (2000). *Principles and Standards of School Mathematics*. Reston VA: National Council of Mathematics.

Rossman, A. & Shaughnessy, M. (2013). Interview with Mike Shaughnessy, *Journal of Statistics Education*, 21:1, doi: 10.1080/10691898.2013;1188967-1

Sharma, S. (2010), Qualitative Methods in Statistics Education Research: Methodological problems and Possible Solutions. *In C. Reading (Ed) Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eight International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8).*

Shaughnessy, J. M. (2007) Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Ed) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. P. 957-1009. Reston VA: national Council of Teachers of Mathematics.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza

Hugo **Barrantes** Campos
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Costa Rica
habarran@gmail.com

Resumen

El estudio de las transformaciones geométricas en el plano ocupan un lugar cada vez más importante en los programas de Matemáticas de la educación general básica en diversos países. Los conceptos y técnicas involucrados no corresponden, en general, a los temas clásicos en ese nivel educativo. Esto hace que en muchas ocasiones los docentes muestren reticencias a la hora de enfrentar el trabajo de aula en relación con esta temática.

Se exponen aquí algunas ideas que pueden ser útiles a los profesores en la enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano. Se enfatiza el enfoque de resolución de problemas, así como el uso de construcciones con regla y compás, las cuales se pueden realizar de modo equivalente con software de geometría dinámica mediante el uso de rectas y circunferencias, como un medio de comprender el concepto general de simetría.

Palabras clave: educación matemática, transformaciones geométricas, simetría, isometría, geometría dinámica.

Transformaciones geométricas en el currículo escolar

El estudio de las transformaciones geométricas se han ido introduciendo paulatinamente en diversos currículos escolares en diversas partes de mundo. Diversos elementos relacionados con este tema se mencionan en currículos latinoamericanos, por ejemplo, en Chile (Ministerio de Educación, República de Chile, 2011), Perú (Ministerio de Educación, 2016), Colombia (Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998), Costa Rica (MEP, 2012). Lo que hay en mente con la consideración de este tema de estudio es la búsqueda del desarrollo de diferentes capacidades matemáticas superiores en el sentido señalado por Ruiz (2018), referidas a plantear y resolver problemas, razonar y argumentar, conectar, comunicar y representar (p. 75). De tal manera, el currículo de Matemáticas de la educación primaria y media costarricense establece que:

> Además de trabajar con problemas con distintos niveles de complejidad es necesaria

> la introducción de contenidos matemáticos que juegan un papel crucial en la formación escolar moderna. Por ejemplo, tópicos de geometría de coordenadas y de transformaciones que, además de incluir una visión moderna de la Geometría, favorecen el tratamiento de otros conceptos y procedimientos matemáticos, brindando instrumentos para poder usar las Matemáticas en diversos contextos. Un tratamiento adecuado de las relaciones y funciones es otro propósito que debe enfatizarse y cultivarse adecuadamente desde el inicio de la formación escolar, pues éstas resultan centrales para la formación matemática moderna. (MEP, 2012, p. 15)

Por otra parte, en Ministerio de Educación Nacional de Colombia, (1998) se enuncia que:

> En la actualidad, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo. (p. 40)

En la enseñanza media se podría definir formalmente el concepto de transformación como una aplicación inyectiva del plano sobre sí mismo; sin embargo, este enfoque formal que permite un estudio profundo del tema, carece de la riqueza didáctica del enfoque más visual e intuitivo que ve una transformación como un movimiento de los puntos o las figuras manteniéndolas congruentes a sí mismas, en el caso de las isometrías, o al menos manteniendo su forma como en el caso de las homotecias. Al respecto, Yanik y Flores (2009) en un estudio con futuros profesores encontró que todos los participantes concebían las transformaciones como movimiento; explicaban que las isometrías podían describirse como movimientos de todos los puntos del plano más que como aplicaciones del plano sobre sí mismo (p. 55).

En ese sentido, en MEP (2012) se menciona lo siguiente:

> El movimiento de puntos y entidades geométricas permite construir nuevas entidades (curvas por ejemplo) y visualizar las usuales de otras maneras: un sentido dinámico de algunas propiedades geométricas como las posiciones relativas y transformaciones de puntos y formas. (MEP, p. 52)

La introducción de este tema, que no ha sido tradicional, en los planes de estudio de la enseñanza primaria y media, implica que el docente observe al menos partes de la geometría elemental con una perspectiva novedosa para lo cual a menudo no está suficientemente preparado, de ahí la importancia del aporte de recursos que lo apoyen en su labor de aula.

Otra perspectiva para el estudio de temas tradicionales

Las transformaciones geométricas son interesantes para ser estudiadas en sí mismas, pero también sirven como una herramienta para el estudio de otros temas de la geometría euclidiana desde otra perspectiva. Al respecto en NCTM (2010) se subraya su importancia al señalar que las transformaciones geométricas representan una forma alternativa para el estudio de la congruencia, semejanza y simetría (p. 62). Agregamos que puede ser útil también para visualizar otras propiedades y conceptos tales como el cálculo de áreas, según veremos más adelante.

Se ilustra el uso de esta perspectiva mediante dos situaciones.

Congruencia de triángulos

La congruencia se puede estudiar desde el punto de vista de la simetría. Para ello

recordamos que la reflexión, traslación y rotación conservan las medidas de los ángulos y reciben el nombre de isometrías.

Se dice que dos triángulos *ABC* y *A'B'C'* son **isométricos** si *A'* es la imagen de *A*, *B'* es la imagen de *B* y *C'* es la imagen de *C* mediante una misma isometría. La noción de triángulos isométricos es equivalente a la de triángulos congruentes.

A partir de aquí se pueden estudiar las congruencias a partir de las isometrías y sus propiedades.

Lo interesante de este enfoque es que algunos problemas sobre congruencias pueden ser resueltos de manera sencilla mediante el uso de isometrías o con una combinación de ambos enfoques.

Un ejemplo. En la figura 1 se tiene que ΔABC y ΔADE son isósceles, ambos con ápice en A. Además $AD = 2AB$.

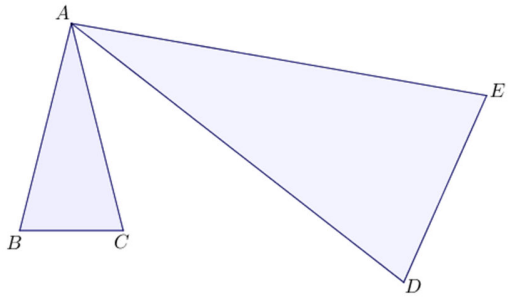


Figura 1. Dos triángulos isósceles.

Hay que demostrar dos cosas:

a) Los triángulos *BAD* y *CAE* son isométricos y, por lo tanto, $BD =$ □ .

b) SI *I* y *J* son respectivamente los puntos medios de *CE* y *BD* entonces los triángulos *AIC* y *AJB* son isométricos y por lo tanto ΔAIJ es isósceles.

Para a), sea $\alpha = m\angle BAC =$ □ $\angle DAE$. Considere la rotación con centro en *A* y amplitud α (considerada en dirección anti horario). Bajo esta rotación, *A* lleva a *A* pues *A* es el centro de la misma y por lo tanto permanece invariante, *B* lleva a *C* y *D* lleva a *E*. Se concluye que los triángulos *BAD* y *CAE* son isométricos. Como *B* y *C* son homólogos y *E* y *C* son homólogos mediante esta isometría, entonces *B*□ .

Para b) considere la misma isometría. *A* lleva a *A*, *B* lleva a *C* y *J* lleva a *I*. Observe que *I* y *J* son equidistantes de A y por lo tanto ΔAIJ es isósceles.

El teorema de Viviani

Este teorema establece que dado un triángulo equilátero y un punto *P* en su interior, entonces la suma de las distancias de P a lados del triángulo es igual a la altura del triángulo.

Hay un prueba simple, elegante y muy visual de este teorema, la cual utiliza isometrías. Considere el triángulo equilátero dado en la figura 2 (a) y trace paralelas a los lados del triángulo que pasen por *P* (figura 2 (b)).

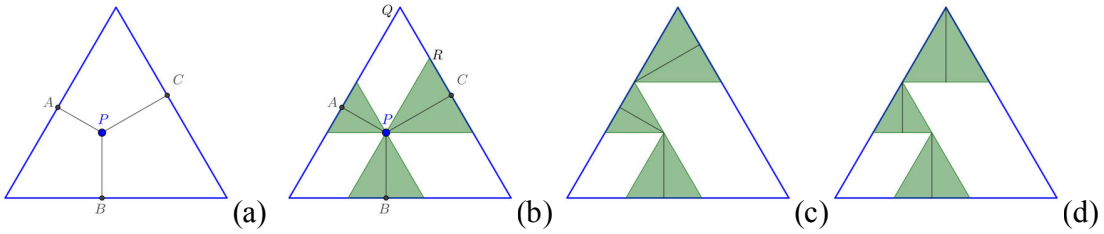


Figura 2. Según el teorema de Viviani $AP + B$ es igual a la altura del triángulo equilátero.

Los tres triángulos destacados en la figura 2 (b) son equiláteros y sus alturas son los segmentos AP, BP y CP. Se traslada el triángulo verde a la derecha según el vector $\overrightarrow{RQ}$, se obtiene la figura 2 (c). Posteriormente se rota ese mismo triángulo alrededor de su centro un ángulo de 60º y finalmente el triángulo verde a la izquierda se rota 60º alrededor de su centro. Así se obtiene la figura 2 (d) en la cual se puede verificar que $AP + B$ es igual a la altura del triángulo equilátero dado.

Isometrías y áreas de figuras planas

Se enseña el cálculo de áreas de figuras planas básicas de diversas maneras. A menudo se enseñan las fórmulas sin más, pero en ocasiones se trata de que los estudiantes comprendan dichas fórmulas mediante, por ejemplo, el uso del tangrama o el doblado de papel. Otra forma útil puede ser el uso de transformaciones isométricas puesto que, dado que la imagen de un polígono mediante una isometría es congruente al polígono original entonces se preserva el área. Ilustramos esto a continuación.

Área del paralelogramo

Se supone conocido que el área de un rectángulo es igual al producto de la medida de su base por su altura.

Para determinar la forma en que se calcula el área del paralelogramo, consideramos uno de base b y altura a.

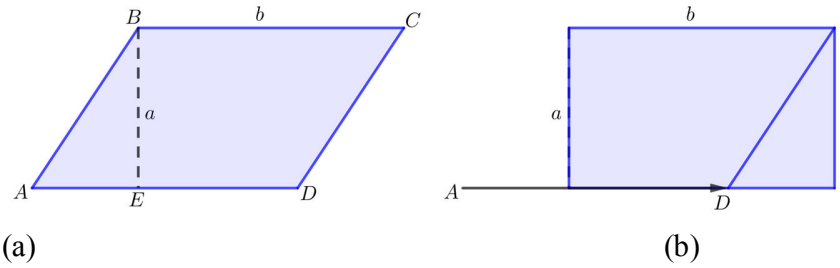


Figura 3. Cálculo del área del paralelogramo de base b y altura a.

Con la notación de la figura 3 (a), consideremos el triángulo ABE y trasladémoslo según el vector $\overrightarrow{AD}$, si luego eliminamos el ΔABE obtenemos la figura 3 (b), que corresponde a un rectángulo de base b y altura a.

El área del rectángulo es $b \cdot a$ y, puesto que en el proceso de trasladar y eliminar, el área se conserva, entonces el área del paralelogramo es $b \cdot a$.

Con el uso de un software de geometría dinámica, por ejemplo *Geogebra*, esto se puede visualizar mejor. Se define un deslizador que determine el segundo extremo del vector $\vec{u}$ que

inicia en A y mediante él se puede visualizar cómo el triángulo se va trasladando hasta ocupar su posición final cuando $\vec{u}$ sea igual a $\overrightarrow{AD}$.

Área del trapecio

A partir del área del paralelogramo y mediante una isometría se puede obtener el área del trapecio.

Considere un trapecio de base mayor c, base menor b y altura a.

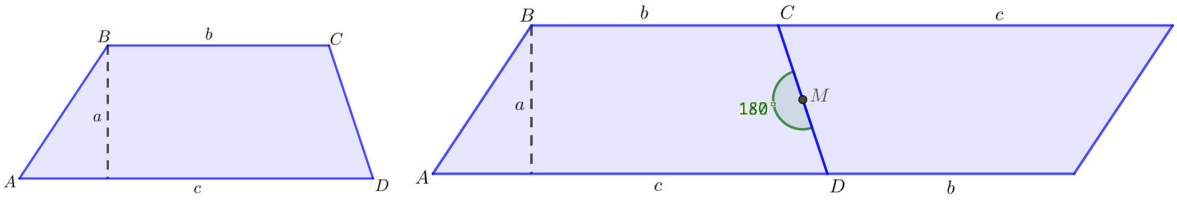


Figura 4. Cálculo del área del trapecio.

Con la notación de la figura 4 izquierda, marquemos el punto medio M del lado CD y luego apliquemos una rotación al trapecio de amplitud 180º en sentido horario con centro en M, se obtiene un paralelogramo como el de la figura 4 derecha, de base $b + c$ y altura a.

El área de este paralelogramo es $(b + c) \cdot a$ y puesto que está formado por dos trapecios congruentes, entonces el área del trapecio es igual a $\frac{1}{2}(b + c) \cdot a$.

Con *Geogebra* se visualiza esto de manera dinámica mediante un deslizador que defina el ángulo de la rotación con centro en M.

Simetría y diseños

Siguiendo a Askew (2016) se puede decir que, en general, el término simetría evoca formas armoniosas y, particularmente, a la simetría axial en el contexto de la geometría euclidiana, pero a los matemáticos les gusta aplicar conceptos en un nuevo contexto. De tal modo, la palabra cotidiana "simetría" obtiene un significado matemático más amplio a través de la conexión con el reflejo y la rotación. Un objeto matemático es simétrico con respecto a una operación matemática particular si conserva ciertas propiedades, en este caso la apariencia, después de que se haya aplicado la operación. Las formas básicas de simetría -reflexión, rotación, cambio de escala, desplazamiento- y su combinación, forman la base del estudio de la geometría euclidiana, la consideración de tales simetrías es la geometría con la que tiene que ver la educación escolar pero también se pueden usar para deducir hechos menos conocidos, por ejemplo, el que enuncia que, en esencia, solo hay catorce patrones diferentes de "tapizados" (pp. 8-9).

En Kappraff (2015) se propone una serie de diversos diseños en el plano que siguen patrones. Tales diseños se pueden realizar con regla y compás o con un software como *Geogebra* que simule estos instrumentos. También se puede utilizar dicho software para reproducir estos diseños mediante recta y circunferencias y el uso de las transformaciones en el plano.

Diseños en redes de triángulos equiláteros

Un red de triángulos equiláteros es una teselación del plano mediante triángulos rectángulos. Se puede construir usando regla y compás o simulándolos con *Geogebra* (por

ejemplo). Para ello se construye una circunferencia de un radio *r* dado, se selecciona un punto de esa circunferencia y con centro en ese punto se traza otra circunferencia del mismo radio *r* que la primera. Estas circunferencias tienen dos puntos de intersección, con el mismo radio *r*, se dibujan dos circunferencias cuyos centros son esos puntos de intersección. Se continúa de esa forma dibujando circunferencias de radio *r* con centros en los puntos de intersección que han resultado del paso previo. Luego se conectan mediante rectas los centros de las circunferencias y finalmente se borran estas para obtener la red.

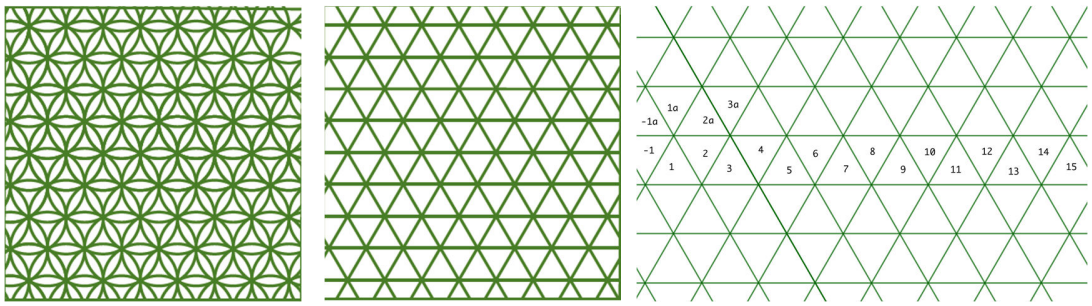
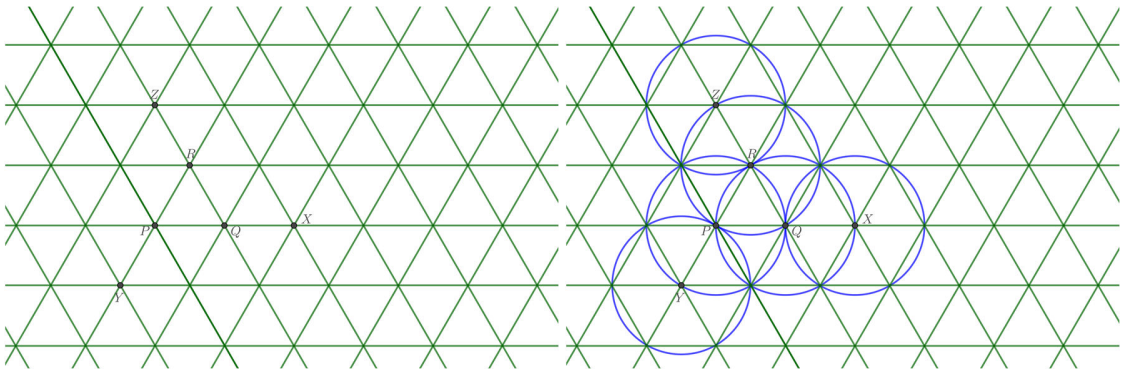


Figura 5. Proceso para la creación de una red de triángulos equiláteros utilizando regla y compás o reflexiones.

También se puede crear esta red mediante reflexiones a partir de un triángulo equilátero base (vea la figura 5 derecha).

Se traza el triángulo 1, éste se refleja sobre su lado derecho para obtener el 2 y así sucesivamente hacia la derecha. El triángulo 1 se refleja sobre su lado izquierdeo para obtener el -1 y así hacia la izquierda y sucesivamente para obtener una hilera de triángulos. El 2 se refleja sobre su base para obtener el 2a y luego se procede como antes para obtener otra hilera. El proceso se repite hacia arriba y hacia abajo.

Utilizando esta red se pueden crear diseños artísticos muy interesantes. Por ejemplo, marque los vértices de uno de los triángulos de la red y denótelos por *P*, *Q* y *R*. Luego marque otros puntos como se ve en la figura 6 (a). Con centro en cada uno de esos puntos y radio igual al lado del triángulo trace las seis circunferencias que se observan en la figura 6 (b). Borre las circunferencias con excepción de los arcos indicados por la figura 6 (c). Se obtiene una figura básica que podemos denominar como triángulo volador.



(a) (b)

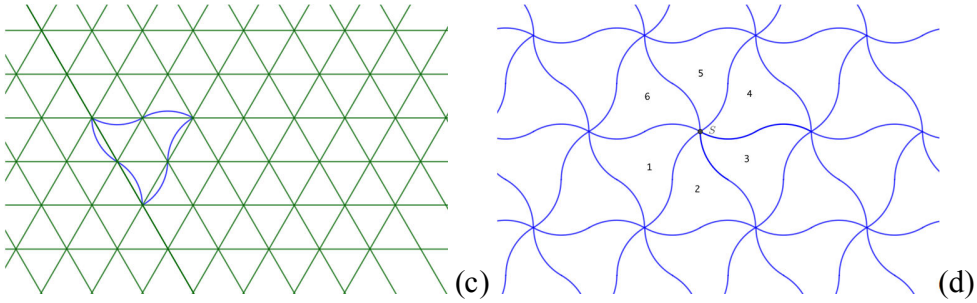


Figura 6. Proceso para la creación de un triángulo volador.

Se marca uno de los vértices del triángulo volador y se aplica al mismo una rotación de 60º con centro en dicho punto (S en la figura 6 (d)), se obtiene un triángulo volador 2, este se rota 60º alrededor de S, y así sucesivamente hasta obtener los primero 6 triángulos voladores. Rotaciones de 60º con centros apropiados producen en diseño completo. Finalmente se elimina la red de triángulos para obtener la figura 8. Diseños más intrincados se pueden obtener de esta manera.

Además de la propia belleza de los diseños que se pueden obtener, este tipo de construcciones permiten visualizar, repasar o introducir conceptos y propiedades. Por ejemplo, pueden surgir preguntas tales como ¿por qué en cada vértice confluyen exactamente seis figuras (que equivale al número de triángulos que comparten cada vértice)?, ¿cuánto mide cada uno de los arcos que constituye cada triángulo volador?, entre otras que permiten ver más profundamente en el diseño elaborado.

Diseños en redes de cuadrados

Un red de cuadrados es una teselación del plano mediante cuadrados. La construcción de esta red es más sencilla que la de triángulos equiláteros.

Utilizando regla y compás se puede construir a partir de dos rectas perpendiculares entre sí. Se dibuja una circunferencia con centro en el punto de intersección de estas rectas. Luego se dibujan cuatro circunferencias con el mismo radio que la primera y cuyos centros son los puntos de intersección entre ambas rectas y el círculo original. Finalmente, se dibujan circunferencias con el mismo radio y centros en los puntos de intersección de las circunferencias que van resultando, en todas direcciones.

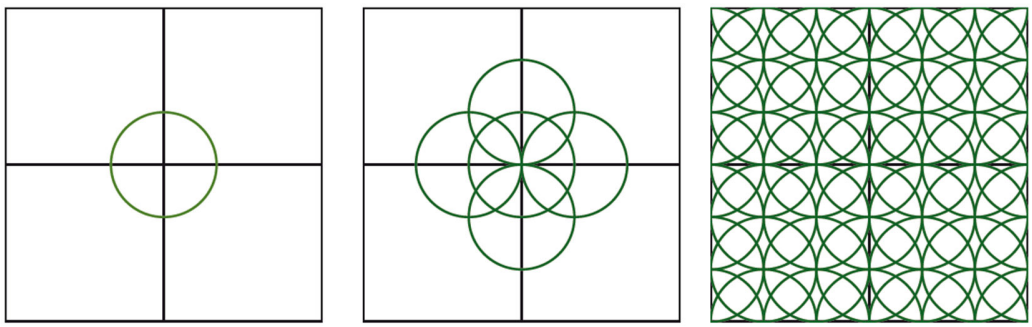


Figura 7. Base para la elaboración de una red de cuadrados.

Conectando mediante rectas los centros de las circunferencias que son tangentes se obtiene una red de cuadrados en el plano. Desde luego, esta red se también puede obtener a partir de un cuadrado base mediante traslaciones en diferentes direcciones.

Con esta red de cuadrados y las circunferencias que la originaron se pueden crear diseños interesantes como el de la figura 8 izquierda.

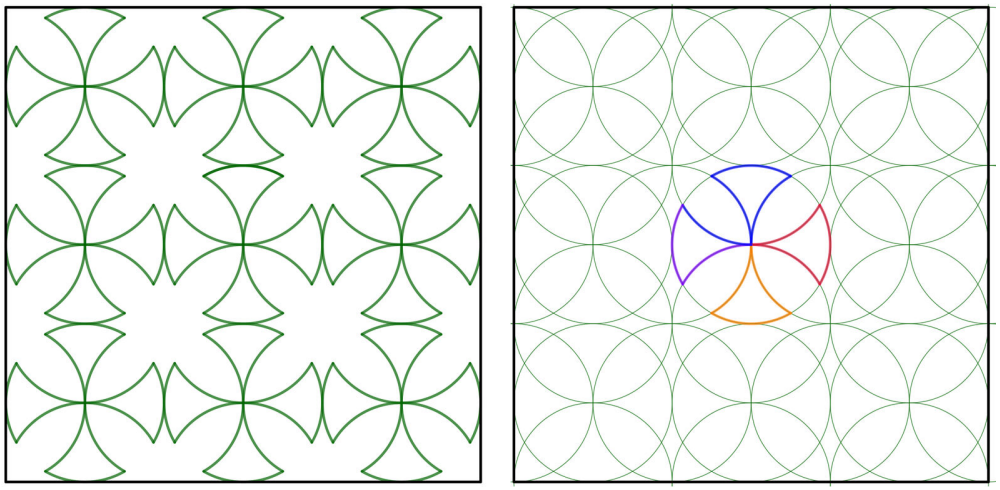


Figura 8. Diseño a partir de una red de circunferencias.

Se identifican tres arcos que formen el triángulo curvo (en azul en la figura 10). Luego se rota este triángulo 90º en el sentido horario con centro en el vértice inferior para obtener el rojo. Alrededor del mismo punto se rota el rojo 90º en sentido horario para obtener el anaranjado y este se rota 90º alrededor del mismo punto para obtener el violeta. Esto produce un figura básica que se puede trasladar en diferentes direcciones para obtener el diseño completo. Al eliminar las circunferencias de la red se obtiene el diseño de la figura 8 derecha.

Conclusión

La introducción en el currículo de nociones relativas a transformaciones en el plano – ísometrías y homotecias – obedece, en general, a diferentes aspectos. Por una parte está el afán por modernizar el currículo en cuanto a geometría se refiere pero esta modernización conlleva la necesidad de incursionar en temas o herramientas que permitan un abordaje de la geometría más ameno pero también más útil en la comprensión conceptual y que permita al final un mayor desarrollo en la consecución de competencias y capacidades matemáticas en los estudiantes.

El abordaje de estos temas, y su uso para el estudio de temas más clásicos desde otra perspectiva, requiere también nuevas capacidades por parte de los docentes y exige, necesariamente, que se tengan recursos que puedan ayudarle en su labor.

Lo expuesto en este trabajo pretende dar algunas nociones de lo que se puede realizar mediante el uso de las transformaciones.

Referencias y bibliografía

Askew, M. (2016). *Geometrie. Von Pi bis Pythagoras*. Berlin: Librero IBP.

Kappraff, J. (2015). *A participatory Approach to Modern Geometry*. New Jersey: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Ministerio de Educación, Chile (2011). *Matemática, Programa de Estudio para Primer Año Medio Unidad de Currículum y Evaluación*. Clile: autor. Descargado de https://educrea.cl/wp-content/uploads/2015/04/programa-de-estudio-1-medio-matematica-191115.pdf

Ministerio de Educación Nacional, Colombia (1998). Lineamientos curriculares, Matemáticas. Colombia: autor. Descargado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Pública, Costa Rica (2012). Programas de estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación, Perú. (2016). *Programa curricular de Educación Secundaria*.Perú: autor. Descargado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf

NCTM (2010). *Focus in High School Mathematics. Reasoning and sense making*. (2nd ed) Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Ruiz, A. (2018). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. Ciudad de México: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Yanik, H. B. y Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*, 41-57. doi:10.1016/j.jmathb.2009.04.003

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales

José **Chamoso** Sánchez
Universidad de Salamanca
España
jchamoso@gmail.com

María José **Cáceres**
Universidad de Salamanca
España
majocac@usal.es

Resumen

Atendiendo al interés de vincular el aprendizaje de matemáticas a situaciones cotidianas, la creación de tareas matemáticas a partir de contextos reales puede ser un elemento formativo para futuros docentes e incluso convertirse en un eje de formación. En este trabajo se analizó una experiencia con futuros docentes de matemáticas en la que grupos de estudiantes crearon tareas, a partir de contextos reales, mediante un proceso basado en una Propuesta Inicial, discusión con los compañeros y, fruto de la reflexión sobre el propio trabajo, una Propuesta Final. El proceso desarrollado consiguió una alta motivación en los estudiantes ante las posibilidades que ofrecen los contextos reales para aprender matemáticas y unas tareas interesantes que, en diversos sentidos, mejoran las de los manuales escolares. Ello abre perspectivas de futuro como, por ejemplo, vertebrar la formación de docentes de matemáticas a partir de la reflexión sobre la creación de tareas en contextos reales.

Palabras clave: Educación Matemática, formación de docentes, creación de tareas, reflexión, contextos reales.

Introducción

En las últimas décadas, las recomendaciones para el aprendizaje de matemáticas dan cada vez más relevancia a la conveniencia de vincular las matemáticas escolares con contextos reales (por ejemplo, MECD, 2015; NAEYC y NCTM, 2013; OCDE, 2013). Una forma de hacerlo es a partir de la creación de tareas, que exige creatividad y evita la consideración primordial de las habituales de los libros de texto que, en muchos casos, suelen ser rutinarias, académicas y alejadas del mundo real (por ejemplo, Niss, 2001; Villa-Ochoa, 2015).

Es reconocida la importancia de la tarea con la que el estudiante construye el aprendizaje matemático (Christiansen y Walther, 1986; Hiebert y Wearne, 1997; Sullivan, Clarke, Clarke y O'Shea, 2010). Diseñar tareas matemáticas requiere poseer Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Conocimiento Común del Contenido para utilizar correctamente los contenidos matemáticos, Conocimiento Especializado del Contenido para establecer los diversos procedimientos con los que podrán ser abordadas y Conocimiento del Horizonte Matemático para que estén vinculadas a la realidad) y Conocimiento Pedagógico del Contenido (Conocimiento del Contenido y del Curriculum para decidir el nivel de enseñanza, Conocimiento del Contenido y Enseñanza para llevarlas al aula de manera adecuada, y Conocimiento del Contenido y Estudiantes para tener en cuenta las peculiaridades de los estudiantes; más detalle, modelo MKT de Hill, Ball y Schilling, 2008). Por ello es recomendable trabajarlo desde la formación inicial de docentes (Malaspina, 2015).

Algunos estudios reflejaron que las tareas que los estudiantes crean suelen ser rutinarias, pero otros mostraron que pueden proponer tareas interesantes cuando se da posibilidad de hacerlo (Isik y Kar, 2012). Esa posibilidad puede facilitarse a partir de la reflexión que incluye, por ejemplo, la revisión del propio trabajo (Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010; Chamoso y Cáceres, 2009). Un ejemplo de revisión del propio trabajo cuando estudiantes para maestro crearon tareas auténticas a partir de contextos reales se muestra en Cáceres, Chamoso y Cárdenas (2015).

Investigaciones recientes se han interesado por la clasificación de tareas matemáticas. Por ejemplo, el análisis de las tareas propuestas en libros de texto de Wijaya, Heuvel-Panhuizen y Doorman (2015) mostró que el 45% demandaban Procesos cognitivos (TIMSS, 2015) de *Conocer* y solo 2l.2% de *Razonar*, y que únicamente un 10% consideraban un Contexto *Real*. En los trabajos del análisis de las tareas de libros de texto de López y Contreras (2014), referido a contenidos de geometría plana, y Guerrero, Carrillo y Contreras (2014), referido a ecuaciones lineales, la mayor parte de las tareas se centraban en *Aplicar* y solo una de ellas era *Abierta*. En otro sentido, el estudio de Vicente, Rosales, Chamoso y Múñez (2013), referido a las tareas seleccionadas por maestros de Primaria en el desarrollo de una unidad didáctica, más del 81% de ellas eran de *Conocer* y el 19% de *Aplicar*. Vicente, Dooren y Verschaffel (2008) mostraron que la mayor parte de los problemas que aparecían en los libros de texto de Primaria únicamente exigían *Conocer*. Referido al estudio de tareas creadas por futuros docentes a partir de contextos reales durante su formación inicial, únicamente se conoce el trabajo de Chamoso y Cáceres (2018) donde los Procesos cognitivos que desarrollaban eran de *Conoce*r (62%) y solo un 5% de *Razonar*; además, el 18% eran de respuesta *Abierta*.

Objetivo

Caracterizar las tareas creadas, a partir de contextos reales, por estudiantes para maestro.

Metodología

Contexto y muestra

73 estudiantes para maestro (en adelante EpM; 3 hombres, 4%, y 70 mujeres, 96%) de 2º curso del Grado en Maestro de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca, España, en la asignatura Matemáticas y su Didáctica para Educación Infantil, de 6 créditos, curso

2017-18, distribuidos en 20 grupos de trabajo de 3-4 personas, participaron en el estudio. El grupo fue establecido según la organización del centro. Su media de edad fue de 19,7 años. Al principio de curso, ningún EpM había tenido formación previa en crear tareas para el aprendizaje matemático.

La asignatura es la única directamente relacionada con matemáticas que figura en el plan de estudios y su objetivo es desarrollar capacidades para la enseñanza de matemáticas en Educación Infantil. Se impartió en sesiones de dos horas a lo largo de 15 semanas, una sesión en la que el profesor trabajaba con todos los EpM (sesiones formativas) y otra en la que el profesor lo hacía con la mitad de los EpM (sesiones prácticas, con 10 grupos de trabajo en cada caso; una sesión semanal para los EpM y dos para el profesor). Toda la información sobre el desarrollo del curso figuraba en el campus virtual de la propia Universidad. La experiencia fue desarrollada por el profesor habitual de la asignatura.

Propuesta formativa

Los EpM debían desarrollar competencias, tanto matemáticas como profesionales, para enseñar matemáticas (Cáceres et al., 2010, adaptado de Hill et al., 2008). Para adquirir esas competencias, el curso se organizó con el objetivo de crear tareas para aprender matemáticas a partir de contextos reales. Con ese objetivo, las sesiones formativas abordaron aspectos como, por ejemplo, conocimiento de la matemática escolar y organización curricular, tratamiento de los contenidos y procesos matemáticos con un enfoque globalizado, metodologías de enseñanza para aprender matemáticas e instrumentos de evaluación, y materiales didácticos y tipos de tareas para aprender matemáticas.

Las sesiones prácticas se organizaron en torno al desarrollo de un proyecto donde los EpM, en grupos, debían crear tareas para aprender matemáticas. En concreto, este proyecto se desarrolló en 4 partes durante 12 semanas, cada una de las partes a partir de un contexto cercano a la realidad (1. Episodios, 2. Cuentos, 3. Materiales y 4. Ruta). Las demás sesiones consistieron en una sesión inicial explicativa y organizativa, y dos sesiones finales de valoración del trabajo realizado y evaluación. Cada una de las partes se desarrolló a lo largo de 3 semanas consecutivas con la siguiente estructura:

Sesión 1: Creación de tareas matemáticas (2 horas):

a) Formación (profesor, gran grupo, 45 minutos).

b) Creación de tareas para aprender matemáticas en el aula a partir de un contexto cercano a la realidad (Propuesta Inicial; cada grupo de trabajo, 60 minutos; entrega).

c) Reflexión conjunta del trabajo realizado (profesor, gran grupo, 15 minutos).

Sesión 2: Experimentación y evaluación de las tareas creadas (2 horas):

a) Experimentación de la Propuesta Inicial de cada grupo de trabajo: Cada grupo de trabajo propuso las tareas creadas, de la misma forma que se haría en un aula, a 3 grupos de trabajo que las resolvieron. A la vez, cada grupo resolvió las tareas creadas por otros 3 grupos (grupos de trabajo, 60 minutos).

b) Coevaluación de la Propuesta Inicial de cada grupo de trabajo por sus compañeros a partir de una rúbrica de valoración: Cada grupo de trabajo valoró, según los criterios establecidos para ello, las tareas en que había participado (cada grupo de trabajo, 20 minutos; entrega de la Coevaluación a cada grupo y al profesor).

c) Reflexión conjunta del trabajo realizado (profesor, gran grupo, 30 minutos).

d) Autoevaluación de cada grupo de su Propuesta Inicial y planteamiento de mejora (cada grupo de trabajo, 10 minutos; entrega de la Autoevaluación al profesor).

Sesión 3: Reflexión y revisión del propio trabajo (2 horas):

a) Elaboración de una Propuesta Final de tareas creadas a partir de la experimentación y valoración realizada (Propuesta Final; cada grupo de trabajo, 60 minutos; entrega).

b) Presentación pública de la Propuesta Final (50 minutos).

c) Reflexión final (10 minutos).

Los EpM conocían, desde principio de curso, los criterios e instrumentos de valoración de las tareas creadas (teniendo principalmente en cuenta sus objetivos y conexión con el curriculum, adecuación al nivel de enseñanza, aspectos metodológicos y evaluación), así como la estructura que debía seguir la Propuesta Inicial y la Propuesta Final de cada parte del proyecto.

Datos

Los EpM crearon 696 tareas en su Propuesta Final. Dichas tareas abordaron, principalmente, contenidos de Numeración (31%), Medida (27%) y Geometría (25%) y, en menor proporción, Álgebra (8%) y Organización de la información y probabilidad (10%).

Algunos ejemplos de tareas creadas a partir de un episodio (Figura 1) y de un cuento tradicional (Figura 2) fueron:

EPISODIO	TAREAS CREADAS
Dos niños están jugando en su casa y la madre les pone zumo en dos vasos, uno más estrecho y largo que el otro, pero ambos de la misma capacidad: Niño: Yo quiero el vaso más largo porque tiene más. Mamá: Tienen lo mismo los dos. Niño (junta los vasos para ver que el zumo de un vaso está más alto que el del otro): ¡No, no es verdad! Este es más largo y tiene más. Mamá (coge un vaso igual que el otro y lo echa para que el niño vea que hay la misma cantidad y le dice): ¿Ves como hay lo mismo? Niño: Ahora sí hay lo mismo, antes no.	1. En recipientes de diferentes tamaños pero con la misma capacidad, se vierte el agua de unos en otros para comprobar que realmente tienen la misma capacidad haciendo preguntas a los niños en cada paso. 2. Si dos niños beben agua de dos vasos iguales que estaban llenos y ahora uno tiene más agua que el otro, ¿quién ha bebido más agua? ¿Y si los vasos no fueran iguales? 3. Buscar ejemplos en que algo tenga que ser antes y algo tenga que ser después.

Figura 1. Tareas creadas a partir de un episodio

CUENTO	TAREAS CREADAS
	1. Dibuja los tres cerditos teniendo en cuenta su tamaño: Cerdito mayor, mediano y pequeño. Dibuja también el lobo. 2. Sopla con todas tus fuerzas a una pelota pequeña, una de ping-pong, y otra más grande. ¿Cuál se desplaza más? ¿Por qué? 3. Dibuja la casa de cada uno de los tres cerditos utilizando figuras geométricas. Dibuja también la casa en la que te gustaría vivir. 4. ¿Cómo podrías hacer para que el lobo y los tres cerditos hagan las paces?

Figura 2. Tareas creadas a partir del cuento “Los tres cerditos”

Análisis de datos

Las tareas creadas por los EpM se analizaron en tres sentidos:

a) Contexto (Wiest, 2001): *Puramente Matemático* (cuando únicamente tenía sentido en el aula), *Real* (cuando podría darse o imaginarse en el mundo real; incluía contexto *Fantástico* cuando simulaba un mundo imaginario).
b) Procesos cognitivos que activa su resolución (adaptado de TIMSS, 2015): *Conocer* (Co, entendida como la capacidad de definir, reconocer o comprender nociones básicas), *Aplicar* (Ap, entendida como la capacidad de clasificar, comparar, ordenar o representar) y *Razonar* (Ra, entendida como la capacidad de transformar, relacionar o resolver problemas).
c) Apertura de la respuesta (Yeo, 2017): *Cerrada*, con una única posibilidad correcta y *Abierta*, con varias posibilidades correctas.

Las tres tareas planteadas en la Figura 1, a partir de un episodio, las tres se consideraron de Contexto *Real*; la tarea 1 desarrolla capacidades de *Razonar* y *Cerrada*, la 2 de *Conocer* cuando los vasos son iguales y *Razonar* si son diferentes, en ambos casos *Cerrada*, y la 3 de *Aplicar* y *Abierta*. Las de la Figura 2 se consideraron de Contexto *Fantástico*. Un ejemplo de tarea con Contexto *Puramente Matemático* fue: "*En un papel continuo con diferentes figuras geométricas con tamaños grande y pequeño, y les pediremos pintar con los dedos de verde las grandes y de rojo las pequeñas".*

Fiabilidad

El análisis fue realizado por los autores de este trabajo de forma independiente y se obtuvo un acuerdo del 98% en Contextos, 90% en Procesos cognitivos, 97% en Apertura de la respuesta; coeficiente kappa de Cohen > 0,80). Los desacuerdos se resolvieron mediante consenso.

Resultados

En este trabajo, futuros docentes crearon tareas para el aprendizaje matemático en un contexto de trabajo colaborativo, donde se implementaron unas Propuestas Iniciales que fueron valoradas por los compañeros y por ellos mismos en procesos de coevaluación y autoevaluación, y donde se produjo un proceso reflexivo que conllevó la revisión del propio trabajo. Esta forma de desarrollar competencias profesionales produjo alta motivación en los EpM, que trabajaron activamente en la construcción de tareas que en cada parte del proyecto consideraron los contenidos globalizados. En sus reflexiones, los EpM valoraron positivamente las oportunidades de implementación y evaluación de sus Propuestas Iniciales al permitirles descubrir aspectos que podrían mejorar como, por ejemplo, la precisión en la redacción de la tarea, la mejora en el dinamismo de su aplicación o la elección de recursos que podrían ser más apropiados para su desarrollo. Además, los EpM apreciaron la importancia del contexto utilizado para la creación de tareas (por ejemplo, *"las situaciones cotidianas pueden convertirse en oportunidades de aprendizaje matemático, donde se trabajan aspectos variados de las matemáticas y no solo contar, sumar y restar"*, Grupo G3)

Las tareas creadas por EpM en el marco de un proyecto centrado en contextos cercanos a la realidad se vincularon fundamentalmente a Contexto *Real* (70%, del que el 13% fue *Fantástico* en las tareas creadas en la Parte 3, a partir de Cuentos) y, en menor proporción, a *Puramente Matemático* (30%). Desarrollaban capacidades principalmente de *Aplicar* (57%) y, en menor

medida, de *Conocer* (25%) y *Razonar* (18%). Fueron mayoritariamente de respuesta *Cerrada* (88%). Estos datos muestran la influencia del contexto en el que los futuros docentes crearon tareas.

El Contexto *Real* se utilizó en mayor porcentaje que el *Puramente Matemático* en todos los bloques de contenido, pero, en mayor medida, en las tareas relacionadas con Medida y Análisis de datos y probabilidad (más del 80%) y, en menor, en Numeración y Cálculo (58%). Por otro lado, la mayoría de tareas que desarrollaban capacidades de *Conocer* fueron de Geometría (53%) y, las de *Razonar*, de Numeración y Cálculo (30%), en lo que pudo haber tenido influencia la profundidad del conocimiento de los EpM de los respectivos bloques de contenido. Además, las de *Razonar* utilizaron igualmente Contextos *Puramente Matemático* y *Real*. Las tareas *Abiertas* fueron escasas en todos los bloques de contenido, pero los mayores porcentajes se alcanzaron en Geometría (18%) y Medida (17%). Esta diferencia en las características de las tareas relacionadas con los diversos bloques de contenido pudo deberse no sólo al dominio matemático de los EpM de cada uno de ellos sino también a su percepción del uso de los mismos en situaciones cotidianas.

La evolución de la creación de tareas por los EpM durante el desarrollo del proyecto atendiendo a los aspectos considerados permite observar que el porcentaje que utilizó un Contexto *Real* aumentó progresivamente en las cuatro partes del proyecto del 47% a 84%, por lo que se entiende que la formación en el uso de contextos reales para aprender matemáticas fue asimilada por la mayoría de EpM aunque más investigación sobre ello sería necesaria. Esta evolución no se produjo en el desarrollo de Procesos cognitivos ya que el porcentaje de tareas de *Conocer* se mantuvo en un 27%, pero el de *Razonar* se redujo de un 28% a un 11%, aspecto en el que podría haber influido la escasa formación recibida en ese sentido, algo que podría ser considerado en una futura investigación. Por otro lado, atendiendo a la Apertura en la respuesta, un aspecto que los EpM están poco acostumbrados a considerar, las tareas *Abiertas* aumentaron del 5% al 18%, lo que significa que ese aspecto solo se desarrolló en algunos grupos de EpM.

Esta evolución general en la creación de tareas durante el desarrollo del proyecto no fue homogénea en todos los grupos de trabajo. Referido a Contexto *Real*, de los 20 grupos, los que tuvieron un porcentaje superior al 75% ascendió de, inicialmente 3 a finalmente 16, mientras que los que utilizaron ese Contexto en menos del 25%, descendió de 5 a 0. Ello muestra una evolución interesante. En concreto, llama la atención la evolución de los grupos G6, G8 y G16 que, inicialmente, propusieron el 0% de tareas con Contexto *Real*, porcentaje que aumentó progresivamente en las cuatro partes del proyecto hasta llegar en la Parte 4 a, respectivamente, 100% (G6), 67% (G8) y 86% (G16). Por el contrario, el grupo G19, que inicialmente no propuso ninguna tarea en Contexto *Puramente Matemático*, lo hizo en las demás partes hasta llegar al 100% en Parte 2, 67% en Parte 3 y 21% en Parte 4. Ello refleja una evolución diferente de cada grupo que podría considerarse en futura investigación. En el caso de los Procesos cognitivos, no se apreció evolución en ningún sentido en las diversas partes del desarrollo del proyecto. Referido a la Apertura de la respuesta, no se percibió una evolución destacable ya que, en las dos primeras partes del proyecto, el máximo porcentaje de tareas *Abierta* fue inferior a 50% y un único grupo, en cada caso, superó el 25%; en la tercera parte, todas las tareas fueron de respuesta *Cerrada* y, en la cuarta, 5 grupos superaron el 25%, uno de los cuales superó el 50%.

Conclusiones

Este trabajo presenta una forma innovadora de enseñanza mediante el desarrollo de un trabajo por futuros docentes en grupos colaborativos, su implementación y evaluación por los compañeros y por ellos mismos, y la reflexión y revisión del propio trabajo a partir del proceso seguido. Dada la gran aceptación por los EpM de esta forma de trabajo, quizás podría ser utilizada con otros objetivos para la formación inicial o desarrollo profesional de docentes.

En el proyecto de creación de tareas para el aprendizaje matemático desarrollado, una tarea típica creada tuvo Contexto *Real*, desarrollaba capacidades de *Aplicar* y era de respuesta *Cerrada*, características que las distinguen de las de libros de texto donde solo un 10% eran de Contexto *Real* (Wijaya et al., 2015), la mayoría desarrollaba capacidades de *Conocer* (Guerrero et al., 2015; López y Contreras, 2015; Vicente et al., 2008; Vicente et al., 2013) y eran de respuesta *Cerrada*. Sin embargo, los resultados son similares a los de Chamoso y Cáceres (2018) en cuanto a la Apertura de la respuesta, aunque más ricas en cuanto a los Procesos cognitivos. Esto nos hace pensar que la forma de trabajo y el situarse en contextos próximos a la realidad puede enriquecer las tareas que los EpM crean teniendo en cuenta las que sugieren los libros de texto, quizás por la influencia de un contexto que puede ser más cercano a los estudiantes.

Se aprecia una evolución en el Contexto *Real* de propuesta de tareas creadas por los EpM, así como capacidad para proponer tareas *Abiertas*, si bien los grupos de trabajo se comportaron de forma heterogénea. Esta evolución no parece igual en los Procesos cognitivos que activan su resolución, aspecto que quizás debería ser considerado con más profundidad en la formación inicial de docentes.

Una limitación de este trabajo es que no considera el proceso formativo para la creación de tareas en la reconsideración y mejora de la Propuesta Inicial. Ello puede abrir futuras líneas de investigación para estudiar la influencia de ese aspecto de la creación de tareas en la Propuesta Final analizando, por ejemplo, las modificaciones que los EpM realizan en sus tareas creadas de su Propuesta Inicial a partir del proceso reflexivo desarrollado por la experimentación con iguales, la coevaluación y la autoevaluación.

Como perspectivas de futuro, se podría analizar el tratamiento de los contenidos en las tareas creadas por los EpM en los diversos contextos reales considerados a partir de, por ejemplo, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje propuestas por Clements y Sarama (2015). También se podrían analizar las resoluciones que los escolares hacen de las tareas creadas a partir de contextos reales, quizás a partir de los modelos de resolución de Blum y Leiss (2007) u OCDE (2012), y compararlas con resoluciones que se proponen habitualmente en el aula de matemáticas. Otra posibilidad sería comparar estos resultados con los obtenidos al analizar las tareas matemáticas creadas a partir de contextos reales por futuros docentes de matemáticas de otros niveles educativos atendiendo al Contexto utilizado, Procesos cognitivos y Apertura o Realismo de la respuesta. También se podrían analizar la revisión y mejora de las tareas creadas por futuros docentes a partir de contextos reales atendiendo, por ejemplo, a los Procesos cognitivos.

En otro sentido, vertebrar la influencia de la propuesta de formación de docentes de matemáticas a partir de la reflexión sobre la creación de tareas en contextos reales también puede ser analizado como futura investigación. Además, esta forma de trabajo podría repetirse teniendo como eje el proyecto de creación de tareas, pero considerando otras partes diferentes del mismo que también partiesen de contextos cercanos a la realidad.

Agradecimientos

RED8-Educación matemática y formación de profesores (EDU2016-81994-REDT), Proyecto 2017/00111/001 (463AC01, Universidad de Salamanca), Proyecto European Union. Erasmus (2017-1-ES01-KA203-038491), Proyecto Ministerio de Economía y Competividad España (PSI2015-66802-P)

Referencias

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines et al. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*. (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Cáceres, M.J., Chamoso, J.M. y Azcárate, P. (2010). Analysis of the revisions that pre-service teachers of Mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and Teacher Education, 26*(5), 1186-1195.

Cáceres, M.J., Chamoso, J.M. y Cárdenas, J.A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.*), Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 201- 210). Alicante: SEIEM.

Chamoso, J.M. y Cáceres, M.J. (2009). Analysis of the reflections of student-teachers of Mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education, 25*(1), 198-206.

Chamoso, J.M. y Cáceres, M.J. (2018). Propuesta de tareas matemáticas en contextos reales de estudiantes para maestro. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 17*, 83-94.

Christiansen, B. y Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, y M. Otte (Eds.), Perspectives on Mathematics Education (pp. 243-307). Dordrecht, Netherlands: D. Reidel.

Clements, D. y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC. (Obra original de 2009).

Guerrero, A.C., Carrillo, J. y Contreras, L.C. (2014). Problemas de sistemas de ecuaciones lineales en libros de texto de 3º ESO. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 395-404). Salamanca: SEIEM.

Hiebert, J. y Wearne, D. (1997). Instructional tasks, classroom discourse and student learning in second grade arithmetic. *American Educational Research Journal, 30*(2), 393-425.

Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualising and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Isik, C. y Kar, T. (2012). The Analysis of the Problems Posed by the Pre-Service Teachers About Equations. *Australian Journal of Teacher Education, 37*(9), 93-113.

López, M.E. y Contreras, L.C. (2014). Análisis de los problemas matemáticos de un libro de texto de 3º ESO en relación con los contenidos de geometría plana. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 425-434). Salamanca: SEIEM.

Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Tutxla Gutiérrez,

Chiapas, México. Mayo 2015.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la educación infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

Niss, M. (2001). Issues and Problems of Research on the Teaching and Learning of Applications and Modelling. En J. F. Matos, W. Blum, K. Houston & S. Carreira (eds.). *Modelling and Mathematics Education. International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, ICTMA 9: Applications in Science and Technology* (pp. 72-89). Chichester: Horwood Publishing.

MECD (2015). *Marco General de la evaluación de tercer curso de Educación Primaria*. Madrid: MECD. INEE.

OCDE (2012). *PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español.* Madrid: MECD. INEE.

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133-142.

TIMSS (2015). *Estudio internacional de tendencias en Matemáticas y Ciencias. IEA*. Madrid: MECD.

Vicente, S., Dooren, W. y Verschaffel, L. (2008). Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación, 20*(4), 391-406.

Vicente, S., Rosales, J., Chamoso, J.M. y Múñez, D. (2013). Análisis de la práctica educativa en clases de matemáticas españolas de Educación Primaria: una posible explicación para el nivel de competencia de los alumnos. *Cultura y Educación, 25*(4), 535-548.

Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 8*(16), 133-148. Disponible en http://goo.gl/mIeL6j

Wiest, L. (2001). The role of fantasy contexts in word problems. *Mathematics Education Research Journal, 13*(2), 74–90.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89*(1), 41-65.

Yeo, J. B. (2017). Development of a framework to characterise the openness of mathematical tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 175–191.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

GeoGebra como recurso para favorecer la interpretación matemática

Agustín **Carrillo** de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
España
agustincarrillo@telefonica.net

Resumen

Incorporar recursos como GeoGebra supone modificar determinados aspectos en el desarrollo de los contenidos sin olvidar los que los alumnos deben adquirir, aunque requiere algunos cambios en la forma de trabajo en el aula tanto para el profesorado como para el alumnado.

Una actividad habitual en el aula es el estudio y representación de funciones que comienza con la determinación de los apartados correspondientes a dominio, puntos de corte, asíntotas, extremos, crecimiento, etc., hasta llegar a completar los elementos necesarios que permitan su representación gráfica; mientras que con ayuda de programas como GeoGebra el proceso cambia, lo primero que se obtiene es la gráfica de la función, por lo que algo debemos modificar en el proceso de enseñanza para que los alumnos sean capaces de interpretar la gráfica para determinar qué deben estudiar.

Algo parecido ocurre con otros contenidos habituales en los distintos niveles educativos que expondremos en este trabajo.

Palabras clave: GeoGebra, TIC, interpretación.

Introducción

La realidad sobre el uso de las tecnologías en las aulas no es la que todos pensamos, se habla mucho de distintos programas y aplicaciones, pero la situación es otra, ya que tras muchos años aún no hay una implementación generalizada del uso de estos recursos para aprovechar las posibilidades que ofrecen.

El papel escrito que había tenido una gran importancia en la forma de difusión de la información está siendo sustituido por la pantalla del ordenador, del móvil, etc. Las personas ya

no son meros receptores de información, se han convertido también en emisores, al crear contenidos y sobre todo al difundirlos y compartirlos.

En la sociedad actual, el sistema educativo no puede seguir utilizando, exclusivamente, los métodos de enseñanza del pasado, sin considerar todos los estímulos e influencias que afectan directa e indirectamente al alumnado.

Los estudiantes de hoy son diferentes, quieren usar la tecnología de su tiempo y no les gusta, ni despierta interés, una educación que no se relaciona bien con el mundo real en el que viven. Necesitan nuevos objetivos y nuevas estrategias.

Se hace imprescindible el uso de las TIC en las escuelas desde distintos puntos de vista; tanto para manejar la información que se encuentra al alcance del alumnado, de modo que aprendan a desenvolverse en esta nueva sociedad del conocimiento como ciudadanos con un espíritu crítico, como para potenciar el aprendizaje en las distintas materias del currículo.

Llevamos años cambiando para lograr una escuela que refleje el mundo en el que vivimos, pero la realidad es ¿hemos incorporado nuevos recursos y cambiado la metodología de trabajo para lograrlo?

Cualquier cambio metodológico es lento y al profesorado le cuesta cambiar para adaptarse a los cambios y en este caso a lo que supone incorporar las TIC.

Somos conscientes de la importancia de la tecnología en la sociedad actual y también de la necesidad de su presencia en el aula, pero nos planteamos algunas cuestiones como qué utilizamos, para qué y cómo.

El uso de las tecnologías, si queremos, puede estar presente en todos los ejes y núcleos de contenidos, ya que permitirá mejores visualizaciones sobre las cuales elaborar conjeturas, prever propiedades, descartarlas o comprobarlas. Al utilizar estas herramientas, se desplaza la preocupación por la obtención de un resultado y la actividad se centra en la construcción de conceptos y en la búsqueda de nuevas formas de resolución.

GeoGebra como recurso TIC

Este software como es evidente no tiene exclusividad como recurso TIC aunque está claro que la comunidad que se ha creado a su alrededor está ayudando a producir cambios en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Todos conocemos sus principales características entre las que destaca ser software libre y estar disponible para distintos sistemas operativos, además de su continua evolución, sin perder la sencillez de las primeras versiones.

A todo esto hay que añadir los miles de recursos creados por otros usuarios que facilitan el aprendizaje y también su uso sin necesidad de excesivos conocimientos.

Quisiera destacar dos aspectos importantes que pueden ayudar a que GeoGebra se haga más presente en las aulas. Por un lado la amplia oferta de formación y de recursos, y por otro, el que las editoriales se estén interesando por este software incorporándolo a sus nuevos libros.

Utilizar programas como GeoGebra permitirá arrinconar los procesos mecánicos para promover una enseñanza basada en la comprensión de conceptos, para los que fomentar la interpretación de lo que se observa será fundamental.

La sociedad, en general, asigna a la matemática significados discutibles que la colocan en un lugar casi inalcanzable para el común de las personas. Estas concepciones, en gran parte, tienen su origen en los aprendizajes que se produjeron durante la escolaridad.

Por lo general la matemática escolar se caracteriza por una profusión de definiciones abstractas, procedimientos mecánicos, desarrollos unívocos y acabados, y demostraciones formales junto con un uso apresurado de la simbología.

La sociedad, en general, asigna a la matemática significados discutibles que la colocan en un lugar casi inalcanzable para el común de las personas. Estas concepciones, en gran parte, tienen su origen en los aprendizajes que se produjeron durante la escolaridad.

Por lo general la matemática escolar se caracteriza por una profusión de definiciones abstractas, procedimientos mecánicos, desarrollos unívocos y acabados, y demostraciones formales junto con un uso apresurado de la simbología.

El uso de las tecnologías y en concreto de software como GeoGebra promueve el trabajo autónomo de los alumnos y permiten el establecimiento, comprobación y validación de hipótesis por parte de los estudiantes, mediante el uso de las herramientas matemáticas adecuadas. Además, se podrán incorporar, con distintos grados de complejidad a la enseñanza de la Matemática, el desarrollo de preguntas, formulación y tratamiento de problemas, así como para la obtención, proceso y comunicación de la información generada.

La calculadora, y programas como GeoGebra son herramientas al alcance de los alumnos, por lo que su uso estará presente en todos los ejes y núcleos de contenidos, ya que permitirán mejores visualizaciones sobre las cuales elaborar conjeturas, prever propiedades, descartarlas o comprobarlas.

Al utilizar estos recursos, se desplaza la preocupación por la obtención de un resultado y la actividad se centra en la construcción de conceptos y en la búsqueda de nuevas formas de resolución.

A veces en el proceso de enseñanza se presta más atención a los métodos algorítmicos que al propio concepto o contenido que se está exponiendo o estudiando, lo que supone que un alumno conoce el proceso pero desconoce lo que acaba de hacer o para qué lo ha hecho.

Promover la interpretación matemática será el objetivo de los ejemplos que se describen a continuación.

La interpretación de conceptos en matemática

Un primer ejemplo, favorecido por la sencillez que ofrece GeoGebra, puede ser el conocer e interpretar el significado de los distintos coeficientes en una función cualquiera, desde ejemplos sencillos como la función lineal para comprender el significado de los a y b en su expresión $y = a\,x + b$, como de una función cuadrática expresada en la forma $y = a\,x^2 + b\,x + c$, o mejor como $y = a\,(x - b)^2 + c$, ampliable según el nivel de los alumnos con los que se trabaje a otras familias de funciones como $y = a\,sen(b\,x + c) + d$.

Promover otro tipo de interpretación en la que se pedirá a los alumnos que con lápiz y papel, estimen cuál será el resultado, se puedo lograr con ejemplos como los siguientes:

a. D es un punto de una circunferencia, ¿Qué rastro determina el segmento CD cuando C es interior, al mover el punto D? ¿Y cuando C es un punto exterior?
b. A partir de una circunferencia de centro A y radio 2, se dibuja una nueva circunferencia de centro C y radio 1, siendo un punto de la circunferencia inicial. ¿Cuál es el rastro de la segunda circunferencia al mover el punto C?
c. ¿Qué rastro determina la circunferencia de centro C y radio CD al mover D, siendo D un punto de otra circunferencia y C exterior a dicha circunferencia? ¿Qué ocurre cuando C es un punto interior a la circunferencia inicial? ¿Y cuando C está también sobre la misma circunferencia que el punto D?
d. Determina el rastro de la circunferencia de centro C y radio CD al mover C, siendo C y D puntos de otra circunferencia.

Intuir los rastros resultará una actividad interesante que posteriormente se podrá comprobar con GeoGebra a partir de construcciones sencillas, que requieren pocos pasos y por tanto, pocas herramientas.

Este será el éxito del uso de GeoGebra en el aula ya que si se utilizan construcciones que requieran poco tiempo, permitirán dedicar el resto del horario a conceptos y contenidos matemáticos y no al uso del programa.

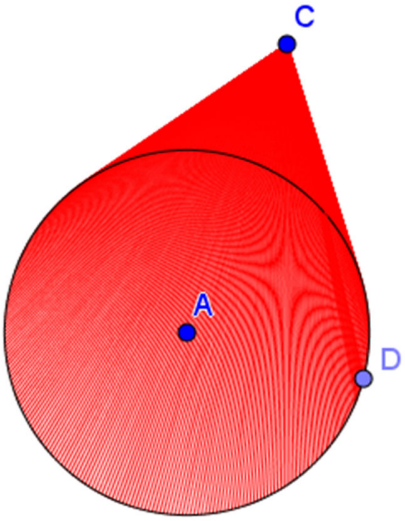


Figura 1. Lugar descrito en el ejemplo a.

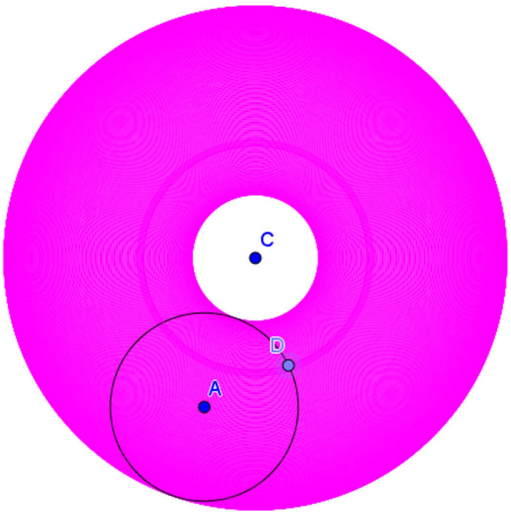


Figura 2. Lugar descrito en el ejemplo c.

Algo parecido ocurre al resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones a las que se dedica excesivo tiempo al mecanismo de la resolución algebraica sin hacer mención a qué representa la ecuación y sobre todo, cuál es el significado de la solución en caso de existir.

Por ejemplo, si se plantea la resolución de la ecuación $3x - 6 = 0$, el proceso seguido por el alumnado será:

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

La respuesta será que la ecuación tiene solución y su valor es 2.

Si aprovechamos las posibilidades que ofrece GeoGebra, se podrá representar la función correspondiente a la ecuación que se desea resolver, obteniendo la repr4esentación de la recta $y = 3x - 6$; a partir de la que se podrá trabajar el significado de "resolver la ecuación" y sobre todo determinar, sólo con mirar la gráfica si tiene o no solución, así como dónde estará la solución, tal y como aparece en la figura 3.

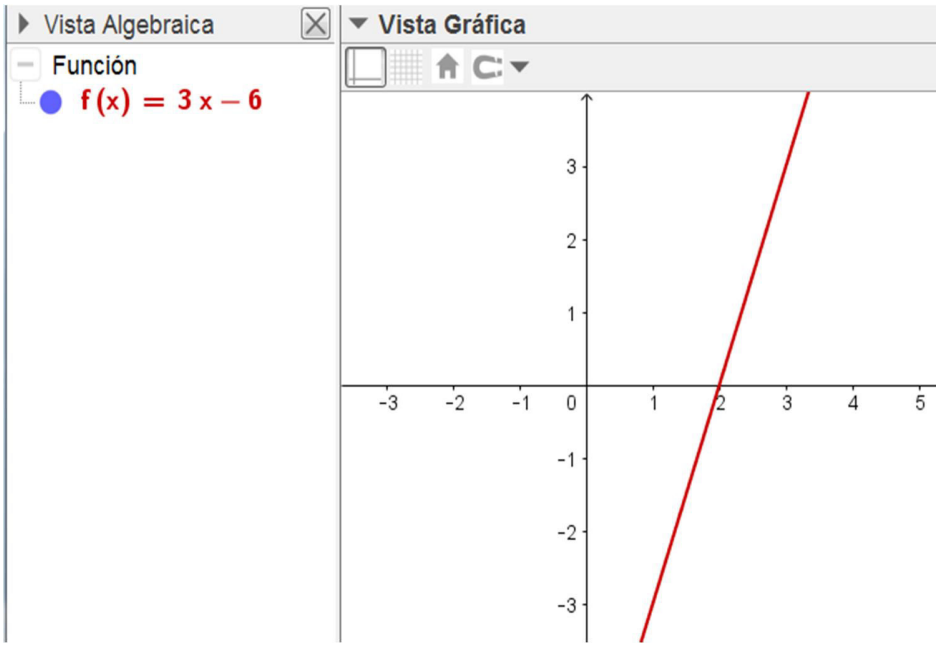


Figura 3. Resolución de una ecuación.

De manera similar se podrá relacionar la representación gráfica de dos rectas al resolver un sistema en la que el segundo miembro no sea 0, o la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con la representación en el plano de dos rectas para estudiar su posición relativa, algo que a menudo no se hace ya que se trata de contenidos correspondientes a bloques de contenidos diferenciados.

Polinomios, ecuaciones y funciones

Estos tres contenidos corresponden a bloques de contenidos distintos, por lo que es habitual hablar sólo de uno de ellos, sin relacionarlo con los otros dos, sin darnos cuenta que conceptos como raíz de un polinomio, solución de una ecuación o punto de corte de una función con el eje X, representan lo mismo.

Descomponemos en factores polinomios, resolvemos ecuaciones y representamos funciones y, en estas tareas en muchas ocasiones proponemos la misma expresión tanto para el polinomio, como para la ecuación como para la función y nos olvidamos de recurrir a la

representación para observar la gráfica obtenida a partir de la representación del polinomio, de la expresión de la ecuación o de la función, interpretando lo que aparece y por tanto, lo que debemos obtener.

Utilizar GeoGebra como recurso permitirá fomentar la interpretación matemática para lograr que un alumno al observar la gráfica de una función, reconozca todas sus propiedades y los elementos que debe calcular, tal y como ocurre en la figura 4 en la que al observar la imagen debe interpretar lo que observa.

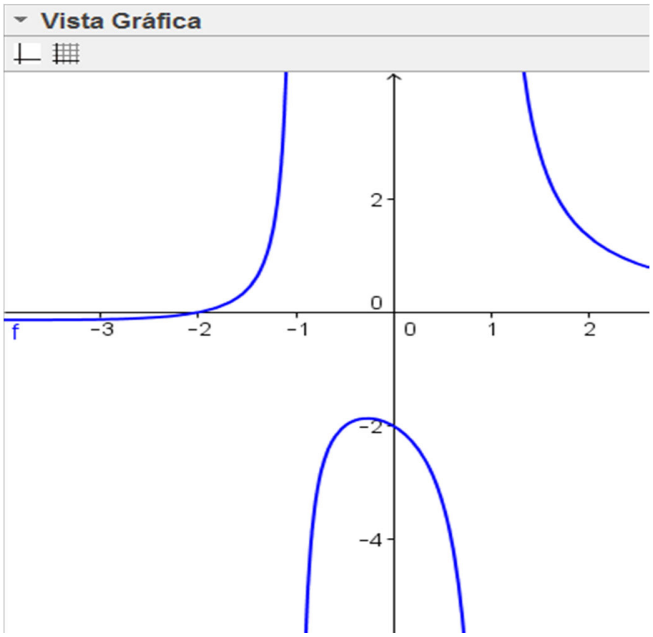


Figura 4. Gráfica de una función.

Esto significa que se debe producir un cambio con respecto a la metodología tradicional en la que el proceso para estudiar y representar una función comienza por determinar el dominio, recorrido, corte con los ejes, simetrías, crecimiento, asíntotas, etc., para finalizar con la representación gráfica a partir de todos los datos previamente obtenidos. Sin embargo al utilizar cualquier graficador de funciones, GeoGebra es un buen programa para esta tarea, lo primero que se obtiene es la representación de la función que se desea estudiar, por lo que al menos el proceso debe cambiar. Por este motivo una buena interpretación de la imagen obtenida será un primer paso para lograr determinar todas las propiedades y elementos de la función.

Determinar cuándo una función es continua o cuando es derivable a partir de la representación gráfica de la función será de gran ayuda para exponer estas características, así como para obtenerlas de manera analítica, si es el caso. Algo similar ocurre si se desea establecer si existen simetrías en una función o para estudiar si cumple o no un determinado teorema, también para determinar si una función tiene inversa o no, ya que basta comprobar si la función y su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Relacionado con el estudio de funciones está el cálculo de límites. El proceso normal para calcular un límite es aplicar los procedimientos conocidos para determinarlo en función del tipo de función o de la determinación que haya aparecido. Lo que nos es usual es representar previamente la función para interpretar si existe o no el límite que hay que obtener. La razón es

evidente, la representación requiere más tiempo que aplicar el proceso para determinar el valor del límite, lo que conlleva a repetir procesos mecánicos sin saber lo que se está haciendo y lo que se está obteniendo y sin comprobarlo de manera gráfica.

Al utilizar programas como GeoGebra en el que la representación de una función es inmediata, facilitará su análisis y por tanto, si previamente se han trabajado estos conceptos con los alumnos, serán capaces al ver la gráfica de poder decidir si existe o no el límite pedido. Es por tanto otro ejemplo más de la importancia que la interpretación de los conceptos matemáticos tiene frente a los procesos repetitivos y algorítmicos.

Por ejemplo, si se desea obtener el $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{x^3+x}$, se podrá representar la función $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^3+x}$ para observar que ocurre en el infinito, tal y como muestra la figura 5.

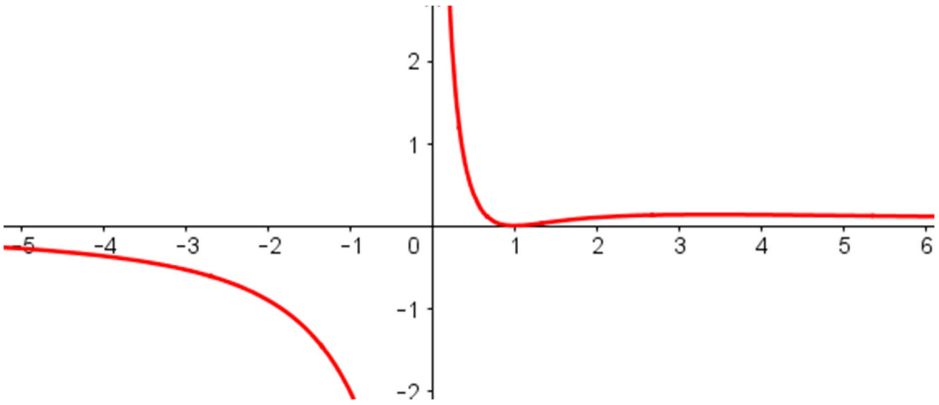


Figura 5.

No olvidemos que este programa permite incorporar imágenes de la realidad, por lo que se podrán analizar si existen curvas que se ajusten a determinados diseños o edificios, en los que a partir de la imagen insertada en GeoGebra se podrá buscar la familia de funciones que pueda modelizarla.

Por ejemplo, podemos intentarlo con ejemplos como los mostrados en las figuras 6 y 7.



Figura 6.



Figura 7.

Conclusión

A veces dedicamos excesivo tiempo a los procesos mecánicos y nos olvidamos de los conceptos, nos preocupa más obtener un resultado que saber lo que se está haciendo y sobre todo lo que representa el valor que se ha obtenido.

Interpretar una imagen de una función es tan importante o más que obtener sus característica ya que si el alumno desconoce a que corresponde cada valor, poco sentido tendrán los cálculos por muy bien que estén realizados.

En necesario cambiar los procesos utilizados en la enseñanza de las matemáticas, sobre todo cuando se utilizan nuevos recursos, no es posible seguir haciendo lo mismo.

Es necesario aprovechar las posibilidades que ofrecen las tecnologías para cambiar los métodos y modelos de enseñanza, afrontando los cambios que sean necesarios para que las matemáticas dejen de ser abstractas, aburridas, complicadas, ineficaces,…

Aunque la tecnología es importante en nuestra vida, también debe serlo en nuestro trabajo, sin olvidar que la tecnología no debe prevalecer sobre la enseñanza sino que tiene que servirnos para mejorarla.

Referencias y bibliografía

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. PNA, 1(4), 139-158.

NCTM. (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La fértil sencillez de las irracionalidades enteras y el uso de las prácticas argumentativas en el aula

Carlos Sánchez Fernández
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

Resumen

La sencillez es uno de los atributos que le dan realce a la argumentación matemática, pero a veces nuestra endeble cultura matemática no nos permite apreciar que un asunto matemático con apariencia sencilla esconde muchas alternativas no menos atractivas que el tema original. Nuestro interés es compartir experiencias con el recurso didáctico de la historia de la matemática empleado para estimular el desarrollo de prácticas argumentativas en el aula, tanto de enseñanza secundaria, como universitaria. Trataremos varios problemas aritméticos relacionados con las irracionalidades enteras aparentemente muy sencillos, pero con variadas alternativas que permiten desarrollar prácticas argumentativas a diferentes niveles de enseñanza.

Palabras clave: argumentación matemática, irracionalidades enteras, números metálicos, números de Pisot-Vijayaraghavan.

Acerca de la importancia de las prácticas argumentativas

Según la experiencia acumulada hasta el momento consideramos que deberíamos enfocar una atención prioritaria a lograr que los alumnos, con creciente independencia, aprendan a razonar lógicamente y se acostumbren a usar criterios científicos a la hora de tomar decisiones. Uno de los medios primordiales para desarrollar este pensamiento científico es la comprensión y realización de la argumentación matemática para explicar, convencer y no solo para justificar la veracidad de las proposiciones. La experiencia y las reflexiones de muchos especialistas en el tema de la argumentación y la prueba matemáticas (ver p. e. el *19th ICMI Study* editado por Hanna & Villiers, 2012) nos hace pensar que en la práctica docente el uso de la argumentación y la prueba matemáticas debe atemperarse tomando en consideración los contextos concretos.

En general, el nivel universitario suele incluir demostraciones, aunque a veces son demasiado formales y pierden atractivo para los jóvenes; el nivel primario frecuentemente -es una pena que no sea siempre- prepara para iniciar las prácticas argumentativas, aprovechando la natural curiosidad de los niños expresada en los insistentes *¿por qué?*, … pero en el nivel intermedio o secundario ¿qué ocurre? Pues que, con asiduidad, nos olvidamos del valor de la

argumentación científica y, por una u otra justificante, no se adiestra y a veces ni se incluye explícitamente en los programas, ni aparece en todos los textos oficiales.

Asumimos que todos conocemos la existencia de diferentes "categorías" en las prácticas argumentativas, que van desde una argumentación informal heurística a una prueba formal totalmente rigurosa, es decir, desde una simple explicación plausible hasta una justificación con toda la precisión lógica. En nuestra opinión, para encontrar diferentes argumentaciones dignas, y modos de presentar estas en un aula, además del conocimiento del grupo de alumnos, los contenidos y las prácticas matemáticas correspondientes, *nos deberíamos auxiliar de la historia de la matemática*. Y no solo la historia antigua, sino también la historia más reciente, incluidas las aplicaciones prácticas que casi siempre aparecen mucho después. Y esto debe hacerse siempre con adecuación a las circunstancias concretas, haciéndolas más accesibles y atractivas al estudiante en un nivel escolar dado. Nuestros argumentos sobre este asunto los hemos venido exponiendo en diferentes escenarios y los más recientes se pueden encontrar en Sánchez (2018) y en Sánchez & Valdés (2016), aquí solo haremos una breve síntesis de nuestras ideas.

¿Para qué recurrir a la historia de la matemática?[1]

Las diferentes pruebas existentes de un determinado teorema o proposición no se realizan en un vacío atemporal, por tanto, nosotros podemos recrear ese contexto histórico en el aula, hacer "una reconstrucción racional" en la complicidad maestro-alumnos, para simular que descubrimos la idea y su efecto, con el asombro y la emoción de la primera vez.

Pero, ¡atención! no se trata de reproducir los detalles históricos, hacer un cuento minucioso y seguir con la forma tradicional de la demostración deductiva; si lo hiciéramos de tal forma, en lugar de propiciar la inteligibilidad del asunto, complicamos la situación didáctica: hemos añadido un valor que significa algo más para aprehender. El maestro competente realiza a priori un análisis de los momentos principales del desarrollo histórico de las pruebas conocidas, realiza la *transposición didáctica* y determina lo que expondrá en el aula. De forma tal que *lo histórico, lo lógico y lo didáctico* del asunto de la clase quede integrado en una sinergia constructiva.

El conocimiento de las diversas pruebas que se han sucedido en la historia nos provee de una cultura matemática sobre el teorema o proposición correspondiente que sobrepasa con creces el simple conocimiento de una sola de las pruebas –sobre todo si la única conocida es la más concisa y más formal-. Por ejemplo, en el texto de J. W. Dawson (2015) podemos encontrar razones contundentes para recomendar el conocimiento de diferentes demostraciones de una misma proposición, por muy simple que parezca su enunciado.

Es necesario *atemperar y acondicionar* el discurso matemático en el salón de clase, de forma que las prácticas argumentativas sean atractivas y eficaces en cada nivel de enseñanza; para esto consideramos que el recurso de la historia es un ingrediente eficaz. En su origen y desarrollo los hechos matemáticos pasan por diferentes etapas, en la clase no tenemos que reproducir todas estas fases que tienen relación con la actividad investigativa, pero su conocimiento amplio y profundo, posibilita una clase más rica y atractiva. Eso es precisamente el principal objetivo del maestro: *facilitar la comprensión del hecho matemático*.

Ilustremos estas ideas a través del tratamiento del tema de los números irracionales que aparece en casi todos los currículos de enseñanza secundaria y es retomado posteriormente en el

[1] Un artículo muy lúcido y explicativo es Grabiner (2012) que hemos usado como sustento de nuestras reflexiones y puede aclarar mejor al interesado.

nivel universitario. Un tema que cuándo se le comprende bien transparenta simpleza e importancia, tanto en el plano didáctico, como en el plano lógico e histórico. La primera parte se piensa puede ser favorable para maestros del nivel secundario y el tratamiento de los números de Pisot-Vijayaraghavan sería una motivación a la introducción de temas muy fértiles asociados al álgebra conmutativa y al análisis armónico en un nivel universitario.

Las "inexpresables" raíces de los polinomios irreducibles con coeficientes enteros

¿Hay algo más sencillo que resolver ecuaciones como $x^n-p=0$, dónde p es un número entero? En el caso que el entero p es una potencia enésima de otro entero es sumamente fácil encontrar al menos una raíz. Pero, ¿si p no es una potencia enésima? Aparentemente sigue siendo simple, basta tomar las raíces enésimas del número p, lo que puede reducirse al conocimiento de las raíces enésimas de la unidad. Temprano en la enseñanza secundaria aprendemos que este problema casi nunca tiene una solución racional, es decir, no es un número expresable como cociente de dos números enteros. Más adelante comprendemos que este problema sencillo está relacionado con la misma esencia de unos "números inexpresables" que, con aparente desestimación, se acostumbra a llamarles "números irracionales" y "números complejos".

¿Cómo podemos trasmitir la importancia matemática de estos números inexpresables? ¿Cómo podemos mostrar su profundidad conceptual sin lastrar su sencillez originaria? ¿Qué debemos revelar en cada nivel educacional? Estas interrogantes y muchas otras se pueden responder mejor con el conocimiento de su historia y de sus diferentes pruebas.

En un principio número y magnitud estaban ineludiblemente ligados. Se suele decir que fue en la Grecia Clásica dónde se "descubrieron" los números inexpresables asociados a las magnitudes inconmensurables. Pero mucho antes, los babilonios "inventaron" métodos para enunciar con cierta precisión las *magnitudes inexpresables* con números enteros o fraccionarios.

Por ejemplo, los babilonios utilizaron la relación pitagórica en triángulos con hipotenusa irracional y sus aproximaciones a las raíces cuadradas usando sucesiones recurrentes con números fraccionarios que pueden considerarse pasos heurísticos hacia el descubrimiento que nunca hicieron. En una tablilla de arcilla, datada en un momento cercano al 1800 a.C., que se conserva en la Universidad de Yale aparece la aproximación en fracciones sexagesimales para la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de cateto unitario que con la notación actual es:

$$\sqrt{2}\ \approx 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3} \approx 1{,}41421296296$$

Muy cercana al valor aproximado que hoy conocemos en representación decimal

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237\,.$$

También en Egipto, la India y en China se han encontrado documentos antiquísimos que atestiguan el interés originario de dar un valor aproximado a esos "números inexpresables" de manera racional, aunque ¿no es *completamente racional* buscar una medida aproximada? En muchas culturas antiguas y medievales ese era un procedimiento natural y muy racional. Pero hoy nos aferramos a desarrollar el origen histórico de los números irracionales mencionando solo la idea del valor exacto inexpresable como cociente de enteros, enfoque que nos llega desde la Hélade Clásica. Por supuesto, esta idea no es descabellada y también podemos utilizarla aderezándola con el condimento histórico. Veamos.

Al parecer fue el pitagórico Teodoro de Cirene (siglo V a. C.), maestro de Platón, uno de los primeros en plantear una argumentación para el estudio de números inexpresables que será recogida en los Elementos de Euclides. En particular, con sus conocimientos de geometría demostró que *los lados de los cuadrados cuya área era un número primo era inconmensurable con el lado del cuadrado de área unidad*. Otro alumno de Teodoro, Teeteto de Atenas (s. IV a.C.) clasificó las irracionalidades. No consideraba lo mismo $\sqrt{17}$, que $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ o $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$. Esto tiene fácil comprensión si lo llevamos al campo del álgebra de los polinomios con coeficientes enteros: $\sqrt{17}$ es raíz de un polinomio irreducible de segundo grado, $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ es raíz de un polinomio de grado mínimo igual a cuatro, $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$ satisface un polinomio con coeficientes enteros de sexto grado como mínimo.

Platón en su diálogo "Teeteto" glorifica uno de los argumentos más socorridos para probar la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2:

> Demostración (en su esencia presentada por Platón). Si 2 fuese racional representable en la forma $\sqrt{2}$= m/n con mcd (m, n) = 1, se cumpliría $m^2=2n^2$, luego m sería par m=2k y de ahí se obtendría que $2k^2=n^2$ y n también sería par, contradiciendo la suposición de que m y n no tenían factores comunes.

Desde entonces acá han proliferado las pruebas de la irracionalidad de las raíces de números que no son potencia de números primos. En el caso de la raíz cuadrada de 2, por ejemplo, podemos clasificar los tipos de prueba en cinco clases:

1. Las que como la prueba de Teeteto suponen la representación irreducible como fracción y deducen que esta fracción irreducible es reducible, llegando a una contradicción;

2. Las pruebas basadas en el método de descenso infinito, es decir, suponen la expresión racional y prueban la existencia de otra menor, proceso que puede continuarse indefinidamente, lo cual es absurdo porque en todo conjunto de números enteros positivos hay un elemento mínimo;

3. Las pruebas visuales sobre la imposibilidad geométrica de encontrar dos cuadrados de lados enteros, tales que el área del mayor duplique el área del menor;

4. Pruebas con argumentos puramente aritméticos, por ejemplo, que si expresamos los números en un sistema de base 3, entonces los cuadrados terminan en 0 o en 1, por tanto, no pueden ser iguales al doble de un número cuadrado perfecto que terminaría en 2;

5. Pruebas que conjugan dos o más de estos procedimientos.

Nos parece conveniente que en el aula de secundaria se manejen varios tipos de argumentación. Por ejemplo, después de hacer referencia al origen del problema y relatar alguna de las anécdotas se puede plantear la prueba como la cuenta Platón, subrayar el basamento en la lógica bivalente para llegar a contradicción. Preguntar si será posible alguna otra prueba que no use el mismo argumento, dejar pensar y al rato, si no hay propuestas, introducir otro argumento, por ejemplo, hacer uso de que el numerador es mayor que el denominador, sea n=m+p para p > 0, elevar al cuadrado $m^2+2mp+p^2=n^2=2m^2$ e inferir que m>p. Consecuentemente, y razonando análogamente, para algún entero positivo a>0, m=p+a y n=2p+a, luego

$$(2p+a)^2=2(p+a)^2\rightarrow a^2=2p^2$$

y el proceso puede repetirse indefinidamente: n>m>a>p>… lo que es un absurdo pues todo conjunto de números naturales tiene un elemento mínimo. Seguidamente se puede buscar una interpretación geométrica de esta prueba: si existen dos cuadrados uno teniendo el doble de área que el otro, entonces siempre existe otro par de cuadrados más pequeños con la misma propiedad. En el capítulo 4 del clásico texto de Hardy & Wrigth (1938) se encuentran varias demostraciones y exquisitos comentarios históricos.

El problema enseguida se puede generalizar a la determinación de la no racionalidad de otras raíces cuadradas y cúbicas como $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{5}$ y otros números como $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ conocido como el número de oro. Se puede proceder de diversas formas, por analogía, por generalización, por adaptación y sustituyendo los argumentos que no sean aplicables. De tal forma, con naturalidad, se pasa a raíces de polinomios con coeficientes enteros.

Decimos que α es un *entero algebraico* si cumple $\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots b_1\alpha + b_0 = 0$, para ciertos b_i todos enteros. Obsérvese que en esta definición se exige que el polinomio sea *mónico*, es decir, el coeficiente principal, $b_n = 1$. Por supuesto, los números enteros son enteros algebraicos, pues son solución de la ecuación $x - n = 0$, y son los únicos números racionales que satisfacen una ecuación lineal con coeficientes enteros, por ello se llaman *racionales enteros,* los demás se suelen llamar *irracionales enteros,* denominación por cierto aparentemente contradictoria si nos mantenemos con la mentalidad de la aritmética clásica. Reafirmemos que un aporte significativo de la introducción histórica en el siglo XIX de estos nuevos tipos de números es precisamente el fomento de un cambio radical de la mentalidad dogmática aferrada a los clásicos campos numéricos, dónde se cumplen propiedades como la representación única en factores primos o la no existencia de divisores de cero, que en algunas de estas nuevas estructuras numéricas no se conservan.

Consideramos que el tratamiento de estos hechos históricos adaptándolos al contexto escolar tiene un valor didáctico incuestionable. El maestro interesado tiene mucha literatura a su disposición, en particular, recomendamos nuestra biografía de uno de los responsables en difundir las bondades de tales números Richard Dedekind (Sánchez & González, 2015, pp. 81-93).

Es sencillo probar que los enteros algebraicos o son racionales enteros o irracionales enteros, es decir, no pueden ser racionales fraccionarios como 2/3 o -7/5. Para argumentar esto, basta suponer $\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots b_1\alpha + b_0 = 0$ para $\propto = \frac{p}{q}$, sustituir en la ecuación y llegar a que el denominador *q* solo puede ser 1 y el numerador debe ser un entero divisor del término independiente b_0. A este resultado tan sencillo se suele llamar *Teorema de la raíz racional* o se asocia al *Lema de Gauss* para la factorización de polinomios, aunque muchos otros matemáticos lo usaron anteriormente sin formalizar su idea.

Los enteros algebraicos cumplen propiedades interesantes, como es que son estables por adición y multiplicación, por tanto, toda potencia entera de tales números es también un entero algebraico . Existen muchos ejemplos atractivos y simples de irracionalidades enteras que pueden estudiarse en el aula de secundaria, no solo raíces elementales de números libres de potencias. Por ejemplo todos los *números metálicos* definidos como raíz positiva de la ecuación $x^2 - Nx - 1 = 0$, donde *N* es un entero no negativo y son determinados por la fórmula:

$\delta_N = \frac{N+\sqrt{N^2+4}}{2}$. Para *N*=1 obtenemos el número de oro $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$. Cuando *N*=2, $\delta_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2{,}4142135624$ *número de plata*. Para *N*=3, $\delta_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3{,}3027756377$ es conocido como *número de bronce*. Todos los números metálicos se pueden aproximar por cocientes racionales formados por términos consecutivos de sucesiones de Fibonacci. Así, por ejemplo, si F(1)=F(2) y F(n+1)=F(n)+F(n-1), se prueba que $\lim_n \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ y generalizando se toma la sucesión recurrente G(n) definida por: G(n+1)=kG(n)+G(n-1) para n>1, G(1)=G(2)=1, que para cada k>1, genera a uno de los miembros de la familia de números metálicos como límite del cociente $\frac{G(n+1)}{G(n)}$.

La ecuación cúbica semejante $x^3 - x - 1 = 0$ define un irracional entero conocido como número plástico *pl* y cuyo valor puede expresarse por la fórmula encontrada en el siglo XVI para la solución de la ecuación cúbica:

$$pl = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1{,}324718...$$

El concepto de número plástico fue descrito primeramente por el monje benedictino holandés Hans van der Laan en 1928 cuando era un novicio aficionado a la arquitectura. Con esta *proporción plástica* diseñó la abadía de San Benito en Holanda. Posteriormente el número plástico fue estudiado con mayor profundidad por el arquitecto inglés Richard Padovan (n. 1935), quién definió una sucesión de número enteros cuyos cocientes aproximan al número plástico. La sucesión de Padovan se define de forma análoga a la sucesión de Fibonacci por medio de una relación de recurrencia A(n+1)=A(n−1)+A(n−2), para n>2 y A(1) = A(2) = A(3)= 1. Entonces el cociente $\frac{A(n+1)}{A(n)} \to pl \approx 1{,}3247$. Por supuesto, mientras mayor sea n, la aproximación del entero irracional por fracciones racionales es más precisa.

En la literatura especializada se pueden encontrar familias de números irracionales enteros con una fértil y atractiva historia. Por ejemplo, familias de números plásticos (Spinadel & Buitrago, 2009) con múltiples usos en diseño, arquitectura y en el estudio de cuasi cristales. Una de las clases de enteros irracionales que más nos sorprende por sus múltiples aplicaciones a dominios de la ciencia tan disímiles, es la clase más amplia consistente de los números de Pisot-Vijayaraghavan (Bertin et al. 1992).

Hace precisamente un siglo, en 1919, el matemático inglés G. H. Hardy encontró que la clase de los posteriormente denominados *números de Pisot* era efectiva para la solución de problemas de aproximaciones numéricas. Posteriormente el indio Tirukkannapuram Vijayaraghavan alumno de Hardy extendió estos resultados. Aproximadamente, por la misma época el joven francés Charles Pisot en su tesis de doctorado (1938) hizo un estudio muy amplio de tales números encontrándoles aplicación en el análisis armónico. Desde entonces en la literatura occidental se les llama *números de Pisot* y pocas veces números de Pisot-Vijarayaraghavan, por simplificación histórica y retórica. Esta clase sorprendente de números irracionales enteros, gracias a los adelantos tecnológicos de las ciencias de la computación, se ha convertido en un modelo ideal para interpretar las características de la estructura ordenada, pero

aperiódica de los cuasi cristales, rompiendo un paradigma clásico de la cristalografía (El lector curioso puede encontrar agradable la historia matemática de los cuasi cristales como es narrada por el brillante matemático ruso Vladimir Igorevich Arnold y que aparece traducida al inglés en Arnold, 1990).

Comentemos algunas características de los números de Pisot que no hemos encontrado en ningún texto de enseñanza secundaria o universitaria, nos parecen muy atractivas y además sabemos son muy útiles para comprender mejor ciertos conceptos de álgebra abstracta, aunque sus mayores aplicaciones actualmente tienen que ver con asuntos ligados a la cristalografía. Ante todo, definamos qué entendemos por *números de Pisot*: son los enteros algebraicos p>1 cuyo polinomio mínimo irreducible, no tiene otra raíz (real o compleja) que sea de módulo mayor o igual a 1, es decir, si llamamos *conjugados de p* a todas las otras raíces de su polinomio mínimo, entonces p es un número de Pisot si sus conjugados son todos de módulo estrictamente menor que la unidad. Por ejemplo, si *p* es un irracional cuadrático tiene un único conjugado irracional entero p' y el par de raíces reales puede ser de solo dos formas:

Caso 1. (p=a+√D, p'=a-√D) o Caso 2. ($p=\frac{a+\sqrt{D}}{2}$, $p'=\frac{a-\sqrt{D}}{2}$).

Ejemplos de irracionales enteros *p* son el número de oro $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y el número de bronce $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ en el segundo caso, mientras que el número de plata 1+√2 y el número de cobre 2+√5 son ejemplos del primer caso. El número plástico *pl* es un ejemplo de irracional cúbico y sus dos conjugados algebraicos son los respectivos complejos conjugados uno del otro como ocurre con todas las raíces complejas de polinomios con coeficientes reales. Se conoce que *pl* es el mínimo número de Pisot-Vijayaraghavan.

Es fácil argumentar la propiedad de aproximación de enteros mediante las potencias enteras de un número de Pisot p^n que son también números de Pisot. Como todos sus conjugados tienen módulo menor que la unidad al elevarlos a la potencia n-ésima se hacen cada vez más y más pequeños. Además, la suma de todas las potencias de las raíces del polinomio mínimo asociado es un entero, por tanto, se acercan a un determinado número entero y con velocidad exponencial.

Los estudiantes secundarios pueden muy bien apreciar el atractivo computacional de esta propiedad y en particular pueden comprobarla tomando las potencias de los números metálicos o plásticos. Podemos observar mejor esta propiedad al hacer una tabla:

Tabla 1
Parte fraccionaria de algunas potencias del número de oro

	Valor de $\{\phi^n\}$
10	0,991 869 …
11	0.005 025…
20	0,999 953…
21	0,003 614…
30	0,999 999…

31	0,000 000…

Se observa en la Tabla 1 que la parte fraccionaria de las potencias impares tiende a cero y que la parte fraccionaria de las potencias pares tiende a uno, por tanto, se subraya que estas potencias se aproximan cada vez más y mejor a números enteros. Algo similar ocurre con todos los números irracionales enteros de P-V como se puede argumentar refiriéndose a las *identidades de Newton* (que fueron usadas 40 años antes que Newton por el francés Albert Girard).

Una vez que los irracionales enteros se convirtieron en una herramienta fundamental y se le encontraron disímiles aplicaciones, la comunidad matemática se interesó por su estudio sistemático, sobre todo usando técnicas computacionales (un texto atractivo y actualizado sobre el uso de herramientas computacionales es el de Borwein, 2002, cuyo capítulo 3 se dedica a los números de Pisot) ¿Pero qué les sucede a muchos maestros de nivel secundario que los discriminan y prefieren etiquetarlos como "dificiles", solo porque son *irracionales*? ¿Por qué los profesores de Álgebra Superior en sus cursos sobre polinomios no introducen los polinomios de Pisot asociados a los irracionales enteros de Pisot? Sin embargo, ¿no creen ustedes que cuándo se conoce bien su origen y desarrollo lógico-histórico, así como algunas de sus aplicaciones más recientes, nos damos cuenta que su fertilidad nos puede ayudar en la elevación de la cultura matemática de nuestros alumnos y además darles una *formación matemática útil*?

Referencias y bibliografía

Arnold, V.I. (1990) *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from evolvents to quasicrystals*, Eric J. F. Primrose translator, Birkhäuser Verlag.

Bertin, M. J. et al. (1992) *Pisot and Salem Numbers*. Basel. Springer Verlag.

Borwein, P. (2002). *Computational Excursions in Analysis and Number Theory*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag. Cap. 3.

Dawson, J. W. (2015). *Why Prove It Again? Alternative Proofs in Mathematical Practice*. Dordrecht: Birkhauser.

Grabiner, J. V. (2012) Why proof? A Historian's Perspective. En Hanna & Villiers. *Proof and Proving in Mathematics Education*. (pp. 147-167). Dordrecht: Springer.

Hanna, G. & Villiers, M. de (Eds.) (2012) *Proof and Proving in Mathematics Education*. *The 19th ICMI Study*. Dordrecht: Springer.

Hardy, G. H. & Wright, E. M. (1938) *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press. En su 70 aniversario apareció una 6ta. ed. complementada por Andrew Wiles et al.

Sánchez Fernández, C. (2018) ¿Probar o argumentar? ¿Vencer o convencer? Reflexiones sobre las prácticas docentes. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, año 13, n°17, 17-34.

Sánchez Fernández, C. & González Ricardo, L. G. (2015) *Dedekind. El arquitecto de los números*. Madrid. Ed. Nivola.

Sánchez Fernández, C. & Valdés Castro, C. (2016). Problematización histórica de temas matemáticos fértiles. UNIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n° 46, 09-32.

Spinadel, V. W. de & Buitrago, A. R. (2009) Towards van der Laan's Plastic Number in the Plane. *Journal for Geometry and Graphics*. Vol. 13, N2, 163-175.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Undergraduate teaching and learning of mathematics with open source textbooks: Uso de textos universitarios de matemáticas

Vilma **Mesa**
School of Education, University of Michigan
Ann Arbor, Michigan, USA
vmesa@umich.edu

Resumen

In the Undergraduate Teaching and Learning in Mathematics with Open Software and Textbooks project we study the use of open source computational resources in the teaching and learning of mathematics at undergraduate level (Beezer et al., 2018). The project gathers (a) real-time, individualized viewing data from three dynamic undergraduate textbooks for calculus, linear algebra, and abstract algebra; (b) ongoing surveys of users' descriptions of the textbook use; (c) users' questionnaires (beliefs and attitudes towards mathematics, technology, teaching, and learning); and (d) student performance (tests of knowledge and grades). The textbooks have been enhanced with WeBWorK, Geogebra, and interactive Reading Questions for which instructors can see the responses in real time, and computational cells. In this article I highlight features of the textbooks and the theoretical and methodological approaches to answer two questions: How do students and instructors use textbooks? and How can we develop textbooks that will improve teaching and learning?

Palabras clave: open-source textbooks, textbook use, data analytics, calculus, linear algebra, abstract algebra

Within the array of resources for teaching and learning, the textbook continues to be the most prevalent one for instructors and students. Textbook formats have been changing from paper to digital, open source formats, including sophisticated tools such as computing cells, annotation tools, and powerful search engines, easing access at relatively low cost. Importantly, open source textbooks never expire or go out of print and can be distributed at no cost to students, making them practically fully accessible. The study we report here is part of a large U.S. funded project that seeks to describe how instructors and students use two open-source, technologically enhanced textbooks: Active Calculus (Boelkins, 2018), Linear Algebra (Beezer, 2017), and Abstract Algebra (Judson, 2017). These textbooks have been created in a markup language called PreTexT that allows for the textbooks to be viewed in any device and in any platform.

We use Rezat and Strässer's (2012) didactical tetrahedron to investigate how resources support instruction (Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003), which is depicted in the base of the tetrahedron Figure 1)

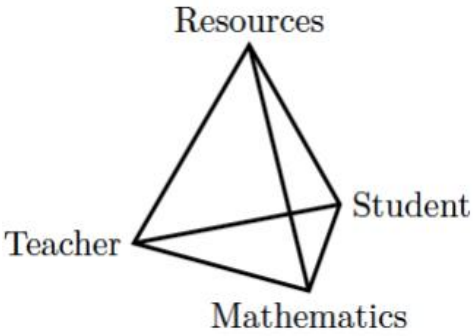


Figure 1. Resources can mediate instruction; the didactical tetrahedron (Rezat & Strässer, 2012, p. 241)

We follow Gueudet and Trouche (2009) in their definition of documents: the combination of a set of resources plus the schemes of utilization. Resources are defined as the collection instruments gathered for a particular purpose (e.g., textbook, past lecture notes, syllabi). Schemes of utilization include the processes that users engage in as they use the resources. These schemes have three distinct components, a material component (how the physical textbook or software is manipulated), a mathematical component (e.g., how the mathematical definitions are changed from canonical definitions), and the didactical component (e.g., how specific features are used). We seek to describe two documentation processes, *instrumentation*, that considers the influences on the user of the set of available resources, and *instrumentalization*, how the users change the resources as they use them (see *Figure 2*).

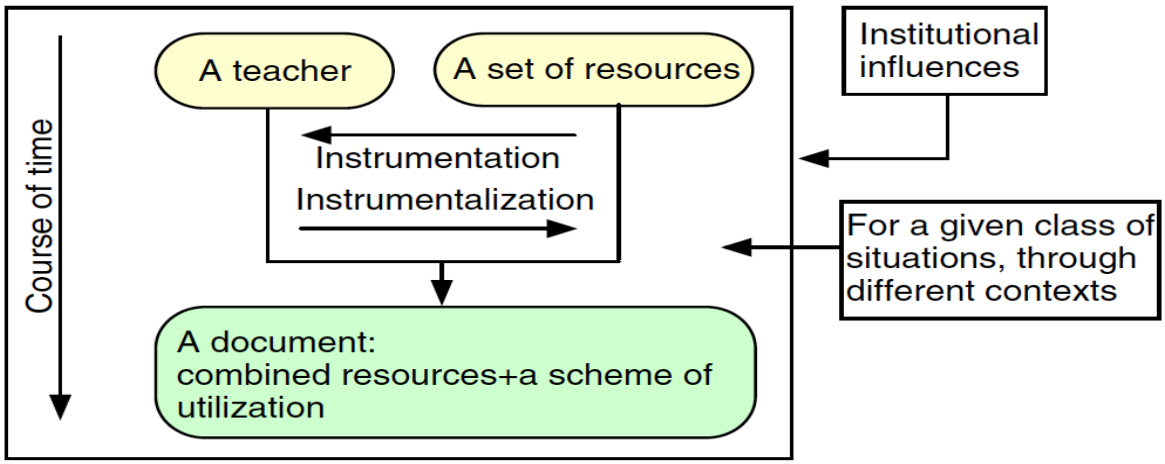


Figure 2: The documentational approach (Gueudet and Trouche 2009).

We do these by attending to two areas of instructors' work, lesson planning and its enactment seeking to identify operational invariants, instructors' beliefs that shape the design and use of resources (e.g., beliefs about ways with which students better understand definitions).

Methods

We use a mixed method design to gather use data from students and instructors as they engage with the textbooks (see Figure *3*).

	Beginning of term	Week in the term						End of term
		2	4	6	8	10	12	14
Teacher surveys	X							
Teacher logs		X	X	X	X	X	X	
Course syllabi	X							
Computer-generated data of teacher and student textbook viewing								
Student logs		X	X	X	X	X	X	
Student survey					X			
Student tests	X							X

Figure 3. Data collection over a full term.

Instructors and students fill out surveys at different points in time to describe their beliefs and attitudes towards mathematics and technology. We collect tests of students' knowledge at the beginning and at the end of the semester to gather information about their knowledge growth. In addition we collect student and instructor logs (online surveys with four to seven questions about the use of the textbook during the past two weeks). In addition we collect computer generated viewing data (See *Figure 4*) which can be navigated at the user level (see *Figure 5*), time spent and number of clicks done on each textbook section and element (see *Figure 6*).

To analyze the data we use ongoing natural language processing (Blei, Ng, & Jordan, 2003) to gather themes from all the student responses to logs. Instructors' responses are analyzed manually, to identify the schemes of use of their textbooks. We aggregate across semesters to identify recurring themes and triangulate the log and viewing data with the time data to corroborate themes and patterns of viewing.

Results

I report briefly on findings from (1) the analysis of bi-weekly log data from 102 students from four instructors in four different states who were using a dynamic linear algebra textbook (Beezer, 2017) in the Spring semester of 2018. The textbook includes common linear algebra chapters (e.g., systems of linear equations, matrices, vector spaces, etc.) and (2) the various documents that instructors and students created as they used the textbooks.

Analysis of bi-weekly log data

The analysis of the viewing data revealed, unsurprisingly, that viewing tended to occur during the days when the classes were offered (mostly during class sessions), close to exams days, or when homework was due. The students mainly used solutions of exercises—in 17,405 viewings, 81% of the viewing time was for solutions of exercises, 15% for examples, and 5% for all the other elements. In the log responses students reported that they checked the textbook the day before class or the last day of their break; they also used it to study for the upcoming class, or when they were stuck, missed class, or had not understood their instructor's explanation. Students reported using mainly problems, exercises, and examples as they were preparing for class. When asked about their use of theorems, definitions, and examples, students said those

were mainly used when producing notes for later use because they wanted to make sure they were connecting ideas and knew the basic definitions.

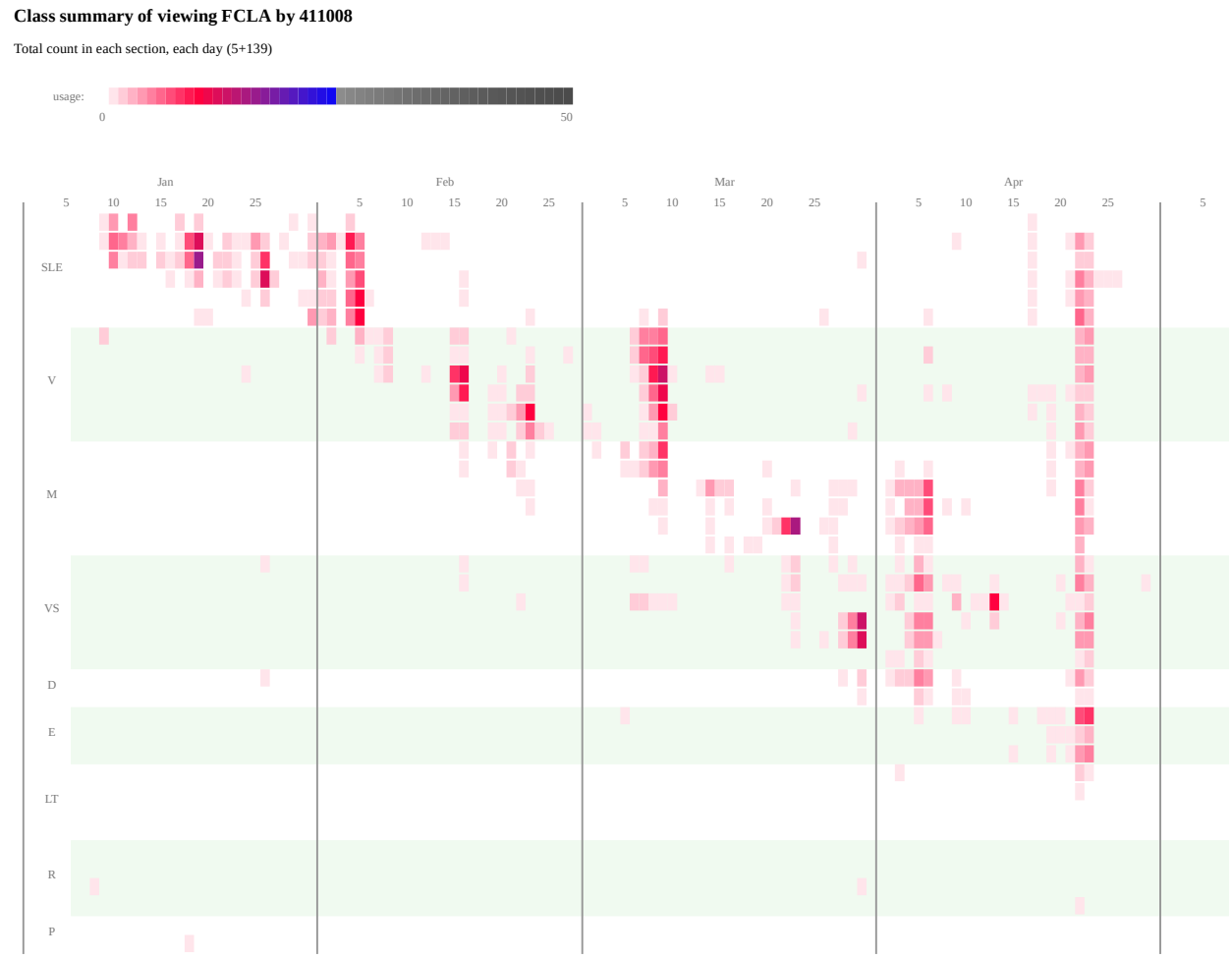


Figure 4. Viewing data for a course using the linear algebra textbook.

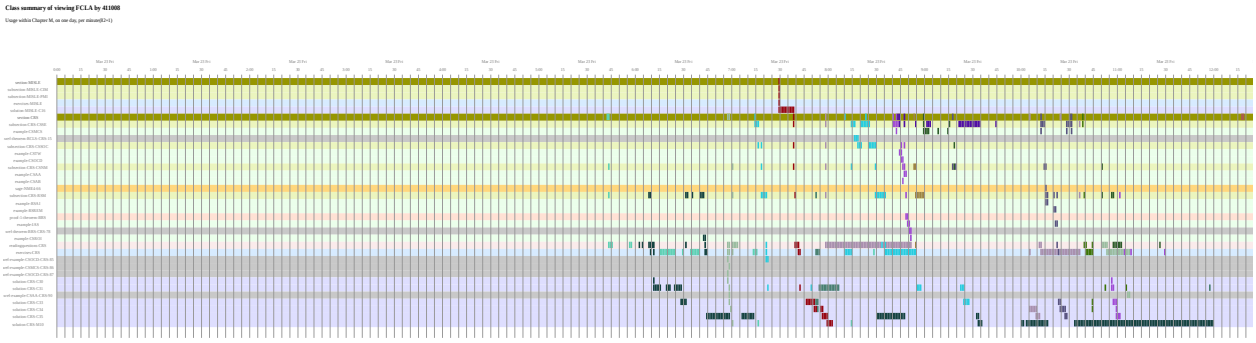


Figure 5. Viewing data at the individual level for a course using the linear algebra textbook.

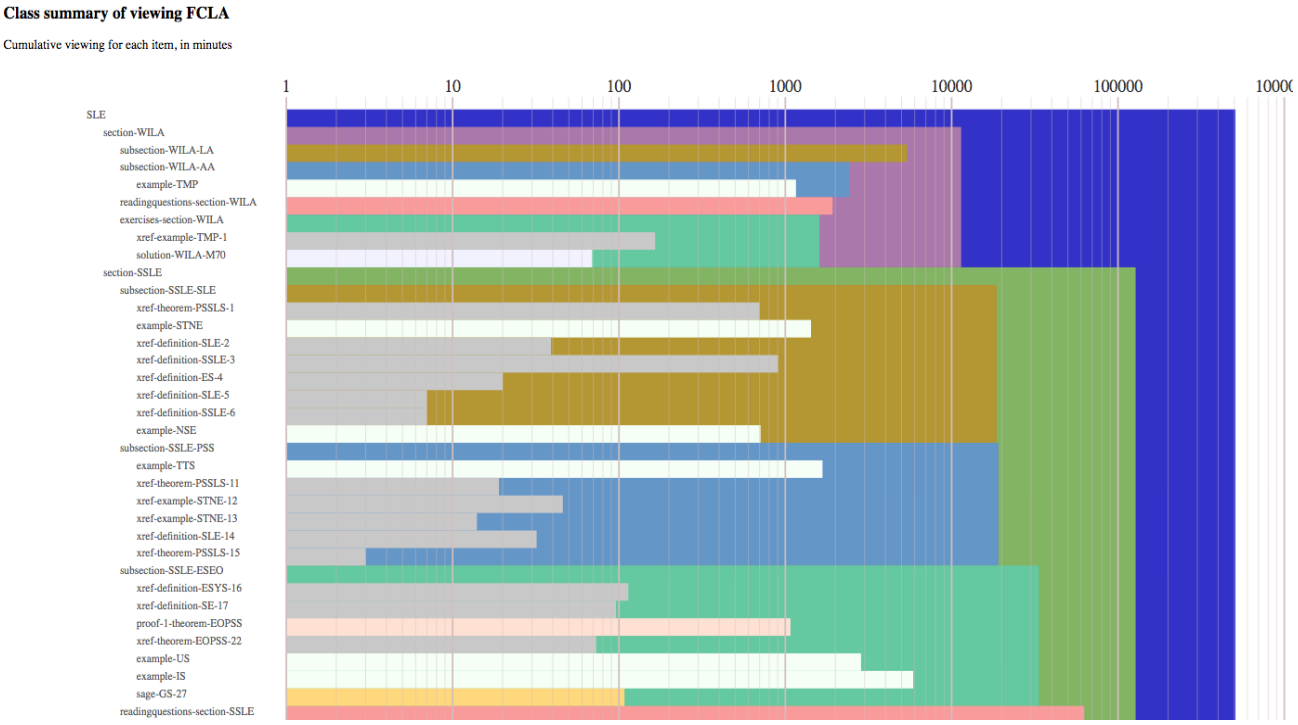


Figure 6. Data collection over a full term.

We found six themes in the analysis of student responses to their viewing of the linear algebra textbook (n = 120). The students indicated:

- Theme 1: viewing the textbook to study the material (58%); in addition, they mentioned some ways in which they do so. Students said that they:
- Theme 2: Start viewing examples (skipping text); then attempt the examples; and if need be, view the text to clarify ideas (17%).
- Theme 3: Start viewing homework; if the solution is wrong, read solution in detail to understand what problems they had (10%)
- Theme 4: Viewing to read word for word (8%)
- Theme 5: Viewing to cross-reference with class work (5%)
- Theme 6: Viewing formulas and definitions and keep track on personal document (3%)

Here are some illustrative examples:

- "I normally spend a couple of hours studying the book, I don't have a set schedule or timetable for my studying. I also use my textbook to review and touch up on things I haven't looked at in a while." (Theme 1)
- "Feb 19 Mon, Chapter M 6-9 PM: I was looking over example problems to help me prepare for my quiz, and I looked at definitions and theorems to help explain notation and solutions." (Theme 2)

Analysis of documents

Instructors created lecture notes, syllabi, personal notes, and assessments, all with the goal of facilitating their teaching of the course. Students created class notes, homework documents or solutions, and textbook notes in order to improve their understanding, for practice, and reminders or memorization. Both students and instructors used many other resources. In terms of the instructors, they relied on colleagues, past notes, notes from when they were students, other textbooks, Wolfram alpha and other mathematical programs such as Sage, Maple or Mathematica, the textbook authors, and programming software, such as Python. Students mentioning working with classmates, the Internet, Google, YouTube, Chegg, Khan Academy, class lecture videos, other printed and HTML textbooks, family members, and their instructors. Students did not use the open-source feature and infrequently used computational cells.

Figure 7 summarizes the instrumentation and instrumentalization processes for the document lecture notes that we have found. They range from the less to more dynamic uses; the figure also highlights how instructors made use of their textbook.

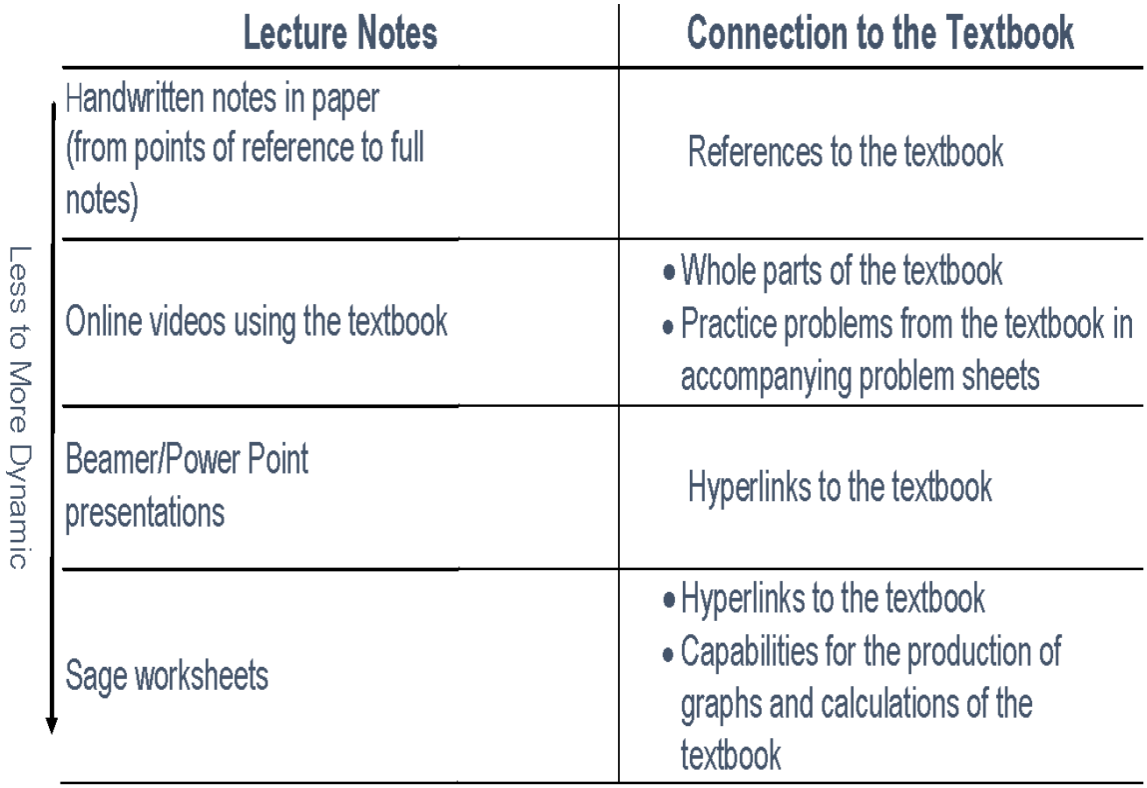


Figure 7. Variation in use of the document *Lecture notes*, from less to more dynamic, and connections to the textbooks.

During classroom, some instructors copied their notes on the blackboard, whereas some distribute them ahead of time to the students, either as PowerPoints that they could annotate by printing them, or as Sage worksheets that students could manipulate in real time. The rules of actions and the reasons students and instructors had to use various documents are given in Figure 8.

	Rules of Action	When/Why
Students	"Read"	Study for examinations/class (study notes)
	Look for definitions	Clarify meaning to work out homework (homework solution)
	Study examples/proofs	Work out the homework (homework solution)
Instructor	Identify major course topics	Create syllabus before the term starts
	Identify theorems and definitions	Create lecture notes to be consistent
	Identify examples	Clarify definitions/theorems in class (lecture notes) Visualize definitions (lecture notes)

Figure 8. Rules of action and reasons for using documents by students and instructors.

Discussion

In general, the students and instructors seemed reluctant to take full advantage of novel features (such as the programming cells) or the reading questions. We speculated that by itself, the design of the textbooks is insufficient for facilitating the adoption of different ways of using these textbooks in teaching and learning. We noticed that students did not use features that were not required by their instructors and that they used those that their instructors said were important to use (e.g., definitions, theorems, examples, proofs).

Instructors might need training about ways to take advantage of the open nature of the textbooks. Some instructors, for example, only associated open source with the free access of the textbooks. We are planning gatherings and conversations with designers, authors, and instructors, so that the process of creating the textbooks becomes more transparent. Textbook production is expensive, and thus, research that documents how open access textbooks can be made widely available is important. Yet, without knowing how to best take advantage of the new technologies, we might not realize their potential within mathematics classrooms.

Acknowledgment

Funding for this work has been provided by the National Science Foundation (IUSE 1624634). Any opinions, findings, and conclusions or recommendations expressed in this material are those of the author(s) and do not necessarily reflect the views of the National Science Foundation. Thanks to David Farmer and the American Institute of Mathematics for their research support.

References

Beezer, R. (2017). *First course in linear algebra*. Gig Harbour, WA: Congruent Press. Available at http://linear.pugetsound.edu. HTML available at http://linear.ups.edu/html/fcla.html.

Beezer, R., Judson, T., Farmer, D., Morrison, K., Mesa, V., & Lynds, S. (2018). Undergraduate Teaching and learning in Mathematics with Open Software and Textbooks (UTMOST): National Science Foundation (DUE 1821706,1821329,1821114,1821509).

Blei, D. M., Ng, A. Y., & Jordan, M. I. (2003). Latent Dirichlet allocation. *Journal of machine Learning research, 3*(Jan), 993-1022.

Boelkins, M. (2018). *Active Calculus*. Available at https://activecalculus.org/single/: CreateSpace Independent Publishing Platform.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 25*, 119-142.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*, 199-218.

Judson, T. (2017). *Abstract algebra: Theory and applications*. Available at http://abstract.pugetsound.edu. HTML available at http://abstract.ups.edu/aata/. Orthogonal Publishing L3C.

Rezat, S., & Strässer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM Mathematics Education, 44*, 641-651. doi:10.1007/s11858-012-0448-4

Weinberg, A., Wiesner, E., Benesh, B., & Boester, T. (2012). Undergraduate students' self-reported use of mathematics textbooks. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 22*(2), 152-175. doi:10.1080/10511970.2010.509336

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

The Big Ideas in the statistics education of our students: Which ones are the biggest?

J. Michael **Shaughnessy**
Portland State University
United States of America
mikesh@pdx.edu

Summary

Five decades of research and curriculum development on the teaching and learning of statistics have produced many recommendations from both researchers and national organizations for the statistical education of our students as well as how statistics should be taught. Within the last ten years work by both statisticians and statistics educators has been focusing more on a collection of big ideas that are the most important concepts and processes to develop statistical thinking for our students, for our work force, and for the lifelong statistical literacy of our citizens. In this paper I look back at the roots of big ideas in statistics education and then identify what I believe are the two most important overarching ideas that can orchestrate the statistical education of our students starting from the elementary years into tertiary. The paper includes research on student thinking about big ideas in statistics and recommendations for the future of teaching and research in statistics education.

Key Words: Statistics education, distribution, inference, variability, expectation, sampling, statistical investigation processes.

Recommendations for the Big Ideas in Statistics Education: A Retrospective

Prior to the 1960's there was almost no statistics included in the school curricula of the nations of the world. In their historical review What is Statistics Education? Zeiffler, Garfield, and Fry (2018) point to recommendations starting in the 1960's in which several curriculum projects in the UK recommended the inclusion of probability and statistics in schools for students ages 11 – 16. In 1967 the American Statistical Association (ASA) and the National Council of Teachers of Mathematics created the Joint Committee on the Curriculum in Statistics and Probability in the U.S. and Canada. The Joint Committee began to spearhead the publishing of materials for teaching statistics in the early 1970's such as *Statistics: A Guide to the Unknown* (Tanur, Mosteller, Kruskal, Link, Pieters, & Rising, 1972), and *Statistics by Example* (Mosteller, Kruskal, Link, Pieters, & Rising, 1973). The Joint Committee has continued to sponsor and

promote statistics education and the professional development of teachers to this day with curriculum materials such as *The Quantitative Literacy Project* (Ganadesikan et. al., 1995) and the recommendations for the teaching and learning of statistics in the GAISE documents, *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (Franklin, Kader, Mewborne, Moreno, Peck, Perry, & Schaeffer, 2007).

Early attempts to include statistics in the education of school age students prompted research into the teaching and learning of statistics which began in the1970's (particularly in the UK, Germany, Israel, and the U.S. For details see Shaughnessy, (1992)). The growing international interest in teaching and research in statistics education eventually gave birth to the *First International Conference on Teaching Statistics* in Sheffield, England in 1982, ICOTS I. Since that time an ICOTS has been convened every four years up to the most recent ICOTS X which was held in Hiroshima in 2018. When the next ICOTS is held in Rosario, Argentina in 2022, an ICOTS will have been held on every continent, and in 11 different countries.

NCTM Standards for Statistics Education of K-12 Students

Over the fifty years since the birth of statistics education as a discipline both the research and practitioner communities have been continually honing in on the most important ideas in statistics for our students and citizens to know and be aware of. Starting with its *Agenda for Action* document (NCTM, 1980), and subsequently with its *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989), the National Council of Teachers of Mathematics began to advocate for specific recommendations for teaching statistics to Grades K–12 in the United States and Canada. The 1989 standards were NCTM's first foray into establishing goals for school mathematics. With regard to statistics, NCTM included the following recommendations:

For grades K – 4:

- Formulate and solve problems that involve collecting, describing and analyzing data
- Construct, read and interpret displays of data
- Explore the concepts of chance

For grades 5—8:

- Systematically collect, organize and describe data
- Construct, read and interpret tables, charts, and graphs
- Make inferences and convincing arguments, and evaluate the arguments of others based on data analysis
- Develop an appreciation for statistical methods as powerful means for decision making

For grades 9 – 12

- Construct and draw inferences from charts, tables and graphs that summarize data from real world situations
- Use curve fitting to predict data
- Understand and apply measures of central tendency, variability, and correlation
- Understand sampling and recognize its role in statistical claims
- Design a statistical experiment to study a problem
- Analyze the effects of data transformations on measure of center and variability
- Test hypotheses using appropriate statistics

The 1989 standards started with a data analysis perspective in grades K–8, but took quite a jump in depth and abstraction in grades 9–12 with statistical design, mathematical transformations on

parameters, and traditional hypothesis testing. Many introductory college instructors would probably be quite happy if their students mastered these original NCTM grade 9–12 statistics standards. These 1989 standards are predominantly a list of content, concepts and procedures that students should know and be able to do. However, the process of making inferences is included for grades 5–12. It will be interesting to look back at these 1989 NCTM standards from the point of view of later recommendations about the big ideas in statistics.

Ten years later NCTM produced its second round of standards recommendations in *Principles and Standards for School Mathematics* (*PSSM*), (NCTM, 2000). This time NCTM's standards for statistics were organized under four broad big ideas at grades K–2, 3–5, 6–8, and 9–12, with additional lists that further explicate each of these four expectations at each grade level. *PSSM* recommended these that instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to do the following in Data Analysis and Probability:

- Formulate questions that can be addressed with data and collect, organize and display relevant data to answer them
- Select and use appropriate statistical methods to analyze data
- Develop and evaluate inferences and predictions based on data
- Understand and apply basic concepts of probability

This time NCTM organized the big ideas in statistics education more from a statistical processes point of view than just a list of concepts and statistics content as in 1989. While the organizational headings remain the same throughout all for grade bands, the sophistication in addressing the big ideas of course grows up through the later grades. For example, NCTM presents this trajectory across the grade bands for the process of developing and evaluating inferences and predictions based on data:

PreK–2. Discuss events related to students' experiences as likely or unlikely

Grades 3–5. Propose and justify conclusions and predictions based on data and design studies to further investigate conclusions or predictions

Grades 6–8. Use observations about differences between two of more samples to make conjectures about the populations from which the samples were taken.
Make conjectures about possible relationships between two characteristics of a sample on the basis of scatterplots and approximate lines of fit.
Use conjectures to formulate new qu3estions and plane new studies to answer them.

Grades 9–12. Use simulations to explore the variability of sample statistics from a known population and to construct sampling distributions.
Understand how sample statistics reflect the values of population parameters and use sampling distributions as the basis of informal inference.
Evaluate published reports that are based on data by examining the design of the study, the appropriateness of the data analysis, and the validity of the conclusions.
Understand how basic statistical techniques are used to monitor process characteristics in the workplace.

Notable in the *PSSM* standards when compared to the earlier standards is the growing emphasis and detail on making and testing data-based conjectures and the introduction of the term

"distribution", especially in regard to creating sampling distributions via simulations and using them to make inferences about populations.

The Central Role of Variability—Recommendations from the American Statistical Association

During the 1980's and 1990's much of the statistics education in school curricula concentrated on measures of center and mostly neglected the important role that variability plays in statistics. This was particularly true in elementary school mathematics curricula that introduced statistics to students by calculating mode, median, and mean. In his position paper on statistics content and pedagogy, David Moore (1997) a president of the ASA emphasized the crucial role that variability plays in statistics education, without variability statistics would not even exist. The writings of Moore and others sounded a clarion call for rethinking what the big ideas in statistics education really were. Subsequently statistics education researchers began to concentrate more on investigating students reasoning about variability. (See for example Shaughnessy, Watson, Moritz & Reading, 1999; Melitou, 2002; Toruk & Watson, 2000; Watson, Kelly, Callingham & Shaughnessy, 2003; Watson & Kelly, 2004; Reading & Shaughnessy, 2004). Thus, when the GAISE document (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education)* was published the American Statistical Association (Franklin et al, 2007), it appropriately highlighted variability as a central organizing idea of statistics education. The GAISE recommendations focus on teaching statistics through the cycle of four components of the statistical investigation process while highlighting the important role that variability plays in each step of the process.

I. Identify a Statistical Question—*Anticipate Variability,*
formulate questions that can be answered with data
II. Collect Data—*Acknowledge Variability,*
Design for differences and plan to collect appropriate data
III. Analyze Data—*Account for Variability by Using Distributions*
--select appropriate graphical and numerical methods to analyze the data
IV. Interpret Results—*Allow for Variability as you look beyond the data*
--interpret the analysis and relate it back to the original question

Figure 1. The statistical investigation process.

The GAISE for statistics education chose to focus on statistical processes rather than a list of specific statistical concepts and procedures as the organizing principles for teaching statistics in K–12. GAISE describes three levels (A, B, and C) of sophistication and growth for each of these four components in the statistical investigation cycle. The three levels roughly correspond to recommendations for grades K–4, 5–8 and 9–12 respectively.

Recommendations for the big ideas from research on the teaching and learning of statistics

Along with the increased attention to statistics education in schools around the world and the accompanying recommendations for pursuing the big ideas in statistics the research literature in statistics education has grown exponentially from its initial roots in the 1970's. There are opportunities to present research in statistics education at international conference such as the ICOTS conferences and *Psychology and Mathematics Education* (*PME),* national conferences such as the *US Conference on Teaching Statistics (USCOTS),* the NCTM *Research Conference,* the *Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA),* and *Conferencia*

Interamericana Educacíon Matematica CIAEM, as well as many other mathematics education conferences throughout the world. Statistics education research has several dedicated journals for publications including the *Statistics Education Research Journal (SERJ)* and the *Journal of Statistics Education* (JSE). *SERJ* is published by the *International Association of Statistics Education (IASE)*, a branch of the *International Statistics Institute (ISI), JSE* is published by the ASA. In addition, journals that are predominantly in mathematics education such as *The Journal of Research in Mathematics Education (JRME), Mathematical Thinking and Learning (MTL),* and *Educational Studies in Mathematics (ESM)* as well as many other international journals have routinely included articles on research in statistics education. Research in statistics education has been reviewed and synthesized over the years and numerous recommendations for the teaching and learning of statistics have been cited in those reviews (Shaughnessy; 1992, Shaughnessy, Garfield, and Greer, 1996; Ben-Zvi and Garfield, 2004; Shaughnessy, 2007; Garfield & Ben Zvi, 2008; Langrall, Makar, Nilsson, & Shaughnessy, 2017; Biehler, Frischmeier, Reading & Shaughnessy, 2018). Among the Big Ideas in statistics for recommended for practitioners to concentrate on are those from Garfield & Ben-Zvi (2008) and Watson, Fitzallen & Carter (2013). In their book *Developing Students' Statistical Reasoning* Garfield and Ben-Zvi argue that the teaching of statistics at all levels should concentrate on nine central concepts:

- Data
- Distribution
- Variability
- Center
- Statistical Models
- Randomness
- Co-variation
- Sampling
- Inference

Many of the groups that made recommendations about the big ideas in statistics prior to Garfield & Ben- Zvi concentrated on important statistical processes such as posing statistical questions, gathering data, and analyzing data. Garfield & Ben-Zvi returned to an emphasis on the most important statistical concepts for students and teachers in statistics education to address. It is clear that any lists for the big ideas in statistics education must consider both statistical processes and statistical concepts. These two perspectives on organizing what is most important in statistics interact with and support one another. Watson et al (2013) identified five big ideas in statistics that they modeled as the vertices of a pentagon with edges connecting each pair of vertices (resulting in a pentagram). Their five Big Ideas for statistics education are variation, expectation, distribution, randomness, and inference. To the notion of a distribution Watson et al (2013) added the importance of making inferences from distributions of data and from comparisons across several distributions of data. They thus tied distributions to the realm of hypothesis testing, starting at the level of informal inference, and anchored in expectation and variation in the data. Is a distribution of data predominantly due to chance alone, or is something else accounting for the aspects of the distribution such as the shape, the variability, or clustering of the data? It is interesting to compare and contrast Watson et al.'s approach to big ideas with that of Garfield & Ben-Zvi. There is agreement between these sets of authors that variation, distribution, randomness and inference are among the big ideas in statistics. Watson et al use the term expectation, while Garfield and Ben-Zvi prefer to refer to use center. Although the word

center may evoke notions of procedures like calculating means and medians, I suspect that Garfield & Ben-Zvi were thinking of center in a wider sense, similar to the term expectation used by Watson. Watson's model of the big ideas in statistics is informed by her research on the tension that students experience between variation and expectation when they make predictions or analyze data sets (Watson, 2009).

NCTM's Essential Understandings recommendations for teachers of statistics

As the implementation of more statistics has grown in school mathematics programs, many of our mathematics teachers have found themselves in the position of having to teach statistics concepts when they have little or no preparation in statistics themselves. In order to provide some professional development and assist middle and secondary school mathematics teachers in adding statistics to their teaching repertoire the National Council of Teachers of Mathematics included statistics in their series on the *Essential Understandings* in school mathematics. (The *Essential Understandings* books cover algebra, geometry, number and operation, proportional reasoning, and mathematical reasoning as well as statistics.) Both *Essential Understanding of Statistics Grades 6–8* (Kader & Jacobbe, 2013) and *Essential Understanding of Statistics Grade 9–12* (Peck, Gould, & Miller, 2013) identify the big ideas in statistics that all teachers should know and be able to teach at their respective grade levels. Both books include copious sample tasks for teachers to explore the big ideas themselves, and to use in teaching their students. In the grade 6–8 book, Kader & Jacobbe identify four big ideas for teaching statistics to middle school students:

- Variability in Data and Distributions
- Comparing Distributions
- Associations between Two Variables
- Samples and Populations

The concept of a distribution plays a prominent role in all four of these recommendations if one considers that bivariate distributions of data form the basis for exploring associations between variables. Peck et al describe a collection of statistical processes that form the foundation of the big ideas in the grade 9–12 *Essential Understandings of Statistics* book. They are especially interested in strengthening our teachers' knowledge and comfort with these ideas:

1. Data consists of structure and variability
2. Distributions describe variability
3. Hypothesis tests answer the question, "Do I think this could have happened by chance?"
4. The way data are collected matters.
5. Evaluating an estimator involves considering bias, precision, and sampling method.

For Peck et al these five organizational big ideas are interrelated. Statistical models describe and account for variability in both populations and in the values of sample statistics depicted in sampling distributions. Hypothesis testing is the basis for making decisions under uncertainty based on the limitations of the data provided. The data upon which statistical decisions are made are only as good as the care with which they are produced, so that attention to sources of bias and precision in estimating parameters such as measures of center and variation is critical. Peck et al describe finer grain detail for the essential understandings within each of these five big ideas and provide examples for teachers to consider for their own understanding, as well as for use with their students.

The two BIGGEST ideas in statistics education

Suppose that you were asked to pick two ideas in statistics that you thought were the most important ones for our students to learn and our citizens to be competent in understanding. What would be your choice? What are your two BIGGEST ideas in statistics education? The most important goal for statistics education is to enable our students and citizens to understand that making decisions under conditions of uncertainty is based upon samples of data. We rarely have access to information about the entire population under consideration when making statistical decisions or estimating the likelihood that some event occurred by chance alone. Statistics does not appeal to mathematical proof based on deterministic reasoning anchored in axiomatics. Statistics involves making decisions that we perceive are most likely to be true based on data that is generated under conditions of uncertainty. Given that the pre-eminent goal of statistics education is to understand decision making under uncertainty, I claim that the two biggest ideas in statistics education are *distribution* and *inference* because these two ideas are the heart and soul of statistical decision making. I base this conclusion in part on the analysis above of the trajectory and development of the recommendations of various organizations and groups of researchers throughout the history of statistics education, but also on some more recent research in statistics education that gives added support to the claim that *distribution* and *inference* are the two biggest overarching ideas in statistics education.

Examples of research on students' reasoning about big ideas in statistics

Beginning in the 1990's researchers began to investigate students' understandings of big statistics concepts from a developmental perspective. Research on student understanding of concepts such as average and variability has found trajectories of student reasoning, levels of student understanding that become deeper over time. Furthermore, concepts such as expectation and variation are components of bigger ideas such as distribution and inference. Examples of some of these reasoning trajectories of big ideas in statistics from research are discussed below.

Expectation.

The term expectation encompasses research on measures of center such as mean, median, and mode as well as considerations of any expected clumping in the data, as many distributions of data have bimodal or even multimodal characteristics. Mokros & Russell (1995) discovered one of the first trajectories of students' understanding of average. Using interview tasks that involved "messy situations" from everyday familiar contexts with grades 4, 6, and 8 students Mokros & Russell identified five different ways that students thought about average: average as *mode* (mosts), average as *algorithm*, average *as reasonable*, average as *midpoint*, and average as *balance point*. Watson & Moritz (2000) interviewed about a hundred students grades 3, 5, & 7 over time and found their conceptions of average moved from telling idiosyncratic stories about average to thinking of average as 'mosts or middles', and eventually to average as representative of a data set. Reflecting upon the research on students' conceptions about expectation, Konold & Pollatsek (2002) proposed that students' thinking about the mean includes average as *typical value,* average as *fair share,* average as *data reducer,* and average as *signal amid noise*. It is clear from the research on students reasoning about expectation that students possess a rich collection of conceptions about centers which teachers can build upon. (For a more detailed discussion about research on students' conceptions of average, see for example Shaughnessy, 2007).

Variation.

Three developmental frameworks for students reasoning about variability are presented and compared by Langrall et al (2018, p. 494) in the NCTM *Compendium of Research in*

Mathematics Education. In his framework Ben-Zvi (2004) notices at first students just recognize variability across various data values. Later students use variability to compare groups, next they combine measures of spread and center to compare groups, and eventually they consider variability as a construct within and between distributions of data. Watson, Callingham, & Kelly (2007) describe a progression of student thinking that encompasses both expectation and variation. Students first acknowledge just one or the other, then recognize that both expectation and variation are present in data, later on students begin to see an interaction between centers and variability as they develop proportional reasoning. Reid & Reading (2008) investigate students' consideration of variation in data and describe a hierarchy of student reasoning ranging from no consideration of variation, to recognition of variation within a group, to recognition of variation between groups that leads to considering inference. In an analysis of the research on students' conceptions of variability, Shaughnessy (2007) outlined eight types of conceptions of variability that were identified in research including:

1. Variability in *particular values* in a data set
2. Variability as *change over time*
3. Variability as the *whole range* of a data set
4. Variability as the *likely range* of a sample
5. Variability as *distance from some fixed point*
6. Variability as *sum of residuals*
7. Variability as *covariation or association*
8. Variability as *distribution*

The first four of types of variability in this list involve an exploratory data analysis perspective, while the last four types refer primarily to ways to measure variability. The terms variability and variation are sometimes used almost interchangeably, however some authors (e.g., Reading and Shaughnessy, 2004) prefer to use the term variability as the tendency for a characteristic to change while the word variation refers to a measurement of a changing characteristic. Thus, the first four types above refer to variability, while the last four involve variation, some type of measurement of change. Research on type 4, variability as the *likely range of a sample*, led to further research on students' conceptions of sampling distributions. A closer look at some research tasks and student responses to those tasks may provide insight into why distribution is one of the two biggest ideas in statistics education.

100 candies, 20 yellow, 50 red, and 30 blue, are put in a jar and mixed together. A student pulls 10 candies from the mixture, counts the number of reds, and writes that number on the board. Then the student puts the candies back in the bowl and mixes them all up again. Four more students also draw a sample of 10 candies, and write their number of reds on the board. What numbers would you predict for the number of reds in each of those five samples of 10 candies? Write your predictions in the spaces below.

_____ _____ _____ _____ _____

Why do you think those would be the numbers of reds in the five samples?
Fig 2. The candy sampling task.

This task and variations of it were given to hundreds of students in grades 4, 5, 6, 9, & 12 in Australia, New Zealand, and the United States (Shaughnessy, Watson, Moritz, & Reading, 1999). The task was used to determine what students perceived as the *likely range* of values that would occur in a repeated sampling scenario. Student responses fell into clusters that were deemed *narrow, wide, high, low,* and *reasonable.* For example, some students said they'd expect the results to be 6, 7, 5, 8, 9 because 'there are a lot of red in the jar.' This is typical of a *high* response as all the sample predictions are above the expected value of 5 red. High responses were based on thinking about 'mosts', not about the proportion of reds in the mixture. In *low* responses like 3, 4 ,3, 5, 2 students felt that the other colors would overwhelm red, as there were two of them. Students who predicted *wide*, like 1, 5, 7, 10, 2, did so because 'anything can happen.' On the other hand, some students predicted results like 5, 5, 6, 5, 6, or even 5, 5, 5, 5, 5 because 'that's what is supposed to happen.' Such *narrow* predictions put too much weight on the theoretical probability of obtaining 5 red candies on any one pull, and neglected the possibility of variability in outcomes. Overall, some students attended to centers too much, some to variability too much, and some students did predict a *reasonable* range of sample outcomes around the center with predictions such as 3, 7, 5, 6, 4. Research on tasks such as the candy sampling task helped to spawn further research into students' conceptions about distributions, in particular their conceptions about sampling distributions. The candy sampling task also points to the tension that can arise between attending to expectation and attending to variability in data, especially when students are asked to make predictions for samples (Watson & Kelly, 2004).

Distribution.

Comparisons across several hypothesized developmental frameworks of the concept of distribution are provided in Langrall et al (2018, p. 494). In each of these developmental frameworks the researchers acknowledge that the idea of distribution in statistics encompasses the aspects of shape, variability, and expectation, and that integration of all of these aspects is required for students to be able to reason about and make inferences from distributions. Reading and Reid's framework (2006) for understanding distributions starts with students acknowledging one parameter of a distribution, then several parameters, then integrating centers and spreads when considering data aggregates, and finally to a second cycle of reasoning development which involves students' growth in making inferences from distributions. A framework for distributional thinking was proposed by Noll & Shaughnessy (2012) based on their research on students' conceptions of sampling distributions (See Figure 3). According to Noll & Shaughnessy, students' development of the concept of distribution involves the gradual integration of shape, centers, and spread. Students at first notice them as individual aspects of a distribution, then learn to make predictions for sampling distributions by relying on both expectation and variation. Students' reasoning progresses through four levels from *additive* to *proportional* and finally to *distributional* reasoning in the progression identified by Noll & Shaughnessy.

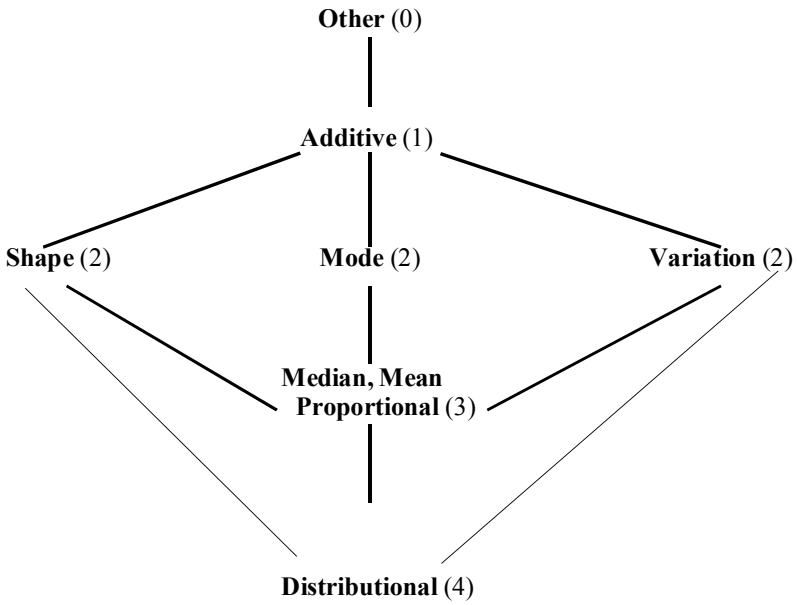


Figure 3. Lattice of student reasoning when making predictions about sampling distributions.

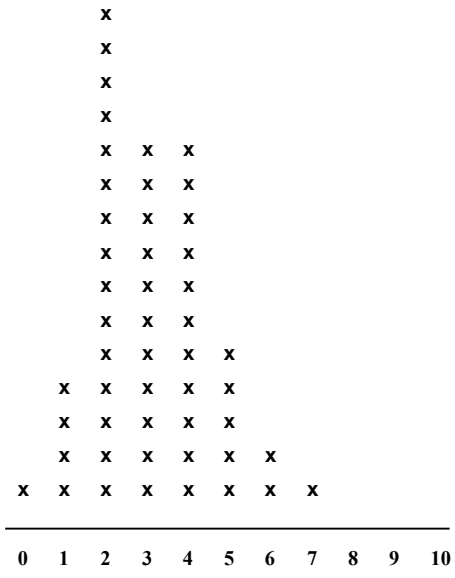
The lattice indicates the development of conceptions of expectation from 'more' to 'most' (mode) to 'means and medians' which involves proportional reasoning, and finally to reasoning about distributions which includes the coordination of aspects of shape, expectation, and variation. Student responses to tasks like the *Prediction Task* and the *Mystery Mixture* task led Noll & Shaughnessy to the development of this reasoning lattice. A version of each of these tasks is presented here.

Working in small groups, students in a class pull samples of 10 candies from a jar that has 1000 candies. They pull 50 samples of ten. The jar has 250 yellow and 750 red candies in it. Each time they put the sample back and remix the jar.
Consider the number of reds in each handful. Where would you expect 95% of the handfuls of ten candies to be?

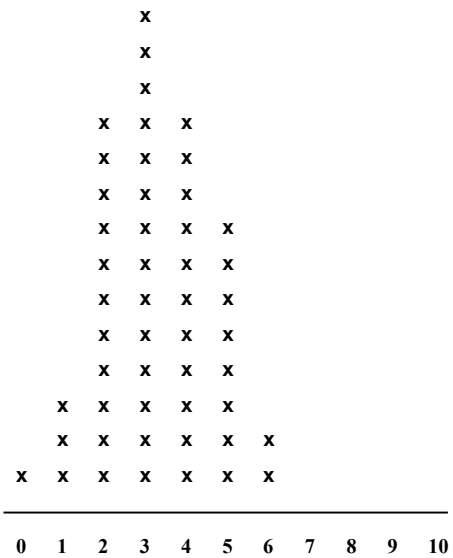
From _____ # reds To _____# reds (Fill in the blank spaces).
Why do you think that?
Complete the frequency chart below to show what you think the numbers of reds in 50 trial handfuls might look like. (Note: students were provided labeled graph paper).

Figure 4. The Prediction Task

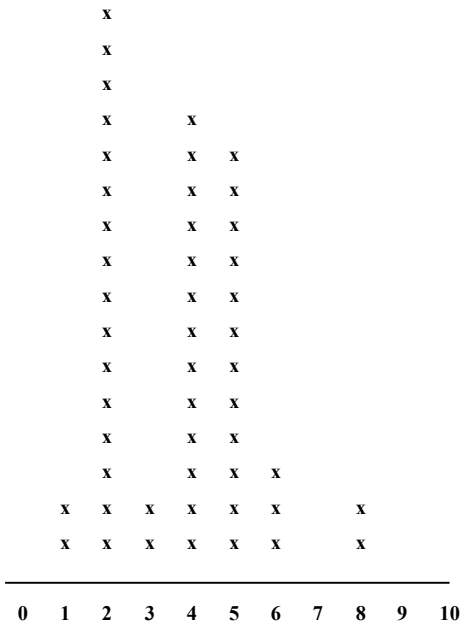
The four frequency graphs below all came from a class that is trying to estimate a mystery mixture of 1000 red and yellow candies in a large jar. They pulled 50 samples of size 10, recorded the number of reds in each sample, and then replaced and remixed each time.



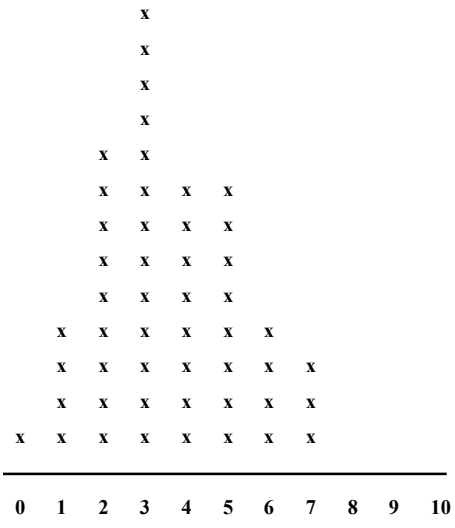
(Graph 1)



(Graph 2)



(Graph 3)



(Graph 4)

a) What do you think the mixture in the jar might be? b) Explain why you think this.

Figure 5. The Mystery Mixture Task

In the Prediction task students are given the proportions of colors in the parent population and then asked to predict what a sampling distribution for sample proportions will look like. Most students' responses fell into the prediction categories *wide, narrow, and reasonable* for both their predicted range for the # of red in handfuls, and in the graphs that they constructed for 50 sample proportions. In the Mystery mixture task students are provided with the results from multiple sampling distributions and asked to use this information to infer what the parent population is. Students who predicted 200-250 reds in the mystery mixture reasoned using a 'mosts' point of view, and were usually heavily influenced by the graphs of distributions 1 & 3 which have a mode of 2 reds in handfuls. Student who looked for 'balance points' of the graphs reasoned proportionally and tended to predict around 300 reds in the mixture. Still other students noticed that the graphs tended to be skewed to the right, they integrated shape as well as center and spread into their reasoning and inferred that the mixture likely had more than 300, perhaps even 350 - 400 reds in it. In both the Prediction task and the Mystery Mixture task students had opportunities either to focus solely on one of the aspects of the sampling distributions (shape, centers, variability) or to integrate them into their predictions and inferences.

Inference.

The Mystery Mixture task above is an example in which students are asked to make an inference beyond the data at hand, in this case beyond the given sampling distributions of a sample statistic. There is no formal hypothesis testing here, students are simply asked what they believe the composition of the parent population is and why they believe it. Researchers and curriculum developers now refer to this type of inference as 'informal inference'. Informal inference has its roots in exploratory data analysis, often in the exploration of data that have been produced from simulations. Students can estimate likelihoods from samples of data without resorting to a test statistic or working with a probability distribution. Cobb (2007) argued that introductory statistics courses should start with inference early on prior to any hypothesis testing that resorts to theoretical distributions. Since the logic of formal statistical inference has always been a difficult stumbling block for statistics students, educators have been experimenting with various approaches to the early introduction of inference that avoid some of the cognitive complexity and pitfalls in formal inference. Rossman (2008) promotes introducing simulations of randomization tests as a more transparent informal approach to statistical inference. Zeiffler, Garfield, Del Mas, & Reading, (2008) define informal statistical inference as students using their informal statistical knowledge about observed samples to make arguments to support inferences about unknown populations. Makar and Rubin (2018) point out that there is general agreement that the important characteristics of informal inference are: i) a claim is made that goes beyond the data at hand; ii) the data are used as evidence to support the claim; iii) the claim involves the articulation of uncertainty—estimated likelihoods or probabilities are involved; iv) decisions or inferences are based upon aggregates in the data, variability, or shape so decisions are based upon aspects of distributions of data; v) contextual knowledge plays a role in the analysis and inference integrated with the information in the sample of data. Makar and Rubin share examples from research with both elementary and middle grade students who reasoned about tasks and made informal inferences from data that they had collected. Inference is one of the two biggest ideas in statistics because students even at a very young age can begin to make inferences based on data that they have collected on a statistical question that they themselves posed. The statistical investigation cycle outlined in the GAISE document—pose a question, collect data, analyze the data, make conclusions—is even more powerful for students when it includes making inferences in the analysis and conclusions phases.

Recommendations for future research and teaching the big ideas in statistics

The future of research in statistics education

Many of the big conceptual ideas in statistics such as distribution, expectation, variation, and randomness identified above reside predominantly in the third stage of the GAISE statistical investigation cycle, in the stage of analyzing the data. However, in addition to these conceptual big ideas, there are process big ideas in the statistical investigation cycle, such as posing a statistical question, generating appropriate data to answer a statistical question and communicating the results and conclusions of the investigation to others. These big statistical processes ideas must also be included in the statistical education of our students, as well as in the professional development of our classroom teachers. Unlike the big conceptual ideas such as expectation, variability, and distribution there has not been much research into developing students' ability to pose statistical questions or on their ability to communicate and defend their their inferential conclusions. The first and last phases of the statistical investigation cycle have not yet been adequately explored by research, especially when compared to how much research has been conducted on the the collecting and analyzing phases. The ASA conducts a Statistics Poster contest each year at the elementary, middle, and secondary student levels. The poster contest could provide a fertile ground for research on what students learn from their involvement in the statistical investigation cycle. Posters provide information on both the statistical question posed, and the results communicated. More research is needed on students' thinking processes as they pose a statistical question,and as they communicate their results. Overall, more research into student thinking about both the concepts and processes of the entire statistical investigation cycle would be beneficial to both the teaching and research communities.

Over the last twenty-five years research has concentrated on particular areas and obtained results robust enough to support the existence of developmental frameworks for students reasoning about expectation, variation, and distribution (Langrall et al, 2017). More research is needed to further validate the developmental frameworks that have already been proposed. Meanwhile the next 'big idea' in this research progression appears to be inference, in particular informal inference. A special issue of the *Statistics Education Research Journal* was dedicated to articles about informal inference, particularly within statistical modeling contexts (*SERJ* 16 (3), November, 2017). Various definitions of informal inference have been proposed and some of the components of informal inference have been identified. However, a developmental framework for students' reasoning about inference analogous to those for variability and distribution does not yet exist. Case & Jacobbe (2018) report a framework for understanding students' difficulties when making inferences from simulations. However, much more research is needed about how inferential reasoning develops starting with young children and up through the grades in order to identify potential levels of student reasoning about inference.

The future of teaching statistics

Teaching is a social process, it involves countless interactions between students and their instructors. Any recommendations for teaching statistics must include considerations about the teacher as well as the students. Our teachers are on the front line of statistics education, and many of the teachers in our current work force do not have very much experience with statistics, much less actually teaching statistics. Most of them are mathematics teachers. As Cobb & Moore (1997) pointed out so well, mathematics and statistics are very different disciplines. Mathematics is grounded in certainty, deductive reasoning based on assumed axioms and previously established results builds toward new certain truths. Statistics on the other hand lives in the realm

of uncertainty, statistical results are couched in terms of likelihoods, probabilities, confidence intervals. Mathematics and statistics are epistemologically and philosophically different from one another. Our teachers need experiences themselves in carrying out statistical investigations—perhaps in conjunction with their students—in order to immerse themselves in thinking about drawing conclusions from data. In this regard, teachers need to develop both their content knowledge and their pedagogical content knowledge of statistics. The NCTM *Essential Understandings* series includes books on the big ideas in statistics that can provide some content knowledge support for middle and secondary school teachers of statistics (Kader & Jacobbe, 2013; Peck et al, 2013). The ASA GAISE document provides support for developing teachers' pedagogical content knowledge in statistics. It provides many examples of tasks that can be implemented in the classroom using the statistical investigation cycle, and outlines a progression of levels of student understanding about the statistical investigation cycle.

As for our future teachers of statistics, the ASA recently developed and published *The Statistical Education of Teachers (SET)* which lays out recommendations for the statistical education of all perspective teachers, elementary, middle, and secondary teachers alike (Franklin, Bargagliotti, Case, Kader, Scheaffer, & Spangler, 2015). *SET* recommends both coursework and statistical modeling experiences for all teachers. Coursework should begin with a first course that using a data analytic approach (all teachers), and the recommendations for middle and secondary school teachers include additional coursework in statistical methods and statistical modeling. The ASA has taken a very futuristic view in the *SET* document that projects that the need for statistics education will continue to grow throughout the world, and that our teaching profession will need to know much more about statistics and statistical thinking in the future to prepare students and citizens to better understand and be able to work in our data intense world.

What about our students, our learners, our future workers and citizens? What does our walk through the history and research on Big Ideas in statistics suggest for the teaching and learning of statistics?

Start with the big ideas. Right away introduce the concept of a statistical question, a question that requires data to be answered. Make sure that students understand the difference between mathematics and statistics, that they are two different disciplines, that they involve two different types of reasoning. Give students opportunities to reason about distributions of data and to make informal inferences early on. Provide students with multivariate data sets to explore and have them collect multivariate data themselves and then ask them, "What do you notice? What do you wonder about?" Get students to make comparisons between data sets, across distributions, early on. Get students involved in generating sampling distributions from repeated samples from both known and unknown populations, and then making informal inferences from the samples they've obtained. Have students recognize and attend to the important aspects of distributions such as shape, centers, and variability, then begin to introduce ways of measuring expectation and variation. Use the developmental frameworks from research on the big ideas of expectation, variability, and distribution as a guide to instruction. Investigate how students are reasoning about them, then provide tasks that will challenge how they are currently reasoning so that they grow in their understanding along the levels in the research frameworks. Get students in the habit of posing their own statistical questions and using the statistical investigation cycle from GAISE to explore and answer their statistical questions. Make sure that attention to variability is foremost throughout the statistical investigation cycle. Most of all, empower

students to be competent and confident with the big concepts and processes of statistics, and with the nature of statistical argumentation.

References

Ben-Zvi, D. (2004) Reasoning about variability in comparing distributions. *Statistics Education Research Journal, 3*(2), 42-63.

Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Eds.). (2004). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, & Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Biehler, R., Frischmeier, D., Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2018). Reasoning about data. In D. Ben-Zvi, K. Makar, &, J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 139-192). Cham, Switzerland: Springer International.

Case, C. & Jacobbe, T. (2018). *Statistics Education Research Journal*, *17*(2), 9-29. Retrieved from https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ17(2)_Case.pdf

Cobb, G. (2007). The introductory statistics course. A Ptolemaic curriculum? *Technology Innovations in Statistics Education,* 1(1), Article 1. Retrieved from http://escholarship.org/uc/item/6hb3k0nz

Cobb, G. & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly,104*(9), 801-823.

Franklin, C., Kader, G., Mewborne, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education.* Alexandria, VA: ASA.

Franklin, C.A., Barbabliotti, A. E., Case, C. A., Kader, G. D., Scheaffer, R. L., & Spangler, D. A. (2015). *The Statistical Education of Teachers.*

Ganadesikan, M., Scheaffer, R. L., Landwehr, J. M., Watkins, A. E., Barbella, P. Kepner, J., Newman, C. M., Obremski, T. E., & Swift, J. (1995). *Quantitative Literacy Series.* New York: Pearson Learning (Dale Seymour Publications).

Garfield, J., & Ben-Zvi. D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning. Connecting Research and Practice*. Springer.com.

Kader. G., & Jacobbe, T. (2013). *Developing Essential Understanding of Statistics Grades 6-8*.

Reston, VA: NCTM

Konold, C., & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as a search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(4), 259-289.

Langrall, C. W., Makar, K., Nilsson, P., & Shaughnessy, J. M. (2017). Teaching and learning probability and statistics: An integrated perspective. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education*. Reston, VA: NCTM.

Makar, K., & Rubin. A. (2018). Learning about statistical inference. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.). *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 261-294). Cham, Switzerland: Springer International.

Melitou, M. (2002). Conceptions of variation. A literature review. Statisics Education Research Journal, *1*(1), 46-52.

Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 20-39.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistics Review, 65*(2), 123-165.

Mosteller, F., Kruskal, W. H., Link, R. F., Pieters, R. S., & Rising, G. R. (1973). *Statistics by Example.* Reading, MA: Addison-Wesley.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Noll, J., & Shaughnessy J. M. (2012). Aspects of students' reasoning about variation in empirical

sampling distributions. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 509-556.
Peck, R., Gould, R., & Miller, S. J. (2013). *Developing Essential Understanding of Statistics Grades 9-12*. Reston, VA: NCTM.
Reading C., & Reid, J. (2006). An emerging hierarchy of reasoning about distribution: From a variation perspective. *Statistics Education Research Journal, 5*(2), 46-68.
Reid, J., & Reading, C. (2008). Measuring the development of students' consideration of variation. *Statistics Education Research Journal, 7*(1), 40-59.
Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, reasoning and thinking (pp. 201-226).* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's point of view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.
Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). New York, NY: Macmillan.
Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Reston, VA: NCTM.
Shaughnessy, J. M., Garfield, J., & Greer, B. (1996). Data handling. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 205-237). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
Shaughnessy, J. M., Watson, J., Reading, C. & Moritz, J. (1999. April). School mathematics students' Acknowledgement of statistical variation: There's more to life than centers. Paper presented at the research pre-session of the 77th annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, San Francisco, CA.
Tanur, J., Mosteller, F., Kruskal, W. H., Link, Pieters, R. S., & Rising, G. R. (1972). *Statistics: A Guide to the Unknown.* San Francisco, CA: Holden-Day.
Toruk, R., & Watson, J. M. (2000). Development of the concept of statistical variation: An exploratory study. *Mathematics Education Research Journal. 9*, 60-82.
Watson, J. M., (2009). The influence of variation and expectation on developing awareness of distribution. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 32-61.
Watson, J, M., & Kelly, B. A. (2004). Expectation versus variation: Students' decision making in a chance environment. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 4,* 371-396.
Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding average. *Mathematical Thinking and Learning, 2,* 11-50.
Watson, J. M., Callingham, R. A., & Kelly, B. A. (2007). Students appreciation of expectation and variation as a foundation for statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(2), 83 – 130.
Watson, J. M., Kelly, B. A., Callingham, R. A, & Shaughnessy, J. M. (2003). The measurement of school Students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(1), 1-29.
Watson, J. M., Fitzallen, N., & Carter, P. (2013). *Top Drawer Teachers: Statistics.* Adelaide, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers and Services Australia. Retrieved from http://topdrawer.aamt.edu.au/Statistics
Zeiffler, A., Garfield, J., Del Mas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 40-58.
Zeiffler, A., Garfield, J., & Fry, E. (2018). What is statistics education? In D. Ben-Zvi, K. Makar, and J. Garfield (Eds.). *International Handbook of Research in Statistics Education,* 37-70.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Princípios didáticos para uma prática matemática transdisciplinar

Ettiène **Guérios**
Universidade Federal do Paraná
Brasil
ettiene@ufpr.br

Resumo

Caracterização de práticas matemáticas em perspectiva multi, inter e transdisciplinar, diferenciando-as no contexto da docência em sala de aula. Princípios e relações didáticas estabelecidas na tríade professor, aluno e conhecimento matemático no processo de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas. Ação didática com intencionalidade educativa como possibilidade de desenvolvimento cognitivo e de significação do conhecimento matemático escolar. Reflexão sobre resolução de algoritmos e compreensão matemática na aprendizagem dos alunos escolares. Sustentabilidade, Educação Matemática Ambiental, Educação Matemática Financeira e Literatura com Matemática como exemplos de projetos de docência para uma prática transdisciplinar.

Palavras chave: didática, docência, educação, matemática, cognição, transdisciplinaridade, formação.

. Introdução

Este artigo, escrito na modalidade de ensaio , tem sua nascente em pesquisas realizadas por esta autora no Programa de Pós Graduação em Educação e no Programa de Pós Graduação em Educação: Teoria e Prática de Ensino, da Universidade Federal do Paraná (Brasil). A formação de professores que ensinam matemática é o foco que investigo, tendo como eixo norteador a aderência entre processo de formação, práticas didático-metodológicas, cognição, aprendizagem e desenvolvimento humano. A abordagem teórica neste artigo está nucleada em ideias acerca de criatividade, discisplinaridade, transdisciplinaridade, complexidade, problematização e resolução de problemas. Os aportes advém de Ribeiro e Moraes (2014), Nicolescu (1988), Petraglia e Vasconcelos (2017), Morin (1998), Guérios (2002), Guérios e Medeiros (2016), Guérios e Modtkoski (2017) e Puchkin (1969).

Parto do pressuposto que a docência em matemática, desde a Educação Infantil até a Universitária, pode vincular vertente didática e vertente educativa em um processo único e simultâneo cuja abordagem transcenda a organização disciplinar estabelecida nas matrizes curriculares. Nesse escopo, há uma simbiose entre ambas em que uma fundamenta a outra. Ou seja, ao educar para a vida, ensina-se matemática que, por sua vez, dá sentido à própria existência e possibilita o desenvolvimento de valores como fundamento de uma educação que, como diz Petraglia (2017, p. 67), pretende a *participação do sujeito no universo sociocultural e político, considerando sua consciência, liberdade e autonomia para o exercício de uma formação complexa, ética e planetária*.

Nesse sentido, fundamentos do pensamento complexo postulados por Edgar Morin no conjunto de suas obras ampliaram meu horizonte teórico para ultrapassar o entendimento de que a competência docente poderia se estabelecer apenas pelo conhecimento da matéria que ensina e pela habilidade técnica instrumental, que constitui uma dimensão mecânica da ação didática, não raras vezes, prescritiva. No entanto, o imponderável e o imprevisível imperam na sala de aula e situações não previstas revelam movimentos cognitivos nem sempre esperados, cuja prescrição pedagógica estática e fragmentada no âmbito disciplinar não absorve tampouco considera. Esta ultrapassagem está no cerne de uma reforma paradigmática que

> *ultrapassa a dimensão mecânica do ato didático e tem o ato de criar como desencadeador de aprendizagem [...] Nas situações que fogem ao tradicional modelo de cerceamento das ideias para garantir um andamento programado, o inesperado tende a ser a mola mestra para desencadear ações didáticas compatíveis com o emergir do pensamento dos alunos* (Guérios, 2002, p. 177-179).

O reflexo do que apontei brevemente até o momento está na discussão que desenvolvo a seguir.

Caracterização de práticas matemáticas em perspectiva multi, inter e transdisciplinar

Importante ressaltar características constitutivas e conceituais dos termos, estabelecidas pelos seus prefixos “multi”, “inter” e “trans”, chamando atenção para a complementaridade existente entre elas. Trago à luz palavras de Nicolescu que auxiliam na compreensão dos termos. Diz o autor que a interdisciplinaridade

> *Concierne la transferencia de métodos de una disciplina a otra.[...]Como la pluridisciplinariedad, la interdisciplinariedad desborda las disciplinas pero su finalidad permanece también inscrita en la investigación disciplinaria. Por éste su tercer grado, la interdisciplinariedad contribuye al big bang disciplinario.[...] La transdisciplinariedad* concierne, como el prefijo “trans” lo indica, lo que *está* a la vez *entre* las disciplinas, *a través* de las diferentes disciplinas y *más allá* de toda disciplina. Su finalidad es la comprehensión del mundo presente en el cual uno de los imperativos es la unidad del conocimiento (Nicolescu 1998, p. 35).

No que diz respeito à ação didática, ou seja, à docência , a transdisciplinaridade está no cerne da possibilidade *da transgresión de las fronteras entre las disciplinas, de una superación de la pluri y de la interdisciplinariedade* (Nicolescu, 1988, p. 3). A criatividade é potencializadora para que essa transgressão ocorra. Sim, pois processos cognitivos criativos propiciam autonomia no fazer docente por meio do desenvolvimento de estratégias que

possibilitam a ultrapassagem de ações didáticas estáticas, preocupadas apenas com o cumprimento do conteúdo curricular hierarquizado nas disciplinas escolares. Trago de Morin (1998, p. 220) que o desenvolvimento de estratégias *se fundamenta num exame das condições, a um só tempo, determinadas, aleatórias e incertas* [...] *A estratégia pode modificar o roteiro de ações previstas, em função das novas informações que chegam pelo caminho que ela pode inventar*. Nesse sentido, o desenvolvimento de estratégias pressupõem diálogo e elaboração de conjecturas e hipóteses, além de que, *o desenvolvimento das competências heurísticas tornadas aptas para encarar várias estratégias possíveis, isto é, para criar condições de vida, vai permitir a emergências de liberdades. (p. 304)*

Na verdade, a concepção que se tem sobre o conhecimento é determinante no modo como o compreendemos, o que reflete na prática do professor. Compreendo que há uma simbiose entre o modo como se concebe o conhecimento – a ciência – e o modo como pensamos e agimos. Daí, que o conhecimento pode ser concebido pelo docente como disciplinar ou como transdisciplinar, possibilitando ou não, como diz Nicolescu, a compreensão do mundo em sua unidade. Sob esta perspectiva, a da transdiciplinaridade, Ribeiro e Morais (2014, p. 249) *concebem a criatividade como a expressão de uma vivência de natureza complexa, de um conhecimento de natureza transdisciplinar, que se materializa a partir das atividades desenvolvidas e das relações emergentes*.

Associo a esta discussão minha defesa de que a ação docente pode ser composta por dois vetores, sendo um deles o compromisso com a aprendizagem matemática dos alunos e o outro o compromisso educativo. Nesse sentido, a ação didática com intencionalidade educativa torna-se propulsora do desenvolvimento cognitivo dos alunos, o que lhes possibilita a significação do conhecimento matemático escolar. Sim, *o método é atividade pensante e consciente* (Morin, 1988, p.339). Ou seja, educar para a vida e para a aprendizagem como ato conexo que transcende a dimensão disciplinar, ao mesmo tempo em que coloca em relação o conhecimento matemático escolar e a própria existência, considerando triadicamente o homem, o indivíduo e a sociedade na composição do pensamento sobre o universo. Ou seja, a transdisciplinaridade não é apenas a *transgresión de las fronteras entre las disciplinas, mas também, es la transgresión de la dualidad oponiendo los pares binarios: sujeto-objeto, subjetividad-objetividad, materia-conciencia, naturaleza-divinidad, simplicidad-complejidad, reduccionismo-holismo, diversidad-unidad. Esta dualidad está transgredida por la unidad abierta englobando el Universo y el ser human (Nicolescu, 1988 p. 44)*.

Em minhas pesquisas, intrigou-me a identificação de que há algo subtendido que rege a ação didática dos professores, independente do método que utilizem. Algo que é construído como em uma malha que articula conhecimentos formais com prática vivenciada, com a experiência. Identifiquei que constroem princípios que fundamentam a prática que desenvolvem como resultantes da postura que têm diante do que fazem em sala de aula (Guérios, 2002). Tais princípios podem resultar em práticas disciplinares prescritivas para confirmação de verdades consolidadas ou em práticas que consideram a complexidade da sala de aula e tem a criatividade como propulsora das ações. Uma professora, por exemplo, compõe um princípio didático a partir de sua convicção de que *conteúdos fragmentados, dissociados de seu contexto estrutural, não produzem sentido conceitual* (idem, p. 190). Qualquer que seja a modalidade didática que ela desenvolve, o princípio que rege sua ação é o investigativo. Até na aula expositiva oral é possível partir de questões investigativas e tornar o conhecimento vivo e significativo para os alunos (e para ela mesma), diz ela, o que difere de práticas fragmentadas, prescritivas e

dissociadas das situações que emergem na sala de aula. Trago palavras de Guérios e Modtosky para selar o que expus até o momento:

> *Prescrição pedagógica. Eis um termo que nos incomoda. Complexidade educativa. Eis um termo que nos provoca. Prescrição, em um contexto de verticalidade e externalidade à prática educativa do professor, significa ordem e determinação. É dogmático, visto seu caráter de certeza absoluta. Tem sentido de normatizações curriculares a serem seguidas, de ofertas didáticas a serem reproduzidas, de caminhos a serem caminhados, sem que processos transformativos sejam inerentes à prática didática que se faz a cada tempo e a cada circunstância. Prescrição, nesse sentido, nos parece engessante para o ato criativo, se concebermos que a prática pedagógica é dinâmica e que é, o ato criativo, elemento nuclear para tal dinamização*. (GUÉRIOS & MODTOSKY, 2017, p.116).

O compromisso com a aprendizagem matemática e com a educação dos alunos em uma perpsctiva transdisciplinar pode ser alcançado por meio de situações próprias da complexidade do mundo real ao qual os alunos são parte que, problematizadas, se convertam em situações didáticas mediadas pela Resolução de Problemas, sobre o que abordarei a seguir.

Princípios e relações didáticas no processo de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas.

No que diz respeito a Resolução de Problemas como possibilidade para a docência em Matemática, esta autora e Medeiros (2016) investigaram aspectos didáticos na prática de professores em contraponto com a atividade cognitiva dos alunos. Configuramos uma tríade de elementos triangulados formada por alunos de 6º e 7º anos do ensino fundamental, seus professores e o conhecimento matemático escolar, tendo a resolução de problemas como constitutiva de um caminho de aprendizagem. Como ação investigativa, buscamos compreender a atividade heurística dos alunos e identificar relações didáticas estabelecidas pelos professores nessa tríade.

A identificação dessas relações didáticas possibilitou perceber múltiplas facetas de uma metodologia de ensino mediada pela resolução de problemas e colaborou para a tomada de consciência dos professores *sobre a complexidade da dinâmica das relações, inter-relações e conexões em que sua própria atuação está compreendida*. (Guérios e Medeiros, 2016, p 228). Trouxemos de Puchkin (1969) constructos teóricos sobre "ato de criação", "situação problemática" e "pensamento criador" e percebemos que há conexão entre eles em situações configuradas na vida e na escola. Ouso afirmar que a vida transcende os muros da escola, a significa e é significada por ela.

Identificamos movimentos diferentes nas resoluções dos alunos. Ora o de busca de palavras chaves ou de números dos enunciados para operá-los de algum modo, ou realização de resoluções algorítmicas sem preocupação com o sentido das situações configuradas nos enunciados; nesse caso, a ação didática foi linear, prescritiva, enclausurada nas amarras e nas fronteiras da organização disciplinar. Ora o de criação de estratégias resolutivas; nesse caso, as situações didáticas criativas transcenderam os limites disciplinares expressos nos enunciados, favoreceram a percepção da realidade pelos alunos, significaram-na e possibilitaram a compreensão conceitual de conteúdos curriculares. *Configuramos, assim, uma simbiose entre a atividade educativa do professor e sua ação didática em aulas de matemática, que estabelece conexões de sentido com vistas a dinamicidade num processo de aprendizagem* (Guérios e Medeiros, 2016, p. 220) viabilizada pelo desenvolvimento de estratégias de pensamento.

Estabeleço um paralelo entre o exposto e a atividade educativa dos professores em uma dimensão transdisciplinar. Diz Nicolescu (1988, p. 61) que a transdisciplariedade *es una transgresión generalizada, que abre un espacio ilimitado de libertad, de conocimiento, de tolerancia y de amor*.

> De toda evidencia, la metodología transdisciplinaria no reemplaza la metodología de cada disciplina, que permanece como lo que ella es. Pero, la metodología transdisciplinaria fecunda estas disciplinas, proveyéndoles esclarecimientos nuevos e indispensables que no pueden ser producidos por la metodología disciplinaria. La metodología transdisciplinaria podría conducir aún a verdaderos descubrimientos en el seno de las disciplinas. Esto es natural porque un aspecto de la transdisciplinariedad es la investigación de lo que atraviesa las disciplinas (idem, p.102).

Como resultado de nossa investigação, concluímos que princípios e relações didáticas estabelecidas na tríade *professor, aluno e conhecimento matemático* no processo de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas podem ser potencialmente heurísticas, criadoras e motivadoras (Medeiros e Guérios, 2016, p.228). **Potencialmente heurísticas,** por mobilizarem a descoberta, o desenvolvimento da autonomia e a criação de diferentes estratégias para um mesmo problema; **criadoras,** por serem capazes de modificar e transformar conceitos vazios de significado em situações-problema com a valorização do senso-lógico das respostas; **motivadoras,** por darem sentido aos diversos problemas que a Matemática dá conta de resolver. (grifos meus)

Projetos de docência para uma prática transdiciplinar

Apresento agora exemplos de projetos de docência desenvolvidos em perspectiva interdisciplinar com vistas ao desenvolvimento de uma prática transdisciplinar. Um deles é o denominado "Literatura e Matemática", realizado em salas de aula do 5º ano do Ensino Fundamental. Com a intenção de estabelecer um diálogo interdisciplinar entre Matemática e Literatura, este projeto propiciou aos alunos o aprimoramento da concentração e o desenvolvimento da leitura atenta de histórias e poesias cuja compreensão possibilitou a interpretação de informações. Uma das atividades que destaco foi a elaboração de um livro-jogo cuja autoria foi coletiva, de todos os alunos da turma. O enredo foi criado em função de problematizações da literatura lida sendo que o conteúdo emergiu na interface entre literatura e matemática. O cenário criado foi estimulado por um "princípio de escolha", em que o leitor pode escolher o caminho que desejasse seguir, participando, assim, da construção do livro, que para os alunos, não poderia ser pronto e acabado, mas curioso, instigante e com diferentes caminhos. Os resultados foram perceptivelmente positivos, pois os alunos extrapolaram o objetivo inicial da atividade, que durou inúmeras aulas. Houve outros projetos, como o que articulou Matemática com Arte e o que resultou na construção de um quebra cabeça decorrente da análise criteriosa da capa de um livro. O que destaco é que, no decorrer das atividades, conteúdos matemáticos curriculares tais como operações elementares, sequência numérica, quantificação, simetria, gráficos, conceitos e unidades de medidas, foram desenvolvidos em uma perspectiva conceitual, sempre por meio de situações-problemas. Percebemos que os alunos desenvolveram o prazer pela leitura e o interesse pela matemática por meio de práticas educativas.

Outros projetos de docência tiveram como temática a sustentabilidade ambiental, a financeira, a social e a econômica, cuja dimensão transdisciplinar se fez presente pela

intencionalidade educativa com vistas ao desenvolvimento de valores para a cidadania associada à aprendizagem matemática. A problematização das situações surgidas durante as atividades foi o princípio didático norteador que gerou ações investigativas resolvidas por meio de Resolução de Problemas, o que possibilitou *aprendizagem conceitual dos conteúdos curriculares provendo-os de significabilidade* (Guérios e Medeiros, 2016, p. 209). Uma das intenções foi sensibilizar os alunos para a preservação dos recursos naturais da natureza com vistas à mudanças de atitude que gerem benefícios à população, vinculando consumo e aproveitamento consciente . Nesse sentido, no decorrer do processo, percebemos a necessidade de que conceitos específicos desse campo de conhecimento, como os 4 R´s da sustentabilidade (reciclar, reutilizar, repensar e reduzir) fossem conceitualmente desenvolvidos para que as relações matemáticas fossem estabelecidas na confluência de ambos, e não como aplicação de um campo no outro. Pode-se dizer que a multidimensionalidade do real se fez presente nesta necessidade de integração de campos não previstos, mas que emergiram e foram considerados, alterando a rota estabelecida. Com a perspectiva descrita e realizada em diferentes turmas em anos diferentes, conteúdos matemáticos curriculares foram desenvolvidos, tais como operações aritméticas, números decimais, frações, porcentagem, formas geométricas, unidades de medida, sistemas monetários, tratamento de informações (tabelas e gráficos), conceitos de geometria plana (medidas, ampliação e redução, polígonos, ângulos, área e perímetro) e espacial (faces, arestas e vértices de sólidos geométricos).

Finalizo a exemplificação com o projeto que desenvolveu o ensino da matemática financeira na escola em uma perspectiva de educação para vida. Nesse caso, as situações problematizadas foram referentes ao dia a dia dos alunos e as aspirações pessoais de cada um para o tempo presente (seus desejos que poderiam ser alcançáveis) e para um futuro prospectado a partir do estudo matemático de viabilidade financeira. Por meio da resolução de problemas decorrente das problematizações efetivadas, foram discutidos temas como orçamento familiar, poupança, economia, sendo que os professores foram agregando argumentos e conhecimentos associados aos vínculos que os alunos estabeleciam entre as referências advindas da vivência em seus mundos próprios, a vivência coletiva e o conhecimento matemático escolar. Também aqui, temos uma simbiose entre perspectiva educativa e aprendizagem matemática, uma significando a outra.

Concluo com palavras de Morin (1998, p. 192) ao afirmar que *A estratégia é a arte de utilizar as informações que aparecem na ação, de integrá-las, de formular esquemas de ação e de estar apto para reunir o máximo de certezas para enfrentar a incerteza*.

Considerações Finais

Este artigo oferece subsídios para se pensar a docência em matemática em uma perspectiva transdisciplinar que vincula vertente educativa e vertente da docência dos conteúdos matemáticos escolares, pela via da significação de uma pela outra, que posso chamar de recíproca.

Respeitando o fato de que o movimento cognitivo dos alunos é um processo individual e singular, o que implica em diferentes modos de pensar matematicamente uma mesma situação em uma mesma sala de aula, as práticas desenvolvidas oportunizam que alunos e professores desenvolvam análise de circunstância, conjecturem, elaborem estratégias para soluções de situações configuradas e procedam a uma análise reflexiva circunstanciada.

A criatividade é a tônica para que a prática didática e a aprendizagem dos alunos alcancem uma dimensão transdisciplinar que oportunize a construção de significados concretos de acordo com a realidade em que as experiências vividas. Em nosso caso, intencionamos desenvolver um conceito de sustentabilidade vinculado a preceitos de uma formação cidadã que parte do Eu para o coletivo. Ribeiro e Moraes (2014, p. 250) afirmam, com o que concordo, que *ao nos implicarmos no desenvolvimento de uma atividade criativa, um fluxo de informações surge, atravessando, assim, os diferentes níveis de realidade ou de materialidade do objeto ali presente.* De fato, Morin (1988) nos alerta sobre a multidimensionalidade do real e sobre a imprevisibilidade dele constitutiva. Ribeiro e Moraes seguem afirmando que o desenvolvimento de uma atividade criativa pode requerer conhecimentos de outras áreas, o que vivenciamos com frequência sempre que aceitamos o imponderável, admitimos o imprevisível e incorporamos situações e fatos que emergiram. Nesse caso, dizem as autoras, *a dinâmica passa a ser explorada a partir da religação de determinados aspectos disciplinares do diálogo com os objetos, colocando-os em interação, buscando descobrir potencialidades, convergências, divergências, em busca de um conhecer mais global, integrado e abrangente* (2014, p. 250).

O princípio investigativo, se construído como dinamizador da atividade docente, permite que as relações didáticas estabelecidas na tríade professor, aluno e conhecimento matemático sejam ser potencialmente heurísticas, criadoras e motivadoras, como Medeiros e Guérios (2016) identificaram. É possível afirmar que se a criatividade é constitutiva do fazer docente dos professores, são significativas as chances de os alunos também a desenvolvam. Ao serem criativos, a potencialidade heurística é acentuada na proporção do desenvolvimento do pensamento estratégico. Nesse sentido, Guérios e Modtosky (2017) chamam atenção para o fato de que *o desenvolvimento do pensamento complexo, a partir do qual, é possível apreender a multidimensionalidade do real e relacioná-la, sem reduzir o conhecimento do todo ao de suas partes, ou a considerar o todo, em que as partes percam a dimensão de totalidade que lhes compõem.* É um princípio complexo que encontra ressonância na afirmação de Nicolescu (p. 3) de que a transdiciplinaridade é *la transgresión de la dualidad oponiendo los pares binários[...] que abre un espacio ilimitado de libertad, de conocimiento***.** Os exemplos aqui apresentados em que transdisciplinaridade, segundo Ribeiro e Moraes *(*2014, p. 249*)* se materializou *a partir das atividades desenvolvidas e das relações emergentes evidencia o dito de Nicolescu.*

Finalizo com uma afirmação de Edgar Morin (1998, p.192) que sintetiza o que abordei. Diz ele que *A estratégia é a arte de utilizar as informações que aparecem na ação, de integrá-las, de formular esquemas de ação e de estar apto para reunir o máximo de certezas para enfrentar a incerteza*.

Referencias y bibliografía

Guérios, E. (2002). Espaços oficiais e intersticiais da formação docente: histórias de um grupo de professores na área de ciências e matemática. Tese (Doutorado). UNICAMP: Campinas. Disponível em http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253667

Guérios, E., & Medeiros Jr, R. J.(2016). Resolução de Problemas e Matemática no Ensino Fundamental: uma perpsctiva didática**.** In Brandt, C., Moretti, M. (orgs), *Ensinar e Aprender Matemática: possibilidades para a prática educativa*. Ponta Grossa: UEPG, Cap. 10, 209-232. Disponível em http://books.scielo.org/id/dj9m9/pdf/brandt-9788577982158.pdf

Guérios, E., & Modtkoski, H. h. (2017) Conexões entre Gaston Bachelard, Edgar Morin e o pensamento

complexo. In Guérios, E., Piske. F H., Soek. A.M. & Silva E. *Complexidade e Educação:Diálogos Epistemológicos Transformadores*. Curitiba: CRV.Cap. 6, 115-136

Morin, E. (1998). *Ciência com consciência*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Nicolescu, B. (1988). *La Transdisciplinariedad. Manifesto*. Paris: Du Rocher.

Petraglia, I., Vasconcelos, M.A. (2017). Um pensamento complexo para o conhecimento e a educação. In Guérios, E., Piske. F H., Soek. A.M. & Silva E. *Complexidade e Educação: Diálogos Epistemológicos Transformadores*. Curitiba: CRV. Cap. 3. 67-80

Puchkin, V. N. (1969). *Heurística: a ciência do pensamento criador*. Rio de Janeiro: Zahar.

Ribeiro, O., Moraes, M. C. (2014). *Criatividade em uma perspectiva transdisciplinar*. Brasília: Liber Livro e UNESCO.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Capacidades superiores matemáticas en la enseñanza de la Probabilidad

Edwin **Chaves** Esquivel
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Costa Rica
echavese@gmail.com

Resumen

El currículo vigente de Matemáticas de Costa Rica fue aprobado en 2012, ha planteado importantes retos a las autoridades del Ministerio de Educación Pública de ese país. En este sentido, los docentes han enfrentado complicaciones para diseñar situaciones de aprendizaje congruentes con los fundamentos teóricos curriculares. Seguidamente se muestra un ejemplo de un problema matemático para ser desarrollado en los solones clase, cuya solución articula diferentes elementos curriculares. Se describe el momento y la intensidad en que cada uno de estos elementos participa. Entre otros aspectos se ejemplifica un modelo desarrollado por el Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica que relaciona una serie de indicadores con tres niveles de complejidad, para evaluar el nivel de participación de los procesos y capacidades matemáticas en la solución del problema.

Se espera que este ejemplo sea ilustrativo para favorecer una mejor comprensión de la puesta en práctica de este currículo y apoye una planificación educativa coherente con él.

Palabras clave: educación matemática, didáctica de la matemática, currículo matemático, planificación de tareas matemática.

Introducción

Desde el 2013 en Costa Rica se inició la implementación de un nuevo currículo matemático para la educación preuniversitaria. A pesar de que han transcurrido ya más de seis años desde que se inició este proceso, todavía quedan importantes retos para plasmar en los salones de clase lo establecido en el currículo. Una de las labores más importantes para este trabajo de aula consiste en la planificación de tareas o problemas dirigidos a los estudiantes que vengan a articular apropiadamente los diferentes elementos curriculares. En el presente documento se ejemplifica la interacción de diferentes los elementos curriculares en un problema que ha sido propuesta para trabajar con estudiantes de décimo año en concordancia con el

currículo de matemática de Costa Rica.

Síntesis de la propuesta curricular

Los fundamentos teóricos que sustentan el currículo matemático de Costa Rica promueven la generación de capacidades cognoscitivas superiores en procura de lograr una competencia en el uso de las Matemáticas para la vida, consiste en promover la capacidad para utilizar la disciplina para un mejor entendimiento del entorno y favorecer la toma de decisiones (MEP 2012).

Los conocimientos matemáticos incluidos en el currículo pertenecen a cinco áreas: *Geometría, Números, Relaciones y Álgebra, Medidas y Probabilidad y Estadística*. Para cada de ellas se definen dos tipos de habilidades: específicas y generales. Las primeras son capacidades para desarrollar en el corto plazo e interactúan con los conocimientos matemáticos del área. Las segundas se plantearon para ser logradas a lo largo de un ciclo educativo[1], normalmente están constituidas por un grupo de habilidades específicas donde se establecen diversas formas de integración (Ruiz 2018). La cantidad y calidad de los conceptos o conocimientos matemáticos ha sido formulada en función del progreso de las capacidades que se desean desarrollar.

Para una adecuada puesta en práctica del currículo se estableció como estrategia didáctica la *resolución de problemas* a partir de cuatro momentos: *presentación del problema, trabajo independiente de los estudiantes, contrastación y comunicación de estrategias, y cierre o clausura* (MEP 2012. p.13). Par los problemas en el aula, se consideran dos etapas: en la primera se plantea uno o más problemas organizados para la generación de nuevos conocimientos o habilidades, en donde el estudiante pueda construir el aprendizaje y lograr habilidades en la búsqueda de soluciones a los problemas. En la segunda etapa se promueven problemas encaminados a la movilización de los conocimientos o habilidades adquiridas previamente, con el propósito de consolidar lo aprendido y su implementación (MEP 2012).

Para lograr una adecuada transición entre interacción de los conocimientos matemáticos y habilidades específicas con las habilidades generales en camino a la competencia matemática, los estudiantes deben adquirir ciertas capacidades superiores transversales que permitan avanzar progresivamente. Estas capacidades se asocian a lo que el currículo consigna como *procesos matemáticos* (colecciones de acciones que fomentan las capacidades) y se activan al momento en que los estudiantes adquieren habilidades específicas en la implementación de conocimientos matemáticos mediante la resolución de problemas. En resumen, los procesos matemáticos constituyen actividades cognitivas que realizan los individuos dentro de las distintas áreas matemáticas. Se consideren cinco procesos

- *Razonar y argumentar: incluye actividades mentales que desencadenan formas del pensamiento matemático para desarrollar capacidades en la comprensión de una justificación, además desarrollar argumentaciones y conjeturas, entre otras.*
- *Plantear y resolver problemas: Refiere al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos. Aquí se dará un lugar privilegiado a los problemas en contextos reales. Se trata de capacidades para determinar las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema.*
- *Comunicar: es la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y*

[1] La educación primaria está constituida de dos ciclos de tres años cada uno y la secundaria académica incluye un ciclo de tres años y el último de dos años.

argumentos matemáticos. Busca generar la capacidad para expresar ideas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático de manera escrita y oral a otras personas.

- *Conectar: pretende el entrenamiento estudiantil para la obtención de relaciones entre las diferentes áreas matemáticas. De igual manera, persigue motivar conexiones con otras asignaturas y con los distintos contextos.*
- *Representar: Pretende fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares). También pretende desarrollar capacidades para traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas. (Chaves 2017. p.4)*

La participación de los procesos matemáticos en forma sistemática permite generar las capacidades superiores (que llevan los mismos nombres de los procesos). Sin embargo, para alcanzar estas capacidades es necesario que en las tareas matemáticas o problemas que se utilizan en la acción educativa posean diferentes niveles de complejidad que, a su vez, son producto de la activación de estos procesos en diferentes grados. Los niveles considerados en el currículo se resumen en:

- Reproducción: se refiere a ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados.
- Conexión: remite a la resolución de problemas que no son rutinarios, pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante, la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación.
- Reflexión: incluye la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. (MEP 2012).

Propuesta para la valoración de problemas

Debido a la importancia con conlleva el diseño de tareas o problemas matemáticos que sean consistentes con los fundamentos curriculares en cada una de las etapas, ya sea en el trabajo de aula o para la evaluación misma; a lo interno del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, se ha diseñado un modelo que permite evaluar los problemas en consonancia con los diferentes elementos curriculares. Para ello se incluyen indicadores que valoraran la intervención de cada uno de los procesos matemáticos de acuerdo con el nivel de complejidad con que se activa en la solución del problema. Entonces, el modelo está constituido por dos elementos:

- 61 indicadores que consignan la intervención de los procesos matemáticos en un problema organizados en tres grados distintos.
- 5 criterios para que a partir de los indicadores y de la estructura de su intervención se pueda realizar valoración (Ruiz 2018. p. 103).

La siguiente figura ilustra que se pueden establecer tres grados de complejidad creciente de la intervención de los procesos o capacidades.

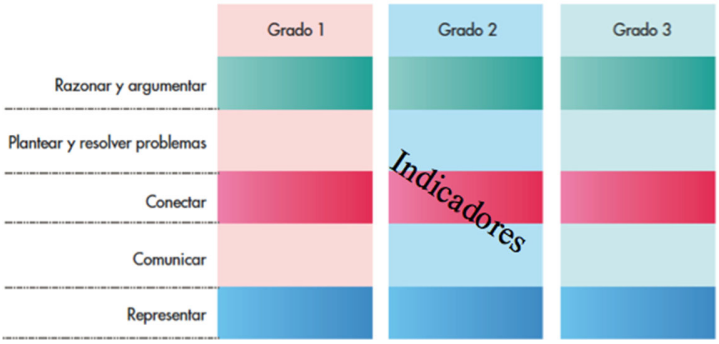


Figura 2. Grados de procesos/ capacidades superiores. Ruiz 2018. p.118

Para el diseño de estos indicadores se ha tomado en cuenta los principios establecidos en el currículo, donde se incluyen ciertas pautas generales relacionadas con los niveles de complejidad de un problema. El siguiente cuadro resume estas pautas:

Tabla 1: Niveles de complejidad: indicadores en el currículo

Nivel A: Reproducción	Nivel B: Conexión	Nivel C: Reflexión
Reconocer objetos o métodos matemáticos equivalentes. Identificar objetos matemáticos o propiedades matemáticas sencillas dentro de una situación familiar dada. Realizar procedimientos rutinarios y aplicar algoritmos estándar, en ambientes familiares al estudiante. Identificar y escribir de manera sencilla aunque coherente matemáticamente, expresiones que poseen símbolos, fórmulas y cómputos no complicados.	Interpretar una situación matemática con exigencia mayor que en el nivel de reproducción. Resolver problemas que no son rutinarios pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante. Conectar distintas representaciones de una situación (algebraicas, numéricas, gráficas, etc.). Conectar elementos matemáticos dentro de un área o que relacionan dos o más áreas matemáticas.	Plantear y resolver problemas complejos. Argumentar, justificar, y generalizar la resolución de problemas complejos. Comprobar si los resultados obtenidos corresponden a las condiciones de partida del problema. Comunicar los resultados de la aplicación de estrategias con lenguaje matemático y precisión matemática. Conectar elementos matemáticos de dos o más asignaturas.

Fuente: MEP, 2012

Una vez que la participación de cada proceso ha sido valorada, para evaluar el problema completo se realiza una ponderación según con el grado que presentó en cada proceso, donde se consideran los criterios:

- NC1: cuando en un problema la intervención de los procesos no supera el grado 1, se acepta que el problema es de reproducción.
- NC2: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 2 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de conexión.
- NC3: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 3 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de reflexión. (Ruiz, 2018, p. 124-125)

Si no se satisfacen estas condiciones se definen nuevos criterios para clasificarlo, se toma en consideración los indicadores del mayor grado y valoraciones particulares en cada problema, los procesos "Razonar y argumentar" y "Plantear y resolver problemas" ocupan un lugar preponderante en esta etapa.

Ejemplo de implementación de la propuesta en Probabilidades

Las Probabilidades fueron incluidas dentro del área denominada Estadística y Probabilidad, con el propósito de estudiar la incertidumbre y el azar en diferentes contextos. No se plantea llevar a cabo un estudio profundo y abstracto de este tema. Se inicia con análisis intuitivos en los primeros años de la primaria y paulatinamente se van construyendo diferentes conocimientos que permitan concluir, a finales de la secundaria, con ideas claras de conceptos como: diferencias entre azar y determinismo, el papel del azar en fenómenos aleatorios, definiciones: clásica y frecuencial de probabilidad, Axiomas de Kolmogorov, teoremas básicos sobre probabilidades, ley de los grandes números, entre otros. Con el logro de habilidades planteadas en currículo se espera que los estudiantes sean capaces de utilizar las probabilidades para modelar situaciones aleatorias simples y valorar su papel en la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

Seguidamente se muestra un problema que está estructurado para ser aplicado a estudiantes de décimo año (cuarto año de secundaria) en el área de Estadística y Probabilidad. Concretamente este problema se ha ubicado dentro del estudio de las probabilidades; sin embargo, como se verá más adelante intervienen también otras áreas.

Problema: lanzamiento de un dardo

Considere que usted, junto a un grupo de amigos, generan un juego que consiste en lanzar un dardo a una figura que se encuentra sobre el piso a una distancia de 10 metros. La figura está constituida por un rectángulo de 50 centímetros de ancho y 150 centímetros de largo. Las figuras internas son un hexágono regular, un círculo y un cuadrado, tal como muestra:

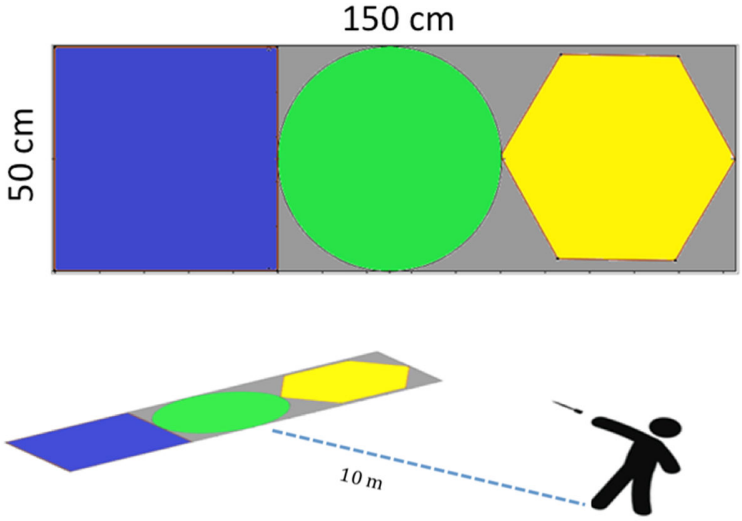


Figura 3. Lanzamiento de un dardo

Participan cuatro jugadores, a cada uno se le asigna aleatoriamente una región, cada vez

que el dardo caiga en dicha región se asigna un puntaje al jugador correspondiente independientemente de quién lance, gana el jugador con mayor puntaje después de varios lanzamientos.

Si usted tuviera que establecer este puntaje (entre cero y cien) a cada color o región dentro del rectángulo, para que el juego sea equitativo (probabilísticamente honesto) para quienes lo practiquen ¿cuáles serían los valores correspondientes a cada color?

Primeramente establezca los supuestos estadísticos o probabilísticos para que el juego sea aleatorio.

Solución

Antes de realizar el análisis curricular se requiere analizar una de las posibles soluciones.

Supuestos

Tal como fue diseñado el juego, cabe la posibilidad de que el dardo caiga fuera de la región original o incluso en una línea divisoria que sea imperceptible de identificar la región en la que se encuentra. Entonces el primer supuesto sería:

1) *Si el dardo cae fuera de la figura o justo sobre una línea divisoria entre regiones se repite el lanzamiento tantas veces como sea necesario.*

Por otro lado, debido a las características de las regiones y a las variantes en las distancias desde el punto de lanzamiento a cada una de ellas, en necesario suponer que:

2) *Es igualmente probable que el dardo caiga en cualquier punto del rectángulo original.*

Tomando en cuenta estos supuestos, de acuerdo con las dimensiones dadas para las regiones, para que exista equidad o justicia en el puntaje que se asigne a cada color (o región dentro del rectángulo), el mismo debe estar en una escala inversamente proporcional a la probabilidad de que el dardo caiga en cada una de las regiones o (lo que es equivalente) a la proporción de área que representa cada región. Por esta razón, para resolver el problema, primeramente se requiere determinar el área de cada una de las regiones.

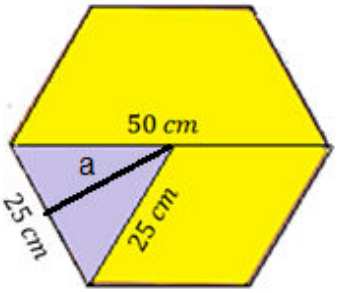
Las dimensiones del rectángulo son 50 cm de ancho y 150 cm de largo. Por esta razón, la figura de color azul corresponde a un cuadrado de 50 cm de lado, por lo que su área viene dada por:

$$50\ cm \cdot 50\ cm = 2500\ cm^2$$

Por otro lado, la figura de color verde es un círculo de 50 cm de diámetro, por ello su área viene dada por:

$$\pi \cdot 25^2 cm^2 \approx 1963{,}49\ cm^2$$

Para el hexágono se sabe que las diagonales miden 50 cm, al tratarse de un hexágono regular, el lado mide 25 cm.



La medida de la apotema del hexágono viene dada por:

$$a = \sqrt{25^2 - 12{,}5^2}\ cm \approx 21{,}65\ cm$$

El área del hexágono aproximadamente sería:

$$\frac{6 \cdot 25\ cm \cdot 21{,}65 cm}{2} = 1623{,}75\ \ cm^2$$

Finalmente, el área de la región gris corresponde al complemento de la suma de las áreas de las tres figuras con respecto al área de la región rectangular que las incluye.

El área de las tres figuras (cuadrado, círculo y hexágono) mide aproximadamente:

$$2500\ cm^2 + 1963{,}49\ cm^2 + 1623{,}75\ \ cm^2 = 6087{,}24\ cm^2$$

El área total del rectángulo en donde se incluyeron las figuras es:

$$150\ cm \cdot 50\ cm = 7500\ cm^2$$

El área de la región gris sería aproximadamente:

$$7500\ cm^2 - 6087{,}24\ cm^2 = 1412{,}76$$

De acuerdo con lo anterior y según establece la definición clásica de probabilidad, se tendría:

Región	***Área en cm²***	***Probabilidad de ocurrencia*** $\left(\frac{\text{área de región}}{\text{Area total}}\right)$
Azul (cuadrado)	*2500,00*	*0,333*
Verde (círculo)	*1963,49*	*0,262*
Amarilla (hexágono)	*1623,75*	*0,217*
Gris	*1412,76*	*0,188*
Total	***7500,00***	***1,000***

Seguidamente se deben utilizar estos valores para determinar los puntajes correspondientes a cada región, lo cuales deben estar en relación inversa a las probabilidades:

Región	***Relación inversa a la probabilidad*** $\left(\frac{1}{\text{Probabilidad}}\right)$	***Peso relativo por región***	***Puntaje por región en escala 0 a 100***
Azul (cuadrado)	*3,00*	*0,179*	*17,9*
Verde (círculo)	*3,82*	*0,228*	*22,8*
Amarilla (hexágono)	*4,61*	*0,275*	*27,5*
Gris	*5,32*	*0,318*	*31,8*
Suma	***16,75***	***1,000***	***100***

Análisis didáctico del problema

1. Conocimientos y áreas incluidas

Primeramente se van considerar las áreas matemática que intervienen en la solución del problema. Este problema resulta ilustrativo para observar esta integración de conocimientos y habilidades en diferentes áreas matemáticas. Además de Probabilidad y Estadística la solución integra las áreas de Geometría y Relaciones y Álgebra. Los conocimientos correspondientes a cada una de ellas son:

Estadística y Probabilidad

- *Reglas básicas de probabilidad y otras propiedades (MEP 2012. p. 436).*

Geometría

- *Polígonos: área (MEP 2012. p. 389).*

Relaciones y Álgebra

- *Proporcionalidad inversa (MEP 2012. p. 329).*

En concordancia con lo anterior, aparecen en el los programas de estudios habilidades relacionadas con las tres áreas, tanto específicas como generales.

2. Participación de los procesos

Seguidamente se describe la forma en que se activa cada uno de los procesos matemáticos y su nivel de complejidad. Para ello se consideran los indicadores que se elaboraron dentro del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Los códigos que aparecen son los que se utilizan en dicha propuesta tal como se puede observar en Ruiz[2] (2018). Hay que tener presente que para la clasificación se consideran los indicadores de mayor grado; es decir, puede ocurrir que haya dos indicadores de grado 1 que corresponde a un proceso, pero si hay un indicador de grado 2 que se satisface también, entonces solamente se incluye aquel o aquellos correspondientes al mayor de los grados.

Razonar y argumentar:

La información no está en forma explícita, esto obliga a los estudiantes a plantear e implementar diferentes argumentos vinculados con el cálculo de áreas y con la proporcionalidad inversa. En este sentido el problema la situación resulta novedosa para los estudiantes de décimo año (RA3.1). Por esta misma razón, se requiere desarrollar argumentos que utilizan integradamente distintos conceptos o métodos matemáticos para resolver el problema (RA3.2). Además, requieren identificar los supuestos que deben considerarse para hacer viable el juego, por ello precisan demostrar que comprenden la amplitud y límites de los problemas aleatorios (RA3.4). Grado 3

Plantear y resolver problemas

El problema planteado resulta novedoso, se requiere implementar diferentes estrategias que incluyen: el análisis visual, el cálculo de áreas, la identificación de la probabilidad de las regiones, la identificación del inverso multiplicativo de las probabilidades y su uso para determinar como el peso relativo de cada región (PRP3.1). Grado 3

Conectar

Se debe realizar la conexión entre diferentes matemáticos que se aplican para la solución

[2] Si el lector desea conocer con mayor detalle la propuesta para la valoración de las tareas matemáticas, la descripción detallada de los indicadores con los respectivos niveles de complejidad, la nomenclatura y otros detalles asociados, se le invita consultar Ruiz (2018)

y una situación de un contexto lúdico, para resolver un no estudiado y relativamente complejo (C3.1). Grado 3

Comunicar

Se ponen en juego diferentes conceptos que tienen gran trascendencia dentro de los análisis matemáticos. En primer lugar, en el análisis de los supuestos surge la idea de equiprobabilidad de los puntos dentro del rectángulo (uniformidad probabilística), el cálculo de las áreas para determinar directa o indirectamente la probabilidad que el dardo caiga en cada región, la identificación de que los valores buscados están en proporción inversa con estas probabilidades y su determinación posterior. Por ello, se requiere seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos y complejos que no han sido estudiados (COM 3.1), además expresar ideas, acciones, argumentos y conclusiones usando lenguaje matemático y precisión matemática (COM3.2). Grado 3.

Representar

En el desarrollo del proyecto se debe hacer una adecuada lectura de la información textual y visual para la determinación de áreas de cada región, pasar luego a las probabilidades o las proporciones correspondientes del área de cada región en relación al rectángulo que las incluye, luego deben convertir estos valores en nuevas representaciones que son sus inversos multiplicativos y finalmente determinar los pesos relativos de cada región en la escala de 0 a 100. (R3.1 y R3.2) Grado 3.

Con el propósito de simplificar la redacción, en la descripción anterior los indicadores del apéndice han sido parafraseados y resumidos. Sin embargo, en ella se muestra el aporte de este problema a la consecución de las capacidades superiores en cada caso.

3. Nivel de complejidad del problema

Tal como se observa en la descripción previa, todos los procesos se activan con el mayor grado, esto es una muestra de que el problema se puede ubicar con un nivel de complejidad alto, es decir es un problema de Reflexión.

4. Acción de aula y momentos de la lección

El análisis de este problema permite que los estudiantes alcancen un nivel superior de razonamiento. Este es un claro ejemplo por medio del cual se relacionan conceptos geométricos, algebraicos y probabilísticos para resolver un problema que, aunque hipotético, ejemplifica una situación lúdica que requiere de mucha destreza matemática y del dominio de diferentes habilidades para encontrar la solución.

Aunque los cálculos no son complejos, el mayor reto se enfoca a la identificación y planificación de la estrategia matemática que se debe implementar para encontrar la solución. Por esta razón, es necesario otorgar el tiempo necesario para que los estudiantes puedan debatir en la interpretación del problema y en la búsquela de una estrategia de solución. Es posible que inicien con estrategia de ensayo y error que les ayude a identificar la ruta correcta. El docente debe estar atento para apoyar este proceso.

Dada la complejidad del problema que se ha incluido en el proyecto, no es adecuado utilizarlo para la generación de conocimiento nuevo sino para una etapa posterior que permita la movilización y aplicación de las habilidades adquiridas en diferentes áreas matemáticas. Con esto se demuestra que los problemas de movilización no siempre son problemas de reproducción

de conocimientos, sino que es conveniente retar al estudiante para utilice los conocimientos y habilidades adquiridas en situaciones de mayor complejidad que le permitan alcanzar capacidades mayores de razonamiento.

Conclusión

En el marco de un currículo enfocado a la generación de capacidades superiores como el de Costa Rica, la posibilidad de realizar una descripción y clasificación en las diferentes tareas matemáticas que se proponen, ya sea para la acción de aula o para las evaluaciones, se convierte en un instrumento de vital importancia para apoyar la acción docente y su puesta en práctica de dicho currículo.

En particular, para el caso Costa Rica, estas o otras valoraciones semejantes permiten realizar un planeamiento educativo acorde con los fundamentos teóricos del dicho currículo. Estas acciones permitirían al docente dosificar el trabajo de aula de manera que exista un adecuado equilibrio entre tareas o problemas de diferentes niveles de complejidad, un equilibrio en la participación de los procesos matemáticos y de los ejes disciplinares. Al mismo tiempo, ofrece la oportunidad de evaluar la adquisición de los aspectos más tangibles como es la relación entre conocimientos matemáticos y habilidades específicas, pero más importante aún permite visibilizar el tránsito entre esta relación que ocurre en el corto plazo hacia la adquisición de las habilidades generales y de la competencia matemática en el mediano y largo plazo. Esto se consigue gracias la interacción de los procesos matemáticos y sus niveles de complejidad en los diferentes problemas, y por ende, la consolidación de las capacidades de orden superior. Todo esto privilegiando la acción estudiantil quienes son partícipes directos de todo el proceso.

Por otro lado, un planeamiento equilibrado como el que se indicó en el párrafo anterior, donde se valore la pertinencia de cada permite al docente valorar la pertinencia de cada una ellas, ya sea para la acción de aula o para las evaluaciones, en un marco mucho más amplio como es un planeamiento educativo en congruencia con los fundamentos del currículo. La capacidad de precisar el grado de participación de cada proceso matemático permite mapear las acciones que se estarían estableciendo para avanzar de acuerdo con las posibilidades de los estudiantes hacia el logro de capacidades matemáticas. Desde el punto de vista de una sana planificación educativa, la realización de esta práctica permite ir haciendo los ajustes necesarios para consolidar la intervención de los procesos en el corto, mediano y largo plazo, por lo que apunta sólidamente al fortalecimiento de la competencia matemática. Al mismo tiempo, en el caso de la evaluación, los resultados que se puedan obtener mediante la puesta en práctica de este proceso de planificación en las acciones de aula, suministran información sobre el avance de los estudiantes y su rendimiento, de modo que se puedan establecer las acciones correctivas correspondientes.

La propuesta para la valoración de las problemas es un importante insumo que se espera venga a contribuir en la articulación de una estrategia evaluativa que sea congruente con el potencial de los principios curriculares que se han plasmado en los programas de estudio.

Referencias y bibliografía

Chaves, E. (2017). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica: 2010-2017. *Memorias del II CEMACYC.* Cali, Colombia, 2017. Descargado de http://ciaem-

redumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/494/154

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado. Costa Rica: autor. Descargado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Ruiz, A. (2018). Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. Comité Interamericano de Educación Matemática. Ciudad de México, Mexico. Descargado de https://www.angelruizz.com/wp-content/uploads/2019/02/Angel-Ruiz-Evaluacion-y-pruebas-2018.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Refletindo sobre a inclusão das tecnologias digitais no currículo de matemática

Claudia Lisete **Oliveira** Groenwald
Universidade Luterana do Brasil Canoas, Rio Grande do Sul
Brasil
claudiag@ulbra.br

Resumo

Este artigo discute a incorporação das tecnologias digitais na formação de professores de Matemática no Brasil, bem como, no planejamento didático para estudantes da Educação Básica. Apresentando exemplos de ações que podem ser inseridas em cursos de Licenciatura em Matemática.

Palavras chave: educação matemática, currículo, tecnologias da informação e comunicação.

Introdução

As Tecnologias têm alterado o modo de interação e de pensamento do ser humano em relação ao mundo que o rodeia. Neste período de informatização tecnológica, no qual as atividades têm migrado para o formato digital, a Educação, e a Educação Matemática, também necessitam adequar-se a essa realidade.

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996) a Educação no Brasil tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

Desse modo, a Educação e a inserção na sociedade digital implicam em uma adequação da sala de aula à realidade tecnológica, cujo uso da tecnologia pelos docentes é condição necessária para essa adequação.

Embora o Ministério da Educação (Brasil, 2013) considere importante a utilização de tecnologias de qualidade objetivando a melhoria da Educação, o mesmo adverte que o uso de recursos tecnológicos, de forma isolada e desalinhada com a proposta pedagógica da escola, não garante a qualidade da Educação.

Ao utilizar as tecnologias para proporcionar condições favoráveis à aprendizagem, o professor deve, antes de tudo, definir o objetivo instrucional desejado para então organizar as

ações e recursos para atingir seus objetivos. E, para isto, é fundamental conhecer as possibilidades que as tecnologias oferecem e quais tecnologias são adequadas aos estudantes, ao conteúdo a ser desenvolvido e ao nível de ensino a que se destina.

Nesse sentido essa conferência apresenta uma discussão sobre a importância de incluir, nos cursos de formação inicial de professores, ações que os oportunizem utilizarem as tecnologias em seu planejamento didático.

Torna-se fundamental que os professores evidenciem as mudanças no processo de ensino e aprendizagem da Matemática quando se utilizam tecnologias digitais, apontando possibilidades que estes recursos oferecem para a Educação Básica e se sintam capacitados a utilizar os recursos tecnológicos em seus planejamentos docentes.

Formação de professores no Brasil

A responsabilidade em formar professores de Matemática, no Brasil, está a cargo das Universidades, em cursos de Licenciatura. Tais cursos habilitam professores para lecionarem na Educação Básica, na Educação de Jovens e Adultos (EJA) e a desenvolverem pesquisas na área de Educação Matemática, podendo atuar no ensino superior na formação de professores.

Os cursos de Matemática Bacharelado habilitam profissionais para lecionarem no ensino superior e a realizarem pesquisas em Matemática pura. Importante salientar que os profissionais formados em cursos de Licenciatura em Matemática possuem habilitação para lecionarem nas séries finais do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º, 9º anos), com estudantes de 10 a 13 anos, Ensino Médio, com estudantes de 14 a 16 anos, na EJA e no ensino superior na área de Educação Matemática.

Segundo o MEC/CNE (2001) "Desde o início do curso o licenciando deve adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando sua utilização para o ensino de Matemática, em especial para a formulação e solução de problemas. É importante também a familiarização do licenciando, ao longo do curso, com outras tecnologias que possam contribuir para o ensino de Matemática". Neste sentido faz-se necessário discutir as formas de desenvolver, nos futuros professores de Matemática, durante a sua formação inicial, experiências que desenvolvam a competência para atuarem com tecnologias, associadas a metodologias de ensino. Se requer um desenvolvimento profissional significativo que se centre nos usos matemáticos específicos das ferramentas e da tecnologia para que estas tenham um emprego eficaz nas salas de aula. Importante, também, que os professores se sintam seguros para incorporar ao planejamento docente o uso de tais recursos, possibilitando que os estudantes desenvolvam o pensamento matemático desenvolvendo investigações das ideias matemáticas, generalizando múltiplas representações de um constructo matemático e resolvendo problemas.

Faz-se necessário uma reflexão do modo em que os alunos podem utilizar estas ferramentas e como podem incorporar-se ao currículo de um modo significativo.

Neste sentido, segundo o NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) (2015) sem um conhecimento forte em relação as questões do uso das ferramentas e da tecnologia os docentes podem sentir-se inseguros com o emprego das mesmas em suas salas de aula.

Uso de tecnologias digitais na Educação Básica

A integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na Educação mostra-se irremediavelmente associada à necessidade de reforço da profissionalização docente e de uma (re)organização das dinâmicas escolares (Nóvoa, 2007). Segundo o autor torna-se importante perceber que ações se mostram necessárias para promover a efetiva inclusão das TIC no contexto escolar, mais especificamente, estudos de como se pode promover o desenvolvimento profissional docente para trabalhar, com eficiência e sustentabilidade dessa inclusão no planejamento escolar.

Perrenoud (2000), com base no pensamento de Tardif, salienta que as tecnologias demandam e, ao mesmo tempo, oportunizam uma mudança de paradigma, em relação às aprendizagens e não às tecnologias. Para o autor as TIC contribuem com os trabalhos pedagógicos e didáticos porque permitem criar situações de aprendizagem diversificadas.

Segundo o NCTM (2015) para uma aprendizagem significativa da Matemática, as ferramentas e a tecnologia devem ser consideradas como características indispensáveis para a sala de aula. Consideram que os Computadores, os Tablets, podem ser utilizados para reunir dados, fazer pesquisas na sala de aula e para utilizar aplicações que façam cálculos, simulações, assim como para fomentar a visualização, permitindo que os alunos se envolvam com jogos que exijam habilidades para resolução de problemas.

Os Computadores e Tablets, telefones inteligentes e calculadoras avançadas, segundo o NCTM (2015), tornam acessíveis uma gama de aplicações que auxiliam aos usuários a explorar Matemática, dando sentido aos conceitos e procedimentos, e a envolvê-los com o raciocínio matemático.

Considera-se, portanto, que as TIC se constituem em importantes recursos que auxiliam o professor em seu trabalho docente, colaborando com mudanças significativas na educação.

Nas tecnologias têm-se os dispositivos dedicados, que são aparatos tecnológicos com uma função específica e destinados a uma única finalidade, como o DVD, e os dispositivos informáticos multifuncionais, como os computadores e afins, que em conjunto com um determinado *software* de aplicação, ou aplicativos, adquirem as características e funcionalidades específicas para atender a uma determinada finalidade.

Atualmente, para a escolha de um aplicativo, considera-se importante a verificação da característica de multiplaforma, ou seja, que esteja disponível para as diversas plataformas de dispositivos informáticos, como o *Android*, *iOS* e *Windows Mobile* para dispositivos móveis, e *Windows, Linux* e *OS X* para os computadores pessoais, possibilitando o uso do mesmo em diversos ambientes tecnológicos. Nesse sentido um *software* que se adapta a essas características é o Geogebra.

A seguir apresentam-se exemplos do uso de tecnologias, em específico o *software* Geogebra.

Exemplos do uso de tecnologias digitais no planejamento escolar na Educação Básica

A Figura 1 apresenta a área de triângulos. Apresenta-se um objeto de aprendizagem, desenvolvido no Geogebra, onde é possível que o estudante visualize a transformação do triângulo em um paralelogramo e que perceba que a medida da área do triângulo é a metade da

área do paralelogramo. É possível que o estudante realize as transformações optando por uma das alturas do triângulo em relação a uma das bases.

Importante salientar que permite ao estudante observar que dependendo da base escolhida, obtêm-se diferentes alturas, permanecendo a mesma medida da área.

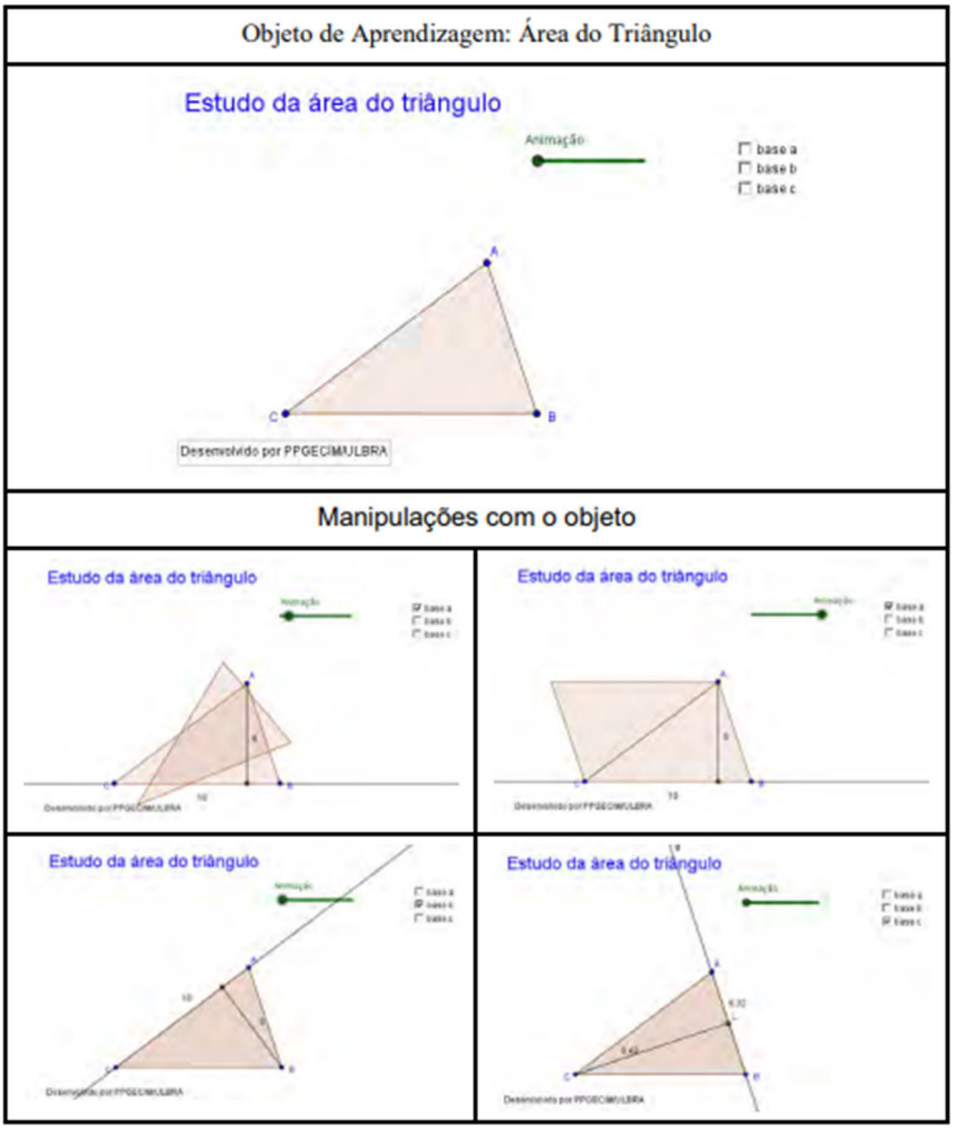


Figura 1. Objeto de Aprendizagem Área do Triângulo. Fonte: Repositório de Objetos de Aprendizagem do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil.

Outro exemplo, do uso de tecnologias na Educação Básica, é no estudo de funções no Ensino Médio, o professor pode fazer com que os estudantes tracem gráficos, utilizando um *software*, por exemplo o Winplot, ou o Geogebra.

O aluno deve perceber os tipos de crescimento e decrescimento, bem como, representar as funções na forma algébrica, geométrica e com linguagem natural. Recomenda-se que os

estudantes possam analisar o que acontece quando se altera os parâmetros em uma função, identificando os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando se altera os coeficientes.

A Figura 2 apresenta um exemplo com função quadrática.

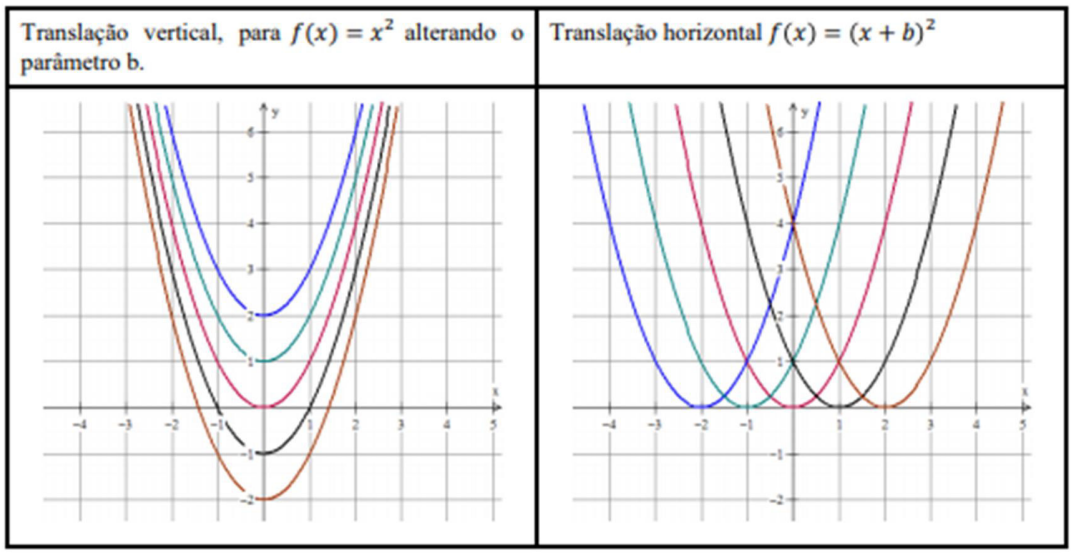


Figura 2. Translações com função quadrática. Fonte: Autora.

Outro exemplo, apresentado na Figura 3, é a construção do Tangram, que possibilita que os estudantes construam objetos geométricos seguindo passos que o levam a realizar generalizações.

A ideia é a construção de um quebra-cabeça com as peças do Tangram, no software Geogebra disponível para Tablets. A atividade se constitui na construção das figuras que compõem o Tangram e a solução do problema da disposição das peças construídas em um quadrado fixo. Para a construção das peças, que compõem o Tangram, recomenda-se que o professor oriente as ações necessárias. Descreve-se a construção das peças do Tangram e do quadrado fixo que servirá como tabuleiro para ser montado o quebra-cabeça, com lados de dimensões 4 unidades. As ações indicadas, para a construção dos polígonos a seguir, estão propostas para estudantes do Ensino Fundamental e, por isto, as dimensões utilizadas são números inteiros, tomando-se o cuidado para não trabalhar com números irracionais. Por exemplo, na construção do quadrado com lado $\sqrt{2}$ unidades, optou-se pela construção pelas diagonais do quadrado, facilitando a construção com estudantes do Ensino Fundamental.

Construindo o Tangran no software Geogebra: exemplos de construções	
1 Construindo um quadrado pelas diagonais, com comprimento 2 unidades (a construção do quadrado pelas diagonais justifica-se porque o lado do quadrado possui dimensão $\sqrt{2}$ unidades):	2 Construindo dois triângulos retângulos isósceles, com hipotenusa de comprimento 2 unidades de comprimento e altura 1 unidade de comprimento:
- defina um segmento de comprimento 2 com a ferramenta *segmento com comprimento fixo;* - marque o ponto médio entre os extremos do segmento com a ferramenta *ponto médio ou*	- defina um segmento de comprimento 2 com a ferramenta *segmento com comprimento fixo;* - marque o ponto médio entre os extremos do segmento com a ferramenta *ponto médio ou*

centro; - defina a mediatriz entre os extremos do segmento com a ferramenta *mediatriz*; - defina um círculo de raio 2 e centro no ponto médio com a ferramenta *círculo dado centro e raio*; - marque a intersecção entre a mediatriz e o círculo com a ferramenta *intersecção de dois objetos*; - defina o quadrado utilizando os pontos das intersecções e os pontos do segmento inicial com a ferramenta *polígono*; - deixe aparente apenas o quadrado e os pontos do segmento inicial.	*centro*; - defina a mediatriz entre os extremos do segmento com a ferramenta *mediatriz*; - defina um círculo de raio 1 e centro no ponto médio com a ferramenta *círculo dado centro e raio*; - marque uma das intersecções entre a mediatriz e o círculo com a ferramenta *intersecção de dois objetos*; - defina o triângulo utilizando o ponto de intersecção e os pontos do segmento inicial com a ferramenta *polígono*; - deixe aparente apenas o triângulo e os pontos do segmento inicial; - selecione a ferramenta polígono rígido e de um clique obre o triângulo recém criado para duplicá-lo.

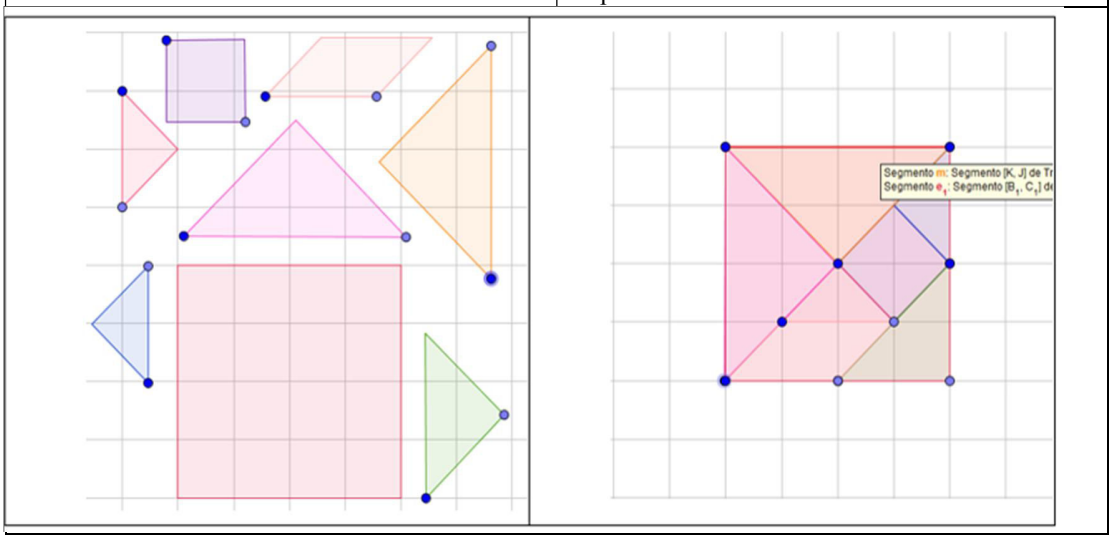


Figura 3. Construção do Tangram. Fonte: Autora.

Para finalizar, ressalta-se que o professor deve estar preparado para inserir esses recursos em sala de aula, mas também não deve ter como objetivo utilizar a tecnologia apenas pelo uso, sem uma intenção clara e bem estruturada.

Nesse sentido Barboza Jr (2009, p. 19), ressalta que: as tecnologias fornecem vários recursos que podem ser aplicados na educação, porém cada um desses recursos devem ser estudados e analisados pelos professores antes de serem usados em sala de aula, caso contrário, só servirá para informatizar o que era feito no modelo tradicional de educação.

Referências

Barboza Jr., A. T. (2009). Ambientes Virtuais de Aprendizagem um estudo de caso no Ensino Fundamenta e Médio. *Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática*, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Brasil (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. doi.org/10.1002/job.

Brasil (2013). *Guia de Tecnologias Educacionais da Educação Integral e Integrada e da Articulação da Escola com seu Território*. Retrieved from http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13018 &Itemid=948.

MEC/CNE-Ministério Da Educação, Conselho Nacional De Educação (2001). *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Parecer número CNE/CES 1.302/2001.

NCTM (2015). *Principles to actions: Ensuring mathematical sucess for all*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Nóvoa, A. (2007). *Desafios do Trabalho do Professor no Mundo Contemporâneo*. Palestra de António Nóvoa, 1–24.

Perrenoud, P. (2000). *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artes Médicas.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Modelación en la Educación de las Ciencias y Matemática en la Primaria

Maria Salett **Biembengut**
FURB – Blumenau (SC)
Brasil
salett@furb.br

Resumen

En este artículo se presentan los principales resultados de una investigación cuyos datos empíricos fueron obtenidos de una experiencia pedagógica usando modelación en la educación con 36 niños de los 3º y 4º grados de los años iniciales de la Enseñanza Básica, integrando matemática y ciencias. El objetivo de la investigación fue comprender como los niños perciben el medio ambiente, explicitan y lo representan usando conceptos de matemática y ciencias. A partir de actividades didácticas sobre el tema embalaje, dos profesoras aplicaron la propuesta y obtuvieron datos durante un semestre lectivo. Los niños se involucraron en situaciones en las cuales pudieron relatar sus experiencias, percepciones y comprensiones del medio ambiente. Las actividades desarrolladas les permitieron: observar, interpretar símbolos y significados, relacionar e integrar los datos y evaluar situaciones de diversos contextos. Y por fin, dotadas de censo imaginativo, pudieron atreverse a crear algo, proponiendo un embalaje para un producto, involucrándose en la asociación de elementos que la componen.

Palabras clave: Modelación Matemática, años iníciales de la enseñanza básica.

Introducción

El niño se da cuenta de su medio ambiente, capta informaciones, identifica objetos y respectivas denominaciones, asimila los más diversos entes que la rodean y desarrolla significados específicos a las palabras y a las ideas. Y a medida en que tales informaciones, ideas, palabras, la instigaron a comunicarse, el lenguaje la conduce a estructurar su pensamiento, construir generalizaciones sobre su entorno y hacer conexiones entre sus ideas, llevándola a concebir y crear símbolos u objetos, formar conceptos, dar la forma, el color, el sentido al mundo en que vive (Biembengut, 2007).

La comprensión del niño sobre su entorno es mediada por sus interacciones sociales. El diálogo y la comunicación están en el ámago de sus interacciones. La continua interacción entre

sus representaciones internas de pensamiento y sus experiencias diarias; modifica y perfeccionan la comprensión del niño sobre su mundo y su realidad. La relación entre el pensamiento y la palabra en un proceso dinámico, en un ir y venir del pensamiento a la palabra, de la palabra al pensamiento, se manifiesta en el aprendizaje del niño, continuamente.

En esa dinámica continua de reelaborar conceptos, cada vez más compleja y refinada, facilitada por su comunicación con entes alrededor, el conocimiento del niño ocurre. Y la continua afluencia de nuevos conocimientos, enraizada en su ambiente social, caracteriza su interacción entre lo que ya sabe y lo que está por aprender. En este ambiente, desarrolla la consciencia de la realización de sus procesos mentales y aprende a usar operaciones específicas mentales. Su concepción sobre ciertas relaciones, conceptos, objetos, a *groso modo* 'se refina', (re)conceptuando sus conocimientos existentes (Van Der Veer; Van Oers, 1991).

La matemática, por ejemplo, está presente en muchas actividades realizadas por el niño al jugar, al conversar, al resolver situaciones-problema que se presentan en su día a día. El medio ambiente es rico en formas, tamaños y colores; un escenario repleto de símbolos, signos y significados. En las acciones del niño, en casi todos los momentos, están presentes el contar, comparar, clasificar, medir, representar los más diversos entes. Este conocimiento matemático informal del niño deriva de todos los aspectos de su medio circundante, de sus experiencias diarias. Y traerá esas experiencias que forman la base de su entendimiento matemático a la escuela al pasar a frecuentarla. Y así siendo, en la escuela, esos conceptos intuitivos o espontáneos pueden tornarse conceptos científicos para el niño, si los procedimientos metodológicos utilizados para la enseñanza de ese niño le dispusieran un cuadro más abstracto de sus concepciones espontaneas, de una nueva forma de expresar lo que ya sabe sobre el medio circundante (Vygotsky, 1986).

Para eso, la escuela precisa atender esa cuestión y crear condiciones para que el niño vivencie el ambiente que lo rodea, capacitándolo para hacer asociaciones y transferencias que posibiliten la adquisición de mecanismos interpretativos y formadores de conceptos e imágenes en su mente. El aprendizaje de la matemática, por ejemplo, depende de acciones que caractericen el 'hacer matemática': probar, interpretar, visualizar, inducir, conjeturar, abstraer, generalizar y en fin demostrar y representar.

Aun, en algunas escuelas, la enseñanza de la matemática, por ejemplo, ha sido practicada de forma disociada a la realidad del niño, un acumulativo de conceptos, justificado por la secuencia de los contenidos previstos en el currículo escolar. Esta forma de enseñanza, muchas veces, lleva al niño a responder, de cierto modo, las cuestiones específicas (en general de aritmética) sin considerar la cantidad de informaciones que ya recibe de su medio ambiente, tampoco sus capacidades singulares. Eso contribuye para la pasividad e inhibición en la resolución de cuestiones efectivamente significativas.

Diversas investigaciones que tienen como fuente las prácticas de sala de aula reconocen la importancia de la intersección entre el conocimiento formal, que hace parte de los programas curriculares, y el conocimiento que el niño dispone de las influencias y de los estándares de interacción social y cultural. La perspectiva sociocultural del aprendizaje, por ejemplo, reconoce la necesidad que la escuela establezca un ambiente de aprendizaje para apoyar y orientar al niño en los primeros años de escolaridad en su desarrollo intelectual. A partir de una continua y dinámica relación entre pensamiento y expresión, orientarla, cada vez más, para una mejor comprensión de los contenidos. Echevarría y Graves (1998) destacan que un estímulo para que el

niño interactúe con los demás en este proceso de aprendizaje, socialmente mediadas por el lenguaje, es sano para el desarrollo intelectual.

Así, utilizar las situaciones cotidianas o del medio circundante puede contribuir, por ejemplo, para una mejor formación del conocimiento del niño en cualquier fase de la escolaridad, desde: identificar, describir, comparar y clasificar los objetos y cosas alrededor; visualizar y representar los más diversos entes; representar y resolver situaciones-problema y, especialmente, comprender mejor los entes que la rodean. Al final, el niño tiene amplia gama de conocimientos y experiencias anteriores al usar formas para solucionar las situaciones-problema.

Kamii, Rummelsburg y Kari (2005) promovieron la utilización de resolución de problemas para desarrollar en los niños de los años iniciales de la Enseñanza Básica la capacidad de clasificar, crear una serie de objetos, descubrir y decidir sobre las relaciones espaciales y temporales. Con base en investigaciones como la referida, se puede afirmar que la capacidad de los niños en los años iniciales de la Enseñanza Básica de compartir sus pensamientos, sus ideas, eficazmente, uno con otros, demanda tiempo y procedimientos metodológicos de enseñanza que les permitan desarrollar formas de lenguaje y comunicación formal, en el ámbito escolar. En esa perspectiva, la enseñanza de matemática y ciencias precisa ser por medio de actividades que le permitan entender el medio ambiente que lo rodea en el sentido cuantitativo y llevarla a representar, por medio de símbolos matemáticos, los entes o artefactos que observa y por los cuales se interesa.

Así, se considera la Modelación Matemática y Ciencias en el ámbito escolar, en los Años Iníciales de la Enseñanza Básica. La modelación ha estado presente en los documentos oficiales educacionales, como proceso o método de enseñanza en las diversas fases de escolaridad. En los años iniciales, su propósito es crear condiciones para que aprenda a investigar y pase a comprender el significado de lo que está estudiando. Una vez que las actividades envueltas en el proceso buscan llevar al niño a entender una situación o un contexto y conocer el lenguaje de la matemática que le permita describir, representar, resolver una situación o un asunto de su contexto e interpretar/lidiar el resultado dentro de ese contexto (Biembengut, 2007).

Cada persona procesa la información que percibe de un modo, de acuerdo con sus propias funciones. En la realización de cualquier actividad es requerida de la persona una serie de procedimientos que empieza por la cuidadosa observación de la situación a ser realizada, después por la interpretación y por la representación del que la realizó. Aunque ese proceso ocurra sin que la persona se dé cuenta de esas fases, de la forma como realiza cada actividad requerida expresa sus percepciones de la realidad, del deseo de comprensión y representación.

En el proceso de percibir un fenómeno, comprender y explicar por medio de una teoría y respectivos lenguajes o sistemas de símbolos además de describir o representar externamente, se puede reconocer los mismos procesos mentales que se realizan para construir lo percibido. Basada en la literatura sobre el proceso cognitivo, prescribió las fases de la Modelación Matemática para los años iniciales de la Enseñanza Básica, como siguen.

1ª fase: *Percepción y aprehensión.* Precisa estimular la percepción y el interés de los niños sobre algún ente o tema de su contexto, elegido para que valga como guía. Las actividades propuestas buscan envolverlas con la naturaleza de este tema (belleza, encanto, harmonía) y con los símbolos contenidos en temas que les sean familiares, aguzando la observación y la atención para las cosas que aún no se haya dado cuenta. Esto significa que este tema valga como algo que las motiven, en otra instancia, a prender matemática, ciencias, entre otros. Fase en que los niños

se adentran en el tema y obtienen datos.

2ª fase: *Comprensión y explicación.* Consiste en llevar a los niños a identificar algunos elementos de este tema de su contexto en el sentido cuantitativo y cualitativo y, con base en las ideas las cuales ya poseen, enseñarles lo que aún desconocen: conocimientos que hacen parte del contenido curricular y también no curricular, pero que se hacen presentes en su entorno. En la medida en que se enseña cada contenido, lleva a los niños a explicitar estos contenidos, de las más diversas formas: oralmente, cuestionándolas, o escrito, por medio de dibujos, ejercicios, entre otros.

3ª fase: *Representación y modelación.* Trata de despertar el sentido creativo de los niños para resolver cuestiones sobre entes que observan y se interesan y hacer representaciones de algún ente en términos de un modelo. Es el momento de impulsarlos a reorganizar variedades de situaciones, plausibles de ser traducidas en el lenguaje de la matemática y de las ciencias que les permitan hacer uso de estos conceptos para aprender más sobre tantas otras cosas de su entorno fuera del contexto escolar.

Por considerársele condición natural del proceso cognitivo, *¿cómo el niño de los años iniciales de la Enseñanza Básica por medio de la Modelación percibe algunos entes del medio, explicita y se representa utilizándose de conceptos matemáticos y de ciencias de la naturaleza?* Basados en la aplicación de la Modelación por medio de esas tres fases, en esta investigación el objetivo fue comprender como los niños de los años iniciales de la Enseñanza Básica perciben el medio que las circunda, explicitan y representan ese medio usando conceptos de matemática y ciencias de la naturaleza.

Procedimientos metodológicos

Para alcanzar ese objetivo, la investigación fue organizada en tres etapas: la *primera*, elaboración de las actividades didácticas y preparación de profesoras, colaboradoras de la investigación en la aplicación; la *segunda*, aplicación en aula para dos grupos de estudiantes; y la *tercera*, para estudio y análisis de los datos, como está explicitado enseguida.

1ª Etapa: Actividades didácticas y preparación de la profesora

Se hizo un material didáctico, sobre el tema-guía: *embalaje*, considerando las fases *percepción y aprehensión, comprensión y explicación y significación y expresión* con enfoque en los contenidos de matemática y ciencias, simultáneamente. En seguida, fueron invitadas las profesoras de los Años Iníciales de la Enseñanza Básica a participar de un curso para que conozcan este proyecto. El curso con duración de 45 horas contó con la participación de 18 profesoras. A partir de las explicitaciones, reflexiones y sugestiones de las profesoras durante el curso y al final de este, se buscó perfeccionar el material.

Todas las profesoras aplicaron las actividades didácticas y participaron en las reuniones quincenales con el grupo de la coordinación de esta investigación, a fin de informar los sucesos. Sin embargo, se optó por acompañar y analizar los datos de las aplicaciones didácticas de dos profesoras la misma escuela pública a 2 km de la institución en que la coordinación de esta investigación pertenecía, facilitando hacerse presente a las clases durante la aplicación de la propuesta para observar los sucesos. Las profesoras aplicaron la propuesta durante el segundo semestre lectivo de 2017 y ofrecieron datos durante el proyecto y al final de este.

2ª Etapa: Aplicación e información de los resultados

Participaron de esta investigación 36 niños, subdivididos en dos clases, de cada una de las profesoras: 20 del 3º grado y 16 del 4º grado de la Enseñanza Básica. La dirección de la Escuela, bien como los padres o responsables de los niños acataron y apoyaron el proyecto. Se destaca que el material didáctico les sirvió de guía a las profesoras. El material didáctico, dividido en 10 actividades, envuelve conceptos matemáticos (aritmética, geometría y sistemas de medidas) y de ciencias.

Las profesoras reorientaron cada actividad en diversas subactividades, considerando los tiempos requeridos por los niños para darse cuenta y entender tanto las propuestas como los contenidos programáticos, sin limitarse al programa a ser cumplido. Aunque las profesoras hayan recibido el aval de la dirección escolar y de los familiares de los niños, optaron por aplicar la propuesta de Modelación dos días por semana, por dos razones: desarrollar los demás contenidos del programa curricular de acuerdo con el libro didáctico en los otros tres días lectivos y evitar posibles contratiempos con los familiares de los niños.

Quincenalmente, las profesoras relataban a la coordinación de esta investigación: sucesos, actividades realizadas por los niños y cambiaban ideas y sugerencias. Los datos se derivaron de observaciones realizadas por la coordinación, informes de las profesoras, trabajos realizados por los niños y evaluación escrita realizada por los niños conteniendo cuestiones que envolvían los contenidos curriculares. Las profesoras disponían de un formato para registrar los sucesos, conteniendo: fecha, subactividad, contenidos desarrollo de los sucesos. Entre los sucesos las profesoras registraban dificultades y avances de aprendizaje de los niños y tiempo requerido.

3ª Fase: Análisis de los datos

Para comprender como esos niños de los años iniciales de la Enseñanza Básica, por medio de la Modelación en las ciencias de la naturaleza y matemática percibieron, explicitaron y representaron las actividades didácticas, se apoyó en la esencia de los procesos cognitivos (*percepción*, *comprensión*, *representación*) presentados por algunos investigadores de ciencia cognitiva e investigadores de educación matemática que se fundamentan en teorías sociocognitivas. Para cada fase, fueron establecidos criterios e indicadores que permitiesen comprender los datos obtenidos por medio de las observaciones realizadas por la coordinación, de los informes descriptos por las profesoras y de los trabajos y evaluaciones escritas realizadas por los niños. Para establecer indicadores que pudiesen verificar cambios en cada fase, se utilizaron las orientaciones de los Documentos Oficiales sobre los contenidos programáticos que estudiantes de estos años escolares (3º y 4º) precisan saber. Los criterios en cada fase y los respectivos indicadores se encuentran en orden creciente de dificultad.

En la fase *percepción y aprehensión* del embalaje: colores, formas geométricas, palabras, símbolos, orientaciones sobre el producto y direcciones. El análisis de esta fase fue basado en los sucesos en sala de aula de todo el grupo de niños, mediante observación y registro de la coordinación de la investigación. La razón de basarse en la percepción del grupo y no de cada niño se debió al hecho de que, al ser instigadas a expresarse oralmente su percepción, respondían casi sincrónicamente.

En la fase *comprensión y explicación* de los contenidos programáticos de ciencias y matemática: respuestas o cuestionamientos de forma oral en las clases, resolución de actividades escritas individual. El análisis de esta fase tuvo como fuente los registros de las profesoras sobre las evaluaciones orales y escritas realizadas por los niños.

En la fase *representación y modelación* del embalaje: hechura de embalajes en grupos de 4 o 5 niños y evaluación de contenidos, individual. En el análisis de los embalajes elaborados por los grupos los criterios fueron: forma y tamaño, detalles (datos, marca), originalidad. Y de los contenidos de ciencias y matemática: resolución de cinco situaciones-problema con algunos tópicos tratados durante el proyecto. Esta evaluación fue preparada por la coordinación de la investigación, en conjunto con cada una de las profesoras, aplicada al final del proyecto, para ser elaborada individualmente. El análisis consideró, también, las entrevistas concedidas por los 43 niños, las dos profesoras y la directora de la escuela, al final del proyecto.

Descripción y Discusión de los Resultados

Se presentan, a seguir, (a) relato y discusión de las actividades realizadas por las dos clases conjuntamente, (b) síntesis de los principales resultados, de acuerdo con los criterios e indicadores adoptados. Las diferencias de las aplicaciones entre cada clase (3º y 4º grados) ocurrieron en la extensión de los contenidos de matemática y ciencias y en el tiempo requerido para que cada clase aprenda y realice las actividades propuestas. Debido a las similitudes de los sucesos y por razón de espacio, la descripción y la discusión de los resultados son hechas en las dos clases conjuntamente, destacando confluencias de acontecimientos y desarrollo de las actividades en cada una de las tres fases: *percepción y aprehensión*, *comprensión y representación*, y *representación y significación*. Vale destacar que esas tres fases ocurrieron en cada actividad, en un proceso circular de construcción de relaciones entre cada componente, cada contenido curricular o no curricular enseñado.

(1ª) *Percepción y aprehensión*

Esta fase pretendió estimular la percepción de los niños de entes que envuelven un embalaje. Ocurrió en diversos momentos durante el semestre lectivo, a cada cuestionamiento sobre embalaje, a cada contenido programático que se pretendía desarrollar. En los dos primeros días del inicio de la propuesta para los niños, esa fase tuvo un carácter especial. Por ejemplo, las profesoras empiezan la propuesta cuestionando a los niños sobre: *lo que es un embalaje, para que sirve y cuales conocían*. Este momento fue de euforia: todos querían decir las respuestas de las cuestiones al mismo tiempo; que conocían diversos embalajes, destacar cuales eran los productos. En secuencia, las profesoras explicitaron la propuesta (aprender los conceptos de matemática y ciencias de la naturaleza a partir de embalajes) y que deberían traer algunos embalajes en la próxima clase.

En la clase siguiente, organizados en grupos, los niños empezaron a manipular los embalajes, observándolos y decir lo que perciban en ellos. La primera percepción enfoca los colores y las imágenes sugestivas del producto que viene contenido el embalaje. Pero, siguiendo, otros ítems impresos fueron percibidos, como: formas geométricas, palabras (dirección, descripción del producto), números (descripción de cantidades). Dos grupos del 4º grado identificaron el código de barras y símbolo de porcentaje, medidas; y uno del 3º grado, tamaños de los embalajes. Diálogo y comunicación contribuyeron para que los niños aguzasen sus percepciones y, así, los conocimientos (Sfard, 2001).

En la secuencia, los niños describieron y registraron lo que identificaron en los embalajes, permitiéndoles a las profesoras saber lo que los niños ya conocían. Y de este punto, las profesoras presentaron la cuestión- guía que permitiría desarrollar la propuesta de Modelación: ¿*Qué es preciso para hacer un embalaje*? Y después de instigarlas a la respuesta, las profesoras escribieron las sugerencias de los niños en el pizarrón e incluyeron algunas otras. Entre éstas:

(Q_1) *¿Embalaje para qué producto y qué consumidor?* (Q_2) *¿Cómo deben ser la forma, el color y las imágenes?* (Q_3) *¿Cuál es el material necesario?* (Q_4) ¿C*uáles son las informaciones que deben ser impresas?* (Q_5) ¿C*uáles deben ser las dimensiones: área, volumen, capacidad, masa?* (Q_6) *¿Cuál es la cantidad de material?* (Q_7) *¿Si este embalaje será transportado, cómo embalarlo?* (Q_8) *¿Cuánto tiempo tardará para llegar a destino?* (Q_9) *¿De dónde viene y para dónde irá?* (Q_{10}) *¿Sobre el código de barras: qué es? ¿Qué informaciones trae? ¿Cómo inferir las informaciones*? (Q_{11}) *¿*Q*ué destino se le puede dar al embalaje después de utilizado?* A partir de esas cuestiones, cada profesora estableció un orden para que se pudiera desarrollar con su respectiva clase de estudiantes (3º o 4º grados) los contenidos programáticos de matemática y ciencias, durante el semestre lectivo.

Esa fase, *percepción y aprehensión*, no ocurrió a la par de los demás; durante todo el proyecto, siempre que fuera pertinente, las profesoras los llevaban a percibir algo más en los asuntos tratados, para así abstraer y saber aplicar esos conocimientos de ciencias y matemática en la solución de situaciones-problema propuestas. Por ejemplo, en la primera clase, cuando los niños observaban y manipulaban los embalajes, ninguno mencionó sobre la descripción de los productos (valores nutricionales). Pero, en el momento en que cada una de las profesoras fue a enseñar esos contenidos de ciencias, los niños percibieron esas informaciones descriptas en los embalajes de varios productos.

Los sucesos registrados mostraron que los niños percibieron y aprendieron los aspectos de los embalajes. Eso se comprobó en la evaluación escrita y en el embalaje creado. Al final del proyecto, las profesoras les cuestionaron a los niños sobre qué es lo que percibieron de los embalajes. Y entre los diversos aspectos levantados, uno de los grupos de niños del 5º grado llamó la atención sobre la cantidad de basura que los embalajes traían, alertando que deberían reciclarlos. Dice Gombrich (1986) que primero se mira para el objeto con una mirada atenta y después para otros elementos que lo componen.

(2ª) *Comprensión y explicación*

Esta segunda fase consistió en enseñarles a los niños a entender los diversos elementos característicos de embalajes en el sentido también cuantitativo y llevarlos a representar, basados en los conceptos aprendidos de matemática y ciencias, respuestas a las once cuestiones (presentadas anteriormente). Estas cuestiones les permitieron a las profesoras tratar, discutir y enseñarles a los niños todos los contenidos programáticos de matemática y ciencias, bien como otros varios tópicos de las disciplinas del período escolar de cada grupo de niños (3º o 4º grado), teniendo como referencia los PCN (*Parâmetros Curriculares Nacionais*), que aunque no fueron parte directa del proyecto, justificaron integrarlas.

Se citan algunos de los tópicos de los contenidos programáticos tratados en cada cuestión. Sobre ciencias de la naturaleza: Q_3 – constitución, resistencia del material (cartón, plástico, metal); Q_4 – composición de los productos, nutrientes; Q_{11} – basura, reciclaje, protección del medio ambiente, recomendaciones a la salud. Sobre matemática: Q_5, Q_6, Q_7 – formas geométricas, operaciones con números racionales, medidas lineales, superficie, volumen, capacidad y masa; Q_7, Q_8 – espacios geográficos, escala, mapa, tiempo. Otras asignaturas: todas las cuestiones permitieron enseñar algo sobre la lengua materna y formas de lenguaje no verbal (diseño gráfico, código de barras); Q_7, Q_8 e Q_9 – geografía (localización, distancia, producción); Q_1 e Q_2 – artes (composición, colores, estética); Q_{11} – ética (responsabilidad social, protección al medio ambiente). Las respuestas a estas cuestiones formuladas por los niños sobre la orientación

de las profesoras permitieron conferir indicaciones de los PCNs (*Parâmetros Curriculares Nacionais*) referentes a los objetivos generales de la Enseñanza Básica.

Durante todo el período de desarrollo de las actividades, los niños disponían de diversos tipos de embalaje, los cuales eran manipulados, consultados, en la medida en que los contenidos eran desarrollados, no desvinculándolo de la realidad. Con apoyo del laboratorio de informática, fueron planificados momentos en que los niños pudieron buscar más informaciones sobre las diversas cuestiones en sitios electrónicos por medio de *internet*. Las profesoras formalizaban los contenidos y presentaban un conjunto de ejercicios complementarios en el momento en que juzgaban necesario. Además de eso, procuraban instigar en los niños un sentido investigativo y la explicitación de sus hechos unos a los otros. Fueron momentos importantes en que los niños estuvieron orientados a socializar conceptos aprendidos y estimulados a explicitar verbalmente entre ellos los conceptos nuevos.

Como ya fue dicho anteriormente, en cada actividad, basadas en las cuestiones levantadas, las profesoras, de acuerdo con sus proyecciones, aplicaron evaluaciones de forma oral y escrita para verificar lo que los niños habían aprendido en relación a los contenidos de matemática y ciencias. Para efecto de esta investigación, los resultados de estas evaluaciones orales y escritas constaron en la descripción de sucesos realizadas por las profesoras.

En las evaluaciones orales, cada profesora llevaba su grupo de niños a algún ambiente de la escuela y/o presentaba algún material (película, revistas, imágenes del medio ambiente) y efectuaba cuestiones sobre elementos de ese ambiente o de esos materiales, cuyas respuestas implicaran conceptos matemáticos y de ciencias desarrollados. Todos los niños participaban respondiendo las cuestiones. La profesora efectuaba las cuestiones de acuerdo con el asunto abordado, dirigiéndose a todos los niños y solicitaba que levanten la mano caso quisieran responder. Si algunos niños dejaban de responder alguna cuestión, a medida en que uno presentaba la respuesta correcta, la profesora cuestionaba a los demás sobre la validad de la respuesta del compañero/a, envolviendo al grupo en la validación. Kieran (2001) y Lerman (2001) destacan cuan productivas son las discusiones entre los estudiantes al buscar comunicar sus ideas a los demás, y cuan capaces los tornan en la realización de las tareas propuestas, inclusive en sus actividades fuera del ambiente escolar.

En las evaluaciones escritas, cada profesora elaboraba un conjunto de cuestiones relativas a los contenidos que constaban en los respectivos programas curriculares de ciencias y matemática del período lectivo del grupo de niños (3º o 4º grados), no sólo relacionado al tema embalaje. En esas evaluaciones, cada niño, individualmente, debería resolver las actividades aplicando esos contenidos de ciencia y matemática. Fueron realizadas cuatro de estas evaluaciones escritas, una al final de cada mes. Al final de cada actividad, en la evaluación escrita, más de 30 de los 43 de niños efectuaban correctamente casi todas las cuestiones de matemática y ciencias, alcanzando el índice de acierto superior a 80%. Y apenas seis niños (cuatro del 3º y dos del 4º) presentaron índice de acierto inferior a 25%.

Las dos profesoras disponían de un tablero con el nombre de cada niño para anotar el índice de desempeño de ciencias y de matemática, en cada evaluación escrita; y otro tablero, constando el grupo, respectivos nombres de los niños, e índice de desempeño del grupo. Esas actividades realizadas por los niños mostraron sus manifestaciones resultantes de sus percepciones y comprensiones. Según George (1973), la percepción está estrechamente relacionada con el pensamiento, la resolución de problemas y los procesos decisorios. La

diferencia entre esos puntos reside en el grado de complejidad de la percepción y su relación con la situación real de la resolución de problemas - lo que se cristaliza en torno de la naturaleza de la percepción influenciada por las emociones, proyectos, deseos y/o intenciones inconscientes.

(3ª) *Significación y modelación*

En esta fase, los niños fueron encorajados a representar los diversos datos obtenidos de cada actividad y/o subactividad propuesta y también a reconocer contenidos matemáticos y de ciencias de la naturaleza aprendidos en otros asuntos, otras cuestiones, basados en el conocimiento y en las referencias de los aportes sobre embalajes. Significó, construir relaciones entre los contenidos curriculares y el contexto a partir de una subyacente concepción de matemática y ciencias de la naturaleza, con la que proviene la integración del conocimiento dentro de la estructura teórica.

Al final del semestre lectivo, les fue propuesto a los niños la creación de un embalaje para algún producto. Reunidas en grupos de tres o cuatro, deberían elegir un producto que utilice algún embalaje, analizar este embalaje e imaginarlo con otro para el mismo producto. Deberían discutir sobre forma, tamaño, colores, estética, datos que puedan constar en el nuevo embalaje a ser creado. Formaron cuatro grupos en el 4º grado y cinco en el 5º grado. Los embalajes elegidos fueron para los productos que tenían acceso, como: golosinas (2), biscochos (2), gaseosas o jugo (4), jabón (1).

Los niños trajeron a las clases los embalajes de productos que eligieron y, durante tres días lectivos, respectivamente 6 horas/aula en cada grupo, analizó los diversos elementos presentes en el embalaje, discutió sobre lo que se podía cambiar y por qué cambiarlo. En secuencia, pasaron a esbozar posibles versiones del modelo de embalaje. Este diseño fue una primera expresión en el respectivo grupo. Y de este diseño buscaron utilizar materiales que pudiesen crear un nuevo embalaje. Por medio de este modelo geométrico, cada grupo pudo aplicar los diversos conceptos aprendidos, efectuar interpretaciones geométricas y la compresión de lo que es simbólico. Eso se mostró en los cambios de ideas entre ellos durante la elaboración de los embalajes.

Los embalajes creados por los nueve grupos se centraron en el modelo geométrico, en la expresión estética (colores, formas y tamaños de las fuentes de letras) y en la creación de otra marca al respectivo producto. Apenas un grupo del 3er grado presentó una forma prismática de embalaje para gaseosas. Los demás grupos alteraron sólo los tamaños. En todas constaron los dados que aparecen en los embalajes, copiando algunos, alterando otros, como: las descripciones sobre la composición del producto, la dirección, la marca y un conjunto de líneas para representar el código de barras. Los nove trabajos de los niños muestran que la mayoría se expresó bien las palabras en la descripción de los productos y en los registros constantes en embalajes.

La actividad cognitiva empezó con la experiencia de los niños, pasó de la experiencia vivida por palabras, en la comunicación de sus ideas a los profesores y entre ellas al grupo y continuó conectándose con la representación de datos, culminando con la elaboración de un modelo geométrico de embalaje haciendo constar los diversos elementos requeridos. Como la representación externa – modelo, antes de todo depende de cómo el niño percibe el ambiente, comprende, representa y procura comunicarlo, los embalajes creados no dejan de ser una simplificación de lo que conocieron, de lo que percibieron y aprendieron. Los embalajes criados, en este caso, son desprovistos de detalles refriéndose a lo que percibieron, comprendieron, los resultados aseguran verdad en muchas situaciones isomorfas (Engel; Vogel, 2007).

Al final del proyecto, fue organizada por la coordinación de esta investigación, conjunto con esas profesoras, una evaluación escrita para cada grupo de niños (3º y 4º grados), especialmente con la finalidad de verificar el aprendizaje de todos los contenidos de matemática y ciencias tratados en el período lectivo de vigencia del proyecto. Esta evaluación tuvo fines apenas para el análisis del proyecto. La evaluación de cada uno de los grupos fue compuesta por cinco situaciones-problema relativas al tema embalaje, cada una constaba de dos cuestiones que requerían aplicación de algún tópico de matemática y de ciencia para solucionarlas. Ejemplo de una de las cuestiones para el grupo del 4º grado: *Observe, en la imagen del embalaje de galletitas impresa a seguir, respectivos datos sobre sus medidas lineares (largo y ancho) expresas en el esquema y datos en el cuadro de valores. (1ª) ¿Qué cuantidad de material fue necesario para este embalaje (medida de la superficie)? (2ª) ¿Cuáles son los nutrientes que esa galletita trae?*

Las correcciones de esas evaluaciones fueron realizadas por las respectivas profesoras conjuntamente con la coordinación de la investigación. Los porcentajes de cuestiones resueltas de forma correcta: de los 20 niños de 3º grado, 9 alcanzaron arriba de 70% de matemática y 80% de ciencias, 11 entre 50 a 65% de matemática y en torno de 70% de ciencias y 4 niños en torno de 35% de matemática y 45% de ciencias; de los 20 niños del 4º grado, 7 alcanzaron arriba de 70% de matemática y de 85% de ciencias, 09 entre 50 y 70% de matemática y entre 60 a 70% de ciencias, y 4 abajo de 30% de matemática y en torno de 40% de ciencias. Las dificultades de la mayoría de los niños del 3º grado fueron en operaciones aritméticas que envolvían medidas de superficie y volumen; y del 4º grado, operaciones que envolvían números racionales en la forma decimal. En ciencias, las dificultades en recordar algunos conceptos relativos a los componentes del medio ambiente y de la preservación de la salud.

La coordinación de la investigación con las dos profesoras reflejaba sobre los resultados de esta evaluación y de las cuatro evaluaciones escritas realizadas al final de cada parte del contenido programático que muchos de esos niños que no supieron aplicar algún concepto de matemática y ciencia en esta evaluación, resolvieron acertadamente cuestiones similares contenidas en una de las cuatro evaluaciones escritas. Por ejemplo, 60% de los niños del 4º grado que no supieron calcular área - referente a la cuantidad del material del embalaje, resolvieron cuestiones similares en la 3ª evaluación escrita. Eso indicó que comprendieron y memorizaron tales contenidos, pero por no continuar usándolos, por medio de ese abordaje, se olvidaron. Es preciso aprender para hacer y hacer para aprender. Un proceso cíclico, en que el conocimiento se va formando harmónico, estructural, vital y orgánico.

Las profesoras consideraron que el tiempo planeado para enseñar estos tópicos a los niños, así como el número de actividades propuestas sobre los asuntos no fueron suficientes. Asimismo, posterior a la corrección de esta evaluación, las profesoras les solicitaron a los niños que se agrupen para rehacer las cuestiones que no supieron hacer durante la evaluación escrita. En lo grupos, rehicieron las cuestiones acompañado por la coordinación de investigación. Según Cobb y Yackel (1996) y Van Oers (2001), los niños, en las interacciones de las prácticas de sala de aula, reestructuran sus creencias y sus propios conocimientos, mejoran sus capacidades de comunicar unos con los otros, internalizan los conceptos, desarrolla sus sentidos crítico y creativo y también aprenden a escucharse, unos con otros, reafirmando su pensamiento y práctica de diferentes maneras. Comunicar una idea, una comprensión de algo a otro requiere una dinámica siempre en cambios y extremamente sensible al contexto y a la comprensión.

Síntesis de los principales resultados

En síntesis, los resultados presentados por esos 36 niños, integrando matemática y ciencias naturales por medio de los procedimientos envueltos en la Modelación durante un semestre lectivo: de los trabajos realizados por (embalajes) al final del período lectivo, de la evaluación escrita conteniendo los contenidos desarrollados en el semestre lectivo y, especialmente, de la descripción de las sucesos observados y registrados por las profesoras en cada actividad, justifican y motivan a continuar con esta propuesta para los años iniciales de la Enseñanza Básica. Algunos resultados que se evidenciaron:

Los niños realizaron todas las actividades en un clima de motivación e interés. Continuamente querían relatar sus ideas y sus trabajos y, gradualmente, sentían que sus ideas eran importantes y válidas. Entre tantos dichos de los niños, las profesoras remarcaron: *En el embalaje que hicimos para poner caramelo nosotros diseñamos un caramelo rojo y que es rico; pero nosotros sabemos que no se puede comer siempre porque estropea los dientes* (niño C_1, nueve años*); Nosotros vimos un montón de embalaje, sirve para lo que está adentro no se estropee cuando hay que viajar de una ciudad* (niño C_2, ocho años). *¿Lo que son estas rayitas negras del lado de esta caja, tiene unos finitos y otros gorditos?* (niño C_3, diez años).

La concepción de matemática y de ciencias se fue formando a partir del proceso de enseñanza utilizado, llevando al niño continuamente a percibir y aprender los diversos entes que traen los embalajes, que van más allá de la cuestión estética y de la conservación del producto, especialmente, sobre la responsabilidad de todos con el medio ambiente y con la salud.

Los contenidos de ciencias naturales, como: diferentes ambientes naturales de los seres vivos, componentes que se presentan en estos ambientes (agua, luz, calor, solo), funciones de alimentación, sustentación, locomoción y reproducción, preservación de la salud y del medio ambiente, entre otros, fueron desarrollados de forma integrada, sin desvincularse de la matemática y de las prácticas de oralidad, lectura y escrita de la lengua materna.

Los niños recorrieron etapas da investigación científica, según la propuesta de los PCN (Brasil, 1998) al ser instigadas durante todo el proceso a formularles preguntas y suposiciones sobre los diversos elementos que envuelven un embalaje; buscar y recolectar datos por medio de observación directa o lectura de textos; organizar y registrar esos datos a través de diseños, cuadros, esquemas, listas y pequeños textos; interpretar estos datos y al comunicarse oralmente y por escrito sus ideas, datos, resultados.

Los trabajos hechos por los niños muestran que percibieron y comprendieron los contenidos desarrollados a partir de las cuestiones relativas al embalaje y también supieron crear: concebir las formas, los colores; representar ese medio a partir de la técnica y de los conceptos aprendidos. Con base en su percepción y composición del modelo geométrico del embalaje, cada niño pudo comprender mejor los conceptos de la matemática y ciencias, mejorar el entendimiento sobre la responsabilidad de todos con el medio ambiente y con la salud de las personas.

Las profesoras voluntarias se mostraron motivadas con el proceso y los resultados, asumiendo la propuesta como parte de su programa curricular. Si por acaso en algún momento, tuvieran que tomar decisiones sobre lo que deberían enseñar, a quien orientar y como responder determinadas solicitaciones de cada uno de los niños. Todas esas tareas las motivaban a entender el contexto, a fin de ser capaces de enseñar a los niños y, al mismo tiempo, permitirles hacer sus

diseños de acuerdo con sus ideas, sus voluntades. De acuerdo con las profesoras: *Aunque la Modelación exigió más de mí en tener que estudiar, prepararme para enseñar y al mismo tiempo responder a muchas preguntas de los alumnos, verlos aprendiendo fue maravilloso* (profesora P_1 del 3º grado). *Aprendí bastante con esta propuesta, de hecho más que los niños; desde que soy profesora hace diez años ensañaba a cada momento una materia, y esta vez fui viendo que las materias se integran para resolver un problema, para crear alguna cosa, los otros días que tenía que enseñar otras materias continuaba usando los embalajes porque tiene todo* (profesora P_2 del 4º grado).

Los dirigentes pedagógicos de la Escuela se mostraron satisfechos no sólo por el resultado positivo en relación con el buen estado motivacional de los niños, sino, principalmente, por haber sido un trabajo que instigó el sentido creativo y el valor de la cuestión ambiental y de la salud. Como dijo la directora: *Fue lindo ver a los niños de las dos clases motivadas, manipular los embalajes y procurando saber todo sobre los mismos: palabras, números, colores, diseños, tipo de material; después al final, llevándolos al basurero y enseñándoles a los otros alumnos la importancia de dejar todo limpio para tener salud y el reciclaje para proteger la naturaleza. Proyectos como éste deberían estar siempre en las escuelas, con profesores de la universidad trabajando con nosotros para mejorar la educación*.

Consideraciones Finales

Los documentos generados durante la vigencia de este proyecto permiten afirmar que a medida en que fue estimulada la curiosidad de aquellos 36 niños de la Enseñanza Básica en percibir y comprender el medio en que habitan, representar diferentes acontecimientos o informaciones percibidas y elaborar categorías propias (símbolos y mensajes), la mayoría de los niños exhibieron avances en su habilidad de entender y de responder las actividades propuestas. Eso afeto tanto la evaluación de lo que conocían como de lo que desconocían.

Esos niños se envolvieron en situaciones en las cuales pudieron relatar sus propias experiencias directas, sus propias percepciones y comprensiones del medio circundante, para entonces aprender los conceptos de matemática y ciencias, describiendo o interpretando ese medio. Las actividades desarrolladas les permitieron intensificar y ensanchar sus entendimientos y la utilidad de estos contenidos desarrollados, bien como aprender a observar, a interpretar símbolos y significados, a relacionar e integrar los datos del medio externo, a resolver y evaluar situaciones de diversos contextos e intereses. Dotadas de sentido imaginativo, pudieran atreverse a crear algo, proponiendo un embalaje para un producto, envolviéndose en la asociación de elementos que las componen.

Fundamentada en los resultados de la aplicación de ese proyecto con ese grupo de niños y en las producciones de investigación similares aquí referenciadas, esa investigación indica, una vez más, que la educación escolar precisa tener como punto de partida el conocimiento intuitivo de los niños y, a partir de actividades que les permitan percibir, comprender, representar su medio ambiente, llevarlos a ampliar sus conocimientos y sus habilidades en utilizarlos. Una educación que desarrolle el potencial inherente a los niños, de tal modo que puedan perfeccionar sus conocimientos continuamente; conocimientos que les aseguren sus independencias personales, sus propias existencias en el recorrer de la vida.

Dewey, en 1922, sustentaba que la educación tiene dos aspectos: *uno* consiste en estimular el proceso cognitivo del niño, y el *otro* en derivar ese estímulo de la situación social en que se encuentra el niño. Estos dos aspectos se completan y no son más que visiones de un mismo,

proceso apreciado sobre dos puntos de vista. De esta perspectiva, la Modelación en la matemática y en las ciencias de la naturaleza guía a los niños de los años iniciales de la Enseñanza Básica a adquirir conocimiento en torno de un tema o un ente de contexto que les despierte interés. Interés que le permita al profesor estimular el proceso cognitivo de estos niños (en percibir, comprender, representar), desarrollarle el conocimiento (el contenido curricular y no curricular) que juzgue necesario y, además de todo, propiciarles que efectúen conexiones con otros temas, otros conocimientos, aprendiendo la investigación.

Referencias y bibliografía

Biembengut, M. S. Modelling and applications in Primary Education. In: HAINES, C. *et al. Modelling and Apllications in Mathematics Educacion*. New York: Springer, 2007, p.451-456.

Blum, W., et al. Modelling and applications in Mathematics Education. New York: Springer, 2007.

Brasil. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros curriculares nacionais: primeiro e segundo ciclos: matemática* / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: MEC/SEF, 1998.

Dewey. J. *Human nature and conduct*. New York: Henry Holt and Co., 1922.

Echevarria, J.; Graves, A. sheltered content instruction: teaching English language learners with diverse abilities. Boston, MA: Allyn & Bacon, 1998.

Engel, J.; Vogel, M. Mathematical problem solving as modeling process. In: BLUM, W. *et al*. *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer, 2007. p. 275-284

George, F. *Modelos de pensamento*. Tradução de Mario Guerreiro. Petrópolis: Vozes, 1973.

Gombrich, E. H. *Arte e ilusão*. Tradução de Raul de Sá Barbosa. São Paulo: Martins Fontes, 1986.

Kamii, C.; Rummelsburg, J.; Kari, A. Teaching arithmetic to low-performing, low-SES first graders. *Journal of Mathematical Behavior. v. 1, n. 24, p.*39-50, 2005.

Kieran, C. The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics. v.46, n.* 1-3, p.187-228, 2001.

Lerman, S. Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics.* LOCAL, v. 46, n. 1-3, p. 87-113, 2001.

Sfard, A. There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational studies in mathematics. v.46, n.1-3,* p.13-57, 2001.

Van Oers, B. Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational studies in mathematics.* v.46, n. 1-3, p.59-85,1991.

Vygotsky, L. *Thought and language.* KOZULIN, A. (org), Cambridge: MIT Press, 1986.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El Programa Cronotopía: un enfoque modelo-teorético para las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica

The Chronotopy Program: A model-theoretic approach to mathematics, its epistemology, its history and its didactics

Carlos Eduardo **Vasco** Uribe
Profesor Emérito y Doctor H.C. de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá
Colombia
carlosevasco@gmail.com

Resumen

Desde distintos puntos de vista de la historia y la epistemología de las matemáticas, en los últimos CIAEM he venido proponiendo un enfoque global para las matemáticas mismas y para su epistemología, su historia y su didáctica: "El Programa Cronotopía". Este tiene como marco una filosofía sincrético-analítica que se concreta en una Metafísica con su ontología de procesos y sistemas, una Metagnósica con su gnoseología y su epistemología de modelos y teorías y una Metasémica con su semiología de representaciones e interpretaciones.

En esta conferencia paralela me propongo presentar los avances logrados hasta ahora en este Programa de Investigación en el sentido de Lakatos, Balzer, Moulines y Sneed, para desarrollar una disciplina académica que se llamaría "la Cronotopía".

Palabras clave: educación, matemática, filosofía, ciencias, modelos, teorías, didáctica.

Abstract

From different viewpoints of the History and Epistemology of Mathematics, in the last few IACME-CIAEM conferences I have been formulating a global approach to Mathematics, its Epistemology, its History and its Didactics: "The Chronotopy Program". It is framed in a syncretic-analytic philosophy specified in a Metaphysics with its Ontology of Processes and Systems, a Metagnosics with its Gnoseology and Epistemology of Models and Theories, and a Metasemics with its Semiology of

Representations and Interpretations.

In this parallel lecture I intend to communicate the advances achieved up to now in this Research Programme in the sense of Lakatos, Baltzer, Moulines and Sneed in order to develop an academic discipline that would be named "Chronotopy".

Keywords: education, mathematics, philosophy, science, models, theories, didactics.

Mapa General de la Cronotopía y del "Programa Cronotopía"

El "Programa Cronotopía" se propone construir una ciencia —en el sentido de una disciplina académica o saber explícito, serio, sistematizado y disciplinado que pretende pasar de *doxa* —o mera opinión subjetiva— a *episteme* —o saber fundamentado y compartido que incrementa las probabilidades de éxito de quienes se apoyan en él para orientar sus prácticas— acerca de todos los aspectos del espacio-tiempo mental interno individual y subjetivo y de su proyección al espacio-tiempo físico externo u objetivo.

El "Programa Crontopía" comienza por el examen de las experiencias internas de quien escribe el texto que pretende "ser científico", y no por la observación empírica con la que creemos estar en contacto directo con el espacio-tiempo externo o físico, el cual parece ser el mismo espacio y tiempo "públicos" o "sociales". A pesar de toda la imagenología de los TAC, PET, RMN, MEG y otras tecnologías actuales, eso no lo sabemos ni lo podemos verificar (o, al menos, yo no lo sé y no se me ocurre cómo verificarlo). A lo más, podemos tratar de confirmar esa relación entre lo que yo creo percibir mentalmente en mis modelos internos y lo que sucede "allá afuera" según el éxito o fracaso de ciertas prácticas individuales y sociales que se han configurado según ese saber explícito. Esa ciencia se llamaría "la Cronotopía", nombre en el que se combinan las raíces griegas de *tiempo (chronos)* y de *espacio* (*topos)*.

Así pues, esta muy nueva —pero a la vez muy antigua— ciencia de la Cronotopía pretende estudiar solamente el espacio-tiempo interno, a veces llamado "psicológico" o "psíquico", al que, siguiendo una sugerencia de Bakhtin, llamo "mi cronotopo" y, de allí, se propone sacar consecuencias sobre todo lo que se diga o escriba por cualquier otro autor o autora acerca de su propio cronotopo interno y acerca del espacio-tiempo externo.

Siguiendo a Piaget, además de la única fuente profunda de mis introspecciones sobre las vivencias, experiencias, intuiciones e imágenes que experimento en mi cronotopo privado, las tres fuentes auxiliares de esta disciplina son: la primera, la psicogénesis u ontogénesis de los cronotopos mentales en los niños, niñas y adolescentes; la segunda, la sociogénesis o filogénesis del espacio-tiempo en la historia de las matemáticas como ciencias formales y en la de las ciencias fácticas y, la tercera, la teoría formal de procesos y sistemas, con sus sustratos, sus estructuras y sus dinámicas, que es la manera como interpreto "las estructuras formales" en Piaget.

El "Programa Cronotopía" intenta emular el "Programa de Erlangen" de Félix Klein para la geometría y la topología; el "Programa de la Relatividad General" de Einstein para el espacio-

tiempo; el "Programa o Enfoque Onto-Semiótico EOS" de Godino, Batanero y Font; el "Programa Noético-Semiótico" de Duval; el "Programa Semiótico-Cultural" de Luis Radford; el "Programa Socio-epistemológico" de Cantoral y Farfán y el "Programa Etnomatemática" de Ubiratán d'Ambrosio y Paulus Gerdes como visiones globales de todas las matemáticas, su práctica, su historia y su epistemología, con las consecuencias que tiene cada programa para su pedagogía y su didáctica. Por lo anterior, es claro que el "Programa Cronotopía" tiene pretensiones muy ambiciosas, y no estaría muy desacertado quien lo tildara de megalomaníaco.

En mi cronotopo interno parecen fundirse como totalidades indiferenciadas —"sincréticas", diría Piaget— el espacio, como contenedor aparentemente vacío y sin límites asignables, las distintas formas de la materia y la energía, los líquidos y gases, los cuerpos sólidos o blandos, el cambio y el movimiento, y el tiempo en todas sus acepciones. Desde este punto de vista, el análisis cronotópico se podría calificar como "sincrético-analítico", pues parte de las totalidades sincréticas que creo percibir internamente e intenta superar los enfoques analíticos y los sintéticos para las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica. Ese mismo análisis de mis imágenes y modelos mentales y del trasfondo desde donde parecen surgir también podría llamarse "modelo-teorético", pues juega dialécticamente con distintas teorías tratando de interpretarlas en distintos modelos y con distintos modelos tratándolos de expresar por medio de distintas teorías, a veces mutando los modelos para que se ajusten mejor a las teorías y a veces mutando las teorías para que correspondan mejor a los modelos.

Para ello partí de la teoría de modelos en lógica matemática, ante todo del texto de Chang y Keisler explicado por Xavier Caicedo, y de la reinterpretación epistemológica de la relación entre modelos y teorías de Balzer, Moulines y Sneed en su arquitectónica de la ciencia.

Ese trasfondo difuso de mi cronotopo es el que me permite representarme, imaginarme o *modelar* mentalmente los procesos externos y representarme a mí mismo en forma privada todo el mundo externo o público, por medio de distintas imágenes y modelos mentales, pensados o imaginados o imaginarios que creo proyectar activamente sobre ese trasfondo con mi imaginación como proyector multimodal y multimedial, o que parecen surgir espontáneamente de él. Aunque solo puedo testificar sobre mi propia experiencia, y por eso solo podría hablar de mí mismo y de las vivencias subjetivas de mi trasfondo cronotópico y las imágenes y modelos que percibo, es en ese trasfondo en donde creo que cada uno de nosotros se imagina todos los aspectos de las matemáticas antiguas y modernas como ciencias formales, y todos los aspectos de la física antigua o astronomía y de la física moderna —o mejor "las físicas", por ser incompatibles la mecánica newtoniana, la relativista y la cuántica—, así como las demás ciencias fácticas. Solo digo que "creo" que cada uno de mis lectores y lectoras se imagina algo parecido sobre un trasfondo parecido, pero no puedo comprobarlo ni menos afirmarlo con alguna seguridad.

Creo también que esos modelos mentales imaginados e imaginarios son los que guían y regulan mi actividad en todo momento e intermitentemente tengo que "echarlos a correr" ("run") para "navegar" en el mundo externo, trayéndolos de la memoria a largo plazo a la memoria de trabajo, poniéndolos en marcha rápidamente y conectándolos de alguna manera con mis músculos y mis miembros para poder sobrevivir. Las pesadillas y el sonambulismo, así como la expresión "soñar despierto", dan mucho material para pensar en la reformulación cronotópica de las matemáticas y

las físicas. Por ello, las preguntas de investigación sobre la interfaz sensorial entre el mundo exterior y el interior y la interfaz cerebral entre los módulos sensoriales del cerebro y los módulos motores del cerebro y el cerebelo son esenciales al Programa Cronotopía.

Para decirlo con una sola imagen, supongamos que yo vivo en una casa de dos pisos. El Programa Cronotopía me dice que yo no subo y bajo por las escaleras de mi casa, sino que subo y bajo por la imagen sensomotriz de las escaleras que forma parte de mi modelo mental de mi casa.

Corrección: Mi *avatar* es el que sube y baja en ese modelo mental de las escaleras, y si funcionan bien mis conexiones interactivas intermitentes entre el mundo externo y el interno por los órganos de los sentidos y mi conexión interna entre cerebro y músculos, yo puedo subir y bajar las escaleras exitosamente. Esas son las mismas preguntas de fondo del Programa Cronotopía por la naturaleza y el funcionamiento de la interfaz sensorio-motriz.

Clave hermenéutica 1. Aunque ese avatar no suele revelarse espontáneamente a la atención interna, no es conveniente olvidar que mi avatar es el que me representa en mi cronotopo interno para cualquier formulación o reformulación cronotópica de las matemáticas y las fisicas, especialmente en la construcción de sistemas de referencia con sus coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas. Pero hay un filtro cerebral de tipo *Gestalt* que rápidamente oculta al avatar cuando tratamos de examinar un modelo y entrever el trasfondo.

Corolario 1. Todo predicado P(–) de cualquier lengua articulada L que aparentemente sea n-ario o de n-puestos ("slots") es al menos (n+1)-ario, porque está situado en una vecindad cronotópica mental que incluye al sujeto enunciador y al avatar *z* que lo representa en el modelo mental. Para decirlo de otra manera, todo modelo mental activado en mi imaginación es siempre cronotópico y está *situado* en una vecindad cronotópica que involucra una región limitada del espacio-tiempo en la que está contenido mi avatar *z* y los objetos de atención que me afectan. Por ello, todo predicado aparentemente unario P(–) atribuido a cierto objeto mental *x*, P(*x*), se refiere a una relación binaria entre ese objeto *x* y mi avatar *z*, relación que está situada en una vecindad cronotópica delimitada por fronteras difusas.

Clave hermenéutica 2. Este primer corolario es clave para la interpretación de los predicados monádicos o unarios $P^1(–)$ y las proposiciones atómicas respectivas $P^1(x)$ de cualquier lenguaje articulado L, pues los predicados monádicos o unarios $P^1(–)$ pasarían a ser en realidad predicados cripto-diádicos o cripto-binarios (el prefijo *-cripto* se refiere al ocultamiento de la polaridad entre el objeto mental *x* y el avatar *z*). La polaridad adicional con respecto al sujeto enunciador y a su avatar *z* que lo representa, la cual se sitúa en la vecindad cronotópica implícita en el modelo mental, borra la distinción usual entre los predicados monádicos o unarios $P^1(–)$ y las proposiciones atómicas respectivas $P^1(x)$ y las relaciones binarias yR^2x or $R^2(x, y)$; las proposiciones $P^1(x)$ pasarían a ser relaciones cripto-diádicas o cripto-binarias, $\mathbf{R}^2[P^1](x; z)$, y las segundas pasarían a ser relaciones cripto-triádicas o cripto-ternarias $\mathbf{R}^3[R^2](x, y; z)$. Los operadores n-arios $@^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que producen un resultado *y*, representables como relaciones (n+1)-arias $R^{n+1}[@^n](x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ pasarían a ser relaciones (n+2)-arias $\mathbf{R}^{n+2}[@^n](x_1, x_2, \ldots, x_n, y; z)$. En un lenguaje articulado L no habría pues sino términos simples y compuestos y predicados relacionales de distintas ariedades.

Clave hermenéutica 3. Esta inyección de los operadores n-arios $@^n](–)$ en el sistema de relaciones $R^{n+1}[@^n](–)$, que pertenecen a la estructura de otro sistema de orden superior, muestra que la dinámica de un sistema todavía no es suficiente para modelar la actividad o funcionamiento de un sistema en acción, en acto, lo que sería la cinemática o kinemática del modelo. En el Programa Cronotopía, esta distinción entre dinámica y cinemática, que corresponde a la potencia y al acto en la Metafísica y la Ontología clásicas, ya no solo sería utilizable en las ciencias físicas, sino que también se extendería a las matemáticas.

Si ahora quiero seguir avanzando en la reformulación de las matemáticas, su historia y su epistemología, el Programa Cronotopía me dice que el punto de partida son las experiencias subjetivas de mi cronotopo interno que vivo yo mismo cuando me involucro en actividades o prácticas que se suelen llamar "matemáticas, etnomatemáticas, matematizables" o de cualquier otra manera, como contar, medir, jugar ciertos juegos con reglas, resolver ciertos tipos de problemas o ejercicios, repetir rutinas según instrucciones explícitas u otras actividades parecidas. Sobre estas prácticas o actividades habría que citar numerosas referencias a los libros y artículos de Alan Bishop, Paul Ernest, Ubiratán D'Ambrosio, Paulus Gerdes, Yves Chevallard, Ricardo Cantoral, Teresa Farfán y muchos otros autores. La diferencia se da en la atención prioritaria que el Programa Cronotopía presta a las vivencias subjetivas de quien está involucrado en esas actividades, más que a las expresiones y formulaciones públicas, gráficas, verbales o de cualquier otra modalidad semiótica de esas prácticas o actividades, a las de los artefactos utilizados o a las de los resultados obtenidos por esas prácticas o actividades.

Además, el Programa Cronotopía me dice que yo no cuento, mido y juego con las líneas y figuras geométricas; ni calculo con las letras y los números u otros símbolos que aparecen en las superficies planas de los cuadernos, libros, pizarras y tableros; ni trabajo con las reglas, compases, calculadoras u otros artefactos, sino que manipulo imágenes tridimensionales en mis modelos mentales cronotópicos allá dentro de mi cerebro, intentando modular, regular y guiar ese procesamiento con la información que tengo en la memoria y con la información que recibo del exterior en tiempo real. Luego, trato de externalizar esas manipulaciones mentales y sus resultados imaginarios con palabras, gestos y dibujos, con el fin de examinarlas mejor yo mismo, de compartirlas con otros y someterlas a prueba por parte de mis interlocutores y del flujo de los procesos físicos naturales en los que estoy inmerso. Nótese que la palabra *manipulación* que utilicé ya es metafórica, a menos que usted piense que el homúnculo sensorial en los lóbulos posteriores del cerebro también tiene dos pequeños apéndices que se puedan llamar "manitos" o "manitas".

Corolario 2. Una primera conclusión podría ser que en el Programa Cronotopía no hay palabras unívocas ni definiciones únicas y unívocas; en particular, no hay números reales distintos de los imaginarios: todos los números que nos enseñen o que nos inventemos son siempre imaginarios e imaginados.

Sin embargo, si usted considera que sus imágenes mentales son "reales" en su cerebro, entonces, para usted, también todos los números imaginarios serían reales en ese sentido restringido. Pero desde el punto de vista sincrético-analítico, los llamados "números reales R" serían más bien una simplificación de los llamados "números complejos C", y no los segundos una complexificación

de los primeros. Ni siquiera habría una definición de cero ni de uno, ni sabríamos si los números de contar empiezan por cero, o por uno, o tal vez por dos. La proposición matemática que introduce esta incertidumbre entre el cero, el uno y el dos (y también entre el menos uno, el cero y el más uno) es la siguiente: "En cualquier base b, el logaritmo en base b de uno es cero". Todavía estoy manipulando mis modelos mentales y ejercitando mis limitados conocimientos semióticos para interpretar esa proposición de manera coherente con la aritmética, el álgebra y el análisis que aprendí en la universidad.

Esta incertidumbre, esta proposición, los dos corolarios anteriores y muchos más enigmas que voy encontrando en la historia de las matemáticas y en las preguntas y explicaciones de los estudiantes me han venido imponiendo un principio matemático, lógico y filosófico muy difícil de aceptar, pero que se confirma en mi mente a medida que avanzo en el Programa Cronotopía:

Postulado 1. Toda expresión o formulación o fórmula bien formada (fbf o wff) con la que intento expresar algo acerca de una imagen o modelo cronotópico, una vez graficada y escrita deja de ser *verdadera* o *falsa*, y queda totalmente dependiente de la interpretación subjetiva del lector o lectora en alguno de los modelos mentales que le sugieran las gráficas o grafías y los términos y las fórmulas escritas. Esta clave hermenéutica paradójica podría llamarse "el Postulado de la Relatividad Absoluta" de la Cronotopía.

Este postulado tiene un problema grave: que el lector o lectora no le va a hacer mucho caso a ninguna de las afirmaciones que me he atrevido a escribir en este documento, puesto que ni siquiera yo mismo las propongo como verdaderas; pero podría tener una ventaja que para mí es crucial: que cuando algún lector o lectora crea que alguna afirmación mía es falsa, se detenga unos segundos y le dé una segunda oportunidad para ver si, dándole otra interpretación creativa, la puede considerar subjetivamente como verdadera en esa interpretación.

Corolario 3. Este postulado crea un problema grave para mi interpretación del Teorema de Incompletitud de Gödel de 1931, pues por bien formulado que esté dicho teorema, y por más validez formal que se le otorgue, el dominio de las verdades de la aritmética de Peano estaría vacío. Ninguna formulación escrita de la aritmética de Peano, formalmente demostrable o no, sería verdadera, y por lo tanto ninguna máquina de cálculo numérico podría permitirnos concluir que hay una verdad no demostrable; peor todavía, que no hay ninguna verdad demostrable, pues lo único demostrable es una fórmula sintácticamente bien formada y bien conectada a otras en un grafo dirigido. Eso no tiene nada qué ver con la verdad o la falsedad.

Recuerdo la frase de Bertrand Russell acerca de que toda fórmula matemática es de la forma "si p, entonces q", pero que no sabemos lo que estamos diciendo ni sabemos si es verdad o no. Al menos en mi interpretación subjetiva, creo que el Postulado de la Relatividad Absoluta de la Cronotopía estaba ya muy bien formulado en las obras de Bertrand Russell, lo cual tampoco quiere decir que alguna frase que el dejó escrita sea verdadera, sino todo lo contrario: ninguna es verdadera, pero tampoco es falsa.

Un poco de memoria histórica

Intentemos devolvernos hacia el pasado para intentar vivir por unos momentos en nuestro modelo mental de lo que nos imaginamos que sería el planeta Tierra hace un millón de años. ¿Sabemos qué es "un millón"? ¿Qué es *año*? ¿Qué es tiempo o a qué llamamos tiempo, *tempus*, *chronos*? ¿Cómo lo medimos? ¿Qué es medir? Preguntas permanentes —y acuciantes— del Programa Cronotopía, que, más que respuestas verbales a quien nos hace la pregunta, producen exámenes mentales atentos al cronotopo interno de cada uno de nosotros.

Reconstruyamos pues un modelo mental de lo que sería el lugar, el ambiente, el *topos* en donde vivían nuestros antepasados del orden de los primates hace un millón de años. Algunas especies de un cierto género de antropoides, homínidos u homininos lograron ir separando algunos tiempos para el trabajo de supervivencia como cazadores y recolectores y otros para el ocio, el disfrute, el descanso, el ritual, la fiesta, la música y la danza. Me atrevería a decir que el proceso de hominización de los primates de nuestro género *Homo* se revela precisamente en ese cambio en la conciencia del tiempo libre y en su utilización.

En la medida en que en esos ratos de ocio empezaron nuestros conspecíficos a dedicar más y más tiempo para la reflexión mental sobre todas sus actividades conscientes e inconscientes y sobre sus sueños diurnos y nocturnos, se fueron perfeccionando los lenguajes *análogos* multimodales de todas las artes y afinando sus productos, como la música, el baile, la mímica, el grabado o pintura y el moldeado o modelado o escultura. Así empezaron a multiplicarse las huellas, los rasguños, las gráficas o grafías relativamente estables y duraderos, que no propiamente eran lenguas ni lenguajes, pero sí podríamos llamarlos por su carácter semiótico *lenguajes analógicos*. Hasta ese momento, y por muchos milenios después, la única grabadora de audio y video existente era la memoria situada en el cerebro de esos primates, que grababa también en forma multimodal y multisensorial los modelos mentales en reposo y en movimiento.

Más tarde, talvez hace menos de cien mil años, se fueron configurando los lenguajes *articulados* (o digitalizados o cuantizados o discretizados en sonidos separados, discretos, inicialmente sílabas y fonemas cortos y luego en lo que hoy llamamos "las palabras") que posibilitaron el cuento, el rumor, el chiste, la instrucción, la amenaza, la poesía, la canción y el teatro para intentar expresar en forma externa y pública las impresiones, las afectaciones, las emociones y conmociones, las representaciones y valoraciones subjetivas internas de los fenómenos externos perceptibles directamente por el cerebro de cada uno de los miembros de esa especie privilegiada del género *Homo,* mal llamada "*sapiens*" porque seguimos siendo muy poco sapientes (más bien: muy ignorantes, insipientes (con ese), insápidos e insípidos).

Por ejemplo, no sabíamos entonces nada —y todavía no sabemos prácticamente nada— acerca del espacio, el tiempo, el cambio y el movimiento "allá afuera"; por lo menos yo poco sé de todo eso, porque vivo encerrado en mi estrecha caja craneana, y solo tengo alguna vivencias o experiencias con alguna consciencia difusa y esporádica de lo que vivo yo, o al menos lo que parece vivir mi pequeño avatar, un homúnculo más entre las sombras, duendes y maniquíes de este oscuro y estrecho teatro mental que parece encerrado en una bóveda hemisférica de una capacidad aproximada de un decímetro cúbico. ¿Sé qué es "bóveda" o "hemisferio", o "capacidad" o "decímetro cúbico"?

Como decía Sócrates, "solo sé que nada sé" de lo que pasa por fuera de esa caverna de Platón. ¿Será que mi caverna es como la de Platón, o como la de cada uno de los que me lee o escucha? Ni siquiera sé cómo sabía Platón —o cómo sé yo— qué es *caverna* o qué es *teatro* y que no lo es. Peor todavía, por más que haya logrado avanzar en el Programa Cronotopía, todavía no sé qué es propiamente "avanzar" ni "Programa", y menos "avanzar en un Programa". ¿Ustedes sí? Los felicito, y los envidio, pero no acabo de creerles.

No quiero, ni mucho menos, silenciar sus respuestas a las preguntas, sino que, por más atención que les pongo y aunque me las repitan varias veces, en virtud del Postulado 1 o Principio de la Relatividad Absoluta me abstengo de declarar sus respuestas ni como verdaderas ni falsas. Pero sí necesito la ayuda de las reacciones y rechazos que nazcan sinceramente de la perplejidad o el escepticismo de otros sujetos como mis lectores y lectoras que traten de interpretar lo que yo digo sobre mi cronotopo mental y lo comparen con lo que ellos y ellas experimenten en el suyo, para poder reconstruir la métrica, la geometría, la medición, o en general, la *metría* de mi propio cronotopo mental, con la ayuda de dibujos, grabados o grafías y expresiones verbales orales y escritas para compartir esas experiencias; esas expresiones formarían las *grafías* y las *logías* que pretendo acumular para avanzar hacia una ciencia de la Cronotopía, y con ellas y sobre ellas pasar a la *metría* (o métrica o metrización) y luego a la *nomía* (o formulación de las regularidades, leyes y normas de una futura Cronotopía).

Le adelanto al lector o lectora que, aunque logremos avanzar conjuntamente en el Programa Cronotopía con la acumulación, discusión y depuración de múltiples grafías y logías, ese avance sería apenas el comienzo de la tercera fase de la Cronotopía como ciencia, la cual, como creo yo de toda ciencia, incluiría cuatro fases: la cronografía y la cronología, la topografía y la topología, la cronometría y la topometría; luego vendría la fase principal: la crononomía y la toponomía.

Postulado 2. En el Programa Cronotopía, la epistemología de modelos y teorías le asigna las mismas cuatro fases: la X-grafía, la X-logía, la X-metría y la X-nomía a toda ciencia X que haya aparecido en Occidente desde el siglo XVII, y a las disciplinas antiguas del Quadrivium o Tétrodos pitagórico que se sistematizaron hacia el siglo VII A.C. en la llamada "Magna Grecia" del Mediterráneo. El enigma epistemológico principal es por qué más de mil años de la Astrografía y la Astrología antiguas se concretaron en la Astrometría y la Astronomía para configurar una ciencia ya muy desarrollada al final de la Edad Antigua, unos dos mil años antes de que Galileo Galilei, Francis Bacon e Isaac Newton comenzaran a configurar las nuevas ciencias de la Edad Moderna europea.

Corolario 4. A pesar de las disputas sobre la originalidad del mal llamado "descubrimiento" de la derivada, la derivada de Leibnitz sería muy distinta de la de Newton; la derivada de Leibniz (dy/dx) no puede ser una velocidad, porque es geométrica y pretende solo resolver el problema geométrico del trazado de rectas tangentes a gráficas curvas no circulares propuesto por Fermat y Roverbal. Así, la derivada de Leibnitz es equivalente a la tangente trigonométrica de un ángulo local en un plano coordinatizado y, por lo tanto, sería solo topométrica, mientras que la derivada o fluxión de Newton (notada '$\dot{x}$' con un punto encima de la x) sí pretende ser crono-topométrica y representar la rapidez, celeridad o velocidad de un punto de masa que se mueve en el espacio tridimensional, que podríamos llamar "velocidad lineal". Pero ninguna de esas dos derivadas se parece a la velocidad areal de la Astronomía antigua, llamada también metafóricamente

"velocidad de barrido", que le sirvió a Kepler para refutar la propuesta copernicana de las órbitas circulares de los planetas, calculando (sin disponer de ecuaciones cartesianas) que la forma de las órbitas era elíptica y que las velocidades areales eran constantes.

Corolario 5. Si la mecánica de Einstein es incompatible con la de Newton, y ambas con la mecánica cuántica, tampoco la '*c*' de Lorentz y Einstein puede ser una velocidad, y menos la mal llamada "velocidad de la luz", porque en la teoría de la relatividad no hay nada que sea "la velocidad" ni nada que sea "la luz", o por lo menos yo no las veo. Tampoco las vio Leopold Infeld, quien le dijo a Einstein que Minkowski lo había traicionado, pues al espacializar el tiempo como cuarta dimensión *ict*, la velocidad desaparecía y solo quedaba la tangente de un ángulo.

Efectivamente, si se toma la constante *c* como la tangente del ángulo de 45 grados, $c = 1$, y todos los cálculos de la relatividad especial y de la relatividad general funcionan perfectamente con ese valor unitario de la constante *c*, que, por lo tanto, no tendría nada de velocidad, rapidez o celeridad.

Lo que sucede es que, como decía Leibnitz, todos somos ciegos y sordos respecto del futuro, y solo tenemos unas estrechas ventanitas hacia el pasado. Pero al menos esas ventanitas por las que nos entra una información exigua también nos abren una puerta para emprender el camino hacia la sabiduría, si acaso es posible alcanzarla o por lo menos avanzar algo en ella, de lo cual también podría dudarse, como lo hicieron los agnósticos y los cínicos en Grecia; pero podemos ser más optimistas, pues, por ejemplo, ya desde hace unos 4000 años podemos, por medio de cálculos mentales topométricos y cronométricos con sus grafías y sus logías, imaginando modelos mentales de trayectorias invisibles de los planetas y sus satélites, conjeturar las fechas precisas y las horas aproximadas de algunos eventos futuros como los eclipses de sol y de luna. El enigma epistemológico es por qué, si somos ciegos hacia el futuro, y si esas grafías y logías matemáticas no son ni verdaderas ni falsas, esos eventos sí suceden en las fechas y horas aproximadas que calculamos muchos años antes.

Confiemos pues en que, a pesar de que las afirmaciones científicas, una vez formuladas por escrito, no deban ya considerarse ni verdaderas ni falsas, sí podemos al menos avanzar un poco en sabiduría y en ciencia y evolucionar positivamente como especímenes del género *Homo* y su especie *sapiens*. En vez de desanimarnos ante las evidencias de un millón de años de ignorancia sobre el espacio, el tiempo y el espacio-tiempo "allá afuera", cada uno de nosotros puede comenzar ahora mismo un programa de investigación (previsiblemente interminable y que no garantiza nada) en el que nos empeñemos en analizar por lo menos el cronotopo interno de cada uno de nosotros y tratar de "comparar notas" con lo que nos externalicen los otros miembros de nuestra especie a través de grafías y logías. Tal vez así podamos reconstruir algo de ese largo camino de cien mil años desde las primeras representaciones y artefactos culturales de los astrónomos antiguos, hasta llegar a las matemáticas y a las físicas actuales. Seamos un poco más modestos: intentemos comprender algo de nuestras experiencias cronotópicas internas en los últimos diez mil años, o al menos de los diez últimos años de nuestra vida interior y sus vivencias matemáticas. Esa es la meta del Programa Cronotopía.

Las grafías y las logías en la evolución humana

Volviendo a la historia de nuestra especie, en los últimos cien mil años se fueron configurando múltiples manchas, tallas, pinturas, grabados, relieves, estatuas y otras configuraciones táctiles y visuales, que en la Cronotopía se llaman "grafías": dibujos, rasguños, pinturas, esculturas y diagramas que permiten externalizar y hacer públicas las imágenes y modelos mentales que proyectan hacia adentro los cerebros cada vez más grandes de los especímenes del género "*Homo*". En cien millones de años ya nuestro cerebro ha evolucionado a mil centímetros cúbicos de volumen y cien mil millones de neuronas. Pero necesitamos que pasaran cien mil años para poder decir esto último, aunque todavía no entendamos muy bien qué significa todo eso (pues creo que apenas estamos llegando a la fase de configuración de las distintas métricas, que en la Cronotopía se llaman "metrías").

¿Qué significa mil, cien mil, cien millones o cien mil millones? ¿No serán más bien cien billones en el Brasil o en los Estados Unidos? Poco sabemos de aritmética, de geometría, de métrica o metrización o metría. Pero parece que sí sabemos mucho, por lo menos desde que se estableció el Sistema Internacional de Unidades SI en 1960. Esa es otra pregunta permanente del Programa Cronotopía, que no requiere respuestas verbales inmediatas sino una reflexión personal atenta y obstinada para llegar de la geometría escolar a la topometría; del calendario y los relojes a la cronometría, para reconstruir la aritmética antigua y la moderna desde la música, la acústica y el ritmo y la astronomía antigua y la moderna desde la óptica, la pintura, la escultura y la arquitectura. La pretensión de avanzar en la cronometría y la topometría es que así podemos llegar a las nomías, que nos permitirían reformular las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica.

Corolario 6: Si eso es así, sería mejor comenzar el Quadrivium o "Tétrodos" matemático como lo hacía Pitágoras hace 2500 años, con la música, la fónica o la fonética, la rítmica o la ritmética de los números en movimiento, y habría que llamar a la teoría de los números fijos, quietos y estáticos no "aritmética" sino "arritmética".

La rítmica o ritmética, la música y la danza, el ritmo y el tambor funcionan muy bien para empezar las matemáticas en preescolar y avanzar rápida y motivadamente en ellas, como lo mostradlo a lo largo de 30 años la investigadora del MIT Jean Bamberger y como lo he podido comprobar repetidamente con niños, niñas y maestros y maestras de preescolar.

En forma más general, ¿cuáles son los mínimos requisitos neuronales, cognitivos o gnósicos que debe cumplir nuestro cerebro para producir, mantener y estudiar los modelos mentales y los lenguajes análogos y digitales o articulados con que tratamos de domesticarlos y comunicarlos a través de las matemáticas y las físicas? Esa es la pregunta permanente del Programa Cronotopía, de nuevo, no para contestarla verbalmente, sino para pensarla introspectivamente.

Al mismo tiempo que las grafías, nuestros antepasados se inventaron múltiples narrativas, relatos, admoniciones, prescripciones e instrucciones en distintos lenguajes orales ya digitalizados o articulados para acerca del espacio y el tiempo, los usos y costumbres, que en la Cronotopía se llaman "logías": sartas de sonidos, sílabas y palabras articuladas oralmente,

acompañadas con gestos, gritos, cambios de tono y de ritmo que nos permiten compartir las imágenes y modelos mentales entre los miembros cercanos de nuestra especie "sapiens".
Esas grafías y esas logías comenzaron a ayudar a nuestros antepasados a hacer mejores refugios, a cazar con más eficacia y menos riesgos, a domesticar plantas y animales, a perfeccionar herramientas, a desarrollar la agricultura, a construir las primeras edificaciones y los primeros asentamientos o ciudades e, infortunadamente a diseñar mejores armas para matar más gente más rápidamente.

Hablamos, pues, de las técnicas, la techne, con sus tecno-grafías y tecno-logías, según la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard, Gascon y Bosch. Pero no son tan nuevas esas técnicas como sus tecno-logías escritas: las grafías, las logías, las técnicas, tecnografías y tecnologías se desarrollaron en el neolítico hace unos diez mil años.

Hace solo cinco o seis milenios, con la invención de la escritura o "logografía", que es la grafía de las logías, empiezan las primeras civilizaciones, las élites y las castas sacerdotales y se inician los primeros imperios. Nuestros antepasados perfeccionaron las medidas y los instrumentos de medición, los números y los cálculos o cuentas, que, como ya vimos, en la Cronotopía se llaman "las metrías", y se van multiplicando las expresiones de las regularidades, leyes, normas y esquemas que en la Cronotopía se llaman "las nomías". Esa sería la cuarta y última fase de toda ciencia, en particular de las dos subdisciplinas de la Cronotopía, la Crónica y la Tópica, cada una con sus cuatro fases, que, al articularlas, van completando la Cronotopía.

En menos de mil años, del año 5000 al 4000 antes de Cristo se desarrollaron simultáneamente las Físicas, la Astronomía, la Geometría y la Aritmética antiguas en la China, la India y Mesopotamia. Hace unos 4000 años pasaron estos saberes a Egipto, y hacia el año 700 A.C. a toda el Asia Menor y a las ciudades del Peloponeso, sobre todo a Atenas y, más tarde, a Alejandría. Ya desde esa misma época se extendieron y refinaron esos saberes a toda la Magna Grecia mediterránea, inicialmente con Tales y Pitágoras, culminando con los maestros atenienses, alejandrinos y sicilianos, entre los que sobresalen Eudoxo, Euclides, Apolonio y Arquimedes.

Desde el punto de vista de la Cronotopía, excepto por el desarrollo de mejores tecnologías y notaciones más diferenciadas, es poco lo que han progresado las tres disciplinas matemáticas más antiguas, la Astronomía, la Geometría y la Aritmética que practicamos los matemáticos actuales en nuestros modelos mentales cronotópicos. Más bien podría decirse que desde las aritméticas de Boecio y Nicómaco en la Edad Media europea, o sea del año 400 al año 1600, y en todos los 300 años de las matemáticas centroeuropeas que llamamos "Modernas", desde 1600 hasta el "Programa de Erlangen" de Lie, Klein y Poincaré en 1872, con muy contadas excepciones de parte de unos pocos matemáticos geniales, no parece que hubiéramos progresado mucho en la exploración de ese mundo mental tridimensional que estudia, analiza y trata de reconstruir y practicar el "Programa Cronotopía".

La Ciencia y las ciencias

Esas externalizaciones de los cronotopos mentales de los que llamamos desde la Antigüedad "sabios", "astrólogos", "gurúes" o "magos" hasta el Renacimiento europeo de los siglos XV y XVI conformaban las únicas ciencias entonces conocidas: las tres disciplinas del Trivium o Triodos: Gramática, Retórica y Dialéctica, y las cuatro del Quadrivium o Tetrodos: la Astronomía, la Geometría, la Música o Ritmética y la Aritmética o Arritmética.

No se encuentra antes del año 1600 ningún uso de la palabra "ciencia" en el sentido actual de la palabra. La palabra latina "Scientia" y sus derivadas en los idiomas vernáculos se refería a todo tipo de conocimiento. Solo después de la invención de la imprenta y la expansión de los libros impresos, comenzó la Ilustración de los siglos XVI y XVII. A comienzos del siglo XVII se configuró en Europa central "la ciencia nueva" de los fenómenos terrestres y celestes estudiados por la astronomía de Copérnico, Galileo, Kepler y Tycho Brahe.

Esa "nueva ciencia" que se anuncia con Galileo y empieza a balbucear con Descartes, se formuló explícitamente en Inglaterra con el "Novum Organon" de Francis Bacon, que pretendió desplazar al antiguo "Organon" de Aristóteles y a toda la sabiduría filosófica y astronómica medieval. Su primer gran producto fue la Mecánica newtoniana, refinada en la Mecánica analítica leibniziana y lagrangiana con una fantástica producción de nuevas formulaciones matemáticas. Luego vino la explosión científica del siglo XIX con las teorías del campo electromagnético de Maxwell y la termodinámica de Boyle, Hooke, Black, Watt, Sadi-Carnot, Thompson, Clausius, el mismo Maxwell, Bolzmann, Joule y Kelvin. A comienzos del siglo XX surgen las teorías de la relatividad de Lorenz, Poincaré y Einstein. Poco después, aparecen las dos variantes de la Mecánica cuántica del siglo XX, con Schrödinger y Heisenberg, con Louis de Broglie, Weyl, Pauli y Dirac, que nos han legado otro diluvio de formulaciones matemáticas alucinantes.

El Programa Cronotopía intenta incluir y sistematizar todas esas matemáticas del siglo XX con las europeas de 1600 a 1900, con las antiguas que se dieron en la China, la India y Mesopotamia desde el segundo milenio antes de nuestra Era, las de Egipto y la Magna Grecia del Mediterráneo en los seis o siete últimos siglos antes de Cristo, desde Parménides, Heráclito y Zenón, Tales y Pitágoras, Eudoxo y Euclides y luego Arquimedes. Pero como no toma ninguna formulación por verdadera o falsa, también intenta relativizarlas, contrastarlas, criticarlas y hacer nuevas propuestas matemáticas, epistemológicas, históricas y didácticas.

La apuesta es a que no han cambiado mucho nuestros cerebros ni hemos progresado mucho en esas matemáticas construidas y reconstruidas solo con la exploración de nuestro cronotopo privado interno; pero es claro que ahora tenemos innumerables ventajas técnicas y simbólicas de finales del siglo XIX, entre otras impensables antes: la fonografía o grafía del sonido de Edison (1877) y la cinematografía o grafía del movimiento de los hermanos Lumière (1895). En la segunda mitad del siglo XX contamos con muchas otras ayudas técnicas, tecnográficas y tecnológicas invaluables: las nuevas tecnologías de la información y la comunicación actuales o las TIC. Con esa ayuda, ahora podemos reconstruir en unos ocho o diez años de estudio los 4000 años de la Astronomía antigua y los 400 de las matemáticas y las físicas modernas. Cada estudiante —o al menos cada estudioso— podría ahora con la ayuda de Internet y las TIC a reformular y sistematizar en 40 años esos 4000 años, y luego reconstruir los desarrollos de las matemáticas y las físicas que llamamos "Modernas", que nacieron en los países de Europa

Central de 1600 al 2000 y, ojalá, sin esperar a que esa reconstrucción y reformulación se complete, lleguemos pronto a inventar nuevos desarrollos.

Nos parece invenciblemente que todos esos hechos y fenómenos de la Astronomía, las matemáticas y las físicas ocurren en el espacio-tiempo "allá afuera", en el espacio extramental o extracraneano, pero también nos parece invenciblemente que de alguna manera tienen que ocurrir en forma comprimida, sucesiva y paralela en el interior del cráneo de cada uno de nosotros. Nuestro cerebro tiene que recibir informaciones externas, calcular mentalmente y luego echar a andar modelos mentales con sus proyecciones dinámicas internas que estén conectadas con los nervios y los músculos para reaccionar a tiempo a los peligros y prever los cursos de acción para el futuro inmediato. Eso no es solo para las matemáticas y las físicas, sino para todas las prácticas individuales y sociales; pero es más evidente en las ciencias formales que construyen modelos mentales muy refinados, aunque parece que "no sirven para nada" en la realidad cotidiana. Recordar, repasar y reflexionar sobre esos modelos mentales y las maneras de expresarlos en grafías y logías, para desarrollar metrías y nomías sobre el espacio-tiempo, el cambio y el movimiento, esa es la tarea del Programa Cronotopía.

Primeros resultados generales del Programa Cronotopía

Mi cronotopo mental es accesible solo a mi propia atención y reflexión. Es un fenómeno exclusivo de mi cerebro encerrado en su caja craneana, atestiguado solo a mi consciencia individual y subjetiva que es la única que ve, oye o sabe acerca de lo que sucede en mi mundo mental privado. No sé cómo son los fenómenos mentales que ocurren en otros cerebros, ni puedo saberlo, por más observaciones, disecciones, radiografías u otras neuroimágenes del cerebro de otros sujetos humanos ni del mío propio. Solo puedo suponer que son muy parecidos a los míos, al menos por la semejanza fisiológica de los cerebros humanos. Esas especulaciones proyectivas sobre la posible mente de otros seres vivientes se han llamado "Teoría de la Mente", y alguna forma de Teoría de la Mente podría darse en otros animales con cerebros muy desarrollados, como los perros, los caballos, los elefantes, los gorilas, chimpancés y bonobos, y en las ballenas y los delfines.

Entre los pocos y muy dudosos resultados que puedo reportar después de 60 años de acumular grafías, logías y metrías, y de 20 años de tratar de formular nomías, podría apenas comunicarles que en mi cronotopo interno observo "como por el rabillo del ojo interior" el trasfondo claro y a la vez oscuro en el que yo mismo (o al menos mi avatar) como agente noético-semiótico, como sujeto individual en su reflexión mental consciente, experimento internamente los fenómenos que considero "externos" como si ocurrieran "allá afuera", aunque solo sé con certeza que ocurren "aquí adentro" de mi cabeza como imágenes y modelos que surgen de ese trasfondo a la vez temporal y espacial que he llamado "mi cronotopo mental privado".

Mi cronotopo mental me parece ser algo así como un recipiente muy grande e ilimitado pero que tiene que ser lo suficientemente pequeño para que "el mundo me quepa en la cabeza". La bóveda estrellada parece tener por unos diez mil millones de años-luz, pero mi bóveda craneana por dentro solo parece tener diez centímetros de radio. Lo que o veo desde por dentro de ese recipiente cóncavo parece ser un fondo o trasfondo vago, gris o negro en el que de la sombra

surgen luces y colores, imágenes y modelos mentales, pero a la vez experimento ese espacio-tiempo de mi cronotopo como si estuviera aparentemente vacío o talvez lleno de algún gas o aire tenue, una especie de fluido o líquido imperceptible, que los antiguos llamaron "el éter", "el aire", "lo ilimitado", que está a la vez poblado de multitud de imágenes multimodales sensorio-motoras, que se combinan, se aglutinan o se integran en totalidades conscientes como modelos mentales estáticos y dinámicos. No estoy seguro de que haya éter, o "materia prima" o "prote hyle", que mis maestros de física y química llamaban "Protilo", pero tampoco les creo a los que me dicen que no lo hay.

Pareciera que nuestro cerebro estuviera continuamente produciendo toda clase de proyecciones intermitentes de lo que nos parecen películas o videos acompañados de toda clase de sensaciones y percepciones de nuestros sentidos externos e internos. Esas imágenes parecen ser más coherentes y repetibles cuando estamos despiertos, pero mucho menos en las ensoñaciones, sueños y pesadillas cuando estamos relajados o dormidos. Como diría el neurólogo colombiano Rodolfo Llinás, nuestro cerebro es una incansable "máquina de sueños" que funciona 24 horas al día 7 días por semana, desde el nacimiento y hasta por 120 años. En eso sí estoy de acuerdo con el Dr. Llinás, así no entienda bien lo que quiere decir, pero sí creo que estamos de acuerdo, al menos en la manera como trato de interpretarlo.

Un poco de historia personal

Devolvamos la película unos sesenta años, al año 1959. Yo también tuve 20 años. El intento actual que me guía en el Programa Cronotopía —el de reconstruir todas las matemáticas y las físicas antiguas y modernas a partir de mis propios modelos mentales que puedo examinar y analizar en mi cronotopo mental privado— tiene ya una larga historia en mi vida académica. Comenzó con el estudio de la Dialéctica en 1959, con un curso de lógica guiado por el Padre Jesús Sáenz en la Universidad Javeriana, que se basaba en las "Summulae Logicales" de Pedro Hispano, un texto de hace mil años. Me acuerdo aún del hexámetro latino que codificaba las formas válidas del silogismo aristotélico: "Barbara, Celarent, Darii, Ferio Baralipton". Imposible comprimir más información en menos letras.

Mi tesis de pregrado en filosofía sobre el espacio-tiempo en la Relatividad Especial, dirigida por mi maestro Carlo Federici en 1960, me llevó a analizar el espacio tiempo como ser de razón con fundamento en la realidad, "*ens rationis cum fundamento in re*". Después, continuó con mi tesis de doctorado, que terminé en 1968, en la que analicé todas las posibles fórmulas algebraicas que combinaran productos conmutativos o no, asociativos o no asociativos, de dos y tres variables, sin importar su interpretación, sino solo sus propiedades formales. Por eso llamo a esa rama del álgebra no asociativa "el álgebra abstracta e inútil", pero les garantizo que ha sido muy entretenida y me ha ayudado muchísimo para desarrollar el Programa Cronotopía.

Corolario 7: Toda ecuación con números o letras, inclusive la ecuación X = 10, tiene un número ilimitado de interpretaciones, y en cada interpretación que se le dé, esa misma ecuación puede tener no una sino muchas soluciones diferentes.

Que me perdone Gauss por arruinarle su Teorema Fundamental del Álgebra, según el cual una ecuación de grado dos, tres o n tendría exactamente dos, tres o n soluciones —no necesariamente diferentes— en los números complejos.

Estudiemos, por ejemplo, la ecuación de primer grado X = 10. Esta ecuación tiene una solución única y obvia para cualquier aprendiz de aritmética que utilice la numeración romana: que la 'X' es igual a diez. Parece no haber más soluciones. ¿Tendría razón Gauss? Les aseguro que, si le doy otra interpretación como ecuación lineal de primer grado, equivalente a X – 10 = 0, cualquier número de contar de dos en adelante es una solución de esa ecuación X = 10.

Veámoslo. Si se propone que ese número X sea, por ejemplo, el dos, tomado como base de la numeración binaria de la computación electrónica, podemos comprobar que el dos sí es una solución de la ecuación X = 10, porque el dos se escribe '10' en código binario; si se toma el número diez, nuestra base usual de numeración, también es una solución obvia, y me temo que Gauss pensaba que era la única. El número sesenta, tomándolo como base de la numeración en la astronomía antigua, también es una solución. Efectivamente, sesenta en base sexagesimal se escribe '10' y, por pura diversión, ustedes pueden comprobar que el número dieciséis en base hexadecimal en cualquier computador actual también se escribe '10'. Desde la Cronotopía y el álgebra abstracta e inútil, el Príncipe de las Matemáticas resultó demasiado tacaño.

Cuando regresé a Colombia en 1971, empecé a trabajar de nuevo con mi antiguo gran maestro Federici y con un nuevo gran maestro, el Dr. Alberto Campos del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. El Dr. Campos me invitó a colaborarle con los cuatro cursos de Lógica y Matemática I a IV que él había diseñado para los estudiantes de Filosofía de la Universidad Nacional. Sin los cursos, discusiones y escritos de Alberto Campos de 1972 a 1992, no me hubiera adentrado en la historia de las matemáticas, comenzando desde los Presocráticos, Tales, Pitágoras y Euclides; pero con esos aportes me atreví a preparar y escribir mi trabajo de ascenso sobre la historia del álgebra del Renacimiento, y desde entonces no he dejado de estudiar y disfrutar la historia de las matemáticas, su epistemología, su práctica y su didáctica, intentando reconstruirla desde la investigación de lo que ocurre en mi propio cronotopo con sus imágenes y modelos mentales. Para ello, como me lo enseñó Piaget, las preguntas y ocurrencias de los niños y las niñas han sido mis mejores estímulos, y las maneras de escribir formulaciones matemáticas en los manuscritos antiguos, en los libros impresos y en la pantalla de los computadores han sido la materia prima para incontables chispazos cerebrales, así la mayoría de las veces resulten haber sido solo cortocircuitos.

En especial, con el Programa Aritmo-Geométrico pitagórico que aprendí con el Dr. Campos, he venido tratando de reconstruir las Aritmética actual como Arritmética antigua, y todas las demás matemáticas actuales a partir de la Astronomía Antigua, mucho más antigua que Tales y Pitágoras, descubriendo cada vez más profundidad en la teoría talesiana y eudoxiana de las razones, las proporciones y las desproporciones, en la de las razones cruzadas, la armonía y la anarmonía.

Algo parecido a la reconstrucción de las matemáticas me sucedió con su filosofía. En ella me introdujo mi maestro Federici, pero sin los mencionados cursos de filosofia y epistemología de

las matemáticas que el Dr. Campos logró establecer en la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá, y sin las oportunidades de dirigir yo mismo algunos de esos cursos, no hubiera empezado a investigar y a enseñar en distintas universidades mis cursos de epistemología de las matemáticas. En ellos presentaba las cuatro escuelas dominantes en los siglos XIX y XX: el Platonismo en sus dos variantes, el Formalismo, el Logicismo y el Intuicionismo y, luego, otros cursos más generales de epistemología.

Hacia una filosofía de las matemáticas

En esos cursos y lecturas fui impulsado y retado por mis maestros Carlo Federici y Alberto Campos a intentar formular mi propia filosofía de las matemáticas, de tal manera que, teniendo en cuenta esas cuatro escuelas de filosofía de las matemáticas, lograra superar sus vacíos y limitaciones, ante todo para tener en cuenta la producción de nuevas matemáticas del siglo XX desde el Programa de Erlangen en 1872.

El profesor Fernando Zalamea fue el que me señaló la ausencia de las matemáticas del siglo XX en la historia y la filosofía de las matemáticas, y quién lo creyera, hasta en la docencia de las matemáticas universitarias en toda Latinoamérica. En la educación media o bachillerato y en los cuatro primeros años de las universidades, inclusive en las carreras llamadas "de matemáticas puras", solo aparecen matemáticas elaboradas antes del final del siglo XIX.

El profesor Zalamea me ganó muy pronto la carrera de producir una nueva filosofía de las matemáticas que incluyera los desarrollos matemáticos de 1870 al año 2000, cuando publicó su filosofía sintética de las matemáticas en el año 2010. Apenas ahora, 60 años después de ese remoto comienzo de mi camino de exploración en 1959, que reinicié en la Universidad Nacional de Colombia en 1972 con mis maestros Federici y Campos; 25 años después de mi trabajo sobre la Teoría General de Procesos y Sistemas de 1995, y diez años después del desafío de la filosofía sintética de Fernando Zalamea, estoy intentando configurar una filosofía propia que llamo "sincrético-analítica", basada en tres teorías generales: la Teoría General de Procesos y Sistemas (como Metafísica), la de Modelos y Teorías (como Metagnósica) y la de Representaciones e Interpretaciones (como Metasémica).

Los detalles filosóficos habrá que dejarlos para otros escritos, pero para la Cronotopía, la idea central es la de volver a examinar la lógica, las matemáticas, la teoría de la información y las físicas antiguas y nuevas, comenzando no desde la ciencia actual de los siglos XX y XXI, sino desde la Astronomía Antigua, pasando por Heráclito, Parménides y Zenón, por Tales, Pitágoras, Eudoxo, Euclides, Apolonio y Arquimedes, hasta las modernas teorías matemáticas y físicas, incluyendo las cosmológicas, relativistas y cuánticas. No se trata de preguntarse si son verdaderas o no, ni quién inventó quién y en dónde, sino de reinventarlas uno mismo en su propio cerebro, utilizando la exploración de su cronotopo privado con la ayuda de la filosofía sincrético-analítica formulada en esas tres teorías generales: la de procesos y sistemas, la de modelos y teorías y la de representaciones e interpretaciones.

Esas tres teorías generales me han permitido ir aprendiendo, reformulando y refinando lo mejor del Platonismo, tanto en su vertiente realista como en la idealista; lo más refinado del Logicismo

de Frege y Russell, del Formalismo de Hilbert y del Intuicionismo de Brouwer, Heyting, Poincaré y Michael Dummett. Explico un poco más esos aportes de las filosofías ya clásicas de las matemáticas a la filosofía sincrético-analítica.

El Logicismo, quitándole los "ismos" y los "fanatismos", me ha ayudado a reinterpretar a Peano, a Cantor y a Piaget, que consideraban la lógica como anterior a las matemáticas, y a la vez como una rama de ellas, llamada "lógica matemática" o "lógica formal". Recordemos la formulación de Bertrand Russell, equivalente al Principio de la Relatividad Absoluta.

El Formalismo de Hilbert me ha llevado a perfeccionar la sémica y la metasémica, con las escrituras discretas codificables en bytes con bits binarios en un computador, y por lo tanto la articulación del Programa Cronotopía con la teoría de la información de Shannon y Weaver.

El Intuicionismo de Brouwer, Heyting, Poincaré y Dummett me ha llevado a explorar con cada vez más refinados métodos y técnicas mi cronotopo personal privado con sus imágenes y modelos, y a confiar en ellos mucho más que los Formalistas y Logicistas nos lo permitirían. He encontrado en el manejo intuitivo —no "intuicionista"— de mis modelos mentales, y a encontrar múltiples afinidades con todos los Astrógrafos, Astrólogos, Astrómetras y Astrónomos de la antigüedad y con los gigantes de las matemáticas del siglo XX después del Programa de Erlangen, así como múltiples reinterpretaciones muy impactantes de sus textos, diagramas, fórmulas y ecuaciones.

He podido retomar así lo más valioso de esas filosofías ya clásicas de las matemáticas, para formular con mayor cuidado mi filosofía sincrético-analítica con sus tres teorías generales y sus herramientas sémicas y metasémicas.

En pocas palabras, este contraste entre las escuelas filosóficas me ha venido cambiando la filosofía y la epistemología de las matemáticas y las físicas, y me ha permitido releer la historia de las matemáticas en forma impensable hace 20 años.

Algunas consecuencias pedagógicas y didácticas

Ese cambio en la formulación de la filosofía y la epistemología de las matemáticas me ha permitido no solo reformular muchos campos de las matemáticas antiguas y modernas, sino también reformular su pedagogía y su didáctica.

Desde el punto de vista de la pedagogía y la didáctica de las matemáticas, he visto que es necesario partir de los modelos intuitivos de los estudiantes y no de las expresiones verbales o puramente simbólicas de las matemáticas usuales, buscando, por supuesto, las encrucijadas en donde se separan los razonamientos formalmente válidos de los razonamientos con y sobre los modelos mentales imaginables y contrastarlos uno contra otro, sin darle valor de verdad a los razonamientos formales ni tampoco a las conclusiones intuitivas a partir de "echar a correr" los modelos mentales míos y los de cada estudiante. Se trata más bien de montar y realizar experimentos mentales, de manera que pueda sentir yo mismo y facilitarles a ellos sentir

interiormente la resonancia y armonía de lo la teoría predice con el flujo del modelo mental puesto en acto por la dinámica de la teoría que lo expresa y en la que se interpreta.

Ante todo, me ha cambiado la percepción de que los niños y las niñas de preescolar no saben prácticamente nada de matemáticas; todo lo contrario: a los cinco años ya saben muchas matemáticas, pero he podido comprobarlo y disfrutarlo sin caer en el bloqueo iniciado por Sócrates cuando dijo que todos ya habíamos aprendido las ideas matemáticas fundamentales en pretendidos viajes "hiperuránicos" ("más allá de los cielos") antes de haber nacido o en sucesivas reencarnaciones. El diálogo socrático parte de ese supuesto innecesario y estorboso, y con preguntas muy "cargadas" o "capciosas" va sacándole "con tirabuzón" al estudiante una solución a un problema que coincida con la del maestro, sin caer en la cuenta de que con esa técnica va a fijar la atención en una sola solución, ocultando muchas otras posibles, y va a impedir el cuestionamiento del problema o de la pregunta misma que podría llevar a un florecimiento de la creatividad matemática del estudiante hasta llegar a superar a su mismo maestro.

Trato de reconstruir yo mismo las ciencias que Federici llamaba "formales y fácticas pre-antrópicas" —o por lo menos las abióticas— no solamente desde el acumulado escrito producido en los siglos XVII al XX, sino desde su reinterpretación interna en los modelos mentales que fabrica esa "loca de casa", que llamaría Santa Teresa, mi imaginación personal y privada, mi "máquina de sueños". Lo que me da la ilusión de avanzar en este programa (que ahora sí se ve claramente que es sin duda megalomaníaco) es mi Teoría de la Mente: a partir de ella confío en que cada niño o niña, adolescente o persona adulta neurológicamente sana tiene una máquina de sueños igual o mejor que la mía. No creo poder enseñarle nada a ninguno de ellos y ellas, pero sí he aprendido a hacerles preguntas que los lleven a poner en ejercicio su propia máquina de sueños y a disfrutar esa gimnasia mental que es francamente adictiva. El Programa Cronotopía propone nada menos que esa adicción es la más apropiada para evitar o superar cualquier otra adicción, pues lo impulsa a una a seguir aprendiendo más y más de todas las ciencias.

Corolario 8: En la aritmética digital antigua y moderna no está bien definido cuál es la mitad de un número par.

Este corolario me lo enseñó una niña de seis años, cuando le pregunté cuál es la mitad de diez. Miró sus dos manos un largo rato, moviendo los dedos (para mí, esa es la aritmética digital antigua y moderna: la de los diez dedos). De pronto dijo: "No puede ser cinco, porque el cinco está a este lado". Pensó otro rato y se preguntó "¿Será cinco y medio?" ¿Ustedes qué dicen?

Así he tratado en estos últimos 20 años de reconstruir en poco tiempo las largas cuatro fases por las que supongo que va pasando toda ciencia del pasado o del futuro: la acumulación de logías y grafías, como serían la Cronología y la Cronografía para la vivencia del tiempo y la Topología y la Topografía para la vivencia del espacio, para avanzar luego en el desarrollo de las métricas o las metrías, para refinar la Cronometría y la Topometría. Esas tres etapas nos permitirían establecer las regularidades, patrones, esquemas, leyes o nomías, que configurarían, en nuestro caso, la Crononomía y la Toponomía. Así se avanzaría en una Cronotoponomía del futuro.

Mi conjetura actual y mi apuesta de vida en los pocos años que me queden, es que en ese esfuerzo de el avance de la tercera a la cuarta fase del Programa Cronotopía, que consiste en ir

perfeccionando las metrías para pasar a la síntesis de las nomías con la ayuda de las tres Teorías Generales —la de Procesos y Sistemas, la de Modelos y Teorías y la de Representaciones e Interpretaciones— podrían sistematizarse todas las ramas de lo que ahora llamamos las matemáticas, la lógica, la teoría de la información y las físicas matemáticas, tanto las clásicas como las relativistas y las cuánticas, incluyendo en ellas la cosmología o astrofísica.

Pero no es tanto el resultado esperado, tal vez inalcanzable, sino es el proceso mismo de aprender y disfrutar de las matemáticas el que me ha venido enseñando cada vez más a mi, y me ha llevado a enseñar cada vez menos a los niños y a las niñas.

Esa actitud de no enseñar sino diseñar y guiar actividades o situaciones didácticas que lleven a que los estudiantes pasen al momento adidáctico en donde se apropian del control y el disfrute de la actividad de aprender me ha permitido disfrutar y aprender muchísimo con los niños y las niñas y los maestros y maestras del proyecto de fracciones de la Universidad del Norte con el patrocinio de la empresa *Promigas*. Los niños y las niñas nos sorprendieron a maestros y maestras —y a mí como su guía turístico— señalándonos dos tipos de animales de un zoológico mental entretenidísimo: los números gordos y los números flacos, y luego otros dos tipos: los números quietos y los números monstruos, de los cuales también hay varias especies, como los monstruos achicadores y agrandadores que yo ya conocía, y los monstruos empujadores que yo no conocía. Para mi sorpresa, los niños y niñas de Barranquilla me devolvieron inopinadamente a la distinción pitagórica sobre los números en reposo y los números en movimiento y me señalaron una nueva especie de números monstruos equivalentes a los enteros Z tomados como operadores activos que empujan trenes de cubitos sobre una línea recta graduada dibujada en una mesa. Sobre estos cuatro tipos de animales mentales estoy terminando mi primer libro que puede llamarse *producto* de esta investigación del Programa Cronotopía: se titula “El Zoológico Numérico”.

Pero prefiero terminar aquí la conferencia, dejándoles la expectativa de comenzar cada uno de ustedes su propio Programa Cronotopía, por ejemplo, visitando cada uno, ojalá con algunos niños y niñas clarividentes, su propio Zoológico Numérico mental, como si nunca hubieran sabido la variedad de monstruos maravillosos que nos habíamos perdido, y explorando con confianza y admiración sus propias creaciones mentales cronotópicas.

¡Que las disfruten!

Carlos E. Vasco

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Introducción histórica del método analítico en la Enseñanza de las matemáticas en Colombia[1]

Luis Carlos **Arboleda**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
luis.carlos.arboleda@gmail.com

Resumen

Se estudian las distintas modalidades de enseñanza del método analítico por José Celestino Mutis (1732-1808) en la cátedra de matemáticas del Colegio del Rosario de Bogotá durante la segunda mitad del siglo XVIII. Como marco de referencia para apreciar mejor las transformaciones de esta enseñanza, se empezará por recordar algunas de las características históricas y filosóficas más importantes de la distinción cartesiana entre lo analítico y lo sintético en el pensamiento matemático. Mutis empieza introduciendo el enfoque logicista del *Discurso del Método* de Wolff. Luego explica las reglas cartesianas del análisis y la síntesis, para lo cual traduce fragmentos del *Comentario* de Rabuel de la *Geometría* de Descartes. También presenta las ideas de Newton sobre el método analítico, tanto en la modalidad experimental de la *Óptica* como en la perspectiva físico-matemática de los *Principia*. Se analizará el esfuerzo que pudo haber significado la comprensión de este cambio de perspectiva en el proceso de lectura y traducción de los *Principia* por parte de Mutis. Enseguida se muestra que al centrarse la enseñanza en los *Elementos de Matemáticas* de Bails –como consecuencia de la reforma del plan de estudios de la cátedra promovida por Mutis-, se termina adoptando la modalidad operatoria del análisis como aplicación del álgebra a la geometría. Se concluye que la introducción del texto de Bails conlleva una transformación de fondo en el enfoque epistemológico, cognitivo y pedagógico de la enseñanza por el método analítico en la cátedra del Rosario, comparada con la obra de Wolff en su etapa fundacional.

Palabras clave: historia y educación matemática, método analítico, Cátedra del Rosario, Mutis.

Introducción

En esta charla se analiza la recepción, circulación, uso y apropiación de nociones relativas al método analítico en uno de los momentos históricos decisivos de la enseñanza

[1] Este texto ha sido propuesto a la revista *Historia y Memoria de la Educación* para ser publicado en el monográfico sobre Historia de la Educación Matemática en Iberoamérica.

moderna de las matemáticas en Colombia y, al mismo tiempo, en uno de los establecimientos emblemáticos en la institucionalización de esta enseñanza: la cátedra de Matemáticas del Colegio del Rosario.

Este momento corresponde a la divulgación de la ciencia colonial ilustrada entre las élites criollas del virreinato de la Nueva Granada en la segunda mitad del siglo XVIII. El catedrático José Celestino Mutis promueve inicialmente un enfoque logicista de la formación matemática basado en el *Discurso del método* de Wolff. Luego explica las reglas cartesianas de análisis y síntesis como parte de sus lecciones de geometría analítica. Llama entonces la atención sobre la necesidad de distinguir el método matemático y la geometría algebraica de Descartes, de su orientación escolástica y su filosofía de sistema.

En un ambiente ideologizado, dominado por las polémicas con las comunidades religiosas que se resistían a la divulgación local de las ideas de Copérnico y Newton, Mutis enseña los fundamentos de la nueva física. En estas circunstancias el discurso sobre el método matemático abandona la perspectiva logicista de Wolff y Mutis con sus alumnos más destacados se consagran a interpretar el uso que le da Newton a los procedimientos de análisis y síntesis en el estudio de los fenómenos de la mecánica racional.

Un evento excepcional producto de esta etapa es la traducción inédita e incompleta de los *Principia* de Newton, la primera en castellano por muchos años. Las reformas de los planes de estudio con lo traumáticas e inestables que fueron, favorecieron en todo caso transformaciones en el pensamiento local del método analítico a través del uso y apropiación en la enseñanza de tratados de matemáticas como los *Elementos de Matemática* de Bails, con un enfoque epistemológico, cognitivo y pedagógico diferente a un curso tradicional como el de Wolff.

Para mejor apreciar los alcances de la enseñanza del método analítico por Mutis en la cátedra de matemáticas del Rosario, es conveniente hacer antes algunas consideraciones generales sobre la importancia de esta cuestión en las transformaciones de la práctica matemática en la segunda mitad del siglo XVIII y comienzos del XIX. Por la misma razón se hace necesario fijar las concepciones de Pappus y Descartes sobre la distinción entre lo analítico y lo sintético en el pensamiento matemático.

El método analítico según Pappus y Descartes

La distinción entre análisis y síntesis tiene una larga y compleja historia en las matemáticas y la filosofía. Michael Otte y Marco Panza han formulado una propuesta de clasificación de las modalidades bajo las cuales ha sido abordada esta relación: fenomenológica, genética, representacional, pragmática, programática, direccional, configuracional, lógico-teórica, lingüística y disciplinaria .(Otte & Panza, 1997, ix-xiii). El propósito central de discutir estas interpretaciones radica en el problema histórico-filosófico que se encuentra en el fondo de la cuestión, esto es, el problema de la objetividad matemática como forma de conocimiento. Así pues, la importancia de estudiar la distinción análisis-síntesis para estos autores radica en mejorar nuestra comprensión sobre la complementariedad entre medios y objetos de la matemática como actividad de razonamiento humano. (Otte & Panza, xii).

Se sostiene que el creciente alejamiento de las ciencias naturales del enfoque tradicional de las matemáticas que se puso en vigor en la segunda mitad del siglo XVIII, no podría entenderse si no se tiene en cuenta el desarrollo complejo de la experiencia y la práctica científica como

consecuencia del incremento en las innovaciones en los métodos, técnicas y teorías, así como los cambios en el procesamiento de la información y la organización espacial del conocimiento. Por otro lado, en los mismos años se dieron transformaciones sustanciales en las formas de pensamiento matemático. Hacia comienzos del siglo XIX el pensamiento relacional ya había operado rupturas radicales con el pensamiento tradicional de las sustancias en tanto sujeto de predicación. La ciencia de las formas se alejó de la ciencia de los fenómenos, y las teorías empezaron a ser consideradas como realidades *sui generis*; evidentemente teniendo en cuenta que toda teoría corresponde a un modelo del mundo real y, en consecuencia, es el producto de una actividad subjetiva.

En los orígenes más directos de este pensamiento relacional se encontraban las innovaciones del «cálculo geométrico» introducido por Descartes en la *Geometría* (Descartes, 1954) con el propósito de establecer la distinción entre geometría y álgebra. Tales innovaciones –representadas en técnicas algebraicas para analizar problemas geométricos, conectar la construcción de curvas con sus respectivas ecuaciones algebraicas y clasificar las curvas según el grado de las ecuaciones que las representan–, resultan de la fecunda aplicación del método de análisis y síntesis a la solución del siguiente problema de Pappus (Descartes, 27), (Arboleda, 2013):

> Encontrar el lugar de los puntos tales que, si a partir de cada uno de ellos se trazan rectas que se cortan en ángulos dados, respectivamente con otras cuatro rectas dadas en posición, el producto de los dos segmentos que van desde el punto a dos de estas rectas, es igual al producto de los dos segmentos que van desde el punto a las otras dos.

Recordemos que la distinción analítico-sintético se origina en la filosofía griega. Esta tradición se revela en el siguiente escolio al libro 13 de los *Elementos* de Euclides (Klein, 1968, 259)): "El análisis, entonces, consiste en tomar como admitido lo que se busca para llegar por vía de consecuencia a algo cuya verdad ya ha sido admitida, mientras que la síntesis consiste en tomar algo admitido y pasar por vía de consecuencia a algo admitido como verdad".

Por otra parte, es al comienzo del libro 7 de sus *Mathematicae Collectiones* (traducción de Comandino de 1589) que Pappus formula sus ideas sobre las nociones de análisis-síntesis (Klein, 1968, 260, nota 7), las cuales usualmente se interpretan en los siguientes términos (Hintikka & Remes, 1974, 8-10):

> En el análisis, al suponerse que lo que se busca ya ha sido obtenido, examinamos aquello de donde procede y de nuevo las premisas de donde esto procede, hasta que remontamos de esta manera a algo ya conocido o que cumple la función de principio. A la inversa, en la síntesis se supone ya obtenido lo que en el análisis se busca como último término. Colocando en el orden natural (deductivo) los antecedentes del análisis en lugar de consecuentes, y relacionando unos y otros, llegamos a la meta que es la construcción del objeto buscado.

El esquema lógico del método de análisis y síntesis propuesto por (Hintikka & Remes, 1974, 22-26) e interpretado por (Gardies, 2001, 28-29) es el siguiente:

1. Enunciar aquello que nos es dado: D (D', D'' partes de D).
2. Enunciar aquello que se busca: z.
3. La etapa del Análisis: $D' \Rightarrow (z \Rightarrow d)$.
4. La etapa de la *resolución*: $d \Rightarrow D$.

5. La etapa de la *construcción*: Fin del Análisis; inicio de la Síntesis.
6. Demostración por medio de la síntesis: $D'' \Rightarrow (d \Rightarrow z)$.

Los resultados 6 y 3 permiten concluir que se llega a una equivalencia lógica entre z y d, cuando se parte de lo que nos es dado D o de sus partes D'y D''. Observemos también que la etapa 3 del análisis se inicia cuando a partir de una parte de lo dado y considerando lo buscado como dado, se deduce una afirmación que, en virtud de la resolución, se comporta como principio de lo dado.

La caracterización cartesiana de la relación análisis-síntesis en la *Geometría* es la siguiente (Descartes, 1954, 6-9):

> Si, entonces, deseamos resolver cualquier problema, suponemos primero que la solución ya se ha efectuado y damos nombres a todas las líneas que parecen necesarias para su construcción, tanto a las desconocidas como a las que se conocen. Luego, sin hacer distinciones entre líneas conocidas y desconocidas, debemos desentrañar la dificultad de una manera que muestre lo más naturalmente posible las relaciones entre estas líneas, hasta que encontremos posible expresar una única cantidad de dos maneras. Esto constituirá una ecuación, ya que los términos de una de estas dos expresiones son uno y otro iguales a los términos de la otra.

Anotemos finalmente que en su reconstrucción del procedimiento analítico empleado para la solución del problema de Pappus en los libros 1 y 2 de la *Geometría*, Gardies considera que Descartes utiliza dos modalidades de análisis. La primera consiste en aceptar como dado el lugar geométrico de los puntos que aportan solución al problema, para remontarse a partir de allí a la ecuación general de segundo grado como principio. La segunda modalidad de análisis consiste en remontarse del principio (la ecuación general) a otros principios, las ecuaciones restringidas de cada uno de los lugares geométricos que representan la solución. No obstante, Descartes no aporta la deducción lógica de cada lugar geométrico a partir de su ecuación, limitándose a exhibirlo como dado mediante una construcción (Gardies, 2001, 107-116).

El discurso wolffiano del método matemático y la instauración de la cátedra de Mutis

La creación de la cátedra de Matemáticas en el Colegio del Rosario de Santafé de Bogotá (1762) marca un momento decisivo en la introducción en Colombia de una enseñanza de las matemáticas dentro de los cánones del pensamiento ilustrado. El fundador y encargado de la cátedra por varios decenios fue José Celestino Mutis (1732-1808), un joven médico del virrey Mecía de la Cerda, que llegó al país dotado de una sólida formación en la nueva ciencia (botánica, física, astronomía y matemáticas) obtenida en Cádiz y Madrid, y que con el tiempo se convertiría en el director de la célebre Expedición Botánica de la Nueva Granada (1783) y del Observatorio astronómico (1803), el primero en América.

El 13 de marzo de 1762 Mutis pronuncia el *Discurso preliminar* o de inauguración de la cátedra en el cual expone sus ideas sobre la utilidad práctica de las matemáticas y su importancia en todo pensamiento racional sobre la naturaleza. (Hernández de Alba, 1982, 33-42), (Quevedo, 1993, 13-172). Nos interesa destacar el tratamiento que da Mutis en este discurso a lo que él denomina los "métodos sintético y analítico", según la expresión de Christian Wolff el autor de los *Elementa Matheseos Universae*, obra de referencia en los primeros años de la cátedra (Wolff, 1713-1715)(Wolffii, 1743-1752)(Wolff, 1757).

En primer lugar, se trata de explicar la conexión de estos métodos con el modo lógico en que se expresa el entendimiento de las cosas: "[En las matemáticas] se acostumbra el entendimiento a proceder sin error, conduciéndose siempre de unas verdades a otras, de la más simple hasta la más compuesta, o al contrario, según la aplicación de los dos métodos sintético y analítico". (Hernández de Alba, 1982, 36).

Con el fin de aclarar la secuencia de los términos sintético-analítico, Mutis anota a continuación que la geometría (euclidiana) es la parte de las matemáticas en donde se observa este «ajustado método de proceder» (sintético).

Luego en su lección sobre el "Método matemático", se dedica a precisar algunos aspectos del método expuestos de manera general en la inauguración: la naturaleza y características del discurso matemático, su constitución, organización, lenguaje y criterios de validación interna. En un trabajo anterior (Arboleda, 1993) hemos mostrado que Mutis se basa esencialmente en el enfoque logicista del *Discurso del método* que antecede los *Elementa* de Wolff. (Wolff, 1757, tomo 1, i-xii).

Al inicio de la lección Mutis afirma: "Todo el artificio de las matemáticas, su certidumbre y solidez consisten en el admirable orden de que usan los matemáticos para enseñar sus dogmas". Este orden del método geométrico se desenvuelve en dos componentes, resolución (análisis) y demostración (síntesis) (Hernández de Alba, 1982, 125):

> El orden con que se procede en las resoluciones y demostraciones es tan exacto y riguroso, que nada se admite, nada se deja pasar sin prueba. Ha merecido esta ciencia por la solidez que le es muy particular, calificar todo el método exacto en cualquier materia que sea. Y este modo de proceder los matemáticos es lo que se llama método geométrico.

El enfoque wolffiano del método que aprendieron los primeros alumnos en la etapa fundacional de la cátedra se centró en los siguientes principios: el método matemático es universal y provee un conocimiento sólido de las cosas; forma hábitos de orden y exactitud de juicio que producen «una facilidad y una viveza admirable para percibir la verdad en otras ciencias a las que se aplica»; otras prácticas y ciencias "muy útiles al comercio de la vida» no podrían por ellas mismas, sin la intervención del método matemático, proporcionar «esa fuerza de imaginación, esa vivacidad y ese hábito de invención" que se obtienen a través del pensamiento deductivo; "hay dos métodos generales para buscar las verdades en las matemáticas, a saber la Síntesis y el Análisis". (Arboleda, 1993, 48-49).

De acuerdo con Wolff, Mutis explica en su lección que el método matemático es el orden exacto y riguroso que los matemáticos utilizan en la presentación de sus conceptos. Primero las definiciones, seguidas de los axiomas y postulados en el caso de las matemáticas puras, o de experimentos y observaciones en las matemáticas mixtas y, finalmente, los teoremas y problemas. Establecer la verdad de una proposición consiste en demostrarla como teorema mediante una cadena de inferencias a partir de definiciones y axiomas. Este procedimiento se adelanta "observando cuidadosamente las reglas que proponen los lógicos para hacer sus silogismos". (Hernández de Alba, 1982, 132). En este discurso wolffiano del orden la prioridad no reside en el axioma o postulado euclidiano sino en la definición, la cual, más allá de aclarar los conceptos, cumple un papel inferencial. Para Mutis un "teorema" es "una proposición teórica deducida de muchas definiciones comparadas entre sí". (Hernández de Alba, 1982, 130).

En el discurso wolffiano tal como Mutis lo interpreta y divulga en la Nueva Granada, la noción de orden tiene una connotación especial, en tanto dispositivo fundamentador de las matemáticas que, en el desarrollo del análisis de los conceptos, se expresa en categorías de principios bien determinadas. Es tal vez en esta dirección que apunta la afirmación de (Cantù, 2018, 373) de que el orden en Wolff correspondería a un cierto propósito de fundamentar el conocimiento en una jerarquía de conceptos básicos de aritmética, geometría y todas las demás ramas del conocimiento humano. Esta autora sugiere una conexión entre este punto de vista de Wolff, y la concepción de Hilbert de fundamentar la geometría en grupos de axiomas relativos a las nociones de incidencia, orden, congruencia, paralelismo y continuidad. Así mismo, la creencia de Wolff en la posibilidad de un análisis de conceptos para determinar las nociones primitivas entre todas las demás no estaría alejada de otras concepciones fundacionales del programa de Hilbert; por ejemplo, en cuanto a que la noción geométrica de semejanza sea jerárquicamente superior a la noción de congruencia y que, en consecuencia, todos los teoremas que dependen de la primera anteceden a aquellos que dependen de la segunda. (Cantù, 2018, 373).

Recordemos a este respecto el famoso epígrafe de Kant a los *Fundamentos de la Geometría* en donde Hilbert afirma que los "principios básicos simples" sobre los que se funda la geometría, sus axiomas, son un ejemplo de que "todo conocimiento humano se inicia con intuiciones, pasa de éstas a los conceptos y termina en las ideas". (Hilbert, 1950, 1). Pero el sistema de axiomas de la geometría solo se establece como tal, a través del "análisis lógico de nuestra intuición espacial". Es el análisis lógico el que permite pasar de la intuición espacial –en donde los objetos aparecen como dados– a los principios que le sirven de fundamento a los conceptos e ideas geométricas. (Hilbert, 1950, 2-17).

Al comienzo de su lección del Colegio del Rosario sobre el método, Mutis explica la noción de análisis conceptual de los principios en términos de las tres reglas generales que fundamentan el método geométrico (Hernández de Alba, 1982, 125-126):

> La primera es que de las ideas más sencillas y más generales se ha de subir a las más compuestas y menos generales. La segunda es que en la definición de los términos nada quede oscuro, nada quede ambiguo. La tercera es que todas las proposiciones, cuyas verdades no constan a primea vista por la significación y percepción de los mismos términos con que se enuncian, se hayan de probar demostrando muchas verdades y, por medio de las definiciones supuestas, los axiomas concedidos y las proposiciones ya demostradas.

Mutis pudo confirmar el rol de las definiciones en función del ideal filosófico de Wolff al enseñar sus lecciones de aritmética con base en el primer capítulo de los *Elementa Matheseos*. El manuscrito con la traducción de estas lecciones bajo el título de «Elementos de aritmética», fue identificado recientemente en el Fondo Mutis del Real Jardín Botánico de Madrid por Sebastián Molina, y es analizado a profundidad en su tesis doctoral junto con otros documentos de la cátedra (Molina, 2018, 103-118). El carácter inferencial y al mismo tiempo filosófico de las definiciones ha debido hacérsele evidente, por ejemplo, en la traducción de la definición 2 del concepto de número uno (Molina, 2018, 109):

> Uno es aquello, que siendo algo no puede al mismo tiempo ser otra cosa dejando de ser lo mismo que es. Leibniz se explica en estos términos: supóngase por un instante que A es B, supóngase también que B no es D; supuesto esto si no se supone que A es D, vendremos en conocimiento de

> que A no es B, sino uno diverso del otro llamado B. Y aplicando la definición nuestra a términos más precisos, diremos, que A es uno, porque siendo A que es ser algo, no puede ser B que sería ser otra cosa, diverso de A o de aquello mismo que es.

Desde nuestra perspectiva de la aritmética formal esta traducción mutisiana aparece embarazosa y poco clara. Sin embargo, también sabemos que la dificultad epistemológica de esta definición para tratar de expresar la propiedad característica del concepto de "uno", radicaba en disponer para ello únicamente de los recursos limitados de la lógica de predicados, la única disponible en el contexto de la época. Por otra parte, el hecho de que Mutis trate a continuación de aclarar la definición apelando al análisis leibniziano, ilustra bien que ha captado la función pedagógica que Wolff le asigna al análisis conceptual.

La distinción análisis-síntesis en las lecciones de Mutis sobre la *Geometría* de Descartes

En sus lecciones de la cátedra consagradas a enseñar la geometría analítica Mutis hace nuevos planteamientos sobre el método de análisis y síntesis con respecto a los mencionados anteriormente. Comienza diciendo que expondrá el tema de manera "fácil y perceptible" en atención a los alumnos que emprenden por primera vez su estudio. En la más fiel aplicación de la "regla del análisis" al acto de enseñar, dice que procederá "examinando por partes, y poniendo en cada lugar, todo lo que me parece útil para hacer inteligible su doctrina" (Arboleda, 1993, 52 y 66).[2]

Esto corresponde a un propósito pedagógico de no fundamentar la enseñanza directamente en la presentación del original, ya que siendo la *Geometría* la más importante de las obras de Descartes, es la de más difícil lectura. Por otra parte, en el discurso del *Método matemático*, Mutis se había referido a la «regla de síntesis» interpretándola igualmente en un contexto pedagógico: "[Que] todas las proposiciones cuyas verdades no constan a primera vista por la significación y percepción de los mismos términos con que se enuncian, se hayan de probar demostrando muchas verdades, y por medio de las definiciones supuestas, los axiomas concedidos y las proposiciones ya demostradas". (Hernández de Alba, 1982, 126)(Arboleda, 1993, 53). Mutis advierte que no es su intención hacer ningún elogio a Descartes, primero porque no lo podría hacer al nivel de lo que ese gran hombre se merece, pero ante todo porque «el mejor elogio será el explicar bien su Geometría». Parece que Mutis quiso así dejar en claro a sus alumnos que comprender al geómetra es una cosa y combatir al filósofo de sistema es otra.

Para la realización del primer propósito –explicar bien la geometría cartesiana y facilitar su comprensión entre sus alumnos– Mutis probablemente aprovechó las *Lecciones de matemáticas* (La Caille, 1747), un texto de reconocida utilidad pedagógica en su época, y al cual se refiere en varios de sus escritos. La Caille le habría aportado una visión menos especulativa y más

[2] En este trabajo nos referimos de manera incidental al manuscrito con las notas de la enseñanza de Mutis de la geometría cartesiana, titulado *Comentarios a la Geometría de Descartes*. Este manuscrito se conserva en el Fondo Mutis del Real Jardín Botánico de Madrid. Recientemente Molina realizó su completa identificación, así como el primer estudio histórico pormenorizado del mismo, en el marco de su tesis doctoral (Molina, 2018, 118-124). Agradecemos a doña Irene Fernández de Tejada de Garay, Unidad de Archivo, Real Jardín Botánico, CSIC, el habernos facilitado una copia de este manuscrito [RJB III 7, 1, 5, ff. 397r-416v] para la preparación del presente trabajo.

orientada al abordaje del método analítico en la enseñanza del álgebra y la geometría analítica. Anotemos que existen evidencias de que este texto fue consultado en otros momentos de la cátedra y en la formación autodidacta por varios miembros de la élite criolla a lo largo de los decenios siguientes; incluso ya bien entrada la república –alrededor de los años 1850– Lino de Pombo lo utilizó en la enseñanza de la geometría analítica en el Colegio Militar (Pombo, 1850)(Arboleda, 2018).

Retornemos al manuscrito de Mutis titulado *Comentarios a la Geometría de Descartes* [RJB III 7, 1, 5, ff. 397r-416v]. Gracias a (Molina, 2018, 118-124) hoy sabemos que estas "notas de enseñanza" de la geometría cartesiana por parte de Mutis en la cátedra del Colegio del Rosario, corresponden efectivamente a la traducción inédita al español, hecha por él mismo, de los *Comentarios* que Rabuel consagró a la *Geometría* de Descartes (Rabuel, 1730). Hay que advertir que la traducción de Mutis no incluye, entre otros apartes, el texto sobre el procedimiento empleado en la *Geometría* en la solución del problema de Pappus. Como hemos aclarado anteriormente fue precisamente aquí donde Descartes utilizó el análisis para obtener el principio de la solución, es decir la curva algebraica cuya fórmula general es la ecuación de segundo grado; para luego deducir de esta ecuación, mediante un procedimiento de síntesis, las secciones cónicas que satisfacen la solución y finalmente construirlas con regla y compás.

Por otra parte, Mutis solo traduce 8 de las *12 Reglas generales para la solución de los Problemas* en las cuales Rabuel se propone sistematizar la explicación de Descartes sobre "Cómo se ha de llegar a las igualaciones que sirven para resolver los Problemas". No traduce en particular la Regla XII en donde Rabuel comenta precisamente la noción de *fórmula general*; es decir, aquella que manteniendo una estrecha relación con el método analítico, "hace evidente todas las combinaciones que pueden tener los términos y los signos de una clase de ecuaciones, y que involucran todos los casos que se pueden presentar en la resolución o construcción de un Problema. Aquella que expresa los distintos grados de las curvas a las cuales se da el mismo nombre" [Traducción de LCA]. No obstante lo anterior, la traducción contiene las reglas del I al VIII en donde Rabuel tematiza las explicaciones de Descartes sobre su método de resolución geométrica mediante el análisis algebraico (Maronne, 2017, 111-161 y 349-355 (Annexe)).

Las variaciones del enfoque newtoniano sobre el método analítico en la cátedra de Mutis

En el aparte anterior hemos señalado que Mutis fue claro, desde los primeros años de la cátedra, que enseñar la geometría de Descartes no era incompatible con su empeño en rebatir su filosofía de sistema. Precisamente en las lecciones de 1764 sobre los *Elementos de la filosofía natural*,[3] Mutis consagra varios apartes a rebatir el método de los escolásticos de construir sistemas globalmente explicativos «inventados por la fuerza del ingenio». Argumentando contra las pretensiones cartesianas de deducir la explicación de los efectos a partir de causas formuladas dentro de sistemas a priori, Mutis vuelve a referirse al método analítico-sintético,

[3] José Celestino Mutis, Elementos de la filosofía natural, que contienen los principios de la física demostrados por las matemáticas y confirmados con observaciones y experiencias: dispuestos para instruir a la juventud en la doctrina de la filosofía newtoniana en el Real Colegio del Rosario de Santa Fe de Bogotá en el Nuevo Reino de Granada, año de 1764. (Hernández de Alba, 1982, 43-68). Citado en este trabajo como *Elementos*.

pero ahora no en la perspectiva logicista sino relacionándolos con su interpretación newtoniana en el estudio de la naturaleza. Todo indica que se basó en la "cuestión 31" de la *Óptica* de Newton (Newton, 2003), aunque está por esclarecerse cuál de las ediciones utilizó entre las que se encuentran en los fondos Mutis y de libros raros y curiosos de la Biblioteca Nacional de Colombia en Bogotá.

En la continuación de este aparte de los *Elementos* que más nos interesa, Mutis afirma que el estudio de la naturaleza de acuerdo con el método de análisis y síntesis es el más seguro y que por ello permite abandonar para siempre todo tipo de disputas. Se comienza, dice Mutis, por el examen de las causas o efectos de los fenómenos para luego pasar al descubrimiento de sus potencias o causas. Observemos que Mutis no utiliza la equivalencia que establece Newton al comienzo de la "cuestión 31" entre las terminologías de "análisis y síntesis" y su equivalente "resolución y composición". Mutis omite igualmente la consideración de Newton sobre el papel de la inducción en la obtención de conclusiones generales a partir de los experimentos. Su explicación de la idea de Newton sobre análisis y síntesis se reduce a lo siguiente (Hernández de Alba, 1982, 51):

> [Newton] estableció... que de las causas particulares se fuera subiendo a otras más generales; y de éstas finalmente a las más generales entre todas. Este es el método analítico. Después de haber descubierto estas causas se debe bajar por un orden contrario, considerándolas ya como principios establecidos para explicar por este medio las causas menos generales, y después los fenómenos que son sus consecuencias; haciendo ver de este modo la solidez y firmeza de estas explicaciones. Este es el método sintético.

A continuación Mutis advierte que en la aplicación de este método en cualquier materia de las matemáticas o de la física –los términos originalmente empleados por Newton son «física natural» y «física experimental»–, hay que tener en cuenta que existe una jerarquía epistemológica del momento de análisis con respecto a la síntesis. Esta argumentación viene a reforzar el propósito de los *Elementos* de presentar la filosofía natural en un contexto de crítica radical a la vieja filosofía, pues la primacía del análisis ofrece la garantía de reconocer y utilizar principios que efectivamente existen en la naturaleza y, por consiguiente, permite abandonar sistemas que aún habiendo sido compuestos a través de síntesis laboriosas resultan ilusorios.

En la anterior interpretación sobre el uso newtoniano del método de análisis y síntesis en la filosofía natural, se sostiene que Mutis se inspiró, como hemos dicho, en la aproximación experimentalista a este método que aparece en la «cuestión 31» de la *Óptica*. Conviene hacer una aclaración a este respecto. Los biógrafos de Mutis coinciden en señalar que los *Elementos* o lecciones de Mutis de 1764 sobre la filosofía natural, corresponden al enfoque experimental adquirido en la primera parte de su formación en medicina en Cádiz durante los años 1753-1757 bajo la orientación de Pedro Virgili (1699-1776). Como se sabe Virgili fue el promotor de la apropiación en España de los principios de la física newtoniana aplicados a la explicación de los fenómenos fisiológicos (Quevedo, 1992, 52 y 55). Esta cuestión y otras relacionadas con la formación de Mutis y su actividad en la enseñanza concretamente de la física experimental en la Nueva Granada, han sido examinadas por Molina en su tesis desde una perspectiva más documentada y completa que seguramente será objeto de nuevas reflexiones en la materia (Molina, 2018, 76-83).

También se ha planteado que por la época de su formación en Cádiz, Mutis pudo haber frecuentado la Asamblea amistosa literaria dirigida por Jorge Juan en Cádiz, o al menos estuvo al tanto de los trabajos científicos modernos que en ella se discutían, así como también habría participado en las actividades del recién creado Observatorio astronómico de San Fernando (González de Posada, 2008, 45-46). Posteriormente, entre 1757 y 1760, Mutis estuvo en condiciones de aprovechar su estancia como médico en la corte de Madrid para fundamentar su formación científica particularmente en matemáticas y física, a través del estudio de las obras de los físicos experimentalistas entonces más reconocidos: los holandeses Willen‘s Gravesande y Pieter van Musschenboek, y los franceses Sigaud de la Fond y Jean Antoine Nollet, obras estas que enseñó y difundió en la primera etapa de la cátedra en la Nueva Granada (Arboleda, 1993)(Molina, 2018).

De manera que el texto *Elementos* corresponde a la primera parte de la formación newtoniana de Mutis con un acercamiento a la nueva física desde la experiencia sensible y de acuerdo con el enfoque de la *Óptica*, la cual se constituyó desde su publicación en 1704 en un poderoso medio de penetración y aceptación de Newton en el continente. Cuando esta etapa experimental estuvo suficientemente consolidada tanto por los esfuerzos de los primeros newtonianos (los experimentalistas holandeses y franceses antes citados), como de cartesianos como Malebranche, Mairan y Privat de Molières, entonces se hizo posible la conformación de un consenso sobre la obra paradigmática de los *Principia*.

Este ciclo histórico se verificó de cierta manera en la Nueva Granada. A la primera etapa de enseñanza de la física experimental en los inicios de la cátedra de matemáticas en el Colegio del Rosario, seguiría un periodo de cualificación de los estudios de la física matemática newtoniana, llegando a su madurez en los años 1770 con la traducción al castellano de los *Principia* de Newton en la célebre edición latina (Leseur & Jacquier, 1739-1742). La traducción de la obra canónica de la nueva física fue una tarea de enormes proporciones, aunque lamentablemente inacabada e inédita, que Mutis realizó en colaboración de algunos de sus alumnos más aventajados en la cátedra del Rosario, en un momento de álgidas discusiones contra los detractores del copernicanismo y las teorías heliocéntricas (Arboleda, 1992)(Arboleda, 1993).

No olvidemos que Leseur y Jacquier enriquecieron la edición de los *Principia* con numerosos comentarios históricos y científicos, particularmente útiles para quienes estando alejados de los centros académicos europeos, como era el caso de Mutis y sus alumnos, requerían informarse sobre el desarrollo y el estado del arte de las matemáticas y la física hasta la primera parte del siglo XVIII. Así mismo estaban dirigidos a facilitarle al lector la comprensión del verdadero estilo newtoniano de matematización de la naturaleza, y su diferencia con respecto al enfoque experimentalista ilustrado. Por ejemplo, al traducir los corolarios I y II a las leyes del movimiento de Newton en la edición latina, Mutis también tradujo los comentarios de los editores sobre la modelación de la composición y resolución de las fuerzas y movimientos por medio de la ley del paralelogramo.

Después de examinar las técnicas y argumentos de las demostraciones matemáticas de los corolarios, Leseur y Jacquier destacan las ingeniosas y precisas experiencias con las cuales Gravesande había confirmado la exactitud de tales demostraciones. Este bien pudo ser uno de aquellos momentos de la traducción en los cuales la apropiación intelectual de la obra canónica que se pone en juego en este ejercicio, condujo al reconocimiento por parte de Mutis y de sus

alumnos de que la cultura anterior formada en los textos de los divulgadores experimentales de Newton tenía su *razón de ser* en la teoría expuesta en los *Principia*.

Por cierto, el papel de Mutis en la institucionalización de la física newtoniana en Nueva Granada fue reconocido de manera temprana por los viajeros científicos europeos que exploraron nuestro territorio, en particular por Humboldt quien lo divulgó en Europa a través de su *Diario de viaje* y, de manera especial, en el obituario consagrado al gaditano en la célebre *Biographie Universelle* de Michaud, en donde escribió lo siguiente (Humboldt, 1823, 658):

> Como profesor de matemáticas del Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario, difundió las primeras nociones del verdadero sistema planetario en Santa Fe. Los dominicos no vieron sin inquietud que «las herejías de Copérnico» profesadas ya por Bouguer, Godin y La Condamine, en Quito, penetraran a la Nueva Granada; pero el virrey protege a Mutis de los monjes que querían que la tierra permaneciera inmóvil. Estos se acostumbraron poco a poco a lo que llamaban todavía «las hipótesis de la nueva filosofía».

Retornando a nuestro tema principal, recordemos que tanto en los *Principia* como en los comentarios de Leseur y Jacquier aparecen consideraciones sobre la concepción newtoniana del método de análisis-síntesis que seguramente no escaparon a la atención de sus lectores en Santafé de Bogotá, tanto más por la insistencia de Mutis de comprender a fondo el ««verdadero método de filosofar». Así, por ejemplo, desde el Prefacio, Newton advierte que la preocupación central de su filosofía consiste en investigar las fuerzas de la naturaleza a partir de los fenómenos del movimiento, lo cual corresponde al momento del análisis. Luego, a partir del conocimiento de los principios de estas fuerzas, se pasa a demostrar el resto de los fenómenos; es decir, del momento del análisis sigue el momento de la síntesis (Arboleda, 1992, 39-42)(Molina, 2018, 67-92).

Así mismo, en el corolario II a las leyes del movimiento antes mencionado se encuentran varios comentarios de Leseur y Jacquier sobre la composición de fuerzas en donde se revela la complejidad del método de la filosofía natural. La traducción del aparte sobre la experiencia del sistema de fuerzas asociado al movimiento de una rueda debe haber aproximado mucho más a Mutis y a sus alumnos a la comprensión del concepto de matematización newtoniana de la naturaleza, en comparación con la primera parte de la enseñanza de la cátedra consagrada a divulgar el enfoque experimentalista de la nueva física.

Una lectura a fondo del comentario de los editores sobre el estudio de este sistema de fuerzas, como la que tuvo que haber hecho Mutis con la traducción, pone en cuestión cualquier imagen simplificadora de la naturaleza y uso del método de análisis-síntesis. En particular, le permitió dejar en claro que lo decisivo en el método de Newton no era la generalización por inducción de los resultados más simples de la experiencia, sino, como dice Cohen, "un intercambio entre la simplificación e idealización de las situaciones que se dan en la naturaleza y sus análogos en el dominio matemático. De este modo, Newton pudo producir un sistema matemático y unos principios matemáticos que luego se aplicarían a la filosofía natural" (Cohen, 1983, 71-174).

Mutis lector de la versión moderna del método analítico en los *Elementos* de Bails

Otro evento determinante en la adopción del método analítico en la cátedra de matemáticas del Colegio del Rosario fue la introducción en la enseñanza de las obras de Benito Bails, tanto los *Elementos de Matemática* (Bails, 1772-1783) sin duda el compendio enciclopédico de las

matemáticas más importante de España en el siglo XIX, como en su versión abreviada de los *Principios de Matemática* (Bails, 1776).

El tomo segundo de los *Elementos* de Bails es un tratado de álgebra. Se estudian esencialmente los métodos de resolución de ecuaciones hasta de cuarto grado y su aplicación en el tratamiento algebraico de problemas de la geometría; en ello consiste el método analítico para Bails. *Análisis* es el «arte que enseña los métodos para resolver por el cálculo algebraico las cuestiones que se pueden proponer acerca de las cantidades», y *Analistas* aquellos matemáticos que se dedican a este ramo o aplicación del cálculo algebraico.

En el tomo tercero se exponen los fundamentos del *análisis cartesiano*, es decir, se caracterizan las curvas algebraicas, particularmente las cónicas, por el método de coordenadas, y se determinan sus propiedades mediante el cálculo diferencial e integral. Concluye el tomo con una presentación de ecuaciones diferenciales y un pequeño tratado de trigonometría esférica.

La introducción de Bails en la enseñanza de las matemáticas en Colombia es un hecho de significativa importancia, ya que, comparada con la influencia de la obra de Wolff en su etapa fundacional de la cátedra del Rosario, conllevó una transformación en el enfoque pedagógico y en los contenidos a enseñar. Mutis recomienda a Bails en el *Plan provisional para la enseñanza de las matemáticas en el Colegio de Nuestra Señora del Rosario* de 1785 (Hernández de Alba, 1982, 117-124).

En la presentación del plan al virrey Caballero y Góngora Mutis explica que si al comienzo de la cátedra en 1762 había preferido el compendio y el curso completo de Wolff, fue por "la dilatada experiencia de enseñar de aquel profesor» y porque estas eran «obras excelentes en su tiempo y modelo de las que posteriormente se han publicado". Pero los avances posteriores de las teorías matemáticas, agrega, han evidenciado que las obras de Wolff son "en cierto modo defectuosas" y que ya no convienen a la instrucción (Hernández de Alba, 1982, 119-120).

La opinión puede parecer desmesurada en cuanto a ubicar el compendio de Bails como una de las mejores obras de Europa, a no ser que esta opinión se refiera al hecho de que, como lo reconoce el propio Bails en su prólogo, en su realización extractó y copió de las obras clásicas y modernas, en particular de los cursos recientes de Bézout y Cramer, aquello que de acuerdo con los propósitos pedagógicos del plan le pareció más indicado, "enlazando con todo esmero los pedazos para la formación de un tratado" (Bails, 1772-1783, 1: xiii, xix).

Pero Mutis no se equivoca en su percepción de la inmediata difusión de la primera edición y posteriores reimpresiones de Bails tuvieron en España y en América, y su influencia en la preparación de un nuevo espíritu científico en las ciencias matemáticas. Esta acogida venía a responder a los nuevos derroteros de la institucionalización de la enseñanza en España y sus colonias, y a las expectativas de formación matemática centrada ya no tanto en una curiosidad ilustrada por las matemáticas, como en la búsqueda de una comprensión integral y formalizada de las teorías más avanzadas del momento. Todo ello enfocado en aquellos saberes que, como decía Bails en el prólogo general de la obra, satisfacen las "empresas de universal utilidad", y coadyuvan al interés natural de "sacrificar la especulación a la práctica" (Bails, 1772-1783, 1: xiv).

Por cierto, en el prólogo Bails pone las *Lecciones* de La Caille como ejemplo de lo que él entendía como moderna concepción de "curso completo de matemáticas", pero lamenta que ellas

fueran extremamente concisas y que hubieran omitido importantes temas sobre todo en matemáticas puras. Sin embargo, reconoce que esta concisión no obedecía a impreparación de su autor sino a un empeño conciente de solo exponer en el texto los fundamentos de las materias a enseñar, dejando al profesor la tarea de complementarlas y explicarlas en la enseñanza en el aula (Bails, 1772-1783, 1: v-vi).

Según Bails esta concepción pedagógica buscaba reemplazar el dictado en la enseñanza de las matemáticas. Se trataba de impedir que, por mantener fija la atención en el dictado de las materias más que en su comprensión, los alumnos cometieran errores en la copia apresurada, concretamente de cálculos y fórmulas complicadas. Estos errores eran incluso frecuentes en la copia más esmerada de las figuras y diagramas con los cuales se ilustraban los contenidos (Bails, 1772-1783, 1: vii).

En el tomo segundo sobre el álgebra encontramos otra reflexión pedagógica de Bails sobre el método analítico entendido, en el contexto intelectual del momento, como aplicación del álgebra a la geometría. Bails informa en el prólogo que en su presentación utilizó el *Comentario* de Rabuel a la *Geometría* de Descartes (Bails, 1772-1783, 2: vi), precisamente la obra que Mutis estudió y tradujo en cierto momento de su enseñanza en la cátedra del Rosario. También se refiere a las dificultades que enfrentan quienes se inician en la aplicación del método analítico (algebraico) en la resolución de problemas geométricos; concretamente en cuanto a introducir la doble escritura cartesiana para designar los segmentos dados y distinguirlos de los segmentos desconocidos a partir de la configuración geométrica del problema, y poder así avanzar en la construcción de la ecuación final.

Recordemos que Descartes reconoce esta dificultad en la *Geometría*, al señalar que su solución debe abordarse en el orden más natural para mostrar la manera de relacionar unos segmentos con otros. En su enseñanza de la geometría cartesiana Mutis se encontraba bien al tanto de esta dificultad y disponía de los elementos propuestos por Rabuel para superarla en la cátedra en términos de sus "12 reglas". Años más tarde, al publicarse el tomo segundo de los *Elementos*, Mutis se encontrará de nuevo con las técnicas y procedimientos que Bails ofrece al calculador o analista para vencer tal dificultad, los cuales no lo eximen de un esfuerzo laborioso e inteligente de construcción analítica como advierte Rabuel en el *Comentario* (Bails, 1772-1783, 2: v):

> Más es fortuna que destreza escoger con acierto las líneas y empezar como conviene el cálculo. Cuestión hay que se resuelve con suma facilidad siguiendo un rumbo, la cual sería trabajosa, y acaso imposible de resolver, siguiendo otro distinto. Por lo que, siempre que un camino parezca largo, o muy penoso, será prudente buscar otro, u otros muchos, si fuera necesario. No os dejéis alucinar de las resoluciones breves y despejadas que leyereis en las obras impresas, donde se encuentran cuestiones resueltas con tal brevedad y elegancia, que luego se entiende su resolución, a la cual no llegó su autor, sino después de muchísimo trabajo, y de haberla buscado en vano por muchos caminos.

Referencias bibliográficas

Arboleda, L. C. (1992). Newton en Nueva Granada. Anticartesianismo y matematización de la realidad en la traducción mutisiana de los *Principia*. En: San Pío Alarden, M. del P. (ed.)(1992). *Mutis y la Real Expedición Botánica del Nuevo Reino de Granada*, 33-47. Barcelona: Villegas/Lunwerg Editores.

Arboleda, L. C. (1993). Matemáticas, Cultura y Sociedad en Colombia. En: Quevedo, E. (ed.)(1993). *Historia Social de la Ciencia en Colombia,* tomo II, 13-172. Bogotá: Colciencias.

Arboleda, L. C. (2013). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas. En: Obando Zapata, G. (ed.)(2013). *Asociación Colombiana de Matemática Educativa 13º Encuentro*, 764-776. Medellín: Editorial Universidad de Medellín.

Arboleda, L. C. (2018). La introducción del método analítico en la enseñanza de las matemáticas en Colombia. *Revista Paradigma*, 39, 202-222.

Bails, B. (1772-1783). *Elementos de Matemática*. 10 vols. Madrid: Joachim Ibarra.

Bails, B. (1776). *Principios de Matemática*. 3 vols. Madrid: Vda. de Ibarra.

Cantù, P. Mathematics. Systematical Concepts. En: Theis, R. & Aichele, A. (ed.)(2018) *Handbuch Christian Wolff*, 357-380. Wiesbaden: Springer.

Cohen, I. B. (1983). *La revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas*. Madrid: Alianza.

Crépel, P. & Schmit, C. (eds.)(2017). *Autour de Descartes et Newton. Le paysage scientifique lyonnais dans le premier XVIIIe siècle*. Paris: Hermann.

Descartes, R. (1954). *The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition*. Translated from the French and Latin by Smith D. E. & Lattan, M. L. New York: Dover.

Gardies, J.-L. (2001). *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse? Essai de définition.* Paris: Vrin.

González de Posada, F. (2008). José Celestino Mutis médico, y la ciencia fundamental de su tiempo en España. *Real Academia de Medicina de Cantabria*, nº 26.

Hernández de Alba, G. (1982). *Pensamiento científico y filosófico de José Celestino Mutis.* Bogotá: Fondo Cultural Cafetero.

Hilbert, D. (1950). *The Foundations of Geometry.* Authorized translation by Townsend, E. J. Reprint edition. La Salle: The Open Court Publishing Co., 1950.

Hintikka, J. & Remes, U. (1974). *The Method of Analysis. Its Geometrical Origin and Its General Significance.* Dordrecht: Reidel.

Humboldt, A. von. (1823). Mutis Don Joseph Celestino. En: Michaud (ed). *Biographie Universelle Ancienne et Moderne*, nouvelle édition (Paris: Desplaces), 29, 658-662.

Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. New York: Dover.

La Caille, N.-L. de. (1747). *Leçons Élémentaires de Mathématiques ou Élémens d'Algebre et de Géométrie*. Paris: Guerin.

Leseur, T. & Jacquier, F. (1739-1742). *Philosophiae naturalis principia mathematica auctore Isaaco Newtono eq aurato: perpetuis commentaris illustrate*. Genevae: Barrillot.

Maronne, S. (2017). Les Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes (1730) de Claude Rabuel. En: Crépel & Schmit (ed.)(2017). *Autour de Descartes et Newton. Le paysage scientifique lyonnais dans le premier XVIIIe siècle*. (Paris: Hermann), 111-161 y 349-355 (Annexe).

Molina, S. (2014). Aspectos metodológicos de la demostración de la fuerza en los *Principia* de Newton. *Praxis Filosófica,* 39, 67-92.

Molina, S. (2018). "No hay reino que no sea newtoniano": José Celestino Mutis and the appropriation of Newton's experimental physics in New Granada (1762-1804). PhD diss., Università degli Studi di Torino.

Newton, I. (2003). *Opticks, or, A Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections, and Colours of Light*. New York: Prometheus Books.

Otte, M. & Panza, M. (eds.)(1997). *Analysis and Synthesis in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Pombo, L. de.(1850). *Lecciones de jeometría analítica.* Bogotá: Imprenta El día.

Quevedo, E. (1992). Mutis y la medicina. En: San Pío Alarden, M. del P. (ed.)(1992). *Mutis y la Real Expedición Botánica del Nuevo Reino de Granada*, 77-97. Barcelona: Villegas/Lunwerg Editores.

Rabuel, C. (1730). *Commentaires sur la géométrie de M. Descartes*. Lyon: M. Duplain.

Wolff, C. (1713-1715). *Elementa matheseos universae. Qui commentationem de methodo mathematica, arithmeticam, geometriam, trigonometriam planam, et analysin tam finitorum, quam infinitorum complectitur*. 2 vols. Halle: Magdeburgicae.

Wolff, C. (1757). *Cours de mathématique contenant toutes les parties de cette science mises à la portée des commençants, traduit en françois e augmenté considérablement*, 3 tomes. Paris: Jombert.

Wolfii, Christiani [Christian Wolff]. (1743-1752). *Elementa matheseos universae. Editio novissima, multo auctior et Correctior*, 5 tomos. Genevae: Henricum-Albertum Gosse.



Lesson Study as a vehicle for the Synergy of Research and Practices: A Japanese Perspective

Yoshinori Shimizu
University of Tsukuba
Japan
yshimizu@human.tsukuba.ac.jp

Summary

Given the distinctive characteristics of Japanese mathematics lessons found by the international studies and the subsequent focus of the attention to Lesson Study originated in Japan in education community, the author discusses the relationships between the scientific studies and endeavour for the improvement of teaching and learning from an insider's perspective. Reflecting on how mathematics educators have been struggling with studying the complex phenomena called "lesson" in the Japanese context, it is argued that orchestrating the scientific goal of building theories and the goal of improving teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching.

Key Words: Lesson study, mathematics, international comparisons, LPS

Introduction

The findings of large-scale international studies of classroom practices in mathematics include aspects of instruction as identified among participating countries while instruction in Japan is seemingly unique (Hiebert, et al., 2003; Stigler & Hiebert, 1999). Japanese mathematics teachers, for example, appeared to spend more time on the same task in one lesson than their counterparts in other countries (Hiebert et al., 2003, p.46), maybe because they have students work on a challenging problem and discuss alternative solutions to it. Also, experienced teachers in Japan tend to highlight and summarise the main points at particular phases of their lesson to have their students reflect on what they have learned (Shimizu, 2006). These striking characteristics can be regarded as indicating some indispensable elements of "structured problem-solving" in classroom that are valued and emphasized by Japanese teachers.

While much has been documented and analysed about mathematics classrooms in Japan, after the publication of The Teaching Gap (Stigler & Hiebert, 1999), in particular, Lesson Study became one of the notable topics in the mathematics education community (e.g. Huang & Shimizu, 2016). Lesson Study, 'jugyo kenkyu' in Japanese, is a common element in Japanese approach to improving teaching and learning in classroom whereby a group of teachers

collaborate to study the subject matter, students' thinking and learning in the classroom, and how classroom instruction can be improved (Fernandez & Yoshida, 2004; Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2014). Two major functions of Lesson Study are as a way of doing research with a hypothesis in the form of conducting lesson and as a place for presenting and discussing new findings based on classroom practice (Hirabayashi, 2002). These functions are related to the rationale for conducting Lesson Study as an opportunity of professional development for teachers to study the effectiveness of mathematics teaching and learning in their own classrooms. Also, practical knowledge related to the improvement of classroom instruction is accumulated as 'research' findings tested against the classroom practices of many teachers for many years.

Given the tradition of Lesson Study in more than a century, Japanese mathematics educators have often been challenged by teachers who have been engaged in Lesson Study whether results of "scientific" studies would or would not be usefully applicable to the improvement of teaching and learning in the classroom (Sekiguchi, 1994). The expectations by teachers for mathematics education research are high because they have their own problems to be resolved in their own contexts. How can a researcher productively and collaboratively work with teachers who have an access to the accumulation of practical knowledge tested against the classroom practices of many teachers for many years? How can research influence on classroom practices in such contexts?

An essential characteristic of the field of mathematics education is that its questions and concerns are deeply tied to matters related to the teaching and learning of mathematics (Silver & Herbst, 2007). Research in mathematics education has not only scientific goal of building theories but also the goal of improving of teaching and learning of mathematics. Then, examining the connections between 'scientific' study of a lesson and Lesson Study can shed light on a long-standing issue of the separation between research and practice in the education community, in general, and mathematics education community, in particular.

Educational Research as Socially and Culturally Situated

International Comparative Studies on Classroom Practices

Research in mathematics education that crosses national boundaries provides new insights into the development and improvement of the teaching and learning of mathematics (Shimizu & Kaur, 2013). In the course of discussing the characteristics of teaching and learning in classrooms by cross-national comparisons, researchers have gained more explicit understanding of their own implicit theories about how teachers teach and how children learn mathematics in their local contexts as well as what is going on in school mathematics in other countries (Stigler, Gallimore, & Hiebert, 2000). This is the key driving force to conduct international comparative studies in classroom practices.

The TIMSS 1995 Video Study of mathematics teachers' practices, a video component of the Third International Mathematics and Science Study, was the first attempt to collect and analyse videotapes from the classrooms of national probability samples of teacher at work (Stigler & Hiebert, 1999). Focusing on the actions of teachers, it has provided a rich source of information regarding what goes on inside eighth-grade mathematics classes in Germany, Japan and the United States with certain contrasts among three countries. One of the sharp contrasts between the lessons in Japan and those in the other two countries relates to how lessons were structured and delivered by the teacher. The structure of Japanese lessons was characterized as 'structured problem solving', while a focus was on procedures in the characterisations of lessons in the other two countries. The following sequence of five activities was described as the 'Japanese pattern':

reviewing the previous lesson; presenting the problems for the day; students working individually or in groups; discussing solution methods; and highlighting and summarizing the main point.

The 'Japanese pattern' seems to naturally fit within the teacher's planning of mathematics lessons. Japanese teachers, in elementary and junior high schools, in particular, often organise an entire mathematics lesson around the multiple solutions to a single problem in a whole-class instructional mode (Shimizu, 1999a). This organization is particularly useful when a new concept or a new procedure is going to be introduced during the initial phase of a teaching unit. Even during the middle or final phases of the teaching unit, teachers often organize lessons by posing a few problems with a focus on the various solutions students come up with. Also, the characterisation of Japanese lessons as 'structured problem solving' seems to be consistent with what teachers typically discuss in the post-lesson discussion in Lesson Study (Takahashi, 2008).

Characterization of the practices of a nation's or a culture's mathematics classrooms with a single lesson pattern was, however, problematised by the results of the Learner's Perspective Study (Clarke, Mesiti, O'Keefe, Jablonka, Mok & Shimizu, 2007). The analysis suggested that, in particular, the process of mathematics teaching and learning in Japanese classrooms could not be adequately represented by a single lesson pattern by, at least, the following two reasons. First, lesson pattern differs considerably within one teaching unit, which can be a topic or a series of topics, depending on the teacher's intentions throughout the sequence of lessons. Second, elements in the pattern themselves can have different meanings and functions in the sequence of multiple lessons. Needless to say, it is an important aspect of teacher's work not only to implement a single lesson but also to weave multiple lessons that can stretch out over several days, or even a few weeks, into a coherent body of the unit. It would not be possible for us to capture the dynamic nature of activities in teaching and learning process if each lesson was analysed as isolated.

An alternative approach was proposed to the international comparisons of lessons by the researchers in LPS team. That is, a postulated 'lesson event' was regarded to serve as the basis for comparisons of classroom practice internationally. In LPS, an analytical approach was taken to explore the form and functions of the particular lesson events such as 'between desk instruction', 'students at the front', and 'highlighting and summarizing the main point' (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006).

In particular, the form and functions of the particular lesson event 'highlighting and summarizing the main point', or 'Matome' in Japanese, were analysed in eighth-grade 'well-taught' mathematics classrooms in Australia, Germany, Hong Kong, Japan, Mainland China (Shanghai), and the USA (Shimizu, 2006). For the Japanese teachers, the event 'Matome' appeared to have the following principal functions: (i) highlighting and summarizing the main point, (ii) promote students' reflection on what they have done, (iii) setting the context for introducing a new mathematical concept or term based on the previous experiences, and (iv) making connections between the current topic and previous one. For the teachers to be successful in maintaining these functions, the goals of lesson should be very clear to themselves, activities in the lesson as a whole need to be coherent, and students need to be involved deeply in the process of teaching and learning. The results suggest that clear goals of the lesson, a coherence of activities in the entire lesson, active students' involvement into the lesson, are all to be noted for the quality instruction in Japanese classrooms.

Mathematics Education Research as Socially and Culturally Situated

In the Japanese contexts, the activity of Lesson Study includes careful planning and implementing the research lesson as a core of the whole activity, followed by post-lesson discussion and reflection by participants. In the discourse of teachers in planning, implementing, and reflecting on lessons, particular pedagogical terms are often shared and used in the contexts of examining classroom instruction (Shimizu, 1999). Through the participation in lesson study, beginning teachers learn these terms together with values attached to them. These terms reflect what Japanese teachers value in planning and implementing lesson within Japanese culture. 'Matome' as a category of 'lesson event', as was mentioned in the previous section, is one of such pedagogical terms often used by teachers. "Hatsumon" is another example of shared term that means asking a key question to provoke and facilitate students' thinking at a particular point of the lesson. The teacher may ask a question for probing students' understanding of the topic at the beginning of the lesson or for facilitating students' thinking on the specific aspect of the problem.

"Yamaba", on the other hand, means a highlight or climax of a lesson. Japanese teachers think that any lesson should include at least one "Yamaba" and the term often appears in planning a lesson and the post-lesson discussion in Lesson Study. This climax usually appears as a highlight during the whole-class discussion. The point here is that all the activities, or some variations of them, constitute a coherent system called a lesson that hopefully include a climax. Further, among Japanese teachers, a lesson is often regarded as a drama, which has a beginning, leads to a climax, and then invites a conclusion. The idea of "ki-sho-ten-ketsu" which was originated in the Chinese poem, is often referred by Japanese teachers in their planning and implementation of a lesson. It is suggested that Japanese lessons have a particular structure or a flow, moving from the beginning ("ki", a starting point) toward the end ("ketsu", summary of the whole story).

As teaching is a cultural activity and is socially and culturally situated, research is also socially and culturally situated. Sekiguchi (2015) argues that there are at least three major sources of Japanese mathematics education research; lesson study tradition, influence from Western countries, and existence of national syllabus. Then, in addition to focus on pedagogical terms shared and used in Lesson Study by teachers with values and beliefs on lessons, it would be productive for researchers to take into account the following contexts to have better understanding of classroom practices. First, in Japan we have national curriculum standards, which have been revised roughly every 10 years. In order to examine the trends and issues in most areas of mathematics research in Japan, we cannot neglect their connections with the goals and emphases described in the national curriculum standards. Second, the mathematics education community in Japan has a long tradition of lesson study by teachers as practical research methodologies in the form of action research. Researchers and teachers work closely within the community with local theories of students' learning in their perspective. Then, to grasp the ongoing research agendas, we also need to pay careful attention to their accumulated findings with respect to teaching materials and ways of teaching and learning in each research area. Third, developments of mathematics education research in Japan have been influenced by Western educational theories in various areas of inquiry, while educational activities themselves are rooted in East Asian cultural tradition.

Lesson Study as Embedded in Cultural Contexts

The ultimate goal of any study of classroom practice is to improve teaching for the purpose of enhancing students' learning, even if its major focus would be on, for example, constructing a theoretical model of teaching or comparing teaching methods among countries. For this goal, various approaches and methodologies can be adapted. The TIMSS Video Study was a breakthrough as a scientific exploration into the classroom, showing the feasibility of applying videotape methodology in a wide-scale national and international survey of classroom instructional practice. It has provided a rich source of information regarding what goes on inside eighth-grade mathematics classes in the three countries. Also, objective observational measures of classroom instruction were developed to serve as valid quantitative indicators, at a national level, of teaching practices in the three countries.

There are opportunities for Japanese teachers to learn with and from their experienced colleagues to pursue an excellent lesson with a focus on students' thinking in classrooms. "Lesson study" is an approach to develop and maintain quality mathematics instruction through a particular form of activity (Fernandez & Yoshida, 2004; Shimizu, 2002). Valuing students' thinking as necessary elements to be incorporated into the development of a lesson is a key to the approach taken by Japanese teachers.

Another type of approach to improve teaching practice has traditionally been taken by Japanese teachers in a practical way. In Japanese schools, workshops of particular style, "Jugyo Kenkyu-kai" ("lesson study meeting"), are regularly held at each school level or at the other levels. This opportunity has a strong impact on teacher development (Shimizu, 1999). These workshops include an actual lesson (a "research lesson") observed by many teachers as well as an extended discussion after the lesson (Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2014). Teachers exchange ideas about the lesson they have just observed focusing on the task on which students worked, the content taught, students' responses to the problem, and the teacher's roles. Experienced teachers or mathematics educators are often invited to comment on the development of the lesson observed, interpretations of the topic taught, and how the lesson could be improved. By observing and discussing an actual lesson, aspects of lessons are examined and explored.

The Origin and the Development of Lesson Study

Although Fernandez and Yoshida (2004) mention that the origin of lesson study can be traced back to the early 1890s, it seems to have appeared earlier. At the beginning of the modern era, the Japanese government established normal schools, where teachers set the goals of the lesson, prepared experimental lessons, and conducted those lessons in actual classrooms while other teachers were observing them. In the late 1890s, teachers at elementary schools affiliated to the normal schools started to study lessons by observing and examining them critically. Makinae (2010) argues that the origin of Japanese lesson study was influenced during the late 1880's by U.S. books for educators that introduced new approaches to teach. He points out that a book by Sheldon (1862) describes methods to learn about new teaching approaches, called 'criticism lesson' and 'model lesson'. This may be the beginning of Japanese lesson study. In fact, Inagaki (1995) argues that 'criticism lesson' was already practiced among elementary schools affiliated to the normal schools in Japan as early as the late 1890s. Teacher conferences utilising criticism lessons were conducted by local school districts in the early 1900s. Some of these conferences were already called 'lesson study conferences', or jugyo-kenkyu-kai in Japanese (Makinae, 2010). In this sense, lesson study has a history of more than a century.

In the early stages of development of Japanese lesson study, 'criticism lesson' (Sheldon, 1862) included a particular function of studying lessons, carefully examining the effectiveness of teaching, and publicly discussing ways to improve teaching and learning. The term 'research lesson', or kenkyu-jugyo, might come from this particular function of lesson study with its major focus on producing a new idea, or testing a hypothesis in the form of an operationalized teaching method or teaching materials. On the other hand, 'model lesson' (Sheldon, 1862) included another function of studying lessons; demonstrating or showcasing exemplary lessons, or presenting new approaches for teaching. For this purpose, the lesson should be carefully planned and based on research conducted by a teacher or a group of teachers. Participants can observe and discuss actual lessons with a hypothesis, instead of simply reading papers or hand-outs that describe the results of the study. The two different functions of lesson study – 'criticism lesson' and 'model lesson' – can be the original model of a variety of lesson study practiced around the country.

Despite the long history of lesson study in their own country, Japanese mathematics educators and researchers in other areas have not been much interested in studying lesson study itself until recently. After the publication of The Teaching Gap (Stigler & Hiebert, 1999), and of a Japanese translation of the book (Minato, 2002), Japanese educators, who often deeply involved in lesson study, have "found" the importance of this particular cultural activity.

Today, lesson study takes place in various institutions and contexts (Lewis & Tsuchida, 1998; Shimizu, 2002). Pre-service teacher training programs at universities and colleges, for example, include lesson study as a crucial and challenging part in the final week of student teaching practice, which usually lasts three or four weeks. In-service teachers also have opportunities to participate, held within their school (konai-kenshu), outside their school but in the same school district or city, at the level of prefecture, and even at the national level for several objectives. Teachers at public schools may just participate in lesson study in their school to develop their teaching skills, since the school is their working place. Other teachers may play the major roles in planning and conducting research lesson, for testing critically their hypothesis in the use of particular method for teaching mathematics. Teachers at university-affiliated schools that have a mission to developing a new approach to teaching, often open their lesson study meeting for demonstrating an approach or new teaching materials they have developed. Thus, we can still see two major functions of lesson study that seems to have arisen from the original form of it.

The Role of Outside Expert in Lesson Study

In lesson study, an outside expert is often invited as an advisor who facilitates the post-lesson discussion and/or makes comments on the possible improvement of lesson from a broader viewpoint (Fernandez and Yoshida, 2004; Shimizu, 2008). The expert may be an experienced teacher, a supervisor at local board of education, a principal of a different school, or a professor from the nearby university. In some cases, not only inviting an expert as a commentator in the post-lesson discussion, the group of teachers may meet with him/her several times prior to conducting the research lesson to discuss issues such as reshaping the objective of the lesson, clarifying the rationale of a particular task to be presented in the classroom, a range of anticipatory student responses to the task, and so on. In this context, an outside expert can be a collaborator who shares responsibility for the quality of a lesson with the teachers, not just an outside authority which directs the team of teachers.

As for the university professor invited as an outside expert, he or she is expected as a researcher to provide new visions on curriculum reform and teaching practices, trends and issues in local and national educational policies, and also some concrete suggestions for improving daily classroom practices, as well as commenting on what was observed in research lesson. Given the tradition of lesson study, mathematics educators have often been challenged by school teachers who deeply engaged in lesson study whether "research results" provided by researchers are useful for improving classroom practices.

There is another role of an outside expert. Namely, the expert can be as a collaborator and a contributor who joins the process of planning, implementing, and reflecting on a research lesson together with the group of teachers. In this case, an outside expert can be seen as a part of the community of practice, not an authority that has come from outside the school.

Studying and Improving of Teaching and Learning of Mathematics

Working with and Learning from Teachers

There has been a concern in mathematics education community, at least in Japan, with the relevance and usefulness of the results of research. Also, it is often argued that there is a long-standing issue of the separation between research and practice in education community, in general, and mathematics education community, in particular. Given the tradition of lesson study, it is very important for Japanese mathematics educators to work with and to learn from teachers. The relationship between research and practice may be seen differently in other countries.

Among five crucial relationships in research in mathematics education that he identified as important, Bishop (1992) lists the relationship between the teacher and the researcher as a particularly significant one. He characterizes three theoretical traditions, pedagogue, empirical scientist, and scholastic philosopher, and each tradition has the goal of enquiry, role of evidence, and role of theory in different ways. If the goal of study is direct improvement of teaching, and role of theory is accumulated and sharable wisdom of expert teachers, the study is in the pedagogue tradition. The evidence presented is usually highly selective and exemplary here. He noted that in both empirical scientist and scholastic philosopher traditions, the roles of teacher and researcher are incompatible. He wrote:

> The teacher is the practitioner whose practice, it is felt, needs to be informed by the research of the researcher. So, we have a clear hierarchy involved, with the researcher informing the teacher, but not necessary vice versa (p.717).

Bishop (1992) noted that the analysis and study of mathematics teaching from both these perspectives can make the teacher an object – not a subject – in the research. The role of outside expert who is invited to Lesson Study as an advisor can be considered in light of this hierarchy. The expert can facilitate the post-lesson discussion and/or makes comments on the possible improvement of lesson from a broader viewpoint. Or, being involved in Lesson Study can invite the consequence for the researcher being just an outside authority coming into the classroom to direct the group of teachers and develop theories for them, if the researcher is not aware of their role and does not understand the significance of working with and learning from teachers.

There is a possibility that the gap may become larger between the efforts in mathematics education research and the problems tackled by the teachers. Lerman (1990) noted that to make separation between those who practice, and those who develop theories for the practitioners, is not an adequate characterization of the business of good teaching. Also, Wiliam & Lester (2008) wrote as follows.

> We promote a renewal of a sense of purpose for our research activity that seems to be disappearing, namely, a concern for making real, positive, lasting changes in what goes on in classrooms. We suggest that such changes will occur only when we become more aware of and concerned with sharing of meaning across researchers and practitioners. (p. 38)

One of the major characteristics of Lesson Study is that, as the historical development illustrates, the approach was initiated by a group of teachers to improve teaching and learning in classrooms. The problem tackled by teachers has rooted in the reality of the school and the classroom. Research questions can be posed in responding to problems derived from teachers' works. In working with teachers and learning from teachers in Lesson Study, mathematics educators can have an opportunity for identifying implicit wisdom and accommodating craft knowledge to scholarly knowledge. Ellerton & Clement (1994) raised the issues to be confronted by the international mathematics education research community and noted the need to demonstrate a greater respect for the wisdom of practice deriving from the classroom knowledge and the action-oriented theories of practicing teachers of mathematics in different countries around the world. As Lesson Study has become a focus of attention in countries including Australia, Malaysia, and the United States, for example, we have more chances to learn from the voice of teachers.

Studying One Lesson Intensively

Lesson study usually is conducted in a few classrooms and then its results have very limited validity in the beginning. If those results are shared among other teachers, and replicated in many other classrooms in different schools, they could increasingly obtain higher validity and relevance. Therefore, a larger community of teachers who wish to learn from other teachers are key for the success of lesson study with certain generalizability. The key is a particular focus on aspects of developing a lesson. Participating in lesson study provides opportunities for teachers to learn shared values of teaching mathematics as a school subject, with and from experienced colleagues. Such values are related to teachers' views on a 'good' lesson and an 'excellent' teacher.

Ruthven & Goodchild (2008) discuss the significant of craft knowledge, the professional knowledge used by teachers in their day-to-day classroom teaching; action-oriented knowledge which is not generally made explicit by teachers, which they may indeed find difficult to articulate, or which they may even be unaware of using. Orchestrating scientific goal of building theories and the goal of improving of teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching. Lewis et al. (2006) argues that development of a descriptive knowledge base, explication of an innovation's mechanism, and iterative cycles of improvement research. By studying a good lesson continuously, practical knowledge tested against the classroom practices of many teachers for many years is accumulated. Here research can inform practice by providing a tool for explaining in broader views or providing teachers categories for describing the meaning of their vocabulary.

To develop better understandings of educational activities in local contexts, researchers need to consider the underlying values and beliefs shared by that local community (Shimizu & Williams, 2012). It should be noted, for instance, that valuing students' thinking as necessary elements to be incorporated into the development of a lesson is key to the approach taken by Japanese teachers (Shimizu, 2009). Describing anticipated students' responses, is, amongst other activities, key to lesson planning because the whole-class discussion depends on the solution methods the students actually come up with. Having a very clear sense of the ways students are

likely to think about and solve a problem prior to the start of a lesson makes it easier for teachers to know what to look for when they are observing students work on the problem.

Mary Hesse (1980) pointed out that any theory is value-laden, and that an awareness of the value behind a theory is crucial, in social science, in particular. In any science, criteria for theory choices contain value judgments, but those values tend to be filtered out as theories are developed. We need to be conscious that educational theories are value-laden and that those values derived in part from our experience with educational practices in a broader sense. Japanese mathematics educators who are engaged in Lesson Study are interested in "good" or "successful" classroom practice. The tendency is derived from their experiences with Lesson Study that has the goal of building theories and the goal of improving teaching and learning of mathematics at the same time.

Studying Values Attached to Teachers' Behavior

The countries in East Asia in the Confucian Heritage Culture certainly share commonalities, and mathematics classroom practices in this region exhibit similarities in various aspects of teaching and learning (Leung, Park, Shimizu, & Xu, 2015). However, classroom practices are embedded in their particular cultural and historical backgrounds. Thus, when we look into mathematics classrooms in different countries, even within East Asia, we immediately realize the diversity of practices in teaching and learning. Teachers in different countries or regions behave differently when teaching the same mathematical content, and consequently students in each country learn the topic differently. The key to understand the similarities and differences are the values attached to teaching and learning in classrooms.

When we compare teachers' behavior in classrooms between Tokyo and Shanghai, significant differences appeared (Shimizu, 2017). While teachers from both countries highlighted and summarized the main points of the lesson, the Japanese teacher summed things up even in the middle of the lesson, while the Shanghai teachers mainly focused on mathematical content taught in their lessons. Japanese mathematics teachers often organize an entire lesson around the multiple solutions to a single problem, in a whole-class instruction mode. Since the teachers emphasize finding alternative ways to solve a problem, Japanese classes often consider several strategies. It would be natural, then, for the classes to discuss problem-solving strategies from various viewpoints, such as mathematical correctness, brevity, efficiency, and so on. A teaching style with an emphasis on finding many ways to solve a problem naturally invites certain summarizing behaviors. If the whole-class discussion reaches a point of thinking retrospectively about what they have considered, even in the middle of the lesson, a teacher may have Matome.

There seem to be supporting conditions and shared beliefs among the Japanese teachers that justify often having Matome at the end of the lessons or at the end of sub-units. Every lesson has an opening, a core, and a closing. This is particularly the case for Japanese lessons, which begin and end with the students bowing. Teachers regard their lessons as dramas, which have a beginning and leads to a climax. In fact, one of the characteristics of Japanese teachers' lesson planning is the deliberate structuring of the lesson around a climax, "Yamaba" in Japanese (Shimizu, 2006, p. 143). Most teachers think that a lesson should have a highlight. The essential point is that Japanese mathematics teachers have access to a sophisticated and coherent vocabulary that allows them to discuss the components of the mathematics lesson, reflect on their teaching, and offer and receive advice. This structure provides a powerful tool for pre-service and in-service teacher education. These pedagogical terms are learned by teachers through participation in Lesson Study, which is a Japanese approach to improving teaching and

learning mathematics through a particular form of activities by a group of teachers, including planning, implementing, and discussing actual lessons (Shimizu, 1999). It is important to note that these pedagogical terms are used in the discourse of particular contexts embedded in a whole system, to describe a particular style of teaching. Japanese mathematics teachers often organize an entire lesson by posing just a few problems, and focus on students' various solutions to them. Educating teachers about lesson plans includes helping them with key pedagogical terms.

Given the tradition of lesson study, it is very important for Japanese mathematics educators to work with and to learn from teachers. With the study of classroom instruction researchers can have a manifestation of values attached to teaching and learning in classroom, as well as elements and structure of classroom practices. The manifestation in turn can provide an endorsement to the practical approaches taken by teachers to the improvement of classroom instruction. By participating in Lesson Study, mathematics educators can have a window through which researchers can ”touch” the issues in the practices rooted in the contexts where teachers working.

Concluding Remarks

For more than a decade, educators and researchers in the field of mathematics education have been interested in Lesson Study as a promising source of ideas for improving education. For a Japanese mathematics educator who has been deeply involved in lesson study for more than two decades, this ‘movement’ has provided an opportunity for reflecting on how Lesson Study as a cultural activity works as a system embedded in the entire society as well as local community of teachers with shared values and beliefs. It is argued that orchestrating the scientific goal of building theories and the goal of improving of teaching and learning of mathematics is the key to a synergy between research and the more practical knowledge of the craft of teaching.

International comparative studies have started to recognize the need to focus more on existing diverse voices and perspectives among members of the local communities. As the globalization and internationalization of research activities has continued to expand, the field of mathematics education research has clearly shown the diversification of perspectives on teaching and learning in classrooms embedded in local contexts. As the classroom practices are socially and culturally situated, and shared values and beliefs by teachers are key for continuous development and of the quality teaching, research in mathematics education is socially and culturally situated. Continuous working with, and learning from, teachers raises the issues and shapes the research questions originated in the efforts of improvement of teaching and learning mathematics in the classroom.

References

Bishop, A. (1992). International perspectives on research in mathematics education. In D. A. Grouws (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clarke, D. J., Keitel, C. & Shimizu, Y. (Eds.) (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider’s perspective*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Clarke, D. Mesiti, C., O’Keefe, C. Jablonka, E. Mok, I.A.C. & Shimizu, Y. (2007) Addressing the challenge of legitimate international comparisons of classroom practice. *International Journal of Educational Research.46*, 280-293.

Ellerton, N. F. & Clement, M.A. (1994). Transforming the international mathematics education research

agenda. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fernandez, C. & Yoshida, M (2004). *Lesson Study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,

Hesse, M. B. [1980]: *Revolutions and Reconstruction in the Philosophy of Science*, Brighton: Harvester Press.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chiu, A.M.-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., and Stigler, J. (2003*). Teaching mathematics in seven countries ： Results from the TIMSS 1999 Video Study*. U.S. Department of Education. Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Hirabayashi, I. (2002). Lesson as a drama and lesson as another form of thesis presentation. In H. Bass, Z. P. Usiskin & G. Burrill (Eds.), *Studying classroom teaching as a medium for professional development. Proceedings of a U.S. - Japan workshop*. Washington, DC: National Academy Press.

Huang, R. & Shimizu,Y. (2016). Improving teaching, developing teachers and teacher developers, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: An international perspective. *ZDM- Mathematics Education, Vol.48(4)*

Japan Society of Mathematical Education (2010). *The handbook of research in mathematics education*. Tokyo: Toyokan (in Japanese).

Leung, F.K.S., Park, K., Shimizu, Y., & Xu, B. (2015). Mathematics education in east Asia. In S.J. **Cho** (ed.) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp.123-143). New York, NY: Springer.Lewis, C., & Tsuchida, I. (1998). A lesson like a swiftly flowing river: Research lessons and the improvement of Japanese education. *American Educator, 22*(4).

Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational Researcher, 35(3)*, 3-14.

Li, Y., & Shimizu, Y. (eds.). (2009). Exemplary mathematics instruction and its development in East Asia. ZDM—The International Journal of Mathematics Education 41(3), (Special Issue).

Makinae, N. (2010). The Origin of Lesson Study in Japan. Y. Shimizu, Y. Sekiguchi & K. Hino (eds.) The proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education: In search of excellence in mathematics education, Tokyo: Japan Society of Mathematical Education.

Malara, N.A. & Zan, R. (2008) The complex interplay between theory in mathematics education and teachers' practice. In L.D. English (ed). *Handbook of international research in mathematics education (second edition)*. New York, NY: Routledge.

Minato, S. (2002). Learn from Japanese mathematics education: Jugyou-kenkyuu as becoming the focus in the United States. A translation with annotations of The teaching gap (Stigler & Hiebert, 1999). Tokyo: Kyoiku Shuppan.

Ruthven, K. & Goodchild, S. (2008) Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In L.D. English (ed). *Handbook of international research in mathematics education (second edition). New York, NY. Routledge*.

Sekiguchi, Y. (1994). Mathematics education research as socially and culturally situated. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sekiguchi, Y. (2015). The development of mathematics education as a research field in Japan. In B. Sriraman, J. Cai, K-H. Lee, L. Fan, Y. Shimizu, C.S Lim & K. Subramaniam (eds.) *The first sourcebook on Asian research in mathematics education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India*. Information Age Publishing.

Shimizu, Y. (1999). Aspects of mathematics teacher education in Japan: Focusing on teachers' role. *Journal of Mathematics Teacher Education. 2(1),* 107-116.

Shimizu, Y. (2002) Lesson study: what, why, and how? In H. Bass, Z. P. Usiskin & G. Burrill (eds.) *Studying classroom teaching as a medium for professional development: Proceedings of a U.S.-Japan workshop*. Washington DC: National Academy Press, 53-57, 154-156.

Shimizu, Y. (2006) How do you conclude today's lesson? The form and functions of "Matome" in mathematics lessons. In D. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka & I. Ah Chee Mok (eds.) *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world*. Rotterdam: Sense Publishers.

Shimizu, Y. (2008). The role of outside expert in lesson study in Japan. Paper presented at the interactive symposium, "Teacher-Academic partnerships: International approaches to teacher professional development", Annual Meeting of the American Educational Research Association (New York) March 27.

Shimizu, Y. (2014). Lesson study in mathematics education. In S. Lerman (ed.) *Encyclopedia of mathematics education*. New York, NY: Springer

Shimizu, Y. (2017). Uncovering the label "Asian" in international comparative studies of mathematics education. In Ji-Won Son, Tad Watanabe and Jane-Jane Lo (eds). *What matters? Research trends in international comparative studies in mathematics education.* (pp. 83-94), Springer.

Shimizu, Y. & Kaur, B. (2013) Learning from similarities and differences: a reflection on the potentials and constraints of cross-national studies in mathematics. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, Vol.45(1), 1-5.*

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R., & Clarke, D. J. (eds.). (2010). *Mathematical tasks in classrooms around the world.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Shimizu, Y. & Williams, G. (2012). Studying learners in intercultural contexts. In M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, and F. Leung (eds.) *Third international handbook of mathematics education*, New York, NY: Springer.

Sliver, E.A. & Herbst, P. G. Theory in mathematics education scholarship. In F. K. Lester (ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing.

Stigler, J. W., Gallimore, R., & Hiebert, J. (2000). Using video surveys to compare classrooms and teaching across cultures: Examples and lessons from the TIMSS and TIMSS-R video studies. *Educational Psychologist, 35(*2), 87–100.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York, NY: Free Press.

Takahashi, A. (2008). Beyond show and tell: Neriage for teaching through problem-solving: Ideas from Japanese problem-solving approaches for teaching mathematics. *Paper presented at TSG 19: Research and Development in Problem Solving in Mathematics Education,* 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Mexico.

Wiliam, D. & Lester, F. K. (2008). On the purpose of mathematics education research : Making productive contributions to policy and practice. In L. English (ed.) *Handbook of international research in mathematics education (second edition)* (pp. 32-48). New York, NY: Routledge.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

¿Es la excelencia matemática una prioridad curricular?

José Luis **Lupiáñez** Gómez
Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
España
lupi@ugr.es

Johan **Espinoza** González
Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
johan.espinoza.gonzalez@una.cr

Resumen

La formación y el desarrollo de los estudiantes diagnosticados con talento matemático o con altas capacidades, constituyen uno de los valores más importantes que un sistema educativo puede brindar a la sociedad, debido a la excelencia y el alto desempeño que pueden alcanzar estos estudiantes al llegar a un ámbito laboral. Sin embargo, en muchas ocasiones adolecen de fracaso escolar debido a la falta de directrices curriculares, de dinámicas de aula o de formación del profesorado. En este trabajo se caracterizará la noción de talento matemático, ejemplificando las habilidades que pueden desarrollar y describiendo posibilidades de diagnóstico.

Palabras clave: talento matemático, altas capacidades, procesos de diagnóstico.

Abstract

The education and development of students diagnosed with mathematical talent or with high abilities, constitute one of the most important values that an educational system can provide to society, due to the excellence and high performance that these students can reach when they reach a work environment. However, in many cases they suffer from school failure due to the lack of curricular guidelines, classroom dynamics or teacher training. In this work the notion of mathematical talent will be characterized, exemplifying the skills that can be developed and describing diagnostic possibilities.

Keywords: mathematic talent, high abilities, diagnostic processes.

Varios estudios se han propuesto precisar y clarificar el término talento con el propósito de hacerlo más operativo para la investigación (Benavides, 2008). Esto, porque existe una gran diversidad de concepciones para referirse a este concepto: superdotados, altas capacidades, talentosos; encontrándose más de 100 definiciones de talento y sus sinónimos (Villarraga,

Martínez & Benavides, 2004). Al respecto, Gagné (1995 y 1993, citado en Benavides, 2008) propone el Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento para distinguir los conceptos de superdotación y talento.

Para Martínez & Guirardo (2010) la superdotación se conceptualiza como un perfil donde el sujeto presenta un nivel elevado de razonamiento lógico, creatividad, memoria, que le posibilita una producción eficaz en cualquier ámbito o tarea, mientras que el talento hace referencia a una elevada aptitud en un ámbito o tipo de información. Además, el superdotado se caracteriza por un nivel elevado de varias aptitudes que puede combinar para obtener un resultado que va más allá de la simple suma de las habilidades, distinguiéndose no solo cuantitativamente, sino cualitativamente por la calidad de sus producciones (Ramírez, 2012).

Por tanto, la superdotación se refiere a la posesión de habilidades naturales en alto grado, que son espontáneas e innatas y que se presentan en al menos un dominio de habilidad; en contraste, el talento denota la posesión de habilidades, destrezas y conocimientos desarrollados sistemáticamente en al menos un campo de la actividad humana. Así, la superdotación se asocia a actividades intelectuales y al talento a destrezas y aptitudes más específicas.

Centrándonos en el talento el diccionario de la Real Academia Española de la Lengua propone cinco concepciones con respecto a este término. El primero de ellos se refiere a una persona inteligente con capacidad de entender. La segunda se relaciona con una persona apta, con capacidad para el desempeño o ejercicio de una ocupación. La tercera definición es una unión de la primera y segunda, ya que la concibe como una persona inteligente o apta para una determinada ocupación. La cuarta acepción, que corresponde a una definición original del término, concibe el talento como la moneda de cuenta de los griegos y romanos.

El talento también es referido a un conjunto de destrezas y habilidades que le permiten a un individuo dominar un área concreta del saber, de modo que la característica principal del talentoso es su especificidad (Prieto & Catejón, 2000). De igual forma, Clark (1997, citado en Díaz, Aleman, & Hernández, 2013) propone que un sujeto con talento presenta una distinción en algún campo particular, por ejemplo, música, artes y matemática, etc. Lopez-Andrada, Beltrán, López-Medina & Chicharo (2000), también hacen referencia a este concepto y sostienen que los estudiantes con talento muestran habilidades específicas en áreas muy concretas.

Además, el Departamento de Educación de los Estados Unidos (USOE), plantea la siguiente concepción de los sujetos con talento:

Los niños talentosos y sobresalientes son los que, identificados por profesionales calificados, manifiestan la virtud de habilidades extraordinarias y son capaces de dar un alto rendimiento académico. Ellos requieren programas educativos diferenciados o servicios más allá de los normalmente brindados por programas regulares de trabajo escolar, para potenciar su contribución a sí mismos y a la sociedad. (Renzulli, 1996, p. 15)

Otros autores consideran que el talento es una posibilidad de logro que es potencialmente inherente a todo ser humano, por lo que se desarrolla en cualquier momento de la vida de acuerdo con las habilidades de cada ser humano (Huamán, 2006; citado en Reyes-Santander & Karg, 2009). Al respecto Villarraga et al., (2004), distingue entre talento actual y talento potencial. El primero se refiere al ya desarrollado y evidenciado por un sujeto talentoso; mientras que el segundo al que aún no se ha desarrollado, es decir que el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar su o sus talentos.

Ramirez (2012) hace un análisis sobre la posible interrelación entre las características de la aptitud matemática que proponen los estudios de Greenes (1986), Miller (1990) y Freiman (2006) y afirma que de ellas se deduce que este constructo ha sido definido en términos de superioridad en procesos matemáticos. Además, considera que la posesión de unas adecuadas actitudes cognitivas como la flexibilidad para organizar datos, agilidad mental, etc., pueden verse manifestadas en el desarrollo de procesos idóneos para realizar con éxito algunas actividades como localizar la clave de los problemas, desarrollar estrategias eficientes, etc.

Villarraga et al., (2004) también proponen cinco nociones del talento orientadas en distintos aspectos: al logro o rendimiento, a lo innato o genético, a la interacción entre lo innato y el medio ambiente, a modelos cognitivos y a modelos sistémicos. Dentro del enfoque del logro o rendimiento, la teoría más conocida es la de los tres anillos de Renzulli (1977), quien concibe el talento como la interacción entre tres grupos básicos de rasgos humanos: capacidad por encima de la media, fuertes niveles de compromiso con la tarea y fuertes niveles de creatividad.

Con respecto al talento matemático, una de las formas más sencillas de definir este constructo y quizás la más difundida, es la de considerarlo como la capacidad matemática de un sujeto que se sitúa significativamente por encima de la media (Pasarín, Feijoo, Díaz & Rodríguez, 2004). Por lo que, en general, se nomina a aquellos estudiantes talentosos en matemática que son hábiles resolviendo problemas para sujetos de una edad superior. Morales (1998, citado en García, 2014) agrega que poseen un alto grado de dedicación a las tareas asignadas y que presentan altos niveles de creatividad a la hora de abordar tareas matemáticas.

Castelló & Batlle (1998, citado por Fernández, Castillo, & Barbarán 2010) consideran que una persona con talento matemático se caracteriza por disponer de elevados recursos de representación y manipulación de informaciones que se presentan en la modalidad cuantitativa y/o numérica.

Ramírez (2012) señala que las características que definen a estudiantes con talento matemático se han desarrollado desde los años ochenta del pasado siglo y propone que:

Un alumno con talento matemático es aquel que pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas, localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles, desarrolla estrategias eficientes, cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra, piensa de modo crítico y persiste en la consecución de los objetivos que se propone. (pp. 23-24)

En este estudio hemos elegido el término talento matemático, en el sentido que define Passow (1993), para referirnos a los alumnos que han demostrado unas aptitudes específicas en el área de matemáticas.

A continuación se presentan algunas ideas relacionadas con la caracterización del talento matemático.

Caracterización del talento matemático

En la actualidad, la atención de niños superdotados o con talento va adquiriendo importancia tanto en los diferentes currículos escolares como en el ámbito de la investigación en Didáctica de la Matemática. Este interés también se refleja en la conformación de grupos de discusión en Congresos de relevancia en el área de la Educación Matemática como es el ICME 10 (TSG4) o

el ICME 11 (TSG6) (Benavides, 2008).

Esta misma autora afirma que estudiar las características particulares que poseen estos estudiantes es una de las líneas de investigación que se han desarrollado alrededor del tema. De hecho, Krutetskii (1976) es quizás uno de los primeros investigadores que realizó un estudio sistemático en este sentido al observar los procesos cognitivos de 192 niños entre los 6 y 16 años ante una serie de problemas especialmente preparados. Krutetskii sostiene que este tipo de estudiante no sólo tienen mejor memoria y aprenden más rápido que sus compañeros, sino que también parecen pensar de forma cualitativamente diferente sobre las matemáticas y poseen algunas habilidades de resolución de problemas matemáticos de los adultos.

De igual forma García (2014) argumenta que desde edades escolares los niños con talento presentan características que los diferencian de los demás, como es el mostrarse activos, persistentes, flexibles y curiosos hacia el aprendizaje. Además, poseen una excelente rapidez en la captación de conceptos matemáticos complejos y abstractos. González & Domingues (2015) también argumentan que la creatividad, la motivación o el pensamiento divergente son cualidades que presentan este tipo de estudiantes.

Otros autores se han ocupado en estudiar el pensamiento de este tipo de estudiantes cuando resuelven tareas de resolución de problemas y concluyen que el razonamiento que muestran es muy diferente de estudiantes ordinarios en términos de velocidad y profundidad (Keşan, Kaya, & Güvercin, 2010). Greenes (1981) recoge algunas particularidades que presentan los estudiantes con talento en matemática, entre las que se destacan la formulación espontánea de problemas, la flexibilidad del manejo de datos, la originalidad de interpretación y la agilidad mental o riqueza de ideas. Por su parte, Freiman (2006) afirma que este tipo de estudiantes se caracterizan por preguntar espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, buscar patrones y relaciones, localizar la clave de los problemas, producir ideas originales, valiosas y extensas, etc.

Por último, Reyes-Santander & Karg (2009) proponen que los estudiantes aventajados en matemática presentan dominio de campos del conocimiento matemático, muestran persistencia y perseverancia en actividades matemáticas que le interesan y de generación metacognitiva, así como producir resultados generales.

A continuación se aborda algunas estrategias e instrumentos que se han empleado para identificar estudiantes con talento.

Mecanismos de identificación de estudiantes con talento

Uno de los objetivos de los estudios relacionadas con el talento consiste en establecer mecanismos de identificación para este tipo de estudiantes (Castro, 2008). A continuación se describen algunas estrategias e instrumentos que se han utilizado con este propósito.

Con respecto a las estrategias, Manzano, Arranz & Sánchez de Miguel (2010) presentan cuatro criterios que se pueden emplear en la identificación de estudiantes con talento. El primer criterio se relaciona con la identificación basada en aptitudes y considera que la puntuación mínima para distinguir niños con alta capacidad mediante la prueba de aptitud general debe ser superior al percentil 82, porque esta puntuación es equivalente a un coeficiente intelectual de 115. El segundo criterio es la identificación basada en la creatividad, donde los sujetos que obtienen una puntuación por encima del percentil 75 en los factores exclusivamente creativos según Torrance se consideran con alta capacidad.

El tercer criterio es la combinación de los dos anteriores, por lo que se consideran solo aquellos sujetos que obtienen una puntuación superior al percentil 82 en la prueba de aptitud general y que además demuestran niveles de creatividad que según Torrance están por encima del percentil 75 en todos los factores creativos medidos. Por último, el cuarto criterio es la identificación basada en el modelo de Renzulli, el cual se centra en el modelo de los Tres Anillos establecido por Renzulli (1978). En este criterio se incluyen los sujetos que muestren una alta producción cognitiva general, un alto nivel de motivación y un alto nivel de creatividad.

Genovard & Castelló (1990; González García, 2015), clasifican las principales estrategias de identificación en tres grandes grupos: identificación basada en las medidas informales, identificación basada en medidas formales y análisis individualizados. En el primer grupo se encuentran los cuestionarios y auto informes. La ventaja de éstos consiste en la economía de tiempo y en la recolección de ciertos indicios sobre el perfil excepcional del estudiante. En el segundo grupo están los que evalúan directamente los componentes implicados en la excepcionalidad. A pesar de que presentan cierta fiabilidad, resulta una estrategia costosa de aplicar porque los instrumentos generalmente son extensos y su aplicación requiere de expertos en el área. En cuanto a los análisis individualizados, se centran en las características específicas de los sujetos, recogiendo información con técnicas del primero y segundo grupo; así como información de tipo biográfico.

Rogado et al. (1994) menciona una estrategia adicional denominada identificación en el aula, la cual consiste en la observación seria y continua por parte del docente del trabajo de los estudiantes en el aula, el análisis de la creatividad, originalidad y perseverancia que muestra en las tareas que resuelve. Así mismo incluye las calificaciones escolares, la información aportada por otros profesores, sus padres y compañeros de clase.

En relación con los instrumentos, Benavides (2008) menciona varios que agrupa en dos grandes bloques: las técnicas subjetivas o informales y las técnicas objetivas. Las primeras se basan generalmente en la observación de aquellas personas que pueden proporcionar información referente al desarrollo, intereses, expectativas o aficiones del sujeto valorado. Las pruebas de este tipo utilizadas con mayor regularidad son:

a) Informes de los profesores, que generalmente están influenciados por cuestiones del rendimiento escolar y no siempre toman en cuenta aspectos relevantes del talento. Entre este tipo de instrumentos, se puede citar las escalas de Renzulli (SCRBSS) para la valoración de las características de comportamiento de los estudiantes.

b) Informes de los padres, que suponen una fuente de información relevante sobre todo en aspectos evolutivos en las edades tempranas. Se pueden citar los cuestionarios para padres de Beltrán & Pérez (1993).

c) Nominaciones de los compañeros, que recolectan información respecto a las capacidades, intereses, rendimiento académico, socialización y liderazgo del sujeto. Se puede citar el cuestionario para la nominación de iguales de Beltrán & Pérez (1993) que incluye, entre otras cuestiones, cómo señalar a compañeros que haría mejor un presupuesto, el mejor inventor o el más divertido.

d) Autoinformes, que son adecuados para alumnos mayores. Estos autoinformes son poco significativos pues no suelen generar diferencias entre alumnos con talento y alumnos promedio (Genovard & Castelló, 1990).

Con respecto a las técnicas objetivas, éstas se refieren a pruebas psicométricas, estandarizadas o inventarios de personalidad. Este tipo de pruebas reúnen criterios de consistencia interna, validez y fiabilidad estadísticas. Algunos tipos de instrumentos empleados son:

a) Test de inteligencia general, que ocupan un lugar fundamental en la evaluación del talento y sigue siendo el criterio más valorado por los especialistas. Entre los más aconsejados están el Stanford-Binet Test of intelligence, las escalas de Wechsler y el test de matrices progresivas de Raven.

b) Test de aptitudes específicas, que permiten afinar mucho el tipo de talento del alumno y generalmente incluyen medidas específicas en distintas áreas como razonamiento verbal, numérico, matemático, etc. Entre los test de aptitudes específicas se encuentra la batería de aptitudes diferenciales y generales (BADyG) de Yuste (1995).

c) Pruebas de rendimiento, que evalúan generalmente la capacidad de lectura y escritura y el nivel de aprendizaje en matemáticas. Los profesores también pueden elaborar pruebas basadas en el currículum ya que tienen un buen conocimiento del alumno.

d) Test de creatividad, que analiza la creatividad del sujeto a través de medidas de fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración de las respuestas. Se puede destacar la prueba de Torrance Test of Creative Thinking (TTCT).

e) Test de personalidad, los cuales pueden dar a conocer la madurez emocional y social del alumno. Entre estos se puede citar el cuestionario de personalidad EPQ-J de Eysenck y Eysenck.

Con respecto a las estrategias empleadas en la identificación del talento matemático, la revisión de literatura constata que existen diversos métodos de enfoque cualitativo y cuantitativo; destacándose entre ellos los test estandarizados. El problema de éstos es que puede suceder que niños muy capaces en el área de la matemática no sean identificados o que suceda lo contrario, niños que no son talentosos puedan ser identificados como tal (Benavides, 2008).

Niederer & Irwin (2001) proponen los siguientes seis mecanismos para identificar el talento matemático: test, nominación de los profesores, nominación de los padres, nominación por parte del alumno, la nominación de los compañeros y la habilidad de los estudiantes para resolver problemas. Así mismo, Marjoram & Nelson (1988) sugieren algunos métodos como la nominación de los profesores o una puntuación sobresaliente en test de inteligencia general.

De igual forma, algunos autores proponen el uso de la invención de problemas como una herramienta que podría ser utilizada en la identificación de estudiantes con talento matemático (Ellerton, 1986, Kesan et al., 2010), ya que ésta permite observar los conocimientos y habilidades matemáticas, así como la creatividad de niños considerados con talento matemático (Krutetskii, 1976). Además, autores como Getzels & Jackson (1962; citado en Silver (1994) y Balka (1974) han empleado actividades de invención de problemas en el proceso para identificar individuos creativos.

Por último, Prieto, Barmejo & López (2000) sostienen que la identificación del talento estará condicionada de acuerdo con el propósito que se persiga. De esta forma, si el objetivo es identificar-clasificar el talento, el diagnóstico consistirá en determinar si cumple los criterios para ser considerado como tal. Si el fin es proporcionar un currículum o realizar una intervención, el procedimiento se centrará en la evaluación-reconocimiento que se centra en reconocer las altas habilidades y sus manifestaciones. De acuerdo con este autor, ambos

corresponden a dos modelos de atención a la diversidad que pueden funcionar incluso de forma conjunta.

Así, en este estudio se analizaron las diferentes concepciones del talento matemático, ya que existe una diversidad de concepciones para referirse a este concepto. También se buscó aportar información sobre las principales características que presentan los estudiantes con talento matemático, así como las diferentes estrategias e instrumentos que se han empleado en su identificación, en la que se mencionaron brevemente las tareas de invención de problemas como una estrategia complementaria dentro de este proceso.

Por último, se coincide en la necesidad de una identificación y caracterización de estudiantes con talento, que aporte información para una respuesta educativa pertinente a las necesidades específicas que éstos tienen, evitando así los efectos negativos por inadecuación, desinterés o incluso dificultades en el aprendizaje. Esto debe consituir una prioridad curricular.

Referencias y bibliografía

Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher, 21,* 633-636.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. Universidad de Granada.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113–140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1191/

Díaz, E., Aleman, H., & Hernández, C. (2013). Un modelo pedagógico para desarrollar el potencial de estudiantes talentosos en matemática en Costa Rica. *Uniciencia*, *27*, 51–66.

Ellerton, N. (1986). Children´s made-up mathematics problems: A new perspectiveon talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 261–271.

Fernández, J. A., Castillo, S., & Barbarán, J. J. (2010). La invención de problemas y el desarrollo de la competencia matemática. *Edupsykhé*, *9*(2), 221–234.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades : A Challenging Situations Approach. *The Mathematics Enthusiast*, *3*(1), 51–75.

García, R. (2014). *Diseño y validación de un instrumento de evaluación de la Competencia Matemática. Rendimiento matemático de los alumnos más capaces* (Tesis doctoral) Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

González García, M. (2015). *Perfiles cognitivos asociados a alumnos con altas habilidades intelectuales*. Recuperado de http://www.tdx.cat/handle/10803/313461

González, M., & Domingues, F. S. (2015). ¿Existen indicadores para identificar el talento? *Aula*, *21*, 21–32.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *28*(6), 14–17.

Keşan, C., Kaya, D., & Güvercin, S. (2010). The Effect of Problem Posing Approach to the Gifted Student ' s Mathematical Abilities, *2*(3), 677–687.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: Universidad de Chicago Press.

Lopez-Andrada, B., Beltrán, M. T., López-Medina, B., & Chicharo, D. (2000). *Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades*. Madrid: Ministerio de Educación y cultura, Centro de investigación y Documentación Educativa.

Martínez, M., & Guirardo, A. (2010). *Alumnado con altas capacidades intelectuales*. Barcelona: Editorial Graó.

Manzano, A., Arranz, E. & Sánchez de Miguel, M. (2010). Multi-criteria identification of Gifted Children in a Spanish Sample. *European Journal of Education and Psichology, 3*(1), 5-17.

Marjoram, D. & Nelson, R. (1988). Talento matemáticos. En J. Freeman (Ed). *Los niños superdotados. Aspectos Psicológicos y Pedagógicos*. Bilbao: Santillana.

Niederer, K., & Irwin, K. (2001). Using problem solving to identify mathematically gifted students. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed), *Proceeding of the 25th Conference of the Internacional Group of Psychology of Mathematics Education*, Utretcht, Vol. 3, 431-438. Utretcht: The Netherlands.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O., & Rodriguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *FAISCA. Revista de Altas Capacidades*.

Prieto, M. ., & Catejón, J. L. (2000). *Los superdotados: esos alumnos excepcionales*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Ramírez (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Reyes-Santander, P., & Karg, A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. . González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403–414). Santander: SEIEM.

Renzulli, J. S. (1977). *The enrichment triad model. A guide for developing defensible programs for the gifted and talents*. Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.

Renzulli, J. S. (1996). En qué consiste lo sobresaliente: un reexamen de la definición de sobresaliente y talentoso. *Dossier, 5*, 12-29.

Rogado, M.I, Nograro, C. R., Zabala, B., Etzebarría, A., Albes, M. C., García A. C., Gonzalo, P. I., Mauleón, J. M., Del Barrio, B. & Fernández, I (1994). *La Educación del alumnado de altas capacidades*. Pais Vasco: Departamento de Educación, universidad e investigación.

Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing.pdf. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19–28.

Villarraga, M., Martínez, P., & Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro, & R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en iberoamerica* (pp. 25–35). Orealc-Unesco.

Minicursos

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Mini curso de Comunicación de la Matemática en el Aula Escolar para futuros profesores y futuras profesoras

Claudia **Vargas** Díaz
Universidad de Santiago de Chile
Chile
claudia.vargas.d@usach.cl

Resumen

El minicurso se dará en dos partes: 1) aspectos comunicativos generales y la comunicación de la matemática, y 2) comunicar con éxito, recomendaciones y recursos. Estos contenidos son parte de un ciclo formativo que se dictó a un grupo de futuros profesores de matemática de enseñanza media de la capital de Chile. En este artículo se comparten brevemente la metodología, los resultados y las conclusiones sobre un proyecto que acaba de culminar en el cual se abordó la comunicación de la matemática en la formación de profesores de matemática.

Palabras clave: educación, matemática, didáctica, comunicación, reflexiones de los futuros profesores

Introducción

El proyecto del cual emergió este mini curso pretendió caracterizar las competencias comunicativas necesarias para la formación de profesores de matemática de educación media. Las competencias comunicativas son relevantes en la formación del docente no sólo por lo profesional (Giménez y Vargas, 2012) sino también por el efecto que puede causar el profesorado en sus educandos (Fernández y Cuadrado, 2010). Así en este trabajo se considera que la competencia comunicativa matemática es la capacidad social comunicativa de enseñar matemática, la cual se desarrolla cuando el profesor reflexiona acerca de la importancia de la comunicación para enseñar a un grupo de alumnos interesados en aprender matemática (Vargas, 2012).

Para el proyecto se trazaron los objetivos específicos siguientes: O1. Analizar la situación actual de la formación de profesores de matemática en relación a la competencia comunicativa. O2. Reconocer elementos teóricos que sirvan para caracterizar la competencia comunicativa y elementos prácticos que promuevan en los futuros profesores el desarrollo de competencias para comunicar la matemática en un proceso de formación. O3. Detallar una propuesta de formación que sirva para desarrollar la competencia comunicativa en futuros profesores. O4. Explorar si la propuesta de formación (implementación piloto) es capaz de desarrollar la competencia comunicativa en futuros profesores.

En el mini curso se mostrarán los resultados relacionados con los objetivos O3 y O4 ya que según estos objetivos, parte de los resultados obtenidos fueron materializados en una propuesta de ciclo de formación la cual fue experimentada.

Se destaca la tarea realizada por los estudiantes, para lo cual se expone un ejemplo y la reflexión de una futura profesora en su experiencia dando clases de repaso.

Metodología

Para abordar los objetivos, se realizó una revisión de las mallas curriculares de las carreras de pedagogía en matemática acreditadas que formen parte de universidades del Consejo de Rectores de Universidades Chilenas CRUCH y se consultó a los jefes de carrera para conocer si en las respectivos programas se desarrollan competencias comunicativas para enseñar matemáticas en algunas de las asignaturas. Conjuntamente, se realizó un sondeo de percepción en un grupo de estudiantes de pedagogía que ya cursaron prácticas profesionales para así conocer sus percepciones y reflexiones en relación a la competencia comunicativa para enseñar matemática (Domingo, 2013).

También se realizó un reconocimiento de elementos teóricos para caracterizar las competencias comunicativas a desarrollar en los futuros profesores para su posterior desempeño profesional (Saló, 2006) (Sanz, 2005). Se filmaron algunas clases de matemática para extraer otras informaciones en torno a competencias comunicativas del profesor de matemática para identificar elementos prácticos que iluminaran qué se debe mejorar al comunicar la matemática. El análisis se realizó considerando los tipos de intercambio en el aula (Villalta, 2009) (Villalta y Martinic, 2013).

En base a la literatura y a los hallazgos de las video grabaciones obtenidas se elaboró una propuesta secuenciada de formación (mini ciclo de formación) para los futuros profesores con la implementación piloto de la propuesta obtenida en estudiantes de pedagogía en matemática. Se les pidió video-grabar unas clases para luego analizar su performance. Esto porque las reflexiones de los futuros profesores están estrechamente ligadas con sus prácticas futuras (Miller y Baker, 2005).

Resultados

En relación al objetivo O1, se pudo establecer que los programas de formación que accedieron a compartir información no entregan herramientas directas en competencias comunicativas para enseñar matemática (Vargas y Apablaza, 2019).

Respecto del objetivo O2, los/las participantes admiten que no han sido formados en esa perspectiva con lo cual evidencian la necesidad de instrucción al respecto.

En términos del objetivo O3, se detectó que una de las principales falencias de los profesores en las filmaciones realizadas fue que explican la matemática sin hacer uso de materiales didácticos que podrían hacer más significativo el aprendizaje de sus estudiantes.

Parte de los hallazgos del trabajo metodológico se materializaron en un ciclo de formación en relación al desarrollo de competencias comunicativas. Este ciclo formativo fue programado en base a lo informado por los y las jefes de carrera, la literatura y a los hallazgos a partir de los vídeos.

El ciclo tuvo una duración de cuatro sesiones y se trabajó en él los siguientes aspectos:

Primera parte. Aspectos comunicativos generales:

1. La comunicación. Para hacer conscientes del acto comunicativo a los futuros profesores y profesoras, así como también informar entre otros aspectos, los elementos teóricos que subyacen a la comunicación.
2. Dialogar. Dar a conocer qué significa dialogar y cuál es la importancia del diálogo en el aula.
3. Tipos de discurso. El discurso dialogar y el discurso monologal.
4. Comunicación en el aula. La habilidad de escuchar y el hacerse escuchar.

Segunda parte. Comunicación de la matemática

5. La comunicación de la matemática. El contenido matemático y su complejidad.
6. Trabajo reflexivo ¿Nos hemos visto dando clases? Los futuros profesores realizan la tarea de mirarse dando clases. En la tarea identifican el tipo de discurso que realizan y examinan su práctica comunicativa.

Tercera parte. Comunicar con éxito

7. El discurso perfecto. En búsqueda de los tipos de intercambio comunicativo.
8. Receta. La fórmula del buen comunicador.
9. ¿Qué hay que evitar?. Errores comunes en clases de matemática.

Cuarta parte. Recomendaciones y recursos

10. Recomendaciones para presentar contenidos de matemática. Cómo presentarlo correctamente.
11. Uso de recursos para presentar contenidos matemáticos. Algunos ejemplos para ilustrar cómo explicar algunos contenidos.

En la cuarta parte se llevó a los estudiantes a trabajar con material manipulativo y se les explicó cómo usarlo en el aula escolar y por qué usarlo en el sentido comunicativo. Esto dio un impulso en el proyecto para adquirir el material para los cuatro ejes de la enseñanza escolar de Chile, aunque finalmente se llegó a lo que actualmente tenemos como Museo Laboratorio de Didáctica de la Matemática.

Este ciclo formativo se experimentó y se invitó a participar voluntariamente a estudiantes del programa Licenciatura en Educación Matemática y Computación (LEMC) del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación (DMCC) de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile. En el ciclo formativo se inscribieron y asistieron 16 estudiantes de distintos niveles de la carrera LEMC y de distinto género a quienes se les otorgó un diploma de participación en el DMCC.

La actividad 6 correspondió a una instancia reflexiva en que debían responder a la pregunta: ¿nos hemos visto dando clases? Los futuros profesores realizaron la tarea siguiente: Identificar qué tipo de discurso utilizo en mis clases (reflexión), Identificar tono de voz (serio, alegre, reflexivo), Grabar y transcribir unos 10 minutos (práctica), Examinar la grabación (reflexión), Transcribir los 10 minutos y anotar sus descubrimientos.

Los estudiantes accedieron a realizar la tarea propuesta, y aquí se presenta la actividad de

una estudiante:

"Pertenezco a un voluntariado de reforzamiento escolar…, en el cual realizo clases o tutorías a una niña de séptimo básico. Estas tutorías las realizamos los miércoles, al no tener los implementos y no poder grabarla, solo grabé el audio de la clase. Considero que el discurso que utilizo es dialogal, puesto que, al tener los contenidos, le voy preguntando si se recuerda la definición de los conceptos o las características de estos dados por la profesora, si no es así, o solo recuerda un poco, yo la ayudo. Uso variaciones en el tono.

Mi tono de voz trata de ser serio y amable, pero también alegre, alegre sobre todo en el principio, cuando le pregunto cómo está ella y cómo van las clases, y también cuando destaco su resolución correcta de los ejercicios. Mi voz es seria, en el momento en que le explico o complemento la materia que ella no recuerda, cuando le propongo los ejercicios y cuando los reviso.

"Parto hablando yo, y luego intercalado, con la alumna.

Alumna: En vez de hacer una prueba hicimos en grupo, una diapositiva

Futura profesora: ¿Sí? ¿Y te resulto bien?

Alumna: Si, hasta el momento tenemos un 7

Futura profesora: ¡Oh! Que buena, te felicito, ¿ya se lo mostraron entonces a la profe?

Alumna: Si, se lo mandamos, pero hay que disertar el lunes

Futura profesora: ¿Y estuvo entretenido eso? ¿Te gusta la computación?

Alumna: Si…

Futura profesora: ¿Sí? Un poquito jeje (sic). Y tenía que ver con la proporcionalidad

Alumna: No, con los tipos de gráficos

Futura profesora: A veces uno entiende más con los trabajos prácticos que con las pruebas

Alumna: Pero el problema es que no traje cuaderno, como en clases no lo ocupamos

Futura profesora: Pucha, ahí estamos complicadas, pero no importa podemos ver que te pasaron las clases anteriores

Alumna: Es que no hemos tenido más clases y yo falté.

Futura profesora: Pero mira, lo último que nosotros vimos, no sé si te acuerdas, fue sobre un poco de estadístico, que era el tema de la población, la muestra, ¿te acuerdas de que eso vimos como hace dos clases atrás?

Alumna: Si

Futura profesora: Y después empezamos a hacer una tabla, que era súper larga y tenía muchos números. ¿Te acuerdas de eso?

Alumna: Si

Futura profesora: Ya mira, vamos a tratar de hacer una y vamos construyéndola juntas, y entonces tú me vas a decir y tú me vas a decir, a ver si te acuerdas un poquito, o si no… mira yo voy a poner los datos, vamos a hacer acá, vamos a poner los datos y esto va a ser acá, va a ser,

dice, Camila tiene dos hermanos, vamos a poner varios nombres, juanita, pepita, Carlos, Ignacio, a ver dime nombres tú, un nombre que a ti te guste.

Alumna: ¿Ariano?

Futura profesora: Ah mira, nunca lo había escuchado, Ariano,

Alumna: Ariana

Futura profesora: Ah, Ariana, como la cantante, ¿Quién más?

Alumna: Ah, ¿Pero tienen que ser hombres?

Futura profesora: Hombres y mujeres

Alumna: Mmm (sic), Felipe

Futura profesora: Felipe, nos faltan tres, a ver vamos a poner Martina

Alumna: ¿Camilo?

Camilo bien, y el último. Dime el último

Alumna: Catalina

Futura profesora: Catalina, ya, entonces, Camila tiene dos hermanos, juanita tiene cuatro, Felipe tiene uno, Carlos uno, Ignacio tampoco tiene, Ariana tiene dos, Felipe tiene tres, Martina tiene 5 hermanos, ¿Cuántos hermanos tienes tú?

Alumna: Dos,

Futura profesora: Dos

Alumna: Tres ahora

Futura profesora: Ya, este último va a tener tres, vamos a agregar a otro, me voy a agregar a mí, yo tengo uno también, vamos a agregar a Israel y le pondremos que tiene tres. Ya tenemos estos datos que son la cantidad de hermanos, entonces nosotros vamos a crear una tabla que va a decir acá. ¿Qué es lo que vamos a medir acá entonces?

Alumna: Eh... (sic)

Futura profesora: Acuérdate que nosotros hablábamos de categorías que es lo que se iba como a analizar. ¿Qué es lo que nos indica acá estos datos? Por ejemplo ¿Qué característica tiene?, Camila tiene dos hermanos ¿Qué me está diciendo? ¿De qué me está hablando?

Alumna: …, que tiene dos hermanos

Futura profesora: Que tiene dos hermanos. ¿Y qué característica en común tienen todos ellos

Alumna: Que son números

Futura profesora: Ya, son números, pero según los nombres, que tienen hermanos, mira, todos tienen hermanos, algunos no tienen, lo que nosotros vamos a medir es una característica en común de todos, eso es lo que nosotros estamos, vamos a poner en la tabla, entonces, esta de acá es la categoría de numero de hermanos y nosotros lo podríamos agregar según. ¿Qué es eso un resumen?

Alumna: No

Futura profesora: Ya, podríamos ir poniéndolo según, no sé si te acuerdas de que nosotros hablábamos por ejemplo ya, teníamos el color de pelo rojo, y nosotros decíamos cuántos niños tenían el pelo rojo, y poníamos al lado el numero ¿te acuerdas?

Alumna: Si

Futura profesora: Ya, ¿cómo podríamos hacer las categorías hacia abajo?, como podemos dividir esto, o sea no dividir, agrupar

Alumna: Sumándolo

Futura profesora: ¿Sumando que cosa?

Alumna: Este con este

Futura profesora: Por ejemplo, si sumamos todo, me va a dar el total ¿Cierto, pero si yo lo quiero dividir, quiero dividir esta tabla, como nosotros hacíamos la semana pasada, teníamos rojo, rojo amarillo y azul y decíamos cuántos rojos tenemos y decíamos dos, y en vez de poner dos veces rojo, poníamos rojo y escribíamos la cantidad?"

La futura profesora precisó sus descubrimientos:

"Me considero muy informal en ocasiones para hablar, encuentro que me falta vocabulario para explicarle de mejor manera los conceptos, recito varias veces algunas palabras, y dejo algunas ideas al aire cuando noto que ya está entendiendo, o no lo está haciendo, hago conexión con las clases anteriores. Me di cuenta de que muchas veces le hago una pregunta y antes de terminarla me doy cuenta de que no se va a entender o está mal formulada, entonces antes de terminar cambio la pregunta a otra. También cuando ella no sabe la respuesta trato de inducirla a que responda. También poseo muletillas, las cuales son 'ya' y 'mira'."

Conclusiones

A partir de la implementación piloto del ciclo formativo, se puede apreciar en primer lugar que los estudiantes el ciclo formativo acogen esta oportunidad en su formación. Aún cuando ya han realizado prácticas profesionales no se han dado cuenta de que su manera de comunicar debe cuidarse y es necesario recibir instrucción al respecto. Por otra parte, el hecho de reflexionar sobre su propia práctica docente podría fortalecer su docencia al considerar el efecto de su manera de explicar cuando sean profesores en un aula (Miller y Baker, 2002).

El hecho que la futura profesora del ejemplo presentado observe la presencia de muletillas y falta de vocabulario en su discurso, le proporciona elementos que antes no había considerado en su proceso de formación y en cierta forma realiza una autoevaluación (De la Fuente et al, 2015). También es claro que la futura profesora es consciente de que su manera de obtener una respuesta de la alumna favorece un tipo de intercambio en el cual hay una inducción a la respuesta (Villalta, 2009) y que no era absolutamente consciente de este hecho hasta escucharse.

Los elementos evidenciados por la estudiante no se ven trabajados en las mallas curriculares analizadas ni están presentes en las informaciones proporcionadas por los jefes y jefas de carreras de pedagogía en matemática (Vargas y Apablaza, 2019). Los estudiantes de pedagogía que participaron tanto del ciclo formativo como de otras experimentaciones en el transcurso del proyecto, admitieron que no poseen herramientas para enfrentar un grupo de

estudiantes en el aula de matemática. No sólo en el aspecto de comunicación de la matemática, también en lo social.

Adicionalmente se puede concluir que los futuros profesores otorgan tiempo e importancia a comunicar bien la matemática, lo cual alienta a continuar con este tipo de investigación y ciclos formativos.

Reconocimientos

Proyecto regular de investigación DiCyT USACH. "Caracterización y Desarrollo de Competencias Comunicativas en la Formación de Profesores de Educación Matemática"

Proyecto de cooperación internacional de investigación: Innovación de la enseñanza y desarrollo curricular en la formación inicial docente financiado por DAAD. Deutscher Akademischer Austauschdienst (Servicio Alemán de Intercambio Académico)

Referencias y bibliografía

De la Fuente, J., Asensio, E., Smalec, I. & Blanco, A. (2015). Autoevaluación y desarrollo de habilidades comunicativas en profesores universitarios mediante e-rúbricas y grabaciones. *Revista de docencia universitaria*, 13 (1), Enero-Abril 2015, 257-276, ISSN: 1887-4592

Domingo, J. (2013). Percepción del profesorado sobre la competencia comunicativa en estudiantes de magisterio. *Perfiles Educativos*, XXXV, 142, 54-74.

Fernández, I. & Cuadrado, I., (2010). Competencia comunicativa del profesorado y desarrollo emocional de los adolescentes. *International Journal of Developmental and Educational Psychology. Psicología positiva y ciclo vital. INFAD,* Año XXII, 2 (1).

Giménez, J. & Vargas, C. (2012). Competencia comunicativa matemática y formación docente. En Font, V. & Larios, V. (eds) *Competencia profesionales del profesor de matemática de secundaria*. Universitat de Barcelona, E-Book, Diciembre 2012, 103-114. ISBN 978-84-475-3558-3

Marcelo, C. (2008). *El profesor principiante. Inserción a la docencia*. Biblioteca latinoamericana de Educación. Barcelona : Editorial Octaedro.

Miller, K. & Baker, D. (2001). Mathematics and science as social practices, investigating primary student teacher responses to a critical epistemology. *Ways of knowing journal*, 1 (1), 39-46.

Sanz, N. (2005). *Comunicación efectiva en el aula*. Barcelona: Graó.

Saló, N. (2006) *Estrategias de comunicación en el aula. El diálogo y la comunicación interactiva*. Barcelona: CEAC.

Vargas, C. & Apablaza, C. (2019). Competencias Comunicativas en la Formación Actual de Profesores de Matemática en Chile. *Formación Universitaria*, En prensa.

Vargas, C. (2012). *Evaluación de la competencia comunicativa en la formación de profesores de matemática de secundaria* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.

Villalonga, P. & González, S. (2001). Propuesta para favorecer la comunicación en el aula de una Facultad de Ciencias. *Números. Revista de Didáctica de la Matemática*, 48, 25-35.

Villalta, M. (2009). Análisis de la conversación: una propuesta para el análisis de la interacción didáctica en la sala de clases. *Estudios pedagógicos*, XXXV (1), 221-238.

Villalta, M. & Martinic, S. (2013). Interacción didáctica y procesos cognitivos. Una aproximación desde la práctica y discurso del docente. *Universitas Psychologica*, 12 (1), 221-233.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desarrollando el pensamiento estadístico y probabilístico en el aula escolar de matemática con situaciones de incertidumbre

Soledad **Estrella**
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
soledad.estrella@pucv.cl

Resumen

La estadística entendida como la ciencia de aprender desde los datos, es una disciplina que permite tomar decisiones fundadas haciendo inferencias con cierto grado de certeza. En la escuela tradicional, los estudiantes se enfrentan a una enseñanza caracterizada por situaciones determinísticas con respuestas cerradas y énfasis en la certeza, sin embargo, en la vida cotidiana el ser humano debe decidir con tiempo limitado y con información limitada, recurriendo a la intuición antes que a un razonamiento basado en la evidencia de los datos. Este minicurso busca que sus participantes comprendan que la estadística y la probabilidad en el aula escolar de matemática tienen que proveer de situaciones de aprendizaje que promuevan el desarrollo del pensamiento a través de razonar en escenarios de incertidumbre.

Palabras clave: educación estadística, didáctica de la probabilidad, pensamiento probabilístico, incertidumbre, sesgos.

Desarrollar el pensamiento desde la alfabetización

El estudiante del siglo XXI requiere de nuevas alfabetizaciones y competencias, que promuevan el desarrollo del pensamiento crítico, el cual es estimulado desde la estadística y la probabilidad. La alfabetización estadística incluye habilidades básicas que se usan para comprender la información estadística, como organizar datos, construir y presentar tablas, y trabajar con diferentes representaciones de datos; también incluyen la comprensión de conceptos, vocabulario y símbolos, y una comprensión de la probabilidad como una medida de incertidumbre.

El pensamiento estadístico es el proceso de pensamiento que los profesionales estadísticos ponen en juego en su práctica diaria al solucionar problemas reales. Desarrollar este pensamiento se relaciona con un aprendizaje a largo plazo que trasciende la lógica determinista y tiene en cuenta la variabilidad y la incertidumbre. En este sentido, la noción de incerteza es amplia e incluye fenómenos que están fuera del dominio de la estadística, cuyo foco sobre la incertidumbre se debe a la variabilidad aleatoria, haciendo posible hacer inferencias y predicciones. Dentro de esta incertidumbre, a veces es posible medir cuán incierto es un fenómeno, y a ello se le conoce con el término "probabilidad".

Gal (2005) señala que la alfabetización probabilística incluye la comprensión de ideas

fundamentales como variabilidad, aleatoriedad e independencia; también involucra el cálculo de probabilidades, el uso de un lenguaje para comunicarse en escenarios de incertidumbre, entendiendo el papel y las implicancias de cuestiones probabilísticas, como los mensajes en diferentes contextos y en el discurso público y personal.

Si bien la probabilidad es matemática, enseñar estadística no es enseñar matemática, y aunque todavía persisten definiciones que caracterizan a la estadística como una rama de las matemáticas, ya se ha establecido la naturaleza distinta de la estadística como disciplina, la cual tiene carácter interdisciplinario puesto que los estadísticos requieren pensar interconectadamente, de forma estadística, matemática y computacional. Varias investigaciones han reportado el fenómeno que invisibiliza esta diferenciación disciplinaria, lo cual se refleja en la difusa diferenciación entre la enseñanza matemática y la enseñanza estadística (del Pino y Estrella, 2012).

El minicurso que se presenta abordará la enseñanza de la probabilidad para el desarrollo del pensamiento estadístico y probabilístico, a través de situaciones de incertidumbre reales (o simuladas) que conecten los conceptos. Para ello es esencial reconocer y diferenciar aspectos teóricos y experimentales de la probabilidad.

Conectando la probabilidad teórica y la probabilidad experimental

Aportes importantes. Bernoulli distinguió entre las probabilidades que pueden calcularse a priori (deductivamente, a partir de consideraciones de simetría) y aquellas que solo pueden calcularse a posteriori (inductivamente, a partir de frecuencias relativas). Él sostuvo que la probabilidad de una gran diferencia entre la probabilidad empírica y la probabilidad teórica tiende a cero a medida que aumenta el número de ensayos. La idea que la frecuencia relativa a largo plazo de un evento debe ser muy cercana a la probabilidad del evento es un corolario importante de este teorema. Esta ley experimental, conocida como ley de estabilidad de las frecuencias, tiene un respaldo matemático claro en un grupo de teoremas rigurosos que en conjunto configuran lo que llamamos Ley de los grandes números, y que inicia uno de los enfoques de la probabilidad (Batanero, Henry, & Parzysz, 2005) más usados en su enseñanza.

A continuación se entregan algunos de los enfoques útiles en esta enseñanza.

Enfoque intuitivo de la probabilidad. Las primeras ideas intuitivas y los juegos de azar son comunes en todas las civilizaciones primitivas. Ideas que aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, y usan frases y expresiones coloquiales para cuantificar los sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos. En esta aproximación intuitiva, se asignan cualitativamente probabilidades a los sucesos en base a las preferencias individuales, empleando diversas expresiones lingüísticas para referirse a estas comparaciones: "más probable", "muy probable". En algunos casos se ordenan por su mayor verosimilitud y se cuantifican sólo en casos sencillos, sin formalismo matemático.

Enfoque clásico de la probabilidad. Aunque a partir del siglo XVII varios matemáticos resuelven algunos problemas relacionados con los juegos de azar, el concepto de probabilidad no se llega a formalizar hasta comienzos del siglo XVIII. Es así que, la preocupación por las ganancias esperadas en estos juegos, lleva a definir la esperanza matemática antes que la probabilidad.

La correspondencia entre Pascal y Fermat, se considera como el punto de partida de la teoría de la probabilidad; aunque ellos usan la probabilidad en forma implícita, sin llegar a definirla. Laplace propone una forma de cálculo que implica reducir los acontecimientos aleatorios a un cierto número de casos igualmente posibles. Por tanto se encuentran pocos casos donde pueda

aplicarse este significado, más allá de los juegos de azar.

Enfoque frecuencial de la probabilidad. Estudios teóricos sobre la predicción cuantitativa de eventos futuros desde la regularidad observada en ensayos repetidos de un fenómeno aleatorio solo aparece 3 siglos después que Bernoulli justificase una estimación frecuentista de la probabilidad y diera una primera demostración de un teorema de probabilidad, (la ley de los grandes números). La probabilidad se define como el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al estabilizarse, asumiendo la repetibilidad del ensayo. Sin embargo, hasta 1928 no se dio una definición formal de la probabilidad desde el punto de vista frecuencial (von Mises, 1952/1928).

Algunos problemas filosóficos del enfoque frecuencial que se discuten aún, son la ausencia de un valor exacto para la probabilidad, y siempre tener aproximaciones de la misma; no saber con certeza el número idóneo de experimentos para aceptar tal estimación; y la consideración que a veces es imposible contar con idénticas condiciones en la experimentación. Pese a ello, este enfoque frecuencial, didácticamente tiene la ventaja de conectar estadística y probabilidad.

Enfoque subjetivo de la probabilidad. La demostración por Bayes de su teorema indicó que la probabilidad (a priori) de un suceso puede revisarse a partir de nuevos datos para transformarse en una probabilidad a posteriori. Esta idea fue retomada más tarde por Ramsey (1931) y de Finetti (1974/1937), quienes definen las probabilidades como grados de creencia personal basados en el conocimiento y experiencia personal. La probabilidad pierde su carácter objetivo, pues está condicionada por un cierto sistema de conocimientos, y no es necesaria la repetición en idénticas condiciones, ampliándose el campo de aplicación de las probabilidades.

La controversia sobre el estatuto científico de esta visión de la probabilidad surge ante la dificultad de hallar una regla para asignar valores numéricos que expresen los grados de creencia personal. Didácticamente el interés de esta visión es que formaliza la idea intuitiva de aprender de la experiencia.

Aunque en la alfabetización probabilística escolar no se aborda el enfoque axiomático, el profesor debe tener una comprensión profunda de aquel para comprender los fenómenos propios de la enseñanza de la probabilidad.

Enfoque axiomático de la probabilidad. A lo largo del siglo XX, diferentes autores contribuyeron al desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad. Borel contempló la probabilidad como un tipo especial de medida, mientras que Kolmogorov usó esta idea, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida, para deducir una axiomática. Lo interesante de la axiomática de Kolmogorov es que fue aceptada por todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad.

Características del rol crítico desempeñado por los profesores.

Considerando que una vez que los niños entran a la escuela, ningún factor es tan importante como la calidad de los profesores (Bruns y Luque, 2014), este apartado lista diversos hallazgos de investigación que han determinado acciones para una enseñanza efectiva de la estadística y probabilidad en las aulas escolares de matemática. Algunas de tales acciones serán vivenciadas y discutidas en este minicurso:

- Ofrecer más experiencia empírica de variabilidad y aleatoriedad (Biehler, Ben-Zvi, Bakker, & Makar, 2013; Kazak & Pratt, 2017)

- Seleccionar herramientas digitales y otros tipos de representaciones externas (Pratt, 2000; Pratt & Kazak, 2018; Zahner & Corter, 2010; Lee & Lee, 2009; Biehler et al., 2013; Estrella, Olfos, Morales, & Vidal-Szabó, 2017; Estrella, Olfos, Vidal-Szabó, Morales, & Estrella, 2018)
- Dar oportunidades para predecir los resultados de una situación de probabilidad con resultados equiprobables sin realizar un experimento real (Kafoussi, 2004)
- Reconocer la complejidad de las diferentes epistemologías de probabilidad y ayudar a los estudiantes a superar las aparentes discrepancias mediante la simulación o herramientas especialmente diseñadas (Alvarado, Estrella, Retamal & Galindo, 2018; Liu & Thompson, 2007; Prediger, 2008)
- Reconocer la importancia del diseño de tareas con propósito y la relevancia de mantener las demandas cognitivas de la tarea, para llevar a los estudiantes a tomar sentido del poder de conceptos estadísticos y probabilísticos (Ainley, Pratt, & Hansen, 2006; Estrella, Zakaryan, Olfos & Espinoza, 2019)
- Ofrecer oportunidades para que los estudiantes argumenten sus ideas con sus pares, las negocien y usen tecnología (Ruthven y Hofmann, 2013; Ben-Zvi, Aridor, Makar & Bakker, 2012; Kazak et al., 2015).

Este desempeño docente implica que los profesores adquieran conocimientos y competencias que les ayuden en su actuar profesional. Así en el contenido de probabilidad en un contexto propio de la estadística, se espera que a largo plazo los profesores: (i) conecten ideas entre probabilidad, muestreo aleatorio e inferencia sobre una población; (ii) investiguen los procesos aleatorios y comprendan la probabilidad como una medida de la frecuencia relativa a largo plazo de un resultado, entendiendo las reglas básicas de probabilidad y sus enfoques a través de la experimentación y la simulación; (iii) comparen dos distribuciones de datos y hagan inferencias informales sobre las diferencias entre dos poblaciones; (iv) comprendan el rol de la aleatorización en el diseño de estudios y como base para la inferencia estadística; (v) comprendan las reglas de probabilidad, la probabilidad condicional y el uso de ellas en la toma de decisiones prácticas; y (vi) modelen relaciones entre variables, entre otras.

Lograr este desempeño es esencial para llegar a desarrollar el pensamiento estadístico y el probabilístico desde la alfabetización escolar de los estudiantes, pues muchas de estas ideas y procedimientos son complejas, difíciles y contraintuitivas.

Referencias y bibliografía

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32*(1), 23–38.

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L., & Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(2), 131-156.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005) The nature of chance and probability . *En Graham A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* 16-42. *Kluwer Academic Publishers.*

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM, 44*(7), 913-925.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2013). Technologies for enhancing statistical

reasoning at the school level. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, & J. Kilpatrick (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 643–688). New York: Springer Science+Business Media.

Bruns, B. & Luque, J. (2014). *Profesores excelentes: cómo mejorar el aprendizaje en América Latina y el Caribe*. Perú: Banco Mundial, Galese SAC.

del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49*(1), 53-64.

Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R., & Espinoza, G. (2019). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*, 1-18.

Estrella, S., Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., & Estrella, P. (2018). Competencia meta-representacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 143-163.

Estrella, S. (2018). Data representations in Early Statistics: data sense, meta-representational competence and transnumeration. In A. Leavy, A., M. Meletiou, & E. Paparistodemou (Eds.). *Statistics in Early Childhood and Primary Education – Supporting early statistical and probabilistic thinking*, (pp. 239-256). ISBN 978-981-13-1044-7. Singapur: Springer.

Estrella, S., Olfos, R., Morales, S., & Vidal-Szabó, P. (2017). Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20*(3), 345-370. DOI 10.12802/relime.17.2034.

Kafoussi, S. (2004). Can kindergarten children be successfully involved in probabilistic tasks? *Statistics Education Research Journal, 3*(1), 29–39.

Kazak, S., & Pratt, D. (2017). Pre-service mathematics teachers' use of probability models in making informal inferences about a chance game. *Statistics Education Research Journal, 16*(2).

Pratt, D., & Kazak, S. (2018). *Research on uncertainty. In International handbook of research in statistics education* (pp. 193-227). Springer, Cham.

Franklin, C., A. Bargagliotti, C. Case, G. Kader, R. Scheaffer, & D. Spangler. 2015. The Statistics Education of Teachers. American Statistical Association.

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Nueva York: Springer.

Gómez, E., Batanero, C., & Contreras, J. (2014). Conocimiento Matemático de Futuros Profesores para la Enseñanza de la Probabilidad desde el Enfoque Frecuencial. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 209-229.

Lee, H. S., & Lee, J. T. (2009). Reasoning about probabilistic phenomena: Lessons learned and applied in software design. *Technology Innovations in Statistics Education, 3*(2). http://escholarship.org/uc/item/1b54h9s9.

Liu, Y., & Thompson, P. W. (2007). Teachers' understandings of probability. *Cognition and Instruction, 25*(2), 113–160.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 602–625.

Pratt, D., & Kazak, S. (2018). *Research on uncertainty. In International handbook of research in statistics education* (pp. 193-227). Springer, Cham.

Prediger, S. (2008). Do you want me to do it with probability or with my normal thinking?— Horizontal and vertical views on the formation of stochastic conceptions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 3*(3), 126–154.

Ruthven, K., & Hofmann, R. (2013). Chance by design: Devising an introductory probability module for implementation at scale in English early-secondary education. *ZDM Mathematics Education, 45*(3), 409–423.

Wild, C., Utts, J., & Horton, N. (2018). What Is Statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5–36).

Zahner, D., & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(2), 177–204.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Experiencias para la formación de profesores de matemáticas en atención a la diversidad

Sandra Evely **Parada** Rico
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander, Colombia.
Colombia
sanevepa@ uis.edu.co

Resumen

En Educación Matemática se ha avanzado en el estudio de fenómenos que asocian la atención a la diversidad y la formación de profesores. Al respecto, León (1999), López (2013), Aké (2015) y Pineda (2018) han mostrado diferentes acercamientos, tanto desde la exploración cognitiva, como de las experiencias de formación de profesores. Aquí se compartirán las experiencias de formación e investigación desarrolladas en la Universidad Industrial de Santander (UIS). Experiencias que se han llevado a cabo desde las reflexiones teóricas hasta la inmersión curricular en las asignaturas del plan de estudios de los Licenciados en Matemáticas. Dichas experiencias han mostrado evidencias de la necesidad de establecer un diálogo permanente entre la comunidad educativa (escuela, universidad y familia) para repensar el currículo de los profesionales (profesores de matemáticos) con el fin de que se logren atender las necesidades reales del aula y que de esta manera las matemáticas escolares sean asequibles para todos, reconociendo las diferencias.

Palabras clave: formación inicial, profesores de matemáticas, atención a la diversidad.

Introducción

En el marco del XV CIAEM, en la modalidad de minicurso, inicialmente discutiré, a la luz de los marcos legales, teóricos y experienciales, sobre la necesidad de reflexionar con los profesores de matemáticas en formación, sobre la atención a la diversidad y sobre la búsqueda de oportunidades para acercar las matemáticas a todos los estudiantes independientemente de sus características particulares. Posteriormente, expondré algunas experiencias (prácticas y de investigación) que se han venido desarrollando en la Universidad Industrial de Santander, en Colombia. Para ello, posibilitaré espacio para el análisis de algunos productos emergentes del trabajo realizado, los cuales pueden servir como ejemplo o apoyo para otras comunidades o contextos educativos.

Formación de profesores de matemáticas y atención a la diversidad

La necesidad de formar a los profesores alrededor de la atención a la diversidad es un tema que ha sido ampliamente discutido por diferentes organizaciones mundiales y por los sistemas políticos de cada país. Ante ello, la Educación Matemática en las últimas décadas ha asumido con mayor fuerza el reto de reconocer las diversidades y las maneras de atenderla para acercar a

los estudiantes al conocimiento matemático. Al respecto, autores como León (1999), López (2013) y Aké (2015) exponen que hay poca investigación en Educación Matemática asociada a las Necesidades Educativas Especiales (NEE) y mucho menos desde la línea de formación de profesores

A continuación, presento algunas experiencias orientadas por uno de los equipos del grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (Edumat-UIS), con el fin de recibir realimentación que permita enriquecer el trabajo que hemos venido realizando. Además, aportar ideas para quienes no han empezado a transcurrir este proceso de estudio y formación.

¿Por qué los profesores de matemáticas necesitan reflexionar sobre la atención a la diversidad?

En muchos espacios sociales y políticos, se reitera la necesidad de ofrecer acceso a la educación a todas las personas sin establecer diferencias. No obstante, este discurso que está muy bien reglamentado en varios documentos de organismos nacionales e internacionales, poco o nada cala cuando se establecen acciones para la formación de los profesionales de la educación.

En documentos presentados por organismos internacionales, como la ONU y la UNESCO, se menciona que la educación para todos implica que las personas asistan a instituciones educativas donde puedan gozar de los recursos necesarios, sin que se les discrimine o se les limite su participación. A nivel nacional, en la Constitución Política de Colombia (Asamblea Nacional Constituyente, 1991) se enfatiza en el derecho que tienen todas las personas a la educación. Derecho que se refuerza en la Ley General de Educación (Congreso de la República, 1994) y en otros decretos en los que establecen disposiciones para ofrecer apoyo pedagógico en el marco de una educación inclusiva. Pero, ¿qué de esto se vivencia en la cotidianidad de nuestras escuelas?

Claramente, la legislación nos muestra que la educación para todos es un principio moral y legal que nadie puede evadir. Sin embargo, el panorama que se vive en las instituciones educativas del país y tal vez, de otros países latinoamericanos, es otra cosa. Es posible que todas esas intenciones no se hayan logrado solo por falta de voluntad, sino tal vez por escasez de apoyo de la comunidad académica, quien no se ha interesado lo suficiente en la fenomenología que rodea la atención a la diversidad y la educación matemática.

Desde la Matemática educativa, uno de los acercamientos a la fenomenología antes descrita se ha abordado desde la línea de formación de profesores. En este sentido, autores como López- Mojica y Cruz (2015) y Aké (2015) mencionan que en la atención a la diversidad en clases de matemáticas existen dos tipos de profesores: los profesores de matemáticas y los profesores de educación especial. Los primeros no están familiarizados con las Necesidades Educativas Especiales (NEE), y los segundos, a pesar de estar formados en psicología y pedagogía, no han recibido formación en contenidos didácticos específicamente relacionados con las matemáticas. En este sentido, Bruno y Noda (2010) enfatizan en que hace falta estudios que articulen la formación para trabajar en matemáticas y la atención a los estudiantes con NEE.

A lo expuesto anteriormente, Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) exponen que los estudiantes con NEE deben comprender con los mismos principios de enseñanza que el resto del alumnado. Comprensión que implica: conectar u organizar los conocimientos, construir el aprendizaje sobre lo que ya se conoce y la instrucción formal de la escuela debe construir a partir del conocimiento matemático informal. Vale la pena mencionar aquí, que cuando hablamos de

estudiantes con NEE estamos incluyendo las personas con capacidades o talentos excepcionales, porque ellos también requieren atención en el aula y para ellos también deben ser formados los profesores.

Un aspecto que merece la reflexión por parte de los profesores y educadores matemáticos es la falsa creencia que se tiene en cuanto a que las personas con características diferenciadas no pueden aprender matemáticas o que ellos aprenden con ciertas falencias. Lo anterior desestima los resultados de investigación que muestran que hay objetos matemáticos complejos que también constituyen un reto tanto para profesores como para estudiantes sin dificultades identificadas. La anterior reflexión nos muestra la necesidad de fortalecer el campo de las investigaciones, especialmente relacionadas con la formación de los profesores que enseñan matemáticas.

Los argumentos antes expuestos motivaron al grupo de investigación de Educación Matemática y Atención a la Diversidad (de Edumat-UIS) no sólo a continuar desarrollando estudios enfocados en alguna NEE sino a problematizar sobre el propio plan de estudios del programa de pregrado de Licenciatura en Matemáticas. Plan de estudios que tiene explícitamente establecidas competencias relacionadas con la formación alrededor de la atención a la diversidad en el aula de matemáticas, algunas de ellas son:

- Como profesional de la educación, el egresado está en capacidad de crear ambientes que favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje que atiendan las diferencias individuales y los procesos de desarrollo cognitivo, afectivo y social de los estudiantes.
- Como profesional de la educación, el egresado implementa acciones educativas que responden a la diversidad sociocultural y posibilitan la inclusión social de personas con necesidades educativas especiales y poblaciones en situación de vulnerabilidad.

Por otro lado, decidimos contrastar esas competencias planteadas en el plan de estudios con las exigencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN), encontrando que éste ha establecido directrices como:

- "Las escuelas normales superiores, las instituciones de educación superior que poseen facultad de educación y los comités territoriales de capacitación docente, deberán garantizar el desarrollo de programas de formación sobre educación inc1usiva para los docentes que atienden estudiantes con discapacidad o con capacidades o con talentos excepcionales." (MEN, 2009, art. 16).
- "Las instituciones de educación superior deberán promover la sensibilización y capacitación de los licenciados y maestros en todas las disciplinas y la inclusión del tema de discapacidad en todos los currículos desde un enfoque intersectorial." (Congreso de Colombia, 2013

Los enunciados anteriores posteriormente nos llevaron a indagar cómo se estaba trabajando en otras universidades del país para la consecución de dichas competencias. La búsqueda nos mostró que sólo cinco universidades del país ofrecen la licenciatura en Educación Especial. Cuando revisamos sus planes de estudio, encontramos que en tres de ellas se incluyen asignaturas relacionadas con matemáticas, por ejemplo: Educación y dificultades en el aprendizaje de la matemática; Desarrollo del pensamiento proposicional; y Fundamentos de Matemáticas.

Posteriormente revisamos los planes de estudio de algunas licenciaturas del país con el propósito de identificar si alguna asignatura incorporaba el estudio sobre la atención a la diversidad en el aula. De este estudio, Pineda (2018) reporta que al revisar el plan de estudios de 159 licenciaturas de 25 universidades del país se encontró que el 64% de ellas (102 licenciaturas) no incluyen en su plan de estudio alguna asignatura relacionada con atención a la diversidad.

Una vez visto este panorama nacional, nos devolvimos a analizar los programas de las asignaturas del plan de estudios para ver las formas mediante las cuales se estaban logrando dichas competencias. Revisión que nos mostró que ninguna asignatura del plan tenía establecido algún acercamiento teórico o práctico que pudiera aportar en esa línea en la formación inicial de los profesores. Resultado que generó una oportunidad para intervenir curricularmente y aprovechar la reforma solicitada por el MEN en el año 2017 a todos los programas de licenciatura del país.

Dicha oportunidad nos condujo a plantear la necesidad de buscar estrategias para que en los cursos de la línea de didáctica se realizara algún acercamiento al problema. La indagación y experimentación posibilitó el diseño de un curso alusivo a la atención a la diversidad en el aula de matemáticas, además de la articulación organizada de las actividades del grupo de investigación con la formación ofrecida en el plan de estudios de la licenciatura.

¿Qué experiencias contribuyen en la formación de profesores de matemáticas sobre la atención a la diversidad?

El grupo de Investigación en Educación Matemática Edumat-UIS tiene más de 20 años de creación, y es en el 2004 cuando surge entre sus integrantes la intención de investigar sobre la atención a la diversidad en clase de matemáticas. Así, las primeras investigaciones reportadas por el grupo fueron algunas tesis de licenciatura en las que se lograron acercamientos curriculares en contextos vulnerables. Entre los trabajos realizados podemos rescatar el de Cárdenas (2007), quien trabajó en la creación del Currículo del área de Matemáticas para la Educación Secundaria y Media Vocacional del Instituto San Juan Bosco del Establecimiento Penitenciario y Carcelario de Bucaramanga. También, es importante mencionar el estudio realizado por Bautista y Mantilla (2007), quienes presentaron una alternativa de adaptación curricular grupal en Matemáticas para educandos con Necesidades Educativas Especiales, el cual fue desarrollado para el Instituto de Capacitación Laboral en Santander, quien recibe a personas en situación de discapacidad cognitiva, psíquica y física. En el grupo se desarrolló también un proyecto de extensión en el que participaron educandos con síndrome de Down de diferentes instituciones de Bucaramanga y su área metropolitana, con quienes se trabajaron procesos multiplicativos.

Las experiencias de investigación antes descritas nos animaron a retomar las actividades del grupo, pero esta vez para conseguir una intervención en la formación inicial de los profesores, con el fin de atender las necesidades expuestas en el apartado anterior. La intervención se inició con un grupo de profesores en formación que participaban de un curso denominado Seminario de Práctica, el cual tiene como objetivo: posibilitar un acercamiento al campo de la investigación en educación matemática, no sólo como usuarios del conocimiento sino haciendo una primera inmersión en la metodología de investigación.

El objetivo del "curso experimental" nos permitió estudiar los elementos fundamentales de la metodología de investigación en Educación Matemática, pero esta vez desde el fenómeno de inclusión como objeto de estudio. El curso generalmente se ha desarrollado con una metodología

teórico-práctica en la cual en la medida en que se van estudiando los aspectos teóricos del proceso investigativo los estudiantes van diseñando y desarrollando una investigación. Para el proyecto cada estudiante elegía la problemática que deseaba, según sus intereses. Así, el ajuste principal del curso fue que el estudio se realizaría sobre la atención a la diversidad en clase de matemáticas. Por ello el curso se dividió en tres grandes partes: i) acercamiento teórico a la investigación en Educación Matemática; ii) Estudio y reflexión alrededor de la atención a la diversidad (aspectos legales, características físicas, cognitivas, sociales, comportamentales, etc.) y el rol del profesor de matemáticas como facilitador del aprendizaje; y iii) estudio teórico-práctico de metodología cualitativa (diseño y desarrollo de un proyecto en el que se problematiza sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en personas con características diferenciadas.

El análisis de los resultados logrados de la intervención en este curso se usó para el diseño curricular de un curso de Educación Matemática y Atención a la Diversidad que se planteó para la reforma del programa de Licenciatura en Matemáticas. Curso que actualmente hace parte del nuevo plan de estudios del programa y tiene como propósitos:

- Conocer los aspectos descriptivos, etiológicos y de intervención de los diferentes trastornos del desarrollo y necesidades educativas especiales en el ámbito escolar.
- Adquirir conocimientos básicos relacionados con la diversidad conceptual en el campo de la educación especial.
- Reflexionar sobre la actitud del maestro de matemáticas frente a los educandos con característica diferenciadas de aprendizaje.
- Conocer el proceso de maduración del pensamiento lógico-matemático y los conceptos y destrezas básicas que se proponen en el currículo de la educación especial.
- Fomentar la capacidad crítica e investigadora, base de la formación permanente del equipo docente posibilitador de la atención a la diversidad, específicamente en la clase de matemáticas.
- Contribuir a la reflexión y al análisis de las implicaciones educativas y pedagógicas que tiene la atención especializada de niños y jóvenes con características diferenciadas de aprendizaje en los diferentes niveles del sistema educativo colombiano.

Cada profesor en formación que ha vivido la experiencia de desarrollar este curso (en este momento se ha realizado en seis cohortes consecutivas) tiene una historia enriquecedora para contar. De los casos, Pineda (2018) en su tesis de Maestría en Educación Matemática reporta el caso de una de los profesores en formación (Gabriela), quien desarrolló el curso y a quien posteriormente se le dio seguimiento en los cursos de Práctica Docente I y II. Para analizar los resultados se usó el Modelo "Reflexión-y-Acción" de Parada (2011), dichos aprendizajes se categorizaron en cada uno de los componentes del pensamiento reflexivo del profesor: pensamiento matemático, didáctico y orquestal.

El desarrollo de esta intervención hasta el momento ha permitido el desarrollo de más de 30 diseños de clase de matemáticas dirigidos a estudiantes con alguna NEE. Varios de ellos los reporta Pineda (2018) y entre ellos quiero citar aquí algunos, a modo de ejemplo:

- **Los números enteros y sus operaciones en estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas**. El objetivo del proyecto fue: identificar y describir qué acercamientos metodológicos favorecen el aprendizaje de los números enteros y las operaciones de adición y sustracción en una estudiante con dificultades en el aprendizaje. Partiendo de investigaciones que mencionan que la noción de número se puede trabajar desde tres dimensiones: la abstracta, la recta, y la contextual. El proyecto concluyó que la dimensión de recta favoreció el aprendizaje de las relaciones de orden entre un par de números enteros y las operaciones de adición y sustracción de números enteros.
- **Concepción de número de una persona con Necesidades Educativas Especial.** La profesora en formación decidió enseñar los números a una joven con discapacidad cognitiva leve de 27 años de edad. La joven no reconocía el sistema monetario colombiano, lo que era importante para ella, dado que laboraba empacando y vendiendo papas. La profesora, consiguió a través de su intervención, mediada por material real y problemas de su contexto, que la joven adquiriera nociones de número y estableciera relaciones de orden.
- **Construcción del concepto de número por medio de actividades que involucran el sistema monetario en estudiantes con Síndrome de Down**. En este proyecto el profesor en formación decidió trabajar con dos personas con Síndrome de Down, uno de ellos cursaba segundo grado y tenía 9 años, y el segundo un joven desescolarizado con 22 años. Entre ellos el niño de 9 años mostraba más habilidades numéricas que el joven de 22 años. El estudio, le permitió al profesor en formación, valorar la importancia de conocer a cada estudiante para poder diseñar alternativas ajustadas a sus necesidades.
- **Compresiones del número en un niño con Trastorno de Espectro Autista (TEA).** En este proyecto se trabajó con un niño desescolarizado con 7 años y con diagnóstico de Trastorno del Espectro Autista (TEA). El objetivo planteado era analizar cómo influye el contexto en el aprendizaje de la suma para niños con autismo, y así plantear una estrategia en la enseñanza estos en la suma. Uno de los resultados más importantes del trabajo realizado fue que el uso de representaciones pictóricas captaba el interés del niño. Además, que era necesario plantear actividades cortas, en algunos casos apoyadas de tecnologías digitales. El trabajo realizado motivó a la madre del estudiantes a escolarizarlo, pues descubrió que si podía aprender.

Tal como lo reporta Pineda (2018), la puesta en marcha del curso mostró que el diseño curricular antes descrito favorece el alcance de los propósitos planteados. Se encontraron evidencias de que las actividades realizadas permitieron que los profesores en formación reconocieran las diferentes posibilidades de alumnados. Las actividades de: i) lectura y discusión de documentos sobre: atención a la diversidad, orientaciones pedagógicas expedidas por el MEN, tesis de educación matemática; ii) las exposiciones sobre algunas NEE; y iii) los proyectos realizados por los profesores en formación; dejaron ver que el estudio teórico-práctico de las diferentes Necesidades Educativas lograron sensibilizar a los estudiantes y les exigió problematizar alrededor de dicho fenómeno de estudio.

Uno de los resultados más importantes del trabajo es que el grupo de investigación en Educación Matemática y Atención a la Diversidad se ha ido conformando y consolidando con los estudiantes que han realizado el curso, quienes al culminarlo siguen reflexionando y mejorando los diseños didácticos. Así, el grupo ha seguido compartiendo la experiencia en diferentes escenarios. El principal de ellos, es el Seminario de Práctica en el cuál se exponen los trabajos realizados y se motiva a sus compañeros a interesarse en este campo de estudio.

Uno de los trabajos del grupo actualmente es construir materiales para la docencia, en los que se recopilan algunos de los diseños hasta ahora realizados. También, se sigue apoyando el

Seminario de Práctica y los demás cursos de la línea de didáctica, para que se reflexione al interior de ellos sobre la atención a la diversidad en clase de Matemáticas. Lo anterior, mientras se pone en marcha el curso diseñado (segundo semestre de 2020), pues el plan de estudios reformado se encuentra hasta ahora en el tercer de los nueve semestres de su malla curricular.

Algunas reflexiones

Los futuros profesores de matemáticas se sensibilizaron ante la responsabilidad de formarse para atender personas con NEE. Así mismo, valoraron la necesidad de conocer a sus estudiantes, para planear las actividades ajustadas a sus particularidades Ellos también comprendieron que es muy relevante seleccionar los recursos apropiados para posibilitar actividad matemática en sus estudiantes, independientemente de sus características.

Concretamente, las experiencias desarrolladas hasta el momento en la UIS para formar a los profesores de matemáticas en atención a la diversidad son: 1) Desarrollo de Investigaciones de corte curricular; 2) Proyectos de extensión a la comunidad; 3) Inmersión en el plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas (mediante la creación del curso de "Educación Matemática y Atención a la Diversidad" y las orientaciones a los cursos de didáctica); 4) desarrollo de diseños de clase, especialmente inclinados a las adaptaciones curriculares; 5) Seminario de investigación de Educación Matemática y Atención a la Diversidad, como subgrupo de Edumat-UIS.

Referencias bibliográficas

Aké, L. (2015). Matemáticas y educación especial: realidades y desafíos en la formación de profesores. En López-Mojica, J. y Cuevas, J. (Coords), *Educación especial y matemática educativa*. pp. 15-32, México: Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat; Universidad Autónoma de San Luis de Potosi.

Asamblea Nacional Constituyente (6 de Julio de 1991) Constitución política colombiana.

Bautista, L. & Mantilla, L. (2007). *Una Alternativa De Adaptación Curricular Grupal En Matemáticas Para Educandos Con Necesidades Educativas Especiales.* Trabajo de grado para optar el título de licenciado en Matemática de la Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas. Bucaramanga, Colombia,

Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. En Moreno, M., Estrada, A., Carrillo, J. y Sierra, T. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XIV. pp. 141-162. Lleida: SEIEM.

Cárdenas, A. (2007). *Currículo Del Área De Matemáticas Para La Educación Secundaria Y Media Vocacional Del Instituto San Juan Bosco Del Establecimiento Penitenciario Y Carcelario De Bucaramanga*. Trabajo de grado para optar el título de licenciado en Matemática de la Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas. Bucaramanga, Colombia.

Congreso de Colombia. (8 de febrero de 1994) Ley General de Educación. [Ley 115 de 1994]. DO: 41.214. Congreso de Colombia. (27 de febrero de 2009). Se aprueba la "Convención sobre los derechos de las personas con discapacidad". [Ley 1346 de 2009]. DO: 47.427.

Congreso de Colombia. (27 de febrero de 2013). Se establecen las disposiciones para garantizar el pleno ejercicio de los derechos de las personas con discapacidad. [Ley Estatuaria 1618 de 2013]. DO: 48.717. Departamento de Educación y Ciencia. (27 de diciembre 2000). Boletín Oficial de Aragón. Atención al alumnado con necesidades educativas especiales. [Decreto 217 de 2000].

León, M. (1999). La formación del profesorado para una escuela para todos. Un análisis de los planes de estudio del maestro especialista en educación primaria y en educación especial en las universidades españolas. *Revista de curriculum y formación del profesorado* 3(2), 1-24.

López, J. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial*. Tesis de Doctorado en Matemática Educativa. Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional, Distrito Federal.

López-Mojica, J. y Cruz, K. (2015). Formación docente en educación especial: aspectos de su conocimiento matemático en fracciones. En J. López-Mojica y J. Cuevas (Coords.). Educación especial y matemática educativa. pp. 33-51. México: Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat; Universidad Autónoma de San Luis de Potosi.

Parada, S. (2011). Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional. Tesis de Doctorado en Matemática Educativa. Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico nacional, México.

Pineda, S. J. (2018). Formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad. Trabajo de grado para optar el título de Magister en educación Matemática. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander Bucaramanga, Colombia.

Kilpatrick, J. Swafford, J. y Findell, B. (2001). Adding it up. Helping children learn mathematics. National Academic Press. Washington, DC.

MEN. (9 de febrero 2009) Por medio del cual se reglamenta la organización del servicio de apoyo pedagógico para la atención de los estudiantes con discapacidad y con capacidades o con talentos excepcionales en el marco de la educación inclusiva. [Decreto 366 de 2009]. DO: 47.258.

MEN. (15 de septiembre de 2017) Por la cual se ajustan las características específicas de calidad de los programas de Licenciatura para la obtención, renovación o modificación del registro calificado, y se deroga la Resolución 2041 de 2016 [Resolución 18583 de 2017].

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática

Leonor **Camargo** Uribe
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co

Resumen

El minicurso está dirigido a estudiantes en procesos de elaboración de tesis, investigadores nóveles en el campo de la Educación Matemática o profesores que orientan espacios académicos de investigación. Comienza con una propuesta para distinguir entre metodología y estrategia investigativa. A partir de ese planteamiento, se presentan algunas estrategias investigativas que se emplean actualmente en Educación Matemática, que se valen de procedimientos cualitativos para captura y análisis de información. Las estrategias se clasifican en naturalistas, clínicas y de diseño. Sobre cada una de ellas se expone en qué consiste, en qué casos se usa, cuáles son los productos esperados, quiénes son los participantes y sus roles, en qué escenarios se desarrolla, que llevan los investigadores al escenario, qué etapas se suelen cubrir y qué variantes de la estrategia existen. Se ofrecen ejemplos tomados de estudios realizados por investigadores colombianos.

Palabras clave: estrategias investigativas, aproximación investigativa, estudios naturalistas, estudios clínicos, estudios de diseño.

Metodología y estrategia investigativa

Se da inicio al minicurso estableciendo la diferencia entre metodología de investigación y estrategia investigativa. Se denominará **metodología de investigación** al conjunto conformado por una o varias estrategias investigativas, un conjunto de recursos y una fundamentación teórica específica que genera la base racional para orientar la investigación de principio a fin. En una metodología, la fundamentación teórica y las estrategias se articulan en una relación estrecha de construcción y reformulación mutua, en la que los principios y conceptos asumidos en la fundamentación teórica definen el espectro de lo que es posible y deseable conocer y cómo puede ser conocido (Moschkovich y Brenner, 2000; Radford y Sabena, 2015). La metodología tiene estrecha relación con el problema a investigar, las preguntas que se hacen, el marco conceptual de referencia, el modelo investigativo, las estrategias y los recursos que se ponen en juego para obtener información y analizarla. Se denominará **estrategia investigativa** al mecanismo que pone en funcionamiento un diseño investigativo en el mundo empírico, permitiendo a los investigadores conectar sus presupuestos teóricos con formas específicas de

obtener información para analizarla (Denzin y Lincoln, 1998). Es el conjunto de prácticas, recursos e instrumentos, organizados de manera más o menos planificada, que se emplea en una investigación para hacer y reportar una indagación disciplinada sobre un asunto de interés. El término "indagación" se refiere a una búsqueda asociada a interrogantes que se quieren responder. Y el calificativo "disciplinada" pretende señalar que el proceso es sistemático, susceptible de ser auditable y los resultados pueden ser públicamente examinados y sometidos a crítica por otros miembros de la comunidad donde se inscribe la investigación.

En Educación Matemática son notorias las estrategias que se valen de procedimientos cualitativos, quizás por el giro en el campo que se dio a finales del siglo XX, que enfatiza en la naturaleza social y cultural de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Esta visión sitúa la indagación en complejos escenarios y comunidades, amplía el rango de los fenómenos de estudio y admite fuentes de información de diversa naturaleza. Varias de las estrategias involucran a profesores, estudiantes y agentes educativos en los equipos de investigación. Como consecuencia se preocupan por generar mecanismos para actuar responsablemente usando evidencias y herramientas analíticas creíbles.

La pertinencia de la estrategia escogida en una investigación no se deriva únicamente de su capacidad para dar respuestas a cuestiones específicas que movilizan la investigación. Proviene de su potencial para encontrar nuevas vías para pensar acerca de las inquietudes y sus posibles soluciones, promoviendo la profundización en los fenómenos, para ir más allá de lo obvio e inmediato y poner el acento en lo que podría ser factible. Las preguntas por el objeto de estudio, el tipo de fenómeno (¿es un estado?, ¿es un proceso?, ¿es un mecanismo?, ¿es una evolución?), el contexto investigativo, las interacciones que interesan, los participantes y la naturaleza de los productos, determinan la estrategia por escoger o por construir.

Estrategias investigativas que se valen de procedimientos cualitativos

Se clasifican las estrategias con base en el tipo de preguntas que permiten atender. El interés por presentar una clasificación proviene del deseo de facilitar la comunicación entre investigadores y construir un punto de partida para guiar las elecciones personales. Las estrategias se diferencian en la forma como abordan el proceso empírico, los participantes, los roles, los escenarios, las etapas y los productos esperados. Es decir, como indican Denzin y Lincoln (1998), cada estrategia tiene formas particulares de "ponerse en movimiento".

Estrategias naturalistas

Las estrategias naturalistas son aquellas que se preguntan ¿qué pasa?, ¿qué pasó? para describir e interpretar algún fenómeno relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la evaluación en matemáticas o asuntos relacionados con redes y sistemas de prácticas sociales y culturales que influyen en la Educación Matemática de niños, jóvenes, adultos y profesores. Estas estrategias son empleadas principalmente por quienes toman en cuenta la compleja cultura escolar o educativa, de manera holística, sin interferir en ella o por quienes adoptan una aproximación interpretativa.

El principal interés de los investigadores usualmente es la descripción de una situación, lo más fiel posible, de modo tal que la información obtenida se pueda narrar o interpretar en función del escenario en donde se recolecta. Los estudios no pretenden develar realidades objetivas sino lograr relatos o interpretaciones construidas por los participantes, de manera negociada (Uribe, 2013).

Las interpretaciones, cuando tienen lugar, buscan: generar comprensiones sobre fenómenos buscando representarlos, construir consensos entre formas de interpretarlos, examinar hechos e interacciones entre ellos, construir mapas de rutas sobre prácticas, sugerir vías de atención a situaciones, o tomar decisiones; todo ello toma en consideración la cultura en la cual se da el asunto investigado (Moshkovich y Brenner, 2000; Bakker y van Eerde, 2015).

En investigación en Educación Matemática las estrategias naturalistas han permitido principalmente estudiar las prácticas de enseñar y aprender matemáticas en diversos contextos, examinar actitudes y creencias e identificar fenómenos sociales al interior del aula de matemáticas o en las redes de prácticas sociales que rodean el aula. La manera de proceder está influida por los escenarios en donde estas actividades se llevan a cabo, se regulan o se controlan. Frecuentemente son empleadas las estrategias investigativas: "basada en prácticas usuales", "en primera persona", "estudio de caso" y "revisión documental", descripciones detalladas de estas se encuentran en Kelly y Lesh (2000).

Estrategias clínicas

Las estrategias investigativas clínicas son aquellas en donde, sobre un fenómeno en particular, los investigadores se preguntan ¿cómo pasa? o ¿cómo pasó?, ¿por qué pasa? o ¿por qué pasó? Los investigadores pretenden hacer un análisis a profundidad que les permita explicar el fenómeno, además de describirlo o interpretarlo. Las estrategias clínicas son empleadas con frecuencia por quienes adoptan una aproximación hermenéutica. En Educación Matemática usualmente son empleadas por quienes tienen interés en develar formas de pensar de las personas.

Para ahondar en el fenómeno de interés los investigadores buscan tener cierto control sobre la forma en que recogen la información, alejándose del escenario. Así, pretenden que se revelen descripciones, concepciones, procedimientos y justificaciones útiles para profundizar en los fenómenos investigados y explicarlos. En el caso de preguntas acerca de cómo sucedió un fenómeno en el pasado es necesario que quienes participaron en la situación que le dio lugar puedan interactuar con el investigador y participar en el estudio. De lo contrario habría que llevar a cabo una "revisión documental".

Las estrategias clínicas más empleadas en Educación Matemática son la entrevista estructurada", la "entrevista semi-estructurada", la "entrevista basada en tareas" y la "observación clínica"; descripciones detalladas de estas se encuentran en Kelly y Lesh (2000).

Estrategias de diseño

Las estrategias investigativas de diseño son aquellas en las que los investigadores se preguntan ¿qué pasaría si…? sobre un fenómeno en particular. Se pretende hacer un análisis a profundidad en ámbitos socialmente complejos sobre potenciales efectos de cierto diseño sobre el asunto de interés. La atención se enfoca en eventos que ocurren en escenarios conceptualmente ricos que son explícitamente diseñados para optimizar las oportunidades de desarrollos relevantes y observar su efecto.

Las estrategias de diseño son empleadas con frecuencia por quienes adoptan una aproximación colaborativa social. Los investigadores proponen una hipótesis de trabajo en la que predicen qué podría pasar si se introducen ciertas condiciones o circunstancias que no están presentes en un momento dado. A partir de la hipótesis, diseñan una situación para poner en funcionamiento dicha hipótesis y estudian los efectos logrados. Estas estrategias son empleadas

para obtener evidencias del efecto de un nuevo programa, currículo, artefacto, material educativo, conjunto de problemas, normas, etc. (Bakker y van Eerde, 2015).

Las estrategias de diseño están en un lugar intermedio entre las estrategias naturalistas y las estrategias clínicas. De un lado, pretenden superar las críticas que se hacen a las estrategias clínicas por no tener en cuenta las condiciones y limitaciones en las que suceden los eventos educativos y estar alejadas de los escenarios reales. De otro lado, buscan superar las críticas que se hacen a las estrategias naturalistas por requerir de largos periodos de tiempo y esfuerzo en capturar mucha información, que no necesariamente se usa. Entre las estrategias de este tipo están el "experimento de enseñanza", el "experimento comparativo" y la "investigación acción" (Kelly y Lesh, 2000).

Registro de información

Una actividad clave de cualquier investigación que se vale de procedimientos cualitativos es la toma de decisiones sobre cuál información conviene registrar para el análisis y cuál no. Esta escogencia es necesaria porque registrar todo lo que sucede en el escenario, aquello que pasa en el entorno de este o todo lo que hacen o dicen los participantes sobre un fenómeno de interés, es una tarea imposible (Miles y Huberman, 1994). La selección de participantes "informantes", a partir de criterios explícitos y de los procesos o productos que se quiere registrar, define los límites del estudio y establece qué tipo de conclusiones se pueden sacar de este.

Los procesos de registro son diferentes, según si se trata de obtener información para indagar por: concepciones, formas de pensar, ideas, emociones, opiniones, acciones, interacciones, prácticas, producciones, etc. Y también si se trata de analizar lo que hacen individuos solos, interacciones entre individuos o una mezcla de los dos; o si se trata de registrar estados, transiciones entre estados o evoluciones.

Kelly y Lesh (2000) alertan sobre el cuidado que hay que tener con las posibles modificaciones que sufra un fenómeno que se está estudiando como consecuencia del proceso de registro de información y con el efecto que este proceso pueda tener sobre la información capturada y sobre los análisis que se hagan. Señalan que, en el caso de estrategias naturalistas, entre menos invasivos sean los procesos de captura de información y menos personas extrañas al escenario estén presentes en este, mucho mejor.

Cinco preguntas determinan qué información registrar: ¿dónde registrarla?, ¿a quién o qué registrar?, ¿cuándo?, ¿haciendo qué? y ¿cómo? Las respuestas a cada pregunta dependen de las necesidades del estudio. Más que atender criterios sugeridos por otros, los investigadores se centran en la meta de obtener información lo más holística y rica posible sobre el fenómeno de tal suerte que permita revelar aspectos nuevos de su complejidad. En cualquier caso, una característica clave de la información por recoger es que tenga un fuerte vínculo con el escenario social en el que ocurren los eventos; esto hace que la información más útil sea la que se capture en estrecha proximidad con la situación específica, teniendo en cuenta las influencias del contexto local.

El momento de responder las cinco preguntas depende del tipo de diseño. Diseños flexibles y abiertos, de carácter principalmente exploratorio, pueden ir definiendo y concretando sobre la marcha: el escenario, los informantes, los eventos, los procesos y los instrumentos que se usarán para registrar información. Diseños rígidos y focalizados, de carácter principalmente confirmatorio, definen y concretan al máximo estos aspectos antes de ir al escenario.

Producción de unidades de análisis

La información en bruto, recogida en el escenario, no siempre corresponde a los datos investigativos. Es necesario llevar a cabo procesos de organización, reducción, depuración y fragmentación de la información; así se constituyen unidades de información para el análisis (Denzin y Lincoln, 1998; Tobin, 2000).

La información recogida en el escenario requiere ser organizada cuidadosamente para asegurar su uso eficaz, flexible y confiable por todos los investigadores de un estudio. Las investigaciones que se valen de procedimientos cualitativos generalmente acumulan gran cantidad de información; por eso conviene establecer un mecanismo de organización y archivo desde el inicio de la captura. Así se tiene acceso a esta en cualquier momento y los análisis se hacen vinculados a la información original.

A partir de la información comienza un proceso que Miles y Huberman (1994) consideran relacionado con el análisis, pues los investigadores toman decisiones sobre el material registrado influenciados por las inquietudes investigativas, el marco de referencia y aquello que identifican en los registros. Después de la recopilación de evidencias los investigadores seleccionan la información que consideran será empleada en el análisis y descartan información irrelevante o inútil.

La información reducida no siempre constituye los datos del estudio. En muchos casos hay que depurarla, lo cual implica refinar y optimizar las evidencias para hacerlas aún más concretas y útiles para el análisis. El proceso puede conducir a eliminar información que inicialmente se consideró relevante pero que en una segunda mirada se aprecia que no lo será. A partir de sucesivas revisiones de la información depurada se desarrolla un proceso de fragmentación e integración del material. Este proceso conduce a establecer los datos de la investigación, que se denominan unidades de análisis.

Un dato o unidad de análisis es un segmento textual claramente discernible, es decir, un fragmento de la información depurada o constituido por la integración de porciones de esta que tiene sentido completo para los investigadores y se puede someter a un análisis. Un dato puede interpretarse a la luz de un marco de referencia para producir descripciones, explicaciones, inferencias, constructos teóricos, pruebas de hipótesis, esquemas de relaciones, tipologías, etc. Algunos ejemplos de datos investigativos usados en Educación Matemática son: transcripciones completas (pero depuradas) de interacciones en las que se reporta un proceso, se discute un asunto, se resuelve un problema, etc.; relatos o narraciones completos (pero depurados), producidos por informantes o investigadores; protocolos completos (pero depurados) del proceso seguido por uno o varios informantes para el desarrollo de una tarea durante un periodo de tiempo; momentos específicos del desarrollo de una tarea; episodios o conjuntos de sucesos relacionados en un todo; escenas o sucesos específicos; fragmentos de transcripciones; unidades textuales reconstruidas integrando oraciones que tratan sobre un asunto en particular; párrafos de escritos o transcripciones; respuestas a preguntas; enunciados de situaciones, problemas, tareas; oraciones; expresiones; secuencias de gestos; gestos.

¿Qué nivel de detalle deben tener los datos? Esta respuesta depende del estudio. Algunos análisis lingüísticos requieren que los datos por analizar sean interacciones, línea a línea, e incluso palabra a palabra. Pero de manera más típica los datos son oraciones, párrafos o narraciones. Lo importante es que el investigador tenga claro cuál es su unidad de análisis en la investigación.

Análisis de los datos

La intención de un análisis es adentrarse en la complejidad de los datos de la mano de un referente teórico para: aclarar información que inicialmente puede parecer confusa, desentrañar componentes o constructos, identificar unidades de significado, descubrir patrones, encontrar indicios de pensamientos, percepciones, concepciones o actuaciones, establecer conexiones, establecer variables intervinientes, etc. Los investigadores, no sin esfuerzo, llevan a cabo un ejercicio fundamentado, creativo, inventivo e interpretativo de procesamiento de los datos para construir un sentido sobre aquello que observan. El proceso toma tiempo y requiere determinación, persistencia y perseverancia. Solo gracias a la búsqueda constante y diligente, superando frustraciones y desánimos, las piezas del rompecabezas empiezan a cuadrar (Miles y Huberman, 1994; Kelly y Lesh, 2000).

El ejercicio analítico hace que emerja un cierto orden y permite hacer una reconstrucción o síntesis informada gracias al proceso llevado a cabo. El producto del ejercicio es una posible (no única) "historia" coherente del fenómeno observado, que propone descripciones, ejemplos, rutas, tipos, estructuras conceptuales, relaciones, etc., situadas en el escenario en el que se capturaron los datos. La historia puede ser sometida a escrutinio público una vez comunicada (Denzin y Lincoln, 1998).

En sentido estricto, el análisis comienza antes del registro de la información. Las decisiones sobre la estrategia a seguir, la selección del escenario, la elección de los participantes, la información que se registrará y los momentos de registro, están condicionadas por las primeras comprensiones que tienen los investigadores sobre el fenómeno.

En el periodo de registro de la información también se llevan a cabo análisis. Estos suceden cuando se toman decisiones sobre qué registrar, a quién, cuándo y haciendo qué. Los investigadores suelen reunirse periódicamente para evaluar cómo suceden los acontecimientos. Deciden cómo resolver situaciones fortuitas que pueden afectar el éxito del estudio, hacen ajustes a la estrategia o al diseño mismo, destacan información que cobra importancia, etc. El hecho de que el registro de información se acompañe de análisis hace que eventualmente estos guíen la captura de nueva información a medida que se hacen confrontaciones entre la fundamentación teórica, los intereses del estudio, lo que se ha registrado, lo que falta por registrar y lo que no es necesario. Así, los investigadores mantienen cierto control sobre el registro de la información, que en alguna medida es analítico (Teppo, 2015; Vollstedt, 2015).

Después del registro de la información se hacen análisis en los momentos de reducción y depuración de la información, así como en su fragmentación para constituir las unidades de análisis. Son decisiones analíticas movilizadas por las inquietudes del estudio, el referente teórico con el que se está observando el escenario y la información que se está registrando. La reducción y depuración de información enfocan la mirada, refinan aquello que se quiere estudiar en profundidad y la organizan.

Finalmente se realiza el análisis retrospectivo. Los investigadores se concentran con mayor intensidad en los datos para interpretarlos, hallar patrones, establecer relaciones, hacer inferencias, etc. No se descarta que el análisis conduzca a nuevos procesos de reducción y depuración de información al ir enfocando la mirada en los hallazgos del estudio. En el minicurso se presentan ejemplos obtenidos en las investigaciones de Camargo (2010), Vergel, (2013), Valoyes (2014) y Obando (2015) en donde los datos investigativos se construyeron luego de un primer ejercicio de codificación de la información registrada y transcrita.

Generalmente, los análisis que se llevan a cabo en un estudio investigativo en Educación Matemática avanzan progresivamente por las siguientes tres acciones, hasta donde se necesite o se desee:

Describir los datos a partir de un marco de referencia (general y específico) descomponiendo el todo en unidades más simples con el objeto de: detallar aspectos del fenómeno; representar o modelar alguna situación o asunto; identificar nueva información, condiciones, acciones, interacciones, eventos, prácticas; exhibir y aclarar situaciones específicas en donde el fenómeno en estudio ocurre; verificar o ejemplificar situaciones, tipos, fases, etc. En síntesis, se busca ampliar el estado de conocimiento logrando dar una idea general de sus partes o propiedades. Si el marco de referencia está implícito, las preconcepciones, prejuicios, valores, teorías y hábitos retóricos de los investigadores no se exhiben, aunque siempre están presentes.

Interpretar los datos para develar significados inmersos en gestos, expresiones, escritos, sucesos o procesos y comprender acciones, interacciones y prácticas llevadas a cabo por los participantes en el escenario investigativo. Un todo complejo se descompone en unidades más simples para concebirlo, ordenarlo y entenderlo de manera personal de acuerdo con un marco de referencia emergente o preestablecido, mediante la identificación de patrones. Las comprensiones pueden dar sentido a una serie de eventos, identificar condiciones externas o internas que influyen en un fenómeno, o responder a intereses particulares del estudio. En los tres casos la interpretación vincula la explicación con la información proporcionada por los participantes específicos del estudio.

Inferir relaciones entre los datos para sacar conclusiones estableciendo equivalencias, complementariedades, dependencias, asociaciones, correlaciones, analogías, etc. Estas relaciones conducen a sugerir clasificaciones, proponer tipologías, establecer fases, insinuar relaciones causales, presentar constructos, argumentar afirmaciones y justificar acciones o creencias. En las estrategias clínicas las inferencias hacen que emerjan conceptos, proposiciones e incluso teorías plausibles, fundamentadas en los datos (Strauss y Corbin, 1998); estas relacionan las proposiciones en forma de listas jerárquicamente ordenadas o en redes de enunciados. En los estudios confirmatorios el análisis conduce a completar vacíos de la teoría, aclarar ambigüedades, complementar los modelos, proponer descriptores, ilustrar ideas con ejemplos, identificar excepciones, ampliar tipologías, hallar pruebas de existencia, hacer pruebas de hipótesis, etc. Para evitar que las inferencias sean especulativas o se impongan a los datos más que derivarse de ellos Miles y Huberman (1998) proponen considerar tres fuentes para hacerlas: (i) de la teoría que emerge o se conforma; (ii) de los datos disponibles, explicando las excepciones; (iii) del permanente diálogo entre las ideas que configuran los investigadores y los datos del estudio.

Referencias

Bakker, A. y van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with and example from statistics education. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.). *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods.* (pp. 429 - 466). Dordrecht: Springer.

Camargo, L (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. [Tesis doctoral]. Valencia: Universidad de Valencia.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (1998). Introduction: entering the field of qualitative research. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry. California.* (pp. 1- 34). Sage Publications.

Kelly, A. & Lesh, R. (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Miles, M.B. & Huberman, A.M. (1994). *Qualitative Data Analysis. An expanded Sourcebook.* California: SAGE Publications Inc. (segunda edición).

Moschkovich, J. & Brenner, M. (2000). Integrating a naturalistic paradigm into research on mathematics and science cognition and learning. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. (capítulo 17, pp. 457 – 486). N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., capítulo 17, 457- 486.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica*. [Tesis doctoral]. Cali: Universidad del Valle.

Radford, L. & Sabena, C. (2015). The question of method in a vygostkian semiotic approach. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods*. (pp. 157 - 182). Dordrecht: Springer.

Strauss, A., Corbin, J. (1998). Grounded theory methodology: an overview. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry. California.* (pp. 158 - 183). Sage Publications.

Teppo, A. (2015). Grounded Theory Methods. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods*. (3 - 21). Dordrecht: Springer.

Tobin, K. (2000). Interpretive research in science education. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., capítulo 18, 487 – 512.

Uribe, C.A. (2013). La etnografía de investigación en ciencias sociales. En P. Páramo (Comp.), *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación.* (pp. 129 - 144). Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Valoyes, L.E. (2014). *Colombian teachers'expectations of poor and black students'ability to learn algebra.* [Tesis doctoral]. Missouri: Universidad de Missouri.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9 – 10 años).* [Tesis doctoral]. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vollstedt M. (2015). To see the wood for the trees: the development of theory from empirical interview data using grounded theory. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education. Examples of methodology and methods*. (pp. 23 - 48). Dordrecht: Springer.



Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico[1]

Rodolfo **Vergel** Causado
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá-Colombia
rvergelc@udistrital.edu.co

Resumen

El análisis sobre formas de pensamiento algebraico no evade la discusión de las formas de pensamiento aritmético. Resultados de investigación muestran que la ausencia de indicios espaciales en secuencias numéricas hace recaer la generalización sobre relaciones entre números, lo que facilita implícitamente la emergencia de estrategias de ensayo-error que se erigen en obstáculo al pensamiento deductivo sobre el que reposa la analiticidad (Radford, 2008; Vergel, 2015). A partir de datos provenientes de una investigación doctoral y de un programa de extensión con profesores de matemáticas, se analiza la actividad semiótica de una estudiante y de una profesora de primaria, respectivamente. El análisis sugiere, por un lado, la presencia de una posible zona en la que formas sofisticadas de generalización aritmética estarían muy cerca de proto-formas de pensamiento algebraico, y, por otro lado, profundizar la reflexión epistemológica en aras de lograr una caracterización más inteligible de esta zona conceptual.

*Palabras clave***:** Analiticidad, Generalización aritmética, Generalización algebraica, Pensamiento algebraico temprano, Proto-analiticidad.

Abstract

The analysis about forms of algebraic thinking does not evade the discussion on arithmetical thinking forms. Research results show that the absence of spatial clues in numerical sequences leads to the generalization of relationships between numbers, which implicitly facilitates the emergence of trial-error strategies that stand as an obstacle to the deductive thinking on which analyticity rests (Radford, 2008, Vergel, 2015). Based on data from PhD research and an extension program with mathematics teachers, the semiotic activity of a student and a primary school teacher, respectively, is analyzed. This analysis suggests, on the one hand, the presence of a possible zone

[1] Este trabajo se inspira en las reflexiones epistemológicas y pesquisas adelantadas en el marco de mi estancia posdoctoral, bajo la dirección del Dr. Luis Radford, en Laurentian University, Sudbury, provincia de Ontario, Canadá.

in which sophisticated forms of arithmetic generalization would be very close to proto-forms of algebraic thinking, and, on the other hand, to deepen epistemological reflection in order to achieve a more intelligible of this conceptual zone.

*Keywords***:** Analiticity, Arithmetic generalization, Algebraic generalization, Early algebraic thinking, Proto-analyticity.

Introducción

La generalización puede considerarse como uno de los procedimientos relevantes en términos de producción del conocimiento. De hecho, investigadores de la Educación Matemática confieren un protagonismo didáctico a este proceso y un interés importante, ya que, entre otros aspectos, posibilita analizar procesos de pensamiento matemático de los estudiantes. La "anatomía" o naturaleza de la actividad matemática (en tanto actividad semiótica) de los alumnos se constituye en una preocupación didáctica, principalmente, cuando nos vemos avocados, como maestros en la sala de clase, a tratar de comprender lo que nuestros estudiantes nos quieren comunicar al expresar semióticamente las generalizaciones que producen. En este sentido, tiene relevancia la idea de semiótica como una teoría que intenta explicar cómo los signos significan, es decir, una teoría de la comunicación y significación (Eco, 1988).

Recientemente se reconoce el interés que viene ganando la investigación sobre álgebra temprana (ver, por ejemplo, Ainley, 1999; Cai y Knuth, 2011; Kaput 1998; Kaput, Blanton, & Moreno, 2008; Radford, 2010, 2011, 2018a; Vergel, 2015, 2016a, 2016c). Particularmente, la investigación viene mostrando que, aun cuando las producciones de los alumnos no contienen signos alfanuméricos del álgebra, su pensamiento puede ser genuinamente algebraico. En este contexto de investigación se ha situado el estudio de la generalización, pues como lo sostiene Michael Otte, "la generalización es esencial, ya que es este proceso el que distingue la creatividad matemática del comportamiento mecánico o algorítmico" (Otte, 2003, p. 187).

Este escrito está dividido en tres secciones. En la primera, que he llamado Consideraciones teóricas, planteo algunas caracterizaciones de álgebra y de actividad algebraica, así como una definición de saber algebraico que posiciona, a su vez, una caracterización de pensamiento algebraico, y de generalización algebraica y aritmética de patrones. En la segunda sección presento el análisis de dos ejemplos de actividad semiótica que me permiten discutir una posible zona conceptual en la que se confunden o entrecruzan formas avanzadas de generalización aritmética (como ejemplos de pensamiento aritmético) y proto-formas de pensamiento algebraico. Hacia el final de este trabajo derivo algunas conclusiones y propongo varias consideraciones que sugieren continuar profundizando la discusión alrededor de esta zona conceptual, discusión que puede contribuir al desarrollo de la propuesta de cambio curricular de Álgebra temprana.

Consideraciones teóricas

En el trabajo de aula es frecuente que los profesores, en su ejercicio profesional de enseñar matemáticas, enfaticen, en momentos específicos de la clase, alguna concepción de álgebra. Desde luego, el énfasis sobre alguna concepción de álgebra en particular estaría afincada en la misma naturaleza de la actividad matemática, pues en algunos momentos se debe desplegar un tipo de actividad semiótica que opere con lo indeterminado, sin descuidar, por supuesto, la toma de conciencia sobre los procesos de deducción implicados; en otros momentos de la clase es necesario avanzar en procesos de generalización y simbolización ya sea en presencia o no de

números, y en otros episodios de la actividad matemática se puede requerir específicamente concentrar la atención en la identificación de relaciones funcionales entre variables o cantidades, etc.

Considero pertinente señalar, al menos desde el punto de vista teórico, algunas caracterizaciones de álgebra que podrían estar operando cuando abordamos el trabajo de aula en matemáticas: (i) El álgebra es un método para operar sobre formas generales, mientras que la aritmética es un método para operar sobre números concretos (Viète, 1983); (ii) El simbolismo alfanumérico no es una condición para pensar algebraicamente (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1985); (iii) El punto de vista del álgebra concebida como una actividad de razonamiento que involucra la noción de indeterminación (Kieran, 2007). En este caso cabe llamar la atención sobre el proceso de desarrollar un sentido de lo indeterminado, pues éste no se logra súbitamente. "Es más bien un lento y laborioso proceso que está íntimamente ligado al tipo de tareas propuestas en la sala de clase y a la actividad en tanto labor conjunta entre estudiantes y entre estudiantes y profesor" (Vergel, 2016b, p. 511); (iv) El álgebra es inherente a la aritmética […] la aritmética tiene ya un carácter algebraico" (Carraher & Schliemann, 2007, p. 17); (v) La actividad simbólica es algebraica. Aquellas actividades en las cuales la generalización es expresada a través de otros sistemas simbólicos no son consideradas genuinamente algebraicas (son llamadas cuasi-algebraicas) (Kaput et al., 2008); (vi) El álgebra se considera como un fundamento para la aritmética más que como una generalización de la misma (Subramaniam & Banerjee, 2011, p. 87).

Coincido con Luis Radford en caracterizar el saber como un sistema. Para este autor, el saber "es un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente" (Radford, 2017, p. 101). El término sistema usado aquí quiere enfatizar la idea de movimiento, de proceso, algo dinámico y transformativo, susceptible de ser modificado. El saber se entiende como una capacidad latente incrustada en la cultura, una potencialidad (una posibilidad de hacer algo). Pero el origen de esa posibilidad no se encuentra en un mundo platónico, sino en la práctica política y social, es decir, aun cuando el saber es algo general, un arquetipo, formas generales de hacer algo, no constituye un mundo aparte, aislado de las acciones humanas (Radford, 2017).

Recordemos que para Platón, "el conocimiento de las ideas constituye un mundo aparte, separado del mundo sensible, porque su objeto son aquellas cosas inmutables como la belleza y la naturaleza de los dioses" (Platón, 1983, p. 15). Para Radford (2017, p. 103), "el saber es labor cristalizada", realizada a través de acciones humanas; el saber "es un sistema de acciones codificadas culturalmente" (Radford, 2017, p. 103). Por eso la idea de proceso, de transformación, cobra relevancia. Por ejemplo, en relación con la aritmética, "estos procesos podrían ser de reflexión, de expresión, y de acción que emergieron en Mesopotamia de actividades humanas específicas, tales como contar ganado o granos, o medir los campos" (Radford, 2017, p. 101). En esta dirección conceptual, tendríamos que entender el saber algebraico como una forma prototípica de acción y reflexión humana que se convierte en potencialidad cultural y, por tanto, sería pura posibilidad para los estudiantes, es decir, posibilidades que se les ofrecen para pensar, reflexionar, plantear y resolver problemas de cierta manera. En términos de sintetizar estas ideas, e inspirados en los desarrollos filosóficos de Luis Radford, para Vergel y Rojas el saber algebraico:

> Es una síntesis evolutiva —sintetiza acción humana, es dinámica, transformativa— y culturalmente codificada —como patrones de acción— de hacer y reflexionar en términos

> analíticos — es decir, la analiticidad en términos del carácter operatorio de lo desconocido— sobre números indeterminados y conocidos (Vergel y Rojas, 2018, p. 51).

Una caracterización del pensamiento algebraico se constituye de tres componentes, estrechamente relacionadas (Radford, 2010): (a) *el sentido de indeterminancia* —objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros— "como aquello opuesto a la determinancia numérica" (p. 39); (b) la *analiticidad*, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos que comporta procesos de deducción, esto es, partir de ciertas premisas para llegar a ciertos resultados. En otras palabras, la analiticidad refiere al proceso en el cual las cantidades indeterminadas y sus operaciones se manejan de manera analítica y, aun cuando estas cantidades no son conocidas, se suman, restan, multiplican, dividen, etc., como si fueran conocidas; como señala Descartes (1954, p. 8), "sin hacer distinción entre números conocidos y desconocidos"; y (c) la *designación simbólica* o *expresión semiótica* de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos. En el contexto de las secuencias de patrones, "El pensamiento algebraico temprano se basa en las posibilidades del estudiante para comprender patrones en formas co-variacionales desarrolladas culturalmente y usarlos para tratar con cuestiones de términos lejanos o no especificados" (Radford, 2011, p. 23).

Generalización algebraica y generalización aritmética de patrones

La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Radford, 2010, 2013, 2018a; Vergel, 2015, 2016c; Vergel y Rojas, 2018), pues, entre otros aspectos, posibilita, en el trabajo de aula, aproximarse a situaciones de variación que se erigen como procesos necesarios para el desarrollo del pensamiento algebraico. De hecho, la propuesta de cambio curricular Álgebra temprana sugiere avanzar en estos procesos de generalización a partir del trabajo con patrones (Carraher & Schliemann, 2007; Radford, 2013; Vergel, 2010, 2016c). El trabajo de generalización de patrones nos obliga a precisar, al menos, dos clases de generalización: la algebraica y la aritmética. De acuerdo con Radford (2013), la generalización algebraica de patrones comporta:

1. Capturar o identificar una comunalidad o característica común, notada sobre algunos elementos de una secuencia. Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$).

2. La generalización o aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia $(p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots)$, y

3. La capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa*[2] que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

[2] Énfasis en el original.



Figura 1. Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales propuesta en Radford (2013)

La generalización de la "comunalidad" a todos los términos es la formación de lo que, en la terminología aristotélica, se llama un género, es decir, aquello en virtud de lo cual los términos se mantienen unidos (Radford, 2010). En otras palabras, la generalización algebraica de un modelo se basa en darse cuenta de una comunalidad local, que luego se generaliza a todos los términos de la sucesión y que sirve como una orden para construir expresiones de los elementos de la secuencia que siguen estando fuera del campo perceptivo. La identificación de la característica común o comunalidad requiere, según Radford (2013), hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales. "La generalización de la característica común (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llama una abducción, esto es, algo que es solamente plausible" (Radford, 2013, p. 6). De acuerdo con Radford (2013, p. 7):

> Para que la generalización sea algebraica se requiere […] que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera *analítica*.[3] Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término. Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H.

En el proceso de generalización de patrones, es posible identificar casos de producciones matemáticas de estudiantes que no presentan las características de la definición de generalización algebraica de patrones mencionada anteriormente. En este caso, estos estudiantes aún no han ingresado al reino del álgebra, en tanto pueden estar operando aún en el ámbito de la aritmética al intentar generalizar algo, trabajo que podría estar anclado en el nivel de lo concreto. Como dice Vygotsky (1986, p. 133), "El marco del niño es puramente situacional, con la palabra atada a algo concreto, en tanto el marco del adulto es conceptual". Si bien lo generalizado puede ser una comunalidad local, observada en algunas figuras, esto podría no garantizar la utilización de dicha información para proporcionar una expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia. Precisa Radford (2013, p. 7), "Cuando la abducción es simplemente utilizada para pasar de un término a otro (como cuando los alumnos dicen que hay que añadir 2 cuadrados)". En este sentido estamos frente a una *generalización aritmética* (Radford, 2008). En el recorrido por la Figura 1 estaríamos predicando sólo hasta configurar la generalización de la característica común. En este caso, no hay deducción de una expresión directa que autorice calcular el número

[3] Énfasis en el original.

de elementos (v.g., cuadrados, círculos, números) en cualquier término de una secuencia de patrones. Como señala Radford (2013, p. 7):

> En el caso del procedimiento por ensayo y error, los alumnos producen una fórmula. Pero la fórmula no es deducida. De hecho, la abducción concierne la fórmula misma. Los alumnos proponen una fórmula, que parece plausible, y la someten a un número finito de pruebas. Esta generalización (que corresponde a una de las formas de inducción) no es todavía algebraica.

El tipo de inducción al que refiere Radford se llama *inducción ingenua* (Radford, 2008). El adjetivo se usa para distinguir el tipo de inducción de otros tipos de inducción más sofisticados, por ejemplo, del proceso de inducción matemática o inducción completa, tal y como lo describe Fowler (1994, p. 253):

"If $\mathrm{P}(1)$ and

$\mathrm{P}(n) \rightarrow \mathrm{P}(n+1)$ for all n are both true (valid),

then $\therefore \mathrm{P}(n)$ is true (valid) for all n".

La inducción ingenua se basa en diversas abducciones que están representadas en propuestas de fórmulas, las cuales parecen plausibles, y son sometidas a un número finito de pruebas. Aun cuando por este razonamiento se podría obtener una fórmula algebraica que corresponda al término general de la secuencia, esta regla es obtenida por inducción, es decir, a través de un procedimiento basado en un razonamiento probable y, como precisa Radford (2008, p. 3), "cuya conclusión va más allá de lo que está contenido en sus premisas", lo cual, por un lado, marca la diferencia con el proceso de inducción matemática descrito por Fowler (1994), y de otra parte, no sugiere un proceso de deducción (que contiene en su arquitectura la abducción analítica) que sí comporta la generalización algebraica de patrones.

El criterio acerca de la analiticidad, entonces, ofrece un principio operacional para distinguir el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Es necesario precisar aquí que detrás de la operación con lo indeterminado, se encuentra esta idea de analiticidad, entendida no sólo como el carácter operatorio de los objetos indeterminados, sino también en términos de procesos de deducción, es decir, el trabajo a partir de algo, que es admitido o supuesto con certeza (Descartes, 1983), para llegar a una conclusión. Por eso sostenía Viète (1983) que lo que era distintivamente algebraico correspondía a la manera analítica en la cual pensamos cuando pensamos algebraicamente.

Permítanme hacer una rápida mirada a la historia del pensamiento babilónico en la idea de intentar mostrar su complejidad y su "confusión" sobre si este tipo de pensamiento es algebraico o aritmético. Quiero insistir en el criterio operacional que ofrece la analiticidad para hacer la distinción hasta donde sea posible. En efecto, los escribas babilónicos realmente pensaron que el número uno representaba lo desconocido en un sentido algebraico (Radford, 2001). La elección numérica para lo desconocido pudo haber permitido a los escribas sistematizar los métodos numéricos de resolución de problemas y alcanzar un paso significativo en términos del desarrollo conceptual del pensamiento proporcional antiguo. En el caso específico del método de la falsa posición, haciendo una revisión histórica al pensamiento babilónico, Radford (2001) muestra cómo el trabajo con símbolos numéricos pone de presente una serie de procedimientos que a los ojos de hoy en día son genuinamente algebraicos.

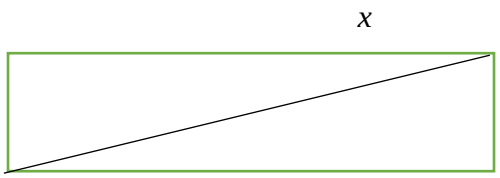


Figura 2. Representación geométrica del problema babilónico

El problema relacionado con el método de la falsa posición, en términos modernos, es el siguiente: *Hallar las dimensiones del rectángulo cuyo ancho es su longitud menos un cuarto de ella y su diagonal es 40.*

En nuestro sistema semiótico alfanumérico moderno, tendríamos el siguiente desarrollo:

$$y = x - \frac{1}{4}x$$
$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x^2 + y^2 = 1600$$
$$x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} d$$

El escriba babilónico, en contraste, asume una falsa longitud x_0, lo que sugiere una falsa anchura y_0 y procede haciendo el siguiente cálculo:

$$y_0 = x_0 - \frac{1}{4}x_0 = \frac{3}{4}x_0.$$

Entonces, asumiendo estas premisas (i.e., las condiciones del problema), él calcula la falsa diagonal usando d_0 de la siguiente manera:

$$d_0 = \sqrt{\left({x_0}^2 + (\frac{3}{4}x_0)^2\right)} = \frac{5}{4}x_0 = \frac{5}{4}, \text{ pues } x_0 = 1$$

La cantidad verdadera (solución exacta al problema) puede ser legítimamente pensada a través de otra cantidad. Las "cantidades falsas" aparecen como metáforas de "cantidades verdaderas"[4] (Radford, 2001). La idea principal, señala Radford, estaba supuestamente apoyada por el hecho de que, en algunos problemas, el escriba toma el número 1 como la solución falsa (como el ejemplo aquí mostrado) y cuando, según procedimientos babilónicos, reemplazamos el número 1 por nuestra moderna x desconocida, los *procedimientos de resolución de problemas se parecen mucho a los procedimientos algebraicos modernos*. Mi llamado de atención reside en el hecho de que, si bien no hay signos alfanuméricos en los procedimientos babilónicos, las formas de operar con el símbolo numérico 1 no distan mucho de las formas de operar actualmente con lo desconocido.

Es claro, entonces, que el símbolo numérico 1 se tomaba en realidad como una representación de lo desconocido. También es claro que si no podemos, de manera directa, ver lo

[4] El pensamiento mesopotámico estaba lleno de metáforas (odas, poemas épicos, textos literarios y religiosos) las cuales muestran un intrincado sistema de expresiones metafóricas. Desde la inferencia histórica, se puede afirmar que el álgebra, al parecer, estaba redactada en un sistema así. Ésta es una de las evidencias que muestra cómo la cultura incide en la naturaleza y el desarrollo del saber matemático.

desconocido, es simplemente porque los escribas babilónicos no tenían un símbolo con el que podrían representarlo (Radford, 2001). Es decir, los procedimientos babilónicos y sus formas de pensar tenían lugar con y a través de los signos que disponían. Por eso, desde una postura sociocultural, las maneras como los individuos llegan a conocer, y lo que conocen, llevan en su constitución sedimentos de formas históricas y culturales de pensamiento y de actividad (Vergel, 2014). Cabe aquí mencionar la premisa epistemológica dialéctico materialista acerca de la cognición y los signos: "La manera, profundidad e intensidad en que un objeto aparece como objeto de conciencia son consustanciales con el material (contenido) semiótico que hace posible que tal objeto se convierta en un objeto de conciencia y pensamiento" (Radford, 2018a, p. 22) [Traducción propia].

La operación con lo desconocido o indeterminado, en este caso con el símbolo numérico 1, implica procesos de deducción, esto es, procesos en los cuales, considerando ciertas premisas (en el caso aquí mostrado, serían las condiciones del problema que son atravesadas por el hecho de que $x_0 = 1$), se llega a ciertos resultados. Si bien el número 1 fungía como lo desconocido para el escriba, es claro que desplegaba también procesos de deducción. Descartes lo diría mejor: "Deducción es todo aquello que se concluye necesariamente de otras verdades conocidas con certeza" (Descartes, 1983, p. 125).

Dos ejemplos de actividad semiótica

En esta sección presento fundamentalmente la producción de una estudiante participante de una investigación (Vergel, 2015), que indagó, desde un análisis multimodal del pensamiento humano (Arzarello, 2006), por las formas de pensamiento algebraico temprano en estudiantes de 4° y 5° de primaria (10-11 años), y la producción de una profesora de básica primaria participante de un programa de extensión (Secretaría de Educación Distrital, SED, en prensa) que pretendía cualificar las prácticas docentes en matemáticas en escuelas y colegios del distrito de Bogotá (Colombia).

El caso de Yaneth

En el contexto de la investigación aludida, una de las producciones de los estudiantes estuvo precedida por el interés de indagar acerca de los medios semióticos de objetivación que podrían emerger durante su actividad matemática, cuando la *tarea* propuesta correspondía a una secuencia de patrones que no contaba con elementos geométricos-espaciales como en el caso de las secuencias figurales apoyadas por representación tabular (Vergel, 2015). En términos generales, la tarea tiene un estatus epistemológico y en tal sentido juega un papel clave en la actividad matemática de los estudiantes. De acuerdo con Vergel y Rojas (2018, p. 76):

> La tarea […] está revestida de una densidad epistemológica, por cuanto su abordaje, por parte de los estudiantes, implica la movilización, a través de signos y de operar con ellos, de ideas matemáticas y procesos matemáticos —p. ej., procesos de deducción y de generalización—, la conjeturación y formulación de hipótesis, el establecimiento de relaciones numéricas, el trabajo analítico con lo desconocido, entre otros aspectos.

En tanto categoría didáctica, la tarea desarrolla, a través de su abordaje, pensamiento matemático. La idea de tarea se inspira en la máxima vygotskyana, según la cual, "la instrucción solamente es positiva cuando va más allá del desarrollo y, de esta manera, despierta y pone en funcionamiento toda una serie de funciones que, situadas en la zona de desarrollo próximo, se encuentran en proceso de maduración" (Wertsch, 1988, p. 87). La idea de instrucción, que es una traducción del vocablo ruso *obuchen*ie usado por Vygotsky, comprometida en la caracterización

de tarea, refiere a la actividad integrada de interacción en la cual los procesos de enseñanza y aprendizaje se hallan implicados.

La tarea propuesta, denominada secuencia numérica con apoyo tabular, es la siguiente:

2	**5**	**8**
Término 1	Término 2	Término 3

Figura 3. Secuencia numérica con apoyo tabular correspondiente a la tarea implementada en Vergel (2015)

Entre otros requerimientos, se solicitaba encontrar los términos 4 y 5 de la secuencia (que se genera a partir del término general $3n - 1$, con $n = 1,2,3, ...$). La profesora Johanna[5] introduce este tipo de secuencias a partir del siguiente diálogo:

L1. Profesora Johanna: A partir de hoy no vamos a trabajar con las secuencias figurales, es decir ya no vamos a tener figuras ni círculos sino que vamos a empezar a trabajar con una secuencia numérica. ¿Qué significa eso? Que ahora ya no vamos a hablar de figura 1, figura 2, figura 3, etc., sino del término 1, término 2, término 3, (…) entonces miren el término 1 es (…) ¿quién?

L2. Estudiantes en coro: ¡2!

L3. Profesora Johanna: 2, el término 2 ¿quién es?

L4. Estudiantes en coro: ¡5!

L5. Profesora Johanna: El término 3 ¿quién es?

L6. Estudiantes en coro: ¡8!

L7. Profesora Johanna: Entonces con esa nueva secuencia vamos a tratar de hacer ejercicios como lo hicimos en las anteriores.

El diálogo muestra que el desarrollo de la clase de matemáticas que se venía dando estaba basado en secuencias figurales con apoyo tabular, y ahora los estudiantes se topan con otro tipo de secuencias que no cuentan con elementos geométrico-espaciales. La profesora Johanna decide iniciar un *trabajo conjunto* (Radford, 2014a) e intenta resaltar la relación funcional entre el término y el número correspondiente, con el propósito de hacer emerger una toma de conciencia de dicha relación funcional en y entre los estudiantes. El trabajo conjunto es, precisamente, el que posibilita la toma de conciencia, pues ésta se encuentra estrechamente vinculada con la interacción entre los estudiantes, es decir, con la actividad. "La actividad del individuo constituye la substancia de su conciencia" (Leontiev, 1978, p. 96). Esta relación íntima entre individuo, conciencia y actividad participa en el desarrollo o materialización del sujeto, considerado como una "entidad histórico-cultural en perpetua transformación, esto es, una subjetividad en proceso de fabricación" (Radford, 2018b, p. 23) [Traducción propia]. En este sentido, hay que entender la conciencia en términos de relación —relación al mundo. Esta relación concreta con el mundo sugiere que la conciencia debe entenderse como un caso particular de la experiencia social (Vygotsky, 1979).

El sujeto, entonces, no puede ser, no podría desarrollarse sin la presencia de otros sujetos, sin co-participar de los pensamientos de otros sujetos, de pensamientos ajenos. Para Holquist (1994, p. 25), "Ser [es decir, el sujeto] es una simultaneidad, es siempre un co-ser". Por eso es

[5] La profesora Johanna participó en la investigación referida en su rol de orientadora de las sesiones de trabajo. Su participación también estuvo asociada con el análisis de las tareas que se diseñaron.

que en la actividad o labor conjunta, las intervenciones de la profesora Johanna buscan propiciar relaciones de alteridad a partir de las cuales haya un entrecruzamiento de conciencias; al decir de Bajtín (2009, p. 360), "la conciencia del hombre despierta envuelta en la conciencia ajena", lo cual sugiere que la conciencia adquiere su identidad dentro de la práctica social reflexiva.

La idea de labor conjunta quiere resaltar el hecho de que "profesores y estudiantes laboran juntos para producir el saber" (Radford, 2014b, p. 11). La actividad o labor conjunta (lo que Radford llama el Particular hegeliano) es, justamente, la que hace que el saber algebraico, como pura potencialidad cultural, se ponga en movimiento. Este es el significado epistemológico que se le confiere a la actividad. Como sostiene Radford (2014b, p. 10), "para convertirse en objeto de conciencia y pensamiento, el saber algebraico tiene que ser puesto en movimiento a través de la *labor conjunta*[6] del salón de clase".

La labor conjunta sugiere que los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje se están transformando, pues aprender algo significa transformación. Esta transformación tiene lugar a través de la interacción y cooperación humanas no alienantes, es decir, a través de una relación de alteridad en la que los sujetos se posicionan críticamente frente a la clase. Radford plantea que:

> Es a través de la labor que encontramos los sistemas de ideas de la cultura: sistemas de ideas científicas, legales, artísticas, etc. Es también a través de la labor que encontramos formas culturales de ser. En su sentido ontológico, la labor significa alteridad —el encuentro de eso que no soy yo, y que al encontrarlo, me transforma. Pues estamos hechos tanto de sangre y huesos, como de historia y relaciones sociales y culturales (Radford, 2014a, p. 138).

Después de un trabajo individual por parte de los estudiantes, la profesora Johanna visita varios grupos para indagar qué piensan sobre la secuencia y cómo, a través de sus producciones e intercambios verbales, han abordado la tarea. Este tipo de actividad es un aspecto clave para hacer aparecer el saber algebraico. Cuando se pone en movimiento, el saber algebraico empieza a transformarse, a materializarse. Es eso lo que se materializa (estos es, lo que se actualiza), mediatizado por la actividad, lo que llamamos conocimiento. En consecuencia, el conocimiento es producto de una mediación (la actividad). Este conocimiento, representado en las diversas producciones semióticas de los estudiantes, necesariamente paga tributo a la actividad.

Desde una postura sociocultural tenemos que aceptar que las formas de pensamiento matemático son consustanciales a la naturaleza de la actividad, en otras palabras, la actividad imprime su marca en la actualización del saber (Ilyenkov, 1977). Dependiendo de la naturaleza de la actividad podríamos hacer emerger una toma de conciencia en los estudiantes acerca de una mirada algebraica de las secuencias numéricas. Es en este sentido que hemos constatado que la materialidad de la actividad es la que hace emerger el saber algebraico de cierta manera (Radford, 2018a; Vergel, 2015, 2016a; Vergel y Rojas, 2018), en otras palabras, el amarre entre el saber y la actividad tiene lugar diferente. Dicha materialidad está representada en las preguntas de la profesora, en las intervenciones de los estudiantes, así como en su producción matemática.

A continuación presento la producción de Yaneth (una estudiante participante de la investigación), como parte de la actividad, motivada por responder al número correspondiente al Término 15 de la secuencia.

[6] Énfasis en el original.

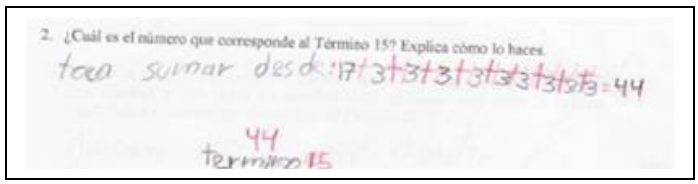


Figura 4. Producción de Yaneth al requerimiento del item 2 de la tarea sobre secuencia numérca con apoyo tabular

Yaneth instancia una forma aditiva para responder al número que corresponde al Término 15 (ítem 2, Figura 4). Su producción con respecto al ítem 2, *"toca sumar desde:* $17 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 44$*"*, indica que el número 9, obtenido por la diferencia entre los números 15 y 6, determina las veces que debe repetirse el número 3 en la suma, anclándose en 17 que corresponde al Término 6.

En el proceso de análisis de la secuencia, de cómo cambian los números correspondientes a los términos, esto es, en el proceso de identificación de ciertas determinaciones sensibles potenciales, Yaneth identifica una característica común (aumentar 3) y, a partir de su respuesta al ítem 2, es generalizada y aplicada para encontrar el número que corresponde al término solicitado (Término 15). Sin embargo, esta generalización de la característica común (abducción en el sentido de Peirce), no parece ser utilizada de manera analítica. El término analítico era considerado por Pappus como movimiento, Pappus decía: "El análisis es el movimiento desde lo que es dado hacia lo que es buscado" (Rideout, 2008, p. 62) [Traducción propia]. La producción de Yaneth, si bien no parece usar como hipótesis o principio asumido la generalización de la característica común para deducir una expresión que le permita calcular el número correspondiente a *cualquier* término, es decir, su generalización no parece ser de naturaleza algebraica, sí recurre a lo que, inicialmente, propongo llamar una *generalización aritmética sofisticada*, que se podría describir de la siguiente manera:

Se parte de un término cualquiera conocido T_a (en este caso, T_6) y se quiere hallar T_n (para este caso, T_{15}); entonces esta estudiante procede haciendo: $T_a + (n - a) \times 3 = T_n$

El adjetivo "*sofisticada"* introducido quiere establecer la diferencia en relación con el proceso de generalización aritmética teorizado por Radford (2013, p. 7), para quien "la abducción [generalización de la característica común] es simplemente utilizada para pasar de un término a otro". La ausencia de elementos espaciales o geométricos (que sí comportan las secuencias figurales con o sin apoyo tabular) obliga a la realización de un trabajo de generalización, por parte de Yaneth, basado en relaciones entre números. Además, sus procesos perceptivos quedan anclados, necesariamente, al contexto numérico que enfrenta (en este caso, la secuencia numérica con apoyo tabular). "Los procesos perceptivos también dependen de las formas socio-históricas de vida" (Luria, 1987, p. 18). En casos de producciones de estudiantes que cursan primeros grados de la primaria, sería posible generar una fórmula algebraica tomando en consideración solamente la dimensión aritmética, al notar que se añade siempre 3 a un término para producir el siguiente, sin embargo, este camino resultaría difícil pues requiere un conteo sistemático, el cual, para el caso de la producción de Yaneth, logró transformarse en una expresión aritmética sofisticada: $17 + (15 - 6) \times 3$, pero para estudiantes de los primeros grados de primaria podría resultar difícil, si consideramos, de manera infortunada, la naturaleza todavía emergente de su pensamiento aritmético.

El trabajo a partir de relaciones entre números facilita implícitamente la emergencia de estrategias de ensayo-error, las cuales se erigen en obstáculo al pensamiento deductivo sobre el que reposa la analiticidad (Radford, 2008, 2013; Vergel, 2015). En este caso, no hay posibilidad de transitar de la abducción a la hipótesis. No obstante, la expresión sofisticada que logra producir Yaneth, que se puede representar como $17 + (15 - 6) \times 3$, sugiere la presencia de lo que propongo llamar una *proto-analiticidad* o *analiticidad incipiente*. Observemos que la obligatoriedad evidenciada en su elocución "toca sumar desde $17 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 44$", indica que ha considerado la condición de sumar 3, basada en el análisis de cómo cambian las imágenes (números 2, 5 y 8) de los tres términos dados, para poder producir su expresión sofisticada. Su ejercicio de análisis evidencia una mirada estructural de la secuencia, pues se centra en examinar relaciones no sólo entre las imágenes, sino también entre éstas y sus respectivas pre-imágenes, lo que predica muy bien acerca del uso de pensamiento relacional (Molina, 2009).

Propongo, en consecuencia, pensar en una zona conceptual en la cual se confunden formas sofisticadas de generalización aritmética y proto-formas de pensamiento algebraico (basadas en una proto-analiticidad). El caso de la profesora de primaria que expongo a continuación pretende aportar más evidencias empíricas con el objetivo de substanciar la discusión en relación con la zona conceptual aludida.

El caso de la profesora de primaria

El programa de extensión o proyecto de fortalecimiento curricular en matemáticas aludido anteriormente con profesores de básica primaria (Secretaría de Educación Distrital, SED, en prensa) tenía por objetivo proponer orientaciones didácticas a los maestros de matemáticas de 150 instituciones educativas de la ciudad de Bogotá (Colombia) para el trabajo en sus clases de matemáticas. Más específicamente, el proyecto pretendía aportar elementos didácticos para promover el desarrollo del pensamiento lógico matemático en los estudiantes de todos los grados de la escolaridad. Uno de los aspectos que desarrolló el proyecto consistía en diseñar y validar una serie de tareas que justamente posibilitaran, en su abordaje por parte de los maestros y de los estudiantes, el desarrollo de pensamiento matemático.

Varias de las tareas propuestas en el proyecto de fortalecimiento curricular tenían que ver con secuencias de patrones (tanto numéricas como figurales, ambas con apoyo tabular) y se adelantaron algunas reflexiones con los maestros sobre la importancia didáctica del trabajo en el aula a partir de este tipo de secuencias. Durante el proyecto se planteó a los maestros la siguiente secuencia figural apoyada con representación tabular:

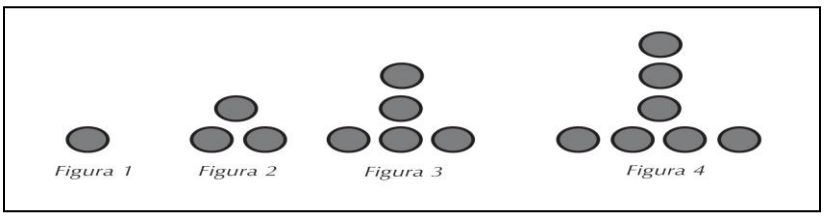


Figura 5. Secuencia figural con apoyo tabular propuesta en el proyecto SED (en prensa)

En su actividad los profesores habían construido las figuras 5 y 6 que fueron solicitadas, y tuvieron la oportunidad de analizar la secuencia, poniendo especial atención a la articulación de las estructuras espacial y numérica en la idea de identificar las variables independiente y

dependiente, así como proponer alguna relación entre ellas. Se esperaba que estas reflexiones didácticas sirvieran de insumo para el trabajo posterior que ellos desarrollarían con sus estudiantes a través de la implementación de las tareas, cuyas producciones debían ser analizadas a la luz de las ideas teóricas, provenientes de la didáctica de la matemática, que se discutían previamente en las sesiones de trabajo.

Frente a la pregunta *¿cuántos círculos tiene la figura 100?*, una profesora de básica primaria responde de la siguiente manera:

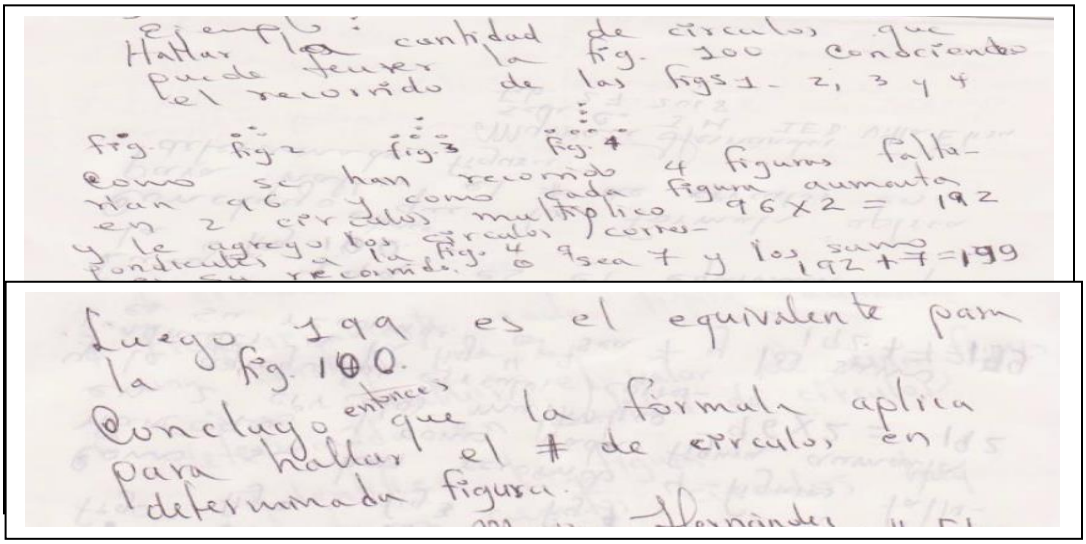


Figura 6. Producción de una profesora de básica primaria que evidencia una generalización aritmética sofisticada

Es clave destacar el sorprendente parecido de la producción sofisticada de esta profesora con la producción de Yaneth analizada anteriormente. Recordemos que la estudiante aborda una secuencia numérica con apoyo tabular, mientras que esta profesora trabaja sobre una secuencia figural con apoyo tabular. En su producción se observa que Yaneth se ancla en 17 que corresponde al Término 6. Por su parte, en su respuesta se observa cómo la profesora se ancla en el número de círculos de la Figura 4 (7 círculos). Ella dice: *"*96 *es lo que le hace falta a* 4 *para llegar a* 100 *y cada figura aumenta de a* 2, *entonces lo que hago es multiplicar* 96×2 *y a ese resultado le sumo* 7 *que son los círculos de la figura 4"*. El hecho de contar con índices perceptivos generalizables en las secuencias figurales, propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, articulación que viene a constituir un aspecto clave en el desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2010, 2013, 2018a; Vergel, 2015, 2016a, 2016c; Vergel y Rojas, 2018), pues la descomposición de figuras permite la creación de relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas y hacer cálculos *sin distinguir entre éstas* (esto es lo que Descartes llamó lo *analítico*). Como en el caso de la producción de Yaneth, aquí también emerge un tipo de relaciones, basado en una mirada estructural de la secuencia, que confiere un carácter algebraico a lo que se llama pensamiento relacional (Molina, 2009).

Observemos que su testimonio hacia el final, *"Concluyo entonces que la fórmula aplica para hallar el número de círculos en determinada figura"*, sugiere pensar, aquí también, en la *deducción primitiva o incipiente*, la cual, en este caso, proviene de considerar su actividad perceptual sobre el número de círculos en cada una de las cuatro primeras figuras y de un análisis

de cómo éstas cambian (ella dice "*entonces lo que hago es multiplicar* 96×2 *y a ese resultado le sumo* 7 *que son los círculos de la figura 4").* Si bien la forma de predicación algebraica es general, y en tal sentido necesitaríamos las cantidades indeterminadas, este tipo de deducción que propongo quiere enfatizar el hecho de que, aun cuando la deducción en ella misma no implica un pensamiento algebraico, la producción sugiere que estaría muy cerca de este tipo de pensamiento o confundirse con éste.

La profesora procede desde un contexto aritmético y su fórmula es aritmética. No obstante, su producción hacia el final testimonia que esta fórmula aplica para calcular el número de círculos en *determinada figura,* lo cual indica que la fórmula encontrada ha sido deducida de las premisas de la tarea. De otra parte, esta fórmula le permite hallar el número de círculos de cualquier figura. Una vez más, estaríamos ante la presencia de una deducción incipiente o primitiva (proto-analiticidad). Para aclarar esta idea, podemos decir que de la expresión aritmética, por ejemplo, $3 + 8 = 8 + 3$ se puede deducir que $3 + 8 + 2 = 8 + 3 + 2$, pero, insisto, la deducción en ella misma no implica un pensamiento algebraico.

Las dos producciones muestran la diferencia, respectivamente, entre el número o imagen a alcanzar (el número correspondiente al Término 15, en el caso de Yaneth, y el número de círculos de la Figura 100, en el caso de la profesora de básica primaria) y el número del término o número de círculos en el que se anclan las dos (el número correspondiente al Término 6 para el caso de Yaneth y el número de círculos de la Figura 4 en el caso de la profesora). El análisis de las producciones en los dos casos hace pensar que podríamos estar ante la presencia de una *generalización aritmética sofisticada* ($T_{\mathrm{a}} + (n - a) \times 3 = T_n$, para el caso de Yaneth, y $T_a + (n - a) \times 2 = T_n$, para el caso de la profesora) o quizás ante la presencia de unas proto-formas de pensamiento algebraico, caracterizadas por una analiticidad incipiente tal y como lo he mostrado a través del análisis semiótico.

Conclusiones y consideraciones finales

Desde las reflexiones epistemológicas y el análisis semiótico planteados en este trabajo, es posible, por tanto, pensar en lo que propongo llamar una *zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico,* zona que estaría caracterizada fundamentalmente por el solapamiento o entrecruzamiento de estas dos formas de pensamiento matemático y que se puede inscribir en el marco de lo que se ha dado por llamar la zona de emergencia del pensamiento algebraico (Radford, 2010).

Si bien el criterio acerca de la analiticidad, tal y como lo he mostrado, ofrece un principio operacional que es útil para distinguir el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico, habría que decir también que el análisis de las estrategias de generalización en la secuencias numéricas con apoyo tabular sugiere que la estructura de la actividad (lo que Radford llama el Particular hegeliano) juega un papel importante en los tipos de generalizaciones que puedan efectuar los estudiantes. Inicialmente nos topamos con formas sofisticadas de generalización aritmética en las cuales la analiticidad no aparece explícitamente. Estas formas sofisticadas de generalización aritmética parecen estar muy cerca de, o evolucionar hacia, proto-formas de pensamiento algebraico (caracterizadas por una proto-analiticidad o analiticidad incipiente o primitiva). En *Lecciones sobre la historia de la filosofía I,* Hegel plantea que:

> Para comprender qué es la evolución, es necesario distinguir dos estados: uno es el que se conoce como posibilidad, como capacidad, lo que yo llamo el ser en sí, la potentia; el otro es el ser para sí, la realidad (actus) (Hegel, 1955, p. 26).

Y más adelante Hegel precisa que "El ser en sí y el ser para sí son los momentos de la actividad; en la acción se encierran, por consiguiente, estos dos momentos distintos" (Hegel, 1955, p. 28). La idea vygotskyana que, a mi manera de ver, se inspira en los planteamientos filosóficos de Hegel es que la naturaleza de la actividad (instrucción u obuchenie, en términos de Vygotsky) haría propulsar un tipo de pensamiento particular o transformar un estrato específico de generalidad. El análisis presentado en este trabajo brinda una pauta para pensar que es posible una evolución desde una generalización aritmética hacia una generalización aritmética sofisticada y, a su vez, hacia una proto-forma de pensamiento algebraico. Justamente una de las contribuciones de Vygotsky (2001) fue posicionar la relación crucial que existe entre la instrucción y la maduración de las funciones psíquicas listas a madurar. El filósofo ruso sostiene que, con una instrucción conveniente (obuchenie), las funciones psicológicas, que están próximas a desarrollarse, podrán hacerlo. Como lo sugiere Radford (2014a, 2014b, 2017), para remarcarlo una vez más, es el contenido o la materialidad de la actividad o labor conjunta lo que hace aparecer el saber algebraico de cierta manera (ésta es la idea de encarnación). En otras palabras, "Toda actividad se encarna en alguna forma, reviste alguna forma real, se "amortigua" en su producto, como su resultado" (Kelle y Kovalzon, 1974, p. 241).

En términos de desarrollar una mayor sensibilidad frente a los procesos de aprendizaje de los estudiantes, considero pertinente continuar auscultando este tipo de deducción incipiente o primitiva (proto-analiticidad) a través de reflexiones epistemológicas en el contexto de las generalizaciones observadas en las secuencias numéricas y figurales con apoyo tabular. Estas reflexiones de corte epistemológico deben tener en cuenta la idea de analiticidad, que caracteriza el pensamiento algebraico, y a su vez no desestimar las generalizaciones inductivas, las cuales parecen apoyar las generalizaciones de tipo aritmético. Más específicamente, propongo investigar detenidamente la *deducción*, pues ésta podría adquirir significados diferentes en la medida en que una proviene de una abducción mientras que la otra procede de una aserción no abductiva.

Este trabajo está en sus primeros pasos y plantea una discusión necesaria para, entre otras cuestiones, aportar en el desarrollo de una sensibilidad didáctica que nos permita identificar formas de pensamiento de nuestros estudiantes que han quedado invisibilizadas o, para decirlo crudamente, que no hemos sido capaces de comprender, pues quizás no hemos atendido didácticamente lo que nuestros estudiantes producen o nos quieren comunicar. Me parece que se abre una avenida de trabajo e investigación que es necesario recorrer.

El horizonte investigativo de diferenciar entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico se constituye en un verdadero desafío, si aceptamos que la aritmética ya está preñada de un carácter algebraico (Carraher & Schliemann, 2007). Mi insistencia es que es posible, tal y como lo he mostrado, identificar generalizaciones aritméticas muy sofisticadas, o quizás proto-formas de pensamiento algebraico, en los primeros grados de las que ni siquiera somos conscientes, dada la limitación del pensamiento aritmético que se ha adoptado con frecuencia en la investigación sobre álgebra temprana. Dicha limitación debe convertirse en una potencialidad si, por ejemplo, se considera un vínculo explícito entre el pensamiento proporcional y el pensamiento algebraico. La experiencia educativa sugiere que en los currículos escolares se adolece de una tematización acerca de las relaciones entre el pensamiento proporcional y el pensamiento algebraico. En este sentido, me parece que el nexo metafórico histórico entre las proporciones y el álgebra es otro aspecto interesante para explorar, tal y como aparece

brevemente, y quizás de manera implícita, en la alusión al pensamiento babilónico. De hecho, Vergel y Rojas (2018, p. 21) señalan que:

> […] desde la aritmética es posible trabajar con cantidades desconocidas y con procesos de variación, por ejemplo, desde la proporcionalidad —en tanto relación entre magnitudes, que además posibilita una conexión con la geometría—, desde el reconocimiento y uso de «unidades múltiples» variables, que pocas veces es tematizado en el trabajo de aula.

Las actividades aritméticas centradas en el uso de pensamiento relacional (Molina, 2009) podría ser otra fuente de estudio que nos puede ayudar a comprender las filiaciones entre el pensamiento aritmético y el algebraico. Las actividades matemáticas que ponen en juego el pensamiento relacional "representan un cambio fundamental de un foco aritmético —procedimental, centrado en el cálculo de respuestas— a un foco algebraico —estructural, centrado en examinar relaciones—" (Molina, 2009, p. 143). Parece que este tipo de pensamiento puede constituir un eslabón entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico (Vergel y Rojas, 2018). De hecho, la idea de pensamiento algebraico que se ha caracterizado en este trabajo comporta necesariamente el análisis de las relaciones entre variables o cantidades. Y no puede ser de otra manera dado que el componente de analiticidad discutido incluye este tipo de relaciones, es decir, asume una mirada estructural (aspecto que le confiere carácter algebraico al pensamiento relacional) exigida, justamente, para llevar a cabo conscientemente procesos de deducción.

Agradecimiento

Quiero expresar un especial agradecimiento al Dr. Luis Radford por su permanente interacción conmigo, materializada en discusiones teóricas y filosóficas, las cuales han posibilitado concretar esta producción académica.

Bibliografía y referencias

Ainley, J. (1999). Doing algebra-type stuff: Emergent algebra in the primary school. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 9–16). Haifa, Israel: PME.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking (*editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), pp. 267- 299.

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal.* México: Siglo XXI editores.

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization.* New York: Springer.

Carraher, D. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Descartes, R. (1954). *The geometry*. New York: Dover. [Original work published 1637].

Descartes, R. (1983). *Discurso del método*. *Reglas para la dirección de la mente*. Barcelona: Ediciones Orbis, S.A.

Eco, U. (1988). *Signo*. Barcelona: Labor.

Fowler, D. (1994). Could the Greeks have used mathematical induction? Did they use it? Critical remarks on an article by S. Unguru. *Physis, 31,* 253-265.

Hegel, G. (1955). *Lecciones sobre la historia de la filosofía I.* México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Holquist, M. (1994). *Dialogism: Bakhtin and his world*. London: Routledge.

Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical logic.* Moscow: Progress Publishers.

Kaput, J. (1998). Teaching and learning a new algebra with understanding. Dartmouth, ma: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D.W. Carraher, & M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–55). New York: Routledge.

Kelle, V. y Kovalzon, M. (1974). *Sociología marxista. Ensayo sobre la teoría marxista de la sociedad*. Buenos Aires: Cartago.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Luria, A.R. (1987). *Desarrollo histórico de los procesos cognitivos.* Madrid: Akal.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/ roots of algebra.* Milton Keynes, UK: Open University Press.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Otte, M. (2003). ¿Does mathematics have objects? ¿In what sense? *Synthese, 134*(1-2), 181-216.

Platón (1983). *Diálogos* (M. J. Ribas, Trad.). Madrid: Sarpe.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-63). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. En: *ZDM Mathematics Education, 40:* 83-96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives,* pp. 303-322. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*, pp. 3-12. Granada, España: Comares.

Radford, L. (2014a). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132-150.

Radford, L. (2014b). On teachers *and* students: An ethical cultural-historical perspective. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 (Plenary Conference)*, Vol. 1, pp. 1-20. Vancouver, Canada: PME.

Radford, L. (2017). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B.

D'Amore y L. Radford (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial UD.

Radford, L. (2018a). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12- year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer.

Radford, L. (2018b). Semiosis and Subjectification: The Classroom Constitution of Mathematical Subjects. In Presmeg, N., Radford, L., Roth, M., & Kadunz, G. (Eds), *Signs of signification. Semiotics in mathematics education research* (pp. 21-35). Cham, Switzerland: Springer.

Rideout, B. (2008). *Pappus reborn. Pappus of Alexandria and the changing face of analysis and synthesis in late antiquity*. Master of Arts in History and Philosophy of Science (Thesis). University of Canterbury.

Secretaría de Educación Distrital, SED, (en prensa). *Propuesta pedagógica en fortalecimiento curricular para el desarrollo de aprendizajes a lo largo de la vida con énfasis en el desarrollo del pensamiento lógico matemático.* Bogotá: SED.

Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*, pp. 87-107. Berlín: Springer-Verlag.

Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular Early-Algebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de Educación Primaria: Una mirada al proceso matemático de generalización. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Bogotá: Asocolme.

Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios, 39*(1), 65-76.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergel, R. (2016a). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria: aspectos a considerar.* Bogotá: Editorial UD.

Vergel, R. (2016b). Algunas notas acerca del desarrollo del pensamiento algebraico temprano. In M. Iori (Ed.), *La Matematica e la sua Didattica/Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore,* pp. 509-512. Bologna: Pitagora Editrice.

Vergel, R. (2016c). El gesto y el ritmo en la generalización de patrones. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas, 73*, 23-31.

Vergel, R. y Rojas, P. J. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*. Bogotá: Editorial UD.

Viète, F. (1983). *The analytic art*. New York: Dover [work published 1591].

Vygotsky, L. S. (1979). Consciousness as a problem in the psychology of behavior. *Soviet Psychology, 17*(4), 3-35.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language* (edición revisada y editada nuevamente por A. Kozulin). Cambridge, Massachusetts: The mit Press. [Obra original publicada póstumamente en ruso en 1934 y en inglés en 1962].

Vygotsky, L. S. (2001). *Obras escogidas* (Vol. 2). Madrid, España: Visor.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona: Paidós.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desarrollo de estándares de matemáticas y finanzas funcionales en adolescentes

Claudia María **Lara** Galo
Coordinadora de matemáticas
Fundación DECA
Guatemala
Claudiamaria.Laragalo@gmail.com

Resumen

Enfocándonos en el contexto en el que se desenvuelven los jóvenes del altiplano guatemalteco, proponemos actividades que les permitan manejar conceptos relacionados con finanzas funcionales para que los apliquen en establecer planes para ahorrar y cumplir sus metas de estudio o trabajo. Las actividades se diseñan para atender a sus necesidades e intereses y desarrollar lo que los empleadores han identificado como estándares mínimos de matemáticas y finanzas funcionales para tener éxito en la vida laboral. Durante el curso se presentan las actividades que se han utilizado en diferentes programas desde modalidades presenciales hasta radiales. Además se comparten experiencias de su aplicación con los jóvenes y sus docentes: logros y dificultades.

Palabras clave: educación matemática, finanzas, estándares, emprendimiento en jóvenes

Justificación

Según los resultados que comparte el Ministerio de Educación de Guatemala en su informe de resultados de la evaluación a graduandos de 2018, los logros del dominio de contenido matemático de los egresados de la secundaria del sistema educativo nacional reflejan que apenas el 11% de los graduandos tienen un dominio de las habilidades esperadas y conocen los temas matemáticos mínimos. Al egresar, con un promedio de 19 años cumplidos, los estudiantes pueden proseguir estudios en la universidad, buscar trabajo o emprender para obtener ingresos por su cuenta. El ingreso a la universidad depende de ser admitidos luego de aprobar varias pruebas escritas y de la capacidad de pago de los estudiantes. El acceso al trabajo varía según cada joven cumpla o no los requisitos esperados por los empleadores y el organizar una microempresa se logra con ideas claras, sanos hábitos financieros y mucha voluntad. Es importante señalar que, además, la población cubierta por el sistema educativo no llega a ser el 25% del total de jóvenes que deberían cursar la secundaria. Muchos factores inciden en esta

realidad ya que la pobreza, la falta de cobertura de institutos secundarios oficiales o la mala atención que en dichos institutos se ofrece a los jóvenes limitan el ingreso y favorecen la deserción. Ante esta realidad y sabiendo que hay una fuerte migración ilegal de jóvenes a los Estados Unidos de América, desde hace algunos años ciertas entidades no gubernamentales nacionales e internacionales han orientado sus esfuerzos a formar a los jóvenes para que además de alcanzar los logros (que pueden estar expresados en competencias o en estándares) de matemáticas, puedan desarrollar contenidos y habilidades de finanzas funcionales.

En el marco de estos esfuerzos, un conjunto de siete organizaciones no gubernamentales (ONG)[1] nacionales e internacionales propone un diplomado, de un año de duración, para el emprendimiento: Proyecto Puentes. Dicho diplomado compuesto por cursos variados (que cubren temas como autoestima, identidad, educación sexual y salud, valor del trabajo en equipo, emprendimiento y similares) se trabaja en sesiones fuera de la escuela con facilitadores preparados para coordinarlo y para acompañar a los participantes apoyándoles y orientándoles para que apliquen lo que van aprendiendo. El diplomado es una de las tantas posibles respuestas a las necesidades de los jóvenes del altiplano guatemalteco. Se orienta a desarrollar en ellos, dentro o fuera del sistema escolar, competencias para la vida, competencias laborales y competencias para el emprendimiento. Este minicurso trata específicamente del módulo, dentro del diplomado, para la formación de competencias relacionadas con las finanzas funcionales.

Propuesta del módulo

La propuesta de un módulo diseñado específicamente para lograr que los jóvenes tengan conocimientos, hábitos y habilidades para reconocer oportunidades y generar recursos, manejarlos y mantenerlos, entre otras cosas, podría ser redundante si los adolescentes asistieran a la escuela secundaria (conocida como "el instituto" en Guatemala) y allí se formaran integralmente. Como explicamos, la mayoría de jóvenes no asiste al instituto y, de los que asisten, pocos logran las competencias matemáticas mínimas. Se vuelve entonces, prioritario, sobretodo para satisfacer las necesidades acuciantes de los hombres y mujeres de entre 15 y 24 años de edad que deben tener recursos para sobrevivir, proponer el curso con propósitos claros, metodología y recursos efectivos y medios para evaluar impacto real.

En consenso con las ONG que han propuesto el diplomado y que tienen varios proyectos dirigidos a jóvenes en la región del altiplano guatemalteco, para orientar y definir el módulo de formación en finanzas funcionales se toman en cuenta:

a. Las competencias básicas para la vida adaptadas de lo que instituciones internacionales como la Organización para la cooperación y el desarrollo económicos (OCDE) o el Banco mundial (BM) proponen y que United States Agency for International Development (USAID) integra en sus programas y documentos (ver anexo A).

b. Los estándares internacionales y nacionales de matemáticas, el currículo nacional base, CNB, relacionado con los temas de productividad y desarrollo, emprendimiento, matemáticas y contabilidad básica (ver Anexo B).

c. Como elemento novedoso se toma en cuenta lo que los empleadores de la región del altiplano guatemalteco, donde se implementará el diplomado, sugieren o esperan de sus futuros empleados.

[1] USAID, World Vision, FUDI, Vitrubian consulting, Juárez y asociados, Akebi, Fundasistemas

Con esos insumos se plantean metas de formación, indicadores de logro y contenidos:

Competencias que desarrolla	*Estándar educativo*	*Indicador de logro*
Aplica matemáticas funcionales para la toma de decisiones. Elabora presupuestos en diversas actividades y procesos de producción.	Calcula el balance de ingresos y egresos para llevar el control financiero según un presupuesto. Calcula la relación entre gastos y dinero disponible como parte del presupuesto personal. Calcula el presupuesto considerando el ahorro y otras situaciones emergentes.	Establece un presupuesto personal.

Tabla 1. Competencias, estándares e indicador de logro 1.

Contenido 1: El dinero y tú (qué es y cómo elaborar un presupuesto).

Competencias que desarrolla	*Estándar educativo*	*Indicador de logro*
Desarrolla habilidad para tomar decisiones en sus actividades económicas. Desarrolla el hábito de ahorrar. Tiene la capacidad de planificar en proyectos alternos.	Identifica actores y elementos importantes de su comunidad. Identifica oportunidades laborales en su entorno.	Identifica fuentes de ingreso éticas de acuerdo a sus habilidades. Enuncia su vocación. Valora un proceso de ahorro.

Tabla 2. Competencias, estándares e indicadores de logro 2.

Contenido 2: Tu trabajo y producción, tu vocación (formas éticas y satisfactorias de generar ingresos).

Competencias que desarrolla	*Estándar educativo*	*Indicador de logro*
Analiza registros para tomar decisiones informadas. Administra adecuadamente sus ahorros, inversiones y préstamos. Tiene una cuenta de ahorro que alimenta al menos, trimestralmente.	Compara datos en tablas. Analiza y compara información para tomar decisiones.	Cuantifica lo que necesita para ahorrar para realizar un proyecto específico. Define un plan de ahorro trimestral o mensual. Decide sobre ahorro, préstamos e inversiones.

Tabla 3. Competencias, estándares e indicadores de logro 3.

Contenido 3: Planifica tu futuro, organiza tus finanzas (cómo manejar préstamos, créditos, inversiones).

Competencias que desarrolla	*Estándar educativo*	*Indicador de logro*
Valora el pago de impuestos consciente de su importancia para contribuir a la comunidad.	Selecciona y maneja los dispositivos y sus aplicaciones digitales según sus necesidades personales y laborales.	Enunciar instituciones que recolectan impuestos. Explicar el uso de impuestos. Valorar el pago de impuestos.

Tabla 4. Competencias, estándares e indicadores de logro 4.

Contenido 4: Responsabilidad y compromiso, paga impuestos (ciudadanía e impuestos).

La metodología es, quizás, el reto más grande. Los estándares e indicadores de logro dirigen la atención a contenidos de aritmética fundamental. Este tema se estudia, sin mayor éxito, en el nivel primario. Sacar porcentajes y sus aplicaciones a impuestos y tasas bancarias, aplicar proporciones así como manejar fracciones, moneda y sus equivalencias, y analizar pasivos, activos, deudas, etcétera, no son temas avanzados pero sí son necesarios y conocido es que los jóvenes no los dominan. Es muy importante organizar sesiones de aprendizaje diferentes a las tradicionales clases de matemáticas a las que los jóvenes están asistiendo o han asistido de forma indiferente, realizando actividades memorísticas sin sentido para ellos. Así, para el primer módulo se redacta una guía de actividades para los participantes y una guía para los facilitadores. En dichas guías se plantean varias actividades que, a lo largo del diplomado, proponen y orientan al joven para realizar un plan de vida integrando lo que cada módulo le aporta.

En el módulo de las finanzas funcionales la metodología propone actividades de aprendizaje contextualizadas en cuanto al entorno cotidiano de los jóvenes desde la geografía hasta las tradiciones de grupos culturales de la región. Cada uno de los temas se introduce con un reto o problema que llame la atención de los jóvenes ya sea porque les atañe directamente o porque les ofrece una oportunidad para su futuro. Se trabaja en equipos para dar la oportunidad de practicar diferentes roles (coordinar, redactar, expresar ideas oralmente, ordenar y manejar material, trabajar a tiempo, etcétera) y de generar diálogo usando terminología matemática o financiera. Se favorece el uso de tecnología para encontrar y compartir información (tecnología para la información y la comunicación TIC), para aprender (tecnología para el aprendizaje y la comunicación TAC) usando aplicaciones y software variado para organizarse y empoderar a cada joven (tecnología para el empoderamiento y la participación TEP). Más allá de compartir teoría, el módulo orienta a los jóvenes a observar a su alrededor las fuentes de información, de generación de recursos y a plantear sus metas e ideas en un plan de vida integral. En todo el curso hay oportunidades para evaluar los conocimientos que se van logrando y las habilidades que se van desarrollando. Debido a la edad y posibilidades de los jóvenes, es importante que tengan formas de autoevaluación que les permitan redirigir sus acciones para lograr sus metas. En el módulo encuentran instrumentos y actividades para conocer lo que han avanzado según los propósitos del curso y del diplomado.

En resumen, lo que encuentra cada joven en su guía es:

a. Un reto contextualizado que deberá resolver en grupo
b. Vocabulario indispensable y fuentes de información
c. Oportunidades y recursos en el entorno que deberá identificar
d. Espacio para definir sus metas y propósitos de vida relacionados con el tema
e. Instrumentos para evaluar sus logros y redirigir sus acciones

Logros y pendientes

Inicialmente se realiza en 2017 un plan piloto con 300 jóvenes. Para implementar el plan se forma a los facilitadores utilizando un modelo que denominamos ARR consistente en que el formador o la formadora de los facilitadores actúa (A) o modela una vivencia como la que los jóvenes encontrarán en sus guías para luego dar oportunidad a los facilitadores de reflexionar (primera R) acerca de la misma y comprender los elementos teóricos de las actividades de aprendizaje seleccionadas. Luego, ya en el aula, los facilitadores reaccionarán (la segunda R) replicando, ajustando o mejorando las actividades con los jóvenes. Se les solicita, sobretodo porque es un plan piloto, que registren sus logros, evalúen el material y cómo los jóvenes reaccionan. A los participantes del plan piloto se les aplica una prueba de contenido de acuerdo a los estándares específicos y también una escala de actitud. Ambos instrumentos se realizan antes y después del diplomado.

El plan piloto da información para mejorar el diplomado y, finalmente, en 2018 se atiende 6,035 adolescentes del altiplano guatemalteco. Los resultados de la implementación aún están en proceso de organización y análisis. Sin embargo, pronto, el modelo del diplomado llama la atención de otras ONG que reaccionan al ver la orientación y los contenidos del diplomado y cómo los jóvenes se expresan de los cursos que van recibiendo. El Instituto guatemalteco de educación radial (IGER), adapta el diplomado y el curso de finanzas logrando formar a 4,205 jóvenes que ya formaban parte de sus programas semipresenciales. También los resultados están pendientes de análisis aunque estudios preliminares aún no publicables evidencian mejora en la autopercepción de los jóvenes en cuanto a la posibilidad de trazarse metas y lograrlas así como interés en formarse en los temas de finanzas funcionales para emprender, generar recursos y saber cómo gastar su dinero de forma adecuada además de aumento de contenidos básicos y de finanzas. Algunas de las conclusiones y recomendaciones que resaltan en el borrador del resumen ejecutivo –aún en proceso de construcción y cuya divulgación no es permitida en este momento- se refieren a la metodología y materiales educativos indicando que predomina la valoración positiva de los distintos entrevistados (participante, facilitadores, organizaciones ejecutoras) acerca del diseño curricular, de los temas abordados por los módulos y de la mediación pedagógica de los materiales educativos. Se valida la importancia del módulo ¿Quién soy? como un buen inicio del proceso y se reconoce la utilidad de los demás módulos particularmente el de las finanzas funcionales. Los resultados cuantitativos (pre y postest) y cualitativos de la evaluación confirman diferencias significativas en el desarrollo de las competencias básicas para la vida propuestas por el diplomado. Entre las sugerencias destaca la necesidad de continuar con el perfeccionamiento de una metodología de evaluación de las competencias para la vida y la interpretación de los niveles de aprendizaje alcanzados en este tipo de programas formativos.

Durante el minicurso se modelará la metodología que ha sido bien aceptada haciendo énfasis en aquellas técnicas valoradas como exitosas y en la importancia de la relación facilitador – joven participante.

Referencias y bibliografía

Banco Mundial (2005). *Ampliar oportunidades y construir competencias para los jóvenes: Una agenda para la Educación Secundaria*. Washington, D.F.

Ministerio de Educación de Guatemala. (2018). *Currículo nacional base. Nivel básico.* Guatemala.

_____ (2019). *Resultados de la evaluación de graduandos 2018*. Guatemala.

OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). (2005). *La definición y selección de competencias*. Resumen Ejecutivo. Paris. Disponible en: http://www.deseco.admin.ch/

USAID (United States Agency for International Development). (2008). *Investigación nacional sobre competencias básicas para la vida: Un estudio cualitativo*. Guatemala.

_____. (2017). *Propuesta para los estándares laborales para programas de formación dirigidos a jóvenes*. Proyecto Leer y Aprender. Guatemala.

Apéndice A
Competencias básicas para la vida



Figura 1. Competencias básicas para la vida definidas para Guatemala.

Apéndice B
Estándares en matemáticas básicas y finanzas funcionales

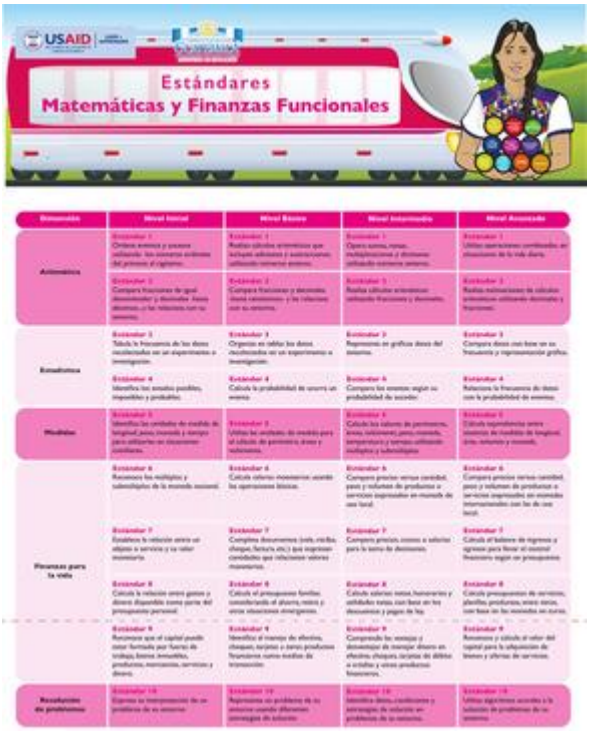
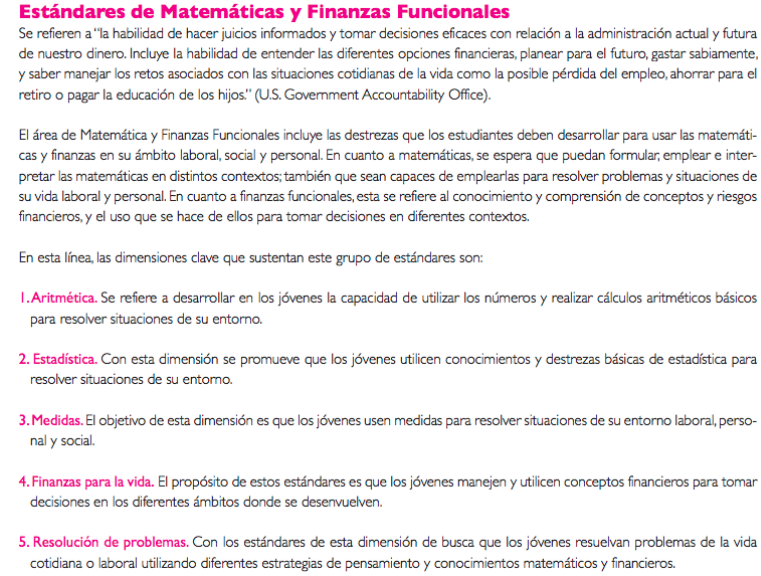


Figura 2. Estándares de matemáticas y finanzas funcionales



Estándares de Matemáticas y Finanzas Funcionales

Se refieren a "la habilidad de hacer juicios informados y tomar decisiones eficaces con relación a la administración actual y futura de nuestro dinero. Incluye la habilidad de entender las diferentes opciones financieras, planear para el futuro, gastar sabiamente, y saber manejar los retos asociados con las situaciones cotidianas de la vida como la posible pérdida del empleo, ahorrar para el retiro o pagar la educación de los hijos." (U.S. Government Accountability Office).

El área de Matemática y Finanzas Funcionales incluye las destrezas que los estudiantes deben desarrollar para usar las matemáticas y finanzas en su ámbito laboral, social y personal. En cuanto a matemáticas, se espera que puedan formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos; también que sean capaces de emplearlas para resolver problemas y situaciones de su vida laboral y personal. En cuanto a finanzas funcionales, esta se refiere al conocimiento y comprensión de conceptos y riesgos financieros, y el uso que se hace de ellos para tomar decisiones en diferentes contextos.

En esta línea, las dimensiones clave que sustentan este grupo de estándares son:

1. **Aritmética.** Se refiere a desarrollar en los jóvenes la capacidad de utilizar los números y realizar cálculos aritméticos básicos para resolver situaciones de su entorno.

2. **Estadística.** Con esta dimensión se promueve que los jóvenes utilicen conocimientos y destrezas básicas de estadística para resolver situaciones de su entorno.

3. **Medidas.** El objetivo de esta dimensión es que los jóvenes usen medidas para resolver situaciones de su entorno laboral, personal y social.

4. **Finanzas para la vida.** El propósito de estos estándares es que los jóvenes manejen y utilicen conceptos financieros para tomar decisiones en los diferentes ámbitos donde se desenvuelven.

5. **Resolución de problemas.** Con los estándares de esta dimensión de busca que los jóvenes resuelvan problemas de la vida cotidiana o laboral utilizando diferentes estrategias de pensamiento y conocimientos matemáticos y financieros.

Figura 3. Estándares de matemáticas y finanzas funcionales

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La idoneidad didáctica en la formación de profesores de matemáticas

Adriana **Breda**
Universitat de Barcelona
España
adriana.breda@ub.edu
Vicenç **Font** Moll
Universitat de Barcelona
España
vfont@ub.edu
Carmen Eulalia **Calle** Palomeque
Universidad de Cuenca
Ecuador
eulalia.calle@ucuenca.edu.ec

Resumen

En este minicurso, en un primero momento se presentará una actividad con el propósito de conocer los aspectos que los participantes consideran relevantes para implementarla en sus clases; en un segundo momento, se comentan las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas que permiten dar una primera respuesta a lo que se entiende por la mejora de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y se observa cuáles han sido utilizadas por los asistentes. En un tercer momento, se profundiza en la pregunta ¿Cómo debe ser una clase de matemáticas idónea? y se introducen los criterios de idoneidad didáctica, con sus componentes e indicadores, como respuesta a esta pregunta. Por último, se trabajan tareas que se han utilizado en la formación de profesores para introducir alguno de dichos criterios y componentes.

Palabras clave: didáctica, matemática, idoneidad, formación, profesores, reflexión.

Introducción

La Didáctica de las Matemáticas es una ciencia que debe responder a dos demandas distintas. La primera demanda es que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la segunda demanda es que éstos sirvan para guiar su mejora. Se trata de dos demandas diferentes, pero estrechamente relacionadas, ya

que sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es posible conseguir su mejora (Font y Godino, 2011).

Algunas de las tendencias actuales sobre la formación de profesores proponen la investigación del profesorado y la reflexión sobre la práctica docente como un elemento clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. En esta línea de potenciar la reflexión del profesor sobre su propia práctica, el constructo criterios de idoneidad didáctica (CI) (y su desglose en componentes e indicadores), propuesto en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2019), puede ser utilizado como una herramienta para organizar la reflexión del profesor – tal como se está haciendo en diferentes procesos de formación en España, Ecuador, Panamá, Chile y Argentina (Breda, Font, Lima & Pereira, 2018).

La noción de CI es una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". A posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado.

Los criterios de idoneidad didáctica (Idoneidad Epistémica, Idoneidad Cognitiva, Idoneidad Interaccional, Idoneidad Mediacional, Idoneidad Emocional e Idoneidad Ecológica) para que sean operativos, exige definir un conjunto de componentes e indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas.

En este mini curso, primero se comentará una actividad con el propósito de conocer los aspectos que los participantes consideran relevantes para implementarlo en sus aulas; a continuación, se comentan las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas que permiten dar una primera respuesta a lo que se entiende por calidad de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y se observa cuáles han sido utilizadas por los asistentes. Posteriormente, se profundiza en la pregunta ¿Cómo debe ser una clase de matemáticas idónea? y se introducen los criterios de idoneidad didáctica, con sus componentes e indicadores, como respuesta a esta pregunta. Por último, se trabajan algunas tareas que se han utilizado en la formación de profesores para introducir alguno de dichos criterios y componentes.

Marco Teórico

En el campo de la Educación Matemática no hay consenso sobre los métodos para la valoración y mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta problemática puede ser afrontada desde una perspectiva positivista o desde una consensual (Font y Godino, 2011). Desde la primera, la investigación científica realizada en el área de Didáctica de las Matemáticas nos dirá cuáles son las causas que hay que modificar para conseguir los efectos considerados como objetivos a alcanzar. Desde la perspectiva consensual, aquello que nos dice cómo guiar la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad educativa, cuando ésta está orientada a conseguir un consenso sobre "lo que se puede considerar como mejor".

La noción de CI propuesta por el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero y Font, 2019) se posiciona en la perspectiva consensual. La opción de considerar que el constructo idoneidad didáctica debe contar con un cierto grado de consenso, aunque sea local, da una manera de generar criterios parciales que permitan responder a la pregunta ¿qué se debe entender por mejora de la enseñanza de las matemáticas?

Para responder a esta pregunta, es cuestión de explorar, en una primera fase, cómo se ha generado un conjunto de tendencias y principios que gozan de un cierto consenso en la comunidad de la Educación Matemática; buscando comprender, qué papel juegan los resultados de la investigación didáctica en la generación de dichos consensos. En una segunda fase, se tiene que relacionar, relativizar, subordinar, etc., estos principios para generar una lista de criterios de idoneidad didáctica, con sus componentes e indicadores, que sirvan al profesor para organizar la reflexión sobre su práctica (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

La noción de idoneidad didáctica es, pues, una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los CI pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. En el EOS se consideran los siguientes criterios de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010): 1)Idoneidad Epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas"; 2) Idoneidad Cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar; 3) Idoneidad Interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4)Idoneidad Mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; 5) Idoneidad Emocional, para valorar la implicación (intereses, motivaciones,…) de los alumnos durante el proceso de instrucción; 6)Idoneidad Ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

Los CI se desglosan en un conjunto de componentes e indicadores observables, que permiten valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Por ejemplo, hay un consenso de que es necesario implementar unas "buenas" matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por ello, si no concretamos este principio en componentes e indicadores que lo hagan operativo. En Breda y Lima (2016), Seckel (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

Metodología

La razón por la cual los CI funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, se puede explicar como mínimo de dos maneras diferentes. Una primera posible explicación está relacionada con los orígenes del constructo, ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de Didáctica de las Matemáticas. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores funcionen como regularidades en el discurso del profesor es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas

ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Otra explicación es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma como regularidades en su discurso simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable. En ese sentido, en la formación inicial de profesores, y también en la formación continua, parece razonable que, en lugar de presentar los criterios de idoneidad como principios ya elaborados, se creen espacios para su generación como resultado de consensos en el grupo. Siguiendo esta última idea, el minicurso sigue las siguientes fases:

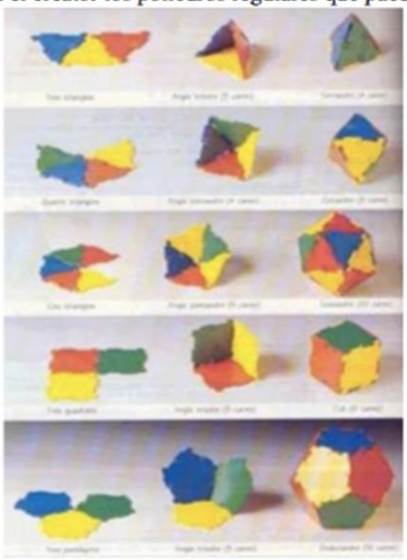
a) *Análisis de casos (sin teoría)*. Se propone a los participantes la resolución y el análisis didáctico de una tarea y se les pide que comenten si la utilizarían ellos y por qué. Se trata de que hagan un análisis a partir de sus conocimientos previos. En particular, la actividad propuesta es la de la Figura 1;

b) *Tendencias en la enseñanza de las matemáticas*. El episodio analizado se ha seleccionado de manera que los asistentes apliquen de manera implícita alguna de las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas. A continuación, se hace un resumen de las principales tendencias en la enseñanza de las matemáticas y se comentan las que han sido utilizadas por los asistentes.

Con relación a las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas se comenta que son una primera manera, un poco difusa, de observar consensos en la comunidad que se preocupa por la educación matemática. Estas tendencias se pueden considerar como regularidades que se pueden hallar en los discursos sobre la mejora de la enseñanza de las matemáticas, ya que se considera que la enseñanza realizada según estas tendencias es de calidad. Las principales tendencias pueden ser inferidas de las publicaciones más relevantes del área (por ejemplo, *handbooks* sobre investigación en educación matemática) y son: la incorporación de nuevos contenidos, presentación de una matemática contextualizada, dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos (resolución de problemas, modelización matemática etc.), enseñanza y aprendizaje de tipo activo (constructivista), considerar que saber las matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos, principio de equidad en la educación matemática obligatoria y la incorporación de nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC).

CREATOR O POLYDRON

Actividad: a) Construye con el creator los poliedros regulares que puedas



b) Completa la tabla siguiente:

Nombre	Forma de las caras	N.º caras	N.º vértices	N.º aristas	Caras que se juntan en un vértice
tetraedro					
octaedro					
icosaedro					
hexaedro o cubo					
dodecaedro					

b) Calcula para cada uno de los poliedros anteriores el resultado de: caras + vértices - aristas ¿Qué observas?

REFLEXIÓN Y ANÁLISIS DIDÁCTICO

¿Llevarías estas actividades a un aula de matemáticas (Si la respuesta es sí, especifica el curso)? ¿Por qué? (explica las razones por las que crees que se deben implementar o no)

Figura 1. Teorema de Euler

c) *Teoría (criterios de idoneidad*). Se explican elementos teóricos a los participantes, en concreto se les explican los criterios de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores.

Se explica que los criterios de idoneidad (Godino, 2013; Breda, Font y Pino-Fan, 2018) se trata de un constructo multidimensional que se tiene que descomponer en idoneidades

parciales, componentes e indicadores. Para avanzar en esta dirección, se ha considerado que, dado el amplio consenso que generan, los principios del NCTM (2000), reinterpretados, podían ser el origen de algunos de los criterios de idoneidad didáctica, o bien podían contemplarse como componentes suyos.

Se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). La lista completa de los componentes e indicadores para todas las idoneidades se puede consultar en Breda y Lima (2016), Seckel (2016) y en Breda, Pino-Fan y Font (2017) ya que, por cuestiones de espacio no se han podido incorporar en este trabajo.

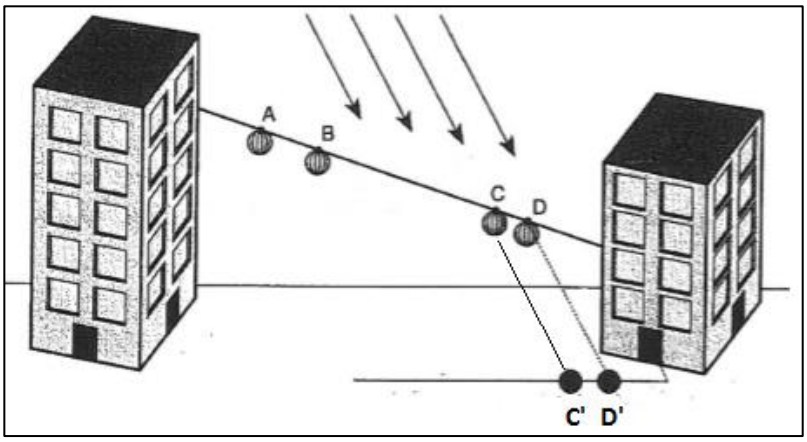
Con relación a los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad se comenta que se necesitan unos descriptores que los hagan operativos ya que, por ejemplo, todos estamos de acuerdo en que hay que impartir unas buenas matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por "buenas matemáticas". También se comenta que, para algunos criterios, los indicadores son relativamente fáciles de consensuar (por ejemplo, para el criterio de idoneidad de los medios) y que, en cambio, para otros criterios la cuestión de ponerse de acuerdo no es tan fácil. Mediante diferentes tareas el grupo va acordando diferentes criterios, las cuales suelen encajar fácilmente con los propuestos en Breda y Lima (2016) y en Breda, Pino-Fan y Font (2017), aunque pueden surgir nuevos componentes.

d) Resolución de tareas usadas en la formación de profesores para hacer emerger algunos de los componentes o indicadores de los CI. Se muestran y resuelven algunas tareas para ilustrar cómo los CI se enseñan en la formación de profesores. Se trata de tareas como la siguiente, relacionada con la idoneidad epistémica, en particular, con el componente "muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar".

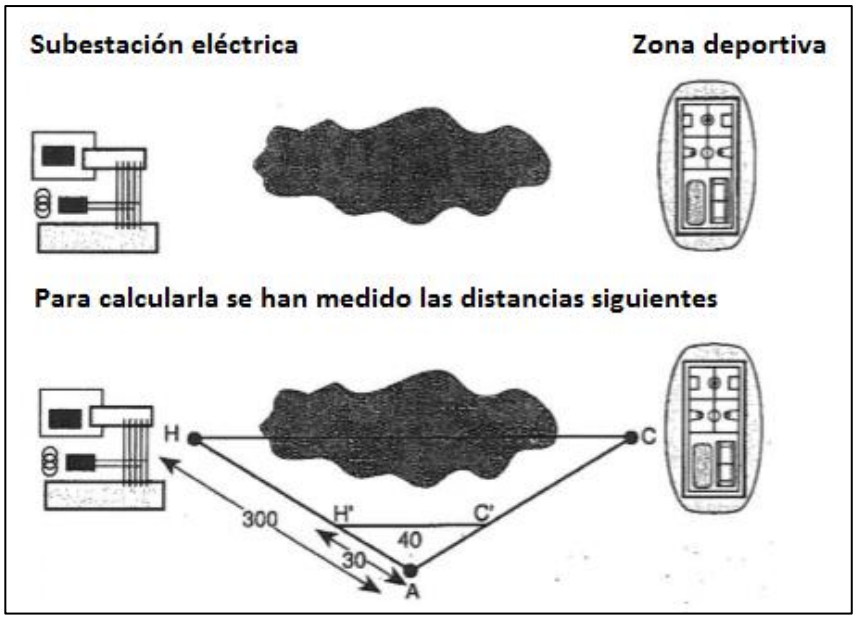
TAREA COMPLEJIDAD DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS (Teorema de Tales)

Las secuencias de tareas que pretenden enseñar el teorema de Tales en la enseñanza básica suelen hacerlo a partir de la idea de figuras semejantes y se llega a que los triángulos en posición de tales, por el hecho de ser semejantes, tienen los lados proporcionales. ¿Un alumno que ha seguido esa secuencia didáctica puede resolver las dos tareas siguientes?

Tarea 1: la tarea representa dos edificios de una calle que celebra las fiestas del barrio y un cable con elementos decorativos (A, B, C y D) de tipo festivo que va de un edificio a otro. Las flechas representan los rayos del sol, C´ es la sombra de C y D' la de D. Sabiendo que AB mide 1,5 metros, que CD mide 0,7 metros y que C'D' mide 0,6 metros, calcula la longitud del segmento de sombra A'B'.



Tarea 2: Una subestación eléctrica tiene que suministrar corriente eléctrica a una zona deportiva. Entre ambas se halla un lago que dificulta la medición de la distancia que las separa. Calcula la distancia que separa la subestación eléctrica de la zona deportiva y explica los instrumentos que utilizarías para realizar esta medición en la práctica.



¿Se trata de dos tareas que necesitan diferentes formulaciones del teorema de Tales? ¿Cómo crees que hay que explicar el Teorema de Tales para cumplir las orientaciones curriculares de la enseñanza básica, las cuales pretenden que el alumno aplique el teorema de Tales a diferentes contextos extra matemáticos?

Figura 2. Tareas sobre la complejidad del objeto matemático Teorema de Tales

e) *Aplicación de los criterios para valorar episodios de aula*. Se propone a los participantes la valoración de la idoneidad interaccional de un episodio descrito en Font, Planas y Godino (2010). En la valoración de este episodio se manifiestan apreciaciones negativas en torno a la práctica profesional del profesor del episodio. Para argumentarlas, se mencionan, entre otros aspectos, el hecho de que el profesor no ha gestionado bien algunas intervenciones de los alumnos o bien que ha creado un clima emocional desfavorable para dos de ellos, o que los ha excluido. Aunque también hay opiniones de que el profesor ha gestionado bien el episodio.

Como resultado de la discusión que se produce, al final se llega a un consenso de que se puede valorar negativamente la gestión del profesor porque ésta ha producido la exclusión de dos de los alumnos.

Conclusiones

La hipótesis que tenemos es que en este minicurso suceda lo mismo que en talleres similares (Breda, Pino-Fan y Font, 2017), en particular: 1) Los participantes, cuando tienen que opinar (sin una pauta previamente dada) sobre una actividad a ser realizada en el aula, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración. 2) Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica. 3) La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias y principios sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-100 (MINECO/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias y bibliografía

Breda, A., Font, V. & Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. & Pereira, M. V. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación, 14*(2), 162 -176

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018) Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda, A., & Lima, V. M. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT, 5*(1), 74-103.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal Of Mathematics Science And Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Font, V. y Godino, J. D. (2011), Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en J. M. Goñi (ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 9-55). Barcelona: Graó.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Godino, J. D. (2013) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 35-40.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school*

mathematics. Reston, VA: NCTM.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática*. Tesis de doctorado no publicada. Barcelona, España: Universitat de Barcelona.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Recursos educativos abiertos para matemáticas: impacto y retos

Edison **de Faria** Campos
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Asociación de Matemática Educativa, ASOMED
Costa Rica
edefaria@gmail.com

Resumen

En las dos últimas décadas hemos sido testigos de la evolución de un movimiento que empezó con el desarrollo de software libre y de código abierto hasta llegar a la creación de recursos libres con fines educativos. La esencia del movimiento hacia Recursos Educativos Abiertos (REA) es la idea simple y potente de que el conocimiento es un bien público y la tecnología ofrece una oportunidad extraordinaria para que todos lo compartan de forma libre y gratuita. Este minicurso se enfocará en aquellos recursos educativos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde tres aristas: contenidos educativos, las herramientas utilizadas para su creación y los principales recursos que facilitan su implementación. Compartiremos algunos casos exitosos de REA y el impacto de ellos en el ámbito educativo.

Palabras clave: Recursos educativos abiertos, Recursos educativos libres, TIC y educación,

Introducción

Los Recursos Educativos Abiertos (REA) o de libre acceso son materiales para la enseñanza, el aprendizaje o investigación abiertos, de libre acceso, gratuitos, públicos y accesibles en la Red bajo licencias que permiten su reutilización, adaptación y distribución gratuitas.

En el 2001 el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) creó la iniciativa MIT OpenCourseWare (OCW), que consiste en dar acceso libre y gratuito en la web a los materiales educativos de todos sus cursos oficiales. En marzo del 2019 alcanzó la cifra de más de 2400 cursos publicados de grado y posgrado y unos 300 millones de visitantes (http://ocw.mit.edu). En el mismo año 2001 se fundó la organización sin fines de lucro Creative Commons, que se dedica a promover el acceso y el intercambio de recursos mediante el desarrollo de instrumentos jurídicos gratuitos que facilitan el uso y el compartir de los recursos creados (https://creativecommons.org).

El término Recursos Educativos Abiertos fue adoptado por primera vez en el Foro Mundial sobre el Impacto de materiales formativos abiertos para la Educación Superior en países en desarrollo, organizado por la UNESCO (2002) en París. En esta ocasión la

definición recomendada para Recursos Educativos Abiertos fue: la disposición abierta de recursos educativos, permitidos por tecnologías de la información y la comunicación, para la consulta, uso y adaptación por parte de una comunidad de usuarios con fines no comerciales (UNESCO, 2002, p. 24). Son materiales para la enseñanza, aprendizaje o investigación que son de dominio público o que se publican con una licencia de propiedad intelectual que permite su uso, adaptación y distribución gratuitos.

De acuerdo con esta definición, los REA no se refieren exclusivamente a recursos digitales, aunque el concepto generalmente se restringe a los materiales de las TIC, como lo ilustra la definición de la OCDE. (Hylen, Van Dame, Mulder, & D'Antoni, 2012).

En 2002, la Fundación Hewlett (William y Floria Hewlett Foundation) inicia su inversión en recursos educativos abiertos que son materiales de enseñanza, aprendizaje e investigación de alta calidad que las personas de todo el mundo pueden utilizar de forma gratuita y modificar. Además la fundación se ha asociado con varios productores de contenido, así como asesores técnicos y gobiernos para apoyar la creación de un ecosistema de grupos de REA y tiene una definición explícita de los REA:

> Lo REA son recursos para la enseñanza, el aprendizaje y la investigación que se encuentran en cualquier medio – digital o de otro tipo – que son de dominio público o han sido liberados bajo una licencia abierta que permite el acceso, uso, adaptación y redistribución sin costo por parte de otros, sin o con pocas restricciones. Los recursos educativos abiertos incluyen cursos completos, materiales para cursos, módulos, libros de texto, transmisión de video, exámenes, software y cualquier otra herramienta, materiales o técnicas utilizadas para apoyar el acceso al conocimiento (Consultado en el sitio web https://hewlett.org/strategy/open-educational-resources/ el 24 de marzo 2019).

Para Willey (2007), abierto significa que un recurso está disponible de forma gratuita y que los cuatro permisos (llamados las 4R por sus siglas en Inglés: Reuse, Rework, Remix y Redistribute) también están disponibles gratuitamente. Estos permisos son:

- Reutilizar (Reuse): el derecho a reutilizar el contenido en su forma inalterada.
- Revisar (Rework): el derecho a adaptar, ajustar, modificar o alterar el contenido.
- Combinar (Remix): el derecho de combinar el contenido original o revisado con otro contenido para crear algo nuevo.
- Redistribuir (Redistribute): el derecho a compartir copias del contenido original, las revisiones o las remezclas con los demás.

En el primer Congreso Mundial sobre REA realizado en París en 2012 (UNESCO, 2012) se elaboró la Declaración de París sobre los Recursos Educativos Abiertos. Las siguientes fueron las recomendaciones dadas a los Estados miembro: fomentar el conocimiento y el uso de los REA; crear entornos propicios para el uso de las TIC; reforzar la formulación de estrategias y políticas sobre REA; promover el conocimiento y la utilización de licencias abiertas; apoyar el aumento de capacidades para el desarrollo sostenible de materiales de aprendizaje de calidad; impulsar alianzas estratégicas a favor de

los REA; promover la investigación sobre los REA; facilitar la búsqueda, recuperación y el intercambio de REA; promover el uso de licencias abiertas para los materiales educativos financiados con fondos públicos.

El segundo Congreso Mundial sobre los Recursos Educativos Abiertos, realizado en setiembre de 2017 en Liubliana, Eslovenia, fue organizado conjuntamente por la UNESCO y el Gobierno de Eslovenia con los siguientes objetivos: examinar soluciones para abordar los desafíos de la integración del contenido y las prácticas de REA en los sistemas educativos de todo el mundo; destacar las mejores prácticas mundiales en cuanto a políticas, iniciativas y expertos en REA y adoptar recomendaciones con miras a la integración transversal de los REA.

El tema del Congreso fue "Los REA para una educación inclusiva y equitativa de calidad: del compromiso a la acción" y el documento final producido en el evento, conocido como *Plan de acción de Liubliana 2017 sobre los REA*, contiene varias recomendaciones de posibles acciones para afrontar los retos que se plantean en el ámbito de los REA (UNESCO, 2017), acciones orientadas a desarrollar la capacidad de los usuarios para encontrar, reutilizar, crear y compartir REA; disponibilidad de los recursos en diversos idiomas; garantizar el acceso inclusivo y equitativo de REA de calidad; desarrollar modelos de sostenibilidad y entornos de políticas de apoyo.

Algunos sitios de REA para matemáticas

Algunos sitios son buscadores de recursos educativos abiertos, otros son sitios de REA, repositores de recursos y algunos de ellos son catálogos de libros de texto abierto o libre.

1. Google

   Como los REA son simplemente recursos educativos que utilizan licencia Creative Commons, podemos utilizar la búsqueda avanzada de Google. Escribimos el tema que queremos buscar, utilizamos búsqueda avanzada en preferencias y en derechos de uso seleccionamos Páginas que se pueden usar, compartir o modificar. Finalmente se activa en Búsqueda avanzada y Google buscará el tema únicamente en páginas que son libres para usar, compartir o modificar, es decir, recursos que usan licencia Creative Commons.

2. OER Commons

   Este es uno de los sitios más populares. Basta entrar el tema, disciplina, nivel educativo y buscar. El sitio permite descubrir, descargar, crear y subir todo tipo de contenido y de herramientas.

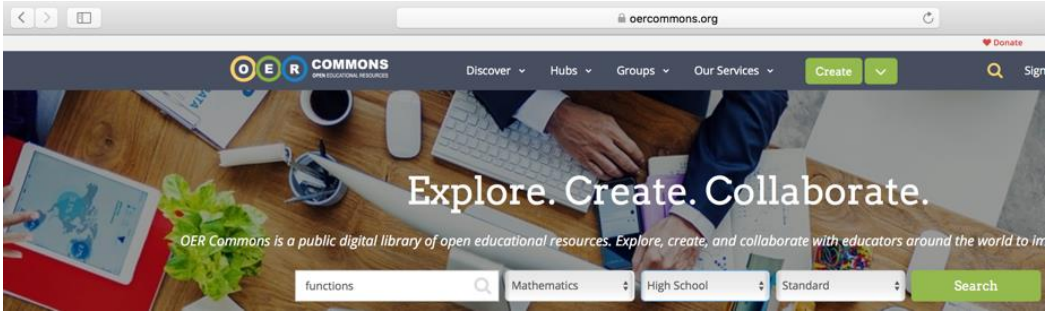


Figura 1. Usando OER Commons para buscar REA.

3. Khan Academy (https://es.khanacademy.org/math)

   Un sitio con muchos videos para matemáticas de nivel básico y medio,

4. PhET Interactive Simulations (https://phet.colorado.edu)

   Fundado en 2002 por el Premio Nobel de Física en 2001 Carl Wieman, el proyecto PhET Interactive Simulations de la Universidad de Colorado Boulder crea simulaciones interactivas de matemáticas y ciencias. Los simulacros de PhET se basan en una extensa investigación educativa y atraen a los estudiantes a través de un entorno intuitivo y de juego donde los estudiantes aprenden a través de la exploración y el descubrimiento.

5. Connexions (https://cnx.org).

   Contiene muchos libros de texto para temas matemáticos. Además contiene un conjunto de herramientas de software gratuito para ayudar a los autores a publicar y colaborar. Los instructores construyen rápidamente y comparten cursos personalizados y los estudiantes exploran los vínculos entre conceptos, cursos y disciplinas.

6. Educacion 3.0 (https://www.educaciontrespuntocero.com)

7. Merlot (https://www.merlot.org/merlot/index.htm).

   Creado por la Universidad Estatal de California, contiene material teórico y estrategias prácticas de aprendizaje. Los docentes y estudiantes de esta universidad son los encargados de compartir la información.

8. MIT Open Course Ware (https://ocw.mit.edu/index.htm)

   Sitio con material pedagógico libre de los cursos del MIT. Existen cursos para aprendizaje autónomo con recursos multimediales interactivos y es para nivel universitario. Podemos buscar recursos por tema, departamento o por número de curso. En el portal del educador existen recursos para docentes. Muchos de estos cursos fueron traducidos por Universia (una red constituida por 1.341 universidades de 23 países, que representan a 19,2 millones de estudiantes y profesores) cuyo sitio es https://www.universia.net.

9. Open Learning Initiative (https://oli.cmu.edu)

   Es una iniciativa de la Universidad Carnegie Mellon y ofrece cursos introductorios sobre teorías de aprendizaje a cargo de docentes de la institución. También ofrece cursos para estudiantes que no son estudiantes regulares de la universidad pero que quieren aprender de forma independiente sin el interés en obtener certificados.

10. TEMOA (http://www.temoa.info/es)

    Es un portal de REA desarrollado por el Tecnológico de Monterrey para la educación universitaria. Categoriza por temas, área de conocimiento, nivel educativo entre otros. También permite crear comunidades.

11. Curriki (https://www.curriki.org)

    Una comunidad que permite crear, compartir y explorar contenidos para la educación elemental, media y secundaria.

12. OpenEd (https://open.umn.edu)

Iniciativa de la Universidad de Minnesota. Es una fuente de libros de texto con licencia Creative Commons para ser descargados y usados gratuitamente. Por ejemplo para matemáticas la página web es https://open.umn.edu/opentextbooks/subjects/mathematics.

Una experiencia novedosa de recursos educativos libres y gratuitos relacionados con las matemáticas es la que se describe en la siguiente sección.

Recursos Libres de Matemáticas (RLM)

En el año 2013 se inició la implementación de la reforma del currículo de matemáticas en Costa Rica aprobado por el Consejo Superior de Educación (CSE) el 21 de mayo del 2012 (MEP, 2012), una reforma que ha recibido la aprobación de varios investigadores lationamericanos (De Faria, 2017; Rosario, Scott & Vogeli, 2015; Planas, 2016; Martínez-Ruiz y Camarena-Gallardo, 2015; Ruiz, 2017, 2018; Borba, Askar, Engelbrecht, Gadaninis, Llinares & Sánchez-Aguilar, 2016; Hernández & Scott, 2018).

Desde los inicios de la implementación del currículo de matemáticas, el Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (PREMCR) ha desempeñado un rol fundamental en varios aspectos relacionados con esta puesta en marcha, entre ellos ha asumido el liderazgo en la elaboración y ejecución de distintos tipos de recursos educativos.

Algunos de estos recursos importantes de mencionar son: el diseño y ejecución de cursos bimodales con sesiones presenciales y en línea para docentes de la educación primaria y secundaria, utilizando la plataforma Moodle, desde el 2012; diseño y ejecución de cursos virtuales para docentes y para estudiantes conocidos como Cursos Masivos Abiertos y en Línea (MOOC por sus siglas en Inglés) desde el 2014, inicialmente utilizando la plataforma Class2go y posteriormente con la plataforma Open edX, cursos considerados pioneros en América Latina. A partir del año 2016 fueron creados recursos educativos en línea para los estudiantes que necesitan realizar pruebas nacionales que los acrediten cuando se egresan de la Educación Secundaria.

Desde el 2017 el PREMCR ofrece cursos virtuales para estudiantes y docentes mediante una nueva modalidad conocida como MiniMOOC. Son cursos que tienen todas las ventajas de los MOOC pero son más compactos, versátiles y autosuficientes, se concentran en pocos temas y pueden realizarse en periodos cortos de tiempo.

Las nuevas necesidades surgidas debido a cambios en las políticas educativas de Costa Rica, principalmente en la forma de evaluar a estudiantes de la educación Primaria y Secundaria y a la participación del país en las pruebas PISA, ha llevado a los integrantes del PREMCR a buscar otras formas innovadoras que sirvan de soporte para docentes y estudiantes dentro de este nuevo escenario, lo que condujo al nacimiento de los Recursos Libres de Matemáticas.

Los Recursos Libres de Matemáticas (RLM) son distintos de los MiniMooc que mencionamos anteriormente y, en general, de los Recursos Educativos Abiertos (REA) en Español y Open Educational Resources (OER) en Inglés. Pero ¿cuáles son los elementos que hacen tan singulares los RLM? ¿Cuáles son sus principales características?

Son totalmente virtuales, de acceso libre, gratuito, el participante no tiene que

matricularse como ocurre con los MOOC, MiniMooc y otros tipos de REA, favorecen el aprendizaje independiente, pueden ser utilizados en cualquier momento, saca provecho de las posibilidades de Internet, contienen recursos con recomendaciones pedagógicas para el planeamiento y gestión de aula de parte del docente. Los videos son cortos y dinámicos y se utilizan para generar aprendizaje o para movilizar y aplicar los conocimientos adquiridos.

Los RLM están organizados por niveles educativos, años 7^0, 8^0 y 9^0 de Tercer Ciclo, 10^0 y 11^0 de la Educación Diversificada. Dentro de cada año la estructura se establece con base en las áreas matemáticas de los Programas y dentro de ellas se incluyen los temas específicos de los mismos. Cada año educativo contiene sus áreas matemáticas de los Programas y en cada área se encuentran los respectivos temas.



Figura 2. Sitio web de Recursos Libres de Matemáticas.

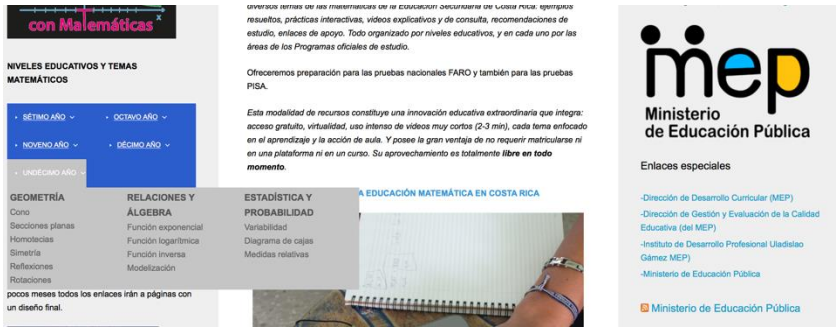


Figura 3. Menú lateral con organización por niveles educativos y temas generales.

Para cada tema se diseña la *Unidad Virtual de Aprendizaje* (UVA) que contiene las siguientes secciones:

- *Inicio tema:* introducción a la unidad
- *Problema*: situación para desencadenar aprendizajes o movilización de estos
- *Solución problema*: solución o soluciones detalladas
- *Desarrollo tema*: explicaciones sobre los conceptos, procedimientos, habilidades o capacidades involucradas
- *Prácticas*: autoevaluación con ítems representativos de la temática, respuestas desarrolladas y realimentación
- *Videos recomendados*: videos elaborados por el PREMCR que apoyan este tema

- *Recursos adicionales*: materiales de otras fuentes que pueden coadyuvar en este tema
- *Glosario*: principales términos y conceptos utilizados en este tema
- *Para docentes*: una sección con recursos y orientaciones para el docente

La sección "Para docentes" incluye las siguientes subsecciones:

- *Inicio*: introducción a los materiales que encontrará el docente
- *Elementos didácticos*: indicaciones sobre los conocimientos, habilidades, capacidades, procesos, niveles de complejidad y enfoques que el problema seleccionado y el tema plantean
- *Otros recursos*: materiales elaborados por el PREMCR o fuentes externas que pueden servir de apoyo al docente para enseñar el tema

Los RLM con sus UVA establecen una novedosa y potente estrategia de apoyo a los estudiantes para el desarrollo de habilidades matemáticas que promuevan capacidades cognitivas superiores y a los docentes para su gestión de aula.

Conclusiones

La implementación de políticas de Recursos Educativos Abiertos ha aumentado en todo el mundo y se fundamenta en el principio de que todo el material que es financiado por recursos públicos debe ser accesible a todos.

Los REA constituyen una alternativa para el derecho al acceso a la información, cultura y derecho a una educación de calidad en el ámbito de la cultura digital. Los REA sirven de soporte para una educación de calidad, equitativa, inclusiva, libre y participativa.

Como se recomienda en el Plan de acción de Liubliana 2017 sobre los REA (UNESCO, 2017) es fundamental capacitar a las personas encargadas de formular las políticas educativas, los docentes, formadores de docentes, investigadores, estudiantes, padres y otras partes interesadas para que se sensibilicen sobre como los REA pueden aumentar los accesos a recursos educativos de calidad, mejorar el rendimiento de los estudiantes y reducir los costos de materiales además de proporcionar habilidades a los usuarios para que participen en la creación de conocimientos. Es fundamental que los docentes, formadores de docentes, investigadores y estudiantes sean capacitados para encontrar, crear, modificar, mantener y compartir REA y que las buenas prácticas de REA sirvan de modelo para los encargados de las políticas educativas en nuestros países.

Referencias y bibliografía

Borba, M., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadaninis, G., Llinares, S. & Sánchez-Aguilar, M. (2016, Junio). Blended learning, e-learning and mobile in Mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM Mathematics Education)*. Springer. DOI 10.1007/s11858-016-0798-4

De Faria, E. (2017). Cursos virtuales masivos para capacitar en matemáticas. *Memorias II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Cali, Colombia.

Hylen, J., Van Dame, D., Mulder, F., & D'Antoni, S. (2012). Open Educational Resources: Analysis of responses to the OECD country questionnaire.*OECD Education Working Papers*, No. 76, OECD Publishing. Retrieved from http://dx.doi.org /10.1787/5k990rjhvtlv-en.

Hernández, L. & Scott, P. (2018). Review of agents and processes of curriculum design, development, and reforms in school mathematics in Costa Rica. *Proceedings of the ICMI Study 24 Conference*. Japan: University of Tsukuba. Descargado de https://drive.google.com/file/d/1za-Jlip112xg53NrZ1szjAOK3rOeTWc0/view el 20de marzo 2019.

Martínez-Ruiz, X. y Camarena-Gallardo, P. (Coord.) (2015). *La educación matemática en el siglo XXI*. México: Instituto Politécnico Nacional.

MEP (2012). Programas de estudio de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.

Planas, N. (Coord.). (2016). *Avances y realidades de la educación matemática*. España: Editorial Graó.

Rosario, H., Scott., P. & Vogeli, B. (Eds.) (2015). *Mathematics and Its Teaching in the Southern Americas*. London: World Scientific Publishing.

Ruiz, A. (Ed.). (2017). *Teacher preparation in Mathematics Education in Central America and the Caribbean*. The cases of Colombia, Costa Rica, Dominican Republic and Venezuela. Switzerland: Springer International Publishing.

Ruiz, A. (2018). *Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de matemáticas que enfatiza capacidades superiores*. México: Comité Interamericano de Educación Matemática. Descargado de https://www.angelruizz.com/wp-content/uploads/2019/02/Angel-Ruiz-Evaluacion-y-pruebas-2018.pdf el 20 de marzo 2019.

UNESCO (2002). *Forum on the Impact of Open Courseware for Higher Education in Developing Countries. Final report.* Descargado de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000128515 el 5 de marzo 2019.

UNESCO (2012). *Declaración de Paris de 2012 sobre los REA.* Congreso Mundial sobre Recursos Educativos Abiertos (REA). Paris. Descargado de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000246687_spa?posInSet=1&queryId=647d4131-2960-45ac-b470-32f49d1d01ea el 10 de marzo 2019

UNESCO (2017). *Plan de acción de Liubliana 2017 sobre los REA*. Liubliana, Slovenia. Descargado de http://aprender3c.org/wp-content/uploads/2018/07/260762s.pdf el 15 de marzo 2019

Wiley, D. (2007). *Open education license draft*. Blog. *Iterating toward openness*. Consultado el 24 de marzo de 2019 en https://opencontent.org/blog/ archives/355

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Dime con qué gráfica andas y te diré que función eres

Eduardo **Basurto** Hidalgo
CRESUR
México
basurto.e@gmail.com

Resumen

Una articulación fluida entre los registros de representación numérico, algebraico y gráfico en objetos matemáticos, como por ejemplo funciones, es una capacidad deseable en los estudiantes de educación media, de hecho algunas investigaciones en Educación Matemática registran aportes respecto de la comprensión de dichos objetos matemáticos vía la realización de tareas que involucran el manejo de las representaciones, junto con lo anterior se presume un vínculo muy conveniente entre el uso de tecnología digital y la comprensión de ciertos aspectos de las funciones, es por eso que el propósito de este minicurso es mostrar algunas ideas de como fortalecer la comprensión de la funciones en específico de sus gráficas a partir de las prestaciones dinámicas y de retroalimentación inmediata que nos brindan algunas herramientas tecnológicas de última generación.

Palabras clave: funciones, gráficas, tecnología, retroalimentación inmediata.

Introducción

Dentro de la enseñanza de las matemáticas existen dificultades y obstáculos de distinta naturaleza dependiendo de la rama de esta disciplina que se estudie, pero algo en común a cualquiera de dichas ramas es que algunas de estas dificultades y obstáculos son provocadas por un tratamiento didáctico deficiente de los contenidos curriculares. Un ejemplo de esto se observa en muchos estudiantes que reflejan poco éxito en la parte final de su educación media superior principalmente en materias de Cálculo Diferencial e Integral, buena parte se debe a su escaso conocimiento del comportamiento de las funciones.

Es sabido que, "Uno de los conceptos centrales en el aprendizaje de las matemáticas es el de función. Después de los conocimientos de aritmética y álgebra, la construcción del concepto de función es la base para la posterior comprensión sobre otros temas de matemáticas" Hitt (2002). El estudio de las funciones en nivel secundaria se hace presente en el Programa de estudios SEP (2017) vigente en México, por medio del eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, donde los alumnos profundizan en el estudio del álgebra con los tres usos de las literales, conceptualmente

distintos, además se resuelven problemas que requieren el análisis, del concepto de función, a partir de los vínculos entre las representaciones gráficas, numéricas y algebraicas.

Respecto al estudio del concepto de función así como de sus representaciones, es importante mencionar que evaluaciones a nivel nacional realizadas a estudiantes mexicanos de tercer grado de secundaria por parte del Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE) como la prueba Excale así como a estudiantes de 6º semestre de bachillerato con la prueba ENLACE muestran que solamente en promedio 30% o menos de los estudiantes contestan correctamente reactivos correspondientes a situaciones tales como, identificar la función que corresponde a una gráfica o viceversa, identificar la función que corresponde a una tabla de valores o viceversa, resolver problemas que impliquen identificar la función que modele una tabla de valores, etc.

Fundamentación

A lo largo de la formación matemática de los estudiantes de secundaria se puede observar que son enfrentados a una ***polisemia*** de las literales, en específico de las variables e incógnitas al pretender formar en ellos concepciones de las literales tales como las de Küchemann (1981) y el modelo de los tres usos de la variable de Ursini y Trigueros (2006). Investigadores que en general comparten la visión de las literales en tres usos principales: ***Incógnitas específicas***, donde la literal tiene un valor desconocido específico como en las ecuaciones. ***Números generalizados***, donde la letra puede tomar más de un valor, como en el caso de la expresión de patrones en sucesiones numéricas o figurativas. ***Variables***, donde las literales son usadas para representar un rango específico de valores y se observa una relación existente entre dos conjuntos de valores.

Todavía en la secundaria, pero principalmente durante el bachillerato, a la polisemia anterior se unen otro tipo de literales llamados ***Parámetros***, los cuales como ya se mencionó han emergido esporádicamente en la secundaria y hacen presencia de manera más formal al introducir a los estudiantes en la exploración de entidades aún más generales, que poseen significados propios capaces de agrupar en familias, expresiones algebraicas en un nivel aún más abstracto.

Esto se realiza en asignaturas como Geometría analítica o Funciones mediante una presencia abundante de ***Parámetros,*** en objetos tales como familias de funciones, lugares geométricos e incluso en expresiones algebraicas que modelan diversos fenómenos o situaciones.

Este conflicto que enfrentan los estudiantes, no sólo de poder distinguir entre incógnitas y variables sino a la vez, tener que distinguir éstas de los parámetros, pensamos que es uno de los obstáculos en la conceptualización de los mismos, así como en la comprensión de conceptos matemáticos fundamentales como lo son las funciones.

Conceptualización de los parámetros como parte fundamental en la comprensión de las gráficas de funciones

La conceptualización de los ***parámetros,*** así como su diferenciación de variables o incógnitas, ha dado lugar a ciertas investigaciones en las que se destacan diversos aspectos sobre los significados que pueden tener dichos objetos matemáticos:

- Bloedy-Vinner (2001), para quien *"por un lado, el parámetro es un argumento de una función (de segundo orden), y al variar, éste, determina ecuaciones o funciones, por otro lado, dentro de cada ecuación o función, que corresponde a un valor específico del parámetro, el parámetro es una constante, mientras las otras letras son incógnitas o variables"*.

- En Drijvers (2001) se observa que "El parámetro es una variable extra en una expresión algebraica o función que generaliza toda una clase de expresiones, toda una familia de funciones o un grupo de gráficas. El parámetro puede ser considerado una meta – variable: por ejemplo, a en $y=ax+b$ puede jugar los roles de una variable ordinaria, un fijador de posición (placeholder), una cantidad desconocida o que cambia, pero ésta actúa en un nivel más alto que el caso de una variable. Por ejemplo, un cambio del valor del parámetro no afecta sólo un punto en particular sino completamente a la gráfica. El concepto de parámetro además es adecuado para resaltar la abstracción de situaciones concretas, así que representaciones algebraicas más formales y generales se vuelven parte natural del mundo matemático de los estudiantes" Drijvers (2001, p. 222).

Dentro del fenómeno ***parámetro*** podemos identificar tres pasos esenciales en la trayectoria de aprendizaje del mismo: el parámetro como un fijador de posición (placeholder), como una cantidad que cambia y como un generalizador.

Tabla 1

Rol del Parámetro según Drijvers (2001)

Rol del parámetro	***Por ejemplo:*** ***a en y = a x + b***	***Modelo gráfico***
Fijador de posición.	***a*** contiene valores específicos, uno por uno	Una gráfica, que es remplazada por otra.
Cantidad que cambia. Parámetro que se desliza.	***a*** transita a traves de un conjunto de manera dinámica	Gráfica dinámica como cuando se pasan rapidamente las páginas de un "comic".
Generalizador. Parámetro que determina una familia.	***a*** representa un conjunto, generaliza toda la situación	Un grupo de gráficas juntas.

Desarrollo del minicurso

Dado el potencial que se tiene hoy en día con herramientas tecnológicas abiertas como Geogebra o bien comerciales como HP Prime, el manejo de las ideas de funciones relacionadas con los parámetros asociadas a las mismas que pueden determinar su forma, normalmente se inicia con el tratamiento de las mismas aprovechando las ventajas dinámicas asociadas a deslizadores como es el caso de Geogebra, colocando ciertas expresiones controladas por deslizadores que impactan de forma inmediata en las gráficas y bajo cuestionamientos indicados se busca que los estudiantes encuentren las relaciones y patrones que describan la influencia que cada parámetro tiene en la gráfica desde su variación en la expresión algebraica como se ve en las figuras 1 y 2.

Dime con qué gráfica andas y te diré que función eres.

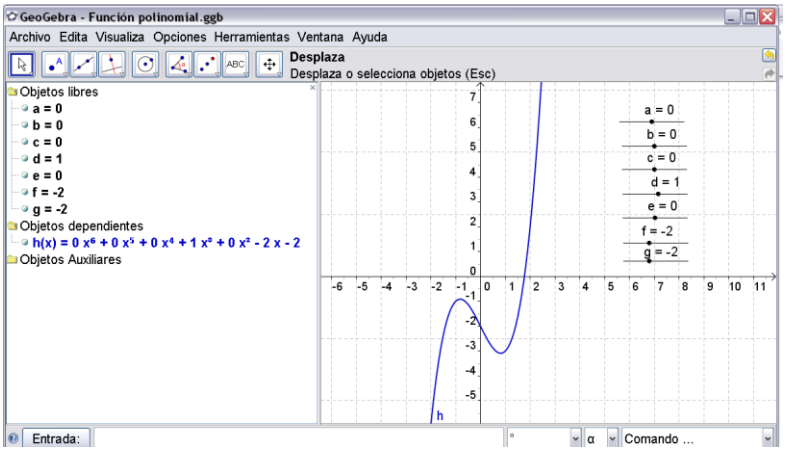


Figura 1. Función controlada por deslizadores

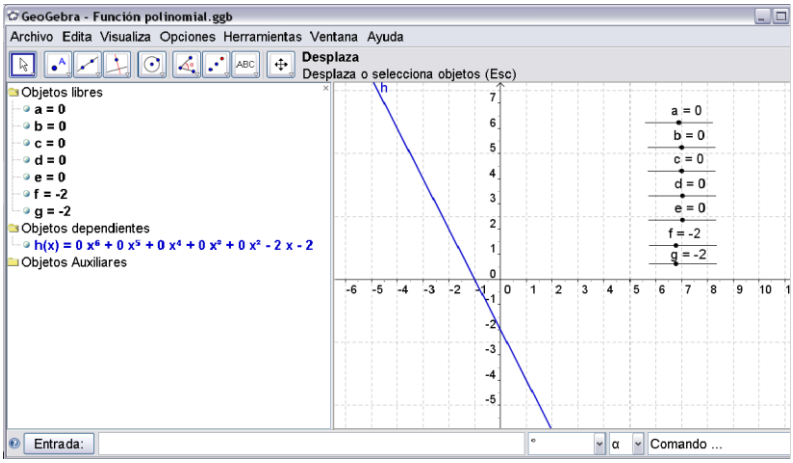


Figura 2. Función controlada por deslizadores

Esta metodología de trabajo en la que se estudian las funciones versus la expresión algébrica de las mismas, controladas de manera dinámica vía deslizadores aporta una retroalimentación inmediata entre ambas representaciones muy rica que permite reconocer ciertos comportamientos que dan luz sobre el conocimiento de cierto tipo de familias de funciones generalizándolas los objetos matemáticos.

No obstante, es un acercamiento que inicia desde la parte simbólica (algebraica) de estos objetos matemáticos, lo cual puede poner en juego mucho del bagaje algebraico que pueda haber consolidado el estudiante, lo cual, si es muy precario, como es el caso de muchos estudiantes de nivel medio, pondrá en dificultades a los estudiantes y podría alejarlos del objetivo de la actividad.

Después de explorar y discutir estas ideas en el minicurso, pondremos en el centro otro tipo de actividad proveniente de un avance tecnológico puesto a disposición recientemente, el cual permite esbozar gráficas, ya sea con el dedo en sistemas touch o con el mouse en aquellos dispositivos que no lo sean.

La tecnología de HP_Prime permite realizar este tipo de esbozos que son ajustados automáticamente por el dispositivo en el entorno gráfico, a diferencia de Geogebra que permite realizar diseños a mano alzada, pero sin un ajuste automático.

La actividad consiste que en el entorno gráfico de la aplicación de funciones, se esboza una recta que pase solo por los cuadrantes I y III de plano rectangular como se ve en la Figura 3.

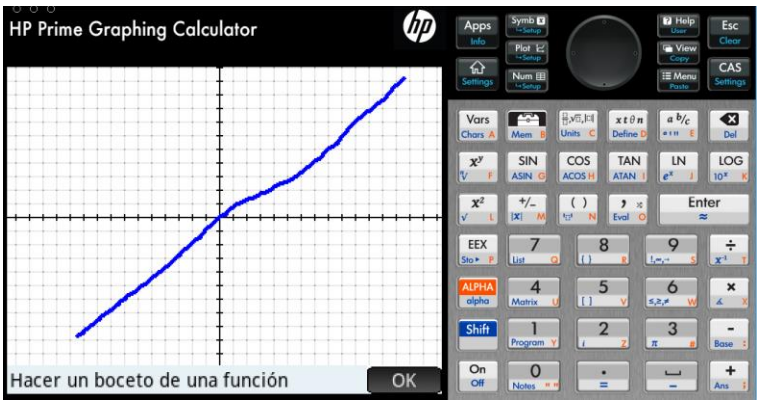


Figura 3. Esbozo de una recta que pasa por los cuadrantes I y III

Una vez que están satisfechos con el esbozo, se pide que intenten generar un esbozo de una gráfica de paralela a la primera por arriba y otra por abajo, algo similar a lo que se realiza en la Figura 4.

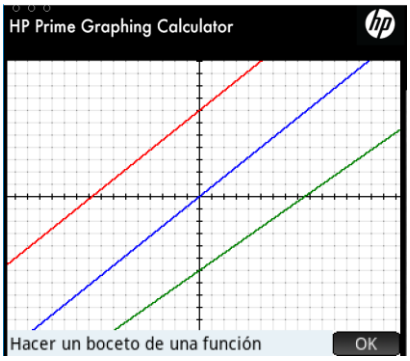


Figura 4. Esbozo de dos rectas paralelas.

El paso siguiente es pedir que se analice la representación numérica de dichas gráficas, antes de llegar a las partes simbólicas como se vería en la Figura 5.

Dime con qué gráfica andas y te diré que función eres.

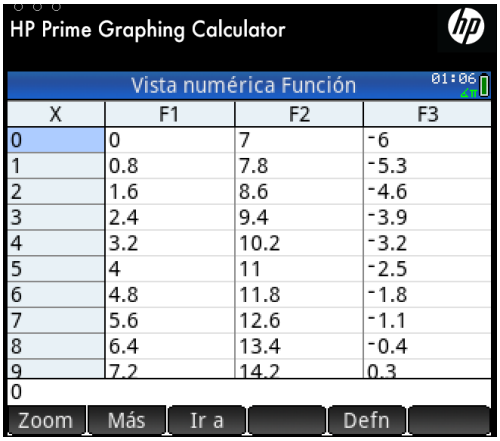


Figura 5. Análisis de la representación numérica.

En esta representación se debe observar, analizar y determinar, si las tres rectas son paralelas, solo dos, o ninguna de las tres, observando la variación.

Este tratamiento ayuda a tener un principio diferente que es la gráfica, anclada a un cierto lenguaje gráfico, después migrando al análisis numérico, lo cual ya lo hace diferente, y por último arribar a la representación simbólica, en la que deberán relacionar lo ya constatado en las representaciones gráfica y numérica. Figura 6.

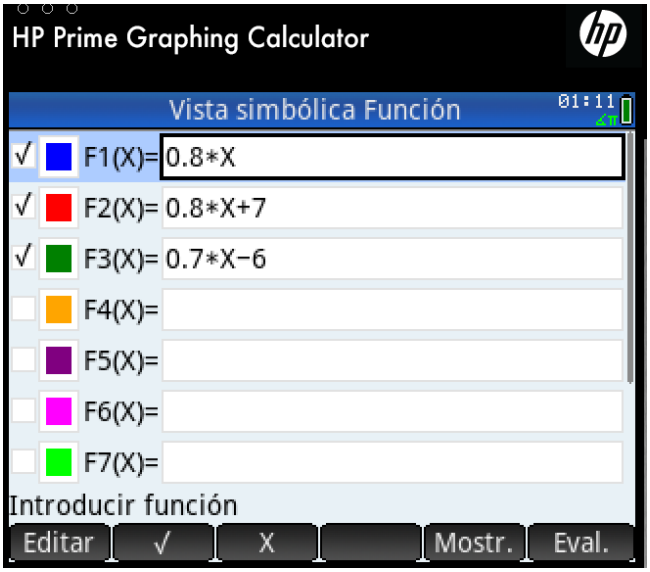


Figura 6. Análisis simbólico.

El paso siguiente en el análisis del minicurso, tratando de ponernos en un lugar empático con lo que consideran los asistentes basados en su experiencia como docentes y/o investigadores, proponer incluir una recta paralela más a las ya plateadas anteriormente, una mediante el esbozo gráfico y otra vía una propuesta desde la vista simbólica.

Evidentemente este tipo de tareas pondrá de manifiesto la generación de conjeturas, que estarán muy probablemente relacionadas con aquellas partes de la expresión que corresponde a

los parámetros, pero con una aproximación diferente a la que se da tradicionalmente e incluso diferente a la que se mostro como una posibilidad en GeoGebra.

¿Qué se espera del minicurso?

Dentro la realización del minicurso se mostrará tanto el desarrollo de las actividades entes mencionadas como otras relacionadas con la función cuadrática, buscando una aproximación distinta basada en las prestaciones que actualmente nos brindan ciertas herramientas de tecnología digital, como es el caso de los esbozos a mano alzada con y sin ajuste automático, el tránsito y retroalimentación inmediata por varias representaciones, la posibilidad de tener el campo grafico como una ventana de entrada directa sin tener que pasar previamente por las partes simbólicas o numéricas, así como el uso de herramientas tecnologías relegadas a los entornos gráficos como es el caso de ZOOM ahora ya incluida en entornos numéricos.

Estas nuevas prestaciones de la tecnología digital, pensamos que empiezan a abrir ventanas por las cuales podemos acercarnos de maneras distintas a las ya conocidas con tecnología digital que lleva más de una década en la Educación Matemática como es el caso de Geogebra, lo cual no significa abandonarlas, sino enriquecerlas con las nuevas prestaciones, como menciona Basurto (2015), "*incluso con los sistemas touch que permiten esta generación de esbozos con ajuste automático y comenzar a pensar en ideas como una especie de estimación gráfica, es decir, la estimación proviene de un ambiente totalmente numérico, la cual nos permite pensar en un resultado cada vez más plausible, pero ahora esto podrá extenderse al entorno gráfico"*. Estas ideas consideramos que pueden ser exploradas, y así como la estimación numérica es de gran ayuda en el desarrollo del sentido numérico, al parecer los esbozos gráficos ajustados y retroalimentados en otras representaciones vía tecnología digital pueden coadyuvar en el desarrollo del pensamiento gráfico.

Referencias y bibliografía

Basurto (2015). *Funciones polinomiales en estudiantes de bachillerato vía un entorno tecnológico dinámico.* Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Educativa. CINEVSTAV. México.

Bloedy-Vinner, H. (2001). *Beyond Unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra"*, R. Sutherland et al. (eds.), Perspectives on school Algebra, 177-189. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra enviroment. H. Chick et al. (eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Vol. 1. The University of Melbourne, Australia, pp, 221-227.

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto.* Prentice Hall. México.

Küchemann, D. (1981). Algebra, en Hart, (ed.), pp 102-119

SEP, (2017). *Matemáticas. Educación básica. Secundaria*. Programas de Estudio.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). *Enseñanza del algebra elemental. Una propuesta alternativa.* Ed. Trillas. México.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Computer science for all
Computer science and computational thinking for STEM integration

Paige **Prescott**
PhD student, Organization, Information and Learning Sciences, University of New Mexico
Albuquerque, New Mexico
pprescott@unm.edu

Abstract

There is increasing pressure on schools to expand access to computer science education. Governments are rapidly making policies to include computer science as part of their national curriculum and to require schools to address computational thinking as well. Integration of computational thinking concepts into existing content area courses such as math and science is seen as authentic to the computer science field where science and math professionals are increasingly using computation in their work. This paper is a literature review which starts with an exploration of the literature relating to computer science education, research in this field as well as computational thinking. It ends with a focus on the literature connected to integrating computer science and computational thinking into Science, Technology, Engineering and Math (STEM) classes and gives suggestions for areas in need of more advanced research.

Keywords: computational thinking, STEM, computer science education

Introduction

Computer science (CS) and computational thinking (CT) are increasingly becoming part of education K-12. In recent years, the expansion of computer science education resources has allowed schools to bring these topics into the classrooms to allow students at a young age to start learning these concepts. With the growth of the technology-related jobs, there is growing pressure to keep expanding the computer science options in schools. Most of the computer science experiences for students started in the informal education space through summer camps and afterschool clubs. This avenue helped to create foundational practices for both teachers and researchers. However, there is more need to understand how computer science and computational thinking can be part of the in-school experience for all students. Integrating computer science activities into content classes is a rich area for expansion and has the potential to impact all students in a school as opposed to the select few that participate in out-of-school

experiences. The newest science standards for the United States, Next Generation Science Standards (NGSS) has identified computational thinking as an important part of scientific inquiry and is one of the eight scientific practices that all students should be engaged in while learning science content (Lead States, 2013).

The goal of this paper is to explore the literature of CS and CT education research in order to understand the current state of this field of research as it pertains to integrated learning experiences for students in elementary or middle school STEM classes in which the computing content is not separate from the lesson but is intrinsic to acquisition of the core content knowledge such as science or engineering design in addition to CT and CS.

Computer science and constructionism

The concept of CS education as a foundation, belonging in the educational setting, began with Perlis' 1961 MIT Sloan School lecture "Computers and the World of the Future" where he insisted that all undergraduates should learn to program because he saw it as a foundational understanding needed as the automation of processes was certain to become more ubiquitous (as cited in Guzdial, 2008). Seymour Papert, fresh from Piaget's educational lab, embarked on a new era of education in which he combined the new concepts of computer programming through the lens of Piaget's constructivism to create a new paradigm which he called 'constructionism.' In the early 1970's he created a new computer programming language, Logo, to use as an educational tool. His influential work, "Mindstorms: Children, computers and powerful ideas" lead to a quiet revolution in education that continues to inform and inspire educational initiatives to bring computer science into schools. Despite its publication in 1980, the ideas Papert writes about still feel modern and fresh compared to where much of formal education is now, with siloed content areas and teacher-directed learning. He continued to refine constructionism, establishing his Media Lab at MIT in 1985 which emphasized play and learning as inextricably linked. Constructionism is similar to constructivism in that learning is done through building on existing knowledge structures (Papert & Harel, 1991). However, constructionism differs in that the "constructionism boils down to demanding that everything be understood by being constructed." (p. 2) and is informed by his experiences watching art classes and, in turn, how students were learning to program graphics by teaching themselves angles in which 'learning-by-making' is the simplest definition (Papert & Harel, 1991). This approach to education was formalized in a partnership with Lego in which programmable robotics kits used Logo and were based on the ideas from MIT's Media Lab. This connection between programming and physical devices lead to a large infiltration of robotics into schools as learning devices and can be seen in modern kits such as Lego's EV3, Vex, Dash & Dot, Ozobots, Spheros, mBot, and hundreds of other variations.

Papert's work still resonates and has informed generations of computer scientists and educational researchers not only in his philosophy of education but also in computer science educational software design. Kafai and Resnick (1996) continued to build on the concepts embedded in constructionism and came up with three key principles for designing computer-based learning environments in computer science: create a learning culture, design tools with powerful ideas and allow for personal expression. In 2007, the Lifelong Kindergarten group at the MIT Media Lab launched the Scratch programming environment with the intent that it be "tinkerable, more meaningful, and more social than other programming environments"(Resnick

et al., 2009). This approach led to an explosion of use in educational settings and created the foundational experience in computer science for many young students.

CT Defined

The work of Papert, DiSessa, Kafai and Resnick lead directly towards the concept of CT in which problem-solving techniques are ultimately put into practice through computers. Although Jeannette Jeannette M Wing (2006) is often attributed with coining the phrase 'computational thinking' it was, in fact, Seymour Papert who first wrote about it in 1996 (Papert, 1996). The concepts of CT have been embraced relatively rapidly into the education lexicon but there isn't a deep consensus on its definition nor how it is measured or evaluated programmatically.

CT was initially articulated as a skill that everyone, not just computer scientists, should have because it involves "problem solving, designing systems, and understanding human behavior, by drawing on the concepts fundamental to computer science."(Jeannette M Wing, 2006) Wing also calls out the concepts of abstraction and decomposition as fundamental to computational thinking. However, as the concept matured, no clear agreement developed around the topic (Barr & Stephenson, 2011; National Research Council, 2010). Brennan and Resnick (2012) recognized the lack of consensus around this topic and developed a framework for CT based on their study of 'interactive media designers' on Scratch. There are three key dimensions for their framework: computational concepts, computational practices and computational perspectives. Computational concepts are further defined into seven topics, mostly relating to computer science concepts, which are: sequences, loops, parallelism, events, conditionals, operators and data. They then further define these concepts and give examples using the Scratch code blocks.

Researchers and thought leaders in CT have tended to come back to the core four concepts of abstraction, decomposition, automation and analysis (CSTA, 2011; Lee et al., 2011; National Research Council, 2010; J.M. Wing, 2011; Yaşar, 2017). Alongside these definitions many also include dispositions for student that include persistence, collaboration, dealing with open-ended problems and ambiguity (Barr & Stephenson, 2011; CSTA, 2011; Lee et al., 2011).

The concepts of CT are often confused with just learning to program a computer because of the emphasis on the coding environment that is used (Aho, 2012; Lee et al., 2011; Voogt, Fisser, Good, Mishra, & Yadav, 2015). However, other researchers have tried to decouple CT from programming and have focused on activities that emphasize non-computer or 'unplugged' lessons to understanding some of these concepts (Brackmann et al., 2017).

CT is flexible enough to be approached through integration into different content area such as science, math and media arts (Lead States, 2013; Orton et al.; Schanzer, Fisler, Krishnamurthi, & Felleisen, 2015; Wagh, Cook-Whitt, & Wilensky, 2017; Weintrop et al., 2016; Wilensky, Brady, & Horn, 2014). And can also be done in the informal education space through afterschool clubs and summer camps (Denner, Werner, & Ortiz, 2012; Gallup, 2015; Kafai, Peppler, & Chiu, 2007; Repenning & Ioannidou, 2008).

CT Integration in STEM

Computer science (CS) is often taught in a decontextualized manner in which the CS topics are presented in a CS class that is separate from other content areas. This approach is problematic in that students do not see the usefulness and connection of CS across many fields and do not perceive CS as a creative and applicable topic that can help solve problems in various

contexts. When CS is applied in science or mathematics classes there is greater understanding of the content concepts as well as CS concepts than when taught as separate topics (Blikstein, 2012; Guzdial, 1994; Orton et al.; Schanzer et al., 2015; Webb, Repenning, & Koh, 2012). Thus, integrating CS into existing classes is an important strategy when considering options for implementing CS in diverse educational settings.

CT education has been approached through informal learning as well as during the school day. The newest science standards from the United States are Next Generation Science Standards (NGSS) which explicitly calls out CT in their practices. There are many that are seeking to understand how CT can happen in a regular science classroom (Lead States, 2013). Some, like Project GUTS (Growing Up Thinking Scientifically), have designed curriculum that is aligned to both the NGSS and the Computer Science Teachers Association computer science standards that emphasizes computational modeling as a tool to engage students in CT (Lee et al., 2011). This approach is supported by Wilensky et al. (2014) who see that integrating CT practices within science classes with be a more authentic experience in terms of how CT is used by professional scientists. Other studies have shown that integrating CT and science not only advances the students' knowledge in CT but also promotes deeper learning of science concepts (DiSessa, 2001; Grover, Pea, & Stephen, 2015; Weintrop et al., 2016; Wilensky et al., 2014). There are many that feel that the effectiveness of integration with science and computer science is understudied (Grover & Pea, 2013; Voogt et al., 2015).

The use of visual programming languages like Scratch, StarLogo Nova and Alice have been seen as tools to develop the interests of young learners in CS and CT as well as increasing the motivation of students and their general learning outcomes (Resnick, 2013). Lewis and Shah (2012) showed that Scratch programming was highly correlated to increased math scores. Calao, Moreno-León, Correa, and Robles (2015) were also able to show that coding in middle school math classes led to improved understanding of mathematical processes.

Professional development for teachers

The core components of teacher PD in CS typically focus on increasing teachers' knowledge around computer science concepts (Barr & Stephenson, 2011). It is important to increase the self-efficacy through content knowledge of the teachers which will in turn have an impact on their instructional practices (Ekmekci, Parr, & Fisher, 2018; Garet, Porter, Desimone, Birman, & Yoon, 2001). In terms of PD, scaffolded PD was significantly superior to PD through self-study in terms of teacher beliefs and motivation, instructional quality, and student achievement (Kleickmann, Tröbst, Jonen, Vehmeyer, & Möller, 2016). PD effects on student learning were mediated only slightly by teacher beliefs. However, teachers' instructional practice emerged as a substantial mediator of PD effects on student achievement (Kleickmann et al., 2016). Providing scaffolded support increases the success of implementations (Lee et al., 2011; Lee, Psaila Dombrowski, & Angel, 2017). Although there has been an emphasis on increasing the content knowledge of teachers in computer science concepts, this does not sufficiently address why there are differences in implementation.

Conclusion

CT and CS education are dynamic areas of research, with many avenues to explore and many gaps to address, especially when these concepts are integrated into STEM classes. Despite efforts from a number of curriculum designers and education researchers, there is insufficient

information on effective models for integration of CS/CT across content areas. Initial data shows that integration is an effective way for students to learn both the content knowledge as well as CS and CT however more work is needed to understand which STEM concepts are more supported by which CS or CT strategies. Teacher professional development models have mainly focused on improving teacher content knowledge in CS rather than the integration of CS/CT into their content area. Ongoing teacher support is needed during the academic year to allow for teachers to effectively implement CS/CT curriculum. There are few professional development models that simultaneously address STEM content knowledge along with CS/CT.

References

Aho, A. V. (2012). Computation and computational thinking. *The Computer Journal, 55*(7), 832-835.

Barr, V., & Stephenson, C. (2011). Bringing computational thinking to K-12: what is Involved and what is the role of the computer science education community? *ACM Inroads, 2*(1), 48-54.

Blikstein, P. (2012). *Bifocal modeling: a study on the learning outcomes of comparing physical and computational models linked in real time*. Paper presented at the Proceedings of the 14th ACM international conference on Multimodal interaction, Santa Monica, California, USA.

Brackmann, C. P., Rom, M., #225, n-Gonz, #225, lez, . . . Barone, D. (2017). *Development of Computational Thinking Skills through Unplugged Activities in Primary School*. Paper presented at the Proceedings of the 12th Workshop on Primary and Secondary Computing Education, Nijmegen, Netherlands.

Brennan, K., & Resnick, M. (2012). *New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking.* Paper presented at the Proceedings of the 2012 annual meeting of the American Educational Research Association, Vancouver, Canada.

Calao, L. A., Moreno-León, J., Correa, H. E., & Robles, G. (2015). Developing mathematical thinking with scratch. In *Design for teaching and learning in a networked world* (pp. 17-27): Springer.

CSTA, I. (2011). Computational thinking. Teacher resources. . Retrieved from http://csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/472.11CTTeacherResources_2ed-SP-vF.pdf.

Denner, J., Werner, L., & Ortiz, E. (2012). Computer games created by middle school girls: Can they be used to measure understanding of computer science concepts? *Computers & Education, 58*(1), 240-249.

DiSessa, A. A. (2001). *Changing minds: Computers, learning, and literacy*: Mit Press.

Ekmekci, A., Parr, R., & Fisher, A. (2018). *Results from Rice University WeTeach_CS: A Computer Science Teaching Collaborative Serving Teachers with Different Needs through Variety of Pathways.* Paper presented at the Society for Information Technology & Teacher Education International Conference.

Gallup. (2015). *Searching for Computer Science: Access and Barriers in U.S. K-12 Education*. Retrieved from https://services.google.com/fh/files/misc/searching-for-computer-science_report.pdf

Garet, M. S., Porter, A. C., Desimone, L., Birman, B. F., & Yoon, K. S. (2001). What makes professional development effective? Results from a national sample of teachers. *American educational research journal, 38*(4), 915-945.

Grover, S., & Pea, R. (2013). Computational Thinking in K–12 A Review of the State of the Field. *Educational Researcher, 42*(1), 38-43.

Grover, S., Pea, R., & Stephen, C. (2015). Designing for deeper learning in a blended computer science course for middle school students. *Computer Science Education, 25*(2), 199-237.

Guzdial, M. (1994). Software-realized scaffolding to facilitate programming for science learning. *Interactive Learning Environments, 4*(1), 001-044.

Guzdial, M. (2008). Education Paving the way for computational thinking. *Communications of the ACM, 51*(8), 25-27.

Kafai, Y. B., Peppler, K. A., & Chiu, G. M. (2007). High tech programmers in low-income communities: Creating a computer culture in a community technology center. In *Communities and technologies 2007* (pp. 545-563): Springer.

Kafai, Y. B., & Resnick, M. (1996). *Constructionism in practice: Designing, thinking, and learning in a digital world*: Routledge.

Kleickmann, T., Tröbst, S., Jonen, A., Vehmeyer, J., & Möller, K. (2016). The effects of expert scaffolding in elementary science professional development on teachers' beliefs and motivations, instructional practices, and student achievement. *Journal of Educational Psychology, 108*(1), 21.

Lead States, N. (2013). Next generation science standards: For states, by states. In: The National Academies Press Washington, DC.

Lee, I., Martin, F., Denner, J., Coulter, B., Allan, W., Erickson, J., . . . Werner, L. (2011). Computational thinking for youth in practice. *ACM Inroads, 2*(1), 32-37. doi:10.1145/1929887.1929902

Lee, I., Psaila Dombrowski, M., & Angel, E. (2017). *Preparing STEM Teachers to offer New Mexico Computer Science for All.* Paper presented at the 48th ACM Technical Symposium on Computing Science Education, Seattle, Washington, USA.

Lewis, C. M., & Shah, N. (2012). *Building upon and enriching grade four mathematics standards with programming curriculum.* Paper presented at the Proceedings of the 43rd ACM technical symposium on Computer Science Education.

National Research Council. (2010). *The Scope and Nature of Computational Thinking*. Retrieved from Washington, D.C.:

Orton, K., Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Jona, K., & Wilensky, U. Bringing Computational Thinking Into High School Mathematics and Science Classrooms. *Transforming Learning, Empowering Learners*.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*: Basic Books, Inc.

Papert, S. (1996). An exploration in the space of mathematics educations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(1), 95-123.

Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating constructionism. *Constructionism, 36*(2), 1-11.

Repenning, A., & Ioannidou, A. (2008). *Broadening participation through scalable game design.* Paper presented at the ACM SIGCSE Bulletin.

Resnick, M. (2013). Learn to code, code to learn. *EdSurge, May, 54*.

Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., . . . Silverman, B. (2009). Scratch: programming for all. *Communications of the ACM, 52*(11), 60-67.

Schanzer, E., Fisler, K., Krishnamurthi, S., & Felleisen, M. (2015). *Transferring skills at solving word problems from computing to algebra through bootstrap.* Paper presented at the Proceedings of the 46th ACM Technical symposium on computer science education.

Voogt, J., Fisser, P., Good, J., Mishra, P., & Yadav, A. (2015). Computational thinking in compulsory education: Towards an agenda for research and practice. *Education and Information Technologies, 20*(4), 715-728.

Wagh, A., Cook-Whitt, K., & Wilensky, U. (2017). Bridging inquiry-based science and constructionism: Exploring the alignment between students tinkering with code of computational models and goals of inquiry. *Journal of Research in Science Teaching*.

Webb, D. C., Repenning, A., & Koh, K. H. (2012). *Toward an emergent theory of broadening participation in computer science education*. Paper presented at the Proceedings of the 43rd ACM technical symposium on Computer Science Education, Raleigh, North Carolina, USA. http://delivery.acm.org/10.1145/2160000/2157191/p173-webb.pdf?ip=64.106.111.2&id=2157191&acc=ACTIVE%20SERVICE&key=B63ACEF81C6334F5%2E1447575D8884B3D4%2E4D4702B0C3E38B35%2E4D4702B0C3E38B35&CFID=720483329&CFTOKEN=29890755&__acm__=1485297960_b916c414e21769a21d104d044440a6f9

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms. *Journal of Science Education and Technology, 25*(1), 127-147. doi:10.1007/s10956-015-9581-5

Wilensky, U., Brady, C. E., & Horn, M. S. (2014). Fostering computational literacy in science classrooms. *Communications of the ACM, 57*(8), 24-28.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35.

Wing, J. M. (2011). Research notebook: Computational thinking—What and why? . *The Link Magazine*.

Yaşar, O. (2017). The essence of computational thinking. *Computing in Science & Engineering, 19*(4), 74-82.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

CANP 5: La formación docente inicial y continua en Educación Matemática en Bolivia, Ecuador, Paraguay y Perú

María del Carmen **Bonilla**
APINEMA: Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática
Perú
mc_bonilla@otmail.com

Resumen

En el minicurso, inicialmente, se dará a conocer la problemática de la formación docente inicial y continua en el área de Matemática en Bolivia, Ecuador, Paraguay y Perú, analizada por educadores y matemáticos, administradores educacionales y profesores que estuvieron reunidos en el 5th Capacity and Networking Project (CANP 5) realizado en febrero del 2016 en la ciudad de Lima. Posteriormente, se generará una discusión sobre ella, y se comparará con la problemática de las otras regiones. El CANP 5 fue organizado por la Comisión Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (ICMI) con la finalidad de construir una red regional andina y de Paraguay que desarrolle las potencialidades locales para enfrentar mejor los problemas y desafíos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La exposición sobre cada país se inicia con una visión histórica de la formación del profesorado, se presenta la estructura actual de la formación inicial y la formación continua de los docentes en ejercicio, culminándose con la presentación de las fortalezas, debilidades presentes y los retos a futuro.

Palabras clave: Bolivia, Ecuador, Paraguay, Perú, ICMI, 5th Capacity and Networking Project, formación docente inicial y continua.

Introducción

CANP es un foco de desarrollo importante promovido por matemáticos y educadores matemáticos de la Unión Internacional de Matemáticas (IMU) y la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) con la UNESCO, como respuesta a los desafíos actuales en la educación matemática (EM) básica. Tiene como objetivos: mejorar la EM en todos los niveles en los países en desarrollo para que sus habitantes puedan enfrentar los desafíos actuales, desarrollar las capacidades de los formadores de docentes en matemáticas, y crear redes regionales sostenidas y efectivas de maestros, educadores matemáticos y matemáticos, en coordinación con la ayuda internacional.

Del 2011 al 2016 se han organizado cinco CANP, en el África subsahariana, en Centroamérica y el Caribe, en el Sudeste de Asia, en África Oriental y el CANP 5 en la Región

Andina y Paraguay celebrado en Lima en febrero del 2016. Producto del CANP 5, se elaboraron informes sobre la formación docente inicial y continua en Bolivia (Cordero et al., 2018), Ecuador (Martínez et al., 2018), Paraguay (Gómez et al., 2018) y Perú (Osorio et al., 2018), documentos que servirán de base en el minicurso para la discusión y comparación con modelos educativos de otras regiones.

La formación inicial y continua de profesores de matemáticas en Bolivia

El Estado Plurinacional de Bolivia está conformado por una población con un porcentaje considerable de pertenencia indígena originaria y que tiene un gasto público en educación del 6,5% de Producto Interno Bruto.

Antecedentes históricos

La Formación Docente en Bolivia pasó por tres momentos: la Revolución Nacional de 1952, la ley de reforma educativa de 1994 y la ley Avelino Siñani-Elizardo Pérez del 2006. La Educación tuvo al inicio un carácter elitista, que solo preparaba maestros para áreas urbanas. A partir de 1952 se preparó a docentes en normales urbanas y rurales. En 1994 las escuelas normales se convirtieron en Institutos Normales Superiores y fueron administradas por las universidades. El 2006 los institutos superiores fueron renombrados como Escuelas Superiores de Formación de Maestras y Maestros (ESFM). La educación tiene un carácter étnico inclusivo, destacando la educación bilingüe y la cultura nativa.

Estructura del Sistema Educativo

Los niveles de la Educación Regular están formados por Inicial en Familia Comunitaria, la Primaria Comunitaria Vocacional y la Secundaria Comunitaria Productiva. La Educación es descolonizadora, comunitaria, intracultural, intercultural y plurilingüe, productiva y territorial, científica, técnica, tecnológica y artística, entre otras características; y tiene como uno de sus elementos clave la Educación para la convivencia con la naturaleza y la salud comunitaria. En la Estructura Curricular las matemáticas se encuentran en el Área del Conocimiento *Ciencia, Tecnología y Producción*. En Secundaria se trabajan 4 o 5 horas semanales de matemática, en total, un promedio de 120 horas en cada año.

Estructura de la Formación Docente

La Formación Docente pertenece al Subsistema de Educación Superior de Formación Profesional- SEP, que prepara a los maestros para la Educación Regular, Educación Alternativa o Educación Especial, a lo largo de tres etapas: Inicial, Continua y Posgrado. La *Formación Inicial* está supervisada por la Dirección General de Formación Docente del Ministerio de Educación (DGFM), la cual está a cargo de las Escuelas Superiores de Formación de Maestras(os) (ESFM) y las Unidades Académicas (UAs), únicas encargadas de la preparación académica inicial del profesorado en programas de cinco años y que finalizan con la licenciatura. Actualmente, hay un exceso de oferta de profesores de matemáticas.

Los profesores de aula de Primaria enseñan varias asignaturas. Del conjunto de horas de instrucción, les corresponde 440 horas (9% del total) para el área de Ciencia, Tecnología y Producción – Matemáticas, distribuidas en cuatro unidades de formación. Los futuros docentes de Educación Secundaria después de cinco años de estudios obtienen el título de Bachiller (Licenciatura) en Educación Secundaria Comunitaria Productiva con especialización en Matemáticas. En el Plan de Estudios, en el Campo de Conocimiento *Cosmos y Pensamiento*, en el cuarto año se desarrolla el curso de Enseñanza de las Matemáticas (160 horas). En el Campo

de Conocimiento *Ciencia, tecnología y producción* se desarrollan 16 cursos con un total de 2 280 horas, que significan el 42,2 % del total de horas de instrucción. La Práctica Educativa Comunitaria se realiza durante 600 horas a lo largo de los cinco años, en forma progresiva de menor a mayor número de horas.

La *Formación Continua* docente está dirigida por la Unidad Especializada de Formación Continua-(UNEFCO), unidad descentralizada del Ministerio de Educación que ofrece cursos basados en la demanda docente. De igual manera, la *Red de Maestros* proporciona formación profesional virtual para maestros en servicio registrados en el Ministerio (software matemático). Solo las entidades gubernamentales pueden ahora ofrecer desarrollo profesional que tenga un contenido curricular. Desde el 2012, aquellos maestros que tienen un título de enseñanza en un nivel inferior, o un título de alguna otra disciplina, pueden llegar al nivel de una licenciatura con el *Programa de Formación Complementaria para Maestras(os) en ejercicio* (PROFOCOM) que dura dos años. Este programa ha tenido éxito, capacitando a más de 135 000 docentes a partir del 2014. En los cursos del programa hay una fuerte presencia ideológica y política. Muchas decisiones académicas y técnicas están contaminadas con la política.

Los *estudios de posgrado* están a cargo de la Universidad Pedagógica. Comenzó a operar desde el 2015 y depende directamente del Ministerio de Educación. Ofrece la Maestría en Matemática para Educación Secundaria Comunitaria Productiva, que tiene una duración de cinco semestres, y, además, la Especialidad de Matemática Aplicada para Educación Secundaria Comunitaria Productiva.

A pesar de la mejora en la infraestructura, Bolivia es un país con uno de los índices de rendimiento más bajos en educación matemática, situación que se debe en gran parte a las deficiencias en la preparación docente. Por lo tanto, la preparación continua del maestro es vital para lograr cambios en la educación. Es necesario tener en cuenta las fortalezas, debilidades, oportunidades y amenazas del sistema educativo (Tabla A1). Se han presentado propuestas que consideran situaciones de aprendizaje que conducen a una reflexión sobre la teoría y la práctica para mejorar la enseñanza en el aula, desafiando el modelo actual de educación repetitiva y de rutina que predomina en las escuelas. Desde esa visión, el uso de las tecnologías de la comunicación y la información en el aula (Geogebra, etc.), que es actualmente mínimo, debe maximizarse en la comunicación y el aprendizaje de las matemáticas.

La formación inicial y continua de profesores de matemáticas en el Ecuador

La República del Ecuador es un país atravesado por la Cordillera de los Andes, que según datos del Banco Interamericano de Desarrollo gasta en el sector público de educación el 4,8% de su Producto Interno Bruto.

Resumen histórico

Antes de 1863 el docente ecuatoriano enseñaba todas las ciencias en el aula. En 1863 fue reestructurada la educación pública, estableciéndose en 1871 la educación primaria gratuita. En 1884 fue creado el Ministerio de Instrucción Pública y en 1899 se fundaron los institutos de formación de maestros o Normales dirigidos por religiosos. En 1928 fue creado el Instituto de Pedagogía, parte integrante de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Central de Quito y en 1930 se enfatizó en la educación rural. La Universidad Central creó la Licenciatura en Ciencias de la Educación en 1974 y decrecieron los institutos normales. El 2014 se eliminaron las normales en beneficio de la formación universitaria.

Estructura educativa

El Sistema Educativo está respaldado por cinco documentos normativos, y dentro del sistema, la educación escolar preuniversitaria está formado por tres niveles: Educación Inicial, Educación General Básica (EGB) y Bachillerato General Unificado (BGU). La educación escolar es obligatoria, laica y gratuita desde el 2015. Los estudiantes de EGB llevan de ocho a seis horas semanales de matemática, de más a menos horas de acuerdo con el grado. En BGU las horas semanales son cuatro. Se establecieron ejes para el área de matemática en EGB y Bachillerato (Martínez et al., 2017, p. 17)

Formación Inicial Docente en Matemáticas

Todo postulante que desea ingresar a cualquier Institución Superior de Educación Pública debe rendir el Examen Nacional de Educación Superior para que, de acuerdo con el puntaje obtenido, pueda ingresar a las carreras ofrecidas. Actualmente, para ingresar a la carrera de educación el postulante tiene que obtener 800/1000 puntos, esa condición pretende que los mejores bachilleres opten por ser profesores y así elevar el nivel en la formación universitaria.

Treinta y una universidades brindan carreras de pregrado y posgrado relacionadas a Educación, 15 tienen carreras en EM, 8 ofrecen posgrados en Educación y, de ellas, 2 se refieren a Matemática. Las universidades se encargan de la formación del docente en el área de matemáticas. Se otorgan los títulos de Licenciatura en Ciencias de la Educación o en EGB- (antes educación primaria) para formar docentes que enseñan de 1ro a 7mo grados, y la Licenciatura en Ciencias de la Educación con Mención en Física y Matemáticas o Licenciatura en Física y Matemática (antes educación secundaria), para formar docentes que enseñan de 8vo a 10mo grados y Bachillerato. La carrera dura entre 8 a 10 semestres.

En los estudios de la Licenciatura en Ciencias de la Educación en EGB, las materias destinadas a las matemáticas alcanzan un porcentaje total aproximado del 5 % de su estructura curricular y un 3% de pedagogía en matemáticas, mientras que, en la Licenciatura en Ciencias de la Educación con Mención en Física y Matemáticas, el porcentaje es del 30% con un 2% adicional. La deficiente formación en matemática de los docentes de EGB lleva a que el 62 % de docentes tenga un conocimiento insuficiente de matemáticas según el Instituto Nacional de Evaluación Educativa, situación que también se aprecia en los docentes del BGU. Las prácticas preprofesionales equivalen aproximadamente al 7 % de las horas totales asignadas en la carrera, que son consideradas insuficientes.

La Universidad de Cuenca, la Universidad Central del Ecuador, la Universidad Técnica del Norte, la Universidad Estatal de Bolívar, la Universidad Nacional de Chimborazo y la Universidad Técnica de Manabí conforman una red que está rediseñando las mallas curriculares con nuevas asignaturas como Didáctica de la Matemática y la Física, Software para la enseñanza de la Matemática y la Física, Etnomatemática, Matemáticas Discretas y Matemáticas Financieras.

Cuatro universidades ofrecen estudios de Maestría en Docencia o Enseñanza de las matemáticas. De igual manera, dos universidades desarrollan investigaciones en EM, aunque, en términos generales no existen líneas claras de investigación en EM. A pesar del avance no existe conexión entre los investigadores en educación y las políticas educativas del Ministerio de Educación.

La Formación continua del docente de matemáticas

Aunque no existe una estructura claramente definida para la formación continua de docentes, las universidades han venido ofertando cursos, talleres, diplomados, así como maestrías. Desde el Ministerio de Educación se han realizado diversas acciones que buscan mejorar la enseñanza de las matemáticas como: el Sistema Integral de Desarrollo Profesional Educativo SíPROFE (2010 – 2013), que pasó a llamarse Formación Docente desde el 2014, y que hasta el 2015 capacitó al 60% de los docentes, tanto de EGB como a los docentes de matemáticas del BGU; el Programa de Maestrías con universidades españolas desde el 2014, por el cual se estableció convenios con la Universidad de Barcelona, la Universidad Autónoma de Madrid, la Universidad Complutense de Madrid y la Universidad Nacional de Educación a Distancia, habiendo culminado sus estudios 2 322 profesores.

Es importante lograr la colaboración del Estado, la educación privada, la Academia y los profesores para poner en práctica el Plan Nacional del Buen Vivir que busca mejorar la calidad de la educación en todos los niveles y modalidades, invirtiendo más en la calidad docente que en la infraestructura educativa. Para ello es necesario considerar las fortalezas, debilidades, oportunidades y amenazas del sistema educativo ecuatoriano (Tabla B1).

La formación inicial y continua de profesores de matemáticas en Paraguay

Paraguay es una nación bilingüe que tiene como idiomas oficiales al español y al guaraní, hablado por el 80% de la población. Según estudios del Banco Interamericano de Desarrollo se destina el 5,2% del Producto Interno Bruto al sector público en educación.

La formación docente en su contexto histórico

La educación en la colonia estaba a cargo de las órdenes religiosas, siendo las escuelas primarias lugares de adoctrinamiento y de aprendizaje de oficios. A partir de 1811, desde la independencia de España, se crearon los primeros institutos de formación para el nivel primario (1812). La Escuela Normal de Paraguay se abrió en 1870, siendo creadas más Escuelas Normales en el siglo XIX. En la década de 1970 las escuelas normales se convirtieron en instituciones de educación superior. En 1968 se creó el Instituto Superior de Educación (ISE), como órgano rector que supervisará la implementación de las políticas docentes promulgadas por el Ministerio de Educación. En los 70 se cerraron Escuelas Normales y se abrieron Institutos de Formación Docente (IFD). En medio del Plan de Desarrollo Educativo y las Innovaciones educativas de los 70’ los maestros fueron controlados por la dictadura de Stroessner y guardaron silencio sobre las fallas en el currículo y en la formación de los maestros. En 1998, se aprueba la Ley General de Educación y las universidades e institutos superiores, así como el ISE, por su autonomía, pueden ofrecer Licenciaturas en Ciencias de la Educación.

Estructura del Sistema Educativo de Paraguay

La educación paraguaya se compone de tres niveles: Nivel 1, que incluye Educación Inicial, el primer y segundo ciclo de la Educación Escolar Básica (EEB); Nivel 2, tercer ciclo de la EEB y la Educación Media; y nivel 3, la Educación Superior. En los años 90 la educación pública básica, gratuita y obligatoria se incrementó de seis a nueve años. En el 2010, se incluyó los niveles de Educación Inicial y Educación Media.

A pesar de que la Ley N ° 1725-01 del 2003 establece que los educadores profesionales deben poseer una certificación, muchos maestros en la mayoría de los niveles educativos no cumplen con esa condición. El mayor número de maestros certificados trabajan en el nivel de la

EEB - Primer y Segundo Ciclo, seguidos por los maestros que trabajan en la EEB - Tercer ciclo. En la EEB – Tercer ciclo los docentes del área de matemática certificados representan el 43% del total (2 300 de 5 300).

Los Institutos de Formación Docente

A inicios de la década del 90 habían 17 IFD, sólo uno de ellos era privado. La escolarización se elevó hasta el 9° Grado, por ello aumentó la demanda docente. En el 2006 existían 135 IFD, el 30% eran públicos. Ante el exceso de oferta docente, se suspendió la creación de nuevos IFD y la formación de maestros de EEB - Primer y Segundo Ciclo. Al 2011 había 41 *IFD* públicos y 80 privados. Actualmente, las universidades, los institutos superiores y los IFD pueden preparar docentes. Los IFD preparan maestros para Educación Inicial, EEB y Educación Media, así como, para la educación en servicio. No son autónomos. También se han creado siete Centros Regionales de Educación (CRE) con la finalidad de fomentar la experimentación y la innovación. Atienden a una gran población estudiantil.

Así mismo, se ofrecen cuatro programas diferentes, Profesorados, para la formación inicial de maestros para Educación Inicial, Preescolar y 1° y 2° ciclo de EEB, 3° ciclo de EEB (con especialización en Matemática) y Educación Media (con especialización en Matemáticas), que tienen una duración de tres años. También hay programas de formación docente (generalmente desarrollados por el IFD) para maestros en servicio que solo tienen un diploma de Educación Media. Los maestros de Preescolar y 1° y 2° ciclo de EEB están preparados para ser generalistas y no se especializan en EM. De igual manera, se ofrecen programas de Licenciatura en Ciencias de la Educación que brindan una especialización en Matemáticas para profesores del 3° ciclo de EEB y Educación Media, en universidades e Institutos Superiores de Educación, en colaboración con especialistas del ministerio.

Formación continua docente e investigación

El Ministerio de Educación considera cuatro posibilidades de formación continua: *cursos de desarrollo*, de al menos 100 h para fortalecer aspectos específicos*; cursos de actualización*, para incorporar competencias pedagógicas innovadoras; *cursos de profesionalización*, dirigidos a maestros que no están certificados en ciertas áreas, y; *cursos de especialización*, para quienes ya tienen un título universitario y desean especializarse en ciertas áreas.

Con respecto a la investigación, la formación docente en Paraguay tiene como un problema la falta de capacidad para producir investigación relevante. En realidad, en la actualidad la investigación es casi inexistente. Aun así, las perspectivas para el futuro son favorables. La apertura reciente de dos programas de maestría podría ayudar a revertir esa situación, uno de ellos es una Maestría en Matemáticas en la Universidad Nacional de Asunción, y el otro programa es la Maestría en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad Nacional de Concepción.

La educación paraguaya tiene muchos desafíos que enfrentar y oportunidades que aprovechar, lo importante es tener la voluntad de cambio y eso ya se ha logrado (Tabla C1)

La formación inicial y continua de profesores de matemáticas en Perú

Perú es un país andino ubicado entre Ecuador y Bolivia, herederos de un pasado común. Según estudios realizados, Perú gasta un 3,7% de su PIB en educación.

La formación del profesorado en su contexto histórico

Desde 1822 hasta 1871 diversos gobiernos crearon Escuelas Normales que tuvieron un

corto periodo de duración. En 1876 surge la Escuela Normal de Mujeres, que en 1928 viene a ser el Instituto Pedagógico Nacional de Mujeres. En 1905 se crea la Escuela Normal de Varones en Lima, que en 1967 pasa a ser la Universidad Nacional de Educación. En 1876 se abre la cátedra de Pedagogía en la Universidad de San Marcos, que se convierte en 1946 en la Facultad de Educación. A partir de 1950 se crean dos clases de escuelas normales, las rurales y las urbanas en diferentes partes del país, administradas por el Ministerio de Educación (Minedu) o por congregaciones religiosas con fondos públicos. En el futuro serán los Institutos de Educación Superiores Pedagógicos (IESP). También se abren Facultades de Educación (FU) en diferentes universidades. En la década del 70, producto de la Reforma Educativa, se crea el Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo de la Educación que busca respuestas a la diversidad cultural y lingüística de la realidad peruana, sin embargo, fue cerrado en los 90.

Estructura educativa del país

En los años 60 se dio la gratuidad en todos los niveles de enseñanza. El sistema educativo de Perú se divide en dos etapas, Básica y Superior, y cada una de ellas en varias modalidades (Osorio, 2017, p. 52). En 1995 se inicia una Reforma Curricular (Osorio, 2017, p. 69) que culmina en la publicación el 2016 del Currículo Nacional de Educación Básica, en donde se señalan las cuatro competencias matemáticas que se desea desarrollar en los estudiantes. A pesar del esfuerzo desplegado, las evaluaciones nacionales indican que en el 2015 sólo el 27% de los estudiantes de Educación Primaria (EP) y el 10% de los estudiantes de Educación Secundaria (ES) logran un nivel satisfactorio en matemáticas.

La estructura de la formación inicial de profesores de matemáticas

La ley de Reforma Magisterial (2012) regula que la formación docente para todos los niveles y modalidades se realiza en los IESP y en las FE de las universidades acreditadas por el Sistema Nacional de Evaluación y Acreditación de la Calidad Educativa (SINEACE). El Minedu tiene competencia sobre los IESP y, desde la nueva Ley Universitaria (2014), tiene competencia sobre las universidades a través de la Superintendencia Nacional de Educación Superior (SUNEDU).

La ley de la Reforma Magisterial (2012) creó el Programa Nacional de Evaluación y Certificación Profesional Docente en todo el país, ya que las evaluaciones son requisito para acceder a la nueva carrera pública y para permanecer en ella. La Ley del Profesorado del 2013 indica que solo los docentes titulados pueden ingresar a la Carrera Magisterial. Los docentes de EP enseñan todas las materias y un profesor de ES, de acuerdo con sus estudios, puede ser especialista de matemática, de matemática y física o de matemática e informática. Muchos profesores deciden estudiar educación no tanto por vocación sino por la estabilidad laboral, la menor carga de trabajo y la flexibilidad de horario que ofrece el Estado. En los IESP menos del 20% de los ingresantes presentan un nivel de rendimiento satisfactorio. Con la finalidad de promover el acceso de estudiantes de alto rendimiento, desde el 2014 el Estado ofrece becas, tales como Vocación Maestro y para la formación docente en Educación Intercultural Bilingüe.

Tanto en los IESP como en las FE la carrera dura 10 semestres. En el caso de los IESP el plan de estudios es único, llamado Diseño Curricular Básico Nacional. Las universidades tienen autonomía. En los IESP y las FE los cursos de Matemática y Didáctica de la Matemática representan en el Plan de Estudios de EP un bajo porcentaje (7%). En el Plan de Estudios de ES el porcentaje es mayor pero no suficiente (25 %).

La Formación continua

El Proyecto Educativo Nacional al 2021 plantea la necesidad de reestructurar y fortalecer la formación docente en servicio articulada a la formación docente inicial en forma permanente, con la finalidad de organizar y desarrollar, a favor de los profesores en servicio, actividades de actualización, capacitación y especialización. La Dirección General de Desarrollo Docente y la Dirección de Coordinación Universitaria del Minedu se encargan del Plan Nacional de Formación Docente en Servicio en coordinación con los Gobiernos Regionales.

Los programas de formación continua se han desarrollado en modalidades presencial, semipresencial a distancia y virtual, como por ejemplo el PLANCAD, el programa de Formación en Servicio, el PRONAFCAP con Especialización en Matemáticas e Investigación Educativa, y el PELA o Programa de Formación de Formadores de Acompañantes Pedagógicos, con enfoque intercultural bilingüe e inclusivo o el Programa de Segunda Especialidad en Acompañamiento Pedagógico (Osorio, 2017, p. 66). La Encuesta Nacional Docente (2014) evaluó la participación de los profesores en los programas desarrollados desde 1995, así como se pudo conocer la temática más solicitada por ellos para futuros cursos de capacitación (Osorio, 2017, p. 67).

En la Red Peruana de Universidades hay universidades que ofrecen Maestrías en Educación (9) y en EM (6), universidades que dirigen Doctorados en Educación (7) o en Ciencias de la Educación (6), y tienen registradas 5 Institutos de Investigación en Educación. Se están desarrollando muchos cambios en la EM en Perú, lo importante es conocer las fortalezas, debilidades y oportunidades existentes (Tabla D1).

Referencias y bibliografía

Busso, M., Cristia, J., Hincapié, D., Messina, J. & Ripani, L. (2017). *Aprender mejor: políticas públicas para el desarrollo de habilidades.* Banco Interamericano de Desarrollo.

Cordero, S., Michel, G., Grigoriu, B., Valenzuela, M., Guzmán, R., Mamani, V. & Giacomán, H. (2018). Report on Mathematics Teacher Preparation in Bolivia. En: Y. Yamamoto & U. Malaspina (Eds.), *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay*, pp. 1-18. Switzerland: Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97544-3_1

Gómez, G., Giménez, D., Vega, O., Sanabria, M., Santa Cruz, M., Maidana, E. Mello, J. & Solís, R. (2018). Report on Mathematics Teacher Preparation in Paraguay. En: Y. Yamamoto & U. Malaspina (Eds.), *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay*, pp. 47-74. Switzerland: Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97544-3_3

Martínez, M., Castillo, P., Trelles, C., Gonzales, N., Calle, E., Ayala, A., Rivadeneira, F., Auccahuallpa, R. & Flores, M. (2017). Informe sobre la formación inicial y continua de profesores de matemáticas en el Ecuador. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 12(16), 11-45.

Martínez, M., Castillo, P., Trelles, C., Calle, E., Ayala, A., Rivadeneira, F. & Auccahuallpa, R. (2018). Report on Mathematics Teacher Preparation in Ecuador. En: Y. Yamamoto & U. Malaspina (Eds.), *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay*, pp. 19-45. Switzerland: Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97544-3_2

Osorio, A. (2017). Perú: La formación inicial y continua de los profesores de Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 12(16), 49-82.

Osorio, A., Aredo, M., Bonillla, M., Castro, O., Isidro, L., Quintanilla, C., Sabino, C & Villavicencio, M. (2018). Report on Mathematics Teacher Preparation in Perú. En: Y. Yamamoto & U. Malaspina (Eds.), *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay*, pp. 75-103. Switzerland: Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97544-3_4

Apéndice A
Fortalezas, Debilidades, Oportunidades y Amenazas - Bolivia

Tabla A1
Fortalezas, Debilidades, Oportunidades y Amenazas en la Formación Docente en Bolivia

Fortalezas
• El desarrollo docente es posible mediante estudios de posgrado y cursos profesionales. • El sistema educativo ofrece mejores condiciones de trabajo en infraestructura y tecnología. • La mayoría de los maestros, en todas las disciplinas y en todos los niveles, reciben una computadora para utilizarla en su enseñanza.
Debilidades
• El desempeño de los docentes no se evalúa y no se considera en su salario. La ubicación del docente en la escala salarial no está bien definida. La afiliación sindical es obligatoria • No hay un sistema de seguimiento para evaluar la formación de los maestros y la actualización de sus conocimientos. No hay estadísticas actualizadas de los centros de formación dónde los maestros recibieron su preparación ni sobre el trabajo que realizan. • El examen que evalúa la promoción docente solo considera aspectos administrativos, pedagógicos y filosóficos, pero no el conocimiento de la disciplina que se está enseñando. • Hay una carga ideológica excesiva en el currículo de los futuros maestros. Dada la politización de los docentes, muchas decisiones académicas y técnicas están contaminadas con la política. • La Olimpiada de Matemáticas se percibe como una carga docente adicional, mal remunerada. • La enseñanza en el aula se basa en la memorización algorítmica, no desarrolla el pensamiento matemático. La enseñanza de la geometría tiene debilidades. Los materiales didácticos en uso dan prioridad a la aritmética y al álgebra, separadas de la geometría. La lógica simbólica formal se ha eliminado del plan de estudios de matemática. • La tecnología no se usa en la enseñanza de las matemáticas. Pocos docentes asisten a los cursos sobre el uso de la tecnología en la enseñanza. • La preparación del profesor de matemáticas ha sido eliminada por la ESFM.
Oportunidades
• En la Red de Maestros se encuentran materiales de instrucción y cursos en línea que están disponibles para maestros que desean utilizar recursos tecnológicos. • La Universidad Pedagógica ofrece un Máster en Matemáticas para profesores en servicio.
Amenazas
• Hay un exceso de oferta laboral de profesores y pocas oportunidades para trabajar las ciudades. • Hay una necesidad de profesores de matemáticas especializados en áreas rurales que tengan responsabilidad y compromiso. Las remuneraciones de los docentes son bajas. • Los alumnos tienen terror a las matemáticas y hay maestros con actitud amenazadora en la clase. • El currículo para la preparación inicial y de posgrado de los maestros es administrado por el gobierno. El Ministerio de Educación tiene la responsabilidad exclusiva en la formación de los futuros maestros. Solo los cursos impartidos por el Ministerio de Educación se consideran en el aumento de la remuneración docente. • No hay suficientes cursos de postgrado en EM, así como cursos en línea o presenciales para el aprendizaje del uso de un software para la enseñanza de las Matemáticas. • Muchas escuelas tienen instalaciones eléctricas inadecuadas y muchos maestros no usan herramientas tecnológicas. El Internet a menudo no está disponible en las escuelas, particularmente en las áreas rurales.

Fuente: Cordero et al. 2018, pp. 15-17.

Apéndice B
Fortalezas, Debilidades, Oportunidades y Amenazas - Ecuador

Tabla B1
Fortalezas, Debilidades, Oportunidades y Amenazas de la Formación Docente en Ecuador

Fortalezas
• Existe un número apreciable de jóvenes docentes que están motivados y cuentan con la energía necesaria para incursionar en procesos de formación y actualización de conocimientos. • Los referentes académicos de las universidades poseen experiencia, base sólida para fortalecer a los jóvenes docentes de educación media.
Debilidades
• Falta de profesores especializados en Matemática, la mayoría de los profesores de matemática tiene títulos solo de educación. No hay datos oficiales de la demanda para los próximos años. • Decrecimiento de la proporción de profesoras a medida que se incrementa el nivel de estudios. Es importante promover carreras en ciencia y tecnología dentro del género femenino. • Poco reconocimiento social y remunerativo del profesor. • Falta de interés por parte de estudiantes en educación por desarrollar destrezas matemáticas, debido a la forma mecanicista y algorítmica de las clases. • Escasa participación de matemáticos en la formación continua brindada por las universidades. • Con frecuencia la capacitación ofertada no se acompaña de procesos de seguimiento o de medición de impactos ni cuenta con asesoría y apoyo permanente a los docentes. • Falta de infraestructura adecuada, bibliotecas físicas y virtuales como demanda el siglo XXI. • Carencia de maestrías y doctorados en el área de EM accesibles al docente promedio. • Ausencia de líneas de investigación en EM y escasa integración en redes • Falta de un currículo generalizado y fortalecido para la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Educación, mención Físico Matemático. • Deficiente dominio cognitivo en matemáticas de un porcentaje apreciable de profesores. El puntaje nacional es 547/1000 y el porcentaje de profes ores con rendimiento bajo es del 62 %.
Oportunidades
• La tendencia por parte del gobierno y los medios masivos a valorar el pensamiento científico, técnico y tecnológico, demanda a estudiantes y docentes a prepararse mejor en esta área. • El reconocimiento de la educación como un área prioritaria del plan de gobierno con la consecuente asignación de mayor presupuesto al área de capacitación docente. • Muchos profesores de la costa y sierra han obtenido títulos de cuarto nivel por convenios ofrecidos por el ministerio de educación y universidades nacionales e internacionales. • El rediseño curricular debe ser con una visión teórica-práctica integrada como una sola unidad, aumentar las horas prácticas analizando y seleccionando materias correctamente. • Las universidades buscan crear programas de postgrado y doctorado en el área de ciencias.
Amenazas
• El incremento de horas prácticas preprofesionales en el programa de formación docente (de 400 a 1800 horas) lleva a disminuir horas en materias teóricas importantes, o a inventar materias que se denominan prácticas, aunque realmente no desarrollen destrezas prácticas. • Los continuos cambios realizado sobre la Ley Orgánica de Educación Superior y su Reglamento, generan incertidumbre pues establecen nuevas jornadas y exigencias de trabajo. • Falta de comunicación coherente entre los principales involucrados en el tema de la educación y, en particular, la problemática de los profesores de matemáticas.

Fuente: Martínez et al., 2018, pp. 38, 40, 41.

Apéndice C
Desafíos y Oportunidades de la Formación Docente en Paraguay

Tabla C1
Desafíos y Oportunidades de la Formación Docente.

Desafíos y oportunidades
• Los programas de formación de maestros en Paraguay han tenido poco impacto en la práctica en el aula. Se enfatiza en la formación teórica sin una incidencia específica suficiente en la práctica. • Los estudiantes que ingresan a los *IFD* tienen dificultades por carecer de habilidades que no han sido desarrolladas en la escuela secundaria, situación que no les permite satisfacer las demandas de formación docente en matemáticas y otras áreas. • Muchos estudiantes postulan a los IFD porque no han sido admitidos en una universidad y necesitan obtener un empleo para ganarse la vida. No son los mejores estudiantes. • La formación continua no es considerada como un aspecto relevante por el Ministerio de Educación y Cultura. Es vista como una herramienta para corregir debilidades, y no se proporciona una ilación entre la formación inicial y la continua. Además, en tanto no se evalúa, existe evidencia limitada sobre el impacto que la formación continua tiene en la práctica en el aula. • Un aspecto que limita la formación inicial y continua docente está relacionada con la situación socioeconómica de los docentes en formación y en servicio, pues provienen, en su mayoría, de clases medias y bajas, y las remuneraciones son también bajas. • La formación académica de los profesores de formación docente es uno de los factores más importantes para garantizar la calidad de la formación docente. Por lo general los profesores de formación docente no tienen títulos de posgrado. Las áreas más afectadas son las Matemáticas y las Ciencias Naturales y Sociales. • Una de las razones por las que muchos docentes no superan las pruebas dadas como parte del proceso de solicitud del Ministerio para cargos docentes, es la formación inadecuada de los maestros. Hay muchos programas de formación para maestros, pero tienen una cobertura limitada, son discontinuos y carecen de un enfoque sistémico. • Los resultados de las pruebas dadas a aquellos que solicitan puestos docentes y administrativos, desde 2009, muestran deficiencias en la formación de maestros y administradores. La mayoría de los solicitantes no pasaron las pruebas y no fueron elegibles para ser contratados. Es necesario concentrar la atención en la formación inicial y continua de los maestros. • Los informes del Ministerio de Educación y Cultura en 2010 señalaron que en muchas escuelas paraguayas los maestros no tienen una formación específica para el nivel en el que están enseñando. En la Educación Inicial el 51% de los maestros no están debidamente certificados. El porcentaje de docentes no certificados para el 3° ciclo de EEB es del 38% y es del 47% para Educación Media (Tabla H1). • Otro desarrollo reciente y prometedor con respecto a la formación inicial de los maestros es que los Institutos de Formación de Maestros (*IFD*) están siendo evaluados. El informe de diagnóstico oficial y las recomendaciones con respecto a esta situación iniciarán cambios radicales y profundos que son necesarios. • Los maestros están pidiendo un desarrollo profesional futuro que comienza llenando los vacíos en el conocimiento del contenido que se perdió en su formación inicial. A continuación, quieren un enfoque específico en la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, les gustaría recibir más ayuda para incorporar la tecnología en su enseñanza y apreciarían una introducción a algunas áreas que aún son nuevas en EM en Paraguay, como la resolución de problemas y el modelado.

Fuente: Gómez et al., 2018, pp. 67-70.

Apéndice D
Fortalezas, debilidades y oportunidades de la formación docente en Perú

Tabla D1
Fortaleza, debilidades y oportunidades de la formación docente en Perú

Fortalezas
• Hay instituciones educativas que buscan alcanzar un estándar de calidad satisfactorio. Esta actitud es una muestra de que las cosas pueden mejorar y serían un ejemplo a seguir. • El Sistema Nacional de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad Educativa (SINEACE) tiene la tarea de acreditar a la totalidad de carreras profesionales dentro de universidades e institutos del país. En caso de que una carrera no logre alcanzar su acreditación luego de tres evaluaciones, será clausurada
Debilidades
• Tomando en cuenta los resultados de la Evaluación de Egreso 2013, aplicada por el Ministerio de Educación a los alumnos que culminaban sus estudios en los IESP, se ha comprobado que los egresados tienen competencias insuficientes. • La existencia de un DCBN único en los IESP supervisados por el Minedu y, a su vez, las diferentes mallas curriculares propuestas por las universidades, en el uso de la autonomía que les otorga la ley, producen diversidad curricular. • Las instituciones de formación docente no participan en las reformas curriculares de la EBR. • La práctica profesional en la mayoría de las instituciones se da de manera formal, ya que son pocas las instituciones de formación docente que cuentan con centros de aplicación o tienen convenios con redes de centros educativos para que sus alumnos puedan aplicar la formación teórica. • Existen formadores de docentes que se resisten al cambio y buscan reproducir las prácticas pedagógicas de quiénes les enseñaron. • Mayormente la infraestructura de los institutos superiores pedagógicos privados es precaria. El 2004, se encontró que el 38 % de ellos funcionaban en locales no adecuados: viviendas, edificios comerciales y otros establecimientos. La situación inversa se presenta en los institutos públicos, ya que el 95 % había sido construido para ofrecer formación profesional. • La formación docente en la especialidad adolece del dominio en temas de matemáticas. • De igual manera es evidente la falta de preparación en el aspecto didáctico matemático (o del conocimiento especializado).
Oportunidades
• Es necesario buscar elementos que permitan unificar los diversos currículos existentes de los Institutos Superiores Pedagógicos y las facultades de Educación que forman a los docentes. • Sería importante profundizar en el dominio de las matemáticas durante la formación docente. • Es una tarea pendiente incorporar en la preparación de los docentes los aspectos didácticos de la matemática • Promover la mejora de la infraestructura de los institutos superiores pedagógicos privados. • Brindar oportunidades para que los formadores de formadores se desarrollen profesionalmente. • Seguir mejorando los incentivos para que estudiantes de alto rendimiento ingresen a la formación docente, por ejemplo, a través de becas. • Trabajar por la mejora de las competencias matemáticas de los egresados de los IESP. • Elevar la calidad de los espacios de práctica profesional de los docentes en formación. • Buscar la presencia de las instituciones de formación docente en la reforma curricular de la Educación Básica Regular.

Fuente: Osorio et al., 2018, pp. 100-101.

Sesiones temáticas



La investigación sobre la formación del profesor de Matemática en el marco de la XV CIAEM

Nelly **León** Gómez
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
nellyleong@hotmail.com
Ricardo **Poveda**
Universidad Nacional
Costa Rica
ricardopovedav@gmail.com
Claudia **Vargas** Díaz
Universidad de Santiago de Chile
Chile
claudia.vargas.d@usach.cl

Resumen

La formación del docente de Matemática es un campo de interés investigativo que se percibe en las múltiples temáticas que se desarrollan a nivel internacional en esta línea de indagación. En el marco de las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática (CIAEM) ésta tiene una fuerte presencia en las comunicaciones que se reciben en los temas sobre formación inicial y continua y desarrollo profesional del docente que enseña Matemática en los diferentes niveles educativos en los países participantes. En este documento se presenta una visión panorámica del estado actual de esta cuestión partiendo de la revisión de los trabajos aprobados para la XV CIAEM, como punto de partida hacia la reflexión y la contrastación con las tendencias globales sobre la materia.

Palabras clave: Formación del profesor de Matemática, formación inicial, formación continua, investigación en formación docente.

Introducción

La formación del profesorado es un tema de interés actual con pertinencia social, académica y científica dado el relevante papel que éste cumple en la educación de los ciudadanos que las sociedades reclaman en la contemporaneidad. Tal es la importancia del docente que se ha llegado a afirmar que el logro de los propósitos que se plantean en programas educativos dependerá más de lo que éste piense, sienta y haga que de las inversiones en tiempo y recursos

materiales y humanos que se destinen a ellos, lo cual estará condicionado de alguna manera por la formación que éste ostente.

En el campo de la Educación Matemática la formación del profesor constituye un tema de interés y de preocupación investigativa. Esto se refleja, como lo señalan Guacaneme y Mora (2012), en la proliferación de publicaciones respecto al tema, la realización de estudios de gran escala como el Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M) (Tatto, Ingvarson, Schwille, Peck, Senk, y Rowley, 2008) y la inclusión de la formación docente como tema en diversos eventos académicos de cobertura internacional como el ICME y la CIAEM. Con respecto a las CIAEM, es posible referir las últimas tres ediciones de este evento en las cuales se han incluido varios temas al respecto. La XIII CIAEM (Recife - Brasil, 2011) tuvo como uno de sus dos temas centrales la formación de profesores en Educación Matemática; en la XIV CIAEM (México – Chiapas, 2015) se incluyó un tema para la formación inicial de profesores de enseñanza primaria en Educación Matemática grados 1 a 6 y otro para los profesores de enseñanza secundaria grados 7 a 12, además de un tema sobre formación continua y desarrollo profesional en Educación Matemática. Finalmente, en la presente conferencia, XV CIAEM (Colombia –Medellín, 2019), hay un tema sobre formación inicial de profesores y otro sobre formación continua y desarrollo profesional.

Precisamente, lo que queremos en este espacio académico es presentar una visión panorámica de la investigación en formación docente y desarrollo profesional en Educación Matemática en el marco de esta XV CIAEM como punto de partida para la reflexión y la discusión sobre estos temas, respecto a los cuales hay muchas interrogantes aparte de las inquietudes que puedan aquí surgir.

Tendencias internacionales en la investigación en formación docente y desarrollo profesional en Educación Matemática

En un intento de mostrar una panorámica de los centros de interés de la investigación en la formación del profesor de Matemática tomaremos como referencia el estudio que Strutchens, Huang, Losano, Potari, Cyrini, Da Ponte y Zbiek (2017) realizaron en el marco del Grupo de Estudio Temático "La Educación Matemática de los futuros profesores de secundaria en el mundo" desarrollado durante el ICME-13 en Hamburgo, además de los trabajos de Sánchez (2011) que hace una revisión de las tendencias en la investigación sobre educación de los profesores de Matemática, y los de la línea de investigación en desarrollo profesional del docente de Matemática del grupo de Cardeñoso, Flores, y Azcárate (2001)

Este último grupo de autores clasifican los problemas de interés en el campo que nos ocupa, a partir de la revisión realizada por Rico (1996), en investigaciones sobre: a) el currículo, b) los procesos de enseñanza/aprendizaje, c) la formación didáctica/matemática de los profesores, y d) investigaciones sobre cuestiones epistemológicas y/o teóricas, ubicando en este último su línea de investigación "Formación y desarrollo de los profesores de Matemática" cuyo interés abarca no solo estrategias de formación, sino también la manera de concebir el quehacer del docente y el proceso de su desarrollo profesional en el entorno donde se desenvuelve.

Sánchez (2011) presenta una revisión de las tendencias internacionales, principalmente entre 1999 y 2019, en la investigación sobre la formación inicial y continua del profesor de Matemática, considerando las temáticas, los referentes teóricos y las tendencias. Sobre los tópicos la discusión se centra en cinco categorías: a) las concepciones y creencias de los profesores: b) las prácticas de enseñanza de los docentes; c) conocimientos y habilidades; d)

relación entre teoría y práctica y, e) prácticas reflexivas; siendo, según este autor, la primera categoría la más seguida debido quizás a la idea que se tiene de que las creencias y las concepciones de los docentes inciden directamente en su práctica educativa (Skott, 2009, citado por Sánchez, 2011)

En cuanto a los aspectos teóricos, Sánchez reporta el uso de una amplia gama de conceptos como referentes en las investigaciones sobre formación del docente de Matemática, y en particular destaca los siguientes: a) conocimiento pedagógico del contenido y otras formas de conocimiento partiendo de las nociones iniciales de Shulman (1986, 1987) hasta las aportaciones de Ball, Bass, Delaney, Hill, Lewis, Phelps, et al (2007), en su teoría "Matemática para la enseñanza" en la cual descomponen las dos categorías expuestas por Shulman, "conocimiento del contenido matemático" y "conocimiento pedagógico del contenidos", en subcategorías: "conocimiento común del contenido" y "conocimiento especializado del contenido", para la primera; y "conocimiento del contenido y del estudiante" y "conocimiento del contenido y de la enseñanza" para la segunda; b) reflexión en acción y reflexión sobre la acción, categorías propuestas por Schön (citado por Sánchez) como posibilidades del docente para cuestionar su práctica durante y después del acto pedagógico, lo que se complementa con la categoría *reflexión para la acción* que ocurriría antes de la actuación (Scherer y Steinbring, 2007; citado por Sánchez) y, c) comunidad de práctica, propuesta por Wenger (1998) para referirse a un grupo de docentes que comparten interés por su práctica, reflexionan y aprenden sobre ella de manera compartida. Sobre las nuevas tendencias en investigación, Sánchez señala cuatro cuestiones de interés: a) formación On-line del profesor de Matemática; b) diseño de tareas y su rol en la formación del docente, c) formación y desarrollo profesional de los formadores de docentes y d) justicia social en la educación de los profesores de Matemática.

En el grupo de estudio temático del ICME-13, Strutchen et al (2017) organizaron los puntos de discusión en cuatro áreas: a) conocimiento del profesor, b) tecnología, herramientas y recursos, c) Identidad profesional del profesor y d) experiencias de campo. Sobre el dominio del contenido matemático mencionan los estudios internacionales TEDS-M que direccionan el conocimiento en cuatro subdominios: número y operaciones, álgebra y funciones, geometría y medida, y datos y azar (Tatto, et al, 2012); tres dimensiones cognitivas: conocer, aplicar y razonar; y como procesos matemáticos: resolución de problemas y modelación y razonamiento y demostración. Señalan Scrutchen et al (2017) que predominan los contenidos de número y geometría, las dimensiones cognitivas de conocer y aplicar y los procesos de resolución de problemas y modelación.

En los estudios relacionados con el conocimiento del profesor de Matemática predomina como perspectiva teórica la cognitiva constructivista, con escasa presencia de enfoques socio-culturales y, metodológicamente, las aproximaciones cualitativas interpretativas con indagaciones a pequeña escala.

Para finalizar esta visión panorámica de la investigación en la formación del profesor de Matemática, mostramos las dimensiones que Guacaneme y Mora (2012, pp 107-108) resumen como tendencias en la educación del profesor de Matemática como campo de investigación: a) las creencias, visiones y concepciones de los profesores; la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas; currículo; b) Las actividades prácticas en el quehacer docente de los profesores y los procesos de aprendizaje profesional que a partir de ellas se desarrollan y las relaciones entre el conocimiento teórico y la práctica de la enseñanza de las matemáticas; c) Los conocimientos y competencias de los profesores de matemáticas. En esta línea de acción

destacan las investigaciones sobre el conocimiento matemático necesario para orientar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (*mathematics for teaching)* , así como las indagaciones sobre el conocimiento didáctico del contenido matemático (*pedagogical content knowledge);* d) las estrategias y tareas utilizadas en los programas de formación de profesores de matemáticas para su educación; e) las dinámicas de formación que se dan en comunidades de práctica de profesores de matemáticas y su relación con su desarrollo profesional; f) la educación de los formadores de profesores; y h) La educación online de profesores de Matemática.

La investigación sobre la formación inicial de profesores en la XV CIAEM

En el Tema 01: *Formación Inicial de profesores* se aceptó un total de 67 trabajos, 36 en portugués, 30 en español y 1 en inglés, distribuidos según el tipo y el número de autores por trabajo, como se muestra en el Cuadro 1:

Cuadro 1
Clasificación de los trabajos del Tema 01 según idioma y número de autores

	Comunicaciones						**Talleres**					**Posters**					
Autores	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**T**	**1**	**2**	**3**	**4**	**T**	**1**	**2**	**3**	**4**	**T**	**Total**
Idioma																	
Portugués	3	16	5	17	2	**33**						2	1			**3**	36
Español	4	12	7	2		**25**		2		1	**3**		1	1		**2**	30
Inglés										1	**1**						1
Total	**7**	**28**	**12**	**19**	**2**	**58**		**2**		**2**	**4**	**2**	**2**	**2**		**5**	**67**

Estos trabajos fueron presentados por docentes/investigadores de 13 países, siendo Brasil y Colombia los de mayor representación (Ver Cuadro 2)

Cuadro 2
Distribución de autores por países

País	**N° de autores**
Argentina	5
Bélgica	1
Brasil	71
Chile	4
Chile-Brasil	1
Colombia	24
Costa Rica	5
España	12
Estados Unidos	3
México	14
Mozambique	1
Perú	3
Venezuela	1
Total	**145**

La mayor parte de los trabajos estuvieron dirigidos principalmente al nivel de Educación Superior al tratarse de investigaciones sobre la preparación que reciben los futuros docentes en

las universidades para el ejercicio de la enseñanza de la Matemática; en segundo lugar, están los trabajos que reportan experiencias formativas con la intervención de estudiantes de Educación Básica, Primaria o Secundaria (Ver Cuadro 3).

Cuadro 3
Nivel educativo al que van dirigidos los trabajos

Nivel educativo	N° de trabajos
Educación Infantil	2
Educación Primaria	7
Educación Secundaria	7
Educación Básica*	11
Educación Superior	42
General	7

*No se indica si es Primaria o Secundaria

En cuanto al tipo de trabajo, se observa en el Cuadro 4 que no todos corresponden a investigaciones en sí mismas, sino que 16 de ellos reportan experiencias de aula o propuestas académicas. Dentro de las investigaciones, coincidiendo con las líneas internacionales, predominan las aproximaciones cualitativas de enfoque interpretativo con alcance exploratorio o descriptivo. También destacan los diseños de investigación acción que se ubican en el paradigma crítico, los estudios documentales y los que se centran en el análisis del discurso en menor escala.

Cuadro 4
Enfoque, tipo y diseño de investigación

Enfoque	Tipo o diseño	N°
Cuantitativo	Descriptiva	**1**
Cuali-cuantitativo	Descriptiva	**1**
Cualitativo		**48**
	Sin especificar	10
	Exploratoria	4
	Descriptiva	5
	Interpretativa	7
	Naturalista-Etnográfica	1
	Estudio de caso	5
	Investigación acción	5
	Análisis de contenido	5
	Documental	6
	Ingeniería didáctica	**1**
Experiencias de Aula		**13**
Propuestas pedagógicas		**3**

Las líneas de investigación que surgen de la revisión y análisis de los trabajos presentados en el tema de la formación inicial del profesor de matemática las organizamos en el Cuadro 5 según el campo de interés y el énfasis en la formación, el cual hemos diferenciado en cuatro

ámbitos de formación: disciplinar, pedagógica, práctica e investigativa, reconociendo que ésta no es una separación claramente delimitada, sino que apunta al mayor énfasis formativo visualizado en cada escrito, por lo que algunos trabajos están clasificados en más de un eje formativo. Estos cuatro componentes de la formación ya fueron estudiados en los informes sobre la formación inicial y continua del profesor de matemática generados en el marco de los Seminarios Formación Docente y Construcción de Capacidades CANP-2 y CANP-5. (Ruiz, 2017; Baldin y Malaspina, 2018)

Cuadro 5

Líneas de investigación

Campo de interés	**Énfasis en la formación**				**Total**
	Disciplinar	**Pedagógica**	**Práctica**	**Investigativa**	
Aprendizaje	5	4			**9**
Didáctica	3	10	2	2	**17**
Conocimiento profesional de profesor	5	6	2		**13**
Competencias profesionales		2	1		**3**
Currículum	2	1			**3**
Pensamiento y razonamiento matemáticos	4	2			**6**
Diseño y resolución de problemas	1	2		1	**4**
Historia de la Matemática	1				**3**
Uso de Tecnología	5	5			**10**
Concepciones y creencias		1		2	**3**
Educación especial-educación inclusiva	1	4			**5**
Integración Escuela-Universidad		1	4	2	**7**
Formación de formadores			1		**1**
Articulación formación inicial-formación continua			1		**1**
Total	**28**	**39**	**11**	**7**	

Los campos de interés derivan de las tendencias internacionales ya mostradas y de lo que ha emergido de las propuestas, partiendo de las palabras clave, los resúmenes y de una revisión más detallada de los extensos cuando fue necesario. Esta categorización no es disyuntiva sino que algunos trabajos están ubicados en más de un centro de interés.

El ámbito de la formación pedagógica, que abarca tanto la general como la especializada, fue el que tuvo mayor repercusión, seguido de la formación disciplinar en matemática y un tanto alejados de estos, los de formación práctica o para la práctica y la formación en, para y desde la investigación, mostrando así que lo que más preocupa a los investigadores son las cuestiones relativas a la adquisición del conocimiento matemático por los futuros docentes y a los procesos de enseñanza y aprendizaje del mismo.

Si nos desplazamos por las filas del Cuadro 5, lo primero que podemos percibir es que el campo de mayor interés investigativo ha sido el de la didáctica, particularmente asociado al ámbito de la formación pedagógica. Aquí encontramos indagaciones sobre el diseño de tareas,

actividades y recursos; uso de materiales concretos y juegos didácticos entre otros; en el ámbito de la formación disciplinar se incluyen trabajos que abordan la enseñanza de contenidos matemáticos que se desglosan en el Cuadro 6:

Cuadro 6

Contenidos matemáticos tratados en las investigaciones sobre formación inicial del docente

Nivel educativo	Contenido matemático	N°
Educación Infantil	Clasificación	1
	Magnitudes	1
Educación Primaria	Números y operaciones	2
	Fracciones	2
	Geometría	1
	Razones y proporciones	1
Educación Secundaria	Números y operaciones	1
	Números racionales	1
	Álgebra y funciones	1
	Geometría	1
Educación Básica*	Geometría	2
	Números y operaciones básicas	1
	Números racionales	1
	Estadística	1
Educación Superior	Cálculo (funciones, límite y derivada)	5
	Geometría	4
	Álgebra y teoría de números	1
	Topología	1

- Sin especificar si es primaria o secundaria

Como se ve, están presentes los cuatro subdominios que mencionan los estudios TEDS-M y predominan los de números y geometría, en concordancia con lo reportado en el Grupo de Estudio Temático del ICME-13 antes reseñado.

En el componente de formación práctica destacamos trabajos sobre la intencionalidad pedagógica y didáctica de la práctica docente y el aula de práctica como un ambiente lúdico.

En concordancia con las tendencias internacionales, el segundo lugar lo ocupan los estudios sobre el conocimiento profesional y las competencias del profesor de Matemática, lo que evidencia la inquietud por aproximar respuestas a la interrogante sobre el tipo de conocimientos y habilidades que necesita una persona para ser un buen profesor de Matemática pues está claro que para esto no es suficiente conocer los contenidos a enseñar y las teorías

pedagógicas (Sánchez, 2011, citado por Cruz-Márquez y Montiel, 2019). En este rubro encontramos diversidad de trabajos que analizan: el conocimiento profesional del profesor de enseñanza media, cómo enseñar a los profesores a enseñar matemática, decisiones de acción del docente sobre el pensamiento de los estudiantes, saberes docentes para el diseño de tareas, asignación de significados a conceptos matemáticos, el estudio de temas específicos como forma de ampliar el conocimiento especializado del profesor, hasta investigaciones que reportan el estado del arte de este tema focalizado en espacios específicos.

Algunas comunicaciones tienen como punto focal desarrollar en los docentes en formación la competencia de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Esta competencia abarca tres destrezas interrelacionadas: describir las estrategias utilizadas por los estudiantes, interpretar/anticipar la comprensión de estos y decidir cómo responder basándose en tal comprensión (Jacobs, Lamb y Philipp; 2010). Esta ha sido aplicada para estudiar las decisiones de acciones del docente sobre el pensamiento matemático de estudiantes de primaria y para anticipar la comprensión e interpretar el pensamiento de niños de educación infantil.

La temática sobre el uso de las nuevas tecnologías ha sido incorporado por Strutchens et al. (2017) como uno de los ejes de interés investigativo en el campo que nos ocupa, y lo han direccionado en tres vertientes a) como herramienta para la construcción dinámica de conocimientos en el estudiante para docente de Matemática y la generación de actitudes positivas hacia su aplicación futura en el aula; b) como herramienta auxiliar en el diseño de tareas y en el seguimiento del pensamiento del estudiante al realizarlas y c) como herramienta para propiciar el razonamiento matemático de los estudiantes mediante la resolución de problemas. En esta CIAEM se han presentado propuestas que, mediante el uso las nuevas tecnologías, se direccionan hacia el diseño, reformulación y resolución de problemas; el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas; el despliegue de estrategias motivacionales que involucran recursos como juegos y videos; el aprendizaje de conceptos de diversas áreas de la Matemática, especialmente de Geometría a través del software dinámico Geogebra. Otros trabajos orientan sus propósitos a la integración de la tecnología en la práctica docente a través de la metodología Lesson Study, a las dificultades de los docentes para incorporar las facilidades tecnológicas a sus clases de Matemática y a la virtualización en la formación docente~~s~~ a través de estudios a distancia; esto último reportado por Sánchez (2011) como una tendencia emergente en la materia.

El aprendizaje de la Matemática es – cómo no – un tema concerniente al quehacer educativo que preocupa a docentes e investigadores. Este se da de manera conjunta con el proceso de enseñanza pero lo hemos diferenciado como punto de interés tomando como criterio los sujetos sobre los cuales recae el norte investigativo, es decir, los estudiantes. Algunas aportaciones sobre este punto se enfilan hacia la formación disciplinar, mediante estudios que indagan sobre cómo los docentes en formación aprenden ciertos temas matemáticos, sus dificultades conceptuales y las oportunidades de aprendizaje que realmente se les ofrecen en los diversos programas de formación. Otros hacen hincapié en la formación pedagógica de los futuros docentes como facilitadores de los aprendizajes en sus estudiantes, abarcando los enfoques cognitivos-constructivistas, el aprendizaje colaborativo, en comunidades de práctica, el uso de materiales concretos y juegos instruccional, el uso de la historia de la matemática como motivación hacia el aprendizaje de la disciplina, entre otras cuestiones remarcables.

En investigaciones sobre procesos matemáticos seguimos los pasos de Structchen et al. (2011) quienes los agrupan en dos dimensiones: resolución de problemas y modelación y razonamiento matemático y demostración. Sobre resolución de problemas como esencia misma del quehacer matemático hay una inclinación indagativa en los ámbitos de formación disciplinar, pedagógica e

investigativa. Se aprecian investigaciones en torno a la resolución de problemas con el uso de tecnología; la vinculación entre la resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático con sus manifestaciones de creatividad, flexibilidad, originalidad y fluidez; y, el planteamiento, reformulación y solución de problemas como catalizadores del aprendizaje. Sobre modelación solo se presenta una comunicación que aborda el tema de los poliedros en un escenario de modelación como actividad propia del quehacer matemático.

En el tema del razonamiento matemático se encuentran trabajos dentro de la formación disciplinar que tienen que ver con procesos propios de la matemática como la validación de las ideas matemáticas a través de la argumentación y la demostración y con el significado de la demostración matemático en una comunidad de práctica.

Contrario a lo reportado por Cardeñoso, Flores, y Azcárate (2001) y por Sánchez (2011), las concepciones y creencias de los docentes en formación sobre la Matemática, su enseñanza y su aprendizaje no ocupan un lugar destacado en la investigación en la formación inicial docente en el marco de esta CIAEM. Solo tres trabajos se refieren a estos constructos; dos de ellos que tratan sobre las concepciones de los practicantes docentes en cuanto a su formación para el ejercicio de una docencia investigativa y a su rol como docentes investigadores y el otro, a las concepciones de los futuros profesores sobre una enseñanza de la Matemática inclusiva.

Precisamente, las inquietudes sobre la atención de estudiantes con necesidades o capacidades especiales y su integración al aula regular es temática para la búsqueda de opciones. Ocupa en esta línea la formación de docentes para enseñar Matemática a estudiantes con discalculia, capacidades diferenciadas, deficiencia intelectual, trastorno bipolar, Síndrome de Down, deficiencias auditivas.

En los informes sobre la formación inicial y continua del profesor de Matemática derivados de CANP-2 y CANP-5 se pulsa la vinculación entre la formación teórica y la formación práctica por una parte y, por otra, se cuestiona hasta qué punto esa formación que recibe el futuro docente en su estancia en la universidad realmente lo prepara para un ejercicio eficiente de su profesión. Como punto común a ellos se denuncia una falta de interrelación entre lo teórico y lo práctico y un desfase entre lo que hace la universidad en los programas de formación y la realidad escolar. Varios trabajos presentados en la XV CIAEM, con énfasis en la formación práctica, atienden esa problemática y la articulación entre la formación inicial y la formación continua. Dentro de las comunicaciones escritas en portugués emerge una línea sobre las pasantías o prácticas profesionales (Programa de Estagio Supervisionado) mirándolas como una posibilidad para una real integración escuela-universidad y no solamente como aquel momento para demostrar el logro de los conocimientos y competencias para que el docente en formación pueda ser enviado al campo laboral.

A manera de cierre

Los planteamientos anteriores posicionan los intereses investigativos sobre la formación del docente de matemática divulgados en el marco de la XV CIAEM en consonancia con el estado del arte mostrado en reportes sobre el tema. Para continuar la reflexión, valga apuntar que dos de las líneas señaladas por Sánchez como tendencias en la materia (formación on-line y justicia social) y la de identidad profesional del profesor de Matemática, resaltada por Schrutchen, et al, se echan de menos en esta panorámica, aun cuando se reconocen como puntos de interés indagativo en la región. Bastaría con ampliar un poco el foco de búsqueda para percatarnos de esto. Muestra de ello lo encontramos en los trabajos propuestos al VIII CIBEM, realizado en Madrid en 2017, al tema IV: Formación del Profesorado en Matemáticas. Aquí se presentaron comunicaciones sobre la formación on-line de profesores en ambientes colaborativos, la formación continua mediante diversidad de propuestas de cursos en línea y el

tipo de conocimientos que en ellos se ponen en juego, la tecnología y la educación a distancia y reflexiones sobre la virtualidad en la formación de profesores de Matemática, entre otras.

Además, se comunicaron trabajos sobre la construcción de la identidad del profesor de Matemática, el papel que en ello ocupan las experiencias vivenciadas por los profesores en formación al inicio de la carrera; la forma como los modos de sentir, pensar y actuar, o sea la identidad profesional, inciden en las decisiones que toma el profesorado en cuanto a la docencia que ejerce, entre otros aspectos vinculados a esta tendencia en la investigación en la formación docente en Matemática. Estos son puntos a tomar en cuenta en devenir investigativo en este campo de estudio.

Referencias y bibliografía

Cardeñoso, J.M.; Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo professional de los profesores de Matemática como campo de investigación. Em P. Gómez y L. Rico (eds), Iniciación a la investigación em didáctica de la matemática, Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada, Universidad de Granada.

Baldin Y. Malaspina, U. (eds.), 2018. *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay.* Springer Brief in Education, Switzerland.

Ball, D. L., Bass, H., Delaney, S., Hill, H., Lewis, J., Phelps, G., Thames, M. y Zopf, a. D. (2005). Conceptualizing mathematical knowledge for teaching. Trabajo presentado en Annual meeting of the American Educational Research Association, Montréal, Quebec.

Cruz-Márquez, G. y Montiel G. (2019). De Ptolomeo a la formación inicial docente en matemáticas . Comunicación presentada en la XV CIAEM, Medellín.

Guacaneme, E. y Mora, L. (2012). La educación del professor de Matemática como campo mde investigación. Revista papeles, 4(9), 102-109.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Ruiz, A (ed), 2017, *Mathematics Teacher Preparation in Central America and the Caribbean*. Springer Brief in Education, Switzerland.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.

Shulman, L. (1986), "Those who understand: Knowledge growth in teaching", Educational Research, 15(2), 4-14.

Shulman, L.(1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1–22

Strutchens, M., Huang, R., Losano, L., Potari, D., Ponte, J. P. D., Cyrino, M. C. D. C. T., y Zbiek, R. M. (2016). *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world*. Springer Open.

Tatto, M.T., Ingvarson, L., Schwille, J., Peck, R., Senk, S. y Rowley, G. (2008). Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M). Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics.Conceptual Framework. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Ediciones Paidós: Barcelona, España.

Formación inicial de profesores

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

ANÁLISE DE ATIVIDADES MATEMÁTICAS NA PERSPECTIVA DA BNCC E NÍVEIS DE DEMANDAS COGNITIVAS

Charlâni Ferreira Batista Rafael – Mestre – charlanibatista@gmail.com
Claudia Lisete Oliveira Groenwald – Doutora - claudiag@ulbra.br

RESUMO

Este artigo é um recorte da tese de Doutorado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), referente ao tema Formação inicial de Professores de Matemática. Objetiva investigar como acontece a relação entre as atividades do 6º ano selecionadas no livro didático adotado nas escolas municipais da cidade de Barreiras, Bahia, dentro da unidade temática Números, e as habilidades apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com enfoque nos níveis de demanda cognitiva exigidas em cada atividade. Para tanto, foi utilizada uma pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa, analisando atividades didáticas com a temática em questão. Os resultados encontrados mostraram a necessidade de um planejamento embasado nas orientações da BNCC e que não deve se limitar apenas ao uso do livro didático.

Palavras Chave – Formação Inicial; Educação Matemática; Números; Livro Didático; Demanda Cognitiva.

1 FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Diante da atual realidade em que o ensino de Matemática vêm enfrentando obstáculos por vários motivos, como a falta de pré-requisitos dos estudantes, desmotivação por parte dos alunos e ainda, professores sem habitação adequada na área específica, é importante que todos se conscientizem que o conhecimento matemático é importante para a formação integral dos alunos da Educação Básica, seja por sua aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (BNCC, 2017).

Zabalza (2004) afirma ser necessário insistir em uma formação que sirva para qualificar as pessoas, a fim de que atinja o desenvolvimento pessoal, com conhecimento e desenvolvimento de competências, com uma visão ampla de mundo, de modo a agir nele com autonomia e criticidade. Seguindo a mesma linha de pensamento, Pimenta (2002a) afirma que é da natureza da atividade docente proceder à mediação reflexiva e crítica entre as transformações sociais concretas e a

formação humana dos alunos, questionando modos de pensar, sentir, agir e de produzir e distribuir conhecimentos. Somente a partir de reflexões é possível aprimorar a prática pedagógica, deixando para trás atitudes e ações que não trouxeram resultados benéficos substituindo-os por procedimentos e práticas favoráveis ao desenvolvimento, tanto do professor, quanto do aluno, na disciplina em questão.

Para Llinares (2015) a competência docente do professor de Matemática de *Olhar Profissionalmente* o processo de ensino e aprendizagem é caracterizada pelo fato de que o professor é capaz de reconhecer os fatos que podem ser relevantes na sala de aula para explicar a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

2 A TEMÁTICA NÚMEROS NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Atualmente, a temática Números alcança um conjunto de conteúdos que se organizam formando uma das cinco unidades temáticas que integram a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) implantada no Brasil no ano de 2018. A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, implica no conhecimento de maneiras à quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades (Brasil, 2017, p. 266).

A BNCC traz orientações que norteiam e facilitam o trabalho do professor, mas, para isso é necessário que este, se disponha a realizar um estudo detalhado buscando compreender as habilidades e competências que o aluno deve desenvolver em cada etapa de ensino. Para tanto, nos anos finais do Ensino Fundamental, a expectativa em relação a essa temática é que: os alunos resolvam problemas com números Naturais e números Racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados (Brasil, 2017, p. 266).

Além disso, é importante que os alunos não fiquem limitados a atividades que, para serem resolvidas, necessitem apenas de cálculos simples, impossibilitando-os de aprofundarem a noção de Número e suas aplicações, para isso a BNCC sugere que o professor deve colocar os seus alunos "diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária" (Brasil, 2017). Outra atribuição inclusa nesta unidade temática que deve ser levada em consideração é a forma como favorece estudos interdisciplinares, envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, assim como a econômica, em relação a

questões do consumo, trabalho e dinheiro. A BNCC traz na temática Números, para o 6º ano do Ensino Fundamental, os objetos de conhecimentos apresentados na Figura 1:

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO
NÚMEROS	1. Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal
	2. Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais
	3. Divisão Euclidiana
	4. Fluxograma para determinar a paridade de um número natural
	5. Múltiplos e divisores de um Número Natural
	6. Números primos e compostos
	7. Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações
	8. Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais
	9. Aproximação de números para múltiplos de potências de 10
	10. Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três"

Figura 1: Matemática 6º ano do Ensino Fundamental conforme a BNCC
Fonte: Retirado da BNCC (Brasil, 2017, p. 298).

3 MÉTODO

Na pesquisa foi realizada uma investigação que dependeu de um "conjunto de procedimentos intelectuais e técnicos" (GIL, 1999, p.26). Aconteceu por meio de uma pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa, que analisou 10 atividades do livro didático *Matemática Bianchini,* do 6º ano do Ensino Fundamental, do ano de 2015, utilizado nas escolas municipais de Barreiras, no estado da Bahia, no Brasil.

Para Gil (2002 pg. 44), a pesquisa bibliográfica "é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos". Minayo (2001) defende que a pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

Para tanto, foi estudado a BNCC, textos referentes à Formação Inicial de Professores e níveis de demanda cognitiva para o planejamento de atividades didáticas. Após as leituras foi realizado a análise de 10 (dez) atividades relacionadas ao objeto de conhecimento Números Naturais, especificamente envolvendo adição, encontradas no livro didático investigado, buscando estabelecer relações com os objetos de conhecimento e habilidades vigentes na BNCC.

4 DEMANDA COGNITIVA DE ATIVIDADES DIDÁTICAS

Para Penalva e Llinares (2011) ao planejar suas aulas o professor deve ter em mente o que pretende que os alunos atinjam ou aprendam ao término de determinada etapa, a escolha, seleção e a concepção das *tarefas Matemáticas* se apresentam desde a perspectiva de considerá-las como

instrumentos para a aprendizagem dos estudantes. Ainda, para os autores, esta perspectiva conduz a introdução da ideia de *demanda cognitiva* e como utilizá-la para analisar as tarefas (atividades) em função dos objetivos de aprendizagem pretendidos.

Para os autores um dos elementos importante para a aprendizagem da Matemática são os problemas, as atividades e os exercícios que o professor propõe aos seus estudantes (*tarefa*). Os autores definem o termo *tarefa* como sendo as propostas de ação que os professores apresentam, pensam ou expõem aos seus alunos para a aprendizagem da Matemática. Definem a *atividade* como o conjunto formado pelas *tarefas* e o sistema de atividades cognitivas individuais e/ou sociais desenvolvidas pelo resolvedor (aluno), sendo ela real ou hipotética e o *procedimento* o método de realização de algumas coisas.

Penalva e Llinares (2011) consideram a *tarefa matemática* importante, pois é ela que determina o que os alunos podem chegar a aprender e qual o caminho para isto, neste sentido as *tarefas*, segundo os autores, são os instrumentos que o professor utiliza para que os alunos aprendam **matemática**, portanto, existe um vínculo entre a aprendizagem e a gestão ou gerenciamento das *tarefas* em sala de aula. Quer dizer que não é só a tarefa que condicionará a aprendizagem dos alunos, mas o que eles farão com ela e, como o professor a conduz, pois se os alunos realizam somente atividades de reprodução de procedimentos previamente introduzidos, com o objetivo de memorizar algoritmos, dificilmente eles poderão atingir outros objetivos.

Os autores destacam que o mais importante a analisar é que as *tarefas* por si só não são suficientes para potencializar um determinado tipo de aprendizado, mas que podem ser consideradas como elemento chave neste processo. As *tarefas matemáticas* são importantes no processo de ensino porque representam as oportunidades que o professor de matemática proporciona aos seus alunos para aprenderem matemática e, portanto, vinculam o ensino e a aprendizagem.

Segundo Penalva e Llinares (2011) a ideia de *demanda cognitiva* de uma *tarefa* permite centrar a atenção no que ela exige do resolvedor (aluno), desta maneira, o foco se situa no que o aluno tem que fazer: Reproduzir/memorizar; Aplicar procedimentos sem conexão; Considerar o significado dos procedimentos e os conceitos; Estabelecer relações e coordenar significados (fazer matemática). Smith e Stein (1998) citados em Penalva e Llinares (2011) utilizam o nível de *demanda cognitiva* das *tarefas* para diferenciá-las segundo o potencial que podem ter para desenvolver diferentes aspectos da aprendizagem: Nível 1: tarefas de memorização; Nível 2:

tarefas de procedimentos sem conexão; Nível 3: tarefas de procedimentos com conexão; Nível 4: tarefas que requerem "fazer matemática".

Smith e Stein (1998) definem os níveis 1 e 2 como *demandas de nível baixo*, e os níveis 3 e 4 como *demandas de níveis* alto, as quais são caracterizadas por: As tarefas de nível 1 são tarefas/atividades de memorização, que: Envolvem reproduzir fórmulas, regras, fatos ou definições previamente aprendidos ou dirigidos a memorizar fórmulas; Não são ambíguas, essas tarefas envolvem reproduzir exatamente algo visto anteriormente e o que tem de ser reproduzido está de forma clara e diretamente estabelecida; Não coloca em evidência os conceitos ou significados subjacentes aos fatos, regras, fórmulas ou definições que estão sendo aprendidas ou reproduzidas.

As tarefas de nível 2 são tarefas/atividades de procedimentos sem conexão, que: São algorítmicas, a utilização do procedimento é especificamente reivindicada ou seu uso é óbvio com base na informação anterior, experiência no lugar da atividade/tarefa planejada; Requer uma demanda cognitiva limitada para realiza-la com êxito. Há pouca ambiguidade do que precisa ser feito e como fazê-lo; Não têm nenhuma conexão com conceitos ou significados subjacentes ao procedimento que está sendo utilizado; Estão focados em produzir respostas corretas em vez de desenvolver compreensão matemática; Não necessitam de explicações, ou somente explicações centradas em descrever o procedimento utilizado.

E as tarefas de nível 3 e 4 são *demandas de nível alto*, as quais apresentam as seguintes características: As tarefas de nível 3 são atividades/tarefas de procedimentos com conexão que: Estão centradas no significado do conceito ou procedimento. Focando a atenção do aluno na utilização dos procedimentos, a fim de desenvolver uma compreensão de conceitos e ideias matemáticas; Sugere formas (explícita ou implicitamente) que são procedimentos gerais que têm conexões estreitas com as ideias conceituais ao invés de algoritmos que são opacas relativamente aos conceitos subjacentes; De maneira usual, representados em várias formas (por exemplo, diagramas visuais, material concreto, símbolos, situações problemáticas). Fazendo conexões entre múltiplas representações ajuda a desenvolver significado; Requer algum grau de esforço cognitivo. Embora você possa utilizar procedimentos gerais, não podem ser usados sem pensar. Os alunos precisam se envolver com as ideias conceituais por trás dos procedimentos para realizar com êxito a tarefa/atividade.

As tarefas de nível 4 são atividades/tarefas que exijam "fazer matemática" que: Requer um pensamento complexo e não algorítmico (por exemplo, não existe uma aproximação na realização da atividade/tarefa bem definida com antecedência que pode ser lembrado ou um caminho que seja explicitamente sugerido pela atividade/tarefa ou instrução prévia); Requer que os alunos a explorem e compreendam os conceitos, processos ou relações matemáticas; Demandam a autorregulação da aprendizagem. Exige dos alunos (i) gerar uma resposta que requer uma compreensão conceitual da noção matemática, e (ii) verificar e explicar a resposta produzida; Requer que os alunos acessem um conhecimento ou experiências relevantes, e fazem uso adequado dos mesmos quando se trabalha ao longo da tarefa; Requer considerável esforço cognitivo, e pode implicar certo nível de ansiedade para o aluno devido à natureza não previsível do processo de resolução requerido.

5 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DO LIVRO DIDÁTICO EM RELAÇÃO AOS OBJETOS DE CONHECIMENTOS E HABILIDADES DA BNCC

Na Figura 2, apresenta-se as habilidades referentes ao objeto de conhecimento Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com Números Naturais.

Objetos de conhecimento – 6º ano	**Habilidades**
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com Números Naturais	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com Números Naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

Figura 2: Quadro com objetos de conhecimento e habilidades do 6º ano do Ensino Fundamental
Fonte: Dados retirados da BNCC (Brasil, 2017, p. 298).

Na primeira apreciação das questões, foi possível afirmar que, para solucioná-las, requerem dos alunos a habilidade de resolverem problemas que envolvam cálculos com Números Naturais por meios de diferentes estratégias, mas, não foi possível concluir que demandam a compreensão dos processos neles envolvidos.

No livro didático adotado no município verifica-se, com base na Figura 1, que o Sistema de Numeração Decimal incluindo porcentagem, objetos de conhecimento 1, 3, 8 e 10 da BNCC são desenvolvidos nos capítulos 7º e 8º por meio dos tópicos: Operações com Números Racionais na forma de fração e Números racionais na forma decimal e operações, no entanto, em nenhum dos subtemas dos citados tópicos há o estabelecimento de relações com Números Naturais.

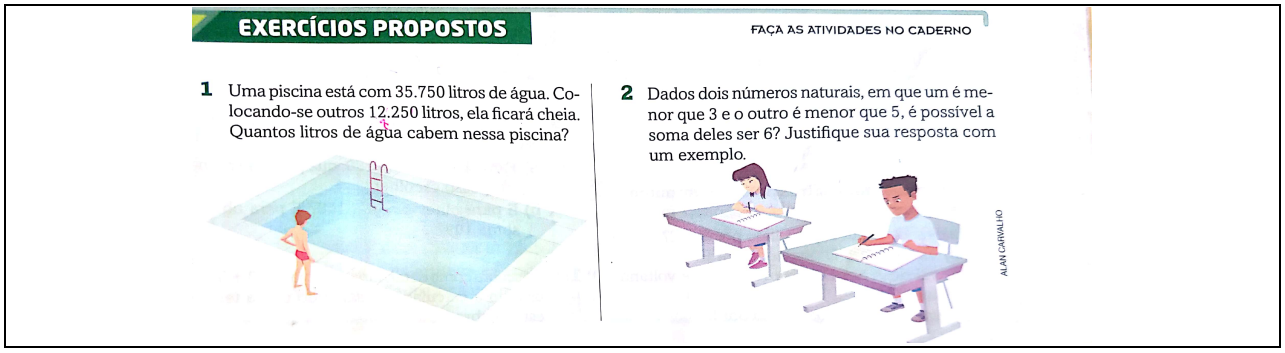
Os objetos de conhecimento 2, 5, 6 e 9 relacionados a operações de Números Naturais e divisibilidade se encontram distribuídos em 02 (dois) capítulos: Operações com números Naturais

e Divisibilidade. O objeto 7 não alcança, no livro, a sequência de estudos orientada, haja vista que o estudo de frações vem sempre atrelado ao estudo de Números Racionais. Ademais, o objeto 4 não é abordado no livro didático analisado.

Com base nos resultados apresentados entende-se que o professor não deve limitar o planejamento de suas aulas ao livro didático adotado na escola, assim como segui-lo sem uma análise prévia, isso porque "nenhuma outra decisão que o professor toma tem um impacto tão grande nas oportunidades de aprendizagem do aluno e na sua percepção acerca do que é a Matemática, como a seleção ou criação de tarefas" (STEELE, 2001, p. 42).

4.2 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DO LIVRO DIDÁTICO DO 6º ANO EM RELAÇÃO AOS NÍVEIS DE DEMANDAS COGNITIVAS

Apresentam-se a seguir as atividades e, posteriormente as suas classificações em relação ao nível de demanda cognitiva.


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Uma piscina está com 35.750 litros de água. Colocando-se outros 12.250 litros, ela ficará cheia. Quantos litros de água cabem nessa piscina?

2 Dados dois números naturais, em que um é menor que 3 e o outro é menor que 5, é possível a soma deles ser 6? Justifique sua resposta com um exemplo.

ALAN CARVALHO

Figura 3: Atividades 1 e 2
Fonte: Bianchini (2015, p. 31)

As questões 01 e 02 requerem baixo nível de demanda cognitiva, na categoria de Procedimento sem conexão com significados, sendo a questão 1 considerada algorítmica, de modo que o uso do procedimento está evidente de uma instrução prévia, experiência, ou localização da questão e a de número 02 requer uma demanda cognitiva limitada para uma conclusão bem sucedida existindo uma pequena ambiguidade sobre o que necessita ser feito e como fazê-lo (STEIN et al., 2009).



3 Segundo estimativa do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2014, o estado do Maranhão, sem considerar a capital, São Luís, tinha 5.786.687 habitantes. Quantos habitantes tinha todo o estado do Maranhão, se São Luís tinha 1.064.197 habitantes?

MAURICIO SIMONETTI/PULSAR IMAGENS

Vista aérea da Lagoa Jansen em São Luís, MA. (Foto de 2013.)

4 No mapa reproduzido abaixo, está representada a distância rodoviária, em quilômetros, entre as cidades A, B, C, D e E.

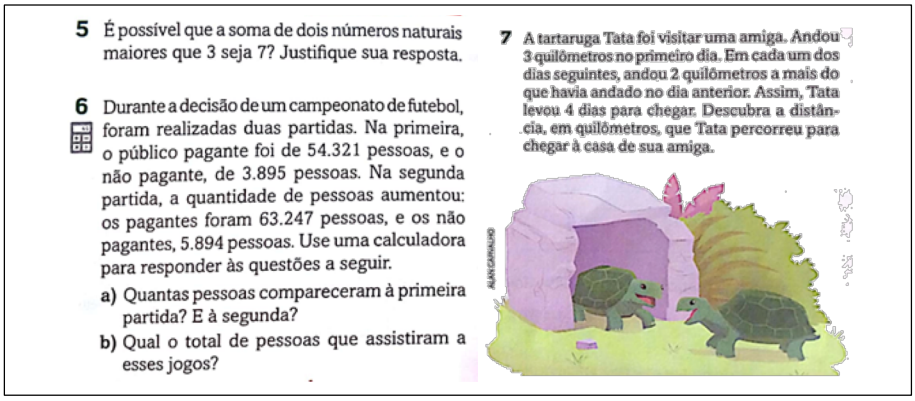
JOSÉ LUIS JUHAS

Quantos quilômetros percorre um automóvel que:

a) vai de A até D passando por B e C?
b) vai de A até D passando por E?
c) vai de A até D passando por B e voltando até C?
d) vai de B até E passando por D?

Figura 3: Atividades 3 e 4
Fonte: Bianchini (2015, p. 32)

É possível identificar que as questões 03 e 04 requerem, também, baixo nível de demanda cognitiva na categoria de Procedimentos sem conexão com significados, por serem ambas, algorítmicas, com o uso de procedimentos, especificamente com solicitações que estão evidentes de uma instrução prévia, experiência, ou localização da questão e também da categoria de Memorização, uma vez que não são ambíguas: é uma questão que envolve uma reprodução exata do material visto previamente, em relação ao que é para ser reproduzido está claro e diretamente apresentado; (STEIN et al., 2009).



5 É possível que a soma de dois números naturais maiores que 3 seja 7? Justifique sua resposta.

6 Durante a decisão de um campeonato de futebol, foram realizadas duas partidas. Na primeira, o público pagante foi de 54.321 pessoas, e o não pagante, de 3.895 pessoas. Na segunda partida, a quantidade de pessoas aumentou: os pagantes foram 63.247 pessoas, e os não pagantes, 5.894 pessoas. Use uma calculadora para responder às questões a seguir.

a) Quantas pessoas compareceram à primeira partida? E à segunda?
b) Qual o total de pessoas que assistiram a esses jogos?

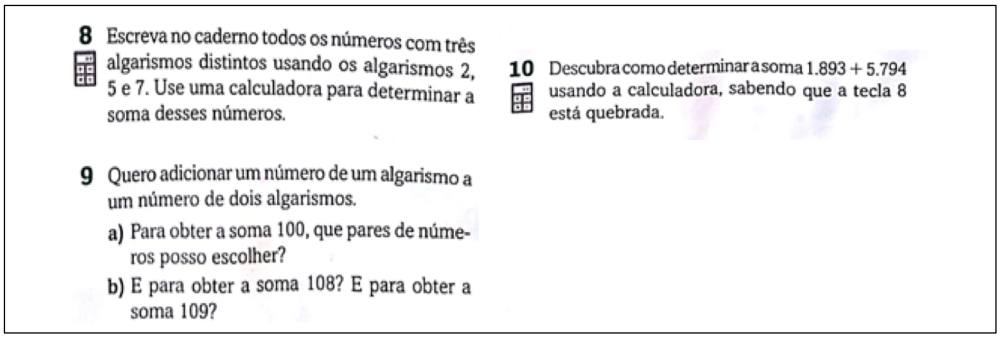
7 A tartaruga Tata foi visitar uma amiga. Andou 3 quilômetros no primeiro dia. Em cada um dos dias seguintes, andou 2 quilômetros a mais do que havia andado no dia anterior. Assim, Tata levou 4 dias para chegar. Descubra a distância, em quilômetros, que Tata percorreu para chegar à casa de sua amiga.

ALAN CARVALHO

Figura 3: Atividades 5, 6 e 7
Fonte: Bianchini (2015, p. 32)

As questões 05, 06 e 07, como as anteriores exigem baixo nível de demanda cognitiva. Pertencem à categoria de Memorização por envolverem a reprodução dos fatos aprendidos previamente, e de Procedimento sem conexão com significados, isso porque requerem uma demanda cognitiva limitada para uma conclusão bem sucedida e existe pequena ambiguidade

sobre o que necessita ser feito e como fazê-lo. A questão 5 inclui, também, explicações que focam unicamente na descrição do procedimento que foi usado. (STEIN et al., 2009)



8 Escreva no caderno todos os números com três algarismos distintos usando os algarismos 2, 5 e 7. Use uma calculadora para determinar a soma desses números.

9 Quero adicionar um número de um algarismo a um número de dois algarismos.

a) Para obter a soma 100, que pares de números posso escolher?

b) E para obter a soma 108? E para obter a soma 109?

10 Descubra como determinar a soma 1.893 + 5.794 usando a calculadora, sabendo que a tecla 8 está quebrada.

Figura 3: Atividades 8, 9 e 10
Fonte: Bianchini (2015, p. 32)

As questões apresentadas na sequência se diferem entre si. A questão 08 requer baixo nível de demanda na categoria Memorização, uma vez que, envolve a reprodução dos fatos aprendidos previamente; enquanto as questões 09 e 10 requerem um elevado nível de demanda cognitiva na categoria de Procedimentos com conexão com significados isso porque focam a atenção dos alunos sobre o uso de procedimentos a fim de desenvolverem mais profundamente os níveis de entendimento dos conceitos e ideias matemáticas (STEIN et al., 2009).

CONSIDERAÇÕES

O estudo realizado permitiu observar que o livro didático adotado no município de Barreiras não está muito distante do que pede a BNCC, apesar de ter sido editado no ano de 2015, antes da publicação da BNCC. Esta afirmação se refere aos objetos de conhecimentos determinados para aquela etapa de ensino específica e das habilidades que devem ser desenvolvidas a partir do ensino dos objetos listados.

Quanto à análise das atividades em relação aos níveis de demandas cognitivas, percebeu-se que as questões propostas estão aquém do esperado para um ensino que contribua para o desenvolvimento intelectual e cognitivo dos alunos, visto que das questões apresentadas apenas duas possuíam um elevado nível de demanda cognitiva. Diante do exposto, sugere-se que os professores ao planejarem suas aulas utilizem o livro didático, porém, não como única ferramenta para utilizar em sala de aula, mas como um suporte ao planejamento docente.

REFERÊNCIAS

Asmad, U. Cruz, G**. (**2004). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil*. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática- Tercer grado de Secundaria- Quinto grado de Secundaria,.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica (2017). *Fundamentos pedagógicos e estrutura geral da BNCC.* Brasília, DF. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc. Acesso em: Agosto de 2018.

Bianchini, Edwaldo (2015). *Matemática Bianchini*. 8. Ed. – São Paulo: Moderna.

Gil, Antônio Carlos (1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 5. ed. São Paulo: Atlas.

_____ (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*, 4. ed. São Paulo: Atlas.

Llinares, S. (2015). Cómo dar sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? Algunos aspectos de la competencia docente del profesor. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Chiapas, México: [s.n.].

Minayo, M. C. S. (Org.) (2001). *Pesquisa social: teoria, método e criatividade*. Petrópolis: Vozes.

Penalva, M. C.; Llinares, S. (2011). *Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria*. In:GOÑI, Jesus María (coord) et al. Didáctica de las Matemáticas. Colección: Formación del Profesorado. Educación Secundaria. Barcelona: Editora GRAÓ. Vol 12. p. 27-51.

Pimenta, Selma Garrido (2002a). *Professor reflexivo no Brasil: gênese e crítica de um conceito.* São Paulo: Cortez.

Portugal (2005). Associação de Professores de Matemática. *Tarefas e atividades como elementos do currículo de matemática*. In: O PROFESSOR e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM. p. 39-72.

Steele, D. F. (2001). *Vozes entusiastas de jovens matemáticos***.** Educação e Matemática, n. 62, p. 39-42, mar./abr.

Stein, M. K. et al. (2009). *Implementing standards-based mathemaics instruction: a casebook for professional development***.** New York: Teachers College Press.

Zabalza, Miguel (2004). *O ensino universitário: seus cenários e seus protagonistas.* Porto Alegre: Artes Médicas.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Design de enunciados de problemas abertos para propiciar a (re)formulação e resolução desses problemas com o uso de tecnologias digitais na formação de futuros professores de Matemática

Fabiane Fischer **Figueiredo**
E.E.E.M. João Habekost, Universidade Luterana do Brasil
Brasil
fabianefischerfigueiredo@gmail.com
Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
claudiag@ulbra.br

Resumo

Neste trabalho apresentam-se os resultados obtidos com uma investigação, em que um grupo de futuras professoras de Matemática realizaram o *design* de um problema, utilizando as tecnologias digitais, para que esse pudesse favorecer a sua (re)formulação no processo de resolução, com o uso de tais recursos. O objetivo pretendido era que adquirissem a experiência como *designer* de problemas e refletissem sobre a mesma. O problema produzido apresentou características e aspectos que permitem depreender que, ao ser (re)formulado e resolvido, pode contribuir para a Educação Matemática Crítica e a Educação Financeira Escolar. Quanto ao processo formativo das futuras professoras, constatou-se que (re)construíram as suas concepções acerca do *design* de problemas abertos, em que as tecnologias digitais são utilizadas, para propiciar a (re)formulação e resolução de problemas com o uso desses recursos, bem como sobre a abordagem de temas de relevância social, que possam favorecer o ensino de conhecimentos matemáticos.

Palavras-chave: Design de problemas abertos, (Re)formulação e resolução de problemas, Tecnologias Digitais, Formação inicial de professores, Matemática.

Comunicação

Introdução

A formação inicial de professores de Matemática, de acordo com as necessidades requeridas pela sociedade, na contemporaneidade, vem exigindo o estudo de novas perspectivas metodológicas, por parte dos futuros professores, que os capacitem para o planejamento e a realização de práticas pedagógicas, com os alunos da Educação Básica. Entre as perspectivas, destaca-se o

design de enunciados de problemas do tipo aberto[1] e que podem abordar temas de relevância social, em que tecnologias digitais são utilizadas, com a finalidade de que tais problemas propiciem a sua (re)formulação e resolução com o uso desses recursos (Figueiredo, 2017).

Essa perspectiva, por dinamizar a resolução de problemas, pode contribuir para que os futuros professores adquiram a experiência como *designer* de problemas, que os permitam produzir conhecimentos, no que se refere a aspectos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e acerca da abordagem de temas de relevância social, com uma abordagem da Educação Matemática Crítica (Figueiredo, 2017) e para a Educação Financeira Escolar. Também, possibilita a apresentação e/ou o desenvolvimento de competências e habilidades, como a tomada de decisões, a discussão e a reflexão sobre a atividade realizada.

Desse modo, optou-se por apresentar, neste artigo, os principais resultados obtidos com a proposta desse *design*, que foi realizado por um grupo de futuras professoras de Matemática, denominadas D, E e F. Tais resultados fazem parte de uma investigação, de cunho qualitativo, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM)/Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)-Canoas-RS-Brasil.

O *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais e a (re)formulação e resolução desses problemas

Conforme Figueiredo e Dalla Vecchia (2015), o *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais é uma atividade, que requer a elaboração de problemas abertos, para serem resolvidos com o uso dessas tecnologias. Nesse *design*, também, podem ser valorizados os interesses, os conhecimentos prévios e os níveis de desenvolvimento cognitivo dos alunos, bem como serem atribuídos um ou mais aspectos, como a visualização, a simulação, a investigação, a reflexão crítica, a (re)formulação de problemas, entre outros (Figueiredo, 2017).

Para realizá-lo, o(s) *designer(s)* é/são o(s) professor(es) e/ou o(s) aluno(s) que podem executar as etapas propostas por Figueiredo (2017), que foram identificadas a partir das fases mencionadas por Filatro (2008) para o *Design* de Sistemas Instrucionais ou *ISD*[2] (análise da necessidade, projeto, desenvolvimento e implementação da solução e avaliação da solução obtida): *formação do grupo de trabalho (designers); análise das necessidades; projeto/planejamento*, *desenvolvimento e implementação*; *avaliação da primeira versão do problema*; *discussão e reflexão por parte dos designers*; e *realização de modificações ou do re-design, para obter a segunda versão do problema*. Também, pode ser utilizado o recurso *storyboard*, "[...] na fase de pré-produção, [...] [que] funciona como uma série de esquetes (cenas) e anotações que mostram visualmente como a seqüência (sic) de ações deve se desenrolar" (Filatro, 2008, p.60).

Entre os aspectos, que podem ser atribuídos ao *design* e a resolução dos problemas, entende-se que (re)formulação apresenta potencialidades, que podem contribuir para a produção de conhecimentos matemáticos. De acordo com Brown e Walter (2009), a (re)formulação associada à resolução de problemas, possibilita que os alunos elaborem os seus próprios questionamentos e apresentem um ou mais problemas, ao reconstruírem o problema proposto pelo professor, de modo que os orientem nas suas decisões, ações, no uso de recursos, nas explorações e estratégias no processo de resolução.

[1]Para Allevato (2008), tais problemas oportunizam aos alunos a tomada de decisões, a valorização de suas próprias ideias e a exploração dos conteúdos matemáticos no processo de resolução.
[2] *"Instructional System Design".*

Bravo e Sánchez (2012) salientam que a (re)formulação de problemas é uma competência que pode ser desenvolvida, visto que possibilita a melhoria da relação entre a forma como surgiu um problema (completo ou incompleto) e a sua resolução. Essa atividade ou competência pode possibilitar o desenvolvimento de outras competências matemáticas específicas, como por exemplos: pensar, formular e resolver problemas, argumentar, representar entidades e comunicar, com e sobre a Matemática.

Para Jurado (2017), a (re)formulação pode favorecer o desenvolvimento das capacidades de análise de situações problemáticas, de identificar ou a criar problemas, de resolver problemas e de elaborar de questionamentos, que permitam refletir criticamente sobre a realidade. Como sugestões, menciona que o professor deve criar ou orientar os alunos para que criem problemas por: *variação*, em que um novo problema é produzido ao modificar um ou mais elementos fundamentais do problema proposto; ou *elaboração*, que a produção de um novo problema ocorre de forma livre, a partir de uma situação problemática.

Abramovich (2015) salienta que, nessa atividade, podem ser utilizadas os recursos tecnológicos, como os computacionais. No entanto, declara que os professores precisam ter a oportunidade de discutir e refletir criticamente sobre os problemas matemáticos, com e sem o uso desses recursos e ambientes computacionais, e como esses podem ser utilizados para desenvolvê-los. Ademais, torna-se necessário a compreensão da coerência didática de um problema e dos resultados que podem ser gerados por tais recursos.

Diante do exposto, entende-se que o *design* de enunciados de problemas abertos, que abordam temas de relevância social, pode ser um meio para propiciar as atividades de reformulação e/ou de formulação e resolução de outros problemas, subsidiários, com o uso de tecnologias digitais. Além disso, essas atividades associadas favorecem a produção de conhecimentos matemáticos, tecnológicos e acerca de temas de relevância social, que podem promover a Educação Matemática Crítica, por parte dos alunos da Educação Básica, assim como o desenvolvimento de competências e habilidades, sendo elas: tomar decisões, criar, inovar, explorar, investigar, interagir, refletir criticamente e trocar ideias. Todavia, é necessário que os futuros professores de Matemática sejam preparados para utilizar essa perspectiva em sala de aula.

Metodologia

Os resultados aqui apresentados foram obtidos por meio de uma investigação, de cunho qualitativo, cujo objetivo era investigar, por meio das atividades de *design* e de (re)formulação e resolução de problemas, quais são os conhecimentos produzidos por futuros professores, no que se refere a aspectos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e relativos à abordagem de temas de relevância social, que podem promover a Educação Matemática Crítica. Para realizá-la, optou-se pelo método *estudo de caso*, uma vez que buscou-se planejar um experimento, que consistiu em ofertar e ministrar um curso de extensão semipresencial, em 2018, denominado *Design de problemas matemáticos com o uso das tecnologias digitais, sob o enfoque da (re)formulação de problemas na Educação Matemática*, que teve 60 horas de duração.

Os participantes foram 10 alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da ULBRA, que estavam cursando entre o 5º e 8º semestres e tiveram como professoras formadoras as pesquisadoras. Para coletar os dados, houve a utilização dos instrumentos: observações participantes, por parte das pesquisadoras e que foram registradas em documentos de *word*; e registros dos alunos no Ambiente Virtual de Aprendizagem *Moodle* (ULBRA, 2018), onde as atividades foram propostas e realizadas.

Neste artigo, apresenta-se o recorte dos resultados obtidos entre o 5º e 8º encontros do curso, que são referentes a atividade em que os futuros professores de Matemática realizaram o *design* de um problema do tipo aberto, utilizando as tecnologias digitais, com o objetivo de que esse favorecesse a sua (re)formulação no processo de resolução, com o uso de tais recursos, e para que os futuros professores adquirissem a experiência como *designer* de problemas e refletissem sobre a atividade realizada. A seguir apresenta-se as etapas realizadas no *design* de um dos problemas, que foi planejado, desenvolvido e implementado pelas alunas D, E e F.

O problema produzido

Como atividade, as futuras professoras D, E e F realizaram o *design*, utilizando as tecnologias digitais e abordaram um tema de relevância social, que pudesse promover a Educação Matemática Crítica, na (re)formulação e resolução dos problemas. Também, discutiram e refletiram sobre a atividade, que ocorreu em etapas, como as descritas por Figueiredo (2017).

Na etapa *formação do grupo de trabalho*, as alunas D, E e F formaram o grupo de trabalho, pelo critério de afinidade. Elas discutiram, na etapa de *análise das necessidades*, e decidiram produzir o problema para ser proposto a alunos de um terceiro ano do Ensino Médio, já que a aluna E era a professora e queria propô-lo aos mesmos, juntamente com as demais colegas.

O tema de relevância social escolhido foi o planejamento das compras de móveis para a residência escolhida, observando o orçamento, a poupança e as formas de pagamento determinados para o personagem. A aluna E alegou que esse tema vinha ao encontro dos interesses e das expectivas futuras de seus alunos, pois acredita que a maioria pretende ter a sua independência e residir sozinho. Dessa forma, as alunas D, E e F almejavam que a (re)formulação e a resolução do problema favorecesse, também, a Educação Matemática Crítica.

No que diz respeito ao conhecimentos matemáticos, reconheceram que o tema contribuía para o emprego e/ou ensino das quatro operações com os números racionais, valores monetários, porcentagem, juros, medidas de comprimento e áreas de figuras geométricas planas e espaciais através da resolução do problemas, cujo tema e conhecimentos poderiam contribuir para a Educação Financeira, no ambiente escolar. Em relação às tecnologias digitais, optaram por pesquisar na *Internet* as imagens de plantas baixas de residências com um, dois e três dormitórios e utilizar os recursos do *site Toondoo*[3], para produzir uma história em quadrinhos, na forma de um *book online*.

Nas etapas de *projeto/planejamento*, de *desenvolvimento* e de *implementação*, as alunas D, E e F decidiram elaborar um *storyboard*, com o uso de um documento de *word*, onde esboçaram cada parte da história em quadrinhos e utilizaram as plantas baixas pesquisadas (atribuição de *aspectos estéticos* e a *visualização*). Nessas, verificou-se, também, que escolheram produzir duas opções para o problema, uma com o personagem principal sendo uma mulher e outra sendo um homem, para que os alunos do 3º ano pudessem escolher o personagem e tomar as decisões como se estivessem vivenciando a mesma situação (*aspectos estéticos* e *simulação*).

A história em quadrinhos foi produzida para que apresentasse informações incompletas, que os alunos deveriam completá-las para resolvê-lo (*características de um problema do tipo aberto* e da *(re)formulação e resolução de problemas* e a *exploração*), assim como para que propiciasse a realização de pesquisas em *sites* de Lojas, para escolherem os móveis conforme as medidas de largura, comprimento e altura, os melhores preços e condições de pagamento fornecidas, e das

[3]Disponível em: http://www.toondoo.com

condições financeiras determinadas para o personagens e registrá-las (*investigação*, *produção escrita* e *reflexão crítica*). As alunas D e E fizeram as duas opções no *site Toondoo* e a aluna F apenas as auxiliou na escolha dos cenários, personagens e objetos.

Na etapa de *avaliação da primeira versão do problema*, as pesquisadoras analisaram os aspectos estéticos e o enunciado do problema, nas duas opções, para fornecer o *feedback* às alunas D, E e F (*designers*). Para as opções feminina e masculina do problema, foram sugeridas a revisão da ortografia das palavras e o uso de sinais de pontuação, a alteração do tamanho dos objetos e do personagem principal, para serem proporcionais aos cenários escolhidos, e que as imagens das plantas baixas das residências deveriam ser nítidas, já que estavam fora de foco.

Na etapa de *discussão e reflexão por parte dos designers*, as alunas D, E e F discutiram e decidiram realizar as modificações que julgaram necessárias, conforme com os comentários feitos pelas pesquisadoras. Na etapa de *realização de modificações ou do re-design, para obter a segunda versão do problema*, obtiveram a segunda versão do problema, em que se verifica as alterações solicitadas.

Das opções do problema, que se diferem apenas pelo personagem, apresenta-se o enunciado do problema produzido, que foi denominado como "Mobiliando a casa - versão masculina" (Figuras 1 e 2). O problema produzido pode ser proposto a alunos de um terceiro ano do Ensino Médio, pois pode propiciar a (re)formulação e a resolução do problema por *variação*, caso tomem a decisão de modificar um ou mais elementos do mesmo e/ou por *elaboração*, se optarem por produzir de um novo enunciado para o problema, a partir do mesmo (Jurado, 2017).

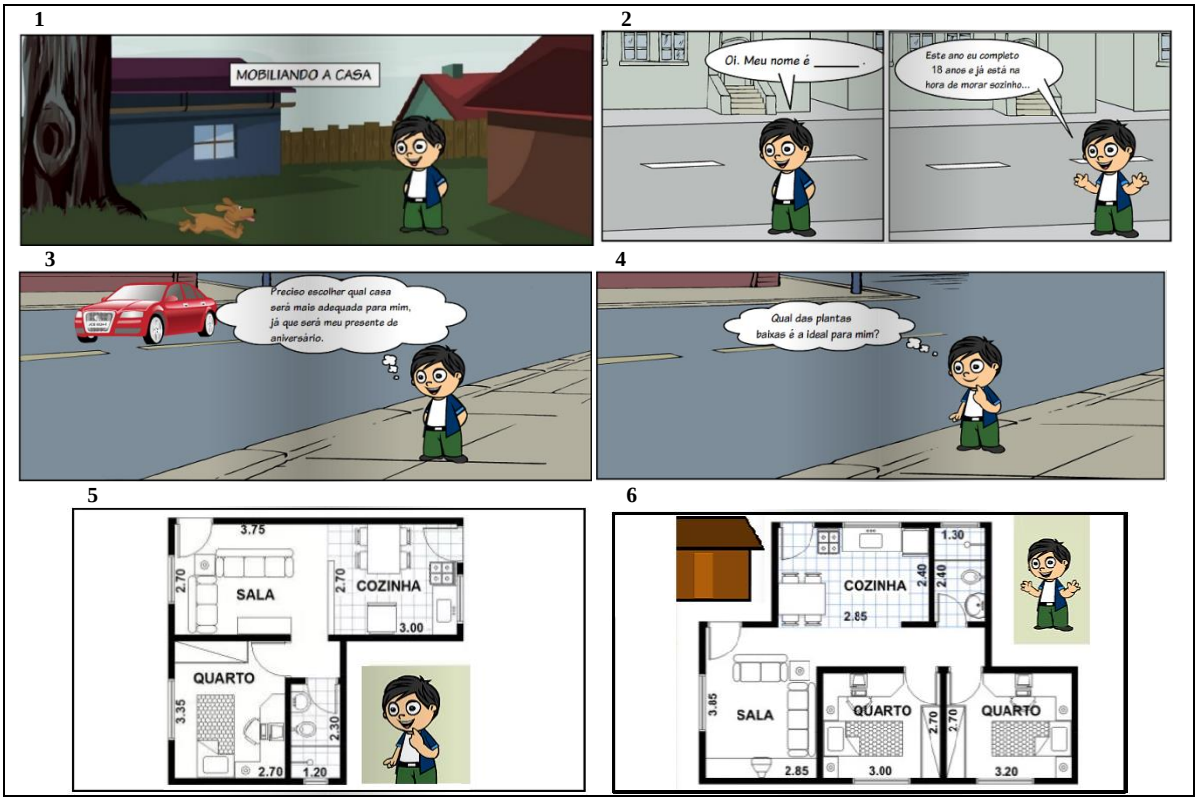


Figura 1. Páginas 1 a 6 da versão masculina do problema, disponível em: http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696307

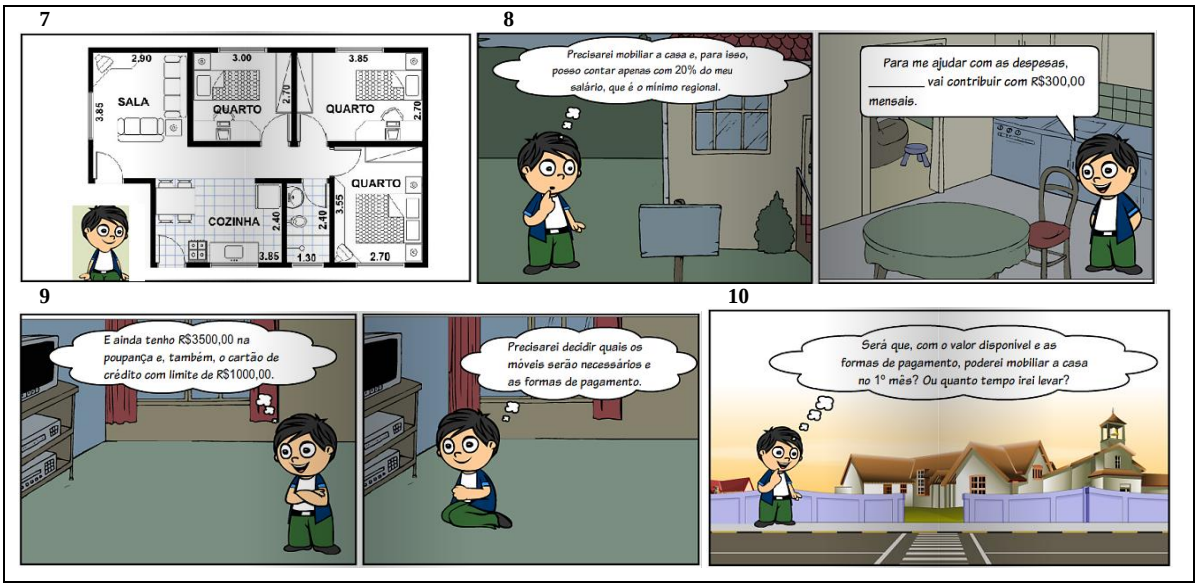


Figura 2. Páginas 7 a 10 da versão masculina do problema, disponível em: http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696307

No problema, verifica-se que, da página 1 a 4 do *book online*, são expostas informações sobre o personagem, que, na página 2, é solicitado que seja nomeado o mesmo e na página 4 há um questionamento que instiga a escolha de umas das plantas baixas das residências. Nas páginas 5 a 7, são apresentadas as plantas baixas das residências, de um (página 5), dois (página 6) e três (página 7) dormitórios, respectivamente, que possuem a representação de como os móveis podem ser dispostos nos cômodos, que podem ou não interferir nas decisões dos alunos. Nas páginas 8 e 9, são fornecidas as informações quanto às condições financeiras e de pagamento que o personagem possui e, ainda, é necessário determinar o nome do outro personagem, que poderia ajudar na compra e no pagamento. Na página 10, há questionamentos que suscitam a busca por uma solução para o problema, visto que é necessário que respondam se o personagem poderá efetuar ou não as compras, no primeiro mês em que já estiver morando sozinho.

Ao término do *design* do problema, as alunas D, E e F participaram do Fórum "Refletindo sobre o *design* dos problemas com a utilização das tecnologias digitais", que foi proposto no Ambiente Virtual de Aprendizagem *Moodle* (ULBRA, 2018). Nele, as alunas D e F escreveram que a experiência como *designer* foi inovadora, uma vez que lhes permitiu a aprendizagem de uma nova perspectiva metodológica, diferenciada e enriquecedora, que exige a reflexão sobre como deve ser produzido o enunciado de um problema para que os alunos o resolvam, sejam autônomos na tomada de decisões e aprendam conhecimentos matemáticos. A aluna D, ainda, mencionou que a resolução do problema "*[...] poderá desenvolver as capacidades de tentar, supor, testar e provar o que é proposto [...]".*

A aluna E afirmou que "[...] o *design de problema é uma metodologia [...], que possibilita trabalhar com inúmeras situações com os alunos e, a partir dessas situações, torná-los mais críticos e independentes na tomada de suas decisões"*. Pela resposta da aluna, depreende-se que ela compreendeu que a perspectiva evidenciada pode viabilizar o desenvolvimento de competências e habilidades, como a reflexão crítica e a tomada de decisões.

Pelas respostas das alunas D, E e F, nota-se que identificaram as potencialidades que o *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais, cuja pretensão é que ocorra a sua (re)formulação e

resolução com o uso desses recursos, por parte dos alunos. Também, a experiência como *designers* e a posterior reflexão sobre a atividade realizada, foram oportunidades para que aprendessem a produzir enunciados de problemas, considerando os objetivos pretendidos e as competências e habilidades a serem desenvolvidas, bem como para que compreendessem os resultados que poderiam ser gerados pela resolução do problema (Abramovich, 2015).

Considerações finais

O *design* de enunciados de problemas abertos, com o uso de tecnologias digitais, sob a associação das perspectivas da (re)formulação e da resolução de problemas, com o uso desses recursos, pode contribuir para que os futuros professores aprendam a utilizar essa perspectiva no planejamento de suas práticas pedagógicas, de modo que possibilite o ensino da Matemática e a Educação Financeira Escolar de seus alunos. Também, essa experiência adquirida pelos futuros professores pode favorecer o entendimento de como os temas de relevância social, para uma abordagem da Educação Matemática Crítica, podem ser abordados através da (re)formulação e resolução de problemas, com o uso de tecnologias digitais, e para a aprendizagem de conhecimentos matemáticos e tecnológicos.

Para isso, entende-se que essa perspectiva metodológica deve ser estudada, discutida e refletida na formação inicial de professores de Matemática. Por meio das etapas realizadas, os futuros professores podem produzir conhecimentos quanto a realização de *designs* de problemas matemáticos do tipo aberto, utilizando as tecnologias digitais, e como tais problemas podem ser propostos aos alunos da Educação Básica, para propiciarem a sua (re)formulação e resolução, de forma articulada, com o uso desses recursos.

Desse modo, afirma-se a necessidade de que os futuros professores sejam orientados, nesse processo, pelos professores formadores, para que os enunciados dos problemas sejam pré-determinados e apresentem informações incompletas, mas que, ao serem interpretadas, possam instigar os alunos a completá-las e a solucioná-los. Além disso, precisam, por meio do *design*, apresentar e/ou desenvolver competências e habilidades profissionais, como de trabalhar colaborativamente, de tomar decisões pedagógicas, de refletir, de criar, de inovar e de escolher e utilizar as tecnologias digitais e os conhecimentos matemáticos que serão empregados ou ensinados, e de abordar temas de relevância social e de como ensinar.

Referências bibliográficas

Abramovich, S. (2015). Educating teachers to pose Mathematical problems in the digital age: toward alternative ways of curriculum design. *IMVI OMEN*, 5(2), pp.115-136.

Allevato, N. S. G. (2008). *O Computador e a Aprendizagem Matemática: reflexões sob a perspectiva da Resolução de Problemas.* Rio Claro, SP: UNESP. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_alevato.pdf

Bravo, J. A. F. e Sánchez, J. J. B. (2012). Incidencia de la invención y reconstrucción de problemas en la competencia matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(32), pp.29-43.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (2009). *The art of problem posing* (3.ed). London: Psychology Press-Taylor & Francis.

Figueiredo, F. F., & Dalla Vecchia, R. (2015). O design de problemas com as Tecnologias Digitais no ensino da Matemática. *CIAEM-IACME, 1(14)*, Tuxtla Gutiérrez, México. Disponível em: http://xiv.ciaem-edumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1298/509

Figueiredo, F. F. (2017). *Design de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais na formação inicial de professores de Matemática* (Tese de Doutorado). Universidade Luterana do Brasil, Canoas, Brasil.

Filatro, A. C. (2008). *Design instrucional na prática.* São Paulo: Pearson Education do Brasil.

Jurado, U. M. (2017). *La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas.* Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf

Problema. (2018). *Mobiliando a casa – versão masculina.* il. color. Canoas: PPGECIM/ULBRA. Disponível em: http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696307

Toondoo. (2018). *Site.* Pleasanton, CA, USA: JAMBAV. Disponível em: http://www.toondoo.com/

ULBRA. (2018). *Ambiente de Aprendizagem Moodle do Curso de Extensão de Design de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais, sob o enfoque da (re)formulação e resolução de problemas na Educação Matemática.* Canoas: PPGECIM/ULBRA. Disponível em: http://www.ppgecimulbra.br/moodle/user/view.php?id=128&course=40

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ruta crítica en la construcción del MTSK. Meta-análisis del análisis didáctico de los docentes en formación inicial.

Eugenio **Lizarde** Flores
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"
San Marcos, Loreto, Zacatecas, México
life_genio@yahoo.com.mx
Francisco Javier **Hernández** Gutiérrez
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"
San Marcos, Loreto, Zacatecas, México
frajaher_79@hotmail.com
Ana María **Reyes** Camacho
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"
San Marcos, Loreto, Zacatecas, México
anyreca0712@hotmail.com

Resumen

Con el propósito de focalizar los indicios, evidencias y oportunidades en la construcción del MTSK, a partir de la revisión comparativa al diseño de situaciones didácticas en matemáticas y su análisis posterior, de 7 estudiantes de la Licenciatura en educación primaria de una Escuela Normal Rural, elegidos como informantes clave, se plantea la posibilidad de construir una ruta crítica (en tres momentos básicos: construcción, consolidación y extensión del MTSK) que permita tanto a los formadores de docentes como a los estudiantes, tomar conciencia de los problemas de enseñanza que se les presentan en sus prácticas profesionales, pero a la vez el reconocimiento de las potencialidades que puede tener el MTSK como herramienta analítica para la formación docente inicial en matemáticas, tanto como para la estructuración de propuestas formativas en este mismo ámbito.

Palabras clave: matemática, enseñanza, formación de profesores, conocimiento.

Introducción

Uno de los intereses de investigación de nuestro Cuerpo Académico se dirige a responder la pregunta ¿cómo contribuir en el proceso de construcción del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK- Carrillo, et al, 2013)?, con énfasis en la formación inicial de profesores de educación primaria, a partir de la consideración de que en su desempeño profesional no sólo enseñan matemáticas, sino que se forman como maestros generalistas.

Bajo esta idea, en esta ponencia se presentan los resultados del seguimiento a un mismo

proceso de formación docente inicial en matemáticas: diseño de situaciones didácticas (Brousseau, 2007), aplicación en la escuela primaria (práctica docente) y su posterior análisis, considerando un mismo momento temporal (2º periodo de práctica docente de un semestre) y una muestra intencionada de estudiantes de los diferentes semestres de la Licenciatura en educación primaria (II, IV y V semestres).

El propósito fundamental de la investigación es documentar las evidencias, indicios y oportunidades que se manifiestan en el proceso de construcción del conocimiento especializado en matemáticas, con la posibilidad de encontrar pautas de actuación desde la Escuela Normal que nos permitan, como formadores de profesores, contribuir a su concreción, así como en el rediseño de las propuestas oficiales de formación docente inicial (SEP, 2018) a partir de la documentación de las áreas de oportunidad encontradas.

Fundamentación teórica

El conocimiento del profesor de matemáticas o que enseña matemáticas se ha convertido en objeto de estudio de diferentes investigadores. En 2013, Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán presentan el modelo Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* -MTSK). Desde este modelo se asume que todo el conocimiento del profesor es especializado.

De acuerdo a su integración se divide en dos dominios: conocimiento matemático (*Mathematical Knowledge* - MK) y conocimiento didáctico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge* -PCK); en el primero resulta un elemento fundamental el conocimiento que el profesor tiene de la disciplina que enseña, en este caso, matemáticas. De ahí que se plantean como objeto de investigación saber qué y cómo conoce/debe conocer matemáticas un profesor de matemáticas. En el segundo dominio de conocimiento, se hace referencia a una parte de lo que el profesor requiere para su trabajo docente, es decir, para su enseñanza, el cual se complementa con el MK, además, ambos dan sentido y orientación a las decisiones y acciones del profesor de matemáticas (Escudero-Ávila, 2015).

Cada uno de estos dominios está conformado por tres subdominios, tal como aparecen en la Figura 1 donde se presentan los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas a través de la representación gráfica del modelo MTSK. Es conveniente mencionar que las concepciones en matemática y en la enseñanza y aprendizaje de la matemática se ubican en el centro de la figura. A partir de este diagrama y siguiendo a Carrillo et al. (2013), Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014) y Escudero-Ávila (2015), citamos algunas categorías e indicadores que integran los subdominios del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido.

El dominio del conocimiento matemático está constituido por el subdominio conocimiento de los temas matemáticos, el cual incluye conocimientos de definiciones, propiedades, fundamentos, procedimientos, registros de representación, fenomenología y aplicaciones. El subdominio conocimiento de la estructura de las matemáticas integra conocimientos de conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares. Por último, en el dominio matemático, ubicamos el conocimiento de la práctica matemática, es decir, conocimientos sobre jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, formas de validación, papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, prácticas particulares del quehacer matemático y condiciones

necesarias y suficientes para generar definiciones.

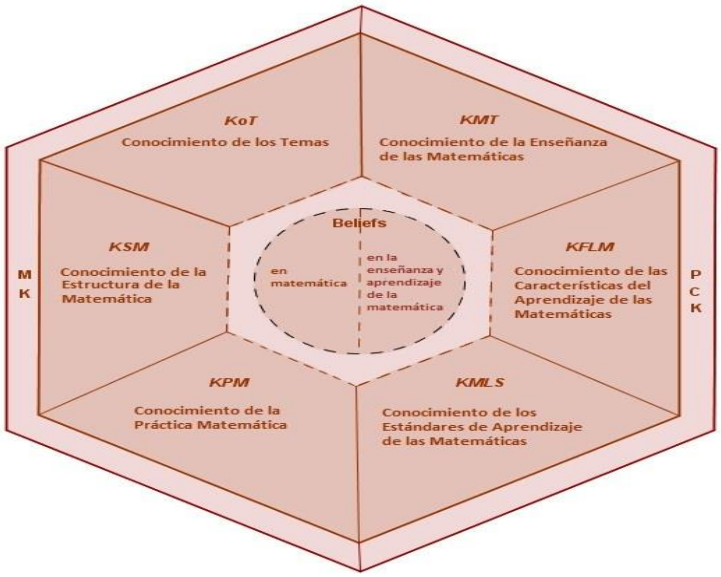


Figura 1. Diagrama del Mathematics Teacher's Specialized Knowledge-MTSK (Carrillo et. al, 2013).

Por su parte, en el dominio del conocimiento didáctico del contenido, identificamos el subdominio conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, mismo que aborda conocimientos de las teorías de aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con un contenido matemático, intereses y expectativas. El subdominio de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas integra conocimientos de las teorías de enseñanza, recursos materiales y virtuales, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Como tercer subdominio, el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, involucra conocimientos de expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, así como conocimientos de secuenciación con temas anteriores y posteriores.

Por lo anterior, en este trabajo de investigación, el MTSK se convierte en la perspectiva teórica que establece una visión amplia y profunda sobre los conocimientos que el profesor de matemáticas y el que enseña matemáticas debe poseer.

Metodología

El desarrollo de este trabajo de investigación se instrumentó desde un paradigma de investigación cualitativo, considerando la comprensión, interpretación y análisis a profundidad del objeto de estudio. Para ello, se tuvo un acercamiento con un grupo focal de 5 futuros licenciados en educación primaria de primer grado (aunque por la relevancia de los datos sólo damos cuenta de 1, para ejemplificar), 1 estudiante de segundo grado y 1 estudiante del tercer grado, de la Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos" de San Marcos, Loreto, Zacatecas. Se realizó una entrevista a un grupo focal, además se realizaron videograbaciones de las sesiones de clases de matemáticas de los estudiantes de los tres grados mencionados y se revisaron documentos (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010) en dos momentos: 1. Previo a la observación con las planificaciones de clases de los estudiantes y, 2. Posterior a la observación, con el informe de práctica profesional, en el que el estudiante analiza su desempeño en el aula de clase.

El análisis de los análisis (Meta-análisis) en los dos momentos previstos, a partir de la triangulación de datos de 3 documentos básicos: transcripción de entrevista al grupo focal, transcripción de la observación de clase y planeaciones, así como los informes de análisis, a partir de aplicar los lentes conceptuales del MTSK (el análisis de los análisis se hace a partir de las categorías del MTSK, observando en qué medida se manifiesta cada subdominio) nos permite observar de manera longitudinal y global en los tres grados la construcción del conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas en educación primaria con la finalidad de ver la factibilidad de construir una ruta crítica para lograrlo.

Resultados

1º Dificultades en los primeros acercamientos al MTSK - construcción: evidencias, indicios y oportunidades.

Cuando los alumnos cursan los primeros semestres de la Licenciatura en Educación primaria, al momento de realizar sus primeras prácticas profesionales nos resulta natural que tengan ciertas dificultades para comprender el proceso de planeación (parte del KMT), la comprensión de algún contenido (KoT), etc., sin embargo, en el mismo proceso de formación, los formadores de profesores tenemos responsabilidad didáctica para contribuir a construir el conocimiento especializado, en tal sentido, es muy importante que reconozcamos los indicios (entendidos como "sospechas inteligentes"), las oportunidades y las evidencias de que se está construyendo, así como las dificultades, para capitalizarlas como una oportunidad de mejora a partir de una retroalimentación adecuada. Con la intención de ir encontrando esos indicios, oportunidades y/o evidencias, se realizó a un grupo focal, una entrevista previa a su práctica profesional en el 2º semestre de la Licenciatura en educación primaria, y una de las primeras preguntas que se les planteó fue la siguiente: ¿Cuando ya les asignaron los contenidos, qué dificultades anticipan? Algunas de las respuestas fueron las siguientes:

> si desconocemos el tema, el generar actividades se complica todavía más
>
> porque nosotros lo entendemos, pero no sabemos cómo explicarlo, o las palabras que debemos usar para que los niños lo entiendan

Evidentemente, este primer reconocimiento es una oportunidad para el trabajo en el curso de matemáticas de la Escuela Normal y profundizar en el KoT y su relación con el KMT.

Los estudiantes reconocen tres tipos de dificultades al momento de planear: la dificultad del contenido, el cómo enseñarlo y cómo ponerlo en un formato de planeación; bajo esta lógica a continuación se presentan las relaciones entre estos tres aspectos y las complicaciones que se presentan, derivados del análisis de un caso, como evidencia a tener en cuenta en la construcción del MTSK

Tabla 1

Dificultades, procesos y prácticas. Oportunidades para el MTSK.

DIFICULTAD DEL CONTENIDO	**COMPRENSIÓN DEL PROCESO DE PLANEACIÓN**
E: ¿Cuál es un ejemplo de un contenido? "El de reparto, está sencillo llevarlo, porque pues sabemos qué es un reparto (KoT)" E: ¿por ejemplo?	E: ¿cómo organizaron la planeación?

Ao. El ejemplo que viene en el libro de las canicas, nosotros pusimos ciertos problemas en la planeación sobre lo que es un reparto, pusimos haga de cuenta que "Omar tiene como 400 canicas, tiene 8 hermanos y se las tiene que repartir a cada uno de forma equitativa, igual", y ya pues pusimos ese	Lorenzo: primeramente conocer los contenidos (KoT[1]), ya después tener las herramientas necesarias para hacer la planeación, como el libro del maestro tanto como el libro del alumno, para saber los temas que se van a abordar (KMLS), pues si, darles a entender a los niños lo que vamos a llevar en la clase, como la consigna (KMT), preguntar a los alumnos si la captaron, sino para de nuevo repetir lo que vamos a hacer… tener en mente los materiales que se van a ocupar, ya sea como, si vamos a trabajar por ejemplo, sumas o restas, se puede trabajar con piedritas o frijoles, algo así…
EL MOMENTO DE LA ENSEÑANZA: 2º de educación primaria. 8:09 Profesor 1: inicia preguntándoles que vieron el día anterior y les dice que el día de hoy van a trabajar inventando un problema. Profesor 1. Saquen su libreta. ¿Qué día es hoy? Escribe la fecha en el pintarrón Profesor 1. Ya empiecen (se refiere a la invención del problema) 8:30 Profesor 1. A ver levante la mano quien ya acabó. ¿Quién nos quiere decir su problema? Ao. Adrián tiene 20 pesos y los quiere repartir entre sus dos hermanos. ¿Cuánto le da a cada uno? Profesor 1. A ver como ya terminaron su problema ahora hay que contestarlos (varios alumnos se levantan) como ya algunos los contestaron ¿quién me puede dar las respuestas? (Otro alumno lee el problema y lo resuelve) A ver alguien más que nos quiera dar su respuesta. A ver dinos el problema y la respuesta (El ritmo de trabajo es muy lento, algunos niños ya manifiestan estar aburridos) 8:34 Mo. Bueno pues ya todos entendimos que es un reparto, no. (Se hace el silencio) Ya como todos acabamos el problema era como un repaso. Ahora vamos a hacer otra actividad. Profesor 2: a ver ahora todos saquen su libro de matemáticas en la página 111 y 112 Ahí nos dice que en parejas, ¿en parejas o solos? As. En parejas (casi al unísono) Profesor 1, retoma lo que dice el libro. Vamos a contestarlo en parejas (los alumnos comienzan a leer) 8:52 Los alumnos comienzan a inquietarse y levantarse de sus lugares	

En el recuadro de la dificultad del contenido, cuando están en los primeros semestres de la Licenciatura, éste les parece como obvio y sencillo, por ejemplo en el caso del reparto, dice "está muy sencillo, todos sabemos qué es un reparto", sin embargo, al no analizarse en términos del conocimiento didáctico del contenido, las dificultades se presentan al momento de la enseñanza; veamos dos circunstancias en este fragmento de registro: 1ª Cuando el profesor hace alusión a "ya empiecen" refiriéndose a la invención de los problemas, tenemos evidencia de las dificultades para articular el KoT con el KPM, ya que si bien la invención de problemas tiene un lugar muy relevante en la práctica de hacer matemáticas, en grados inferiores es muy importante cuidar el proceso para hacerlo. 2ª El uso de materiales educativos (libro de texto) exige su revisión previa para gestionar de manera adecuada su uso; aquí tenemos una oportunidad para analizar su intervención didáctica y generar reflexiones (algunas obvias: la necesidad de comprender los planteamientos de los libros de texto; y otras con mayor profundidad: tipos de problemas que se plantean, el papel de las preguntas en un problema matemático, etc.) que nos permitan que los estudiantes tomen conciencia y comprendan los diferentes componentes del MTSK al hacerlos objeto de análisis desde las evidencias de su propia práctica.

[1] Se han agregado las referencias a cada uno de los subdominios del MTSK, como elementos de análisis.

2º Consolidando el MTSK, la práctica docente y su análisis como espacios de reflexión y toma de conciencia.

El trayecto de preparación para la enseñanza y el aprendizaje, en el caso de las matemáticas, se fortalece y consolida en tercer y cuarto semestre porque se avanza en el estudio del curso de geometría: su aprendizaje y enseñanza y el curso procesamiento de información estadística; estos escenarios demandan a los profesores en formación inicial trabajar en la planificación, ejecución y análisis de algunos contenidos en diferentes grados de educación primaria. Así, en estos contextos los jóvenes ponen en juego conocimientos matemáticos y didácticos; en el caso de los primeros se encuentran conocimientos de los temas que van a enseñar, conocimientos de la estructura de la matemática y conocimientos de la práctica matemática, en lo que respecta a los conocimientos didácticos emergen conocimientos de la enseñanza de las matemáticas, conocimientos de las características del aprendizaje de las matemáticas y conocimientos de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. Enseguida presentamos un fragmento de planificación de Diana, una profesora en formación inicial de cuarto semestre:

Tabla 2

Elementos que contextualizan el diseño de una planificación de matemáticas.

Asignatura: Matemáticas **Enfoque**: Uso de secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos, que permitan reflexionar y construir formas diferenciadas para la solución de problemas usando el razonamiento como herramienta fundamental. **Campo formativo**: Pensamiento matemático **Bloque**: I **Lección 30**: "En busca del entero" **Contenido**: Representación de fracciones de magnitudes continuas (longitudes, superficies de figuras). Identificación de la unidad, dada una fracción de la misma. **Intención didáctica**: Que los alumnos establezcan la relación entre una fracción (unitaria o no unitaria) que se representa gráficamente y la unidad de referencia al dibujar esta última.

En la tabla 2, identificamos que Diana evidencia conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas en relación con la enseñanza de las fracciones (KMLS), en particular, sobre el nivel de desarrollo conceptual esperado en quinto grado de educación primaria, en la descripción del contenido y la intención didáctica, así como también evidencia conocimiento de las expectativas de aprendizaje cuando expresa el enfoque de las matemáticas. Por último, presentamos un fragmento de la planificación anterior, misma que corresponde a la preparación del medio (Brousseau, 2007):

Tabla 3

Preparación del medio de una planificación de matemáticas.

Preparación del medio. a) Valoración de conocimientos previos: Plantear a los alumnos problemas en donde tengan que hacer repartos utilizando las fracciones. Ejemplo: Andrea tiene una naranja y quiere darle la cuarta parte de la naranja a su amiga Julieta ¿qué fracción de la naranja será la que tiene que darle a su amiga? Si Julieta quiere completar el entero, ¿cuánto le falta si tiene sólo ¼ de naranja que le dio Andrea? ¿Cómo lo representarías con la naranja que se te proporcionó?

En la tabla 3, Diana muestra conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), al plantear un problema donde se rescatan conocimientos de los alumnos en relación con el estudio de la fracción como parte-todo en contextos continuos; lo anterior, coincide con el contenido y la intención didáctica que Diana manifiesta en la tabla 2, en los elementos que contextualizan su

planificación de matemáticas. Así, en las tablas 2 y 3, presentamos evidencias del conocimiento didáctico de fracciones que una profesora en formación inicial pone en juego en algunos fragmentos de su planificación. Con lo cual, de manera comparativa a lo presentado en el apartado anterior, apreciamos un avance en la consolidación del conocimiento especializado de los futuros profesores.

3º Extensión del MTSK hacia su proceso de formación generalista

El estudiante que se aborda para este punto, es de quinto semestre de licenciatura en educación primaria, para este momento, ya se han desarrollado los cuatro cursos que conforman la preparación para la enseñanza de las matemáticas, con ello, se podría mencionar que se tiene un dominio con cierta profundidad sobre el conocimiento matemático y sobre el conocimiento didáctico del contenido.

Empero, en quinto semestre en las escuelas normales para el plan de estudios 2012, los jóvenes estudiantes realizan sus prácticas profesionales en escuelas primarias de organización multigrado, por lo que aprenden estrategias de planificación globalizadas para poder atender a niños desde dos hasta los seis grados en un solo grupo.

Así que además del dominio que ya se ha desarrollado en los anteriores semestres sobre los temas matemáticos (KoT), este semestre fortalece su conocimiento con el desarrollo de paquetes de conocimiento (Lizarde, 2016) de los grados en los que se practicará, lo que posibilita el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM). Situación que se muestra en la siguiente actividad de planificación de los contenidos en una escuela bidocente:

Matemáticas Primer Grado

Contenidos	Problemas aditivos. Resolución de distintos tipos de problemas de multiplicación (relación proporcional entre medidas, arreglos rectangulares.

Matemáticas Segundo Grado

Contenidos	Problemas multiplicativos. Resolución de multiplicaciones cuyo producto sea hasta del orden de las centenas, mediante diversos procedimientos (como una de multiplicaciones parciales, multiplicaciones por 10, 20, 30, etcétera.

Matemáticas Tercer Grado

Contenidos	Problemas multiplicativos. Análisis de la información que se registra al resolver problemas de suma o resta.

Como se puede observar en los cuadros anteriores, el estudiante planifica los contenidos que abordará en su práctica profesional, pero además en este aprendizaje de la estructura de las matemáticas, busca esa relación creciente en la complejidad de los temas matemáticos, acorde a un diagnóstico que se realizó previamente y de los grados escolares que atenderá.

> La enseñanza de la multiplicación es un contenido muy amplio que no necesariamente comienza en segundo grado ni tampoco termina en sexto de primaria. Es por ello que, la enseñanza de la multiplicación se va dando paso a paso y en cada grado se va enseñando algo. Sin embargo, el dilema está aquí, en el ¿qué enseñar en cada grado? (Registro del informe de prácticas profesionales del estudiante)

En el registro anterior queda patente el conflicto que significa relacionar cualquier contenido (multiplicación para este ejemplo) en su estructura matemática, en este caso para tres grados de educación primaria, sin embargo, la posibilidad de planificación previa, utilizando

paquetes de conocimiento para relacionar el conocimiento de los temas matemáticos con la estructura de las matemáticas, permite un nivel importante de consolidación del conocimiento especializado del profesor de educación primaria que enseña matemáticas.

> Nuestra perspectiva es comenzar el proceso de aprendizaje de la multiplicación en primer grado, pero, a partir de problemas, problemas que involucren primeramente la suma, luego la suma de manera repetida o iterada… se diseñaron problemas de igual contextualización para los tres grados, pero con algunas variables didácticas entre sí (Registro del informe de prácticas profesionales del estudiante)

Conclusiones

A partir del análisis de tres momentos coyunturales en el proceso de formación docente inicial, asumimos que la ruta crítica en la construcción del MTSK es un proceso continuo y dialéctico, en el que al tener un mejor dominio de los temas matemáticos y analizando este saber como paquetes de saberes de complejidad creciente, permite un mejor conocimiento de la estructura de las matemáticas y viceversa, pero a la vez, ambos tipos de conocimiento: de los temas y de su estructura, les posibilitan el diseño de situaciones didácticas congruentes y articuladas a las características de aprendizaje de los alumnos y a los estándares de aprendizaje que se quieran lograr.

En el escenario de la formación docente inicial, eso abre un panorama muy importante a los formadores de docentes dado que la revisión y análisis de nuestra práctica profesional se resignifica en un doble sentido, en primer término al articularla desde un modelo explícito del conocimiento del profesor de matemáticas, y en segundo término, al retomar los problemas de enseñanza que enfrentan nuestros estudiantes, tanto a partir de los indicios, como de las evidencias, para convertirlas en oportunidades de desarrollo profesional. La mirada analítica de los formadores de profesores posibilitará a su vez el reconocimiento de esos momentos críticos: primeros acercamientos (toma de conciencias de las problemáticas), consolidación de elementos del MTSK y extensión a escenarios más complejos (grupos multigrado, por ejemplo).

Referencias y bibliografía

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: CERME.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Argentina: Libros del zorzal.

Escudero-Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Lizarde, E. (2016). La construcción del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) desde el escenario normalista. *Entre Maestros No. 57*, 82-93.

SEP. (2018). *Aritmética. Números naturales. Programa de estudios. Primer semestre.* México: Autor.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Formación profesoral para atender población diversa desde una educación matemática inclusiva

Eliécer **Aldana** Bermúdez
Universidad del Quindío
Colombia
eliecerab@uniquindio.edu.co
Heiller **Gutiérrez** Zuluaga
Universidad del Quindío
Colombia
hgutierrez@uniquindio.edu.co
Graciela **Wagner** Osorio
Universidad del Quindío
Colombia
gwagner@uniquindio.edu.co
Jhon Darwin **Erazo** Hurtado
Universidad del Quindío
Colombia
jderazo@uniquindio.edu.co

Resumen

Esta comunicación corresponde al tema formación continuada de profesores para la atención a poblaciones con capacidades diferenciadas de tipo sensorial y/o cognitivo. El objetivo es facilitar instrumentos teóricos y metodológicos en didáctica de las matemáticas a profesores no licenciados en matemáticas, que requieren de conocimientos disciplinares del área para atender poblaciones con déficit cognitivo, limitación auditiva y limitación visual. Teóricamente el estudio se apoya en el conocimiento didáctico del contenido matemático a enseñar, la metodología utilizada es de tipo cualitativo y el método utilizado es la investigación acción. Los hallazgos encontrados en los resultados permiten concluir que la formación disciplinar profesoral es la base de una transposición didáctica, el diseño de ambientes didácticos privilegian condiciones de enseñanza de las matemáticas y los recursos tecnológicos ofrecen multiplicidad de formas de exploración con las matemáticas, para lograr que estos docentes posibiliten en estas poblaciones la construcción de nociones básicas de las matemáticas.

Palabras clave: Formación continuada de profesores, capacidades diferenciadas, situaciones de aprendizaje, Didáctica de las matemáticas, desarrollo de pensamiento matemático.

Introducción

Esta investigación tiene que ver con un proceso de formación profesoral, actualización y perfeccionamiento a profesionales y docentes de apoyo en Colombia, que atienden poblaciones en condición de discapacidad y en especial aquellas personas que tienen capacidades diferenciadas a nivel cognitivo y/o sensorial, para que estos facilitadores puedan generar ambientes didácticos que privilegien las condiciones favorables a estas poblaciones y logren potenciar en ellos el aprendizaje de las matemáticas, mediante la asistencia de recursos tecnológicos necesarios como instrumentos para el desarrollo del pensamiento matemático en el contexto de las políticas de Estado (MEN, 2017) en el marco de una educación inclusiva.

El objetivo es facilitar instrumentos teóricos y metodológicos en Didáctica de las Matemáticas a profesionales y docentes de apoyo que no cuentan con la formación disciplinar, porque no son Licenciados en Matemáticas, pero que demandan de conocimientos disciplinares propios de unas Matemáticas incluyentes para la atención a personas en condición de déficit cognitivo (Síndrome Down), limitación auditiva (hipoacúsicos, sordos) y limitación visual (baja visión y ciegos), de instituciones educativas. En este sentido, Bruno & Noda (2010) citado en Aldana, Gutiérrez, & Wagner (2018) aseveran que: "Los profesores que atienden estudiantes especiales tienen una fuerte formación en aspectos psicológicos y pedagógicos, pero no han recibido formación en contenidos didácticos de áreas curriculares, lo que les lleva a tener inseguridades en el tratamiento de los diferentes contenidos" (p. 146-147); lo que hace que estudios como este tengan impacto en la comunidad académica.

Los propósitos específicos particulares de esta ponencia hacen parte de un estudio más amplio de un Proyecto de Investigación y están orientados en función de aspectos teóricos sobre el conocimiento didáctico matemático a enseñar y en lo metodológico la investigación acción: En particular en esta ponencia interesa dar a conocer a partir de un diagnóstico previo y de las necesidades y expectativas de los profesionales y docentes de apoyo, cómo mediante precisiones conceptuales emerge una secuencia didáctica (ver figura 1) que se le presenta a los profesionales y docentes de apoyo para que la desarrollen, luego hacen las reflexiones posteriores y los aportes, para dar paso a una secuencia que ellos mismos construyen y transfieren a sus estudiantes en sus propios escenarios naturales de enseñanza y de aprendizaje y que finalmente regresan a socializar sus experiencias en las comunidades de práctica.

Referentes teóricos

La formación de profesores se considera desde el marco propuesto como el conjunto de referentes curriculares para la formación de profesores de matemáticas en contextos de diversidad para la atención en el caso particular, a poblaciones vulnerables desde los aspectos cognitivos y de limitaciones sensoriales de acuerdo con León y otros (2012). Asimismo, el reconocimiento de los planteamientos teóricos de Ball, Thames & Phelps (2008) y retomando a Shulman (1986), todos coinciden en que el conocimiento necesario para realizar la práctica de enseñar matemáticas debe incorporar el conocimiento del entorno cultural del aula y de las condiciones de las poblaciones en su contexto.

En este sentido, abordar una visión constructivista del aprendizaje requiere que la instrucción tenga en cuenta las actuaciones de los escolares, y haga ajustes razonables a la planificación de esa instrucción, advierta la búsqueda de unos objetivos predeterminados y el

diseño de unas tareas para lograrlo, tal como lo plantea la Teoría de las Situaciones Didácticas iniciada por Brousseau (2007) cuya evolución se ha visto caracterizada por el desarrollo teórico, y la teoría de Chevallard (1997), muestra que el aprendizaje sufre una transformación para ser enseñado.

Además, la Matemática Inclusiva en el contexto de la atención a la diversidad de acuerdo con Alsina & Planas (2008; p. 113), entiende la Educación Matemática "como una iniciación a una comunidad de significados y prácticas sociales", es decir, la diversidad de intereses, conocimientos experiencias, necesidades y por tanto, a una variedad de prácticas matemáticas. En cuanto a las poblaciones que en esta investigación configuraran las comunidades de práctica (déficit cognitivo, limitación auditiva y baja visión), en particular, en el aspecto social cognitivo el estudio se apoya en los postulados de Vygotsky (1979), sobre la zona de desarrollo próximo para la mediación desde las manifestaciones de una competencia cognitiva y cultural de las personas con limitaciones cognitivas, planteadas por López Melero (1997; 1999). En relación con la comunidad sorda, es fundamental la conexión que ellos tienen con el mundo a través de la visión y el uso de una lengua de signos que les confiere rasgos de identidad propios, planteados en Díaz-Estébanez, Salvador, Serna, Vázquez, Ferrer, & Valmaseda (1996), y en lo que corresponde, al conjunto de personas con baja visión que tienen desarrollado el sentido del oído, la educación ha de ponerse a tono y servirse de las ventajas que los sistemas cibernéticos y la inteligencia artificial le pueden proporcionar como aparece en Blázquez & Lucero (2002).

Metodología

La investigación tiene enfoque cualitativo de acuerdo con Bisquerra & Sabariego (2009), porque utiliza un método apropiado para mirar los matices de comportamiento de los profesores, genera afirmaciones e interrogantes reflexivos con base en las evidencias a partir del análisis y de los objetivos de la investigación. La investigación se realizó con un grupo de 25 profesionales (ofrecen asesoría) y docentes de apoyo (están en las aulas) de instituciones educativas de una región céntrica de Colombia, para dotarlos de instrumentos de enseñanza y de esta manera lograr una inclusión en el sistema educativo convencional de estas poblaciones con capacidades diferenciadas, de acuerdo con la investigación realizada por Aldana, López, & Alonso (2014).

La metodología fue la investigación acción de acuerdo con Latorre (2007) en cuatro fases: 1. *Diagnóstico,* acercamiento a las Instituciones Educativas a través de las Secretarías de Educación para determinar que los profesores en ejercicio necesitan actualización en este ámbito de formación, organizar un directorio, presentar el proyecto a los profesionales de apoyo, diseñar, validar y aplicar un instrumento diagnóstico, y a partir de ello, *planear* quince sesiones de encuentros presenciales. En la fase 2. *Acción*, de acuerdo con las políticas de Estado, se activan las sesiones presenciales orientadas a: conocer necesidades, y expectativas, reflexionar sobre algunos marcos teóricos y metodológicos para el diseño de secuencias didácticas, elaborar talleres, unidades didácticas, entrevistas, realizar material tecnológico, diarios de campo, videos, y objetos virtuales de aprendizaje. En la fase 3. *Observación*, validación de los instrumentos anteriores, y acompañamiento personalizado en cuanto a lo disciplinar y didáctico, visitas a las instituciones educativas para confrontar la transferencia de conocimiento, y en la fase 4. *Reflexión,* sobre el trabajo en las sesiones orientadas a la formación *y* la apropiación social del conocimiento, compartiendo las experiencias de las aplicaciones que ellos realizaron en los escenarios naturales de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

Análisis

En la primera sesión del seminario de formación, para conocer las expectativas de los profesionales y docentes de apoyo se propuso una actividad en seis equipos, en la cual los episodios registrados en las historias de vida muestran una tendencia que se configura en las siguientes unidades de análisis:

Tabla 1

Concepciones y expectativas de los profesores sobre las prácticas docentes inclusivas

Grupo	Categorías de análisis	Tendencias encontradas en la discusión
1	Sensibilización	Experiencia Educativa, Lúdica, Inequidad, Didáctica de las matemáticas, Formación docente, Ambiente Escolar, Sensibilización del docente, Lenguaje.
2	Procesos Didácticos	Calidad Educativa, Investigación, Procesos de Aprendizaje, Evaluación, Requerimientos legales, Lúdica, Valores, Experiencias, Expertos, Derechos Básicos de Aprendizaje, Metodologías, Servicios, Aportes interdisciplinarios, Didáctica, Acompañamiento.
3	Reconocimiento de la diversidad	Monotonía, Retos, Exigencia, Limitaciones, Recursos didácticos, Enseñar, Procesos de aprendizaje, Procesos didácticos, Etapas, Política educativa, Secuencias, Necesidades Educativas Especiales, Roles, Falencias docentes, Desempeños, Barreras, Aprendizaje, Reconocimiento a la diversidad.
4	Identidad del Maestro	Aprendizaje, Experiencias significativas, Metodologías Novedosas, Motivación, Experiencias de Apoyo, Tics, Resistencia, Igualdad, Integralidad, Relación docente-estudiante, Sensibilización, Colaboración, Políticas Educativas, Lúdica, Comunidad Educativa, Didáctica, Vocación, Innovación, Aprendizaje Colaborativo, Rol de la familia, Identidad del maestro.

Fuente. Elaboración propia de los autores

Las categorías de análisis extraídas de los segmentos de los episodios ponen en evidencia las concepciones que tienen los profesionales y docentes de apoyo y las reflejan por la emotividad que causa trabajar en estos contextos, las expectativas de tener un conocimiento necesario y suficiente del contenido didáctico matemático como disciplina a enseñar, como también, el reconocimiento a la diversidad en los ritmos de aprendizaje, estilos, contextos, medios, mediaciones, formación teórica y metodológica, la necesidad de apoyar la enseñanza en el uso de material tecnológico para generar nuevos ambientes y estilos de aprendizaje que vinculan el saber, el saber hacer, el saber ser, en asociación con la misión y la vocación de un docente que asume el reto de una educación inclusiva.

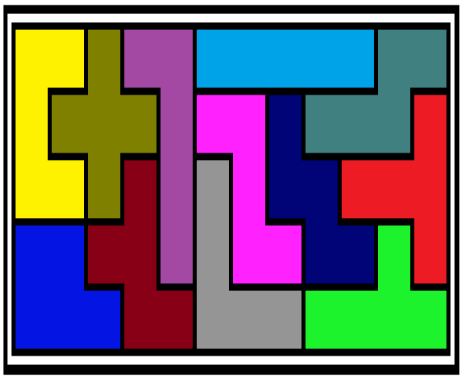
En segundo lugar, a partir del diagnóstico realizado a los docentes en otra sesión del seminario y de acuerdo con la planeación previa, se le propuso a los profesionales y docentes de apoyo que desarrollaran la siguiente secuencia didáctica de aprendizaje.

Secuencia didáctica

Objetivo: Lograr que los profesionales y docentes de apoyo identifiquen el color, la forma, el tamaño y realicen procesos de asociación, correspondencia y conteo de objetos para la construcción del concepto de número, mediante manipulación de material como el pentominó.

Variable Didáctica: El valor numérico como una composición y descomposición geométrica (relación entre perímetro y área) y conteo (Relación uno a uno, uno a muchos, muchos a uno).

Gestión de la clase: Entrega a los docentes de apoyo de un material compuesto por fichas de plástico o de madera de diversas formas, cada forma es regular en su conformación interna, es decir, está basada en cuadrados y cada ficha es una agrupación de 5 cuadrados ubicados en diferentes formas que simulan una estructura lingüística por la distribución de los cuadrados, estos se agrupan formando doce (12) pentominó diferentes.



Procedimiento:

1. El facilitador entrega el pentominó a los profesores por equipos.
2. El material es observado por los participantes con el fin de reconocer algunas características básicas.
3. A partir de la cantidad entregada a cada equipo, 12 fichas por paquete, ellos establecen las características que tiene cada pieza como la forma, composición y el número de lados y de cuadrados en su interior.

Figura 1. Pentominó

4. Después se orienta al docente para que haga representación del número en forma oral y en correspondencia con su conteo, es decir, los elementos que determinan la construcción de cada pieza, lado – cuadrado, y luego compartir su hallazgo con los compañeros.
5. Luego deben reconocer en cada una de las piezas el número de lados y calcular su perímetro, como también calcular la medida interna de la ficha.
6. Seguidamente se les invita a formar figuras con las fichas para que repitan el proceso anterior y se les pregunta cuánto mide el perímetro cada vez y cuánto el área.
7. Finalmente qué conclusión pueden obtener despues de encapsular ese proceso en el objeto matemático relación entre el área y el perímetro.

Análisis de la secuencia: finalizada la sesión de ese día los profesionales y docentes de apoyo habían recibido instrucciones previas sobre algunas nociones básicas de matemáticas escolares y aspectos teóricos y metodológicos en didáctica de las matemáticas, que les permitió realizar algunas precisiones conceptuales de orden numérico, espacial geométrico, métrico y de variación

para establecer la relación entre perímetro y área, lo que los llevó a concluir que mientras el área permanece constante el perímetro puede variar.

Resultados

El proceso de formación continuada de docentes, además de ofrecerles los instrumentos teóricos y metodológicos en Didáctica de las Matemáticas permitió reflexionar en torno a la motivación que mostraron los participantes de una parte, por el aprendizaje de las nociones matemáticas básicas y de otra, las estrategias de enseñanza que les permitió poner en práctica las reflexiones y construcciones realizadas durante las sesiones programadas en escenarios naturales de enseñanza y de aprendizaje, para generar en sus poblaciones diversos ambientes y estilos de aprendizaje en el contexto de una educación matemática incluyente.

Conclusiones

La motivación constituye la fuente del saber para que los docentes tengan disposición por el saber disciplinar, diseñen material tecnológico para la enseñanza de conceptos matemáticos a estudiantes con capacidades diferenciadas como dificultades cognitivas, sensoriales, altas capacidades, grupos étnicos, entre otros, en el marco de una educación matemática inclusiva.

Los profesionales y docentes de apoyo que orientan espacios del área de las matemáticas requiere de una formación constante en lo disciplinar para poder hablar de didáctica y realizar ajustes razonables en el proceso enseñanza-aprendizaje de estudiantes diversos.

El aprendizaje se hace más dinámico cuando se utiliza la interacción y la mediación utilizando secuencias didácticas de enseñanza y de aprendizaje con material de apoyo tecnológico para tal fin.

Los docentes de apoyo que en sus aulas de clase tienen estudiantes con alguna capacidad diferenciada, pero muchas veces no están habilitados para atenderlos, por tanto, espacios como este sirven para que ellos puedan encontrar instrumentos o herramientas para ayudar a sus estudiantes a mejorar los niveles de aprendizaje atendiendo a ritmos diferentes. Esta investigación constituye un factor motivacional continuo de formación profesoral, con sentido de vocación para atender población diversa en el contexto de una educación matemática incluyente.

Referencias y bibliografía

Aldana, E., Gutiérrez, H., Wagner, G. (2018) Formación de profesores para una educación matemática en y para la diversidad. *Sophia*, 14(1) 65-74. DOI: https://doi.org/10.18634/sophiaj.14v.1i.823

Aldana, E., López, J. H., & Alonso, A. (2014). Una didáctica de la matemática para la formación en diversidad: síndrome Down. Proyecto de investigación 668 financiado por la Universidad del Quindío: Armenia. Universidad del Quindío.

Alsina, A., & Planas, N. (2008). *Matemática Inclusiva. Propuesta para una educación matemática accesible*: Madrid. Narcea.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes. It Special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Bisquerra, R. y Sabariego, M. (2009). *El Proceso de Investigación* (Parte 1). En R. Bisquerra (Coord.). Metodología de la Investigación Educativa (2ª ed.). (89-125). Madrid: La Muralla.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoria de las situaciones didácticas.* (Diilma Fregona, trad.). Argentina: Libros del Zorzal.

Blázquez & Lucero. (2002). Los medios y recursos en el proceso didáctico. En Medina/Salvador. Didáctica general.(Ed.). Madrid: Prentice.

Bruno, A., & Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de down. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (141-162). Lleida: SEIEM.

Chevallard (1997). *La transposición didáctica del saber sabio al saber ensenado*. Aique Grupo editor. Argentina.

Díaz-Estébanez, E., Salvador, D., Serna, M.J., Vázquez, A., Ferrer, J.C. y Valmaseda, M. (1996). Las personas sordas y su realidad social. Un estudio descriptivo. Ministerio de Educación y Ciencia (M.E.C.). Madrid.Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* , 37-65.

Latorre, A. (2007). La investigación-acción.Conocer y cambiar la práctica educativa. España: Graó.

León, O. L., Saiz, M.L., Rojas, P.J., Bonilla, M., Romero, J.H., Gil, D., Correal, M., Flórez, W. O., Peralta, M.A., Márquez, H.A. (2012). Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación del profesorado de matemáticas en y para la diversidad. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

López, Melero, M. (1997). La escuela un lugar para pensar y para descubrir la cultura. En la diversidad y la diferencia en la educación secundaria: Retos para el siglo XXI. Málaga: Aljibe.

López, Melero, M. (1999). Aprendiendo a conocer a las personas con síndrome de down: Málaga: Aljibe.

MEN (2017). Enfoque de educación inclusiva en la actualización pedagógica de los educadores.

Shulman, L.S. (1986). Paradigms and research programs for the study of teaching. In M.C. Wittrock (Ed.), Handbook of research on teaching (3rd ed.). New York: Macmillan.

Vygotsky, L.S. (1979). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona: Crítica.

Reconocimiento

Esta investigación hace parte de la Convocatoria 661 de *Colciencias* en el marco de las políticas del gobierno nacional Colombiano, en la línea de *"Educación, Paz y Equidad";* mediante la "*Alianza de Instituciones para el Desarrollo de la Educación y la Tecnología en Colombia* "**AIDETC**", Programa financiado por Colciencias, con la participación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, la Corporación Universitaria Iberoamericana, la Universidad del Quindío y la Corporación Universitaria Rafael Núñez, en el marco de un

Programa de investigación denominado "*Arquitectura pedagógica, didáctica y tecnológica para la formación de profesores en y para la diversidad"*. En particular la universidad del Quindío, participa con el Proyecto 739, titulado "*Una didáctica para la formación de profesores de matemáticas en contextos de educación inicial, con poblaciones en condición de discapacidad sensorial y/o cognitiva*".

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Análisis de los planes de estudio (1997, 2012 y 2018) para la formación docente inicial en México desde el modelo MTSK.

Eugenio Lizarde Flores
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"
San Marcos, Loreto, Zacatecas, México
life_genio@yahoo.com.mx

Resumen

Con motivo de la reciente implementación, en México, de un nuevo programa de Aritmética para la formación docente inicial, revisamos de manera comparativa tres planes de estudio que hasta el momento se han implementado: 1997, 2012 y 2018 (por el año de inicio); esta revisión la centramos en el contenido del primer curso en ambos casos, sobre todo porque es el único que se dispone del último de los planes de estudio. El propósito principal es determinar, a la luz del modelo MTSK, cuáles de sus componentes han estado o están presentes como opción de formación en matemáticas. Los resultados nos permiten apreciar un efecto pendular producto de decisiones políticas, más que académicas, que llevan a centrar la mirada en el enfoque de "situaciones problemáticas" o en el "enfoque de competencias", incluso en un intento de combinarlos, pero muy poco logrado (plan 2018).

Palabras clave: matemática, enseñanza, formación de profesores, conocimiento.

Introducción

La formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria en México, por ley está en manos del Estado, quien a través de las escuelas Normales y de la elaboración de planes y programas de estudio, de carácter y aplicación nacional, la ha estado concretando.

Una de las características principales de esta formación es que tiene un carácter generalista, es decir, el profesor que enseñará matemáticas en la escuela primaria, también tiene la obligación de enseñar el resto de las asignaturas que contempla el currículo oficial de la educación primaria (SEP, 2011; SEP, 2017); bajo esta premisa, la formación en las Escuelas Normales, reviste esa misma complejidad, el profesor se forma con esa visión, una formación generalista, la cual en ocasiones queda limitada ante la dificultad que los tiempos le marcan para profundizar en la complejidad que los avances en las diferentes perspectivas didácticas le demandan.

Cuando uno revisa la literatura teórica, sobre el campo de la educación matemática (Dreyfus, Artigue, Potari, Prediger, & Ruthven, 2018), es fácil percatarse de los avances en la

investigación al respecto[1];

Las investigaciones sobre el profesor de matemáticas están vinculadas a la necesidad reconocida en diferentes ámbitos por comprender mejor el papel del profesor en las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y sus procesos de aprendizaje y desarrollo profesional. Las aproximaciones a esta problemática y los focos de atención que los investigadores hemos planteado muestran una diversidad conceptual y metodológica que hace entrever la complejidad de los fenómenos estudiados (Llinares, 2018, pág. 1).

En el plano de la concreción de estas investigaciones, la complejidad se presenta cuando se hace la pregunta ¿cuánto de ello está realmente impactando en los procesos de formación inicial de profesores para la enseñanza de las matemáticas? ¿de qué manera los diferentes planes de estudio los han incluido en los programas específicos de matemáticas? ¿cómo se puede lograr la construcción de un conocimiento especializado necesario para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria? Bajo la consideración de que la especialización del conocimiento del profesor radica en su uso en contextos profesionales (Carrillo, Montes, Contreras, & Climent, 2017), e incluso, la pregunta que da lugar a esta comunicación ¿cuál es el modelo de profesor de matemáticas que subyace a los diseños curriculares que se han propuesto en México para la formación inicial? ¿qué elementos del conocimiento especializado se manifiestan explícitamente en los planteamientos curriculares? Si les aplicamos un criterio de análisis explícito, desde un modelo teórico de los conocimientos que deben tener los profesores, por ejemplo, el MTSK (Carrillo, Montes, Contreras, & Climent, 2017) ¿cuáles subdominios de conocimiento se aprecian explícitamente?

Con esas preguntas nos hemos acercado a tres de los últimos planes de estudio propuestos oficialmente para la formación inicial de profesores en México: 1997, 2012 y los programas aún en construcción, pero ya en implementación los del primer semestre de la Licenciatura en educación primaria 2018, para hacer una revisión de los elementos constitutivos de los programas de matemáticas a la luz del modelo MTSK, sobre todo a partir de la primera evidencia que tenemos al revisar el programa del curso "Aritmética. Números naturales" (SEP, 2018) y notar que en éste se recuperan de manera textual actividades contempladas en los dos programas anteriores. Esta evidencia nos lleva a sospechar que no se cuenta con una definición clara sobre los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

El modelo MTSK como herramienta para el análisis y diseño de cursos de matemáticas para la formación inicial.

El modelo MTSK se configura en la Universidad de Huelva, España, siguiendo las ideas de Shulman, (1987) y cuestionando el MKT propuesto por Ball, Hill, & Bass, (2005); en esencia es un modelo analítico que se propone con la finalidad de caracterizar los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Es muy importante precisar que en las intenciones pioneras para la estructuración del modelo, está presente la idea de la formación del profesor de matemáticas, a ello obedece la marcada precisión de que en éste sólo se consideran, en cada uno de sus subdominios, lo específico a matemáticas, no porque se desconozca o se descalifique el resto del conocimiento del profesor (por ejemplo, conocimientos de pedagogía en

[1] Véase, por ejemplo, algunos repositorios internacionales: ZDM, Universidad de los andes; o las diferentes revistas especializadas: *Journal of Mathematics Teacher Education;* todas las que publica el National Council of Teachers of Mathematics, dentro de ellas "Journal for research in mathematics education", así como revistas nacionales e internacionales, Educación matemática, RELIME, Suma, UNO, etc., pero sobre todo los Handbook of mathematics

general o de psicología en general), sino sobre todo por el énfasis en lo especializado para la formación del profesor de matemáticas.

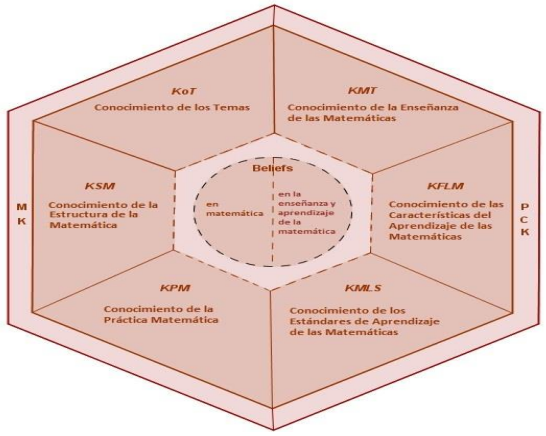


Figura 1. Modelo MTSK

Ahora bien, considerando que, en el caso de la Licenciatura en educación primaria de México, el maestro no sólo es maestro de matemáticas, como ya comentábamos en líneas anteriores, ¿en qué medida nos sirve este modelo para analizar críticamente los elementos de conocimiento del profesor presentes en los programas de estudio de matemáticas? De entrada, consideramos que sí es un buen referente sobre todo por los aspectos que en éste se contemplan y dado que sus mismos autores le han visto potencialidades cuando menos en tres escenarios: herramienta para reflexionar sobre el conocimiento propio, herramienta para investigar el conocimiento del profesor y herramienta para estructurar el contenido de la formación de profesores de matemáticas [es en este último sentido en que lo vamos a usar en esta ponencia; además de que coincidimos con Quiroga & Gamboa, (2017) en la utilidad que puede tener el modelo para actualizar los programas de formación de profesores de matemáticas].

¿En qué consiste el conocimiento especializado del profesor de matemáticas? ¿Qué componentes, dominios y subdominios puede/debe contener? De manera semejante a como lo precisaba (Shulman, 1987), el MTSK, como marco teórico para caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo, Montes, Contreras, & Climent, 2017), considera dos grandes dominios (figura 1): el Conocimiento matemático (MK), como disciplina científica que se utiliza por parte del docente en un contexto escolar; y el Conocimiento didáctico del contenido (PCK), que se refiere a los aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Estos dos dominios cuentan, a su vez, con subdominios. El MK se subdivide en Conocimiento de los temas matemáticos (KoT), se relaciona con el conocimiento que el docente tiene sobre los contenidos que desarrolla con sus alumnos, así como las relaciones intraconceptuales, por ejemplo, generalizar mediante la vinculación aritmética-álgebra; en este subdominio se consideran 4 categorías: Procedimientos (¿cómo se hace? ¿cuándo se puede hacer? ¿por qué se hace así? Y características del resultado); Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación; Fenomenología y aplicaciones. (Vasco, Moriel, & Contreras, 2017)

Conocimiento de la estructura matemática (KSM), contempla el conocimiento que le posibilita al profesor enseñar los temas matemáticos como fundamentación para su complejización posterior, es decir las conexiones con contenidos anteriores y posteriores. Se distinguen cuatro

categorías: conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares.

El tercer subdominio del dominio de conocimiento matemático es denominado *Conocimiento de la práctica matemática* (KPM), establece la relación entre el conocimiento de los temas matemáticos y los procedimientos y prácticas que se realizan para su construcción. Para este subdominio se han propuesto seis categorías: Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos; Formas de validación y demostración; Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal; Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas; Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación); y Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

En el dominio PCK se establecieron los subdominios: Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), respecto a las características de aprendizaje de los contenidos específicos de las matemáticas; Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT), se refiere a los recursos, materiales, estrategias didácticas y metodológicas respecto a cómo se presenta el contenido; y Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), que se enfoca a la intencionalidad y conocimiento del profesor sobre los niveles de logro y de desarrollo conceptual en los aprendizajes de los alumnos considerando el momento escolar determinado y su grado de desarrollo.

Metodología para el análisis

Como metodología para el análisis usamos el análisis de documentos en la tercera acepción utilizada por (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010) como "documentos preparados por razones profesionales (reportes, libros, artículos periodísticos, correos electrónicos, etc.), cuya difusión es generalmente pública" dado que ese es el carácter que adquieren los programas de estudio oficiales, en el entendido que "sirven como sustitutos de registros de actividades que el investigador no puede observar directamente" (Stake, 1999, p.66).

Complementario a lo anterior usaremos tablas comparativas construidas a partir de dos de los elementos básicos de los cursos: unidades de aprendizaje y propósitos o competencias según corresponda, resaltando los dominios, subdominios y categorías del MTSK, a partir de la cual recuperaremos la información desde los programas de estudio ya mencionados.

Primer nivel de análisis: énfasis y coincidencias entre programas.

Al observar la tabla 1, correspondiente al primer curso de cada programa de estudios podemos notar algunas coincidencias pero a la vez algunas diferencias atribuidas principalmente al énfasis e importancia que a los cursos de matemáticas se le ha dado en éstos; hemos de aclarar que en el caso del Plan 1997 sólo se impartieron 2 cursos (Matemáticas y su enseñanza I y II) en toda la Licenciatura, mientras que en el 2012 se propusieron 4 cursos (Aritmética, su enseñanza y aprendizaje; Álgebra, su enseñanza y aprendizaje; Geometría, su enseñanza y aprendizaje; y Procesamiento de información estadística), y en el 2018 se están proponiendo 5 cursos (Aritmética, números naturales; Aritmética, números decimales y fracciones; Álgebra; Geometría; Probabilidad y estadística). En primera instancia parece un acierto el énfasis en la formación matemática, sobre todo porque, como podemos ver en los anteriores cursos, ante el reconocimiento de la cantidad de temas que puede requerir un profesor de matemáticas, se intentó ponerlos lo más apretados posibles con consecuencias poco afortunadas porque generalmente no se alcanzaron a cubrir los programas.

Tabla 1

Bloques de aprendizaje y/o unidades de aprendizaje de cada programa

Plan 1997: Matemáticas y su enseñanza I (SEP, 1997)	Plan 2012: Aritmética, su aprendizaje y enseñanza (SEP, 2012)	Plan 2018: Aritmética. Números naturales (SEP, 2018)
I. Aprender matemáticas al resolver problemas. II. Los números naturales y el sistema decimal de numeración. III. Las cuatro operaciones básicas con números naturales IV. La geometría.	I. De los números en contexto a su fundamentación conceptual II. Problemas de enseñanza relacionados con las operaciones aritméticas III. Aspectos didácticos y conceptuales de los números racionales y los números decimales IV. Desarrollo del razonamiento proporcional	I. La aritmética, su enseñanza y aprendizaje en el Plan y programas de estudio de educación primaria II. Estrategias de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo del concepto de número y el sistema numérico decimal III. Estrategias de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo del sentido numérico al resolver problemas de suma y resta con números naturales IV Estrategias de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo del sentido numérico al resolver problemas de multiplicación y división con números naturales

En términos del KoT, podríamos decir que la principal coincidencia recae en dos temas: número y operaciones básicas; sobresale además el hecho de que aparece articulado el KoT con el KMT, sobre todo en el Plan 2018 con la denominación "Estrategias de enseñanza y aprendizaje para…", al menos en la denominación, aunque de la propia experiencia hemos de decir que la articulación KoT – KPM siempre ha estado presente, sin embargo en las sugerencias explícitas de los programas esto no queda claro, es decir, es una tarea que se la dejan a los formadores de profesores.

Derivado de esa coincidencia, al revisar las sugerencias de actividades de los tres programas llama la atención el hecho de que en el Plan 2018 hicieron una recuperación de actividades de los planes anteriores, lo cual confirma la sospecha respecto a la falta de una visión específica sobre la formación inicial de profesores, e incluso nos atrevemos a decir que, al parecer, se intentan articular dos visiones que han estado en pugna: el enfoque de "situaciones problemáticas" y el "enfoque por competencias" (Cfr Tabla 3), con lo cual da la impresión que es más una decisión política, al término de un sexenio presidencial (los programas 2018 se publicaron en agosto de 2018 y el gobierno termina su periodo en diciembre del mismo año), que una decisión académica que recupere los avances de la investigación didáctica.

En la siguiente tabla presentamos un ejemplo de cómo se recuperaron actividades de los dos programas de estudio anteriores, para trabajarlas en el actual:

Tabla 2

Combinación de actividades entre programas de estudio

Plan 1997: Matemáticas y su enseñanza I (SEP, 1997)	Plan 2012: Aritmética, su aprendizaje y enseñanza (SEP, 2012)	Plan 2018: Aritmética. Números naturales (SEP, 2018)

	Revisar: Las propuestas de Cedillo, T,, Isoda, M,, Chalini, A., Cruz, V., Ramírez, M. E. y Vega, E. (2012): El 3: primer número natural para analizar pp. 38, 39 y 40. Conceptos de conteo, orden y números ordinales en Tomo I. pp. 8-25, 33. 64 -73. Tomo II, vol 1, pp. 18-19	
Resolver en equipos la actividad *"Aprendiendo a contar" (*pp. 34-39), del texto La *enseñanza de las matemáticas en la escuela primarla.* Taller para maestros. Primera parte, México, SEP.	Forma parte de…	Analizar las propiedades de sistemas de numeración posicionales con diferentes bases y resuelva las actividades sugeridas en: Block, D. et. al. (1995). *Taller para maestros-. La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* Taller para maestros. Primera parte, México, SEP, pp. 33-61.

Lamentablemente no se recuperaron todas las actividades que dan cuenta del proceso de comprensión de una noción o concepto matemático (por ejemplo "número") en un intento por articular dos posicionamientos formativos.

2º nivel de análisis: Indicios y oportunidades para la construcción del MTSK.

Flores-Medrano (2015) menciona que los indicios de conocimiento permiten reconocer que se requiere de información amplia para convertirse en evidencia de conocimiento, por lo cual, se pueden traducir como sospechas; de igual manera, las oportunidades son las posibilidades que el diseño brinda para la construcción del conocimiento especializado.

De tal manera que, a partir de la consideración de que los propósitos o competencias específicas del curso definen su sentido, veamos cuáles elementos del MTSK se pueden apreciar:

Tabla 3

Propósitos o competencias en los diferentes programas de estudio

Plan 1997: Matemáticas y su enseñanza I. Propósitos	Plan 2012: Aritmética, su aprendizaje y enseñanza. Competencias	Plan 2018: Aritmética. Números naturales. Competencias
1. Consoliden el **conocimiento de los contenidos matemáticos** (KoT) fundamentales que se enseñan en la escuela primaria y **comprendan los distintos significados que adquieren** al aplicarlos a distintas situaciones y en la resolución de problemas. 2. Conozcan las **características del enfoque didáctico** para la enseñanza de las	1. Distingue las características de las propuestas teóricas metodológicas para la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria con la finalidad de aplicarlas críticamente en su práctica profesional (KMT). 2. Identifica los principales obstáculos que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética (KFLM) en la escuela primaria y aplica este conocimiento en el diseño de ambientes	1. Conoce y analiza los conceptos y contenidos (KoT) del Programa de estudios de la educación básica de matemáticas (KMLS); crea actividades contextualizadas y pertinentes para asegurar el logro del aprendizaje de sus alumnos, la coherencia y la continuidad entre los distintos grados y niveles educativos (KSM). 2. Diseña escenarios (KPM) y experiencias de aprendizaje de

matemáticas (KMT) que enfatiza la **construcción de significados** a partir de la **resolución de situaciones problemáticas** (KPM) y lo comparen con el enfoque por "competencias". 3. Conozcan y apliquen elementos de **didáctica de las matemáticas** (KMT) para analizar situaciones de enseñanza y su relación con los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos en los niños (KFLM).	de aprendizaje (KMT). 3. Relaciona los saberes aritméticos formales (KoT) con los contenidos del eje sentido numérico y pensamiento algebraico (KMLS) del plan y programas de estudio de educación primaria para diseñar ambientes de aprendizaje. 4. Usa las Tecnologías de la Información y la Comunicación (tic) como herramientas para la enseñanza y aprendizaje (KMT) en ambientes de resolución de problemas aritméticos (KPM). 5. Emplea la evaluación como instrumento para mejorar los niveles de desempeño de los alumnos de la escuela primaria en la resolución de problemas (KMT).	las matemáticas utilizando diversos recursos metodológicos y tecnológicos para favorecer la educación inclusiva (KMT). 3. Diseña y utiliza recursos y medios didácticos pertinentes para desarrollar el sentido numérico en el aprendizaje de las matemáticas, acorde con los procesos de desarrollo cognitivo y socioemocional de los alumnos (KFLM). 4. Evalúa el aprendizaje de sus alumnos empleando distintos enfoques, métodos e instrumentos considerando las áreas, campos y ámbitos de conocimiento, así como los saberes correspondientes al grado y nivel educativo (KMT). 5. Utiliza los resultados de la investigación para profundizar en el conocimiento y los procesos de aprendizaje de sus alumnos (KFLM).

Si hacemos una síntesis de los subdominios del MTSK, a partir de la categorización que le aplicamos a los propósitos y/o competencias según el programa, encontramos que el Plan 1997 puso mayor énfasis en las estrategias de enseñanza (KMT), pero no hizo objeto de estudio el KSM, es decir, el conocimiento de la estructura de la matemática. Lo paradójico es que éste (KSM) se hace objeto de estudio en las actividades del Plan 2012, pero no aparece explicitado en las competencias a lograr.

El KoT presente con diferentes énfasis, en el Plan 97 centrado en el conocimiento de los contenidos de la educación básica; en el 2012 fue el centro de la atención (incluso a ello obedece la impartición del curso de Álgebra); y en el Plan 2018 aparece más equilibrado su conocimiento. El KMT también innegablemente está presente y en general, consideramos que cada uno de los subdominios va adquiriendo un lugar en las intencionalidades de los programas, sin embargo, el problema es que las orientaciones didácticas para los formadores de profesores no están claras, de tal manera que, para ejemplificar, el KSM está discursivamente presente en el plan 2018 cuando se firma "conoce y analiza los diferentes contenidos…asegurar el logro del aprendizaje de sus alumnos, la coherencia y la continuidad entre los distintos grados y niveles educativos" pero en la propuesta de actividades incluso retira bibliografía que desde el plan 2012 permitía lograr ese propósito.

Conclusiones

La formación inicial de profesores no puede estar librada sólo a las decisiones de política nacional, debe recuperar con seriedad los avances de la investigación didáctica, en concreto modelos de formación y desarrollo profesional (uno de los cuales es el MTSK) que contribuyan a

consolidar el conocimiento especializado que mucha falta les está haciendo a los profesores; los efectos pendulares que se han estado presentando en México, no sólo dañan a la formación matemática de los nuevos profesores, sino que contribuyen a su descrédito.

Es innegable que el MTSK no resuelve todo el ámbito de la formación inicial de profesores de matemáticas para la educación primaria, sobre todo por el carácter generalista, pero sí contribuye a centrar la atención en aspectos muy puntuales: conocimiento disciplinario, conocimiento de la estructura de la matemática (aspecto muy poco considerado para la formación inicial), conocimientos para la enseñanza y de los procesos de aprendizaje de los niños, conocimiento curricular y por supuestos el conocimiento de las características de la práctica en matemáticas; la integración de estos elementos contribuirá a lograr una sólida formación docente inicial.

Referencias y bibliografía

Ball, D. L., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for teaching. *American educator*, 14-43.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C., & Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*, 185-206.

Courant, R., & Robbins, H. (1979). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos.* España: Aguilar.

Dreyfus, T., Artigue, M., Potari, D., Prediger, S., & Ruthven, K. (2018). *Developing Research in Mathematics Education. Twenty years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe.* England: Routledge-ERME.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).* Huelva: Tesis doctoral.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación.* México: McGraw Hill.

Llinares, S. (2018). Conocimiento, competencia docente del profesor de matemáticas y llegar a ser un formador de profesores. *Avances de Investigación en Educación Matemática. No. 13*, 1-121.

Quiroga, F., & Gamboa, M. (2017). Contribución del MTSK en la elaboración del plan de formación de profesores de matemática. En J. Carrillo, & L. C. Contreras, *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (págs. 125-130). Huelva: CGSE.

SEP. (1997). *Matemáticas y su enseñanza I* . México: Autor.

SEP. (2012). *Aritmética. Su aprendizaje y enseñanza.* México: Autor.

SEP. (2018). *Aritmética. Números naturales.* México: Autor.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard educational review No 57*, 1-22.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

Vasco, D., Moriel, J., & Contreras, L. C. (2017). Subdominios del MTSK. KoT y KSM: definición, categorías y ejemplos. En J. Carrillo, & L. C. Contreras, *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la matemática de la Universidad de Huelva* (págs. 29-37). Huelva: CGSE.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Aprendiendo Topología como profesores de matemáticas en formación

Angie Lizeth **Galán** Cipagauta
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia – Bogotá
dma_algalanc834@pedagogica.edu.co
María Andrea del Pilar **Patiño** Cifuentes
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia – Bogotá
dma_mapatinoc954@pedagogica.edu.co
María Nubia **Soler** Álvarez
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia
Colombia – Bogotá
nsoler@pedagogica.edu.co

Resumen

El póster que se presenta describe una ruta que dos estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional han seguido para aprender conceptos asociados a la topología. Debido a que la Topología tiene es un área de las matemáticas que resulta difícil de comprender para muchos estudiantes, por lo tanto, esta ruta contempla tres instancias, el estudio de objetos y conceptos matemáticos, el conocimiento de herramientas de GeoGebra -Software de Geometría Dinámica - y la socialización en eventos académicos de los avances en la comprensión.

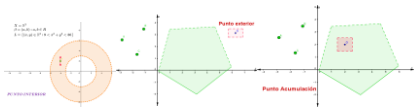
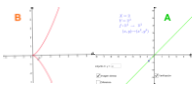
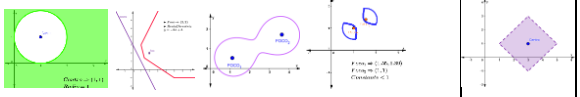
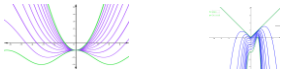
Palabras clave: Topología, GeoGebra, visualización, objetos matemáticos, ruta.

Introducción

En el póster se presenta una ruta seguida por dos estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para comprender objetos matemáticos de topología (ver Tabla 1). En la medida en que se han estudiado objetos de la topología desde textos de matemáticas (Munkres (1975), Neira (2012), Rubiano (2002)), se han explorado y estudiado herramientas de GeoGebra, con el propósito de presentar ejemplos, haciendo énfasis en la visualización, que permitan la comprensión. La preparación de ponencias para participar en eventos ha logrado que se consolide el conocimiento sobre los objetos estudiados.

Tabla 1

Ruta seguida por estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas para aprender Topología

Ruta de conceptos	Actividad / evento	Uso de GeoGebra
Un vistazo a los elementos de una Topología	Taller / XXXIX Jornada del educador matemático en la UPN	 Los archivos permitían verificas las condiciones que requiere una colección para ser Topología
Un vistazo a puntos y conjuntos especiales de una topología	Ponencia / VII Simposio de matemática y educación matemática y VI congreso internacional de matemática asistida por computador en la UAN	 Los archivos permitían visualizar los puntos especiales de una Topología en distintos conjuntos
Un vistazo a imágenes directa y reciproca de funciones	Taller / XL Jornada del educador matemático en la UPN	  Reconocer la imagen directa y reciproca para la conceptualización de función continua
Un vistazo a las secciones cónicas	Poster / IV encuentro distrital de educación matemática en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas	 Observar la forma de bolas abiertas, si se cambia de la definición de distancia
Apoyo de GeoGebra para la conceptualización de Topología	Taller virtual en Moodle / 3er Congreso internacional de matemática educativa	 Se recopilo el trabajo realizado por el momento
Conceptos básicos de Topología Algebraica ejemplos usando GeoGebra	Taller / XLI Jornada del educador matemático en la UPN	 Visualizar las transformaciones de funciones
Topología algebraica: Homotopías, caminos y multiplicación de caminos	Trabajo de grado	 Los archivos permiten una mayor compresión de los conceptos que aborda la Topología Algebraica

Bibliografía y referencias

Munkres, J. R. (1975). *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.

Neira, C. M. (2012) *Topología General*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Hohenwarter. M., & Preiner, J. (March 2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra, *Journal of online mathematics and its aplications,* (7). Recuperado de https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

Rubiano, G. (2002). *Topología.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Rubiano, G. N. (2007). *Topología Algebraica.* Bogotá, Colombia: Univirsidad Nacional de Colombia.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Límites de funciones en una variable y principales dificultades conceptuales de estudiantes en formación inicial

Cristian **Quesada** Fernández
Universidad Estatal A Distancia
Costa Rica
cquesadaf@uned.ac.cr
Eric **Padilla** Mora
Universidad Estatal A Distancia
Costa Rica
epadilla@uned.ac.cr

Resumen

Estudios realizados en el contexto de educación presencial, y relacionados con el aprendizaje de la teoría de límites de funciones, señalan que los estudiantes enfrentan diversos obstáculos; sin embargo, hay una carencia de información entorno a esta temática en educación a distancia, en particular con estudiantes de carreras de formación docente. Este trabajo muestra una síntesis de un estudio realizado con el propósito de determinar y analizar las dificultades conceptuales que afrontan los estudiantes, en formación inicial de Enseñanza de la Matemática, en las pruebas escritas de cálculo diferencial en la UNED, Costa Rica. Se realizó una categorización y análisis detallado de las dificultades encontradas y los resultados evidencian dificultades conceptuales así como con el uso incorrecto de simbología matemática. Con este estudio se pretende mejorar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de los contenidos y buscar la mejora en el rendimiento académico de los estudiantes.

Palabras clave: obstáculo, dificultades de aprendizaje, cálculo, educación a distancia, límites de una función.

Introducción

Un tema fundamental en el análisis matemático y cimiento sobre el cual se sostiene toda una estructura que da pie al desarrollo de contenidos como: continuidad, derivación e integración, corresponde a la teoría de límites de funciones. No obstante, el desarrollo y comprensión de dicho concepto, desde sus orígenes, produjo mucha dificultad, tal como lo señala Mira (2016) al indicar que

> El proceso de refinamiento del concepto de límite fue difícil para los científicos de la época dada la profundidad del mismo por su auténtica naturaleza y porque

> requiere una precisión de pensamiento y una percepción del sistema de los números reales que no era fácil de conseguir (p.7).

Por su parte, Blázquez y Ortega (2000) señalan que dicha temática acarrea quizá la mayor cantidad de dificultades en su aprendizaje, las cuales están ligadas propiamente al concepto, el cual para muchos de los estudiantes, según los autores, es "árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender" (p.1).

Los diversos estudios realizados con el fin de analizar las dificultades y errores en torno al tema límites de funciones, generalmente, se han realizado con estudiantes de carreras universitarias no matemáticas y en contextos en los cuales los procesos de enseñanza y de aprendizaje son presenciales, como los de Claros (2010), García (2013), Neira (2013), Pons, Valls y Llinares (2012), Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006), entre otros; y señalan que las dificultades podrían estar relacionadas con obstáculos de origen didáctico, producto de la forma en la cual se enseña, o quizá porque la comprensión de este concepto implica procesos poco utilizados por los estudiantes como: el uso consciente y adecuado de simbolismo, la abstracción, el análisis y en algunos casos la demostración, aunado a los problemas generados con el término límite y su poca relación con los contextos coloquiales, lo cual provoca que cuando el estudiante debe afrontar la solución de situaciones que requieran un mayor manejo conceptual cometa más errores (Selden, Mason y Selden, 1994).

Ahora bien ¿Qué sucede cuando dichos procesos se dan en una educación a distancia? con estudiantes en formación de enseñanza de la Matemática, tal como ocurre en la Universidad Estatal a Distancia (UNED), de Costa Rica, con la asignatura: Cálculo Diferencial.

En dicha asignatura se aborda los temas: límites, continuidad, derivación y aplicaciones de la derivada; se imparte bajo un modelo de educación a distancia, donde se mezclan actividades presenciales con actividades en línea. Como parte de la evaluación, el estudiante debe realizar dos pruebas escritas de manera presencial, así como actividades obligatorias mediante la plataforma de aprendizaje Moodle (pruebas cortas en línea, tareas y un taller de aplicación con software especializado). El estudiante puede asistir a tutorías presenciales no obligatorias, además tiene acceso a un foro de consultas a través del entorno virtual del estudiante.

En los últimos años, la asignatura ha presentado un número elevado de estudiantes que la pierden o la retiran. Por ejemplo en el III cuatrimestre del 2017, perdió 41,9% y se retiró 19,4%, lo cual da una aprobación de 38,7%.

Además, durante el proceso de revisión o calificación de los instrumentos de evaluación se nota que los estudiantes evidencian diversas dificultades, los cuales están relacionados con: conocimientos previos, el uso inapropiado de simbología y con la naturaleza del contenido (obstáculos epistemológicos). Esto condujo al desarrollo de un proceso investigativo cuyo objetivo principal fue analizar las dificultades conceptuales en las que incurren los estudiantes en las pruebas escritas de dicha asignatura y relacionados con el tema: límite de una función en una variable.

Con los resultados obtenidos se pretende contribuir con la toma de decisiones que permitan favorecer los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos, al proponer alternativas para solucionarlos y por ende lograr que los estudiantes puedan comprenderlos y así mejorar el rendimiento académico.

Marco referencial

La teoría relacionada a obstáculos ha sido ampliamente abordada por diversos autores. Brousseau (1983, citado por Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, s.f.) indica:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento. El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto que encuentra con frecuencia. Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente.
- El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica (pp.2-3).

Además, Brousseau identifica tres tipos de obstáculos: ontogénicos, didácticos y epistemológicos. En relación a estos últimos, Bachelard (1976) los define como las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de los individuos para construir su conocimiento. Al respecto, este autor identifica cinco obstáculos principales: los conocimientos previos, el verbal, el peligro de la explicación por la utilidad, el conocimiento general y el animista. Cabe señalar que los epistemológicos se presentan en diversos campos del quehacer matemático; el cálculo no es la excepción. Se muestra a continuación algunas posturas entorno a las dificultades relacionadas con el estudio de límites.

Primero, resulta pertinente destacar que la noción de límite fue abordada por distintas culturas en diversos sitios del planeta. Se tienen registros de civilizaciones egipcias y griegas. El método de exhausión, fue utilizado para calcular longitud de curvas, áreas y volúmenes de figuras geométricas, procesos en los cuales la noción de límite era tácita (Volveras, 2015). Grandes matemáticos como Kepler, Cavalieri y Fermat, entre otros, hicieron grandes aportes al desarrollo del concepto de límite, y por ende al desarrollo del análisis infinitesimal. Entre los más destacados están los aportes de Isaac Newton en el desarrollo de series infinitas, así como el aporte de Leibniz al introducir una notación y terminología más formal la cual permitió una mejor lectura en la resolución de problemas.

Lo anterior pone en manifiesto que históricamente el estudio del concepto de límites ha revertido distintos obstáculos, ligados estrechamente a su concepto y sus representaciones. Se coincide con Volveras (2015) en que tanto el lenguaje matemático, como el contexto y las distintas representaciones tienen una fuerte influencia sobre la concepción del infinito y los razonamientos alrededor de este concepto.

Con el estudio de límites, se hace pertinente que los estudiantes logren determinarlos, reconocerlos tanto de forma gráfica como algebraica, haciendo uso de tablas, representaciones en el plano cartesiano, así como de manera verbal. En todos estos escenarios, es recurrente la aparición de errores por parte de los estudiantes. Cornu (1983, citado por Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein, s.f.) señala algunos obstáculos epistemológicos que afrontan los estudiantes. El primero, relacionado al sentido común de la palabra límite, que induce a concepciones relacionadas a muro o barrera insuperable. Segundo, la sobregeneralización que se hace de las propiedades de procesos finitos a los infinitos. Además, un aspecto ligado a la noción

de infinito, que induce a una nueva manera de razonamiento. Finalmente, en esta misma línea, los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

En cuanto a las dificultades que presenta el concepto de límite Tall (s.f., citado por Claros, 2010) señala: dificultades producidas por el lenguaje, la imposibilidad de transformar el cálculo de cualquier límite en una simple operación algebraica o aritmética y la idea de si el límite es alcanzado o no genera dificultades, así como el paso de lo finito a lo infinito tiende a confundir. Por su parte Fernández (2010, citado por La Plata, 2014) señala

- Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.
- Dificultades para reconocer los límites laterales.
- Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.
- Problemas con el uso de diferentes representaciones de las funciones.
- Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario (p.8).

En suma, durante las últimas décadas, el estudio de obstáculos ha sido ampliamente abordado por diversos estudiosos. No obstante, todos ellos hacen mención al modelo de educación presencial tradicional. La bibliografía en torno a esta temática en el modelo a distancia es prácticamente nula, por ello, resulta pertinente el estudio bajo la modalidad a distancia.

En esta línea, se destaca que la asignatura Cálculo Diferencial, atiende al modelo pedagógico de la UNED el cual busca aplicar didácticas flexibles donde el estudiante sea el principal protagonista del proceso de aprendizaje, al respecto se indica que

> debe permitirle, a éste, la libertad de aprovechar al máximo los recursos que se le ofrecen, de planificar el progreso de su aprendizaje y de regular, él mismo, el ritmo y la calidad de sus avances. Esto implica que todos los elementos del modelo pedagógico se piensen para ponerlos a disposición de los estudiantes, de manera que ellos puedan gestionar su propio proceso de formación (UNED, 2005, p.13).

Metodología

El estudio realizado es de carácter descriptivo, y se tomó como referencia los estudiantes de la asignatura cálculo diferencial de la carrera enseñanza de la matemática en la UNED, que aplicaron la primera prueba escrita ordinaria del III cuatrimestre del 2017. La muestra estuvo conformada por 20 estudiantes con la misma cantidad de hombres que mujeres. La edad promedio de la muestra fue de 33 años con una desviación estándar de 7,68 años.

En este estudio se analizaron tres categorías: la dificultad de formalismo simbólico, la dificultad de argumentación y la dificultad conceptual. Por tanto, con el fin de evitar ambigüedades, se procedió a definirlos, lo cual se muestra en la tabla 1:

Tabla 1

Tipo de dificultad y su definición

Dificultad	Definición

Conceptual.	Las dificultades conceptuales corresponden a • Aplicar el procedimiento tal como es requerido por el concepto, pero comete errores al ejecutar los pasos necesarios. Por ejemplo, evalúa o realiza el análisis correcto del límite pero los procedimientos empleados son incorrectos. • No justificar de forma clara, en caso de existir, el tipo de indeterminación que se presenta. • Confundir una indeterminación con la forma indefinida. • Interpretar de forma incorrecta expresiones como $\infty-\infty$ y $\frac{0}{0}$, entre otras. • Plantear de forma incorrecta e incompleta las condiciones iniciales de la definición.
De argumentación.	Cuando en el proceso de solución los argumentos empleados no son claros, el razonamiento no conlleva una lógica o la explicación carece de sentido.
En el uso de simbología.	Cuando en el proceso de solución se omite o se emplea de forma incorrecta algún símbolo o expresión matemática.

Fuente: elaboración propia.

Al trabajar con los objetivos relacionados con el cálculo de límites; se consideraron las soluciones dadas a los ejercicios tanto en la parte de respuesta breve como en la de desarrollo. En la tabla 2 se muestra la relación entre objetivo e ítem. En total se analizaron 6 ejercicios.

Tabla 2
Relación objetivo-ítem respecto a los instrumentos

Objetivo	**Ítem en la prueba**
Calcular límites de funciones que presenten indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ o $\infty-\infty$ usando factorización, simplificación o racionalización.	RB (1a) RB (1b)
Aplicar los teoremas básicos de límites en la resolución de ejercicios y problemas.	RB3
Demostrar, usando la definición formal, que $\lim_{x\to a} f(x)=l$ existe.	D1
Aplicar los límites trigonométricos especiales en el cálculo de límites de funciones trigonométricas que producen formas indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$.	RB (1c) D2
Simbología **RB**: corresponde a los ítems de respuesta breve de la prueba escrita. **D**: corresponde a los ítems de desarrollo.	

Fuente: instrumento de evaluación aplicado a estudiantes y diseño curricular de curso.

Análisis y discusión de resultados

Tomando como referencia el objetivo propuesto, para el análisis de los instrumentos, se diseñó lo mostrado en la tabla 3 y posteriormente se procedió a completarla.

Tabla 3
Frecuencia relativa de los ítems analizados respecto a los criterios

Criterio	RB(1a)	RB(1b)	RB(1c)	RB3	D1	D2
1. Hay evidencia que permita asegurar que intentó resolver el ejercicio.	1,00	1,00	0,85	0,80	1,00	0,95
2. Resuelve solo algunos pasos del ejercicio.	0,15	0,05	0,25	0,00	0,30	0,10
3. Se evidencia que tiene claro el procedimiento que debe realizar.	0,65	0,50	0,45	0,25	0,80	0,65
4. Justifica de forma clara, en caso de existir, el tipo de indeterminación generada.	0,35	0,10	0,25	na	na	0,20
5. Resuelve el ejercicio hasta obtener el resultado final.	0,85	0,95	0,30	0,55	0,65	0,50
6. El resultado final es correcto.	0,45	0,35	0,30	0,25	0,60	0,35
7. Utiliza el teorema de intercalación.	na	na	na	0,30	na	na
8. En la solución sus argumentos conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido.	0,85	0,60	0,45	0,65	0,55	0,70
9. Omite o confunde el uso de la simbología correspondiente durante la resolución del ejercicio.	0,50	0,45	0,30	0,25	0,50	0,35
10. Se evidencia una estructura de orden en la solución del ejercicio.	0,80	0,80	0,25	0,45	0,70	0,20
11. Plantea, de forma correcta y completa, las condiciones iniciales de la definición de límite.	na	na	na	na	0,55	na
12. Encuentra el delta y es correcto.	na	na	na	na	0,60	na
13. Prueba que el delta obtenido funciona.	na	na	na	na	0,60	na

Simbología
RB: corresponde a los ítems de respuesta breve en la prueba escrita.
D: corresponde a los ítems de desarrollo en la prueba escita.
na: no aplica.

Fuente: solución brindada por los estudiantes en el instrumento de evaluación. III cuatrimestre 2017.

De acuerdo con los resultados de la tabla anterior se puede inferir que

a) Por lo general, los estudiantes intentan resolver el ejercicio aunque no tengan claro que es lo que deben hacer.
b) En el cálculo de límites, cuando existe alguna indeterminación, los estudiantes no justifican ni brindan argumentos claros que permita concluir que comprenden el tipo de indeterminación que se presenta. Además, de forma mecánica el estudiante realiza algún procedimiento (racionaliza, factoriza, sustituye, etc.) según la forma que tiene el criterio de la función, sin saber si es requerido o no dicho procedimiento.
c) Respeto al cálculo de límites haciendo uso del teorema de intercalación, aunque en el ejercicio se les indicó que era a partir de su uso solo 30% de los estudiantes lo utilizó. Además, no tienen claro el porqué es necesario emplear dicho teorema y su relación con el

criterio de la función y el valor al cual tiende la variable, lo cual puede denotar dificultad en la comprensión de la teoría estudiada y su aplicación en la resolución de ejercicios y problemas. En este mismo ítem, algunos estudiantes trataron de calcular límites laterales, cuando esto no se podía aplicar ya que la variable tendía a infinito. Cabe destacar que en la resolución de este ítem se requiere ser muy metódico, ordenado y estructurado, algo que solo el 35% de los estudiantes evidencia, y el 25% tiene una idea clara de lo que debe realizar.

d) En cuanto al cálculo de límites por definición (cálculo de $\delta - \varepsilon$), de los ítems analizados, es el que mejor aprobación tiene, con un 60%; esto hace pensar que se debe a una buena comprensión de la definición formal de límite por parte de los estudiantes, o bien, por preparación para resolver este tipo de preguntas (repetición dado que es un ejercicio que se incluye en la mayoría de las pruebas escritas). No obstante, al contrastar el rendimiento mostrado en este ítem con otros donde se deben calcular límites específicos, se nota poca comprensión del concepto, lo cual inclina la balanza hacia que el estudiante presume que practican con regularidad la resolución de este tipo de problemas.
Además, en este ítem se evidencia la importancia de una estructura de orden, y 90% trabajó de esa manera.

e) Los estudiantes omiten o confunden el uso de la simbología correspondiente, es común que no escriban la expresión $\lim_{x\to a}$ o bien utilizan el igual cuando en realidad lo de que deben emplear es el implica o el sí y solo sí. Algunos ejemplos de lo realizado por los estudiantes se muestra a continuación

▪ $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\sqrt{x^2+3x}-x\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$	Olvida la expresión $\lim_{x\to\infty}$.
▪ $\left\|x^2+3x+1-55\right\|<\varepsilon=\left\|x^2+3x+54\right\|<\varepsilon$	Uso incorrecto del igual.
▪ $-1<\frac{senx}{x+2}<1$ $\lim\frac{-1}{x+2}<senx<\lim\frac{1}{x+2}$	No hay claridad en el procedimiento por falta de la simbología respectiva.

f) En la solución sus argumentos conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido. Ejemplos de lo realizado por estudiantes, en ciertos cálculos, se muestra a continuación

▪ $\lim_{x\to\infty}\infty(0)=\infty$	▪ $\lim_{x\to\infty}\underset{\infty-\infty}{x-x}=0$
▪ $\lim_{x\to\infty}\frac{-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}}{x+2+\sqrt[3]{x}}=\frac{0}{\infty}=0$	▪ $\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{\infty\cdot 0}{2}=\frac{0}{2}=0$

Conclusiones y recomendaciones

El objetivo planteado para este estudio fue alcanzado; fue posible determinar y analizar las principales dificultades conceptuales en que incurren los estudiantes, en formación de Enseñanza de la Matemática, en las pruebas escritas de cálculo diferencial. Los resultados evidencian además de errores de tipo simbólico y algebraico, dificultades relacionadas estrechamente al concepto de límite; al comparar los desarrollos de los estudiantes, parece indicar que ellos aplican la definición de límite de manera mecánica, sin embargo, la misma no es interiorizada o comprendida correctamente, ya que en ejercicios donde deben calcular un límite no se evidencia esta comprensión, dado los errores de argumentación encontrados. Además, se denota dificultades en el uso de teoremas específicos del área.

Se considera importante realizar un estudio en el cual se apliquen técnicas más de corte cualitativo para así analizar otros aspectos relacionados con el accionar de los estudiantes durante el proceso de resolución de los ejercicios. Para ello sería conveniente, con base en los resultados obtenidos en este estudio, focalizar el tipo de dificultar por analizar a profundidad y por tanto seleccionar y adecuar el tipo de ejercicio que se estudiará.

Es oportuno en los cursos iniciales establecer mecanismos para reconocer los errores en que están incurriendo los estudiantes, detectar las posibles causas y se logre crear estrategias de solución a los mismos, de manera que las dificultades presentadas sean subsanadas y no se arrastren a cursos de corte superior. Cabe destacar que el Modelo Pedagógico de la UNED, está centrado en el estudiante al cual le da la libertad de aprovechar al máximo los recursos, de planificar el progreso de su aprendizaje y de regular su ritmo y la calidad de sus avances (UNED, 2005). Por tanto, se visualiza al estudiante como un sujeto activo y participativo, capaz de autorregular y autoevaluar su propio aprendizaje; ante esto, la metodología de las asignaturas debe propiciar que el estudiante sea capaz de construir su propio conocimiento.

Finalmente, es pertinente que los estudiantes puedan conocer los resultados de este tipo de investigaciones con el fin que intenten conocer los tipos de errores más frecuentes y así evitar que se sigan presentado, con ellos se pretende mejorar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos y por ende lograr que los estudiantes puedan comprenderlos y mejorar su rendimiento académico.

Bibliografía y referencias

Batanero, C. Godino, J. Green, R. Holmes, P. Vallecillos, A. (s.f.). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. **Recuperado de www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/erroresestadis.doc**

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). *El concepto de límite en la educación secundaria. En El futuro del cálculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. ISBN: 970-625-246-0. México.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S y Benegas, J. (2006). *Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad*. Recuperado de: **http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000200002**

Claros, F. (2010). Límite Finito de un Sucesión: Fenómeno que organiza. Tesis Doctoral. Recuperado de: **http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/5663/18909772.pdf?sequence=1&isAllowed=y**

García, J. (2013). *La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería*. Recuperado de: **http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44028564002**

La Plata, C. (2014). *Errores entorno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real*. Tesis de maestría. Pontificia Universidad de Perú

Mira, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje*. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Neira, G. (2013). *Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación Matemática*. Recuperado de: **https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4817228**

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). *Características de la tematización del esquema de límite de una función*. Recuperado de: **https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5065976**

Selden, J., Mason, A. y Selden, A. (1994). *Even good calculus students can´t solve non-routine problems* [Incluso los buenos estudiantes de cálculo no pueden resolver problemas no rutinarios]. Recuperado de **https://www.researchgate.net/publication/313667340_Even_good_calculus_students_can%27t_solve_nonroutine_problems**

UNED. (2005). *Modelo Pedagógico*. Recuperado de **https://www.uned.ac.cr/academica/images/igesca/materiales/24.pdf**

Volveras, A. (2015). *Propuesta didáctica para la enseñanza de límites de funciones en el grado de undécimo de la I.E. El Rosario integrando Geogebra*. Trabajo de grado para optar por el título Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia.

Vrancken, S, Gregorini, M, Engler, A, Müller, D y Hecklein, M. (s.f.). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite*. Recuperado de **http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf**

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Formación de docentes sordos para una Educación Matemática Especialmente Inclusiva (EMEI)

Angélica María **Martínez**
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
angelicmar5@gmail.com
Fredy **González**
Universidade Federal De Rio Grande Do Norte, Brasil
fredygonzalezdem@gmail.com

Resumen

Gracias a la visión de una Educación Inclusiva, el acceso de personas sordas a la escolaridad constituye la posibilidad de culminar estudios superiores como ocurre con quienes ingresan a la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), núcleo Maracay de Venezuela para graduarse como docentes. Como parte de un estudio cualitativo de carácter doctoral emergió la posibilidad de desarrollar actividades con futuros docentes sordos para socializar, conceptualizar y comunicar contenidos matemáticos desde la concepción de una Educación Matemática Especialmente Inclusiva (EMEI) con el propósito de encaminar alternativas en los procesos de su formación docente. Para esto se realizaron entrevistas a dos estudiantes sordos quienes durante dos jornadas participaron y fueron asesorados por la docente-investigadora llegando a conceptualizar y conformar señas en torno a la multiplicación y al uso de las regletas de Napier.

Palabras clave: formación docente, sordo, educación matemática, educación especial, educación inclusiva.

Introducción

Como parte de un estudio de carácter doctoral, cuya evolución puede sintetizarse como una visión integradora entre tres componentes: la formación docente (ya sea porque se gradúa como profesor de matemática o porque es profesor de Educación Especial), el requerimiento de un contenido matemático adaptado, y la especificidad de unos procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática (cónsonos con las necesidades de sus educandos en aulas inclusivas), se presenta a través de esta comunicación la experiencia desarrollada con futuros docentes sordos al socializar, conceptualizar y comunicar contenidos matemáticos desde la concepción de una Educación Matemática Especialmente Inclusiva (EMEI), entendida como un campo disciplinar de convergencia sinérgica entre Educación Inclusiva (EI), Educación Especial (EE) y Educación

Matemática (EM), en cuyo contexto los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática han de ser gestionados por un docente que posea una formación específica que incluya cuestiones generales de la Educación Inclusiva y la Educación Especial, así como las vinculadas con los ámbitos de saberes del profesor que enseña Matemática

La experiencia surge con el propósito de encaminar alternativas en los procesos de formación docente de aquellos estudiantes universitarios sordos que deberán enseñar contenidos matemáticos, tal como sucede con los egresados de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), núcleo Maracay de Venezuela, donde su título profesional no les exime de trabajar sólo dentro de su comunidad y que desde las asignaturas de Matemática recibidas durante su carrera no necesariamente ahondan los temas propios de esta área del conocimiento.

Como la investigación fue de carácter cualitativo, se realizaron entrevistas a dos estudiantes universitarios próximos a graduarse en la Especialidad de Educación Especial de tal manera que se pudieran acuñar señas para contenidos matemáticos a partir del intercambio y reflexión de la concepción que tienen de ellos, pero para presentar la comunicación se tomará en cuenta la discapacidad auditiva, la comunidad sorda, la lengua de señas, lo metodológico, la información recabada y las conclusiones.

Una breve caracterización de la discapacidad auditiva y Comunidad Sorda

En consideración a lo dicho por la OMS (2001), la discapacidad auditiva físico sensorial se vincula con el sentido del oído en cuanto a verse afectada su función sensorial de percepción de los sonidos, de discriminar la localización de fuentes sonoras, su tono, volumen o calidad; es decir, al presentarse dificultades o pérdida de la captación de sensaciones asociadas con la audición o posibilidad de escuchar, lo cual influye en la comunicación, en procesos de aprendizaje, interacciones socioculturales diferenciadas y en el tipo de información que percibe.

Para determinar la capacidad auditiva de una persona, se debe considerar cómo se da la recepción del sonido, lo cual implica conocer la anatomía de cada oído (y hacer un estudio audiológico detallado para evaluar sus partes, como también del discernimiento de la persona al escuchar palabras o discriminar variadas fuentes emisoras de sonido, realizando métodos como la logoaudiometría y la audiometría. Todos estos métodos se consideran de orden clínico, pero tomando la discapacidad en relación a las situaciones extrínsecas del individuo, a cómo se relaciona socialmente, interesa asumir esta condición desde el punto de vista comunicativo, por lo poco o nada que puede escuchar, teniéndose el caso de hipoacúsico y sordo, pero enfatizando que las personas sordas conforman un grupo social, con su propia cultura y que se encuentra inmerso geográficamente en un país; en el caso de Venezuela, como en muchas otros países conforma un grupo minoritario si le compara con el resto de personas que lo rodean.

Por lo anterior, se puede hablar de cultura sorda, manifestada según Morales (2008) “durante todo el tiempo en que las personas Sordas han formado comunidades” (p. 19), y que refleja una forma particular de relacionarse, de entender el mundo, porque son los mismos sordos quienes conforman vivencias, sentimientos, maneras de encarar la vida, en tal caso diferente a como lo hacen los oyentes; pero que además poseen una lengua cuyo código “ofrece todas las posibilidades de expresión tales como: contar chistes, discutir, narrar, argumentar, persuadir, informar, enamorar, describir y exhibir todos los matices lingüísticos de cualquier lengua natural” (ob. cit., p. 17).

Algunas características de la lengua de señas y su uso en contenidos matemáticos

Entre las características de la lengua de señas está el hecho de que no es universal porque se desarrolla de modo independiente conforme a los códigos asignados por los grupos o comunidades sordas de cada país; agregado, se le da el carácter de lengua y no de lenguaje, porque como lo dice Oviedo (2009), el lenguaje es la capacidad que tiene el ser humano para comunicarse a través de sistemas lingüísticos que son las lenguas (o en tal caso idiomas). Mientras que el calificativo de seña está dado como adjetivo que le designa su característica viso-espacial, pero además por el modo en el cual los mismos sordos la califican como "señar o hacer señas" (Oviedo, Rumbos y Pérez, 2004). En Venezuela, la conjugación de lengua y seña, llevó a nombrar al sistema de comunicación viso-espacial utilizado por la comunidad de Sordos venezolanos como Lengua de Señas Venezolana (de acá en adelante LSV).

Como parte de los estudios lingüísticos sobre la lengua de señas, el trabajo de William Stokoe permitió la posibilidad de analizar lingüísticamente las señas de los sordos, reconociendo en ellas partes constitutivas que no poseen significado en sí mismas, tal como ocurre por ejemplo en el español cuando deletreamos una palabra. Pero además, como lo afirma Oviedo (2001) se comprobó que seguían patrones de organización cuyo esquema de análisis se fue perfeccionando con los estudios de otros lingüistas como S.K. Lindell a partir de 1984.

Se destaca además, que la lengua de señas usa como canal de expresión y comprensión respectivamente cuerpo, manos y lugar por una parte y la visión por otra, considerándola una lengua tridimensional porque se articula ya sea secuencial, simultánea y espacialmente. En cuanto a la configuración manual, en ella intervienen tanto movimiento como uso del espacio que generan matices diferenciadores como ocurre con cualquier otra lengua, permitiendo la descripción de sus componentes fonológico, morfológico, sintáctico, semántico y pragmático, que a su vez difieren de la gramática del español, como también de la glosa o español señado.

Con el propósito de resumir la descripción lingüística de la seña, se toma en especial las referencias de Oviedo (2001), Pérez (2008) y, Barojas y Garnica (2017), para conformar su estructura en tres componentes mayores que se dividen en segmentos secuenciales y luego en rasgos, considerando: Postura de la mano (PM): relacionada al modo en que se coloca y acciona cada mano y expresada en una matriz articulatoria (posee como componentes Configuración de la Mano (CM), Ubicación (UM), Orientación (OR)), Actividad de la mano (AM): relacionada con si hay movimiento o no de la mano, si se da algún contacto o la trayectoria del movimiento, y descrita en una matriz segmental (compuesta por Movimiento (M), Detención (D) y Transición (T)), y Actividad no manual (ANM) o Rasgos no manuales: formada por rasgos que describen "la actividad significativa de los articuladores de la cara (boca, cejas, ojos), los movimientos de la cabeza y del cuerpo" (Oviedo, 2001, p. 64).

En cuanto al uso de las manos, vale destacar que en la articulación de la seña puede intervenir una sola (por lo que se le dirá seña unimanual) o ambas (seña bimanual). Del tipo de señas unimanuales se encuentran las que forman las letras del abecedario, por tal razón al conformar el alfabeto de este modo se le llama alfabeto unimanual o dactilología figurativa (esto por su similitud con la grafía de las letras).

Para uso de señas en contenidos matemáticos, se tienen aquellas relacionadas con aspectos básicos como la conformación numérica donde intervienen una o dos manos, como en el caso de la LSV los dígitos del cero al cinco se hacen con la mano derecha y luego del seis al nueve con ambas, como puede notarse a través de la Figura 1.

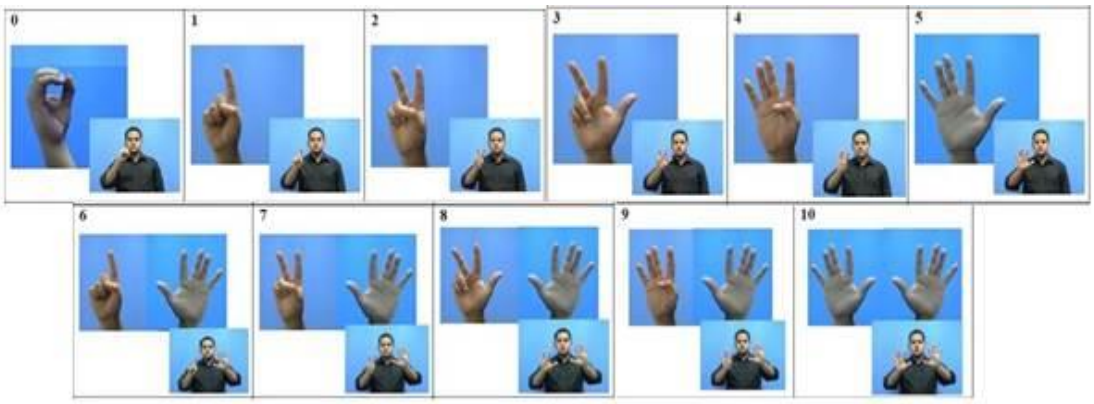


Figura 1. Señas para los números del 0 al 9. Imágenes tomadas de Centeno, 2011

Muchas de estas señas no han tenido en Venezuela un registro sistematizado, sobre todo causa curiosidad porque al encontrar algún referente al respecto se tiene el trabajo de Alejandro Oviedo titulado *Apuntes para una gramática de la Lengua de Señas Colombiana*, donde se describen los segmentos y rasgos que hacen parte del aspecto fonológico de las señas y en particular aparece ejemplificada con su transcripción de códigos visuales el caso de la seña de los números dos, cinco y veinticinco expresadas en su convención secuencial como se muestra en la Figura 2, pero no hay ningún otro caso presente ni mucho menos se cuenta con un texto similar para nuestro país, lo cual indica cuánto falta por hacer para seguir su estudio y registro. Esto constituyó un agregado adicional para tratar el tema que se presenta en este comunicado y aportar algún avance en su conformación.

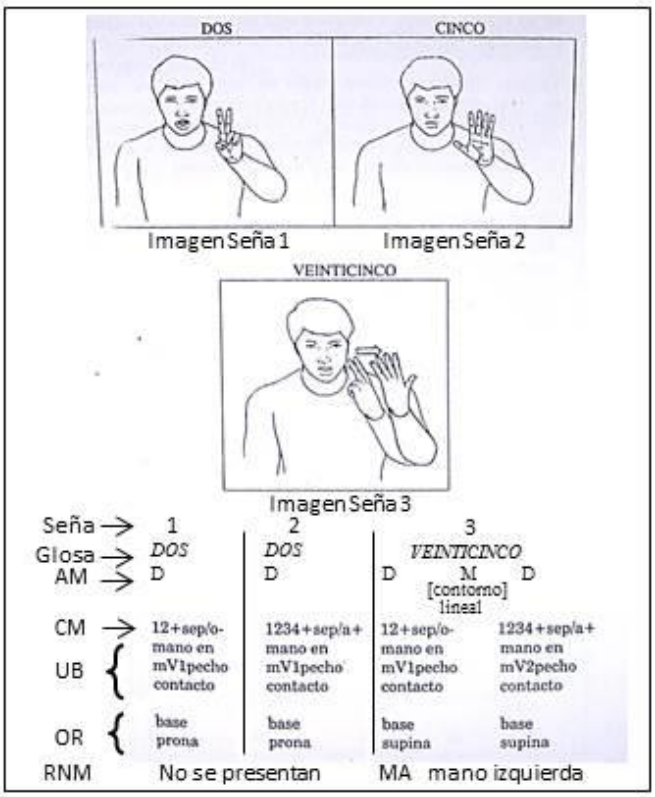


Figura 2. Descripción en rasgos fonológicos de las señas para los números 2, 5 y 25. Elaborado a partir de imágenes tomadas de Apuntes para una gramática de la Lengua de Señas Colombiana por Oviedo (2001)

Sobre el proceso metodológico

Metodológicamente la información se obtuvo a partir de entrevistas realizadas a dos estudiantes sordos próximos a graduarse como profesores de Educación Especial, con la finalidad por una parte de tomar testimonio oral sobre sus vidas y experiencias escolares, en particular sobre los contenidos matemáticos que llegaron a estudiar en años escolares previo a su ingreso a la universidad; y por otra, hacer el registro de señas para las propiedades de la multiplicación y el uso de materiales didácticos como las regletas de Napier.

Las entrevistas como tal se dan en dos jornadas dentro de las instalaciones de la UPEL Maracay, planificadas para desarrollar actividades de reforzamiento en cuanto al modo como los estudiantes participantes comprendían la multiplicación y por su desempeño como futuros docentes para comunicar lo que sabían al respecto. Los dos estudiantes sordos elegidos en esta actividad, nombrados por sus iniciales DV y YR, eran estudiantes avanzados de la especialidad de Dificultades de Aprendizaje, habían cursado la asignatura de Matemática para EE, eran jóvenes comprometidos y de excelente participación en clases, usuarios de la LSV, requerían de intérprete por no tener dominio del español; todos estos factores motivaron considerarlos como informantes clave y ambos aceptaron colaborar con la investigación.

Para los encuentros, se concertaba la cita con anterioridad buscando el día adecuado para ambos y aún para una tercera persona, en este caso el intérprete de lengua de señas. El primer encuentro, fue pautado en la mañana del sábado 7/10/2017 y duró cuatro horas, mientras que el segundo encuentro se dio en la tarde del martes 17/10/2017 por una hora y cuarto. Durante los dos encuentros se realizaron un total de 26 videos (13 en cada caso) y se tomaron fotos a fin de registrar las señas creadas entre ambos estudiantes durante el proceso de explicación que ellos realizaban en torno a las propiedades de la multiplicación. De acuerdo a lo explicado sobre la conformación fonológica de las señas, se optó por hacer su registro siguiendo el formato elaborado por Pérez (2008) donde se colocan las fotos sucesivas para visibilizar la configuración manual de la seña, descripción de su articulación en lo que refiere a la actividad, ubicación y orientación de la mano, junto con los rasgos no manuales, pero se acompaña de la interacción y observaciones realizadas al tener el acuñamiento de la seña.

La información recabada.

Considerando lo expresado por DV y YR, se pone de manifiesto que para ambos, el aprendizaje de los contenidos matemáticos vistos en primaria o secundaria, no tuvo en ningún momento el apoyo de materiales didácticos como el ábaco o las regletas; por lo general las explicaciones se regían por la copia de ejercicios en la pizarra donde se notaba la repetición de procesos, así que ellos tenían la idea de cómo multiplicar primero porque se aprendieron de memoria las tablas de multiplicar y luego por hacer los pasos correspondientes, sin hacer alusión de que existiera alguna propiedad en lo que hacían.

En contraste, una vez ingresan a la universidad se sorprenden de ver en el curso de Matemática para EE el desarrollo de las clases con aspectos teóricos más detallados, más amplias las definiciones por el uso de símbolos, de propiedades, de conceptos que desconocían, como por ejemplo el desarrollo de la propiedad distributiva en forma horizontal, la caracterización de ciertos productos según los factores que intervengan como en el caso del 5 o el 8, o la existencia del recursos didácticos alternos para su enseñanza como el caso de las regletas de Napier. Esto había marcado un mayor interés por la Matemática y les animaba indagar más alternativas para enseñarla sobre todo porque eran conscientes de la dificultad que acarrea para las personas

sordas partir de conocimientos que se transmiten de manera oral o escrita, omitiendo el uso de lengua de señas para la concepción de símbolos, contenidos y aplicaciones matemáticas.

En lo referente a la construcción conceptual matemática que un sordo va consolidando, tanto las lecturas de diversos documentos y las conversaciones sostenidas con docentes de la especialidad de EE, explican que los procesos cognitivos resultaban similares al de cualquier otro estudiante siempre y cuando no estuviera comprometida la capacidad intelectual que conduce al razonamiento, el discernimiento y otros manifestaciones necesarias para la comprensión Matemática; de hecho, estas capacidades eran notorias tanto en DV y YR por lo que abogaban a que el trato educativo fuera ecuánime al grupo pero considerando las adaptaciones curriculares apropiadas para ellos y la presencia de un intérprete si el docente no era usuario de LS.

En la medida que se sigue la interacción entre docente-investigadora, intérprete de LSV y los sordos sobre la multiplicación y el uso de las regletas de Napier, fueron surgiendo señas para acuñar expresiones matemáticas como también para nombrar a las regletas. Acorde con lo descrito teóricamente, estas señas fueron parte de una conversación consensuada para llegar a acuerdos en crear las señas desde convenios entre los sordos. A continuación se presentan dos señas registradas y sistematizadas siguiendo el esquema de Pérez (2008), donde además se advierte el proceso de análisis entre formar la seña y su relación con el concepto matemático.

Glosa: ***PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN***

Seña: Inicio Intermedio Final



Seña registrada en video 10 (del segundo encuentro)

Descripción de la seña: bimanual simétrica, inicia en detención de ambas manos cerradas con palma hacia abajo y teniendo extendidos los dedos índices que forman una equis a la altura de la barbilla. En intermedio, se abren ambas manos, con palma hacia afuera mientras se mueven linealmente alejándose una de otra para hacer detención a la altura de los hombros; luego, sin cambiar CM se vuelven a mover ambas manos linealmente en sentido contario para intercambiar su posición y quedar en detención con roce de antebrazos.

Interacción: Esta seña se conforma en correspondencia al debate consensuado dado entre DV y YR al presentar las razones para su conformación, este momento queda captado en el video 9, donde ambos determinan por qué el movimiento de las manos debe hacerse de el modo planteado. Para esto colocan objetos en una mesa simulando que ellos son números y tal como ocurre cuando se multiplican concluyen que al cambiarlos de lugar no se altera el resultado, de alli que justifican el movimiento de manos acentuando el cambio de posición de derecha a izquierda y de izquierda a derecha mientras se tienen las manos abiertas con los dedos ligeramente plegados hacia dentro para referirse a los números como objetos que no cambian de forma solo cambian de posición., mientras se asume que el producto es el mismo al no agregar o dar una seña adicional que lo mencione, es decir, el resultado no se menciona porque este no se altera

Observaciones: Se percibió un completo acoplamiento entre los sordos para llegar a la seña descrita, el intérprete estuvo muy atento en comunicar y dar testimonio del significado de la seña como de los diálogos realizados por los estudiantes, esto fortaleció mucho la comprensión de lo que representaba para ellos esta dinámica y su concepción matemática de la propiedad, esto último se resalta en la manera como se observó que para ellos a través de esta propiedad cualquiera sean los números con los cuales se multiplique se mantiene el producto independientemente de quien va primero o quien va después.

Figura 3. Descripción de la seña para la propiedad conmutativa de la multiplicación

Glosa: ***PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN***

Seña: Inicio | Intermedio 1 | Intermedio 2 | Intermedio 3 | Final



Seña registrada en video 5 (del segundo encuentro)

Descripción de la seña: bimanual asimétrica, Mano pasiva (MP): izquierda, en detención con palma prona, dedos extendidos y brazo doblado a nivel de pecho a una distancia media. Mano activa: derecha ubicada detrás y un poco más arriba de la MP. Su movimiento inicia teniendo como CM base prono, palma hacia adelante, yema de los dedos unificados y apilados con pulgar, se trasladan diagonalmente hacia a un lateral de la cara a nivel de los ojos, para bajar nuevamente en diagonal hasta aproximarse a la MP y subir nuevamente esta vez al frente de la cara a nivel de los ojos; seguidamente se repite este movimiento en "v" para dejar mano en detención al lado izquierdo de la cara a nivel de los ojos; por último, la mano se traslada debajo de la MP mientras cambia CM con giro de muñeca, quedando palma hacia atrás, dedos 1, 2 y 3 un poco separados, extendidos horizontalmente y se une pulgar con meñique. No se generan RNM.

Interacción: Esta seña se conforma gradualmente en el primer encuentro. Primero DV realiza todos los movimientos indicados anteriormente menos el último y es aceptada por YR quien lo ratifica aunque trata de incorporar la configuración de la mano derecha en "d"; luego esto cambia ligeramente cuando la investigadora-docente los cuestiona con respecto a la propiedad a modo de que justifiquen lo que hacen. Al principio ellos explican que se basan en lo realizado con las regletas de Napier y por lo aprendido en la escuela; luego YR hace mención que se toman diferencialmente las cifras del primer múltiplo para repartirlas con el segundo pues esto también sucede en las regletas, de lo cual DV toma la iniciativa para enfatizar que se multiplica en orden tomando la primera cifra que aparece a la derecha del factor inferior para multiplicarla por cada una de las cifras colocadas en el otro múltiplo o número superior (indicado en la seña de esta manera) y así se sigue el mismo proceso con la segunda cifra hasta terminar con todas las cifras del primer factor. Dada esta interacción (registrada en el video 12) se produce la necesidad de agregar a la seña la acción de que aparecen resultados al distribuir y que dichos resultados se colocan debajo de los factores; es decir, que dan a entender lo que ocurre en el proceso de multiplicar con polidígitos, al generar el movimiento zigzagueante y extender tres dedos al final como parte de los tres productos que se pueden obtener. Ellos reconocen que si el número posee más dígitos (concepto de polidígito dado en señas y visible en video 13) entonces más productos obtendrán, como lo expresa YR al preguntar sobre estos casos y demostrar su preocupación para enseñarlo a un niño (situación registrada nuevamente en el video 13). La seña queda conformada finalmente como se expresa en las imágenes pero más adelante se incorporan otras señas en respuesta a otras inquietudes dadas para multiplicar horizontal o verticalmente.

Observaciones: El trabajo de esta seña permitió el debate sobre los procesos matemáticos vistos en clase y el uso de las regletas de Napier, de hecho DV relaciona la propiedad a partir de lo que ella aprendió convencionalmente desde su educación primaria y preguntó si el otro proceso horizontal que se vio en clase debía llamarse de otra forma (registro dado en video 13 del primer encuentro). Es decir, lo visual para ellos marca diferencia, si ven un proceso y luego otro piensan que se trata de propiedades diferentes o cosas diferentes, tal como lo indica la pregunta de DV. Gracias a esta y otras interrogantes, la docente-investigadora hizo todo lo posible por explicar la propiedad desde la descomposición sumativa que tiene un número y que puede representarse de forma horizontal o vertical, esta última considerada algoritmo de la multiplicación; sin embargo, queda mucho por trabajar pues desde lo conceptual no se especifica que tal propiedad debe cumplirse a la derecha y a la izquierda, ni se expresa su forma simbólica. Finalmente, se establece la seña en consideración a los procesos que ellos ven; es decir, lo observado y estructurado procedimentalmente, queda sin registrarse la adición como parte de este proceso o agregar el símbolo de más para decir que por último los resultados se suman, se da por sentado que hay una suma aunque en la seña no se le especifica como tal; no obstante, los sordos lo hacen notar al explicar el tema. En general se observa ganancia en avances alcanzados, ante el esfuerzo por describir los contenidos matemáticos implicados en esta operación matemática.

Figura 4.. Descripción de la seña para la propiedad distributiva.

Conclusiones

A la par de otros estudiantes, los sordos pueden sentirse aislados de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática si no se replantean adaptaciones curriculares acordes a sus requerimientos, cuestión que tiene repercusión si se trata de futuros docentes.

Es relevante dar la posibilidad de este tipo de prácticas donde el sordo explica desde su lengua un concepto matemático pues se pueden detectar distorsiones, omisiones o generalizaciones tal como sucede con algún estudiante regular, la diferencia es que se está haciendo desde su contexto, tomando en consideración la conformación conceptual desde su propio modo de expresión, las formas cómo se da la Matemática en los contextos de culturas específicas y dentro de la comunidad sorda una seña puede quedar acuñada una vez que interactúan en su conformación dos o más sordos. Tanto DV como YR, dijeron en repetidas ocasiones que veían muy importante hacer este tipo de actividades y darlas a conocer en otras instituciones, aún en su lugar de trabajo o por otros medios como internet o en la universidad a través de los grupos que están intentando hacer el registro de señas para los cursos de formación. Era notorio para ellos que faltaba mucho por hacer al respecto, que se descuida la buena concepción de la Matemática y por otra parte el modo de especificarla, de comunicarla a través de su lengua. En el caso de DV, ya tiene diez años trabajando como docente en una escuela de sordos, pero llegó a decir que ella ha enseñado la multiplicación repitiendo los algoritmos que conoce pero no se había puesto a reflexionar cómo contextualizarlo en detalle dentro de su comunidad. En el acuñamiento de señas se puede constatar que ellos ponen en juego el uso de las propiedades y existe además una estrecha relación con el impacto visual que les genera, pues transfieren a la seña parte de lo que representan físicamente o de lo que hacen.

Referencias y bibliografía

Barojas G., A. & Garnica D., I. (2017). Comprensión De Nociones Del Sistema Métrico Decimal Mediada Por La Lsm En El Aula De Sordos [17-21]: Estudio De Casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *20*(3), 317-344.

Morales G., A. M. & Pérez, Y. (2010). *La Educación del Sordo en Venezuela: Una visión crítica*. Disponible en: http://www.cultura-sorda.org/wp-content/uploads/2015/03/Morales-y-Perez-La_educacion_del_sordo_Venezuela_2010.pdf. (2018, 10 de marzo)

Morales G., A. M. (2008) *La comunidad sorda de caracas: una narrativa sobre su mundo* (Tesis Doctoral). Venezuela: Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Disponible en: http://www.cultura-sorda.eu/resources/ Tesis_Morales_2008.pdf. (2008, 8 de febrero)

OMS (2001). Clasificación internacional del funcionamiento, de la discapacidad y de la salud. CIF. Disponible: http://www.imserso.es/InterPresent2/groups/imserso/documents/binario/435cif.pdf. (2018, 10 de marzo)

Oviedo, A. (2001). *Apuntes para una gramática de la Lengua de Señas Colombiana*. Cali, Universidad del Valle: INSOR.

Oviedo, A. (2009). *Lecturas sobre la historia de las personas sordas, su educación y sus lenguas de señas*. Berlín.

Oviedo, A., Rumbos, H. & Pérez H., Y. (2004). El estudio de la Lengua de Señas Venezolana. En: F. Freites & F.J. Pérez (Eds.) *Las disciplinas lingüísticas en Venezuela*. (pp. 201-233) Maracaibo: Universidad Católica Cecilio Acosta.

Pérez, Y. (2008). *Marcadores en conversaciones entre sordos en lengua de señas venezolana* (Tesis Doctoral). Venezuela: Universidad de Los Andes. Disponible en: http://www.cultura-sorda.org/wp-content/uploads/2015/05/Tesis-Marcadores-en-Conversaciones1.pdf. (2008, 14 de marzo)

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La discusión grupal con futuros maestros como herramienta en la transición de un pensamiento absoluto a uno relativo

Javier **Monje** Parrilla
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
monjejavier@ua.es
Patricia **Pérez-Tyteca**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
patricia.perez@ua.es

Resumen

Los estudiantes para maestro utilizan a menudo un pensamiento absoluto en ciertas situaciones que implican el manejo de razones. Por este motivo nos hemos planteado llevar a cabo una actividad en el aula que les ayude a superar sus dificultades y lo hemos hecho mediante una discusión grupal en torno a varias resoluciones a una tarea de comparación de razones. La discusión grupal promueve el pensamiento crítico de los estudiantes haciéndoles confrontar sus ideas con las de sus compañeros. Para evaluar la eficacia de la discusión grupal, un grupo de 36 futuros maestros han resuelto una tarea de comparación de razones antes y después de llevar a cabo la discusión en gran grupo. Los resultados apuntan a que la discusión ha sido efectiva en tanto que ha disminuido el número de estudiantes que ponen en juego un pensamiento absoluto y ha dado muestras explícitas del pensamiento crítico de los mismos.

Palabras clave: razón, pensamiento absoluto, pensamiento relativo, futuros maestros, pensamiento crítico.

Introducción

Aunque el trabajo con razones se inicia en la etapa de Educación Primaria, como reportan trabajos precedentes (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012; Buforn y Fernández, 2014), los maestros, tanto en formación como en ejercicio, muestran serios problemas para abordarlo de manera satisfactoria. Así, en ciertas situaciones que involucran el manejo de cantidades relativas hacen uso de un pensamiento absoluto en lugar de utilizar un pensamiento relativo (Sowder et al., 1998; Valverde y Castro, 2012). Como afirma Lamon (2012), esto puede deberse a que pensar en términos relativos o comparativos requiere de una mayor abstracción que pensar en una adición o

diferencia de cantidades (términos absolutos); esta forma de pensar permite crear cantidades más complejas (Lamon, 2012).

Consideramos, pues, fundamental que desde los programas de formación de futuros maestros se lleven a cabo prácticas de aula que ayuden a que estos estudiantes que hacen uso de un pensamiento absoluto, sean capaces de ser críticos con sus actuaciones y desarrollen criterios para distinguir la conveniencia o no del uso de este tipo de pensamiento.

Como indica Montoya (2007), para contribuir a desarrollar el pensamiento crítico en los estudiantes hay que inducirlos a asumir otros puntos de vista, y esto se puede hacer planteando diferentes soluciones a los problemas y a partir de ellas permitir las discusiones que posibiliten a los estudiantes evaluar sus argumentaciones a la luz de las razones de los demás.

Es por todo ello que el presente trabajo tiene como objetivo generar una discusión grupal con futuros maestros en torno a una tarea de comparación de razones que les ayude a transitar de un pensamiento absoluto a uno relativo.

Fundamentación teórica

Pensamiento absoluto/relativo

Existen situaciones en las que una persona puede relacionar dos cantidades aditivamente creando una diferencia o relacionar dos cantidades multiplicativamente para formar una razón (Thompson, 1994). Proceder de la primera manera conduce a un tratamiento absoluto de las cantidades y proceder de la segunda manera a un tratamiento relativo de las cantidades.

Algunas investigaciones ligadas al estudio del razonamiento proporcional recogen algunas respuestas aditivas o absolutas de estudiantes cuando resuelven problemas de razón y proporción (Karplus, Pulos & Stage, 1983; Lamon, 1993; Valverde & Castro, 2012). Atendiendo a la estructura del problema, algunas variables que pueden influir en las actuaciones de los estudiantes son la presencia o ausencia de razones enteras, el tamaño de los datos usados y el orden en que se presentan los datos en el enunciado (Tourniaire & Pulos, 1985). En los problemas de comparación de razones, un aspecto a tener en cuenta es si las razones a comparar son iguales o no. La comparación de razones desiguales resulta más difícil que la comparación de razones iguales (Karplus et al., 1983).

Pensamiento crítico y discusión grupal

El objetivo de la educación matemática y de la educación en general debe ser formar a estudiantes reflexivos y con capacidad crítica para analizar sus estrategias y las de los demás. Como indican Paul & Elder (2005), para tener éxito en el aprendizaje, los estudiantes necesitan pensar críticamente ya que este pensamiento crítico lleva al dominio del contenido y al aprendizaje profundo.

De acuerdo con Torres, Tejada & Villabona (2013), denominamos pensamiento crítico a la capacidad del pensamiento para examinarse y evaluarse a sí mismo (el pensamiento propio o el de los otros), en términos de cinco dimensiones. Una de esas dimensiones es la dimensión dialógica del pensamiento, que es la capacidad para examinar el propio pensamiento con relación al de los otros. Esto permitirá a los estudiantes asumir diferentes puntos de vista y mediar otros pensamientos (Montoya, 2007). Es, pues, como apuntan Valera & Madriz (2002), mediante el proceso de comunicación como los estudiantes confrontan sus pensamientos con los de otros y pueden llegar a cambiarlos. Según estos autores, es necesario ofrecer oportunidades en el aula

que ayuden a formar un pensamiento crítico. De este modo, las actividades propuestas deben orientarse hacia la resolución de problemas y hacia la confrontación y discusión en el aula de sus diferentes soluciones. Estas situaciones podrán mostrar el pensamiento crítico de los estudiantes en acción, ya que se les lleva a cuestionarse entre varios planteamientos analizados (Montoya, 2007).

Como afirman Darnaculleta, Iranzo & Planas (2009), las conversaciones generadas en torno a la resolución de una actividad son un momento clave en las secuencias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, donde el alumnado aprende en su relación con los otros, explicando sus razonamientos e intercambiando y contrastando ideas.

Metodología

Para poder comprobar la efectividad de la discusión grupal se ha administrado una tarea antes y después de la misma, analizando las estrategias de resolución puestas en juego por los estudiantes. El análisis se ha llevado a cabo mediante una metodología cualitativa de corte interpretativo que pretende identificar si la discusión grupal favorece en los futuros maestros un pensamiento crítico que les permita transitar de un uso absoluto de las cantidades implicadas en una tarea de comparación de razones a un uso relativo.

Participantes y contexto

En este trabajo participaron 36 estudiantes para maestro de tercer curso del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Valencia matriculados en la asignatura Didáctica de la Aritmética y la Resolución de Problemas. La experiencia se llevó a cabo en sesiones ordinarias de clase. Dado que la muestra fue no intencional, es decir, que participaban los estudiantes que habían acudido a clase, la primera resolución de la tarea la realizaron los 36 futuros maestros y la segunda 31 de ellos.

Instrumento

La tarea que se administró es una tarea del tipo "¿Cuál es la mejor compra?" (Ben-Chaim et al., 2012), que resulta de la unión de tres ofertas extraídas de folletos comerciales corrientes de los supermercados. La tarea, denominada "el descuento", consiste en tres ofertas que se enuncian por medio de razones expresadas de forma diferente: "3x2", "-70% en la 2ª unidad" y "2ª unidad a mitad de precio", en la que se pregunta qué descuento es el mejor (ver Figura 1).

La primera y tercera ofertas ("3x2" y "2ª unidad a mitad de precio") se acompañan del producto al que se aplican e incluyen los precios antes y después del descuento (5.58€ y 3.72€ la unidad; 9.74€ la unidad y 4.87€ la 2ª unidad). La segunda oferta: "-70% en la 2ª unidad", es genérica y no se menciona a qué producto se aplica ni de qué precio.



Figura 1. Tarea "el descuento".

Resoluciones mostradas en la discusión grupal

Posteriormente a que los futuros maestros resolvieran la tarea, se proyectaron dos resoluciones con el fin de que generar una discusión grupal sobre ellas. La primera de ellas muestra un pensamiento absoluto, ya que se compara en términos absolutos el ahorro total en cada oferta usando diferentes precios (Figura 2).

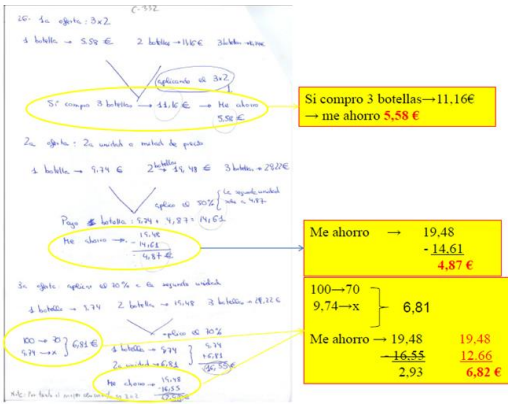


Figura 2. Estrategia de pensamiento absoluto.

En esta resolución el estudiante, en la oferta del "3x2", utiliza el precio de 5,58 € para calcular la diferencia de lo que se paga al comprar 3 botellas sin descuento (16.74 €) con lo que se paga con descuento al comprar las 3 botellas (11,16 €) obteniendo el ahorro absoluto (5,58 €). En el resto de ofertas procede de la misma manera. En estos casos utiliza el mismo precio (9,74 €) obteniendo en la oferta de "segunda a mitad de precio" el ahorro de 4,87 € y en la oferta de "segunda unidad al 70% de descuento" el ahorro de 2,93 €. Estas diferencias (5,58 €; 4,87 € y 2,93 €) son las que el estudiante utiliza para comparar afirmando que "por tanto el mejor descuento es 3 x 2".

La segunda resolución que se proyectó y sobre la que se discutió muestra una estrategia de comparación relativa (ver Figura 3). En ésta el resolutor relativiza el ahorro final en la compra con respecto al coste total sin descuento. La selección de este ejemplo se hizo bajo la premisa de que este último paso diera lugar a la discusión sobre la necesidad de relativizar las cantidades para de este modo poder compararlas. En particular, además de encontrar el ahorro total de la compra aplicando el descuento correspondiente en cada oferta, como sucede con la primera resolución proyectada, este estudiante lo relaciona con el coste total de la compra. Posteriormente, transforma las razones obtenidas para obtener el descuento relativo en tanto por cien de cada oferta y poder compararlas.

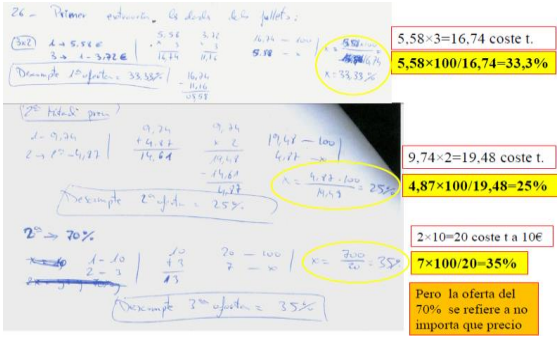


Figura 3. Estrategia de comparación relativa

Como se observa en la Figura 3, en la oferta del "3 x 2" el estudiante utiliza los precios del anuncio (5,58 €) calculando el coste de comprar tres botellas sin descuento (16,74 €). Este valor lo relaciona con el valor de 5,58 € (cantidad descontada) en tanto por cien utilizando la estrategia del producto cruzado, de este modo obtiene que el descuento es el 33,3%. En la oferta de "segunda unidad a mitad de precio" el estudiante procede de la misma manera, en este caso utiliza el valor de 9,74€ y calcula el coste al comprar dos botellas (19,48 €) y la cantidad descontada (4,87 €) en la oferta. Relacionando estas cantidades en tanto por cien mediante una regla de tres obtiene el porcentaje de descuento (25 %). Con la oferta de "70% de descuento en la segunda unidad" el estudiante emplea el valor de 10 € y calcula el coste de la compra sin descuento (20 €), la cantidad descontada en este caso es 7 €. Estos valores los relaciona en tanto por cien con una regla de tres obteniendo así el descuento del 35%.

Análisis de datos

Los datos de esta investigación son las resoluciones de los estudiantes para maestro participantes a la tarea "el descuento", tanto en su primera como en su segunda aplicación. Estas resoluciones se han codificado atendiendo al tipo de pensamiento (absoluto o relativo) puesto en juego, para proceder a realizar un recuento de las mismas. Para analizar la efectividad de la discusión grupal en la generación de un pensamiento crítico que ayude a transitar a aquellos estudiantes que manejaban las cantidades de manera absoluta hacia un manejo relativo de las mismas, se han comparado estos recuentos.

Además, la discusión grupal fue grabada en vídeo y posteriormente transcrita. Los diferentes pasajes incluidos en dicha transcripción se han categorizado atendiendo a si muestran o no signos del pensamiento crítico de los estudiantes. De este modo, estos pasajes se han podido filtrar hasta conseguir evidencias de intervenciones que consideramos que constituyen momentos clave en la discusión grupal.

Resultados

Para observar el impacto de la intervención en el aula, se analizaron las resoluciones de los estudiantes tanto en la primera como en la segunda aplicación de la tarea atendiendo a si mostraban un pensamiento absoluto, un pensamiento relativo u otros (respuesta en blanco, respuestas cualitativas centradas en la calidad del vino…) En la Tabla 1 se recogen las frecuencias con las que aparece cada tipo de pensamiento (absoluto/relativo).

Tabla 1

Frecuencias de las respuestas relativas y absolutas en cada aplicación

	Pensamiento absoluto	Pensamiento relativo	Otros
Primera aplicación	10/36 (27.8%)	20/36 (55.6%)	6/36 (16.7%)
Segunda aplicación	1/31 (3.2%)	18/31 (58.1%)	12/31 (38.7%)

Como podemos observar en la Tabla 1, se produjo un descenso significativo en el número de respuestas absolutas y un incremento de las muestras de pensamiento relativo por parte de los estudiantes. El número de estudiantes que comparan diferencias en términos absolutos pasa de 10 estudiantes en el cuestionario inicial a 1 estudiante en el final. Pensamos que este es un efecto muy positivo de la discusión grupal, en la que pudimos comprobar como algunos estudiantes fueron capaces de argumentar sus estrategias y confrontarlas con las de sus compañeros,

ayudando a estos a desarrollar un pensamiento crítico que les ayudó a transitar desde el pensamiento relativo al absoluto. Es por ejemplo el caso de Laura (véase próxima sección) que en su primera resolución compara diferencias en términos absolutos y en su segunda resolución relativiza.

Los resultados también muestran un aumento en el número de respuestas en blanco o cualitativas (sin hacer cálculos, hablando, por ejemplo de la calidad de los vinos que aparecen en los folletos), Esto puede ser debido a que, posiblemente, los estudiantes no estuvieron igual de motivados en la primera que en la segunda aplicación ya que ya conocían la tarea y habían estado trabajándola y discutiendo sobre ella largo y tendido.

Momentos clave de la discusión que han podido originar los cambios

Durante el proceso de discusión en el aula, se produjeron varios momentos clave que podemos suponer que ayudaron a que algunos de los estudiantes que mostraban un pensamiento absoluto pasaran a un pensamiento relativo. Estos momentos surgieron a partir tanto de la intervención del profesor como de la de los propios estudiantes.

Después de mostrar la primera de las resoluciones al gran grupo, se produce el siguiente diálogo:

Profesor: (…) Vamos a discutir el proceso. ¿Qué os parece el proceso?

María (Alumna8): Yo en cuanto al proceso creo que el proceso no es el adecuado para sobre este tipo de problema porque él ha supuesto precios de botellas le ha aplicado porcentaje a esos precios, entonces yo creo que no lo puede hacer sobre el precio porque simplemente está preguntando que si tú fueras a comprar qué descuento sería el mejor y si le aplicas al precio tú estás diciendo cuanto te costaría… que te costaría más barato en este supuesto, pero los precios tampoco son los mismos.

Los argumentos de María, parecen influenciar a otros estudiantes, como a Laura que, después de reconocer que ella había resuelto la tarea haciendo uso de un pensamiento relativo, admite que ahora se ha dado cuenta de su error y justifica por qué con el siguiente argumento:

Laura (Alumna37): el descuento también o sea cada imagen tenía un precio entonces el descuento también va a variar según el precio según de cada… de cada cosa, entonces eso pues está mal porque si tienes el precio más elevado a lo mejor, o sea en función del descuento te saldrá más económico o menos, o sea que no se puede…

Consideramos que Laura, en esta intervención, está mostrando un pensamiento crítico que le ha permitido, tras confrontar su resolución con los argumentos de otros, modificar su estrategia inicial. De hecho, esta alumna en su primera resolución mostró un pensamiento absoluto y en su segunda resolución relativizó.

La discusión sobre la primera resolución mostrada también propició la intervención de algunos alumnos, como Hugo, que defendió la necesidad de relativizar en este tipo de situaciones, como el defendido por Hugo, que afirmó:

Hugo (Alumno11): Ha escogido precios diferentes, entonces no es orientativo lo que está ahorrando… Es como si compras un coche y tres manzanas y dices: Yo he comprado dos coches y me he ahorrado 100000€ y compro 3 manzanas y me ahorro 1€, pues el de los coches es mejor…

Este es un momento clave del transcurso de la sesión ya surge en la discusión el pensamiento relativo espontáneamente en algunos estudiantes, que lo defienden confrontándolo con el pensamiento absoluto que mostraba la primera resolución.

Más adelante, cuando el profesor muestra la segunda resolución (en la que, recordemos, se comparan cantidades relativas) Luis espontáneamente argumenta por qué este método es correcto, lo que parece convencer a algunos compañeros.

Luis (Alumno9): Yo he hecho este y creo que es el bueno, que es el que está bien teniendo en cuenta que… a ver cómo lo digo…que no importa lo que pagues al final sino lo que te ahorres con respecto a lo que pagues

Consideramos que estos son ejemplos de momentos clave que se produjeron en el aula en torno a la resolución de la tarea. Estos momentos permitieron que algunos alumnos explicaran sus razonamientos, ayudando a otros a ver sus errores y que se contrastaran ideas que hicieron aflorar la conveniencia de tomar cantidades relativas para poder hacer una comparación entre descuentos.

Discusión y conclusiones

La discusión grupal generada en torno a la resolución de la tarea "el descuento" dio muestras del pensamiento crítico de los participantes, lo que ayudó a algunos de ellos a transitar desde un pensamiento absoluto a la hora de manejar razones, a un pensamiento relativo. Esta transición se ve reflejada en los tipos de estrategia utilizadas en la primera y segunda resolución de la tarea, que muestra un gran descenso del número de estudiantes que maneja las cantidades de manera absoluta y un aumento porcentual del número de ellos que relativiza. Estos resultados son congruentes con lo que apuntan Valera y Madriz (2002), cuando afirman que mediante el proceso de comunicación en el aula los estudiantes tienen la oportunidad de confrontar sus estrategias con las de sus compañeros y llegar a cambiarlas.

Pensamos que este es un efecto muy positivo de la discusión grupal, en la que pudimos comprobar como algunos estudiantes fueron capaces de argumentar sus estrategias y confrontarlas con las de sus compañeros, ayudando a estos a desarrollar un pensamiento crítico que les ayudó a transitar desde el pensamiento relativo al absoluto. Es por ejemplo el caso de Laura (véase sección anterior) que en su primera resolución compara diferencias en términos absolutos y en su segunda resolución relativiza.

Por este motivo consideramos muy aconsejable introducir este tipo de prácticas en los planes de formación de maestros ya que, como reportan los trabajos precedentes (Buforn & Fernández, 2014; Valverde & Castro, 2012), este colectivo es susceptible de presentar dificultades con el manejo de razones, contenido que tendrán que impartir en su futura práctica profesional.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido realizada con el apoyo del proyecto Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana.

Referencias y bibliografía

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. S. (2012). Ratio and proportion. Research and teaching in mathematics teachers' education (pre- and in-service mathematics teachers of elementary and middle school classes). Rotterdam: Sense Publishers.

Buforn, A., & Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema, 28*(48), 21-41.

Darnaculleta, A., Iranzo, N., & Planas, N. (2009). *El pensamiento crítico en actividades de contexto real*. Comunicación presentada en las XIV Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) celebrado en Girona del 1 al 14 de julio de 2009. Recuperado de: http://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/El_pensamiento_critico_en_actividades_de_contexto_real_A*Darnaculleta*_PROTEGIDO_0.pdf

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E.K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219-233.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

Lamon, S. J. (2012). Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. (3rd ed.) Nueva York: Routledge Taylor & Francis Group.

Montoya, J. (2007). Acercamiento al desarrollo del pensamiento crítico un reto para la educación actual. Santiago de Chile: Editorial FUCN

Paul, R., & Elder, L. (2005): Estándares de competencias para el pensamiento crítico. Estándares, principios, desempeño, indicadores y resultados con una rúbrica maestra en el pensamiento crítico. Dillon Beach: Fundación para el pensamiento crítico. Recuperado de http://www.criticalthinking.org/resources/PDF/SPComp_Standards.pdf

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education,1*(2), 127-155.

Thompson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: State University of New York Press.

Torres, R., Tejada, C., & Villabona, A. (2013). *Metacognición: herramienta para el desarrollo de pensamiento complejo como eje fundamental en la formación para la innovación*. Comunicación presentada en el World Engineering Education Forum (WEEF), celebrado en Cartagena de Indias, del 24 al 27 de septiembre de 2013. Recuperado de: https://www.acofipapers.org/index.php/acofipapers/2013/paper/viewFile/577/92

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A Review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204.

Valera, G., & Madriz, G. (2002). Las preguntas en la enseñanza de las Ciencias Humanas: Un estudio ecológico de aula universitaria. *Revista Investigación en la Escuela, 48*, 81-94.

Valverde, G., & Castro, E. (2012). Prospective Elementary School Teachers Proportional Reasoning. *PNA, 7*(1), 1-17.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

De Ptolomeo a la formación inicial docente en matemáticas

Gerardo **Cruz-Márquez**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
gerardo.cruz@cinvestav.mx
Gisela **Montiel** Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

En el presente escrito esbozamos el proceso de construcción y estado actual de la problemática de una investigación en desarrollo. Para ello, partimos de una investigación previa –un estudio referente a la construcción social de las nociones trigonométricas– fruto de la cual nos planteamos algunas cuestiones de partida; presentamos una revisión bibliográfica inicial, llevada a cabo con la intención de robustecer dichas interrogantes; y finalmente reformulamos las preguntas de investigación, dentro de las que ahora podemos destacar: ¿cómo la problematización de las nociones trigonométricas 'dialoga' con los demás saberes docentes de los futuros profesores de matemáticas?

Palabras clave: Teoría Socioepistemológica, trigonometría, formación inicial docente.

Abstract

In this paper we outline the process of construction and current state of the problem of a research in development. With this in mind, we start from an antecedent investigation –a study referring to the social construction of trigonometric notions– based on which we pose some initial questions. We present an initial literature-review, carried out with the intention of strengthening these issues. Finally, we reformulated the research questions, within which we can now highlight: how the problematization of trigonometric notions 'dialogues' with the other «saberes docents» of mathematics teachers in initial training?

Keywords: Socioepistemological Theory, trigonometry, initial teacher training.

Con el afán de mostrar, grosso modo, el proceso de construcción de una propuesta de investigación –principal producto de este escrito–, enmarcada en la construcción social del conocimiento matemático y la formación inicial docente, nos planteamos algunas preguntas iniciales, fruto de una investigación previa. En el siguiente apartado damos cuenta de dicho estudio y presentamos las preguntas de partida formuladas a causa de este.

Una investigación de partida

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa sostiene que, en tanto el saber matemático se ha construido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción en el sistema educativo –fruto de su valioso papel en la formación ciudadana– obliga a un proceso de transposición didáctica. Esto es, la matemática (en tanto saber humano) se somete a un conjunto progresivo de modificaciones que permiten seleccionar, organizar y estructurar los conocimientos que son incluidos en la Matemática (en tanto espacio escolar) (Reyes-Gasperini, 2016). Al sistema de razón que determina estas modificaciones –y, en consecuencia, la estructura y funcionamiento de la Matemática– es lo que, desde esta teoría, se denomina *discurso Matemático Escolar*.

Una de las características del discurso Matemático Escolar asociado a la trigonometría, que se manifiesta de forma natural a través de los distintos planos educativos, como ser el discurso escolar, los planes y programas de estudio, los libros de texto, y las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general (Montiel y Jácome, 2014), es su centración en el dominio aritmético de las nociones trigonométricas y una marcada disociación entre la trigonometría escolar y la geometría –que históricamente le dio origen y además la precede de forma general en los programas y planes de estudio–. Consecuencia de este fenómeno, denominado *aritmetización de la trigonometría* (Montiel, 2011), se admite un significado lineal y se promueve un significado aritmético para las nociones trigonométricas, al mismo tiempo que se reduce su uso al de una técnica de cálculo de un valor faltante (Montiel y Jácome, 2014).

Ante esta problemática, y desde la perspectiva que ofrece la Teoría Socioepistemológica, en Cruz-Márquez (2018) se realizó un proyecto de investigación –titulado "De Sirio a Ptolomeo: Una Problematización de las Nociones Trigonométricas"– cuyo supuesto implícito de partida fue que al extender los usos de las nociones trigonométricas y aminorar la brecha existente entre el estudio de la trigonometría y las nociones y procedimientos geométricos, es posible confrontar la aritmetización de la trigonometría y sus fenómenos asociados.

Conjetura que orilla al autor, en primera instancia, a atender tres cuestiones: ¿qué usos le son propios a las nociones trigonométricas, en especial la razón?, ¿cómo acercar las nociones y procedimientos geométricos a la introducción y evolución de las nociones trigonométricas? y ¿qué nociones y procedimientos geométricos son pertinentes a la introducción de las nociones trigonométricas? Y, en segunda instancia, a confrontar dicho supuesto, llevando las respuestas esbozadas para las preguntas anteriores a un ambiente escolar.

Como principales resultados de la investigación –y atendiendo a la hipótesis y las preguntas planteadas–, el autor concluye que la *medición indirecta de distancias en el contexto del círculo* constituye un escenario apropiado para confrontar el significado lineal y aritmético asociado a la razón trigonométrica bajo el discurso Matemático Escolar vigente, así como para promover su resignificación mediante su uso. Además, reconoce la importancia del *trabajo geométrico* –en tanto sinergia de usos: como herramienta de construcción, como herramienta

teórica y como herramienta aritmético-algebraica– sobre nociones como el *círculo*, el *triángulo rectángulo* y la *proporcionalidad*, para dicho proceso.

Posterior a dicho estudio, el autor realizó una segunda experiencia de aula en un centro de formación inicial docente –la Universidad Autónoma de Baja California, Campus Mexicali, Baja California, México–. El objetivo del estudio fue, además de enriquecer la información obtenida en la experiencia anterior, atender a una pregunta formulada producto de esta: ¿cambian notablemente las estrategias, argumentos y las reacciones entre los futuros profesores que cursan su formación disciplinar y los que transitan su formación didáctico-pedagógica al enfrentar la situación de medición indirecta de distancias construida?

Durante la aplicación y descripción de esta experiencia el autor se percata de algunas situaciones particulares. En primer lugar, que la situación de medición indirecta de distancias presentada a los estudiantes produjo –especialmente en el grupo que cursaba su formación didáctico-pedagógica–, no solo la problematización (confrontación y resignificación) de las nociones trigonométricas reportada en Cruz-Márquez (2018), si no cierto cuestionamiento respecto a la enseñanza y aprendizaje de la matemática puesta en juego. Si bien esta observación podría estar influenciada por el énfasis puesto en el porqué de la aplicabilidad y la funcionalidad de las herramientas matemáticas involucradas y por la instancia de formación en la que se encontraba el grupo aludido, consideramos que la actividad matemática trabajada también pudo jugar un papel determinante en tal hecho.

En consecuencia, y referente al estudio que aquí nos compete, nos planteamos las siguientes preguntas de partida: ¿problematizar las nociones trigonométricas permite –o propicia– la reflexión y análisis respecto a su enseñanza y aprendizaje?, esto es, ¿problematizar las nociones trigonométricas 'moviliza' otros conocimientos docentes no disciplinares?, ¿cómo?

Con el afán de informar y robustecer estas preguntas, y concretarlas en una propuesta de investigación –principal producto de este escrito–, comenzamos una revisión bibliográfica alrededor de la formación inicial docente, parte de la cual mostramos en la sección siguiente.

Sobre la formación docente

Las reformas educativas se producen de forma ineludible y periódica dada la necesidad de la sociedad por revisar y actualizar el sistema de enseñanza. "Se re-organizan los saberes, se examinan las prácticas, se modifican ciertos enfoques para evitar el fenómeno –estudiado por la didáctica– de obsolescencia del saber, de la enseñanza, de los resultados" (Fregona y Alagia, 2002, p. 141). Sin embargo, "los cambios en planes y programas de estudio no pueden ser efectivos en la medida que quien los opera no está preparado para hacerlo de manera creativa y dinámica" (Mancera, 2014, p. 228). Es así como, desde unas décadas a la fecha, adquiere gran importancia mejorar la formación, inicial y continua, de los docentes (Fregona y Alagia, 2002).

Desde entonces, los estudios sobre la formación de los profesores –en general y de matemáticas– se han llevado a cabo por profesionales de diversos ámbitos y desde una gran variedad de campos científicos. Respecto a la formación inicial en particular, aunque todos los estudios tienen como idea transversal el "posibilitar una formación completa y adecuada a futuros profesionales de la enseñanza, los puntos de partida, así como las aportaciones para la consecución de esta idea global, toman distintas formas" (García, 2005, p. 154). Así, es posible encontrar desde estudios de caso que analizan la relación entre las creencias de un profesor y su práctica, como el realizado por Lloyd (2005), hasta proyectos de investigación como "The

Teacher Education Study in Mathematics (TEDS-M)" (Tatto et al., 2012), un estudio comparativo sobre la formación de los profesores de matemáticas en el nivel de primaria y de primer ciclo de secundaria, llevado a cabo durante cinco años y abarcando 17 países.

Algunas tendencias de la investigación en formación docente en matemáticas

Dada esta diversidad de investigaciones, los estudios de Sánchez (2011) y Strutchens et al. (2017) consideran necesario el llevar a cabo revisiones bibliográficas amplias y sistemática alrededor de la formación inicial docente en matemáticas. Tomando como base dichos estudios, consideramos cinco como las principales tendencias de investigación en este campo: 1) las creencias y concepciones del profesor de matemáticas en formación, 2) la dualidad teoría-práctica, 3) el papel de la tecnología en la formación inicial docente, 4) la identidad del profesor de matemáticas en formación, y 5) el conocimiento y habilidades del profesor de matemáticas en formación.

Existe una vasta cantidad y variedad de estudios vinculados a la primera de estas tendencias, sin embargo, y pese a la presencia de algunas líneas predominantes (Philipp, 2007), todas las investigaciones adscritas a esta descansan en el hecho "que las creencias y concepciones de los profesores informan y definen sus prácticas de enseñanza [trad.]" (Skott, 2009, citado en Sánchez, 2011, p. 134), lo que las convierten en un potencial vehículo para la mejora de la formación inicial docente en matemáticas.

Por otro lado, las investigaciones sobre la relación teoría-práctica, especialmente las que indagan sobre el papel de las experiencias de campo en la formación inicial, han cobrado suma relevancia en los últimos años. Lo anterior debido a que diversos estudios, como los realizados por el Consejo Nacional de Investigación, evidencian que las experiencias de campo tienen uno de los mayores efectos en los resultados de los futuros profesores (NCR, 2010, citado en Strutchens et al., 2017). No obstante, en el marco de esta tendencia de investigación, también se ha reportado múltiples dificultades, entre ellas la de ubicar maestros cooperantes que estén preparados para fomentar el desarrollo de los futuros profesores de matemáticas, y el establecer relaciones bilaterales sólidas entre los programas de formación inicial docente y las escuelas en las que se llevan a cabo las experiencias de campo (Strutchens et al., 2017).

Respecto a la tercera tendencia mencionada, el papel de la tecnología en la formación inicial docente, Strutchens et al. (2017) la ramifican en tres direcciones principales: a) como herramientas interactivas y dinámicas para construir conocimientos disciplinares y desarrollar actitudes positivas hacia el uso de tecnologías en su enseñanza posterior; b) como herramientas en los cursos sobre 'métodos de enseñanza', donde pueden ayudar a cuestionar y planificar las lecciones, así como para anticipar, observar y motivar el pensamiento matemático de los estudiantes; y c) como herramientas de aula, que ayuden directamente a provocar el pensamiento, razonamiento y la resolución de problemas de los estudiantes.

Con relación a la cuarta tendencia, la identidad del profesor de matemáticas en formación inicial, Strutchens et al. (2017) consideran que dada la complejidad de la noción de identidad, en tanto "reúne aspectos personales y sociales, abarcando conocimientos y creencias, emociones y relaciones, y contexto y experiencias [trad.]" (Van Putten, Stols y Howie, 2014, citado en Strutchens et al., 2017, p. 25), es de vital importancia que los investigadores adscritos a esta tendencia expliquen cómo leen, entienden y ponen en práctica la identidad profesional en sus estudios. Además, si bien enfatizan los avances que esta corriente ha tenido en los últimos años, también aluden a las preguntas que aún quedan por resolver al respecto, entre ellas: qué papel

juegan los maestros de escuela y los supervisores universitarios en el desarrollo de las identidades profesionales de los profesores de matemáticas en formación, y la relación entre los conocimientos del profesor en formación –especialmente el disciplinar y pedagógico– y el desarrollo de su identidad profesional.

Finalmente, dado que los estudios sobre el conocimiento del profesor en formación –que representan quizá el cúmulo más extenso de investigaciones en este campo– son la corriente de investigación que más nos interesa en el presente escrito, considerando la naturaleza de las preguntas de partida planteadas, dedicamos el próximo apartado a su descripción.

Sobre el conocimiento del profesor de matemáticas en formación

Las investigaciones realizadas en el marco de esta tendencia parecen partir de una misma cuestión: "¿qué tipo de conocimientos y habilidades necesita una persona para ser un 'buen' profesor de matemáticas? [trad.]" (Sánchez, 2011, p. 135). En este sentido, uno de los primeros y más representativos aportes al respecto es el de Shulman (1986). Estudio en el cual, desde una perspectiva más bien cognitiva-constructivista, parte de preguntarse cuáles son "las fuentes del conocimiento de los maestros" (Shulman, 1986, citado en Mercado, 2002, p. 18). Como respuesta, el autor presenta tres categorías de conocimiento: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento del currículum, a los que anexa algunos *dominios* importantes de conocimiento, entre ellos los métodos de organización y manejo del salón de clases (Mercado, 2002).

Con este como antecedente, comienzan a estructurarse diversas corrientes de investigación respecto al conocimiento del futuro profesor de matemáticas. Dentro de estas, Strutchens et al. (2017) destacan los estudios que intentan esclarecer la relación entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. Al respecto mencionan que, aunque existen numerosas investigaciones sobre nexos positivos entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico de este, algunos estudios –como el realizado por Subramaniam (2014)– enfatizan que los conocimientos y competencias matemáticas no garantiza el conocimiento para la enseñanza ni la efectividad pedagógica.

Otra línea notable de la investigación en el marco de esta tendencia es la relación existente entre las experiencias de campo y el conocimiento del futuro profesor de matemáticas. Al respecto, y con base en diversos estudios a gran y pequeña escala, Strutchens et al. (2017) concluyen que las experiencias de campo influyen de forma positiva en sus conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas. No obstante, Fregona y Alagia (2002) acentúan que la inmersión en experiencias de campo también puede tener consecuencias peligrosas para la formación inicial docente, ya que:

> Por un lado, puede estabilizar prácticas escolares que aparecen como tradicionales pero que no proveen una buena relación de los alumnos con la matemática; y por otro, no asegura una buena preparación académica de los docentes, no da flexibilidad ni favorece las adaptaciones. (p. 148)

Aunque existen otras líneas de investigación referentes al conocimiento del profesor de matemáticas en formación, dadas nuestras preguntas de partida, hay un último par que son de nuestro especial interés: las que retoman una pieza de conocimiento matemático en particular y las que rescatan elementos histórico-epistemológicos en pro de la formación inicial docente.

Se ha llevado a cabo una amplia variedad de investigaciones sobre el conocimiento del

futuro profesor de matemáticas alrededor de un tópico matemático específico. Strutchens et al. (2017), con base en más de 15 investigaciones de este tipo, concluyen que los estudios sobre las concepciones de los futuros profesores de matemáticas sobre nociones matemáticas específicas, en resolución de problemas y modelación, y razonamiento y prueba, parecen indicar que los profesores en formación "no han desarrollado un conocimiento matemático profundo que pueda informar su enseñanza hacia el desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos y el razonamiento [trad.]" (Strutchens et al., 2017, p. 9).

Por otro lado, respecto a las investigaciones que presentan una discusión sobre la inclusión de elementos histórico-epistemológicos, Larios (2001) subraya la importancia de la incorporación de estos en la formación inicial en tanto proporcionan "elementos al docente para su práctica didáctica, para la interpretación de la investigación educativa y para su propia concepción de la ciencia matemática" (p. 64). Con esto en mente, Fregona y Alagia (2002) se preguntan: "¿significa esto que habría que introducir cursos de epistemología y/o filosofía de la ciencia o de la matemática?" (p. 147). Como una alternativa más *adecuada* –y acaso más práctica–, los autores proponen "profundizar directamente en las nociones matemáticas, estudiar la sucesión de dificultades y preguntas que provocaron su aparición" (p. 147).

Además de las tendencias y líneas de investigación aludidas, la revisión bibliográfica realizada alrededor de una propuesta teórica para el estudio del conocimiento del docente ha sido trascendental en la construcción de la propuesta de investigación que aquí desarrollamos. Damos cuenta de ella en el siguiente apartado.

Sobre los saberes docentes

En los últimos años, las investigaciones de corte social han comenzado a tomar cierto realce en nuestra disciplina, esto es especialmente cierto en la formación inicial docente en lo que al estudio del conocimiento del futuro docente de matemáticas de refiere. De manera general, los investigadores ubicados en esta perspectiva consideran que la "discusión sobre el conocimiento del profesor de matemáticas debería estar moldeada por el contexto en el que el profesor desarrolla su trabajo [trad.]" (Sánchez, 2011, p. 135).

En el marco de esta postura, y desde una óptica más bien etnográfica, destaca la propuesta de los *saberes docentes* de Mercado (1991, 1994, 2002). En ella, la autora plantea a los saberes docentes como *saberes cotidianos*, en tanto "conocimiento [énfasis agregado] sobre la realidad que *utilizamos* [énfasis agregado] de un modo efectivo en la vida cotidiana, del modo más heterogéneo (como guía para las acciones, como temas de conversación, etcétera)" (Heller, 1977, citado en Mercado, 2002, p. 13).

Bajo esta perspectiva, el docente solo se *apropia* de los saberes que estima necesarios para su labor. En el transcurso de este proceso de apropiación el docente genera nuevos saberes a la vez que integra o rechaza conocimientos provenientes de distintos ámbitos sociales y momentos históricos. En consecuencia, y como puede ser evidente en este punto, los saberes docentes son considerados –bajo esta perspectiva– de carácter *histórico*, *dialógicos* y *socialmente construidos* (Mercado, 2002).

El carácter histórico de los saberes docentes refiere a que, al tomar una decisión, los docentes ponen en juego *voces* provenientes de distintos momentos históricos, reformas educativas pasadas o vigentes, experiencias de formación inicial o de actualización docente, la experiencia docente en general, por ejemplo. Por otro lado, el carácter dialógico de los saberes

docentes refiere a que –bajo esta postura– las acciones y expresiones de los docentes sobre su enseñanza no pueden verse únicamente desde una perspectiva individual, sino que deben entenderse como "producto de construcciones sociales, históricas, ya que representan huellas provenientes de distintas épocas y ámbitos sociales con las cuales *dialogan* [énfasis agregado] las percepciones individuales" (Mercado, 2002, p. 15).

Finalmente, es importante subrayar que, al considerar los saberes docentes como construcciones sociales, deviene natural postular que los maestros construyen "su conocimiento o su saber cotidiano sobre la enseñanza en determinados contextos definidos *situacionalmente* [énfasis agregado]" (Mercado, 2002, p. 16), así como caracterizar los procesos de construcción y desarrollo de dicho saber como *ilimitados o inacabados*.

En suma, las investigaciones aludidas nos dan una visión ligera –igual que panorámica– de la investigación que se ha realizado alrededor de los conocimientos de los futuros docentes de matemáticas. En particular, han resultado trascendentales las que versan sobre la multiplicidad de conocimientos y saberes –sus diversas naturalezas, orígenes, etc.– que interactúan en la toma de decisiones en el quehacer docente.

Algunas conclusiones

Con base en los elementos presentados y discutidos anteriormente, en especial los referentes al estudio del conocimiento docente y la postura teórica propuesta por Mercado (1991, 1994, 2002), nos replanteamos nuestras preguntas de partida. Así, en este punto de nuestra investigación, nos preguntamos: *¿cómo la problematización de las nociones trigonométricas 'dialoga' con los demás saberes docentes de los futuros profesores de matemáticas?, ¿cuáles son esos 'otros saberes', de qué naturaleza son?* y *¿qué rol –con relación a los demás saberes docentes– juega la problematización de las nociones trigonométricas al momento de tomar decisiones de diseño, implementación y análisis de actividades de aula?*

Además, la revisión bibliográfica esbozada, nos ha hecho consientes de que, dada la naturaleza de estas preguntas, nos es de interés un esquema metodológico que más que *diagnosticar* y *evaluar* los conocimientos de los futuros docentes nos permita acercarnos a los saberes que estos poseen, y sobre todo a la forma en como estos dialogan para la toma de decisiones respecto al diseño, implementación y análisis de actividades de aula.

Considerando que a la etnografía, en tanto metodología cualitativa, más que interesarle la *verdad* –aquello que es para el investigador– o la *moralidad* –lo que debería ser– de un determinado fenómeno, procura "aportar una *comprensión detallada* [énfasis agregado] de las distintas perspectivas" (Rodríguez-Gómez y Valldeoriola, 2012, p. 53); nos proponemos –en este punto de la investigación– un estudio de corte etnográfico que haga posible, mediante la observación, la descripción e interpretación, acercarnos a las prácticas y los conocimientos de nuestra comunidad de interés, los profesores de matemáticas en formación inicial.

Referencias y bibliografía

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: Una Problematización de las Nociones Trigonométricas*. Tesis de Maestría no publicada. Ciudad de México, México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav). doi: 10.13140/RG.2.2.18095.64166

Fregona, D., y Alagia, H. (2002). Problemas nuevos –y otros no tanto– en la formación de profesores de matemáticas. *Cuadernos de Educación*, (2).

García, M. M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación matemática*, 17(2).

Larios, V. (2001). Filosofía e historia de la matemática en la formación docente. *Educación Matemática*, 13(3), 64-74.

Lloyd, G. M. (2005). Beliefs about the teacher's role in the mathematics classroom: One student teacher's exploration in fiction and in practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 441–467.

Mancera, E. (2014). La otra matemática… la de enseñanza… la de los maestros…. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 9, Número 12, 221-235.

Mercado, R. (1991). Los saberes docentes en el trabajo cotidiano de los maestros. *Infancia y aprendizaje*, 14(55), 59-72.

Mercado, R. (1994). Saberes and social voices in teaching. *Education as cultural construction*, 61-70.

Mercado, R. (2002). *Los sabers docents como construcción social*. La enseñanza centrada en los niños. México: Fondo de Cultural Económica.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico*. Un estudio Socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G., y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1193-1216.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa* (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav–IPN, México.

Rodríguez-Gómez, D., y Valldeoriola, J. (2012). *Metodología de la investigación*. España: Universitat Oberta de Cataluña.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.

Strutchens, M., Huang, R., Losano, L., Potari, D., Ponte, J. P. D., Cyrino, M. C. D. C. T., y Zbiek, R. M. (2016). *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world*. Springer Open.

Tatto, M. T., Peck, R., Schwille, J., Bankov, K., Senk, S. L., Rodriguez, M., Ingvarson, L., Reckase, M., y Rowley, G. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La formación de profesores de estadística como ciudadanos críticos[1]

Cindy Alejandra **Martínez-Castro**
Universidad de Antioquia
Colombia
cindy.martinez@udea.edu.co
Lucía **Zapata-Cardona**
Universidad de Antioquia
Colombia
lucia.zapata1@udea.edu.co

Resumen

En esta ponencia se reporta un avance de una propuesta de investigación que busca aproximarse al análisis de la formación inicial de profesores de estadística como ciudadanos críticos, a partir de las *investigaciones estadísticas en el aula*. La investigación busca indagar ¿cómo se forma la ciudadanía crítica de futuros profesores de estadística, a partir de investigaciones estadísticas en el aula? Para dar respuesta a la pregunta planteada se asumirá un paradigma de investigación cualitativo y un enfoque crítico-dialéctico. La producción y registro de datos estarán apoyados en diversos instrumentos y técnicas tales como autobiografías, ideogramas, análisis de casos, entrevistas, investigaciones estadísticas, observación participante y diario reflexivo, con los cuales se dará cuenta de la formación de la ciudadanía crítica. Se espera que a través de esta investigación se puedan aportar elementos teóricos, prácticos y metodológicos para fortalecer el campo de la Educación Estadística, específicamente en la formación inicial de profesores.

Palabras clave: Educación Estadística, formación inicial de profesores, ciudadanía crítica, investigaciones estadísticas.

Introducción

La estadística ha cobrado importancia en las sociedades actuales donde existe una gran disponibilidad de información que se propaga rápidamente (Lebrun y Zapata-Cardona, 2017; Ben-Zvi y Makar, 2016). Esta característica de las sociedades de hoy requiere de ciudadanos capaces de evaluar críticamente afirmaciones basadas en datos y de argumentar con fundamento en la evidencia que entregan los datos (Estrella, 2017; Ben-Zvi y Makar, 2016). Por tanto, no es de sorprender que el estudio de la estadística alrededor del mundo en todos los niveles

[1] Esta investigación se llevó a cabo con el apoyo de Colciencias Contrato 438-2017.

educativos esté ganando cada vez mayor atención (Ben-Zvi y Makar, 2016; Batanero, Burrill y Reading, 2011), situación que trae consigo nuevos desafíos para la formación inicial de los profesores de estadística.

Entre los desafíos a los que se enfrenta la formación inicial se encuentra la necesidad de formar a los futuros profesores como ciudadanos activos y comprometidos (Lopes, 2008), capaces de realizar una lectura crítica de la estadística y de sus usos en el entorno social (Ernest, 2015). En este sentido, la formación inicial del profesor de estadística debería, en palabras de Gutstein (2007), enfocarse en las competencias académicas requeridas para su vida profesional y, simultáneamente, en las competencias críticas para leer y escribir el mundo por medio de la estadística. En otras palabras, en la formación inicial se debería cultivar simultanéate el saber y el ser del profesor.

No obstante, en relación a la formación de profesores de estadística, algunos autores han reconocido que ciertos programas de formación inicial siguen una perspectiva técnica y formalista (Zapata-Cardona y González-Gómez, 2017; Souza, Lopes y Pfannkuch, 2015; Costa y Nacarato, 2011). Es decir, que dichos programas se inscriben en un modelo de racionalidad técnica (Loya, 2008; Schön, 1992), donde la estadística se concibe como una ciencia abstracta, estática, formal y alejada de los entornos socioculturales de los profesores. La racionalidad técnica descansa en una concepción objetivista de la relación del profesor con la realidad que conoce, y por ende, el profesor se asume como un técnico que debe aplicar los conocimientos científicos, producidos por otros (Schön, 1992). Así, en dicho modelo de formación, el profesor es visto como un técnico y su formación se entiende como previa y necesaria para el desempeño profesional.

En un modelo de racionalidad técnica el dominio de la disciplina es lo más importante en la formación del profesor (Loya, 2008), es decir, el profesor debe conocer primero la disciplina para luego enseñarla. Pareciera que la formación allí responde a un modelo de causa-efecto (Jaramillo, 2003), en donde los "formadores" dicen lo que el profesor debe adquirir y el profesor "reproduce lo dicho" sin cuestionarlo ni problematizarlo. En esta mirada, muchos programas de formación de profesores se centran en refinar el saber disciplinar y el desarrollo de habilidades y procedimientos, desconociendo que esta es apenas una de las dimensiones en las que se debería formar el futuro profesor (Zapata-Cardona y González-Gómez, 2017).

A partir de la formación inicial del profesor de estadística se ha privilegiado la adquisición y el dominio del saber disciplinar por parte del profesor, y muy poco se ha enfatizado en desarrollar la capacidad crítica de los profesores (Zapata-Cardona y González-Gómez, 2017; Vanegas, Giménez y Font, 2015; Vanegas y Giménez, 2011). En otras palabras, se ha dejado de lado la formación de los profesores como ciudadanos críticos y transformadores de las crisis sociales que conforman su entorno (Lebrun y Zapata-Cardona, 2017). En esta perspectiva, se genera una dicotomía (separación) entre el saber disciplinar y el ser en la formación de los profesores (Radford, 2013; Contreras-Domingo, 2010), en donde, al centrarse la formación en un lenguaje formalizante e inexpresivo para abordar la estadística, se opaca al profesor como ser social, ético y político capaz de asumir posturas críticas frente a los problemas inmersos en sus contextos socioculturales.

En este orden de ideas, se considera importante cuestionarse sobre la formación inicial del profesor de estadística y empezar a desarrollar propuestas que permitan ir superando el modelo de racionalidad técnica en los programas de formación. Propuestas que ayuden a reducir la

dicotomía existente entre el saber y el ser para darle cabida al profesor como un ciudadano crítico y político capaz de cuestionar, evaluar críticamente y reflexionar sobre el uso de la estadística en la sociedad (Weiland, 2016). En la formación inicial es necesario abordar la estadística como una herramienta poderosa para movilizar a los profesores en el estudio empírico de fenómenos sociales, económicos, políticos, y para desarrollar la conciencia social (Lebrun y Zapata-Cardona, 2017). De lo contrario se corre el riesgo de seguir fomentado el estudio de la estadística como una disciplina estática, objetiva, técnica e in-transformable (Zapata-Cardona y González-Gómez, 2017).

Una posibilidad para cultivar simultáneamente el saber y el ser en la formación inicial del profesor son las *investigaciones estadísticas en el aula*. En ellas se comprende al profesor como un sujeto crítico y político, y se asume la estadística como una herramienta para problematizar y solucionar problemas del mundo circundante. Las investigaciones estadísticas "son una manera de superar la enseñanza que tradicionalmente exalta el aprendizaje de conceptos y procedimientos estadísticos aislados del contexto en el que se han producido" (Zapata-Cardona, 2016, p. 76), y permiten estudiar empíricamente problemáticas del entorno sociocultural de las personas. En este sentido, las investigaciones estadísticas no se centran exclusivamente en la adquisición de conocimientos; también toman en cuenta la dimensión social de los seres (González-Gómez y Zapata-Cardona, 2018; Zapata-Cardona, 2016).

De esta forma, se busca propiciar ambientes en los cuales los futuros profesores puedan desarrollar y diseñar investigaciones estadísticas para mirar hacia sí y hacia el mundo que los rodea, para conocer y compartir los problemas sociales y políticos de la realidad en que viven, y para cuestionar esa realidad hasta llegar a transformarla (Campos et al, 2011). En coherencia con las ideas desarrolladas a lo largo de este apartado, se busca responder a la pregunta de investigación, *¿Cómo se forma la ciudadanía crítica de futuros profesores de estadística, a partir de las investigaciones estadísticas en el aula?*

Marco de referencia

A continuación, se desarrollarán algunos elementos teóricos con respecto a la ciudadanía crítica y su formación. Seguidamente se discutirán algunos aspectos teóricos sobre las investigaciones estadísticas en el aula y como éstas pueden convertirse en una posibilidad para la formación de la ciudadanía crítica de futuros profesores de estadística.

La ciudadanía crítica

Algunos autores tanto de Colombia (Lebrun y Zapata-Cardona, 2017; Clavijo, 2015; Arias, Clavijo y Torres, 2012) como de otros países (Engel, 2017; Weiland, 2016; Campos, 2016; Lesser, 2007) se han preocupado por el estudio de la ciudadanía crítica, dado el potencial que representa para la formación democrática y para la transformación de la sociedad (Lebrun y Zapata-Cardona, 2017). En el trabajo de Lebrun y Zapata-Cardona (2017) se entiende la ciudadanía crítica como la toma de consciencia de lo ambiental, social, político y económico, y como una disposición crítica hacia el mundo, donde se usa la estadística para la construcción de la democracia. De esta manera, se busca que las personas formen su conciencia ante ciertas situaciones críticas (así llamadas por Skovsmose, 1999) de la sociedad para reaccionar frente a ellas y transformarlas. Otros estudios como los de Engel (2017), Clavijo (2015) y Arias, Clavijo y Torres (2012) han asumido la ciudadanía crítica como la toma de consciencia y de postura con respecto a la información que abunda en el medio social y como la participación crítica de los ciudadanos en la sociedad mediante la discusión de asuntos políticos, económicos y ambientales

en los cuales la estadística sirve de soporte tecnológico.

Para Campos (2016) la estadística debería permitir el trabajo con temas que faciliten la discusión de problemas socio-políticos que sean pertinentes en la realidad de las personas. El autor comprende la ciudadanía crítica como una postura que deben tener los ciudadanos para el logro de una sociedad democrática a partir de la lucha por la justicia social. En esta línea también se encuentran los aportes de Lesser (2007) quien asume la ciudadanía crítica como el desarrollo de una conciencia a partir del entendimiento de las diversas problemáticas contextuales para promover el cambio hacia sociedades más democráticas y justas. Finalmente, el trabajo de Weiland (2016) define la ciudadanía crítica como la participación activa y crítica de los sujetos en sus comunidades y/o gobiernos orientada a la justicia de la ciudadanía para la democracia.

A partir de las ideas encontradas en los trabajos mencionados, se resalta que la ciudadanía crítica tiene una estrecha relación con la idea de democracia. La democracia se puede entender como una acción política abierta y colectiva, con un propósito, emprendida por un grupo de personas (Skovsmose y Valero, 2012b). Es decir, la democracia se enfoca en la esfera de las interacciones sociales e incluye la colectividad, la deliberación, la transformación y la coflexión ―reflexión conjunta― (Skovsmose y Valero, 2012a; 2012b). A partir de las ideas desarrolladas, en la presente investigación se asumirá la ciudadanía crítica como *la participación activa y crítica de los sujetos (futuros profesores) en sus comunidades y/o gobiernos, orientada a la justicia de la ciudadanía para la democracia que incluye la colectividad, la deliberación, la coflexión y la transformación.*

Las investigaciones estadísticas en el aula

Algunos estudios como los de González-Gómez y Zapata-Cardona (2018) y Zapata-Cardona (2016), han reconocido las investigaciones estadísticas en el aula como una herramienta para formar a los sujetos como ciudadanos críticos mediante el estudio crítico de diversos fenómenos sociales, políticos, ambientales y económicos presentes en sus contextos. Las investigaciones estadísticas son una manera holística de abordar la estadística puesto que permite a los participantes vincular conceptos, herramientas, procedimientos, razonamiento, habilidades y la inferencia estadística para resolver problemas del mundo (Zapata-Cardona, 2016). Se centran en una perspectiva que concibe la estadística como un modo de pensar sobre el mundo y como un campo integrado que es mucho más que un conjunto de conceptos y procedimientos abstractos, ya que permite la comprensión del mundo y la participación de los individuos en la sociedad (Zapata-Cardona, 2016; Santos y Ponte, 2014).

Las investigaciones estadísticas incluyen todo un proceso de investigación que va desde la identificación de un problema o asunto de interés en un contexto particular hasta la producción y presentación de un reporte con propuestas de intervención, es decir, involucra a los participantes en el manejo de datos, exploración, análisis, interpretación y presentación de informes en el contexto (Zapata-Cardona, 2016; MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011). Además, las investigaciones estadísticas son una estrategia que se caracteriza por su potencial contribución a la comprensión y al conocimiento crítico del mundo circundante, pues por ser una estrategia contextual apoya la formación del ciudadano crítico (Zapata-Cardona, 2016).

De acuerdo con lo anterior, las investigaciones estadísticas apoyadas en problemas sociales exigen a los participantes usar, producir o contrastar datos de diversos fenómenos del mundo (contaminación, índices de desempleo, crecimiento demográfico, producción de basuras, cambio climático, hábitos alimenticios, etc…) que pueden tener un impacto en el desarrollo de la

conciencia social. En este sentido, las investigaciones estadísticas no se centran exclusivamente en la adquisición de conocimientos; también toma en cuenta la dimensión social de los seres (González-Gómez y Zapata-Cardona, 2018; Zapata-Cardona, 2016). Las investigaciones estadísticas como estrategia metodológica pueden ser usadas para promover el conocimiento estadístico y argumentos en un esfuerzo por desestabilizar y remodelar las estructuras de injusticia para una sociedad más justa (Weiland, 2016). De esta forma se reconoce su valor como una estrategia que podría posibilitar la formación de la ciudadanía crítica.

Aspectos metodológicos

La formación de la ciudadanía crítica es un fenómeno cualitativo, el cual es posible analizar mediante un ejercicio de comprensión de las ideas y concepciones de las personas producto de sus experiencias y sus interacciones sociales. Por esta razón, la presente investigación contempla los principios metodológicos del paradigma de investigación cualitativa que posibilitará asumir a los profesores en formación como seres humanos en sus dimensiones histórica y social (Denzin y Lincoln, 2012). En esta metodología, se asumirá el enfoque crítico-dialéctico (Sánchez, 1998), puesto que se comprende el profesor como un sujeto en permanente constitución inmerso en contextos políticos, económicos y culturales en los cuales puede ser a la vez transformado y transformador de tales contextos.

El trabajo de campo se pretende llevar a cabo en el primer semestre del año 2019, con profesores en formación de un curso de Didáctica de la Estadística ofrecido en un programa de licenciatura en matemáticas de una universidad al noroeste colombiano. Por tener el curso el formato de seminario, donde prima la discusión y el trabajo colaborativo, podría ser un espacio propicio para analizar la formación de la ciudadanía crítica de los profesores participantes del curso, a partir de investigaciones estadísticas en el aula. El trabajo de campo posibilitará, a través de instrumentos para la producción de registros y datos como autobiografías, ideogramas, análisis de casos, entrevistas, investigaciones estadísticas, entre otros, comprender la formación de los futuros profesores protagonistas como ciudadanos críticos, a partir de sus enunciados verbales y escritos como parte de sus discursos (Lerman, 2001).

Por medio de los ideogramas y las autobiografías se busca rastrear elementos clave que den cuenta de las experiencias e historia de los futuros profesores a lo largo de su vida en relación con la estadística. Los análisis de casos y las investigaciones estadísticas en el aula serán los instrumentos para apoyar la formación estadística al tiempo que conectan a los participantes con el estudio de fenómenos reales. Las entrevistas ayudarán a profundizar ideas que no queden lo suficientemente claras a través de los otros instrumentos. El análisis de los datos se llevará a cabo simultáneamente con el trabajo de campo, y para su realización se utilizará la técnica de análisis del discurso ―como es entendido por Sayago (2014)― para identificar episodios cruciales que revelarán indicios sobre la formación de la ciudadanía crítica de los profesores participantes de la investigación.

Un ejemplo de una investigación estadística en el aula

La presente investigación estadística en el aula está relacionada con el cambio climático y surge a partir de la noticia denominada “2017 confirma tendencia al calentamiento global” (Velásquez Gómez, 2017). Después de la discusión y análisis de la noticia se plantea la pregunta estadística “¿Se está calentado nuestra ciudad (planeta)? ¿Por qué si o por qué no?”. Para resolver la pregunta estadística, los participantes reconocen la importancia de los datos reales, diseñan un plan de recolección de datos y lo gestionan, diseñan formas de organización de los

datos para darle sentido a la información, y usan la evidencia empírica para dar una respuesta y establecer conclusiones. La investigación estadística no termina con la aplicación técnica de herramientas estadísticas, sino que los resultados orientan reflexiones y acciones posteriores de los participantes en relación a su contribución como ciudadanos del mundo al calentamiento global y sugieren acciones que pueden emprender para reducir su huella ambiental.

Las discusiones de los participantes al trabajar sobre una investigación estadística serán las unidades que se sometan a análisis. Se quiere mostrar que las investigaciones estadísticas no solo aportan elementos para el desarrollo técnico del saber estadístico, sino que contribuyen a la formación de la ciudadanía crítica de los participantes. También se quiere mostrar que las investigaciones estadísticas resaltan la conexión entre la estadística y el mundo real que posibilitan la comprensión crítica de los fenómenos sociales y ambientales, y la toma de decisiones informadas.

Resultados esperados

El análisis del discurso del profesor al trabajar con las investigaciones estadísticas será un punto de partida para comprender cómo los profesores en formación logran el dominio de herramientas y conceptos estadísticos, pero al mismo tiempo se posicionan críticamente frente al estudio de la estadística y sus usos en la sociedad. En otras palabras, la investigación mostrará cómo se atiende simultáneamente a la formación científica del futuro profesor y a su formación como un ciudadano crítico. Mediante el desarrollo de esta investigación, se espera hacer aportes a nivel teórico, práctico y metodológico para el campo de la Educación Estadística y específicamente, para poner en cuestión la formación inicial de los profesores de estadística, que no incluye únicamente el dominio de un saber disciplinar. Además, se espera que la investigación brinde elementos teóricos, prácticos y metodológicos para orientar futuras investigaciones en el campo de la Educación Estadística y en otros campos de investigación.

Finalmente, es importante considerar algunas limitaciones que pueden surgir con el desarrollo del presente estudio. Una limitación importante es el corto tiempo disponible para la formación de la ciudadanía crítica, pues ella es un estado de conciencia que se forma a lo largo de la vida. Además, el desarrollo del estudio dependerá de la voluntad y disponibilidad de los participantes. A medida que se avance en el desarrollo de la investigación se irán identificando otras limitaciones que hasta el momento no es posible preveer y estas serán consideradas en el reporte final de la investigación, ya que podrían convertirse en el punto de partida de nuevas investigaciones.

Referencias y bibliografía

Arias, C. M., Clavijo, M. C., & Torres, J. (2012). La enseñanza de la Estadística en la formación de ciudadanos críticos. *13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa- ECME 13.* Medellín, Antioquia, Colombia.

Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study.* New York: Springer.

Ben-Zvi, D., & Makar, K. (2016). *The Teaching and Learning of Statistics. International Perspectives.* Switzerland: Springer International Publishing.

Campos, C. R. (2016). La educación estadística y la educación crítica. *Segundo Encuentro Colombiano de Educación Estocástica (2 ECEE).* Bogotá, Colombia.

Campos, C. R., Jacobini, O. R., Wodewotzki, M. L., & Ferreira, D. H. (2011). Educação Estatística no Contexto da Educação Crítica. *Boletim de Educação Matemática, 24*(39), 473–494.

Clavijo, M. (2015). Posibilidades en la formación de ciudadanos críticos: una puesta en escena de la educación matemática crítica y la educación estadística. *Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM*. Bogotá, Colombia.

Contreras-Domingo, J. (2010). Ser y saber en la formación didáctica del profesorado: una visión personal. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 68*(2), 61–81.

Costa, A., & Nacarato, A. M. (2011). A Estocástica na Formação do Professor de Matemática: percepções de professores e de formadores. *Boletim de Educação Matemática, 24*(39), 367–386.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. (2012). *El campo de la investigación cualitativa. Manual de investigación cualitativa* (Vol. 1). Barcelona, España: Gedisa.

Engel, J. (2017). Statistical literacy for active citizenship: A call for data science education. *Statistics Education Research Journal, 16*(1), 44–49.

Ernest, P. (2015). The Social Outcomes of Learning Mathematics: Standard, Unintended or Visionary? *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 3*(3), 187–192.

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo, *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (pp. 173–194). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

González-Gómez, D., & Zapata-Cardona, L. (2018). Professional development programs for statistics teachers: the role of reflection. En M. A. Sorto, A. White, & L. Guyot, *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 10), Kyoto, Japan.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Gutstein, E. (2007). Possibilities and Challenges in Teaching Mathematics for Social Justice. *Third Annual National Research Symposium of the Maryland Institute for Minority Achievement and Urban Education* . University of Illinois-Chicago.

Jaramillo, D. (2003). (Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica. (*Tesis Doctoral)*. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Lebrun, V., & Zapata-Cardona, L. (2017). Una Perspectiva Crítica para la Enseñanza de la Estadística. *XXVII Simposio Internacional de Estadística – 5th International Workshop on Applied Statistics.* Medellín, Antioquia, Colombia.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 87–113.

Lesser, L. M. (2007). Critical Values and Transforming Data: Teaching Statistics with Social Justice. *Journal of Statistics Education, 15*(1), 1–21.

Lopes, C. E. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cedes, 28*(74), 57–73.

Loya, H. (2008). Los modelos pedagógicos en la formación de profesores. *Revista Iberoamericana de Educación, 3*(46), 1–8.

MacGillivray, H., & Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching Statistical Thinking Through Investigative Projects. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School*

MathematicsChallenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study (pp. 109–120). New York: Springer.

Radford, L. (2013). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Santo Domingo, República Dominicana.

Sánchez, S. G. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador.* Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Santos, R., & Ponte, J. P. (2014). Ensino e aprendizagem de investigações estatísticas: dois estudos de caso com futuras professoras. *Quadrante, 23*(2), 47–68.

Sayago, S. (2014). El análisis del discurso como técnica de investigación cualitativa y cuantitativa en las ciencias sociales. *Cinta de Moebio*(49), 1–10.

Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Barcelona: Paidós.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* (P. Valero, Trad.) Bogotá: Una Empresa Docente (Trabajo original publicado en 1994).

Skovsmose, O., & Valero, P. (2012a). Rompimiento de La Neutralidad Política: EL Compromiso Crítico de la Educación Matemática con la Democracia. En P. Valero, & O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 1–23). Bogotá: Una Empresa Docente.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2012b). Acceso Democrático a Ideas Matemáticas Poderosas. En P. Valero, & O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 25–61). Bogotá: Una Empresa Docente.

Souza, L. d., Lopes, C. E., & Pfannkuch, M. (2015). Collaborative professional development for statistics teaching: a case study of two middle-school mathematics teachers. *Statistics Education Research Journal, 14*(1), 112–134.

Vanegas, Y. M., & Giménez, J. (2011). Futuros profesores de matemáticas y ciudadanía. *XIII CIAEM – IACME*. Recife, Brasil.

Vanegas, Y., Giménez, J., & Font, V. (2015). Aprender a formar en ciudadanía en la formación de profesores de matemáticas. En R. Flores, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Velásquez Gómez, R. (2017). 2017 confirma tendencia al calentamiento global. *El Colombiano*. Publicado 2 de mayo de 2017 en http://www.elcolombiano.com/medio-ambiente/en-2017-prosigue-el-calentamiento-global-LK6419836.

Weiland, T. (2016). Towards a framework for a critical statistical literacy in high school mathematics. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, & J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 984–991). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Zapata-Cardona, L. (2016). ¿Estamos promoviendo el pensamiento estadístico en la enseñanza? *Segundo Encuentro Colombiano de Educación Estocástica (2 ECEE).* Bogotá, Colombia.

Zapata-Cardona, L., & González-Gómez, D. (2017). Imágenes de los profesores sobre la estadística y su enseñanza. *Educación Matemática, 29*(1), 61–89.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Investigación en Educación Matemática. Experiencias en el Semillero MATHEMA

Alexander **Castrillón-Yepes**
Universidad de Antioquia
Colombia
alexander.castrillony@udea.edu.co
Gilberto de Jesús **Obando** Zapata
Universidad de Antioquia
Colombia
gilberto.obando@udea.edu.co

Los Semilleros de Investigación surgen en 1996 en la Universidad de Antioquia, Colombia, como una estrategia extracurricular para el fomento de la investigación (Molineros, 2009). Más tarde, esta estrategia se extiende a diferentes universidades del país, promoviendo la consolidación de espacios como los Encuentros Nacionales e Internacionales de Semilleros de Investigación y de redes como la Red de Semilleros de Investigación de la Universidad de Antioquia (RedSIN U. de A.) y la Red Colombiana de Semilleros de Investigación (RedCOLSI).

Oquendo, González y Castañeda (2001) definen los semilleros como "comunidades de aprendizaje donde confluyen estudiantes y profesores de diferentes profesiones y disciplinas con el propósito de buscar una formación integral" (p.13). También se definen como "espacio donde los estudiantes son los protagonistas de su propio aprendizaje, y en últimas, los responsables de construir su propio conocimiento y de adquirir actitudes y aptitudes propias para el ejercicio de la investigación y la ciudadanía" (p.13). Sin embargo, actualmente, existen diferentes definiciones de Semilleros de Investigación, según la institución en la que se enmarcan estos espacios. De manera particular, la Universidad de Antioquia conserva elementos esenciales de la estrategia según sus propósitos iniciales, reconociéndolos como comunidades de aprendizaje extracurriculares conformados por estudiantes de pregrado y posgrado, profesores y demás personas que por voluntad propia decidan participar. Asimismo, la institución reconoce la diversidad de estos espacios de formación, tanto en sus formas de organización como en sus actividades e intereses.

De manera particular, el Semillero MATHEMA de la Universidad de Antioquia es un espacio de formación ofrecido por el grupo de investigación MATHEMA-FIEM (Formación en Investigación en Educación Matemática) desde el año 2014. Este Semillero se propone construir reflexiones y proponer estrategias que atiendan a los problemas que atañen la formación matemática en los distintos niveles escolares. Asimismo, el Semillero se visiona como un espacio de formación con altos estándares de calidad y con capacidad de impactar crítica y

creativamente el sistema educativo; para cumplir con este propósito, cuenta con una serie de actividades y aliados que contribuyen a la formación de sus integrantes.

El semillero está conformado por estudiantes de diferentes programas de Licenciatura (formación de profesores) de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, por profesores de la misma Facultad y colegas investigadores de otras instituciones. Dentro de las actividades del semillero se resaltan: la participación en redes a nivel local y nacional (RedSIN y Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática, respectivamente), la presentación de ponencias a nivel local, nacional e internacional, la promoción de intercambios académicos y de experiencias, la escritura científica, la publicación en revistas, las actividades de formación (talleres, cafés con el experto, foros, seminarios) y la realización de proyectos de investigación.

En el Semillero se promueve la formación en investigación, el trabajo en equipo y la interdisciplinariedad, a través de relaciones horizontales, posibilitando la búsqueda y generación de conocimiento y procesos de colaboración entre pares con el fin de fortalecer la comunidad de educadores matemáticos del país. Adicionalmente, el Semillero se piensa como una estrategia de importancia para la formación de futuros investigadores que constituyan el relevo generacional de los investigadores del grupo MATHEMA, y del país en general.

El grupo MATHEMA ha logrado conservar el semillero de manera permanente durante 5 cohortes que se consolidaron a lo largo de su historia, en las cuales se generaron trabajos y reflexiones alrededor de la Modelación Matemática en Educación Matemática, las Tecnologías Digitales en Educación Matemática, el Análisis y la Producción de material educativo, y el Álgebra Escolar. Sin embargo, durante este recorrido se identificaron algunos retos para la estrategia de Semilleros de Investigación como la permanencia de los integrantes, algunos suelen abandonar el espacio una vez terminado su pregrado; la falta de estímulos institucionales para continuar con sus estudios de posgrados; el exceso de carga académica dentro de los programas académicos; las jornadas laborales; y la necesidad de consolidar más semilleros en el campo.

Frente a este último aspecto se resalta el Encuentro de Semilleros realizado en el decimoséptimo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa-2018 (ECME-17), como una oportunidad para conocer lo que realizan los diferentes Semilleros del campo en el país y para promover la constitución de estos espacios de formación. En este encuentro se resaltó la importancia de promover trabajos interinstitucionales entre los Semilleros, la necesidad de promover la participación de los mismos en eventos académicos y la construcción de redes nacionales e internacionales de Semilleros en el campo.

Así, en el póster se mostrarán los aspectos teóricos y metodológicos del Semillero, las principales actividades realizadas, los logros y los retos futuros. Con este se espera tejer diálogos con colegas de otras regiones de las américas, que permitan comunicar la experiencia del Semillero MATHEMA y fortalecer estrategias de trabajo colaborativo.

Referencias bibliográficas

Molineros, L. F. (2009). Orígenes y dinámica de los semilleros de investigación en Colombia: la visión de los fundadores. *Popayán: Universidad del Cauca*.

Oquendo, S., González, S., y Castañeda, B. (2001). Semilleros de investigación: una emergencia en pos del conocimiento y la ciudadanía. *REDSIN–Red Semilleros de Investigación de la Universidad de Antioquia, Medellín.*



Uso de una trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual para anticipar la comprensión e interpretar el pensamiento de los niños

Julia **Valls** González
Facultad de Educación, Universidad de Alicante
España
Julia.valls@ua.es
Gloria **Sánchez-Matamoros** García
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Alicante
España
gsanchezmatamoros@us.es
Mar **Moreno** Moreno
Facultad de Educación, Universidad de Alicante
España
mmoreno@ua.es

Resumen

Esta comunicación pone el foco en la adquisición de la mirada profesional de los estudiantes para maestro de educación infantil sobre la magnitud longitud y su medida, a través del uso de una trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual. Esta competencia docente implica interrelacionar las destrezas de identificar estrategias, interpretar/anticipar la comprensión y tomar decisiones de acción. El objetivo es analizar las diferencias entre anticipar la comprensión de los niños desde tareas seleccionadas por los estudiantes para maestro e interpretar el pensamiento matemático de los niños a partir de situaciones de enseñanza-aprendizaje, haciendo uso de una trayectoria de aprendizaje como herramienta conceptual. Los resultados muestran más dificultades de los estudiantes para maestro para anticipar la comprensión de los niños que para interpretar su pensamiento. Esta diferencia puede deberse a que la anticipación implica imaginar un contexto de enseñanza y posibles respuestas de los niños, actividad algo compleja sin experiencia docente.

Palabras clave: mirar profesionalmente, trayectoria de aprendizaje, instrumento conceptual, educación infantil, magnitud longitud y su medida.

Introducción y Marco teórico

Desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es uno de los objetivos de la formación del profesorado actualmente. Esta competencia se conceptualiza, según Jacobs, Lamb y Philipp (2010), en tres destrezas interrelacionadas: describir las estrategias utilizadas por los estudiantes, interpretar/anticipar la comprensión de estos y decidir cómo responder basándose en la comprensión interpretada/anticipada.

Según la revisión realizada por Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) sobre investigaciones recientes, acerca de la adquisición de la mirada profesional, la mayoría de ellas describen cómo los estudiantes para maestro interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes. Sin embargo, son escasas las que se centran en anticipar la comprensión de los estudiantes como una tarea profesional integrada en la planificación (Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros, 2016). Norton, McCloskey y Hudson (2011) subrayan la importancia de que el profesor anticipe e interprete lo que los estudiantes pueden hacer cuando están resolviendo ciertos problemas matemáticos para ayudarles a progresar en su aprendizaje.

En esta investigación nos planteamos como objetivo analizar las diferencias entre anticipar la comprensión de los niños desde tareas seleccionadas por los estudiantes para maestro e interpretar el pensamiento matemático de los niños a partir de situaciones de enseñanza-aprendizaje, haciendo uso de una trayectoria de aprendizaje como herramienta conceptual.

La trayectoria de aprendizaje para la magnitud longitud y su medida utilizada en esta investigación es una adaptación de Sarama y Clements (2009), consta de: (a) un objetivo de aprendizaje; (b) la progresión en el aprendizaje considerando los elementos matemáticos que definen la magnitud longitud (reconocimiento, conservación y transitividad) y la medida de la longitud (unidad de medida-unicidad, iteración, acumulación-, relación entre el número y la unidad de medida, y universalidad de la medida) (Tabla 1); y (c) tareas instruccionales.

Tabla 1

Una progresión en el aprendizaje de la longitud y su medida (adaptado de Sarama y Clements, 2009)

Nivel	Progresión del desarrollo
1	Reconocen la magnitud longitud: • Identifican las cualidades de la magnitud longitud. • Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.
2	Reconocen la conservación de la longitud: • Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos.
3	Utilizan la propiedad transitiva para realizar: • Comparaciones indirectas • Ordenaciones de objetos. • Medidas de longitudes.
4	Identifican una unidad de medida: • Reconocen la unicidad de la unidad de medida. • Realizan iteraciones de la unidad de medida • Reconocen la propiedad de acumulación.
5	Reconocen la universalidad de la unidad de medida Reconocen la relación entre número y unidad de medida. Comienzan a hacer estimaciones

Para caracterizar cómo usan los estudiantes para maestro de educación infantil una trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual hemos adaptado la perspectiva de la génesis instrumental (Drijvers y Trouche, 2008; Verillon y Rabardel, 1995) en la que se diferencia entre artefacto e instrumento. En nuestra investigación (Sánchez-Matamoros, Moreno, Pérez-Tyteca y Callejo, 2018), el artefacto es la información que debe ser aprendida (la trayectoria de aprendizaje) y el instrumento se genera cuando el estudiante para maestro la usa de manera significativa para anticipar la comprensión e interprete el pensamiento matemático de los niños. El proceso por el que la información de una trayectoria de aprendizaje se convierte en instrumento se llama génesis instrumental, y consiste en la formación de esquemas instrumentales (de uso o de acción instrumental) entendidos como formas estables de realizar las tareas (Drijvers y Trouche, 2008).

Los esquemas de uso son esquemas elementales básicos, directamente relacionados con el artefacto, y sirven como bloques de construcción de los esquemas de acción instrumental. Estos esquemas de acción instrumental, propios del proceso de instrumentación, son los que permiten al estudiante entender las potencialidades y restricciones de la información dada por la trayectoria de aprendizaje y se constituyen progresivamente en técnicas que le habilitan para dar una respuesta efectiva a las tareas a resolver. El primer esquema de acción instrumental se desarrolla cuando el estudiante para maestro usa el modelo de progresión en el aprendizaje de la magnitud y su medida, para anticipar la comprensión e interpretar el pensamiento matemático de los niños. Y un segundo esquema de acción instrumental se desarrolla cuando el estudiante para maestro, a partir de la comprensión anticipada, usa los tipos de tareas y el modelo de progresión del aprendizaje para proponer nuevas tareas que favorezcan la progresión del aprendizaje. La instrumentación de una trayectoria de aprendizaje implica la coordinación de ambos esquemas de acción instrumental, lo que permitirá al estudiante para maestro/a usar toda la información de la trayectoria de aprendizaje (objetivos, progresión en el desarrollo de la comprensión y tareas) para gestionar las tareas profesionales.

Así pues, el objetivo de esta investigación se concreta en la siguiente pregunta:

¿Cómo los estudiantes para maestro de educación infantil anticipan las características de la comprensión e interpretan el pensamiento de los niños usando una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida como instrumento conceptual?

Método

Los participantes son 23 estudiantes para maestro de educación infantil (EPM) matriculados en la asignatura "Aprendizaje de la Geometría" del "Grado en Maestro en Educación Infantil" de la Universidad de Alicante. Uno de los módulos de enseñanza de esta asignatura fue "La longitud y su medida en Educación Infantil" el cual constaba de cinco sesiones de 100 minutos y en cada una de ellas los EPM debían resolver una tarea profesional. En las distintas sesiones del módulo se le propusieron tareas profesionales para interpretar el pensamiento matemático de los niños de infantil a través de situaciones de enseñanza-aprendizaje (registros de la práctica en forma de videos y/o de interacción entre alumnos/as y maestra) en la que se le planteaban tres preguntas para ayudar a los EPM a mirar de forma estructurada el pensamiento matemático de los niños, apoyándose en una trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida (Tabla 1) o bien, tareas profesionales en las que debían seleccionar tareas para anticipar la comprensión apoyándose en la trayectoria de aprendizaje. Una vez resueltas las tareas profesionales individualmente, se analizaban y

discutían las respuestas de los EPM, en gran grupo.

Instrumento de recogida de datos

El instrumento de recogida de datos está formado por las tareas profesionales de las sesiones 4 y 5 del módulo de enseñanza "La longitud y su medida en Educación Infantil".

La tarea profesional de la sesión 4 (Tabla 2) tiene como objetivo que los EPM anticipen las características de comprensión que podrían poner de manifiesto los niños (apartados 2 y 3), a partir de una tarea seleccionada por ellos/as (apartado 1), y tomen decisiones para favorecer la progresión del aprendizaje de estos (apartado 4).

Tabla 2.

Tarea profesional de anticipación a resolver por los/las EPM

Selecciona una tarea de la magnitud longitud y su medida para Educación Infantil (libros, proyectos, web, etc.) e indica: 1. Objetivo de aprendizaje de la tarea. 2. Elementos matemáticos necesarios para realizar la tarea 3. ¿Qué características de la comprensión debería mostrar un niño que fuera capaz de resolverla? 4. ¿Qué tarea propondrías a continuación para avanzar en la comprensión de la magnitud longitud y su medida? Diséñala, indica el objetivo de aprendizaje y justifica tu respuesta.

La tarea profesional de la sesión 5 (Figura 1) tiene como objetivo que los EPM interpreten distintas características de la comprensión de la magnitud longitud y su medida puestas de manifiesto por cuatro niños (Mario, Almudena, Luis y Elena) en la interacción de estos con su maestra en una situación de aula (pregunta 2).

Situación de enseñanza-aprendizaje

Alicia es una maestra de infantil de una escuela pública. La edad de sus alumnos se encuentra entre los cinco y seis años. Hace una semana que empezó a introducir la magnitud longitud y su medida. Hoy aprovechando la clase de plástica propone a los niños hacer collares usando diferentes materiales (cuentas de colores y distintos tipos de macarrones) y cordones de varios tamaños (A, B y C):



Una vez que le ha propuesto la actividad, los niños eligen sus cuerdas y accesorios y empiezan a confeccionar los collares. Terminados los collares, Alicia les pregunta a los niños:

Maestra: *¿Quién ha hecho el collar más largo?*

Mario: *He hecho el collar con la cuerda en forma de bastón* [cuerda C] *y he usado 13 macarrones* [ha utilizado macarrones de varios tipos].

Almudena: *Seño, yo he hecho un collar con la cuerda rosa* [cuerda A] *y he usado 15 estrellitas* [las estrellitas están muy separadas]

Luis: *El mío tiene 12 macarrones* [ha utilizado todos del mismo tamaño] *y he cogido la cuerda que tiene forma de ensaimada* [cuerda B], *pero es más largo que el de Mario porque la cuerda es más larga.*

Elena: *Yo también he utilizado la cuerda rosa* [cuerda A] *y he usado 20 estrellitas* [las estrellitas están todas juntas]

Almudena: *luego el más largo de los collares es el de Elena.*

A partir de las respuestas dadas por los niños, Alicia les pregunta:

Maestra: *¿Estáis de acuerdo?*

Mario: *No seño, yo no estoy de acuerdo con Luis, porque el mío tiene más macarrones.*

Preguntas a los estudiantes para maestro:

Pregunta 1. Indica los **elementos matemáticos** que, desde el punto de vista de la maestra, son necesarios para realizar la tarea.

Pregunta 2. ¿En qué **nivel de comprensión** situarías a cada uno de los niños del diálogo? Razona tu respuesta a partir de las características puesta de manifiesto y justifica usando las intervenciones de los niños.

Pregunta 3. Suponiendo que eres Alicia, **propón una tarea** para seguir profundizando en la comprensión de la magnitud longitud y su medida para el niño/a que consideras está en el nivel más bajo y para el que está en el nivel más alto.

Figura 1. Tarea profesional de interpretar el pensamiento de los niños (3-5 años) a resolver por los EPM

Una vez interpretada la comprensión de estos (Mario y Almudena, nivel 1; Luis y Elena,

nivel 4), a partir de los elementos matemáticos implícitos en sus respuestas (pregunta 1), tomen decisiones para favorecer la progresión del aprendizaje de estos (pregunta 3).

Análisis de Datos

Los datos son las respuestas de los EPM a las tareas profesionales propuestas en las sesiones 4 y 5. El análisis cualitativo de estas respuestas se ha realizado en dos fases (Figura 2). En la primera, se analiza el uso que hacen los EPM de la trayectoria de aprendizaje para resolver las dos tareas profesionales. En la segunda, se hace un análisis conjunto del uso que hace de la trayectoria de aprendizaje un mismo EPM en las dos tareas profesionales.

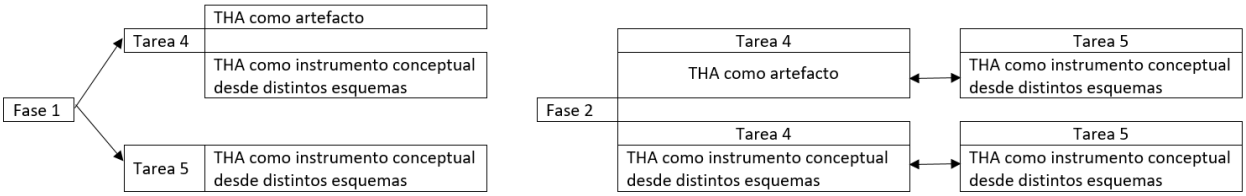


Figura 2. Esquema de análisis

En la primera fase, respecto a la tarea profesional 4 se analiza, en primer lugar, si la tarea seleccionada y el objetivo de aprendizaje, propuesto por los EPM, son coherentes. Este análisis proporcionó dos grupos de EPM: los que seleccionaron tareas con objetivos no coherentes y, en consecuencia, consideraron la trayectoria como un artefacto (G1) y, los que la usaron como un instrumento conceptual al seleccionar una tarea y proponer un objetivo coherente (G2). A continuación, se analizan las respuestas del G2 para identificar los esquemas de acción instrumental que se desarrollan para anticipar la comprensión de los niños (Moreno, Sánchez-Matamoros, Pérez-Tyteca y Valls, 2018). Asimismo, se analizan las respuestas de los EPM a la tarea profesional 5 para ver cómo usan la trayectoria de aprendizaje para interpretar el pensamiento matemático de los niños. Todos los EPM en esta tarea han considerado la trayectoria de aprendizaje como un instrumento conceptual y han desarrollado distintos esquemas.

En la segunda fase, se compara cómo ha usado cada EPM la trayectoria de aprendizaje en las dos tareas profesionales. Los resultados obtenidos se describen en el epígrafe siguiente.

Resultados

Los resultados muestran dos grupos de EPM. Aquellos que no usan la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual para anticipar la comprensión pero sí para interpretar el pensamiento matemático de los niños, y los que la usan como instrumento conceptual tanto para anticipar la comprensión como para interpretar el pensamiento matemático de los niños (Figura 3).

Los 15 EPM que tienen dificultades con la tarea de anticipación, no usaron la información de la trayectoria para establecer un objetivo coherente con la tarea y/o anticipar la comprensión del niño, considerando, la trayectoria como un artefacto. Por el contrario, en la tarea de interpretar el pensamiento matemático de los niños, fueron capaces de usar la trayectoria como instrumento conceptual, construyendo diferentes esquemas de acción instrumental: seis de ellos construyeron el primer esquema de acción instrumental en magnitud y/o medida; siete coordinaron ambos esquemas de acción instrumental para magnitud o medida y, dos instrumentaron la trayectoria (Figura 3).

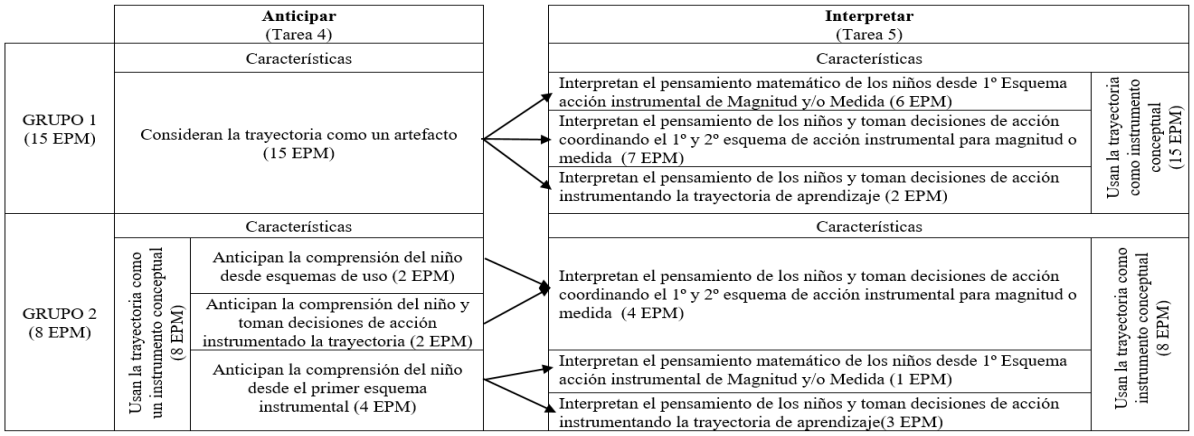


Figura 3. Características del uso de la trayectoria de aprendizaje en las tareas de anticipar e interpretar

Por ejemplo, Nerea (E1-2), tal como se muestra en la tabla 3, seleccionó una tarea sobre capacidad que no se correspondía con la magnitud longitud. Dos de los tres objetivos planteados hacen referencia a la capacidad y el tercero no es coherente con la tarea. Nerea toma como artefacto la trayectoria de aprendizaje al considerar que en la resolución de la tarea están implícitos los elementos de transitividad y universalidad de la medida que no son necesarios en esta. Por ello ha anticipado unas características de la comprensión inapropiadas y ha propuesto una nueva tarea que no favorece la progresión en el aprendizaje de los niños.

Tabla 3

Respuesta de Nerea a la tarea de anticipación

Tarea seleccionada	**Objetivos establecidos**
Presentar tres cajas de distintos tamaños y tres pelotas cuyo tamaño se corresponda con el de las cajas. Se pide a los niños que introduzcan las pelotas en las cajas.	• Identificar los conceptos de pequeño, mediano y grande • Clasificar las pelotas por tamaño • Experimentar con la medida
Elementos Matemáticos implícitos	**Características de la comprensión anticipada**
De Magnitud: Transitividad puesto que los niños y niñas observan que la pelota pequeña es menor que la mediana y esta menor que la grande, consecuentemente la pequeña también menor que la grande. De Medida: Universalidad de la unidad de medida ya que cualquier niño o niña obtendrá el mismo resultado en cuanto a introducir la pelota correcta en la única caja posible	Deben realizar comparaciones directas, comparando las cajas y las pelotas para darse cuenta que son de distinto tamaño. También adquirir la propiedad transitiva lo que le permitirá hacer ordenaciones de más de dos objetos. (Transición del nivel 2 al 3)
Nueva tarea para progresar	
Coger objetos cotidianos de la clase y usando las mismas cajas, introducir esos objetos en la correspondiente caja según su tamaño, de esta forma conseguirán realizar comparaciones indirectas utilizando las pelotas como intermediario.	

Sin embargo, Nerea al resolver la tarea de interpretar el pensamiento matemático de los niños usó la trayectoria como instrumento conceptual desde el primer esquema de acción instrumental para magnitud (Figura 3), es decir, usó el modelo de progresión de la trayectoria sólo para interpretar el pensamiento matemático de Mario y Almudena, que los sitúa en el Nivel 1 de comprensión al no darse cuenta del tamaño de las cuerdas (conservación de la magnitud).

Por otro lado, Nerea no fue capaz de proponer una nueva tarea para que Mario y Almudena progresaran en su aprendizaje (Tabla 4), ni tampoco interpretó el pensamiento matemático de Luis y Elena al no considerar los elementos relativos a la medida.

Tabla 4

Respuesta de Nerea a la tarea de interpretar

Compresión interpretada de los alumnos	**Nueva tarea para progresar de nivel**
• A Mario lo situaría en el nivel 1, no diferencia el tamaño de la cuerda, toma como base el número de macarrones sin tener en cuenta el tamaño. Dice que su collar es más grande que el de Luis por tener mayor número de macarrones, cuando la cuerda de Luis es de tamaño mayor. Mario no compara las cuerdas, observa la cantidad de macarrones. • Almudena parece encontrarse, también en el Nivel 1, se centra en el número de estrellas sin comparar el tamaño de las cuerdas. • Luis, podría estar en el nivel 3 ya que comparar y sabe que su cuerda es más larga que la de Mario y además parece que lo asegure con el número de macarrones hace una observación indirecta como si mediera con el número de macarrones del mismo tamaño. • Elena, se encuentra en el nivel 3, sabe que es más larga y usa también una observación o comparación indirecta usando las estrellitas y poniéndolas todas juntas.	• Para Mario y Almudena Medir las mesas del aula con cuerdas del mismo tamaño o diferente comparando las medidas de las mesas. • Para Luis y Elena

Los ocho EPM que usaron la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual, tanto para anticipar la comprensión como para interpretar el pensamiento matemático de los niños, desarrollaron distintos esquemas. Dos de ellos anticiparon la comprensión desde esquemas de uso y coordinaron ambos esquemas de acción instrumental para magnitud o medida al interpretar el pensamiento de los niños. Uno desarrolló el primer esquema de acción instrumental tanto para anticipar la comprensión como para interpretar el pensamiento de los niños. Tres anticiparon la comprensión desde el primer esquema de acción instrumental e instrumentaron la trayectoria al interpretar el pensamiento de los niños. Y, por último, solo dos instrumentaron la trayectoria de aprendizaje tanto al anticipar la comprensión como al interpretar el pensamiento de los niños (Figura 3).

Conclusiones

Los resultados muestran la dificultad que han tenido la mayoría de los EPM (15 de 23 EPM) para anticipar la comprensión de los niños al no proponer objetivos de aprendizaje coherentes con las tareas seleccionadas lo que supone un obstáculo para anticipar dicha comprensión. Este hecho tiene importancia para el futuro profesional de los EPM ya que de tratarse de una situación real de aula, las tareas propuestas no favorecerían el aprendizaje de los niños. Convendría reforzar el análisis de tareas desde los elementos matemáticos implícitos en ellas y los aprendizajes que de estos se desea lograr. Sin embargo, todos los EPM han usado la trayectoria de aprendizaje como instrumento conceptual para interpretar el pensamiento de los niños. Esta diferencia puede deberse a que la anticipación implica imaginar un contexto de enseñanza y a partir de este, anticipar una comprensión de los niños usando la trayectoria de aprendizaje, mientras que en la actividad de interpretar el pensamiento matemático de los niños ya se dispone de este contexto de enseñanza en el que sólo deben identificar evidencias de la comprensión de los niños y relacionarlas con la trayectoria de aprendizaje.

En general la mayoría de los EPM han tenido dificultades para proponer tareas que favorecieran la progresión de los niños desde el nivel de comprensión en el que se encontraban. El hecho de que estas nuevas tareas siguieran una progresión curricular y no cognitiva, podría deberse a la dificultad de los EPM en relacionar el conocimiento matemático del concepto magnitud y medida con el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los niños lo que resulta coherente con lo señalado en otras investigaciones (Choy, 2016; Santagata y Yeh, 2016; Wilson, Stanjn, Edgington y Myers 2015).

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido ayuda de los proyectos EDU2017-87411-R, MINECO/ FEDER, España, y Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana.

Referencias y bibliografía

Choy, B.H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal, 28*, 421-440.

Drijvers, P. & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, *2*, 363-392.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Llinares, S., Fernández, C., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education,* 2016, **12**(8), 2155-2170.

Norton, A., McCloskey, A., & Hudson, R.A. (2011). Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(4), 305-325.

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Callejo, M.L., Pérez-Tyteca, P., & Valls, J. (2017). Desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente": un estudio de caso. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 457-466). Zaragoza: SEIEM.

Sanchez-Matamoros, G., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P., & Callejo, M.L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME, 21*(2), 203-228.

Santagata, R., & Yeh, C. (2016). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginning teachers' competence. *ZDM, 48*(1-2), 153-165.

Sarama J. & Clements D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. London and New York: Routledge.

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM-Mathematics Education, 48,* 1–27.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, *10*(1), 77.

Wilson, P.H., Sztajn, P., Edgington, C., & Myers, M. (2015). Teachers' use of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education, 66*(3), 227-244.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El proceso de derivación en GeoGebra: un estudio sobre el conocimiento matemático de futuros profesores

Cesar **Martínez** Hernández
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima
México
cmartinez7@ucol.mx
Yuliana Nayeli **Marmolejo** Rebolledo
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima
México
yuliana_marmolejo@ucol.mx
David Sadrac **Parra** Soto
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima
México
david.parrasoto08@gmail.com

Resumen

La investigación aborda la problemática del uso de herramientas tecnológicas y la formación de profesores en torno a su Conocimiento Matemático de la derivación de funciones algebraicas; en particular, sobre las técnicas de derivación requeridas y de los procesos algebraicos involucrados en éstas. La investigación, de corte cualitativo, se sustentó en los elementos teóricos del modelo llamado Conocimiento Matemático para la Enseñanza, la Aproximación Instrumental (AI) y los Registros Semióticos de Representación. Con base en el tipo de funciones propuestas a los futuros profesores, el contraste de sus técnicas (en el sentido de la AI) de papel y lápiz con el uso de GeoGebra, produjo tres tipos de respuestas en la población participante: respuestas equivalentes en ambos ambientes, respuestas incorrectas en el ambiente de papel y lápiz, y creencia de que sus respuestas de papel y lápiz son correctas.

Palabras clave: formación de profesores, conocimiento matemático, uso de tecnología

Antecedentes

Uno de los intereses de la investigación en Educación Matemática versa en torno al Conocimiento Matemático en alumnos del nivel superior, en particular sobre conceptos del cálculo diferencial; diversas investigaciones dan cuenta de ello (e.g., Díaz, 2009; Flores, 2013, entre otras). Es decir, el aprendizaje del cálculo, mediante distintos medios, es una problemática

reconocida en la investigación. En este reporte, se aborda dicha problemática con futuros profesores respecto al proceso de derivación de funciones algebraicas en ambiente GeoGebra.

Una de estas variables es la formación y profesionalización de los profesores de matemáticas; por ejemplo, respecto a los tipos de conocimiento que deben tener; entre otros, el Conocimiento Común del Contenido Matemático (Ball, Thames y Phelps, 2008), el cual subraya el conocimiento del contenido en la parte especifica de lo matemático. Respecto al conocimiento matemático que deben desarrollar los futuros profesores, para grados preuniversitarios, una de las principales problemáticas se refiere a su aprendizaje de distintos conceptos del cálculo diferencial, por ejemplo, el de función, límites, derivadas, etc. (Flores, 2013).

Sobre el concepto de derivada, varias investigaciones muestran dificultades que presentan los estudiantes del nivel universitario en su aprendizaje. Por ejemplo, Ubuz (2002) menciona diferentes concepciones erróneas que manifiestan los alumnos, entre otras, no diferenciar la derivada puntual con la función derivada; o bien, confundir la ecuación de la recta tangente con la función derivada. Incluso hay problemáticas asociadas a los procesos algebraicos involucrados. En este sentido, es conocida la problemática sobre las dificultades en el aprendizaje del cálculo que estudiantes del nivel superior presentan sobre el tipo de errores algebraicos que cometen en el proceso de derivación (Díaz, 2009).

En el caso de la derivada, la cual es un límite, los procesos de derivación y el álgebra involucrada en éstos sólo se discuten en el registro algebraico y se deja de lado la discusión con otros tipos de registro. Lo anterior puede deberse a que usualmente se trabaja en ambiente de papel y lápiz y se hace énfasis en el registro algebraico. De esta manera, una vía que puede incidir en potenciar el aprendizaje es utilizar recursos tecnológicos que permitan el trabajo matemático mediante distintos registros. Duval (2006) dice que la originalidad de la actividad matemática está en movilizar parcialmente, al menos dos registros de representación al mismo tiempo, o la posibilidad de cambiar de un registro a otro todo el tiempo. De la misma manera en que Presmeg (1997) se menciona la importancia del uso de representaciones para el caso de las funciones, lo es para el concepto de derivada. Más aún, para los procesos de derivación y los resultados que se obtienen con éstos. De aquí la importancia de utilizar herramientas tecnológicas que permitan el trabajo con diferentes sistemas de representación.

En cuanto a los beneficios, la incorporación de tecnología como un medio alternativo para promover aprendizajes sobre el cálculo de derivadas (y de los procesos algebraicos involucrados) puede ser pertinente si se explotan al menos dos registros de representación como lo indica Duval (2004). En este mismo sentido, de acuerdo con Lagrange (2005), las capacidades numéricas, gráficas, simbólicas y de programación de las nuevas herramientas tecnológicas, juegan un papel importante en el futuro de la enseñanza de las matemáticas, no sólo como ayuda pedagógica sino como un vehículo para nuevas aproximaciones.

De acuerdo con los antecedentes planteados en esta sección, el problema de investigación que se reporta consistió en analizar el desarrollo del Conocimiento Matemático sobre la derivación de funciones algebraicas de futuros profesores de matemáticas cuando utilizan GeoGebra. Específicamente se plantea la siguiente pregunta: ¿Qué reflexiones emergen en los futuros profesores de matemáticas cuando contrastan técnicas de papel y lápiz y la técnica GeoGebra en la derivación de funciones algebraicas?

Referentes teóricos

Los elementos teóricos que sustentaron la investigación, tanto para el diseño de las Actividades (tareas) para la recopilación de datos como para su análisis fueron los siguientes. En primer lugar, se tomó de referencia al modelo sobre los tipos de conocimiento del profesor de matemáticas llamado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) (Ball, et al. 2008). En tanto que el estudio se enfoca en el Conocimiento Matemático de los futuros profesores, esta investigación sólo se enfocó en uno de los seis elementos que dicho modelo refiere: el conocimiento común del contenido matemático.

De acuerdo con Ball et al. (2008), el MKT se compone de dos grandes dominios; los cuales, a su vez se integran de tres tipos de conocimiento para la enseñanza de las matemáticas. La primera componente, Ball y sus colaboradores la llaman Subject Matter Knowledge, es decir conocimiento sobre el área específica, en este caso el de las matemáticas, y la primera componente de éstas tres la identifican como *Common Content Knowledge* (Conocimiento Común del Contenido matemático, CCK). Éste se refiere al conocimiento sobre las matemáticas que posee cualquier persona relacionada con esta área, por lo que no es propio para la enseñanza, pero es fundamental. Los otros componentes de este modelo son el conocimiento especializado, el conocimiento en el horizonte, conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimeinto del contenido y la enseñanza y el conocimiento del contenido y el currículum. Como ya se mencionó, en este estudio sólo se tomó en cuenta el primero de los seis componentes.

En segundo lugar, dado que los participantes trabajarían tanto en un ambiente de papel y lápiz como en GeoGebra para derivar funciones propuestas en las Actividades, otros de los elementos de la investigación provienen de la llamada Aproximación Instrumental del uso de herramientas tecnológicas (AI), en su vertiente antropológica (Artigue, 2002; Lagrange, 2003; Lagrange, 2005). En esta perspectiva de la construcción del conocimiento matemático, tres conceptos son importantes. El primero de ellos es el de Tarea, el cual se define como el problema a resolver. El segundo es el de Técnica, el cual se refiere a la forma o maneras de resolver la Tarea dada; por último, la Teoría, refiere a la explicación o justificación que sustenta la Técnica.

Dentro de la aproximación instrumental, cuando se utilizan herramientas tecnológicas que permiten resolver cierta tarea, por ejemplo los manipuladores simbólicos, para resolver, desarrollar, factorizar, etc. se consideran como una de las maneras en que el individuo puede resolver un problema. Es decir, las técnicas "tecnológicas" (como el uso de comandos) se consideran formas de resolver ciertas tareas. Usualmente, a las técnicas sólo se les confiere un valor pragmático; sin embargo, Artigue y sus colegas mostraron que también poseen un valor epistémico, es decir, permite una comprensión de los objetos matemáticos que involucra la Tarea, particularmente durante la construcción de las Técnicas. En este sentido, las Técnicas, de acuerdo con Lagrange (2005, p. 116) pueden usarse para distinguir y reorganizar las Tareas, si existen diferentes formas de resolver una Tarea (i.e. diferentes Técnicas). Así, cuando se utiliza alguna herramienta tecnológica que permite resolver cierta Tarea, se está considerando como una forma más que el usuario tiene para abordar el problema a resolver. Además, las Técnicas son el objeto de reflexión conceptual cuando son comparadas con otras y cuando su consistencia es discutida (Lagrange, 2003, p. 271).

Finalmente, dado que los alumnos trabajarían en al menos dos registros de representación, algebraico y gráfico, un tercer elemento teórico fue considerado: los Registros de Representación Semióticos (RRS) (Duval, 2006). Como es ampliamente conocido en el medio de la

investigación sobre representaciones semióticas, de acuerdo con Duval (1999), el pensamiento matemático requiere activar en paralelo dos o tres RRS. Por lo tanto, para Duval, la coordinación de registros no es la consecuencia de entender las matemáticas, al contrario, es una condición necesaria.

Método

Los elementos metodológicos tomados en cuentas para llevar a cabo la investigación fueron los siguientes.

Participantes

Los futuros profesores participantes en este estudio fueron 14 estudiantes (E1, E2,…, E14, en adelante) de una Universidad Pública de México, quienes al momento de la toma de datos cursaban el 8º semestre unos, y el 6º semestre, otros, de una licenciatura en educación media especializada en matemáticas, enrolados en un curso extracurricular sobre el uso de GeoGebra. Tenían además, la experiencia de estar utilizando sistemáticamente este software de Geometría dinámica en algunos de sus cursos previos, durante al menos un año. Cada uno de los estudiantes trabajo de manera individual, previo a una discusión grupal de sus respuestas. Cada uno de ellos contó con una computadora para utilizar GeoGebra cuando fuera necesario, de acuerdo con las actividades.

Diseño de Actividades (Tareas)

Para el acopio de datos, se diseñaron tres actividades, cada una de ellas con una Tarea principal: Derivar una función dada. En términos de la Aproximación instrumental, las tres actividades incluyen preguntas técnicas y teóricas, además de promover un trabajo tanto en el registro algebraico, tanto en papel y lápiz como en GeoGebra, y trabajo en el registro gráfico, sólo en GeoGebra. Para identificar las diferentes formas que los alumnos derivan ciertas funciones y la explicación que proveen, las actividades incluyen las siguientes funciones:

- Actividad 1: involucra derivar $f(x) = (2x-3)^2$, $g(x) = 4x^2 - 12x + 9$ y $h(x) = 4x^2 - 9$.
- Actividad 2: incluye la derivación de $f(x) = x^3(5x^2 - 3) + x$, $g(x) = 5x^5 - 3x^3 + x$ y $h(x) = 5x^6 - 3x^3$.
- Actividad 3: se propone derivar $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $g(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{8x+1}}$ y $h(x) = (\frac{2x-3}{8x+1})^{\frac{1}{2}}$.

Las actividades incluyen tres momentos de trabajo: primero involucra derivar sólo con papel y lápiz en el registro algebraico. Segundo, involucra la derivación en GeoGebra y el uso de los registros algebraico y gráfico. El tercer momento incluye una serie de preguntas de reflexión sobre sus respuestas en ambos ambientes.

Fuentes de información

Los datos obtenidos provienen de las siguientes fuentes de información: hojas de trabajo de cada estudiante, archivos GeoGebra generados por cada uno de ellos, videograbación de las sesiones (una por cada actividad) y notas de campo del investigador. Dichas fuentes sirvieron para poder llevar una triangulación de datos.

Resultados

De acuerdo con los datos recabados, para las dos primeras actividades, ninguno de los participantes tuvo mayores problemas para resolver de manera correcta la tarea propuesta

(derivar las funciones), ni para interpretar los resultados que se obtienen en GeoGebra. Sin embargo, hubo tres tipos de respuesta, para la tercera actividad, producto de sus reflexiones del trabajo con GeoGebra que emergieron en los alumnos, y que son representativos para cuando sus Técnicas y Teoría son, débiles en algunos casos, y sólidos en otros. El uso de GeoGebra como Técnica para resolver la Actividad 3, les permite obtener las funciones derivadas (Figura 1).

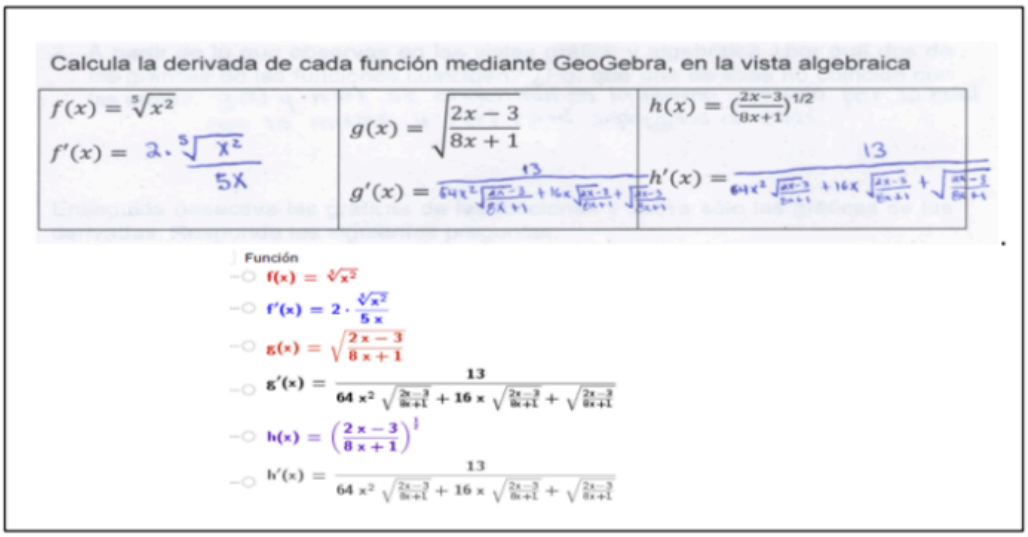


Figura 1. Resultados obtenidos con GeoGebra por E7

Como se observa en la Figura 1, GeoGebra les permite resolver la Tarea y obtener funciones derivadas en el mismo registro algebraico, pero con representaciones equivalentes. Es decir, se trata de respuestas que no concuerdan con las que ellos obtienen con papel-y- lápiz, se trata de representaciones equivalentes, en el mismo registro. Este tipo de respuestas, puede ser importante para promover reflexiones de carácter teórico, tal como lo señalan Kieran y Drijvers (2006). Para aquellos participantes que se muestran seguros de sus respuestas de papel-y-lápiz, esto no parece causarles confusión alguna. Sin embargo quienes no están seguros de sus primeras respuestas sí les causa ciertas dudas sobre sus procedimientos de papel-y-lápiz. Como se muestra a continuación. Las respuestas de los participantes respecto a su trabajo de papel-y-lápiz y los que obtienen con GeoGebra pueden clasificarse de la siguiente manera:

1) sus resultados son correctos pero no coinciden con los de GeoGebra.
2) sus resultados son incorrectos y no coinciden con los obtenidos en GeoGebra.
3) creencia de que sus respuestas son correctas aunque no coincidan con las de GeoGebra.

Las siguientes Figuras 2, 3 y 4 muestran cada uno de estos casos, respectivamente. Para el primero, se muestra el trabajo de E5 (Figura 2), donde si bien comete errores de notación sus respuestas finales son correctas.

El segundo caso, donde las respuestas son incorrectas y no coinciden con GeoGebra, es posible que uno de los factores que influyó en ello y por los cuales no coincidieron sus derivadas fue que el tiempo que tuvieron para terminar esta tarea, o bien que el futuro profesor no contaba con el conocimiento suficiente para calcular las derivadas en papel-y-lápiz. La Figura 3 (Trabajo de E1) muestra este ejemplo.

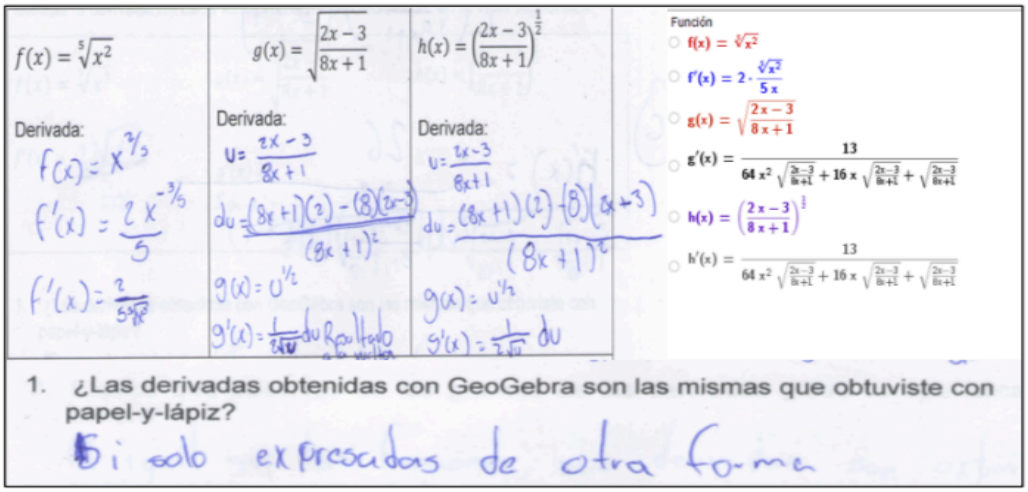


Figura 2. Resultados son correctos pero no coinciden con los de GeoGebra.

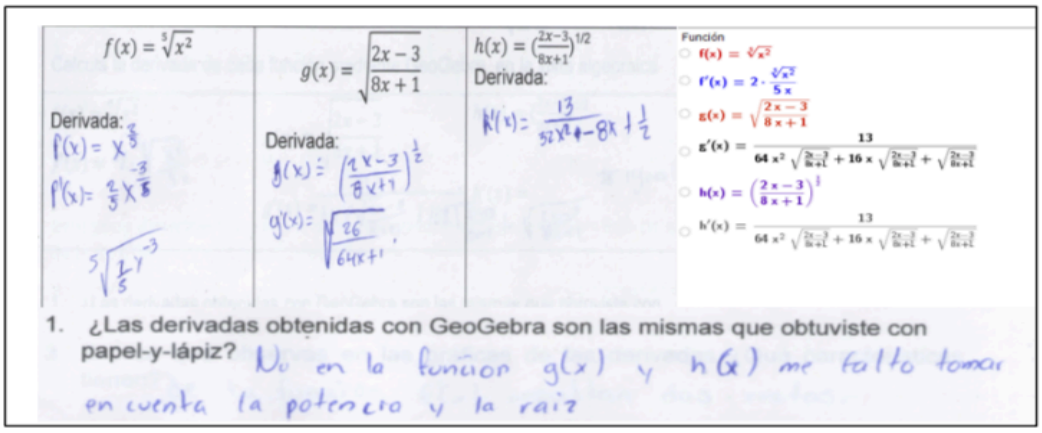


Figura 3. Resultados incorrectos y no coinciden con los obtenidos en GeoGebra.

En el tercer caso (Figura 4) muestra el trabajo de E9, por la respuesta del participante, él cree que sus respuestas están correctas al observar que en GeoGebra dos de las derivadas son iguales; al comparar con sus respuestas con papel-y-lápiz él también obtiene dos derivadas iguales (que difieren con las dadas por GeoGebra), a partir de este hecho, el participante argumenta que sólo le falta simplificar la derivada, para tenerlas en la misma forma que GeoGebra las expresa. Es decir, piensa que sus respuestas de papel y lápiz sí están correctas sólo que escritas en una representación algebraica diferente o bien que su proceso no está completo.

Como puede observarse, el futuro profesor no está del todo seguro si sus respuestas están correctas; cree que sí, ya que en sus respuestas dos de éstas coinciden. Es a partir de esta característica de coincidencia entre dos respuestas (que también se observa en GeoGebra) lo que lo lleva a pensar que sólo le faltó simplificar su resultado, para que fuera igual al de GeoGebra. La Tabla 1, muestra un resumen de lo expuesto en esta sección.

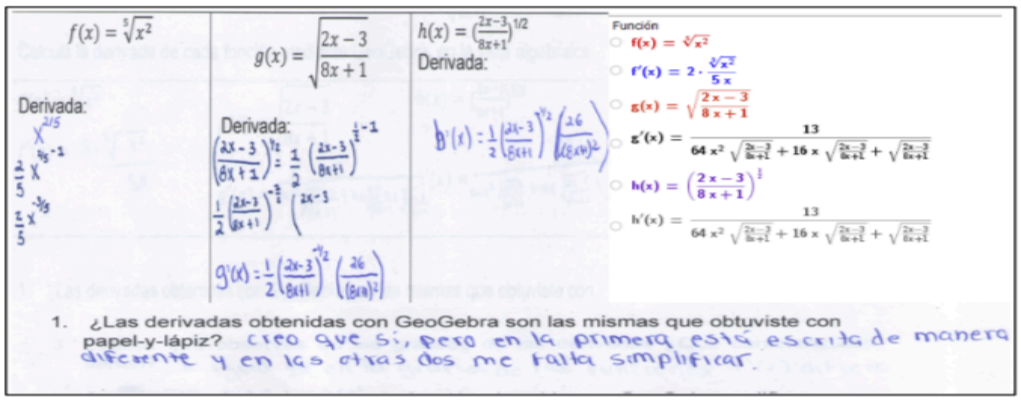


Figura 4. Creencia de respuestas correctas aunque no coincidan con las de GeoGebra.

Tabla 1

Tipos de respuestas al comparar resultados de papel y lápiz con resultados de GeoGebra

Tipo	Frecuencia
Respuestas de papel-y-lápiz correctas pero no coincide con GeoGebra	4
Respuestas de papel-y-lápiz incorrectas	6
Creencia de que sus respuestas de papel-y-lápiz son correctas aunque no coinciden con GeoGebra	4

Fuente: elaboración propia.

La diferencia observable respecto a las Actividades 1 y 2, es que en la Actividad 3 el trabajo con GeoGebra, para varios participantes les permite identificar que sus procedimientos son incorrectos; aunque no son capaces de corregirlos. Se dan cuenta que tienen errores al resolver sus procedimiento a papel-y-lápiz haciendo alusión que debe a un bajo conocimiento y argumentan que necesita repasar algunos procedimientos algebraicos.

Conclusiones

Hasta este momento de la investigación, es posible decir, que para algunas funciones, derivarlas (actividades 1 y 2), no les causó ningún problema; en este sentido, el uso de GeoGebra, no promueve mayores reflexiones. Sin embargo, no fue el caso de actividad 3, donde si hubo discrepancias en los resultados que obtiene algunos estudiantes.

Fueron dos el tipo de reflexiones que emergieron. La primera respecto a una identificación correcta de los resultados (correctos o incorrectos) que obtienen mediante las dos técnicas (papel-y-lápiz y GeoGebra); la segunda, una inconsistencia en la intepretación de los resultados que obtienen, por un lado con papel y lápiz, por otro con GeoGebra: identificarlos como equivalentes cuando no lo son. Respecto a esto, es importante mencionar que ninguno de los participantes utilizó el registro gráfico para justificar la incongruencia o no de las respuestas obtenidas con papel y lápiz a partir de observar las gráficas que en automático el software GeoGebra ofrece para las funciones derivadas. Fue necesaria la intervención del investigador para promover una mayor reflexión de su trabajo, a partir de contrastar los resultados y su consistencia en ambos registros.

Desde el punto de vista de la aproximación instrumental, el uso de GeoGebra, si bien es entendida como una técnica (que utilizaron correctamente) para derivar funciones, no fue

incorporada como una herramienta que permite una discusión a nivel teórico, cuando las funciones son "más complejas" de derivar para el usuario. Este resultado concuerda con lo reportado en otros estudios (e.g., Martínez y Ulloa, 2017; Sinclair y Robutti, 2013) acerca de que es necesario mayor tiempo y ayuda por parte del profesor para desarrollar en el usuario de la tecnología la llamada génesis instrumental. En otras palabras, para promover una discusión más efectiva de sus técnicas, con el objetivo de que alcancen un desarrollo teórico.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245-274.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Díaz, J. L. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El cálculo y su enseñanza*, *1*, 91-97.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PME-NA.

Duval, R. (2004). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143–168.

Flores, A. (2013). Ayudando a futuros profesores a mejorar la comprensión conceptual del cálculo. En A. Cuevas, F. Pluvinage, et al. (Eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral* (pp. 43-84). Mexico: Pearson.

Kieran, C. y Drijvers, P. (2006). Th eco-emergence of machine Techniques, paper-and- pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*, 205-263.

Lagrange, J-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J.T. Fey (Ed.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269–283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lagrange, J-B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113- 135). New York: Springer.

Martínez C. y Ulloa, R. (2017). Dynamic geometry software and tracing tangents in the context of the mean value theorem. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, *24*(2), 75-82.

Sinclair, N. Y Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of Dynamic Geometry. En M. A. Clements; J. A. Bishop; C. Keitel; J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (571-596). NY: Springer.

Ubuz, B. (2002). Development of calculus concepts through a computer base learning environment. En I. Vakalis (Ed.), *Proceedings of the 2 International Conference on the Teaching of Mathematics* (pp.1-10). Hersonissos, Creta. Grecia : John Wiley & Sons Inc.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La wiki como recurso educativo en el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas en la formación de docentes de Matemática

Luis Armando **Hernández** Solís
Universidad Estatal A Distancia
Costa Rica
lhernandez@uned.ac.cr
Cristian **Quesada** Fernández
Universidad Estatal A Distancia
Costa Rica
cquesadaf@uned.ac.cr

Resumen

Este trabajo muestra los resultados de un estudio apoyado en el modelo de *Investigación – acción* cuyo propósito principal fue evaluar el uso de la wiki como recurso educativo en el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas en un ambiente virtual de aprendizaje en la asignatura de *Historia y filosofía de la Matemática* de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica. Los resultados encontrados (evidencia consignada en el aula virtual, instrumentos de evaluación y percepción), respaldan que el uso de esta herramienta contribuyó al logro de los objetivos educativos de la asignatura así como a potenciar capacidades en el estudiante como el trabajo en equipo, el compromiso y actitudes proactivas para la construcción conjunta de ideas. Además, se concluye que tanto la actividad, como la metodología de investigación pueden ser un insumo para procesos de mejora de la calidad educativa en cursos similares.

Palabras clave: Habilidades socio-comunicativas, trabajo colaborativo, herramienta wiki, educación matemática, educación a distancia; historia de la matemática.

Introducción

La asignatura *Historia y Filosofía de la Matemática* forma parte del plan de estudios de la carrera de Enseñanza de la Matemática impartida por la Universidad Estatal a Distancia (UNED) de Costa Rica. Los primeros años que se ofreció la asignatura fue bajo un modelo tradicional de educación a distancia: al estudiante se le entregaba el material de estudio, asistía a tutorías presenciales (no obligatorias) y como parte de la evaluación del curso realizaba dos tareas y una prueba comprensiva (totalidad de temas). Como parte de las continuas acciones de mejora de la

carrera, que derivaron en un rediseño del plan de estudios en el 2013, el curso cambia de modalidad y se ofrece de manera 100% en línea mediante la plataforma Moodle.

Lo anterior permitió que se emplearan otras metodologías y recursos para su mediación pedagógica y acompañamiento estudiantil: videos, materiales complementarios multimedia, foros de consulta, entre otros. Además, la manera de evaluar en el curso también cambió: se eliminó la prueba comprensiva presencial y se empezaron a realizar en línea pruebas cortas y foros académicos.

Dado que en la actualidad es indispensable desarrollar habilidades socio-comunicativas y colaborativas que le permitan al futuro docente asumir tareas grupales en los diferentes contextos educativos, surge la interrogante: ¿Cómo propiciar el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas en los estudiantes de un curso que es totalmente virtual?

Con el fin de responder a esta interrogante mediante el desarrollo de ideas en torno a la evolución histórica y filosófica de las Matemáticas, en el primer cuatrimestre de 2018 se decide implementar la herramienta wiki para la elaboración del proyecto final. De esta manera, el propósito del estudio fue evaluar el uso de la herramienta wiki como recurso educativo en el logro de los objetivos educativos del curso y en el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas en un ambiente virtual de aprendizaje en la asignatura de *Historia y filosofía de la Matemática*.

Marco referencial

Para Ruiz (2003) el estudio de la historia de la Matemática debe ir más allá de la simple transmisión de verdades absolutas y mecanismos de aprehensión. Ruiz (2003, p. 574) señala "(…) la historia se vuelve esencial cuando se establece un cierto constructivismo socio empírico". Bajo la premisa de que la historia se origina a partir de esfuerzos y contribuciones sociales (aportes parciales), se consideró que la interacción y la construcción colectiva del conocimiento era un aspecto fundamental a potenciar en este curso.

Según afirma Sagol (2011, p. 26) "un trabajo colaborativo es una actividad sostenida por un grupo de personas que realizan diferentes tareas con un objetivo común que depende de la acción de todas ellas. Cada uno es responsable por el grupo y el objetivo se logra a partir de la interacción grupal". Diversos autores mencionan la importancia del trabajo colaborativo en la formación de los estudiantes, especialmente en las ventajas cognitivas que se obtienen del intercambio de ideas y el aporte de la experiencia de vida de cada participante; este trabajo colaborativo no se centra específicamente en el producto académico sino en buscar la mejora en las relaciones sociales, para lo cual es pertinente el analizar tanto la interacción docente – alumno como alumno – alumno. (Slavin, 1993; Serrano y Calvo, 1994, citados por Villasana y Dorrego, 2010).

En relación a los elementos básicos para propiciar el aprendizaje colaborativo, Lucero (2013) destaca la interdependencia positiva, la cual se refiere a la relación que establezca el grupo como distribución de tareas, roles y metas. Además, la interacción producto de la comunicación y la manera en que colaboren para cumplir el objetivo propuesto, común a todos; también hace referencia al desarrollo de habilidades personales y de grupo como: escucha, participación, liderazgo, coordinación de actividades, seguimiento y evaluación.

Por su parte, Villasana y Dorego (2010) destacan la importancia de las habilidades sociales que demuestre un individuo en el entorno en que se desenvuelva. Al respecto indican que

> En el ámbito educativo, con frecuencia estas habilidades no son consideradas significativas a la hora de diseñar e implementar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, sin embargo éstas componen elementos esenciales que deben ser tomados en cuenta para garantizar procesos efectivos que además coadyuven al crecimiento personal de los estudiantes. (p. 46)

Los entornos virtuales de aprendizaje se convierten también en un espacio potencial de interacción y colaboración. Según Villasana y Dorrego (2010), este tipo de entornos permiten promover "el trabajo en grupo, promover el aprendizaje activo, crear comunidades de aprendizaje […] y hacer los roles tradicionales del proceso de enseñanza/aprendizaje más fluidos." (p. 52).

En esta línea de pensamiento, autores como Ruiz y Galindo (s.f.) destacan que en todo proceso comunicativo virtual deben de repensarse la manera en que se dan las interacciones y relaciones interpersonales, de modo que las mismas tiendan a ser más horizontales y desestructuradas, esto como consecuencia de la misma naturaleza y exigencia de las relaciones sociales en ambientes de aprendizaje virtual.

Al implementar actividades de trabajo colaborativo en ambientes virtuales de aprendizaje, Mora y Hopper (2016) se refieren a cambios en el rol docente y aspectos a considerar en la elaboración de materiales, actividades, instrucciones, entre otros: apertura y flexibilidad del proceso educativo, aprendizaje autogestionado, espacios para la reflexión, gestionar ambientes de motivación y evaluación continua del proceso de aprendizaje. Entre las ventajas del aprendizaje colaborativo, Mora y Hopper (2016) destacan el promover la organización, el autoaprendizaje y las habilidades de comunicación; entre sus desventajas, hacen referencia a la dependencia de los aportes de los demás individuos y la dificultad para tomar acuerdos.

Entre las principales herramientas que promueven el trabajo colaborativo en ambientes virtuales, está la wiki. Una wiki es un espacio virtual (abierto o dentro de un entorno de aprendizaje) en el cual puede editarse contenido por diferentes usuarios, agregar enlaces a sitios, imágenes, videos, entre otros elementos. Tal y como menciona Area citado por Mora (2012) las wikis constituyen un recurso educativo valioso para el docente ya que las mismas registran el historial de la construcción de un documento, por lo cual resulta factible brindar el seguimiento en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, tanto de manera individual como grupal.

De acuerdo a Ruiz, Sánchez y Palomo (citados por Mora, 2012) entre las ventajas de las wikis se encuentran, que la página se escribe y modifica de forma rápida, la interfaz es fácil de navegar y se maneja de manera intuitiva; además permite un uso colectivo, dado el carácter abierto de sus contenidos. Asimismo, la curva de aprendizaje para su uso es baja, ya que prácticamente no se requiere de un conocimiento de ningún tipo. En esta línea, Montenegro y Pujol (2009) consideran que el uso de wiki mejora la experiencia docente en el sentido de visualización y seguimiento del proceso, especificidad de la retroalimentación, reducción linealidad profesor – estudiante. Además, desde el punto de vista del estudiante, el uso de wiki permite flexibilidad horaria, tarea orientada al resultado, retroalimentación y mejora de la dinámica grupal.

Aunque las wikis presentan una gran cantidad de bondades, existen elementos que se deben considerar al utilizarla como recurso educativo. Villanueva (2009) se refiere a ciertos aspectos que pueden darse al utilizar la wiki por parte de los estudiantes, como la falta de contribución regular, falta de contribuciones originales, uso deficiente de la bibliografía y pobre estructuración del contenido. Por lo anterior, se recomienda indicar criterios claros en la rúbrica que acompañe el producto solicitado, así como la inclusión de una coevaluación para que el equipo pueda evaluarse a sí mismo.

En suma, se considera que si bien la temática del desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas ha sido ampliamente discutida en diversos estudios, en su mayoría, ellos hacen mención al modelo de educación presencial tradicional. Por tanto, resulta pertinente explorar recursos (como la wiki) y metodologías que propicien el desarrollo de estas habilidades en un modelo de educación a distancia, en particular en entornos virtuales de aprendizaje.

Metodología

Para dar respuesta a la interrogante planteada se adopta el modelo Investigación – Acción de John Elliot, el cual se define como "un estudio de una situación social con el fin de mejorar la calidad de la acción dentro de la misma" (Elliot, 1993, citado por Latorre, 2003). Es decir, el propósito no solo radica en estudiar el problema sino en realizar acciones que van encaminadas a enfrentarlo en la práctica.

Se opta por este modelo debido a que los cursos de la UNED están en constante evaluación, análisis y rediseño; esto hace que la práctica educativa se convierta en un proceso autoreflexivo en donde la teoría y la práctica se deben articular de forma dinámica. Aquí la Investigación – Acción conecta de forma natural con los mecanismos de mejora de la calidad educativa en la Institución. Respecto a esto, Latorre (2003) señala:

> La enseñanza deja de ser una técnica, un saber aplicar la teoría, para constituirse en un proceso reflexivo sobre la propia practica que lleva una mayor comprensión de las prácticas y contextos institucionales. (p.9)

Según este enfoque metodológico existen tres momentos o etapas: diseño del plan, ejecución del plan y evaluación del plan. Estos forman a su vez un proceso mayor que es cíclico en donde el plan se rectifica para ejecutarlo y evaluarlo de nuevo, y así sucesivamente.

Diseño del plan

Se realizó una investigación bibliográfica que apoyó la decisión de implementar en el curso una de las herramientas de la plataforma Moodle denominada "wiki". Se propuso un proyecto final que consistía en la creación grupal de una wiki en donde se presentaran de forma original varios contenidos que se desarrollaron en el curso. Algunos de los temas planteados fueron: Matemáticas en la Modernidad, Filosofía y fundamentos de las matemáticas, ¿Cuál debe ser el papel de la historia en la enseñanza de las Matemáticas?, ¿Qué son las Matemáticas?, ¿Las Matemáticas se crean o se descubren?, entre otros. Para esto se brindaron varios materiales de apoyo:

- *Proyecto final (instrucciones)*. Documento que presenta las pautas para el producto final.

- *Videos técnicos del uso de la herramienta.* Se pusieron a disposición de los estudiantes dos videos creados por la Universidad denominados: "¿Qué es una wiki y cómo participar?" y "Cómo ingresar y colaborar en la Wiki de Moodle".
- *Foro grupal: Proyecto final*. Se colocó un foro específico para la coordinación, organización y puesta en común de los estudiantes, en este se debían consignar las discusiones y acuerdos de cada subgrupo. El propósito de este fue promover el liderazgo, la discusión, el conflicto cognoscitivo, la evaluación grupal y el proceso de toma de decisiones.
- *Tabla de cotejo*. Muestra los indicadores con que se evaluaría el trabajo. Ver tabla 1.

Tabla 1
Indicadores de la tabla de cotejo

Aspectos generales	
Indicadores	*Descripción*
1. Completitud	Presenta todas las partes completas que se piden para el proyecto.
2. Sistematización de ideas	La información se presenta de forma clara y precisa, tomando las ideas principales (elementos históricos), pero sin profundizar demasiado en ellas.
3. Congruencia de ideas	Los elementos históricos empleados deben estar articulados de forma lógica coherente.
4.Creatividad	Presenta la información de forma diferente para cada unidad, utilizando las diferentes herramientas con las que cuenta la Wiki en la plataforma (incrustar imágenes y videos, tipos de letras, etc.).
5.Originalidad:	El contenido de la wiki debe ser original o debidamente referenciado.
Respecto a las preguntas generadoras planteadas:	
6. Articula las ideas de forma clara y precisa.	
7. Las ideas son el producto de una construcción intelectual colectica, son ideas originales que pueden ser sustentadas de citas textuales debidamente referenciadas.	
8. Las respuestas son congruentes con las lecturas del curso.	
Aspectos referentes al trabajo colaborativo (evaluación individual a partir de la plataforma)	
9. Participación y aportes en el foro grupal.	
10.Participación en la elaboración de la Wiki	

Fuente: Tabla de cotejo aplicada a proyectos finales. 2018.

Ejecución del plan

Se formaron en total seis subgrupos: cinco de cuatro estudiantes y uno de cinco estudiantes. Hay que señalar que la selección no se hizo al azar, ya que se pensó debía haber diversidad, y como el curso estaba avanzado se identificaron varios líderes y estudiantes sobresalientes que fueron distribuidos en cada subgrupo. La colocación de líderes se hizo con el objetivo de que fueran agentes motivadores que impulsaran el trabajo de sus compañeros. Sin embargo, los integrantes de cada subgrupo elegían de forma libre un coordinador. En algunos casos, el coordinador no coincidió con el líder identificado por el profesor.

Evaluación del plan

Para la valoración del plan de acción se diseñaron dos instrumentos: Una tabla de cotejo que evaluaría el producto final según indicadores preestablecidos (Ver tabla 1) y un cuestionario en línea el cual pretendía recolectar las percepciones de los estudiantes respecto al proyecto y al

desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas propiciadas en la actividad. Ambos instrumentos tenían como propósito realizar un balance para la toma de decisiones pertinentes para su rediseño.

El cuestionario de percepción estaba compuesto de 15 ítems (tanto de respuesta cerrada como abierta, 6 con escalas de Likert) dividido en tres partes, como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2
Estructura del cuestionario de percepción aplicado

C1	Administrativas	P1	Sexo
		P2	Edad
		P3	Centro universitario
C2	Proyecto del curso	P4	Instrucciones del documento de proyecto final (Claridad, Precisión, Utilidad)
		P5	Foro grupal del proyecto (Comunicación fluida y asertiva, Discusión y construcción de ideas, Puesta en común de ideas, Utilidad)
		P6	Rúbrica de evaluación del proyecto (Suficientes, Claros, Precisos, Pertinentes)
		P7	Coevaluación del proyecto
C3	La herramienta wiki	P8	Ventajas del uso de la wiki como recurso educativo
		P9	Desventajas del uso de la wiki como recurso educativo
		P10	Experiencia en trabajos colaborativos
		P11	Experiencia previa en uso de la wiki
		P12	Problemas en el manejo de la herramienta
		P13	Descripción de las dificultades presentadas con el uso de la herramienta
		P14	Posibilidades de mejora en el resultado final
		P15	Valoración general de la wiki como recurso educativo

Simbología
C: corresponde a la categoría a evaluar
P: corresponde a la pregunta realizada.

Fuente: Cuestionario aplicado a estudiantes. 2018.

La totalidad de la población completó el cuestionario de forma anónima, es decir 20 estudiantes (11 mujeres y 9 hombres) que presentaron el proyecto final. La población de estudio tenía un rango de edades entre los 20 y 57 años, donde el 90% tenían 25 años o más; es decir, casi en su totalidad tenían edad adulta. Además, pertenecían a doce centros universitarios distribuidos en las siete provincias en que se compone el país.

Análisis y discusión de los resultados

Respecto a la evaluación del proyecto final, se lograron productos sobresalientes. En los indicadores grupales del 1 al 5 y el 8 (Ver tabla 1) consiguieron puntajes mayores a 3. Tres de los grupos obtuvieron calificación 3 en los indicadores 6 y/o 7. En cuanto a la evaluación individual (indicadores 9 y 10), solo dos estudiantes de diferente grupo obtuvieron calificaciones deficientes de acuerdo a las evidencias consignadas en plataforma; esto fue consistente con la coevaluación que realizaron los grupos respectivos.

De manera cualitativa, las intervenciones en el foro grupal evidenciaron de forma indirecta valores y actitudes deseadas en cualquier profesional y ligadas a habilidades socio-comunicativas, tales como el respeto por el compañero, la responsabilidad individual, el respeto por la diversidad, la valoración del dialogo, entre otros. Hay que señalar que el profesor tutor estuvo periódicamente orientando, supervisando y autorregulando el foro de cada subgrupo.

Aunque la actividad se propuso para los 25 estudiantes matriculados en el curso, 5 de ellos no participaron por diferentes razones, entre ellas la deserción normal del curso (según los registros históricos), por lo que algunos grupos no trabajaron con la totalidad de los integrantes asignados, esto se valoró en la calificación individual.

De acuerdo con los datos recabados con el cuestionario de percepción, en los ítems que se empleó una escala de Likert (1 es deficiente y 5 satisfactorio), se consideró como exitoso o positivo calificaciones de 4 o 5. Respecto a las indicaciones que se brindaron para la realización del proyecto, la totalidad de la población las calificó con 4 o 5 en los tres aspectos que se consideraron relevantes: claridad, precisión y utilidad. En relación a los indicadores propuestos en el instrumento de evaluación, el 90% los consideró claros y precisos y el 85% los encontró útiles. Asimismo, en lo referente a materiales adicionales de consulta y enlaces de interés (videos y biblioteca virtual) el 85% los consideró pertinentes y confiables y el 80% como útiles.

En lo que concierne al foro grupal, el 70% considera que la comunicación entre los compañeros fue fluida y asertiva, el 85% considera que permitió la discusión, construcción y puesta en común de ideas de manera respetuosa, así como el 65% lo juzgó útil para la organización de tareas. Estos porcentajes reflejan un poco lo que se observó en la práctica. Al inicio la comunicación no fue tan fluida para la organización y asignación de tareas y varios grupos no utilizaron mucho este foro, debido a que por lo general empleaban otros medios más ágiles como *WhatsApp*; sin embargo, si fue de gran utilidad para la discusión académica y construcción conjunta de ideas. Se percibió en la observación poca experiencia en el uso de esta herramienta para labores de coordinación y organización.

En relación a la coevaluación realizada, un 90% consideran que poseen las habilidades necesarias para participar en este tipo de evaluación, un 95% indican que la misma contribuye a que exista mayor compromiso así como un 85% señala que favorece a que el producto sea de mejor calidad.

Con respecto a las ventajas del uso de la wiki como recurso educativo en el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas, el 85% de la población considera que se promueve la responsabilidad, la organización, las habilidades de comunicación y afirman que se trabaja para alcanzar objetivos comunes de aprendizaje. Además, el 90% resalta que se respeta el criterio de los demás y se promueve el autoaprendizaje colaborativo.

En lo referente a las desventajas del uso de la herramienta, solo el 35% de los estudiantes participantes manifiestan que la dificultad para comunicarse con los compañeros de grupo y para la organización de tareas era una desventaja. Además, solamente el 40% de los estudiantes encontraron como desventaja la dificultad para realizar acuerdos y que la herramienta wiki es un poco limitada para realizar otras actividades. El 45% consideró que existe poca responsabilidad por parte de algunos compañeros y el 55% consideró que el depender del aporte de los compañeros es una desventaja.

El 85% de la población manifestaron no haber tenido ninguna dificultad de tipo técnico con el manejo de la wiki al momento de realizar la actividad. Dos estudiantes manifiestan haber tenido dificultad al inicio para introducir imágenes, videos y esquemas en la wiki. Esto es un resultado muy favorable debido a que solo el 45% de los estudiantes había utilizado anteriormente la wiki como recurso educativo. Tres estudiantes señalaron como una de las dificultades que presentaron en la actividad la poca participación de algunos compañeros y dos estudiantes consideraron como obstáculo la comunicación por medio del foro. Dos indicaron no haber tenido dificultades y los demás no realizaron comentarios al respecto.

Finalmente, en relación a la valoración general de la wiki como recurso educativo en el desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas, no hubo comentarios negativos; además 11 estudiantes realizaron comentarios positivos acerca de la actividad, donde destacan los siguientes:

- "Es una herramienta que favorece el trabajo en equipo, apoya con esquemas y resúmenes para el logro del aprendizaje requerido."
- "Realmente me gustó muchísimo, porque de verdad el trabajar en equipo me hizo ser más responsable, sobre todo con el tiempo, además me permitió ser creativa y elaborar distintas actividades que hagan la información más atractiva, es algo abierto que me permite ser innovador."

Conclusiones y recomendaciones

Mediante la valoración integral y cualitativa de los productos, y con base en los resultados obtenidos en los indicadores establecidos en los instrumentos de evaluación, se concluye que esta actividad contribuyó al logró del propósito del curso: Ofrecer una visión panorámica de la historia y filosofía de las matemáticas de nuestro tiempo, abordando los procesos históricos más importantes y significativos de las matemáticas y sus implicaciones en el desarrollo de la ciencia.

En comparación con los datos de los años 2016 y 2017, no hubo cambios significativos en el nivel de aprobación de la asignatura, que fue de un 64%; además, tanto la deserción como la reprobación del curso se mantuvieron similares (4% y 32% respectivamente). No obstante, específicamente en el proyecto de la wiki, el 90% de los estudiantes participantes obtuvieron notas superiores o iguales a 9 de un puntaje máximo de 10; esto puesto que los productos se juzgaron como sobresalientes en cuanto a presentación y contenido. Esto puede deberse a que el profesor tutor estuvo en comunicación constante, y a lo largo del proceso de elaboración del proyecto se brindaron bastas retroalimentaciones que lograron que los productos fueran de gran calidad. Esto se puede consignar como una recomendación si se desea implementar el uso de la wiki en alguna otra asignatura. Asimismo, otro aspecto que pudo incidir en el éxito de esta actividad es que (según la percepción de los estudiantes) los materiales y recursos suministrados fueron claros, confiables, pertinentes y útiles para la realización de la tarea.

Por otra parte, gran cantidad de estudios destacan la importancia del desarrollo de habilidades socio-comunicativas y colaborativas en la formación universitaria; no obstante, se ha detectado una carencia de información entorno a esta temática en educación a distancia, en particular en carreras de formación inicial en la enseñanza de la Matemática. Es por esto que a partir de los resultados obtenidos y la percepción de los estudiantes, se considera esta experiencia no solo exitosa, sino que podría ser de gran utilidad y replicable en cursos similares.

En el modelo de educación a distancia, el estudiante tiende a ser muy individualista y puede ver como dificultad u obstáculo el tener que coordinar y depender de compañeros para la elaboración de una tarea educativa. Es por esto que este proceso debe desarrollarse de manera paulatina pero constante; además, que debe contar con acompañamiento y orientación del profesor para lograr resultados positivos.

Luego de efectuar este estudio y tomar en cuenta las conclusiones que arrojó, se hace pertinente valorar no solo la actividad como tal, sino también la metodología de investigación empleada, para los procesos de mejora de la calidad en otras asignaturas de la carrera Enseñanza de la Matemática.

Referencias bibliográficas

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción: Conocer y cambiar la práctica educativa*. Editorial Graó. Barcelona, España.

Lucero, M. M. (2013). *Entre el trabajo colaborativo y el aprendizaje colaborativo*. Revista Iberoamericana de Educación, 1-20. Recuperado **https://rieoei.org/historico/deloslectores/528Lucero.PDF**

Montenegro, M. y Pujol, J. (2009). *Evaluación de la wiki como herramienta de trabajo colaborativo en la docencia universitaria*. RED – Revista de Educación a Distancia. Número monográfico X. Número especial dedicado a Wiki y educación superior en España (en coedición con Red-U). 15 de diciembre de 2009. Recuperado de **http://www.um.es/ead/red/M10/**

Mora, F. (2012). *Posibilidades educativas de la wiki*. Tecnología en Marcha. Vol. 25, Nº 3. Recuperado de **https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4835639.pdf**

Mora, F. y Hooper, C. (2016). *Trabajo colaborativo en ambientes virtuales de aprendizaje: Algunas reflexiones y perspectivas estudiantiles.* Revista Electrónica Educare, 20(2), 1-26. Recuperado de **http://dx.doi.org/10.15359/ree.20-2.19**

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*. EUNED. San José, Costa Rica.

Ruiz, E. y Galindo, L. (s.f.). *Competencias comunicativas en un proceso de formación docente en el entorno colaborativo de aprendizaje virtual.* Recuperado de **http://www.virtualeduca.red/documentos/23/Ponencia%20Formaci%C3%B3n%20docente%20.pdf**

Sagol, C. (2011). *El modelo 1 a 1. Notas para comenzar*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Universidad Estatal a Distancia. Programa de Aprendizaje en línea. (Publicado el 13 de setiembre de 2017). *¿Qué es una wiki y cómo participar?* Recuperado de **https://youtu.be/_D0r0Zne1mo**

Universidad Estatal a Distancia. Programa de Aprendizaje en línea. (Publicado el 15 de febrero de 2016). *¿Cómo ingresar y colaborar en la wiki de Moodle?* Recuperado de **https://youtu.be/HfC1vp1LzjM**

Villanueva, A. (2009). *Uso de wikis en Ingeniería Informática*. Red U - Revista de Docencia Universitaria. Número Monográfico V. Número especial dedicado a WIKI y educación superior en España (II parte), en coedición con Revista de Educación a Distancia (RED). 31 de diciembre de 2009. Recuperado de **https://www.um.es/ead/red/M12/10-Villanueva.pdf**

Villasana, N. y Dorrego, E. (2010). *Habilidades sociales en entornos virtuales de trabajo colaborativo*. Recuperado de **https://ried.utpl.edu.ec/sites/default/files/pdf/v%2010-2/3.-%20habilidades-sociales.pdf**

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La clasificación en Educación Infantil: cómo diseñan actividades los maestros en formación

Noemí **Pizarro** Contreras
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile
noemi.pizarro@umce.cl

Blanca **Arteaga** Martínez
Universidad de Alcalá
España
blanca.arteaga@uah.es

Resumen

La tarea de clasificar se inicia en el niño de manera muy temprana, y se considera fundamental en la preparación en los contenidos pre numéricos. Sin embargo, son pocas las investigaciones realizadas sobre las tareas desarrolladas por el maestro en el diseño de actividades que las impulsen o consoliden. El presente trabajo recoge una actividad realizada por 117 futuros maestros de infantil en formación, donde se diseñan actividades, antes y después de una lección específica sobre clasificación, impartida en la universidad, que incorpora el material manipulativo en el diseño. Los resultados apuntan a tareas muy guiadas que no facilitan la autonomía del niño, tras la formación, muestran una buena adquisición de las tipologías de clasificación, sin embargo no tienen en cuenta el juego como herramienta, algo que contradice las necesidades del escenario de aprendizaje en estas primeras edades.

Palabras clave: educación infantil, matemática, clasificación, formación.

Introducción

La Educación Infantil en España constituye una etapa escolar hasta los seis años. Durante este periodo el niño inicia su formación matemática de manera formal, dando prioridad a todo lo que constituye el pensamiento lógico, e iniciándose por trabajos donde preparar al niño para tareas posteriores de mayor abstracción resulta fundamental.

El niño inicia la tarea de la clasificación desde edades tempranas, con acciones como formar conjuntos de colores entre sus piezas de construcción o montar garajes especiales para colocar sus

automóviles de juguete en una u otra planta dependiendo sus características. A su vez, el maestro de Educación Infantil inicia su tarea de enseñar aspectos matemáticos a los estudiantes con una tarea de categorización, la clasificación.

Podemos considerar esta tarea de clasificación como un saber lógico, que se integrará en un conjunto de saberes junto a la seriación o enumeración que preparará al niño para un aprendizaje posterior del número natural y las formas geométricas; "clasificar supone abstraer de los objetos determinados atributos esenciales que los definen" (Chamorro, 2005, p. 126). Además la clasificación puede considerarse también de utilidad para otras áreas del currículo en estas primeras edades; como la geometría, al establecer clasificaciones disjuntas de rectángulos y cuadrados (Clements y Sarama, 2011).

La tarea de clasificar "implica la aplicación o descubrimiento de una regularidad, clasificatoria" (Ruesga, Giménez y Orozco, 2005, p. 130), que dadas las características de la etapa se suele poner en escena a través del juego. Esta tarea de clasificar permanece desde niños hasta adultos, dado que mantener una organización en las cosas o situaciones nos facilita su comprensión.

El maestro como adulto "manifiesta frecuentemente sus habilidades clasificatorias en circunstancias diversas, sea ordenando simplemente el material disperso ubicado en su mesa" (Bermejo, 1985, p. 211). Además, debe considerar la habilidad de clasificar inherente al quehacer matemático, considerándolo en diversas actividades de aula, dado que la clasificación requiere que el niño construya o acepte reglas que el maestro define para la acción. La selección de materiales debe ser reflexiva tanto para el maestro como para los alumnos, "más que la forma de los materiales y las tareas, es importante que tengan significado" (Clements y Sarama, 2009, p. 329).

De este modo, al diseñar actividades para trabajar la clasificación en el aula, utilizaremos las recomendaciones de tipologías dadas por Maza y Arce (1991): formación de un concepto, dicotomía, división y doble dicotomía. La formación de un concepto requiere una primera selección. Por ejemplo, si está jugando con todos sus juguetes, el niño elige "los vehículos", situándolos por ejemplo en el garaje, estaremos entonces formando el concepto. El garaje contendrá coches, motos, camiones y otros vehículos de ruedas; posteriormente si aísla una característica del conjunto de elementos; pensemos que el niño será capaz de seleccionar las "motos", haciendo así dos subconjuntos "los que son motos" y los que no lo son, estaremos ante una dicotomía. La división es lo que podemos llamar una clasificación simple o aditiva, colocaría todos los vehículos por ejemplo en función de su tipología: coche, moto, camión, etc. Por último, la doble dicotomía requiere una división en cada una de las clases definidas en la dicotomía simple, siguiendo el ejemplo anterior, podría clasificar en función del tipo de vehículo y el color, a esta clasificación la llamaremos multiplicativa.

Cuando diseñamos una actividad de clasificación, hemos de tener en cuenta tanto una clasificación en sentido positivo como negativo. La negación como operador lógico unitario es fundamental para comprender relaciones más complejas de operadores binarios como la conjunción o la disyunción (González, 1991). Trabajando con actividades desde la negación, podremos prevenir dificultades de razonamiento, desde la argumentación, refutación o demostración (Fernández Bravo, 2007).

La representación de las tareas puede facilitar la comprensión de las relaciones lógicas, para ello "los árboles relacionales permiten analizar las relaciones lógicas que los niños realizan y establecer paso a paso en el proceso resolutivo, así como identificar las causas detrás de sus

errores" (Ruesga, Valls y Lisbõa, 2011, p. 61).

El maestro como aprendiz

El maestro como aprendiz se sitúa en una posición donde debe dominar el contenido al tiempo que las teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje, partiendo de experiencias anteriores propias que le facilitarán la actuación en su posterior desempeño (Scheuer y Pozo, 1999).

El análisis de cómo el maestro interpreta el contenido curricular, puede facilitar la interpretación y actuación en su práctica (Rodrigo, Rodríguez y Marrero, 1993). Para ello, un posible momento de especial reflexión para analizar la práctica del maestro es durante su periodo formativo, de manera que la guía del profesor de la universidad pueda ayudarle a gestionar un proceso reflexivo que le conduzca a un aprendizaje significativo entre lo que se sustenta en su experiencia previa y la práctica pedagógica que descubre y aprende durante sus estudios de Grado en Magisterio.

El aprendizaje tiene lugar si se construyen situaciones de aula donde el estudiante pueda vincular la información nueva con los conocimientos que adquirió con anterioridad (Peterson, Fennema & Carpenter, 1989). Cuando el aprendiz es un maestro hemos de plantearnos que el proceso es más complejo dado que el aprendizaje es "más de lo que los maestros hacen realmente en el aula y se extiende a la conducción fuerzas detrás de las acciones del profesor: sus cogniciones" (Artzt, et al., 2015, p. 22).

Para que el maestro aprenda es necesario que vivencie un escenario similar al que va a encontrarse posteriormente en su aula, en caso contrario, el maestro replicará una forma de enseñar muy similar a la que se utilizó con él, poco adaptada a su realidad. Por ello, es importante diseñar actividades que faciliten la reflexión, permitiendo al docente "conectar sus pensamientos con sus acciones, posibilitándole cambiar su comportamiento en el aula de clases" (Jiménez, Limas y Alarcón, 2016, p. 140). Los maestros en formación necesitan "interpretar situaciones matemáticas a fin de identificar formas de mejorar el pensamiento matemático de los niños" (Lee, 2017, p. 229).

Metodología

La experiencia se desarrolla en la Universidad de Alcalá (España), con estudiantes del penúltimo año del Grado en Magisterio de Educación Infantil. La muestra está compuesta por 117 futuros maestros que trabajan en grupos construidos de manera aleatoria durante los primeros minutos de la sesión. Se forman 27 grupos, de entre 2 y 6 personas. Tenemos un diseño cuasi experimental, con una tarea inicial, una intervención y una tarea final. El estudio tiene un carácter descriptivo.

Se pide a los grupos que desarrollen actividades de aula para trabajar la clasificación en un aula con niños, de 3 o 4 años. Para ello se reparte en cada uno de los grupos un material, algunos de ellos cotidianos en la vida del niño y otros propios del juego infantil (Figura 1). La actividad se desarrolla en la segunda semana de clases del curso y tiene una duración de dos horas. Consideramos que durante la etapa infantil, la interacción con los materiales resulta fundamental para "el desarrollo de estructuras de su pensamiento además de influir en su conducta general y en el propio rendimiento" (Laorden y Pérez, 2002, p.137), por lo que resulta fundamental que el maestro de manera previa desarrolle tareas donde pueda interaccionar con ellos.

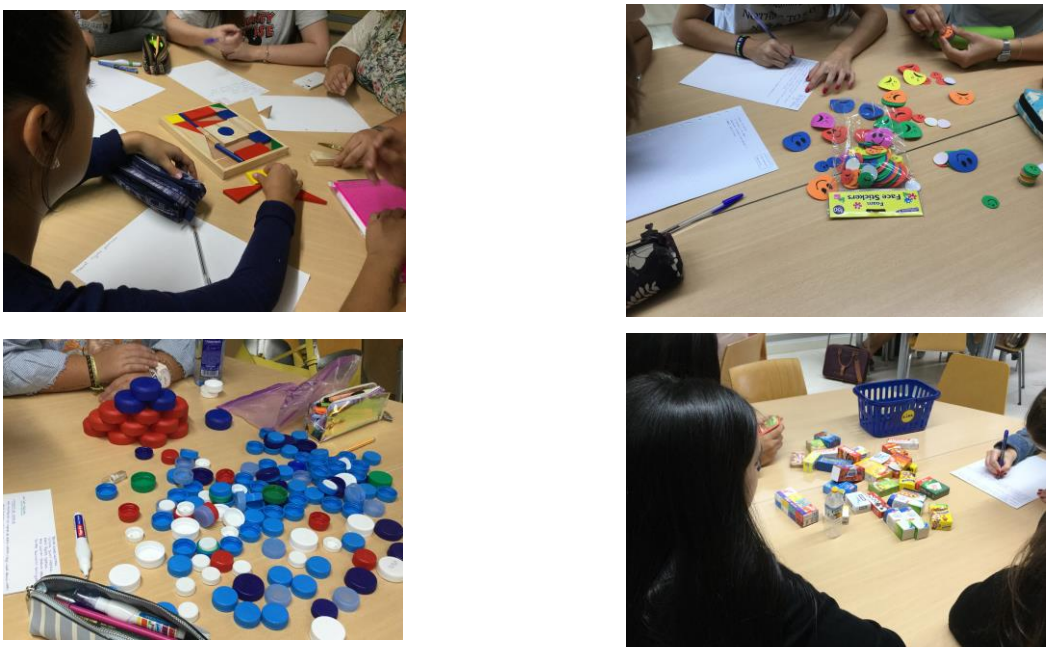


Figura 1. Algunos de los materiales con los que se trabajó en la actividad de clasificación.

La actividad se diseña para trabajarse en dos tiempos, donde cada grupo conserva el material durante toda la sesión de clase. En el primer tiempo, los futuros maestros a la vista del material, diseñarán actividades para trabajar la clasificación; en este momento no se ha explicado nada sobre el contenido pedagógico-didáctico sobre la clasificación, los aprendices para maestro ponen en escena su conocimiento de matemáticas informales. En el segundo tiempo, la profesora (formadora de maestros) relata la lección, y los futuros maestros realizan de nuevo la actividad. Consideramos que, de esta manera, la formadora de maestros controla la instrucción de una manera guiada e involucrando al futuro maestro en la actividad a través de un proceso reflexivo en grupo, desde la experiencia primero y más tarde desde la teoría del área.

A partir de lo anterior, el objetivo general de este estudio es categorizar las actividades de clasificación que desarrollan los maestros en formación en educación infantil, antes y después de recibir una instrucción específica sobre estos contenidos. Para ello se plantean dos objetivos específicos; el primero pretende categorizar las actividades de acuerdo a la cantidad de características solicitadas (aditiva, si es una, o multiplicativa, si es más de una) así como la autonomía que se deja al niño en la actividad diseñada, por medio de las instrucciones entregadas por los futuros maestros. Para valorar si ha habido un cambio con la instrucción, se define el segundo objetivo específico desde la observación de la incorporación de los contenidos vistos en clase, como la negación, los árboles de clasificación, y las cuatro formas de clasificación: formación de concepto, dicotomía, división y doble dicotomía (Maza y Arce, 1991).

La formación se centra en el conocimiento específico sobre las formas de clasificación que se pueden hacer, pero además se muestra un conocimiento psicopedagógico sobre la forma de enseñarlo en aula, utilizando para ello tarjetas de atributos, tablas y árboles de clasificación; de esta manera se puede considerar que la instrucción tiene las características señaladas por Shulman (1993) sobre el conocimiento didáctico del contenido.

Resultados

Observamos que antes de recibir la lección, los futuros maestros en su mayoría diseñan actividades centradas en una única característica o atributo (88.46%), mientras que muy pocos utilizan más de una (3.85%). Por el contrario, tras la lección, los futuros maestros aumentan las características que se incluyen en la actividad, con un 96.30 % para las aditivas y un 74.07 % para las multiplicativas (Figura 2).

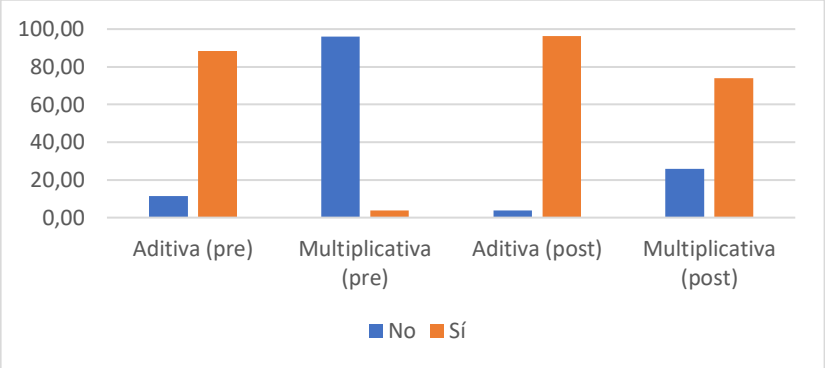


Figura 2. Descripción del trabajo según si clasifican de acuerdo a una o más características.

Al observar la relación entre antes y después de la lección, utilizamos la prueba de McNemar para valorar si hubo o no un cambio en la respuesta de tipo dicotómico, teniendo en cuenta que se cumplen las hipótesis necesarias para su aplicación. La hipótesis nula indica que los cambios se deben al azar y no a la lección recibida. En el caso aditivo, los datos indican (p-v=.375) que no ha habido cambios. En el caso multiplicativo, podemos decir (p-v=.00) que ha habido cambios con la lección recibida, en el sentido, que los futuros maestros desarrollan actividades con más de una característica implicada. Esto puede indicar que la formación ayuda al diseño de actividades dirigidas a una instrucción adecuada para niños de edades tempranas en la línea de la hipótesis de Bermejo (1989), cuando señala que "los niños pequeños prefieren emplear un solo criterio para clasificar, mientras que los mayores utilizan sobre todo dos o tres criterios" (p. 39).

También se observa que las actividades diseñadas por los futuros maestros son muy guiadas y no dejan autonomía al niño (Figura 3). Todas las actividades diseñadas se dan en modo directo (Ruesga, Valls y Lisbõa, 2011).

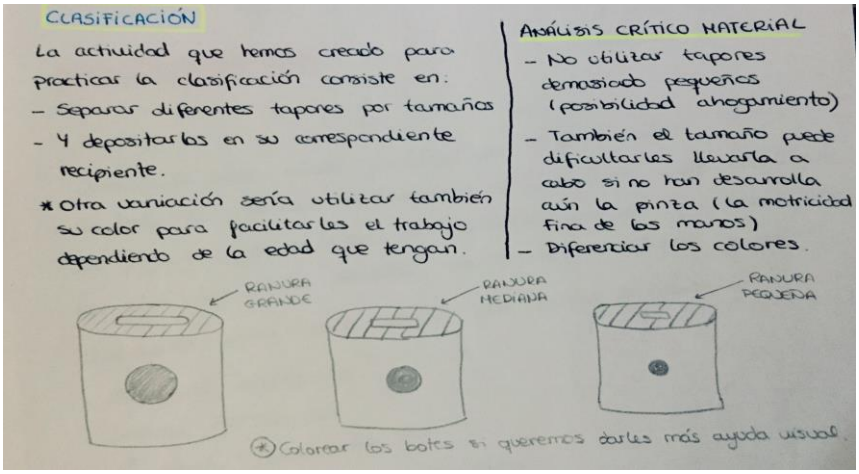


Figura 3. Ejemplo de actividad diseñada por los futuros maestros, previa a la instrucción.

Los resultados globales comparando entre el antes (pre) y después de la instrucción (post) indican que muy pocos dan autonomía suficiente al niño (Figura 4).

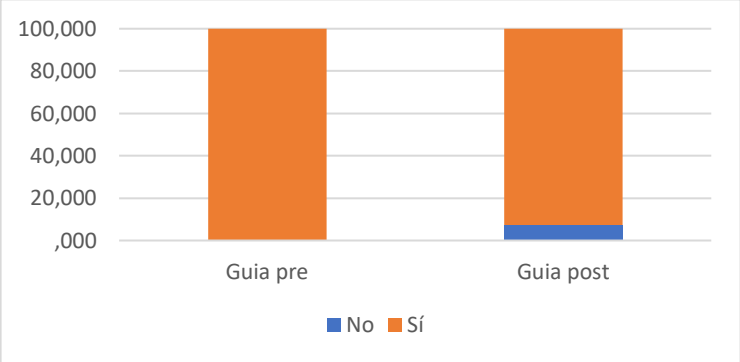


Figura 4. Autonomía en la tarea, antes y después de la lección.

Por último, nos centramos en observar la adquisición del uso de los contenidos vistos en clase, como la negación, los árboles de clasificación, y las cuatro formas de clasificación expuestas. Los futuros maestros no han incorporado en su mayoría el trabajo con la negación o los árboles de decisión como contenidos, ni el juego como estrategia en la actividad, como se puede apreciar en la tabla 1.

Tabla 1

Incorporación de estrategias y/o contenidos en las tareas tras la lección.

%	Negación	Árboles de decisión	Juego
No	88.89	81.48	96.30
Sí	11.11	18.52	3.70

En la Tabla 2, podemos observar la mayoría de los futuros maestros (>74%) si utilizaron las cuatro formas de clasificación expuestas por Maza y Arce (1991).

Tabla 2

Inclusión de las formas simples de clasificación.

	Formación concepto	Dicotomía	División	Doble dicotomía
No	0	0	11.11	25.93
Sí	100.00	100.00	88.89	74.07

Sin embargo, podemos observar que no todas las cualidades son consideradas por los futuros maestros como una tarea de clasificación, por ejemplo, el grupo 10, apunta “vamos a trabajar la diferencia de tamaño (grande y pequeño) y los colores (clasificación)”; el tamaño no se considera como una característica para la clasificación sino como un contenido independiente. Algunos de los grupos inician el trabajo describiendo una actividad de seriación, “con el material realizará una serie que los niños deben imitar, empezará con los círculos grandes colocándolos en fila, uno de cada color” (grupo 10), por lo tanto mezclan los contenidos con otras acciones de pensamiento lógico prenumérico.

Conclusiones

El primero de los objetivos específicos señala que las actividades diseñadas sólo consideran una característica o atributo para desarrollar la actividad. Por ello, es indispensable realizar más intervenciones por parte de los formadores de maestros de infantil con el fin que el futuro maestro se apropie de la habilidad, tanto para él como para la enseñanza, desarrollando, de acuerdo al nivel escolar, el desafío de clasificar más de tres características, con el fin de proyectar la habilidad, inherente a la disciplina matemática, en los niveles superiores.

Por otro lado, los aprendices para maestros ofrecen pocos espacios de autonomía en la actividad de clasificación a sus futuros estudiantes. Este aspecto puede resultar negativo, dado que las actividades planteadas no se caracterizan por una participación guiada en el sentido que menciona Edo (2008), es decir, que facilite la autonomía de los niños, sino que es completamente cerrada con instrucciones donde el maestro no acompaña sino dirige.

El segundo de los objetivos específicos centrado en los posibles cambios tras la instrucción, señala cambios en los tipos de actuación con la clasificación, pero no en el uso de recursos como la negación o los árboles. Sin embargo, la negación es fundamental porque ayuda a los niños a formarse desde un proceso reflexivo, en la resolución de dilemas que le prepararán después para otros procesos lógicos. Los árboles de decisión pueden ayudar a situar al niño en una formalización de la tarea, que además facilita la comprobación de si se está haciendo de manera correcta durante su elaboración. Todas estas situaciones, es probable que las realice, no formalmente, en su diario vivir por medio del juego, por lo tanto es el maestro de infantil quien debe consolidar el juego como una herramienta fundamental, dado que el aprendizaje se basa de manera conjunta en la manipulación y el juego (Alonso, López y de la Cruz, 2014).

Podemos valorar de manera positiva la incorporación de las cuatro formas fundamentales de clasificación que se trataron durante la lección, con porcentajes que señalan la incorporación de la tarea todos por encima del 74%. Lo importante ahora, es que los futuros maestros sean capaces de identificar qué formas de clasificación están utilizando, con el fin de implementarlas todas, por esto, es indispensable que los futuros maestros desarrollen experiencias de clasificación con miras a la enseñanza.

Por otro lado, consideremos que, además de incrementar las actividades de aula, es fundamental concienciar al futuro maestro infantil sobre la importancia de la clasificación, con el fin que la identifique en aquellas actividades que la involucran. Por último, estos resultados nos conducen a plantearnos que es necesario, que cada clase de la formación de maestros sea un espacio ejemplificador de cómo hacer clases; donde cada sesión tenga como objetivo transversal la construcción de conocimientos, habilidades y actitudes, y no una mera transmisión del contenido de manera aislada. De esta forma, cada clase debería basarse en situaciones lo más parecidas posible a lo que será el aula de infantil, por ejemplo, desde el juego como estrategia didáctica incluida en las llamadas conexiones prácticas (Novo, Alsina, Marbán y Berciano, 2017).

Se espera que este estudio continúe con observaciones en aula infantil, para categorizar las clasificaciones realizadas por los maestros y realizar, de ese modo, un análisis con foco en el conocimiento especializado del maestro infantil, para de esta manera ajustar las sesiones formativas tanto al contenido teórico como al diseño de actividades ricas.

Referencias y bibliografía

Alonso, C., López, P. & de la Cruz, O. (2013). Creer tocando. *Tendencias pedagógicas*, 21, 249-262.

Artzt, A., Armour-Thomas, E., Curcio, F. & Gurl, T. (2015). *Becoming a Reflective Mathematics Teacher*. New York: Routledge.

Bermejo, V. (1985). Estudio evolutivo de las conductas de clasificación en el niño. Aspectos lingüísticos y perceptivos. *Infancia y aprendizaje*, 31-32(8), 211-227.

Bermejo, V. (1989). Factores espacio-semánticos y tipicidad en conductas de clasificación e inclusión. *Estudios de Psicología*, 10(37), 31-43.

Chamorro, M.C. (2005). Didáctica de las matemáticas para educación infantil. Madrid: Pearson Educación.

Clements, D.H. & Sarama, J. (2009). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach. New York: Routledge.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of mathematics teacher education*, 14(2), 133-148.

Edo, M. (2008). Matemáticas y arte en educación infantil. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 47, 37-53.

Fernández Bravo, J. A (2007). Teatro, lógica y matemática en Educación Infantil. *Multiárea*, 2, 101-116.

González, A. (1991). *Lógica matemática para niños*. Oviedo: Universidad de Oviedo.

Lee, J. E. (2017). Preschool Teachers' Pedagogical Content Knowledge in Mathematics. *International Journal of Early Childhood*, 49(2), 229-243.

Jiménez, A., Limas, L.J. & Alarcón, J. E. (2016). Prácticas Pedagógicas Matemáticas de Professores de uma Instituição Educativa de Ensino Básico e Médio. *Praxis & Saber*, 7 (13), 127-152.

Laorden, C. & Pérez, C. (2002). El espacio como elemento facilitador del aprendizaje: una experiencia en la formación inicial del profesorado. *Pulso*, 25, 133-146.

Maza, C. & Arce, C. (1991). *Ordenar y clasificar.* Madrid: Síntesis.

Novo, M. L., Alsina, Á., Marbán, J. M. & Berciano, A. (2017). Inteligencia conectiva para la educación matemática infantil. *Comunicar*, 52, 29-39.

Peterson, P. L., Fennema, E. & Carpenter, T. (1989). Using knowledge of how students think about mathematics. *Educational Leadership*, 46(4), 42-46.

Rodrigo, M., Rodríguez, A. & Marrero, J. (1993*). Las teorías implícitas. Una aproximación al conocimiento cotidiano*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Ruesga, M.P., Giménez, J. & Orozco, M. (2005). Las tablas de doble entrada en educación infantil: procedimientos y argumentos de los niños. *Educación Matemática*, 17(1), 129-148.

Ruesga, M. P., Valls, F. & Lisbõa, G. (2011). Study of logical relations using trees and graphs in task with classification tables. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 4(2), 49-70.

Scheuer, N. & Pozo, J. I. (1999). Las concepciones sobre el aprendizaje como teorías implícitas. En J.I. Pozo & C. Monereo. *El aprendizaje estratégico: enseñar a aprender desde el currículo* (pp. 87-108). Madrid: Santillana.

Shulman, L. S. (1993). Renewing the pedagogy of teacher education: the impact of subject-specific conceptions of teaching. En M.L. Montero y J.M.Vez (eds.) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado* (pp. 53-69). Santiago: Tórculo.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Visualización y producción de enunciados en las propiedades del triángulo

Griselda González Arriaga
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"
México
grisgonzalez5@yahoo.com.mx
Luis Manuel Aguayo Rendón
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas
México
l_aguo@yahoo.com.mx

Resumen

Esta ponencia forma parte de una tesis doctoral en construcción cuyo objetivo es probar una propuesta de formación para la enseñanza de la geometría con futuros profesores y docentes de escuelas multigrado. La finalidad es analizar la visualización en la actividad geométrica mediante la entrada del constructor considerada como necesaria por Duval (2005), y su importancia en este caso para identificar las propiedades del triángulo. El trabajo se basa en la perspectiva teórica Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) de Houdement y Kuzniak (2006). Es de carácter cualitativo, analiza la construcción y justificación de un profesor que participa en la experimentación y se observa la relación de los componentes cognitivos del ETG. Entre los hallazgos más relevantes encontramos que la descripción de las figuras geométricas permite producir una forma visual que tiene una propiedad geométrica, además, se confirma la importancia de activar la visualización no icónica en la actividad geométrica.

Palabras clave: visualización, geometría, formación de profesores, entradas de la geometría, triángulo.

Introducción

Esta ponencia deriva de una tesis doctoral en construcción en la que se experimenta una propuesta de formación para la enseñanza de la geometría con estudiantes y profesores de escuelas multigrado, en este trabajo se muestran los primeros avances y observaciones realizadas. El referente teórico que orienta el trabajo se basa en las concepciones sobre el trabajo matemático y las investigaciones en didáctica de la geometría de Houdement y Kuzniak (2006), específicamente en la perspectiva del Espacio de Trabajo Matemático, donde se señala que a través de la actividad matemática el individuo configura un constructo teórico acerca del objeto y

del contenido matemático en cuestión. En este sentido y en el tema en particular de dicha investigación, nos referiremos al Espacio de Trabajo Matemático en el subdominio Geométrico (ETMG) o simplemente al Espacio de Trabajo Geométrico (ETG).

El saber geométrico que se coloca en el ETG son las propiedades y elementos notables del triángulo, es por ello que resulta necesario que estos contenidos geométricos se incluyan en las situaciones didácticas que forman parte de la propuesta experimental. Cabe mencionar que, en tanto que la propuesta se experimenta con profesores en formación y docentes que se desempeñan profesionalmente en escuelas multigrado, las interacciones entre unos y otros es una variable importante que tiene relación con los conocimientos geométricos y didácticos necesarios para que los sujetos del estudio reconstruyan las situaciones didácticas trabajadas en el ETG cuando las apliquen en los grupos de educación primaria.

Fundamentación teórica

Para comprender la estructura del Espacio de Trabajo Geométrico (Ver figura n° 1) deben considerarse los componentes que caracterizan a toda actividad geométrica en su dimensión puramente matemática, es decir, en el plano epistemológico de un ETG se encuentran componentes como: un espacio real y local, un conjunto de artefactos y un sistema teórico de referencia. Estos componentes, a través de las génesis (figural, instrumental y discursiva) del espacio de trabajo, se articulan con aquellos que conforman el plano cognitivo: la visualización, la construcción y la prueba.

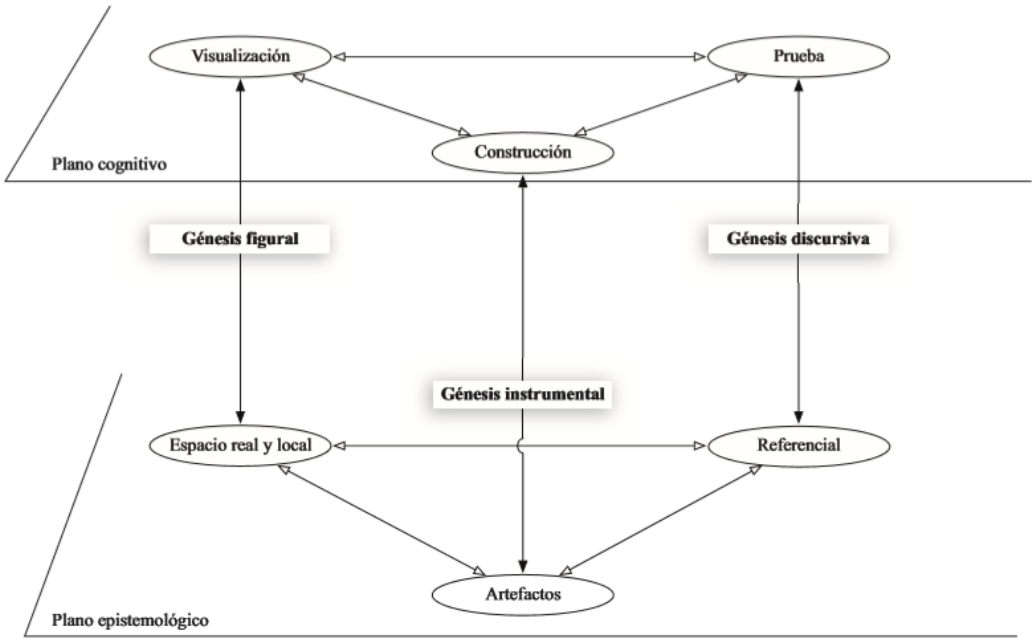


Figura 1. El espacio de trabajo geométrico y su génesis (Kuzniak, 2011).

Sin embargo, la estructura de un ETG debe entenderse como un modelo dinámico porque se requiere la activación de todas las génesis para que lograr un aprendizaje geométrico; por ello, los componentes de ambos planos resultan fundamentales en el proceso de enseñanza de la geometría. Empero, es importante mencionar que estos componentes pueden separarse para su análisis, pero no siempre es posible hacerlo en la actividad matemática.

Por esta posibilidad de separar los componentes para su análisis, en este estudio analizaremos lo relativo al componente de visualización, que es una actividad cognitiva fundamental en la geometría (Duval, 2005). Asimismo, en el plano cognitivo existen ciertos procesos que se activan con el trabajo geométrico (visualización, construcción y prueba) y se relacionan entre sí. En este caso en particular analizamos el proceso de visualización, lo que éste aporta al proceso de construcción y viceversa; es de subrayarse que la visualización también aporta al proceso de la prueba.

La visualización

La actividad cognitiva que se despliega en el dominio geométrico se puede considerar como una de las más completas, pues en el trabajo geométrico el sujeto debe ver, construir y razonar para aprehender los objetos geométricos. Cuando el geómetra se enfrenta a la tarea geométrica y despliega sus procedimientos mentales para resolverla, se hace presente el componente de visualización; a decir de Houdement y Kuzniak (2006), en la visualización se produce la representación semiótica de un objeto como una figura geométrica o un gráfico cartesiano.

Según Duval (2005), la actividad cognitiva requerida para la actividad geométrica exige la articulación de dos registros de representación que funcionan de manera simultánea e interactiva; el lenguaje y el registro de las figuras. Es decir,

> El reconocimiento de los objetos representados no depende ante todo de la discriminación visual de las formas, sino de las suposiciones que se han realizado y que también controlarán la mirada sobre las figuras. Y este es otro tipo de actividad que se moviliza: la producción discursiva de declaraciones que están vinculadas entre sí para justificar, explicar o demostrar (Duval, 2005, p. 8).

Es por ello, que la enseñanza debe considerar entre sus objetivos la visualización y la producción de enunciados, ambas son condiciones para aprender a aprender en geometría. En ese sentido cabe precisar que toda tarea que se plantee en la actividad geométrica está relacionada con la forma de ver y reconoce dos formas de visualizar según sea el tipo de operación que se realice con las figuras y la manera como se movilizan sus propiedades: una visualización icónica y otra no-icónica (Duval (2005).

Cuando se activa la visualización icónica los objetos se identifican o representan mediante la semejanza con un objeto (real) o por comparación con un modelo tipo de formas (una figura particular sirve de modelo, y otras figuras se reconocen según su grado de parecido con este modelo). Por su parte, señala Duval (2005), la visualización no icónica reconoce las formas por las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones; por las deducciones discursivas acerca de las propiedades enunciadas en las definiciones o en los teoremas o bien a partir de hipótesis que declaran lo que representa una figura. La visualización no icónica facilita entonces la comprensión del problema, de ahí la pertinencia de activarla durante el trabajo geométrico.

Tipos de aprehensión

Resulta importante señalar que en el actividad geométrica el uso de las figuras posibilita el trabajo con la geometría elemental y en estos casos la visualización es intrínsecamente semiótica y no se puede reducir a una simple percepción visual, sino que en ella confluyen otros tipos de aprehensión según Duval (como se citó en Henríquez, 2014):

1. *La aprehensión perceptiva*. Identifica de manera espontánea la figura a partir de trazos externos o internos que posibilitan la resolución del problema.
2. *La aprehensión operatoria.* Toda figura puede modificarse de diversas maneras (rotar, separar, agrandar, desplazar, etc.), lo que representa una actividad heurística, ya que en la búsqueda de la solución a un problema geométrico, un sujeto puede modificar la figura hasta regresar a la configuración inicial y las modificaciones que hace pueden ser de dos tipos: un cambio figural o una reconfiguración.
3. *La aprehensión discursiva.* Se produce al asociar la configuración con una afirmación matemática (definiciones, propiedades), este razonamiento puede realizarse desde lo visual hacia el discurso o del discurso hacia lo visual ya que la introducción de una figura geométrica necesariamente implica un discurso.

La acción de visualizar figuras está asociada con las posibles actividades que se ofrecen a los alumnos ya que plantear a los estudiantes acciones en función de las figuras, puede ser un trabajo extenso y variado, a decir de Duval (2005, p. 9).

> Las variaciones de actividad se relacionan tanto con la tarea en cuestión (para reproducir una figura según un modelo o para construirla, o para realizar mediciones, o para describirla para que sea reconstruida por otro alumno) y en el modo del actividad solicitada (modalidad concreta utilizando un material manipulable, modo de representación apegándose a las únicas producciones gráficas, o modalidad técnica mediante la imposición de ciertos instrumentos).

Las entradas de la geometría

Considerando las potenciales variaciones de la actividad Duval (2005) identifica cuatro "entradas" o tipos de actividades para el trabajo geométrico:

1. La entrada del botánico (botanise). Es evidente e inmediata, en ésta se reconocen y nombran las formas más elementales de la geometría plana, se observan las características entre formas similares y/o diferentes y se distinguen sus propiedades a partir de las características visuales del entorno. La actividad del botánico no es geométrica pero se considera una primera etapa en todo proceso de adquisición de conocimientos geométricos.
2. La entrada del topógrafo (arpenter-géomètre). Las actividades se centran en aprender a medir -por ejemplo la distancia entre dos puntos- y llevar esta medida a un dibujo que toma el estatus de plano, generalmente las tareas exigen pasar de una escala de magnitud a otra, por lo que se deben igualar. Como no existe un procedimiento común para medir las distancias reales en el campo y las longitudes de un dibujo, pasar de una medida a otra se convierte en una dificultad para el estudiante. Cuando se eligen los objetos como puntos de referencia para representar su posición, se toman en cuenta las direcciones u orientaciones aunque estos aspectos no siempre sean relevantes para la representación geométrica.
3. La entrada del constructor (constructeur). Es necesaria porque en la actividad geométrica las particularidades de las figuras (por lo menos las formas elementales) deben ser edificables mediante instrumentos manipulables o sustitutos (regla, compás, software). Al usar los instrumentos, los alumnos pueden verificar o darse cuenta de las propiedades de las figuras, además de experimentar para constatar que no son

meramente perceptivas.

4. La entrada del inventor (inventeur-bricoleur). Para ejemplificar esta entrada se describe mediante la siguiente tarea: "a partir de un cuadrado ya dado, ¿de qué manera se puede construir otro que sea dos veces más grande y su área es el doble?". Si este problema se resuelve usando sólo un papel cuadriculado para reproducirlo a partir del conteo de unidades, se reduce a operaciones de medición, pero, si se deconstruye la figura demandada, la acción exige una deconstrucción visual, ya que añadiendo trazos complementarios se genera un proceso heurístico que lleva a la solución de la tarea.

Como se puede apreciar, de acuerdo a Duval (2005), las dos primeras entradas activan la visualización icónica y las dos últimas la no icónica, la entrada del inventor implica la deconstrucción de las formas ya conocidas, lo que constituye el proceso central de la visualización geométrica que se lleva a cabo en coordinación con la actividad discursiva; por esta razón en la actividad geométrica resulta esencial favorecer la visualización no icónica.

Metodología

La propuesta de formación o ETG de formación, consta de tres situaciones didácticas que integran tanto el trabajo geométrico como el trabajo didáctico en el aula de formación y en los salones de clase de las escuelas primarias multigrado. La propuesta de formación se experimenta con tres estudiantes para profesor que cursan el séptimo semestre de la Licenciatura en Educación Primaria de la Escuela Normal Rural de San Marcos, en Zacatecas, México y dos profesores en servicio que se desempeñan en escuelas multigrado de una zona escolar de la región de Loreto, Zacatecas, México.

La primera situación didáctica se desarrolló durante seis sesiones de dos horas cada una, todas las sesiones se videograbaron y además se recuperaron las libretas en las que los participantes plasmaron los resultados de distintas tareas geométricas. Con los datos recabados mediante esos instrumentos se hicieron los análisis de corte cualitativo.

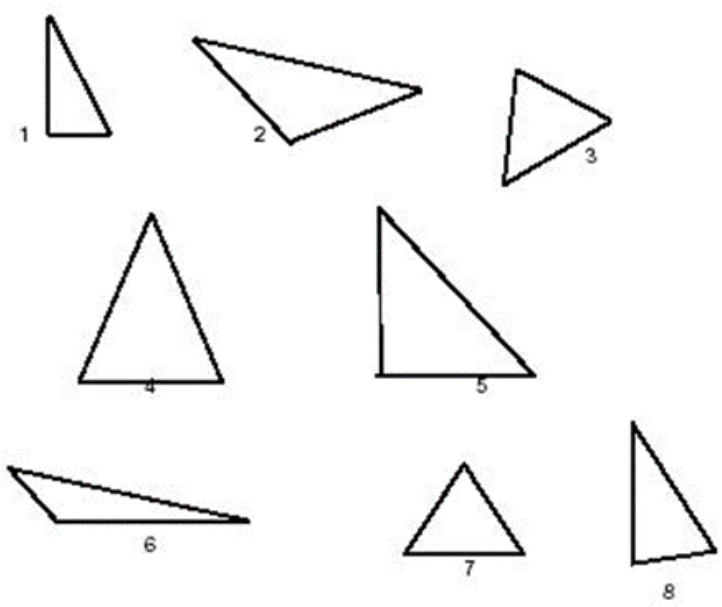
En la primea sesión, cuyo análisis es el objeto de esta ponencia, se coloca como saber geométrico la clasificación de triángulos y algunas de sus propiedades. El primer momento consistió en explorar los conocimientos previos que poseían los sujetos de estudio en situaciones que implicaban identificar y construir triángulos además de justificar la pertinencia de sus construcciones.

En la Tabla 1 se muestra la tarea propuesta. Se les proporcionó una tarjeta que contenía un conjunto de triángulos, se les pidió que seleccionarán uno de ellos y que redactaran un mensaje escrito con la secuencia que se debería usar para construirlo. Luego se pasó ese mensaje a otro de los sujetos y se le pidió que lo construyera.

Tabla 1

Ejemplo de tarea propuesta

Enunciado de la tarea	*Imágenes de la tarjeta*

"Cada uno de ustedes seleccionará uno de los triángulos de la tarjeta que se les entregó sin que los demás sepamos la que eligieron, enseguida escriban en la tarjeta en blanco la secuencia ordenada que hay que seguir para que se construya el triángulo elegido, después entreguen esas instrucciones a su compañero para que lo realice en una hoja blanca utilizando los instrumentos geométricos que consideren. Recuerden ser lo más precisos posible en sus indicaciones y emplear los conocimientos que poseen sobre los triángulos para que sea más clara la descripción".	

En la Tabla 1 se muestra la tarea propuesta. Se les proporcionó una tarjeta que contenía un conjunto de triángulos y a partir de la selección de uno de ellos, redactar la secuencia ordenada para que otro compañero identifique cuál es y lo construya.

Como se puede apreciar, esta actividad se clasifica como una tarea del constructor pues el trabajo principal consiste en construir la figura utilizando los artefactos que consideren necesarios, mediante esta tarea es posible descubrir las propiedades geométricas involucradas. Por otra parte, al incluir la descripción se activa la aprehensión discursiva que es necesaria para comunicar los resultados y en lo que toca a la validación, solamente se consideró la descripción del proceso de construcción y la verificación de si las instrucciones eran adecuadas y suficientes para cumplir con la tarea.

Como se mencionó anteriormente los saberes geométricos que se pretendían obtener por medio de la descripción y la discusión eran la clasificación de los triángulos y algunas de sus propiedades, específicamente los señalados en Thompson (1993): los ángulos internos de los triángulos suman 180°; cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°; y en un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados son iguales.

Al concluir la tarea, se organizó una puesta en común de los resultados para que cada pareja confrontará las instrucciones recibidas y la figura construida; en esta etapa la formadora fue complementando con preguntas cada una de las participaciones con el fin de orientar la reflexión hacia las propiedades implicadas.

Resultados

El análisis de los resultados de esta sesión se centra específicamente en las descripciones (instrucciones) elaboradas por los cinco participantes y en las justificaciones que sobre ellas expresan. Nuestras reflexiones se focalizan en las propiedades de los triángulos que se pusieron en evidencia en el momento de la puesta en común de los resultados obtenidos en la Tarea 1. Para dar cuenta de los resultados más relevantes en esa sesión, tomaremos como referencia

inicial la tarea que realizó una de las parejas formadas por el emisor de instrucciones y el constructor a la que llamaremos Caso A.

Análisis del caso A

> Mensaje emitido:
>
> "Para poder realizar el triángulo elegido deberás realizar los siguientes pasos:
>
> 1. Trazar dos líneas que tengan la misma medida y que formen entre ellas un ángulo de 90°.
>
> 2. Posteriormente, traza otra línea que una a ambos extremos de las líneas anteriores para que se forme el triángulo.
>
> 3. Revisa si el ángulo mide 90° exactamente y que los lados iguales sean exactamente de la misma medida".

En la discusión grupal se pidió a emisor y constructor que revisarán la pertinencia de las instrucciones, ambos coincidieron que lo fueron y las validaron mediante argumentos como: "el triángulo seleccionado es isósceles porque tiene dos de sus lados iguales y el tercero diferente"; "también es un triángulo rectángulo porque uno de sus ángulos era recto". También se les cuestionó si el triángulo construido era el único que reunía estas características, respondieron que "hay otro similar que tiene un ángulo de 90° pero sus lados son diferentes". Para validar su argumento el constructor midió los ángulos de ambos triángulos con el transportador y los lados con la regla, luego de medir señala que "con las indicaciones dadas solamente podría haber sido ese triángulo en particular".

En esta misma puesta en común, la siguiente discusión versó sobre cómo comprobar si todos los triángulos que tienen dos lados iguales y un ángulo de 90° grado con el mismo tipo de triángulo, en este caso, triángulo rectángulo isósceles, sobre el respecto los profesores manifestaron que "un triángulo isósceles rectángulo siempre tiene un ángulo de 90° y otros dos de 45° y los tres suman 180°, exactamente lo que deben sumar los ángulos internos de un triángulo".

Asimismo, mencionaron que "el triángulo que tiene todos sus lados desiguales se considera escaleno", el cual, señalaron "se puede identificar a partir de las medidas de sus lados, todos son diferentes, pero también se pueden considerar sus ángulos, pues existen triángulos escalenos obtusángulos, acutángulos y rectángulos". En cuanto a los triángulos equiláteros señalaron que "cada uno de sus ángulos mide 60° y todos sus lados son iguales". Cabe mencionar que todos estos argumentos se desprendieron de la validación de los resultados de la tarea en la que emplearon la regla y el transportador.

Con base en la puesta en común se pueden apreciar los saberes previos que tienen los profesores, la reflexión colectiva sobre algunas propiedades de los triángulos y algunos prejuicios pedagógicos principalmente cuando comprueban la pertinencia de las instrucciones (tal como se observa en el mensaje emitido cuando se indica que deben revisar que estén bien las medidas, orientando a que es el proceso de verificación), también se observa que en toda la actividad se omite el uso del compás en la actividad lo que resulta significativo porque en la perspectiva teórica y el discurso del constructor se asume que las figuras geométricas se construyen con ayuda de un instrumento que permite producir una forma visual con una propiedad geométrica específica, por esta razón, en este caso se comprueba que no es posible

construir una figura sin tomar en cuenta sus propiedades geométricas. Finalmente, también es posible apreciar el despliegue de la visualización no icónica y su importancia en la actividad geométrica.

Conclusiones

Resulta fundamental la importancia de la visualización en el proceso de construcción y de prueba, ya que además de favorecer -en el caso de este análisis- la identificación de los diferentes tipos de triángulos y sus propiedades, facilita la reflexión sobre los criterios de construcción de los triángulos y además contribuye a la definición de los tipos de prueba que se pueden solicitar a los profesores. Con ello se hace evidente la relación de la visualización con los otros componentes del plano cognitivo de un ETG.

Dentro de las limitaciones de la actividad puede mencionarse el hecho de que las propiedades del triángulo quedaron circunscritas en los conocimientos básicos de clasificación y propiedades generales, es por ello que la descripción de los profesores no consideró por ejemplo la demostración del teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo que se plantea como: *sea un triángulo ABC, demostrar que A + B + C= 1 ángulo llano (180°).*

Otra limitante es que en la génesis discursiva (elaboración de instrucciones) no se mencionó al compás como instrumento para la construcción de los triángulos, tampoco lo emplearon los profesores en el proceso de construcción.

Referencias y bibliografía

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Siences Cognitives*, 10, 5-53. Francia: IREM de Strasbourg.

Henríquez, C. (2014). *El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundario.* Tesis doctoral. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, pp. 175-193. IREM de Strasbourg.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.

Thompson, J. (1993) *Geometría.* México, D.F.: Limusa.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O futuro professor de Matemática em Estágio

Patrícia **Perlin**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete
Brasil
patricia.perlin@iffarroupilha.edu.br
Anemari Roesler Luersen Vieira **Lopes**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
anemari.lopes@gmail.com

O presente artigo é recorte de uma pesquisa de doutorado sobre o Estágio Curricular Supervisionado na formação inicial de professores de Matemática, ancorada na Teoria Histórico-Cultural e na Teoria da Atividade. Assim como a maioria das atividades humanas, Franco e Longarezi (2011) consideram que exercício da docência também se dá de forma coletiva. Deste modo, analisar as relações sociais que são estabelecidas no Estágio é fundamental para compreendermos a gênese da atividade docente enquanto estrutura social, na maneira como ocorrem suas relações enquanto formas de apropriações de experiências sociais. Como uma das premissas da THC é a de que o desenvolvimento humano é produto das relações sociais, Leontiev (2012) nos esclarece que no decorrer do processo de desenvolvimento do sujeito, sob a influência das circunstâncias concretas da sua vida, o lugar que ele efetivamente ocupa no sistema de relações humanas se altera, assim como a altera a sua atividade principal.

Destarte, ao investigarmos o Estágio como etapa fundamental na formação inicial de professores e que como uma atividade humana coletiva está no centro de um emaranhado de relações sociais, buscamos compreender as relações estabelecidas nele que são determinantes para a aprendizagem da docência. Neste artigo, particularmente, olhamos para essas relações a partir das preocupações dos estagiários sobre o seu ingresso na escola ao assumirem o papel de professores. Para atingir este objetivo constituímos um espaço formativo, constituído de 20 encontros, intencionalmente organizado dentro de um componente curricular de Estágio em Matemática no Ensino Médio em que participaram dez acadêmicos de um Instituto Federal brasileiro. Organizamos metodologicamente a investigação conforme as ideias de Araujo e Moraes (2017) que apresentam os princípios da pesquisa em Educação como atividade no sentido atribuído pela Teoria Histórico-Cultural. Segundo as autoras, essa maneira de pesquisar possui dimensão orientadora e dimensão executora. Em nossa investigação, a primeira dimensão permitiu investigar a formação do futuro professor de Matemática no Estágio e a segunda promover ações: de apreensão da realidade por meio de gravações em áudio de sessões reflexivas (Ibiapina, 2008) realizadas nos encontros, fichas, questionários e relatórios dos sujeitos; de análise do material empírico através de unidades de análise de Vigotski (2009); e de sistematização e apresentação dos resultados utilizando os episódios de Moura (1992). Nesse trabalho destacamos uma das nossas unidades de análise em que buscamos compreender as

relações estabelecidas pelos estagiários no Estágio desencadeados a partir do enfrentamento e da superação das tensões e dos conflitos perpassadas por eles nesta etapa da sua formação inicial. Dos desafios iniciais apontados pelos sujeitos frente à transição de alunos (em atividade de estudo) a professores (em atividade de ensino), nos foi possível compreender as relações que os estagiários foram estabelecendo, sendo uma delas a estabelecida entre os estagiários e seus alunos, que permitiu-lhes compreender o papel social do professor por meio da atribuição de novos sentidos pessoais para atividade de ensino na medida em que foram surgindo novas necessidades ao assumirem o papel de professores.

Panossian, Moretti & Souza (2017, p. 148), consideram que os professores desenvolvem seu próprio pensamento teórico sobre a docência à medida que lidam com a necessidade de ensinar. Deste modo, podemos inferir que a relação dos estagiários com os seus alunos foram determinantes dos modos pelos quais eles aprenderam a ensinar no Estágio. Moura (1999, p. 10) considera que aos estagiários "é necessário que percebam o modo como se faz ensino em sala de aula". Neste sentido, a figura do professor supervisor, que recebe o estagiário em sua turma na escola, também é fundamental para que eles possam ter discernimento sobre como ocorre o trabalho do professor no ambiente escolar. O que e como ensinar e o modo como devem relacionar-se com os estudantes são aprendizagens decorrentes da relação que o estagiário estabelece com este professor. Concluímos que a apropriação de elementos inerentes à aprendizagem da docência – tal como ensinar e como relacionar-se com os alunos – é determinada por estas duas relações, entre estagiário e alunos e estagiário e professor supervisor.

Referencias e bibliografia

Araujo, E. S. & Moraes, S. P. G. (2017). Dos princípios da pesquisa em educação como atividade. In: M. O. de Moura (Org.). *Educação escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural* (pp. 47-70). São Paulo: Edições Loyola.

Franco, P. L. J. & Longarezi, A. M. (2011). Elementos constituintes e constituidores da formação continuada de professores: contribuições da teoria da atividade. *Educação e Filosofia*, 25 (50), 557-582.

Ibiapina, I. (2008). *Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos*. Brasília: Líber Livro.

Leontiev, A. N. (2012). Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: L. S. Vigotsky, A. R. Luria, & A. N. Leontiev. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem* (pp. 59-84). São Paulo: Ícone.

Moura, M. O. de. (1992). *Construção do signo numérico em situação de ensino*. Tese de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo, SP, Brasil.

Moura, M. O de. (1999). *O estágio na formação compartilhada do professor: retratos de uma experiência*. São Paulo: FEUSP.

Panossian, M. L., Moretti, V. D. & Souza, F. D. (2017). Relações entre movimento histórico e lógico de um conceito, desenvolvimento do pensamento teórico e conteúdo escolar. In: M. O. de Moura (Org.). *Educação escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural* (pp. 125-152). São Paulo: Edições Loyola.

Vigotski, L. S. (2009). *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Quehacer matemático y validación: ideas de futuros profesores

Cristina **Esteley**
Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
esteley@famaf.unc.edu.ar
María Florencia **Cruz**
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral
Argentina
ma.florenciacruz@gmail.com
Sara **Scaglia**
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
Argentina
sbscaglia@gmail.com

Resumen

La discusión sobre las actividades matemáticas que deben poner en juego estudiantes en los diferentes niveles del sistema educativo y, en lo que atañe a la validación, se encuentra vigente en el campo de la educación matemática y resulta relevante para la formación de profesores. Este trabajo, que forma parte de una investigación más amplia, presenta un estudio de producciones escritas de futuros profesores en matemática en las que expresan sus ideas respecto a las actividades que caracterizan el quehacer matemático y en particular a la validación. El estudio se realiza apelando a una metodología de corte cualitativa. En el mismo, intervienen futuros profesores, del Profesorado en Matemática de una Universidad Nacional de Argentina.

El análisis realizado evidencia un reconocimiento por parte de los estudiantes a prácticas de validación ligadas principalmente a la demostración formal y esta última como actividad principal y fundamental del trabajo matemático.

Palabras clave: Quehacer Matemático, Validación, Futuros Profesores.

Introducción

Este trabajo presenta resultados preliminares de una investigación amplia realizada en el marco de una tesis de doctorado que se vincula con las atribuciones de sentido, por parte de futuros profesores en matemática de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), sobre los procesos de validación matemática, cuando estos sujetos se involucran en un contexto de trabajo matemático-geométrico mediado por actividades de modelización matemática (MM) de naturaleza intra-matemática y el uso de tecnologías. Si bien el foco central es la atribución de sentidos en relación con los procesos de validación matemática, necesariamente con la tesis y con esta comunicación, emergen tres temáticas sustanciales para la educación matemática: 1) la

formación de profesores, 2) el trabajo con MM y 3) el uso de tecnología en clases de matemática. Sus relevancias se hacen evidentes en los trabajos de dos Survey Teams presentados en el marco del ICME13. Uno de ellos focalizado en la formación de profesores y otro en la educación geométrica y uso de tecnologías. De manera similar se pueden destacar los Topic Study Groups (TSG) tales como el TSG21 vinculado a MM y el TSG48 interesado en el desarrollo profesional de futuros docentes de matemática (Kaiser, 2017). Un ejemplo de producción que da cuenta del avance y preocupación sobre la interacción entre estas tres temáticas es el texto editado por Stillman, Blum y Kaiser (2017). En el mismo se recopilan los principales trabajos presentados en la 17 Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de la Modelización Matemática y Aplicaciones (ICTMA17) y se hace evidente el deseo por buscar mayores conexiones entre los trabajos sobre MM y otras producciones propias del campo de la Educación Matemática ampliando las fronteras del ICTMA. Como se pone en evidencia más adelante en este escrito, ciertos capítulos de tal texto avanzan sobre validación al trabajar con profesores cuando los mismos se involucran con actividades de MM fundamentalmente de fenómenos extra-matemático, sin embargo, no hay artículos que den cuenta de validación en contextos de MM al trabajar con fenómenos intra-matemáticos.

En el ámbito local existen avances en el trabajo con MM de fenómenos extra-matemáticos y futuros profesores o profesores en servicio. Entre otros, los trabajos presentados en Esteley (2014) y en Villarreal, Esteley y Smith (2018). En todos ellos se discute acerca de algunos procesos de validación seguidos por futuros profesores. Sin embargo, en Villarreal et al. (2018) se marca como una necesidad profundizar acerca de lo que acontece con futuros profesores de universidades argentinas, cuando deben validar los modelos construidos para dar cuenta de fenómenos extra o intra-matemáticos. En este marco, los resultados de la tesis y este estudio podrían ofrecer aportes al desarrollo local, ampliar las fronteras de lo ya hecho para luego contrastar con producciones del ámbito internacional.

Discusiones en torno a la validación en el ámbito del trabajo matemático se hacen presentes y resultan relevantes en el contexto internacional de educación matemática (Reid y Knipping, 2010; Hanna y De Villiers, 2012; Stylianides y Harel, 2018). En Argentina documentos curriculares oficiales para escuelas secundarias y para formación docente expresan la necesidad de que los estudiantes en diferentes instancias de formación experimenten escenarios educativos en los que se propicien validaciones avanzando desde empíricas a otras con mayor grado de formalidad (Diseño Curricular Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe, 2014; Propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de profesorado universitario en matemática, 2012).

Se señala también que las actividades que se proponen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, entre ellas actividades de validación, deben estar influenciadas por rasgos característicos del quehacer matemático. Al respecto Brousseau (1986) afirma “El trabajo intelectual del alumno debe ser por momentos comparable a esta actividad científica” (p.6). Un modo de pensar la matemática como actividad científica, es apelando a la noción de la matemática como ciencia de los modelos.

En el marco de las ideas previas y atendiendo a lo explicitado en el currículo local de matemática para escuelas secundarias, se señala como desafío para la formación docente la reflexión, análisis y puesta en juego de actividades que caracterizan al quehacer matemático, incluyendo el proceso de validación. A partir de tales consideraciones, se lleva a cabo la tesis que enmarca el presente trabajo, en el que se estudia la producción escrita de futuros profesores

cuando dan cuenta de sus ideas respecto a la validación y a las actividades que caracterizan a la ciencia matemática. En particular se busca dar respuestas a las preguntas: a) ¿Qué actividades reconocen estos futuros profesores como propias de la matemática o del quehacer matemático? y b) ¿Qué entienden por procesos de validación en instancias de trabajo matemático?

Marco Teórico

Si bien en el marco de la tesis se parte de pensar la matemática como ciencia de los modelos y, en ese sentido, las actividades matemáticas consideradas relevantes para la investigación son aquellas relativas al proceso de MM y en ese ámbito el proceso de validación, para este trabajo se decide tomar aportes más generales. Esta decisión se toma porque el presente estudio se focaliza en instancias iniciales de la tesis y, según datos ya recogidos se reconocen historias de formación de los sujetos con los que se trabaja (Cruz, Esteley, Scaglia, 2018) muy alejadas del trabajo con MM. En ese sentido, se amplían las fronteras del trabajo con MM, tomando aportes de autores tales como Bishop (2001), reconocido por sus aportes en el ámbito internacional, e Itzcovich (2007), con reconocimiento local, para dar cuenta de actividades vinculadas con el quehacer matemático. Se apela a producciones de Balacheff (2000) o Reid y Knipping (2010) para caracterizar procesos de validación. Se toman aportes de Doerr, Ärlebäck y Misfeldt (2017) y Saeki, Kaneko y Saito (2017) para avanzar sobre ideas relativas a validación en procesos de MM.

Actividades que caracterizan al quehacer matemático

Bishop (2001) considera la matemática como producto cultural y describe actividades que propician la producción matemática en diferentes culturas, reconociendo su potencial para el desarrollo de la comprensión matemática. Por la naturaleza del propósito y alcance de esta comunicación, interesa destacar la de explicar. Para el autor, explicar posibilita la conexión entre fenómenos y la teoría que los fundamenta, eleva la cognición humana más allá de la experiencia directa, permite que los demás y el propio sujeto comprendan el por qué del fenómeno que sucede. De esta actividad surgen reglas lógicas, pruebas, gráficos, ecuaciones, etc.

Itzcovich (2007) discute el sentido y las características que se otorgan al trabajo matemático escolar. Señala que la actividad matemática reconocida por los sujetos se encuentra influenciada por sus experiencias con procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, determina actividades matemáticas que deben realizar los alumnos para involucrarse tales como: resolver problemas, explorar y representar, elaborar conjeturas, validar conjeturas, determinar dominio de validez y generalizar y modelizar.

Itzcovich (2007) afirma que en la resolución de problemas se movilizan conocimientos disponibles que no son suficientes para dar una respuesta, por lo que se producen conocimientos. En este sentido destaca la importancia de los procesos de representación y la puesta en juego de exploraciones. Particularmente en instancias de producción de conocimientos respecto a una problemática refiere a modelizar y organiza dicha actividad en etapas: recorte de la problemática en juego, identificación y establecimiento de relaciones entre variables y transformación de las relaciones en función de la matemática. El autor señala que en instancias de trabajo matemático se conjetura, es decir se establecen afirmaciones de las que se tiene cierto margen de certeza, aunque no se pueda asegurar que realmente es así. Luego de la formulación de una conjetura se lleva a cabo la validación, en la que se emplean argumentos matemáticos para fundamentar los resultados obtenidos.

Validación en el ámbito del trabajo matemático

Los términos que se utilizan para referenciar la validación de una aseveración se emplean de diferentes modos en la vida cotidiana, las matemáticas y la educación matemática. Este hecho puede producir confusión y particularmente ser un obstáculo para futuras investigaciones en el ámbito de la educación matemática (Balacheff, 2002/2004; Reid, 2005, citados en Reid y Knipping, 2010). Balacheff (2000) hace referencia a la expresión "procesos de validación" cuando estudiantes se involucran en el trabajo matemático del siguiente modo:

> En este estudio utilizaremos la palabra razonamiento para designar la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información. Le asignaremos el término procesos de validación a esta misma actividad cuando tenga como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración). (p.13)

Reid y Knipping (2010) y Balacheff (2000) consideran la prueba como un modo particular de validación empleado comúnmente en el aula de matemática de distintos niveles. En particular, los primeros señalan que estudiantes de matemática moderna pueden considerar que el avance de esta ciencia se logra por la acumulación de conocimiento, debido a la fuerte influencia de las características y formas de "prueba" que se muestran en diversos textos desde la época de Euclides. Los autores destacan que el número de pruebas que cumplen con la definición formalista planteada por Aristóteles no son muchas, lo cual puede ser una fuente de confusión cuando se afirma que los estudiantes de matemática deben comprender y realizar pruebas formales. En este sentido, Balacheff (2000) distingue entre pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales. Las primeras son prácticas y recurren a la acción real, a la experiencia o a la ostensión y las segundas se apoyan en la formulación de propiedades y relaciones que se ponen en juego por lo que se alejan de la acción real.

Respecto a la validación en el marco del proceso de MM, cabe destacar que Doerr et al. (2017) al discutir acerca del empleo de ciclos de modelados, señalan la importancia de que las actividades de modelado que enfrentan estudiantes excedan la creación de modelos descriptivos que se validan por comparación de datos empíricos, con el fin de avanzar hacia actividades que incluyan explicaciones, implicaciones varias y el uso de medios computacionales. En esta línea Saeki et al. (2017) realizan una investigación en la que se fomenta el pensamiento crítico de estudiantes que validan modelos empleando hechos históricos y religiosos potenciando la toma de decisiones en el marco extra-matemático.

Metodología de la investigación y procedimientos seguidos

Para dar cuenta de los objetivos generales de la investigación que enmarca este estudio y con el fin de responder las preguntas formuladas en este trabajo, se opta por una investigación cualitativa, de corte interpretativo. Algunos de los procedimientos metodológicos empleados son compatibles con ciertos rasgos característicos de la investigación de diseño (Confrey, 2006).

La investigación se lleva a cabo con 17 futuros profesores que cursan Geometría Euclídea Espacial (GEE) en el primer semestre de 2018. El programa de formación tiene una duración de 5 años y se organiza con asignaturas de matemáticas específicas (61% sobre el total de materias), asignaturas de educación general (13%; ej. psicología de la educación), asignaturas de educación matemática (8%) y asignaturas de formación general (18%; ej. inglés). La asignatura GEE se

dicta durante el primer semestre del tercer año del profesorado. Los estudiantes del mismo no han transitado aún por asignaturas de educación matemática y no han experimentado escenarios educativos en los que se emplea la MM como abordaje pedagógico. Se asume que en su recorrido por la carrera han tenido amplias oportunidades para interactuar con diversas actividades propias del quehacer matemático y con diferentes modos de validación en este ámbito.

En el marco de la tesis, se diseña una propuesta de enseñanza en la que se trabaja el tema "poliedros" en un escenario de modelización en la que intervienen todos los alumnos inscriptos en el curso. La propuesta completa se desarrolló en seis encuentros de 3 hs reloj cada uno durante las tres primeras semanas de cursado. Las clases estuvieron a cargo de las docentes encargadas del curso. La puesta en aula de la primera clase tiene dos instancias principales. En la primera las docentes realizan una descripción de los modos de trabajo que se emplean en la materia, su organización y algunas consideraciones respecto al empleo del método axiomático deductivo en el dominio del trabajo geométrico. En la segunda los estudiantes responden la siguiente consigna de trabajo:

Tabla 1

Consigna presentada a los estudiantes (Notas de campo).

Consigna 1: Lean en grupos de cuatro estudiantes los siguientes interrogantes y discutan posibles respuestas a los mismos. Luego realicen una narración en la que recuperen las respuestas de todos los integrantes del grupo (explicitando los acuerdos y desacuerdos que hayan surgido durante las discusiones): 1- ¿Cuáles son las actividades que lleva a cabo una persona que hace Matemática? 2- ¿Qué entienden por "proceso de validación" en instancias del trabajo matemático?

Con estas preguntas, previas al trabajo con MM, se buscaba que los estudiantes pusieran en evidencia respuestas formuladas a partir de sus experiencias matemáticas anteriores a la inmersión en el escenario de MM[1] y en el trabajo de validación que lo acompaña. En esa primera clase se encuentran presentes 15 estudiantes organizados en tres grupos de cuatro integrantes y un grupo de tres. Durante esta instancia se registra la información en audio, video y registros de *Word* donde realizan las narraciones objeto u unidad textual de análisis. Con el análisis se busca identificar las actividades matemáticas con que cada grupo da sentido al quehacer matemático y los modos en que dan cuenta de la validación. Con ese fin, se realizan lecturas cuidadosas de las narraciones vinculadas con la Consigna 1 y se identifican términos o frases relevantes utilizadas por cada grupo. Los grupos se identifican como G1, G2, G3 y G4. Los extractos textuales de los estudiantes se presentan en letra cursiva y son incluidos como evidencia de las interpretaciones realizadas. Se señala que este trabajo permite reconocer, previo a la entrada al escenario de MM, las primeras ideas de los estudiantes para luego poder contrastar con las ideas que se irán configurando en instancia del trabajo con MM.

Resultados: Análisis de las producciones de los estudiantes

El quehacer matemático

La primera aproximación al hacer matemática del G1 se vincula principalmente con resolver ejercicios intra y extra-matemáticos. Los integrantes explicitan la necesidad de

[1] En el escenario de MM puesto en aula se invita a la reflexión acerca del proceso de MM vivido por ellos, y se hace hincapié en los procesos de modelización y validación.

comprender los conocimientos anteriores (planteado por autores) y poder en base a eso, hacer nuestro camino, es decir, explorar, cometer errores que nos permitan llegar a verdades ya existentes o nuevas. Se considera que con "ejercicios" refieren a dar respuestas a situaciones dadas por otros empleando el lenguaje matemático. Respecto a lo planteado por Itzcovich (2007) se relaciona esta consideración con la resolución de problemas. Se evidencia también la vivencia de experiencias en las que la actividad matemática se vincula con la comprensión de producciones de matemáticos, y luego de lo anterior la experiencia con un tipo de trabajo más constructivo, como ser, resolver problemas, explorar y representar (Itzcovich, 2007).

El G2 en un primer momento expresa que las actividades que se realizan al hacer matemática son *razonar, deducir, demostrar, resolver, relacionar, crear hipótesis, mediante el empleo de todas las herramientas como ser software, material bibliográfico, entre otros*. En este fragmento se aprecia una actividad vinculada a la de explicación (Bishop, 2001). También se hace evidente la validación en ámbito de trabajo matemático, mientras que, al indicar resolver, relacionar y crear hipótesis se establece relación con resolver problemas y conjeturar (Itzcovich, 2007). Emerge así el razonamiento en el sentido de Balacheff (2000). Luego afirma que al hacer matemática se enseñan y transmiten conocimientos matemáticos, que se vincula con ideas próximas a la reproducción de ideas, conceptos y nociones matemáticas más que a la producción propiamente dicha.

El G3 destaca en primer lugar la búsqueda, selección y análisis de material bibliográfico, nuevamente se pone en escena la necesidad de interpretar y trabajar en torno a conocimientos disponibles en fuentes que se consideran legitimadas y no se aprecia referencia a la construcción personal de otras nociones. Luego plantea que al hacer matemática se realizan las siguientes actividades: *razonar, deducir, investigar, conjeturar, establecer relaciones, buscar contraejemplos, demostrar, entre otras*. La idea de matemática se encuentra principalmente vinculada a la explicación (Bishop, 2001) y a la elaboración y validación de conjeturas (Itzcovich, 2007). Finalmente destaca que las actividades que se realizan dependen del rol que ocupa la persona, sin embargo, no realiza mayores consideraciones al respecto.

Los estudiantes del G4 afirman: *Para nosotras una persona que hace matemática realiza las siguientes actividades: en primer lugar elige un tema que le interese, luego se aboca a la investigación de dicho tema y su aplicación en diferentes ámbitos. Luego elabora un esquema con las ideas más relevantes recaudadas de la investigación, para luego proponer (crear) nuevos conceptos (definiciones, propiedades, teoremas, axiomas, etc.)*. Se destaca que los estudiantes consideran la posibilidad de creación de la matemática y sus ideas se relacionan con la MM en términos de Itzcovich (2007).

En las producciones de los tres primeros grupos se evidencia un reconocimiento de prácticas matemáticas en las que parecieran prevalecer la reproducción más que prácticas vinculadas con la producción y construcción de nuevos conceptos matemáticos. Sin embargo, se destaca que G4 realiza consideraciones respecto a la creación matemática. De las actividades matemáticas mencionadas por los autores en la revisión bibliográfica se aprecia de modo predominante la referencia por parte de los estudiantes de actividades ligadas a la resolución de problemas, la formulación de conjeturas y a su validación y/o explicación. A su vez se destaca que no mencionan como parte fundamental de la actividad matemática la formulación de problemas y la resolución por parte del sujeto que los elabora. Tampoco se aprecia preponderante evocación a la exploración, generalización, modelización, entre otros.

La validación

El G1 respecto a la validación destaca que se entiende como el proceso *mediante el cual podemos otorgar legitimidad a cierta teoría o enunciado. Durante este proceso, la justificación de la teoría se realiza a través de un conjunto de argumentos (axiomas, teoremas demostrados, definiciones) o es descartada, al encontrar un contraejemplo o contradicción con una proposición ya verdadera*. Se aprecia el reconocimiento de la validación relacionada principalmente con el empleo de "pruebas intelectuales" en términos de Balacheff (2000), particularmente en lo que atañe a la demostración a partir de un conjunto de axiomas y como parte del proceso de validación se referencia también a la refutación.

El G2 plantea que ese proceso consiste en seguir pasos para lograr un resultado válido. A su vez destaca que *en estos pasos se vuelcan todos aquellos conocimientos y herramientas adquiridas y ya validadas con anterioridad*. Menciona la puesta en juego de pruebas, aunque no realiza consideraciones sobre el uso de la demostración formal mediante el método axiomático deductivo. Al señalar el empleo de afirmaciones validadas previamente posiblemente refiere al uso de pruebas intelectuales (Balacheff, 2000), pero no limita esta idea a un único método.

El G3 afirma que, con proceso de validación en instancias del trabajo matemático, se alude al *análisis de proposiciones para refutar o afirmar la veracidad de las mismas. En caso de ser válidas se demostrarán y en caso contrario se desarrollará un contraejemplo*. Se aprecia nuevamente la necesidad del empleo de pruebas intelectuales (Balacheff, 2000), en particular el uso de la demostración reconocida en la comunidad matemática. Respecto a la mención del uso del contraejemplo para refutar, es posible que refiera a proposiciones de carácter universal, pues no se puede refutar con un contraejemplo una de carácter existencial.

El G4 señala: *entendemos que es la verificación de que lo que se creó es válido a través de una demostración*. En este caso claramente se vincula la validación con la demostración.

En general, los grupos consideran que la validación constituye una parte sustancial del trabajo matemático. Se aprecia también un reconocimiento de la demostración aceptada por la comunidad matemática como fiable para aceptar una conjetura. Esto puede estar influenciado por experiencias vividas en las diferentes asignaturas de matemáticas específicas transitadas en el marco de la carrera y más aún por la presentación de la asignatura GEE en la que se discuten ideas vinculadas con el empleo y modo de proceder con el método axiomático deductivo.

A modo de discusión

Los resultados presentados dan respuestas a las dos preguntas planteadas. Se destaca que, si bien las respuestas ofrecidas, en sinergia con lo planteado por Reid y Knipping (2010) evidencian reconocimiento por parte de los estudiantes a formas de probar con el estilo de presentación de los Elementos de Euclides, las mismas no evidencian apreciaciones respecto a validaciones de tipo empírico. En este marco, cabe destacar que tampoco se realizan consideraciones de validaciones en el sentido mencionado por Doerr et al. (2017) y Saeki et al. (2017). Esto se debe quizás porque el contexto de trabajo matemático presente en estos artículos es esencialmente extra-matemático que contrastaría con los ámbitos de trabajo matemático usuales para los futuros profesores de la UNL. Cabe recordar que el propósito de la tesis es focalizarse en procesos de MM intra-matemáticos, de este modo: algunas percepciones de los estudiantes van a ir siendo reconsideradas y será necesario profundizar más aun la revisión de las referencias ya que son escasas las producciones que dan cuenta de los procesos de validación al

trabajar con MM intra-matemática. Sin embargo, aportes de los autores recién mencionados pueden ofrecer pistas para repensar el trabajo de validación en el ámbito de formación de los futuros profesores cuando ellos trabajan en espacios de MM de fenómenos intra-matemáticos

Referencias y bibliografía

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente.

Bishop, A. (2001). Lo que una perspectiva cultural nos cuenta sobre la historia de las matemáticas. *Uno*, 26, 61-72.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33*-115. Traducción de J.Centeno Pérez, B. Melendo Pardos, J. Murillo Ramón.

Confrey, J. (2006). The Evolution of Design Studies as Methodology. En R. Keith Sawyer (Ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*. (pp. 135-151). New York: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.

Cruz, M.F., Scaglia, S. & Esteley, C. (2018). La construcción de definiciones geométricas. En Di Franco (Ed.), *VII Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 42- 47). Santa Rosa: Universidad Nacional de la Pampa.

Doerr, H.M., Ärlebäck, J.B. & Misfeldt, M. (2017). Representations of Modelling in Mathematics Education. En G.S. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education.* (pp. 71-81). Switzerland: Springer.

Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: Voces y Sentidos*. Córdoba: Filosofía y Humanidades/UNC.

Hanna, G. y De Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education.* New York: Springer.

Itzcovich, H. (Ed.). (2007). *La matemática escolar*. Buenos Aires: Aique.

Kaiser, G (Ed.) (2017) Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. Cham: Springer

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe. (2014). Diseño Curricular. Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe.

Propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de profesorado universitario en matemática. (2012). Disponible en: http://www.cin.edu.ar/comisiones/asuntos-academicos-material-en- tratamiento/subcomision-de-profesorados/

Reid, D and Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching.* The Netherlands: Sense Publishers.

Saeki, A., Kaneko, M. & Saito, D. (2017). Case Study of Pre-service Teacher Education for Mathematical Modelling and Applications Connecting Paintings with Mathematics. En G.S. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education.* (pp. 313-323). Switzerland: Springer.

Stillman, G.S., Blum, W. & Kaiser, G. (Eds.). (2017). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education.* Switzerland: Springer.

Stylianides, A.J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. An International Perspective*. Cham: Springer.

Topic Study Group 21.*Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*. ICME13. Hamburg, 2016. Disponible en: http://www.icme13.org/files/tsg/TSG_21.pdf.

Topic Study Group 48. *Pre-service mathematics education of secondary teachers*. ICME 13. Hamburg, 2016. Disponible en: http://www.icme13.org/files/tsg/TSG_48.pdf.

Villarreal, M., Esteley, C. & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM*, 50, 327–341.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Acciones formativas en el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Salta

María de las Mercedes **Moya**
Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta
Argentina
maritamoyaster@gmail.com
Mario Ubaldo **Avila**
Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta
Argentina
marioavila390@gmail.com

Resumen

Presentamos un recorrido de las acciones formativas que se están desarrollando en el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Salta, enmarcadas en el Proyecto de Investigación "Tecnomatemática: Profesor Universitario con TIC". El mismo, apuesta a la virtualización de la carrera, tomando como puntapié la formación inicial del profesorado. Se diseñan estrategias de mediación de saberes matemáticos, a través de la comunicación verbal, escrita, producción de materiales (textuales, auditivos, audiovisuales, utilización de software), para que el estudiante-docente sea capaz de producir proyectos educativos viables. Las mismas apuntan al desarrollo de habilidades y destrezas que favorezcan su accionar. Se pretende que los aspectos trabajados se compenetren en un todo holístico que involucren los saberes matemáticos, técnicos-tecnológicos, pedagógicos-didácticos. Las mayores dificultades, fueron de tipo académico y de comunicación. Planteamos propuestas a futuro a los fines de poder cambiar paradigmas educativos que se adapten a los tiempos de nuestra era.

Palabras clave: educación matemática, formación docente, comunicación, virtualidad, producción de materiales.

Introducción

El sistema educativo argentino, fue pensado en el siglo XIX; no obstante, los docentes que hoy tenemos en las aulas se formaron en el siglo XX y los alumnos son del siglo XXI. Quizá esta brecha temporal, es en parte la responsable de las constantes opiniones que se manifiestan sobre el bajo rendimiento académico de los alumnos argentinos en el campo de la matemática.

De la reflexión sobre estas brechas temporales, emerge la necesidad de una formación del

profesorado en matemática acorde a los tiempos actuales. Para ello, es necesario pensar y repensar las prácticas educativas en todos los ámbitos del sistema y situarlos al entorno sociocultural en el que están inmersos.

En la Facultad de Ciencias Exactas, de la Universidad Nacional de Salta (UNSa) se propone la formación del Profesor en Matemática, a partir del cursado de 25 asignaturas, con dictado presencial y una duración de cuatro años. Las asignaturas se organizan en dos áreas: Formación General y Especializada, cuyo objetivo es facilitar la compresión por parte del egresado de la realidad educativa y de los contextos de su futura actuación profesional; y el área de Formación Orientada, en la que se contempla el conocimiento de los principales tópicos de los campos del Análisis, Álgebra, Geometría, Lógica, Informática, Topología, Probabilidades y Estadística, fundamentadores de los temas que se enseñan en todos los niveles del sistema educativo. El grupo de estudiantes que ingresa a la carrera pertenece a la franja etaria de 18-20 años, y se caracteriza por ser heterogéneo tanto en género como en posición socio-económica. Consultados sobre sus motivaciones, manifiestan el "gusto y facilidad para enseñar matemática", "creen tener vocación docente", "consideran que la carrera es corta y fácil". Además el entorno social de la provincia de Salta demanda Profesores en Matemática, por lo cual existen variadas y múltiples oportunidades laborales, que resultan atractivas para los proyectos personales de los estudiantes.

En este marco, y ante el panorama en el que interactuamos, se plantea el Proyecto de Investigación N° 2349/0: "Tecnomatemática: Profesor Universitario con TIC"; dependiente del Consejo de Investigaciones de la UNSa. Se pretende evaluar las acciones formativas que se llevan a cabo en la carrera, mixturando la formación presencial con la incorporación de metodologías de trabajos en Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje. Entendemos que estos espacios actúan enriqueciendo las prácticas educativas, promoviendo nuevas metodologías de trabajo, nuevos canales de comunicación dentro y fuera del aula, y principalmente, nuevos perfiles de docentes y alumnos, acordes al escenario sociocultural del siglo XXI.

En esta comunicación, presentamos un breve recorrido de las acciones formativas que se están desarrollando en el Profesorado en Matemática de la UNSa. Las reflexiones son el resultado del trabajo de investigación que se desarrolla y que apuesta a la virtualización de la carrera, tomando como puntapié la formación inicial del profesorado.

Marco Teórico

La educación superior es un factor que trasciende en la sociedad, por lo tanto las universidades no se pueden quedar rezagadas a los cambios de los sistemas, las metodologías y las prácticas. Como consecuencia de la revolución tecnológica, los espacios virtuales de enseñanza y aprendizaje han adquirido un mayor protagonismo en las prácticas educativas, resignificando las teorías pedagógicas y didácticas. En tal sentido la formación del profesorado que se propone en la UNSa, debe contemplar estos cambios de paradigmas, ya que el educador que se está formado, será el que los experimentará en sus prácticas. La idea es dar lugar a la irrupción de una nueva pedagogía relacionada a la virtualización y digitalización de la enseñanza, asociada a la transición entre un enfoque basado en la transferencia de conocimientos, a uno centrado en la adquisición de competencias.

La idea de virtualizar un aula, y mucho más una carrera, no es sólo una cuestión de incorporar computadoras en la clase, tampoco consiste sólo en trabajar con Entornos Virtuales de Enseñanza-aprendizaje para la mediación de contenidos matemáticos, sino más bien implica

romper los límites temporales-espaciales de lo que es el aula, también implica preguntarse dónde, cuándo, cómo y con quién los estudiantes realizan sus aprendizajes. (Burbules, 2008)

De acuerdo al Plan de Estudios vigente para la carrera del Profesorado en Matemática, consideramos necesario que en la formación del docente se trabajen sobre estos aspectos: estrategias de comunicación dentro de la situación de enseñanza – aprendizaje; producción de materiales educativos acorde al contexto y su vinculación de los mismos a través de la generación de proyectos educativos viables, en los cuales la matemática sea el eje central.

Entendemos que la comunicación tanto oral como escrita, es fundamental para la actividad profesional del educador en general, y del educador en matemática en particular. Deben explorarse en la formación inicial del profesorado, habilidades comunicativas que se manifiesten tanto en la presencialidad como en la virtualidad. En la actividad de comunicación, identificamos los "Diálogos Sociales", caracterizados por la informalidad y la necesidad de compartir asuntos personales; los "Diálogos Argumentativos" nacidos desde las lógicas individuales y caracterizados por la defensa de puntos de vista (destacamos que este tipo de diálogo es el propio de la actividad matemática); y por último los "Diálogos Pragmáticos", donde se ponen en juego el conocimiento de todos para construir desde distintas miradas, significados de un mismo tema. (Moya, 2017).

Por otro lado, es necesario tener bases teóricas sobre la actividad producción de materiales educativos, que son a su vez herramientas de comunicación, dentro del aula. Un material educativo es todo el conjunto de informaciones, orientaciones, objetos, productos, actividades y propuestas que se elaboran ad-hoc para guiar al alumno en su proceso de aprendizaje (Sabulsky, 2007). Pensar en el diseño y producción de materiales educativos por parte del docente, posee ciertas características intrínsecas que le dan un alto significado. En primer lugar, el material educativo se asume como transmisor de información, instrumento de conocimiento, medio de formación y alfabetización y herramienta de investigación. (Cabero, 1992). En segundo lugar, la producción de materiales se asume como una experiencia de aprendizaje, de fomento del trabajo colaborativo, donde se pondrán en juego aspectos artísticos, creativos, pedagógicos, comunicativos, técnicos, tecnológicos, entre los más relevantes. Teniendo en cuenta la función de estos materiales educativos, como instrumentos de mediación entre el objeto de aprendizaje y el sujeto que desea aprender, la responsabilidad del docente es dar un uso significativo a estos materiales, de tal manera de poder asumir un canal de comunicación vehiculizada con los mismos. (Méndez Garrido, 2003).

El concepto de "Tecnociencia" y en particular el de "Tecnomatemática", establece la relación entre informática y ciencia al servicio de las actividades de investigación (Echeverría, 2003). Esta concepción, unida al aspecto pedagógico - didáctico, al cual se suma la Matemática, Informática y Etnomatemática, nos permite pensar la enseñanza situada de la matemática con medios digitales.

Nuestra concepción, como docentes investigadores de su propia práctica, es plantear una metodología de trabajo, en la que el docente en formación combine matemática y tecnología, (Tecnomatemática) para la producción de proyectos de enseñanza y aprendizaje, con un Diseño Instruccional (DI) acorde. Debe entenderse que un DI nos permite prever, organizar y ofrecer pautas para el logro de los aprendizajes por parte de los estudiantes. El objetivo final del DI, es la planificación de una serie de componentes que guiarán el aprendizaje de los estudiantes. (Polo, 2001).

Acciones Formativas

A continuación describiremos las acciones que se desarrollan en la formación inicial del Profesorado en Matemática de la UNSa. Las mismas apuntan a que el alumno, que se destaca por ser creativo, nativo digital, usuario de múltiples plataformas y dispositivos móviles para la socialización y autoaprendizaje, adquiera otras habilidades y destrezas que favorezcan su futuro accionar docente. Se pretende que los aspectos trabajados se compenetren en un todo holístico que involucren los saberes matemáticos, técnicos-tecnológicos, pedagógicos-didácticos.

Estrategias de Comunicación

Partiendo de un análisis crítico, teniendo en cuenta la realidad de los estudiantes, sus habilidades y dificultades, la infraestructura de la institución y de acuerdo al perfil establecido para el egresado (según el plan de estudio), se desarrollaron estrategias que tiendan a fomentar la comunicación, atendiendo a los distintos formatos, los medios tecnológicos, como así también al buen uso del lenguaje en sus distintos aspectos.

Lenguaje verbal. Para fomentarlo, se estimula al estudiante a ejercitar la tarea de "enseñar matemática" mediante el uso de una metodología lúdica que denominamos "pentatema". ¿Qué es el pentatema? Se dispone de una caja pentagonal, en la cual se distribuyen aleatoriamente fichas con temas matemáticos, acordes a los saberes previos de los estudiantes. Los mismos eligen una de las fichas y exponen "una clase" ante sus pares, simulando ser los docentes del aula. Aquí se ponen de manifiesto el leguaje matemático (argumentativo), la organización de la pizarra (lenguaje icónico-escrito), como así también el lenguaje gestual, y la dicción.

Este tipo de lenguaje, también se trabaja en las clases prácticas de las distintas asignaturas del plan de estudios, y en forma particular en las instancias de exámenes finales. En ellas, los estudiantes del profesorado, deben poner de manifiesto la oralidad junto con todas las componentes ya mencionadas.

Ante la presencia de dificultades de comunicación verbal, se proponen estrategias de ejercitación, que contribuyan al proceso que se está trabajando. Por ejemplo, se fomenta lectura dentro del aula, se propone que los alumnos se filmen exponiendo algún tema matemático o un trabajo práctico, y se estimula la autoevaluación y la objetividad en la evaluación de sus pares.

Lenguaje escrito. Además de proponer el desarrollo de las actividades típicas que involucran el lenguaje escrito, como ser la confección de informes, de trabajos prácticos, exámenes parciales escritos, se diseñan metodologías que contemplan el buen uso de este leguaje.

En el Aula Virtual se propone un foro de debate académico, en el cual los estudiantes, asumiendo un "juego de roles", discuten temas de interés, centrados principalmente en tópicos referentes a la enseñanza-aprendizaje de algún tema matemático. Se tienen en cuenta para la evaluación de esta actividad, el empleo del diálogo social, argumentativo y pragmático dentro de las intervenciones que se realicen. También se propone el uso de los foros de consulta para el desarrollo de las actividades de las distintas asignaturas, en algunos casos se emplea el foro social, a modo de "café virtual".

En redes sociales, se induce una práctica similar, con el agregado de que en éstas, el alumno participa en forma más natural, aportando críticamente a las entradas de sus pares, compartiendo materiales que fueron seleccionados de antemano, haciendo uso del diálogo social con mayor predominancia respecto del pragmático-argumentativo. Es importante destacar el

trabajo en redes sociales, como herramientas de enseñanza y aprendizaje, ya que al ser esta actividad parte del DI de algunas cátedras, los estudiantes deben adecuar su identidad virtual a la práctica y al contexto en el que están trabajando.

También se hace uso de correo electrónico no solo para gestión dentro de la Cátedra, sino también académicas, como otra herramienta para el aprendizaje de la matemática.

Producción de Materiales

Consideramos importante el hecho de que alumnos del profesorado, puedan experimentar en la tarea de producción y uso de materiales educativos dentro de su formación docente. Esto, no sólo por las competencias técnicas-tecnológicas que en ella se desarrollan, sino también por el valor agregado que otorga, a su formación, el tener que pensar una práctica educativa mediada con materiales digitales.

Esto se realiza hasta el momento, como parte de las actividades de la cátedra Tecnología para la Educación Matemática, siendo esta asignatura la primera del plan de estudio que combina matemática, tecnología y pedagogía, como una primera aproximación a la tarea de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia.

Las producciones se realizan en grupos de no más de tres estudiantes, esto con el fin de fomentar el trabajo colaborativo, cooperativo y en equipo. Las mismas se socializan con el grupo áulico, simulando la aplicación de estos materiales para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Con esta estrategia, se vuelven a poner en juego las habilidades de comunicación a través de los materiales y del buen uso del lenguaje que el estudiante (futuro docente) demuestra en su exposición.

Los materiales que se producen son: radio educativa, videos, construcciones dinámicas, juegos, materiales didácticos no digitales. En todos ellos se tiene en cuenta el concepto de vigilancia epistemológica, a fin de guardar coherencia y sintonía con los conceptos matemáticos.

Para la producción de radio educativa, la elaboración del guion debe realizarse con claridad y simplicidad en la exposición de las ideas, esto a fin de asegurar la comprensión del mensaje y facilitar la locución. La voz es la columna vertebral del sonido radiofónico, se pretende ejercitar la tarea de locución aporta al desarrollo de la dicción, modulación del tono, que se consideran importantes para la exposición oral del docente.

En los videos elaborados se muestran diferentes situaciones de la vida cotidiana, que pueden ser modelizadas. En los mismos se plantean problemas, que son resueltos en el desarrollo del video, creando espacios de pensamiento para la generación de otros problemas. Desde lo técnico, se visualiza musicalización; elementos separadores; guionado y locución; modelización, imágenes fijas y móviles; teatralización, entre otras.

Las construcciones dinámicas, se realizan con el software GeoGebra, con el objetivo de aportar a la visualización de los diferentes conceptos matemáticos propios de la Geometría, Algebra y Análisis. Las mismas, pueden ser utilizadas para el estudio de algunos temas en las ramas mencionadas, como así también para pensar en nuevas situaciones de enseñanza que puedan ser mediadas con estas herramientas de visualización, creadas por el estudiante - docente.

La producción de materiales didácticos no digitales, permite entre otras cosas que el estudiante haga propia la metodología lúdica, siendo capaces de plantear “juegos didácticos”, motores del divertimento matemático. Aquí es donde aparte del ingenio y la creatividad, se

ponen en juego las habilidades manuales, la estética, el uso y sustentabilidad de los materiales construidos.

Trabajar con el estudiante del profesorado de matemática, este tipo de actividades, aporta al desarrollo de competencias profesionales, que en el plano académico le permiten, aprender matemática, enseñarla, resolver problemas y más aún plantearlos. Desde el plano pedagógico, le permite explorar en el desarrollo de actitudes cognitivas y metacognitivas, necesarias para el desarrollo de un paradigma superador. Teniendo en cuenta el desarrollo de destrezas técnicas – tecnológicas, destacamos que se trabajan en torno al uso de software libre para la producción de los materiales y para la enseñanza de la matemática, y prácticas sobre el uso de las herramientas de Office.

En la Fig. 1, se pueden visualizar algunos de los materiales digitales producidos por los estudiantes, como así también la puesta en práctica de los mismos, en el desarrollo de actividades de enseñanza y aprendizaje. Aquí se puede ver cómo se combinan los dos tipos de acciones formativas que se describieron hasta el momento: las de comunicación y las de producción de materiales.



Figura 1. Algunos materiales digitales producidos por los estudiantes

Como se dijo, los materiales educativos, son ante todo herramientas de comunicación dentro del aula, y como tales deben funcionar. En este sentido, recae sobre el docente la difícil tarea de definir "qué hacer con los medios". Esta respuesta la encontraremos en el planteo de proyectos educativos.

Proyectos Educativos

Como se dijo, la propuesta de formación que se brinda a los estudiantes del profesorado, no solamente se centra en el diseño y producción de recursos (digitales o no) para la enseñanza de la matemática, sino también en reflexionar en el uso que se da a los mismos. La incorporación de estos materiales se realiza teniendo en cuenta su forma de articulación con los contenidos, las

competencias educativas y cognitivas de los destinatarios, las características del entorno socio - cultural, destacando la importancia del cuándo y el cómo utilizarlos. Reflexionar sobre estos aspectos, no lleva a formular un proyecto educativo para la enseñanza y aprendizaje.

Un proyecto de educativo para la enseñanza y el aprendizaje, es un conjunto de actividades y tareas de carácter tecnológico, científico, lúdico, técnico, artísticos, etc., que se programan para alcanzar un propósito determinado. El mismo, surge como respuesta a un proceso de análisis y reflexión sobre la realidad, y busca dar solución a problemas reales en un contexto determinado. (Moya, M. 2005)

Entendemos que sería posible postular que, "para cada concepto matemático, existe al menos un proyecto educativo viable que combine tecnología, matemática, pedagogía – didáctica, a partir del cual puede trabajarse significativamente".

Se espera que a partir del desarrollo de estos proyectos, se promuevan aprendizajes significativos en situaciones pedagógicas ricas en resolución de problemas. Estos vehículos de enseñanza y aprendizaje, deben permitir determinar cómo las capacidades y conocimientos se van logrando, favoreciendo el auto-aprendizaje a partir de la motivación y el desarrollo de capacidades.

Nuestro enfoque, siguiendo el postulado ya enunciado, es que el estudiante del Profesorado en Matemática, se forme en competencias que le permitan formular proyectos que vinculen, materiales, actividades interdisciplinarias y de naturaleza práctica, con aplicaciones a lo cotidiano. Esto es acorde a la política pública del Estado Nacional que modifica el enfoque de la enseñanza de la matemática a partir del 2019.

Por otro lado, apostamos al desarrollo profesional del docente que estamos formando, el cual debe identificarse como un investigador en su propia práctica educativa, y la de sus pares. Además ser capaz de formular hipótesis de investigación que luego puedan materializarse en tesis y trabajos de divulgación que aporten a la Educación Matemática.

Conclusión

En este proceso de formación del Profesor en Matemática, existieron dificultades que consideramos necesarias destacar. Desde el punto académico, se detectaron errores conceptuales en matemática básica, esto desde el punto de vista pedagógico significa un obstáculo a la hora de pensar una situación de enseñanza – aprendizaje. Asimismo estas debilidades académicas dificultan el proceso de diseño y producción de materiales y consecuentemente la elaboración de Proyectos Educativos viables que los incluyan. Nuestra reflexión es que es necesario fortalecer la formación conceptual de nuestro profesorado, aunque consideramos que esto no es suficiente, pues debe trabajarse también en el aspecto pedagógico-didáctico y técnico – tecnológico, apostando a una formación integral del mismo.

Las actividades de comunicación planteadas, contribuyen significativamente al desempeño del docente frente al aula. La idea es que se desarrollen habilidades y competencias que puedan manifestarlas en su desempeño profesional. De esta manera, nuestro egresado estaría capacitado para la confección de proyectos educativos, producción de materiales (escritos, auditivos y audiovisuales). No menos importante es el hecho que sea capaz desarrollar otras tareas que son propias de su quehacer docente y que no están institucionalizadas dentro del plan de estudios, como la de expresar sus ideas, argumentarlas, refutar la de sus pares, articular un discurso, escribir un reporte de investigación, entre otras.

En este trabajo se mostró algunos resultados de la investigación que se está desarrollando. La tarea es lenta, pues deben romperse mitos aferrados, que se manifiestan en la metodología de cátedras universitarias "tradicionales". En otros casos, debe corregirse un error conceptual sobre lo significa virtualizar un aula. No es sólo una cuestión de incorporar computadoras en la clase, sino más bien implica romper los límites temporales-espaciales de lo que significa el aula, considerando dónde, cómo, cuándo, con qué y con quién los estudiantes construyen sus aprendizajes.

Como propuesta a futuro se pretende continuar con estas acciones formativas en los siguientes años, a los fines de evaluar el impacto de las mismas, retroalimentando este proceso de formación. También anhelamos acompañar a los docentes en ejercicio, en este cambio de paradigma de enseñanza, que implica un proceso de alfabetización digital que nos lleve a considerar la virtualidad como parte del proceso educativo de nuestra era.

Referencias y bibliografía

Burbules, N (2008). Riesgos y promesas de las TIC en la educación. ¿Qué hemos aprendido en estos últimos diez años? *Las TIC: del aula a la agenda política*, 3, 31- 40. Buenos Aires. UNICEF

Cabero, J.; Román P. (2008). E-Actividades. Un referente básico para la formación en Internet. Sevilla. MAD S.L.

Fernandez Coca, A. (2012). *Docencia 4.0, mucho más allá del uso de las TIC en el aula universitária.* Universitat de les Illes Balears. En http://cebloc.uib.cat/docencia-4-0/

Méndez Garrido, J. M. (2010). *Pautas y criterios para el análisis y evaluación de materiales curriculares,* Universidad de Huelva. En: http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/3451/b15760480.pdf?sequence=1

Moya, M; Avila, M. (2013). Aula Extendida en la Formación del Profesor en Matemática: Hacia el Docente 2.0. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevideo. En: http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/834.pdf

Moya, M.; Avila, M. (2015). Mediación de Proyectos Educativos con Materiales Digitales. *3° Jornadas de TIC e innovación en el Aula. Enlaces entre educación, conocimiento libre y tecnologías digitales*, 4, 388-394. Ed. UNLP. En http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/49971

Moya, M.; Avila, M. (2017). El impacto de aprender cónicas en Facebook. 4° Jornadas de TIC e *Innovación en el Aula. Más allá del aula virtual. Otros Horizontes, otros desafíos*, 4, 441-447. Ed. UNLP. En: http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/65078

Moya, M.; Avila, M. (2017). Reflexiones sobre la virtualidad en la formación del Profesorado en Matemática. Actas del VIII CIBEM, 234-242. Madrid. En http://www.cibem.org/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_CB601-700.pdf

Polo, M (2001). *El diseño instruccional y las tecnologías de la información y la comunicación.* Universidad Nacional Abierta. Dirección de Investigaciones y Postgrado. En: http://postgrado.una.edu.ve/disenho/paginas/polo.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desde la Razón Áurea a la infinitud de los Fractales

Lilian del C. **Vargas** Villar
Universidad de Concepción
Chile
lilivargas@udec.cl
Daniel **Sánchez** Ibáñez
Universidad Austral de Chile
Chile, y
Universidad Estadual de Campinas
Brasil
danielsanch@gmail.com

Resumen

Este taller tiene como propósito contribuir a ampliar el conocimiento matemático de los profesores en formación y de los formadores de profesores de matemática en general, estudiando la construcción de fractales y espirales en razón áurea y su conexión con el arte y la naturaleza. Las actividades que se desarrollan se enmarcan dentro del Horizonte Matemático y aportan al desarrollo de éste, estudiando proyecciones del concepto del número áureo, mediante secuencias de actividades didácticas, donde los asistentes utilizan el software Geogebra como herramienta dinámica e interactiva para la construcción de novedosos fractales.

Palabras clave: Educación matemática, Geometría dinámica, Razón áurea, Fractales, Horizonte matemático.

Introducción

La formación Inicial Docente de profesores de Matemática debe tender a desarrollar ampliamente en los estudiantes el conocimiento matemático para enseñar. Hill, Ball y Shilling (2008, p. 374) definen tal concepto como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno".

El objetivo del taller es contribuir a ampliar el conocimiento matemático de los profesores en formación estudiando el número áureo (o de oro), la ley de proporcionalidad áurea y su aplicación en la construcción de fractales y espirales. Así, las actividades que se desarrollan en el taller propuesto se enmarcan dentro del horizonte matemático como componente didáctico del profesor y aportan al desarrollo de éste, estudiando las proyecciones del concepto de razón áurea,

específicamente aplicado en los procesos iterativos y de auto-semejanza de los fractales.

Fernández y Figueiras (2014) conceptualizan el Horizonte matemático como un tipo de conocimiento que afecta a los diferentes dominios del conocimiento del profesor en la práctica. Un profesor con un sólido y profundo desarrollo del horizonte matemático, al enseñar un concepto entiende cuales son las proyecciones de éste para el aprendizaje de posteriores saberes, lo que permite enriquecer la práctica en el aula.

La naturaleza en su bondad muestra un entorno lleno de objetos impresionantes que va más allá de las regularidades y las formas estándar. Al observar nuestro alrededor vemos: árboles, costas, flores, plantas, caracolas, etc., todas ellas con un orden dentro del caos que pareciera existir. Esto invita a reflexionar sobre el estudio de la geometría no Euclidiana y cómo puede ser una herramienta útil para el desarrollo de la creatividad y la comprensión de un modelo que busca interpretar la regularidad en las relaciones entre un objeto y sus partes a diferentes escalas.

Para Benoit Mandelbrot, el precursor de la geometría fractal, la observación de la naturaleza resulta primordial y de ahí el interés de la geometría fractal por las formas naturales y se pregunta: "¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo 'frío' y 'seco'? Una de las razones es su incapacidad de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol. Ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni la corteza es suave, ni tampoco el rayo es rectilíneo" (Mandelbrot, 1997, p.28).

En los últimos años investigaciones en Didáctica de la Geometría, dan cuenta de nuevas formas de abordar esta disciplina tanto desde el interior de la matemática como desde otro ámbito, como el arte y la computación. Laborde y Laborde (2008), al referirse a la inserción del programa CABRI en las aulas, consideraron el tipo de tareas que se asignan a los estudiantes como un cambio importante en las exigencias para los profesores. Estos planteamientos han sido reiterados en estudios posteriores. Sinclair et al. (2016), por ejemplo, destacan la necesidad de lograr una mejor comprensión del papel de la tecnología y una mejor integración del uso de esta en las prácticas de enseñanza de los profesores, apoyándolos en el diseño y desarrollo de nuevas tareas que sean apropiadas para el uso de programas de geometría dinámica. A través del uso de software dinámico, como GeoGebra, CABRI II plus y otros, se puede estudiar las propiedades de los distintos objetos geométricos.

En éste escenario se presenta el taller sobre construcciones geométricas de fractales y espirales utilizando proporciones áureas, elaboradas en el software GeoGebra, creando las herramientas necesarias para obtener entes armónicos y creativos que motiven el estudio de la geometría y su relación interdisciplinaria con diferentes asignaturas. Arcavi y Hadas (2000) plantean que un ambiente dinámico permitiría a los alumnos construir figuras con ciertas propiedades y así poder visualizarlas, pero también les posibilitaría transformar aquellas construcciones en "tiempo real", lo que contribuiría a la formación del hábito de transformar (mentalmente o por medio de un instrumento).

GeoGebra es un software matemático libre e interactivo. Su estructura es ideal para la educación matemática en un ámbito recreativo y dinámico, uniendo tópicos de Geometría euclidiana, Algebra y Cálculo (Sánchez y Trumper, 2012). En todas las actividades del Taller utilizaremos su formato y configuración preestablecida (versión clásica 5.0), esto es, su "Barra de Menús" (para abrir, guardar, editar, etc.), los "Íconos de herramientas básicas" (con funciones predefinidas), su "Vista Algebraica" (elementos construidos) y su "Vista Gráfica" (para figuras bidimensionales).

Actividad 1

Objetivo: Crear herramienta para dividir un segmento en razón áurea

Para las actividades del taller es necesario crear en GeoGebra una nueva herramienta que permita dividir un segmento en razón áurea. Un segmento *AB* está dividido en un punto *C* en proporción áurea, o en media y extrema razón, cuando la relación entre la parte mayor *AC* con la menor *CB* es igual a la razón del segmento original *AB* con la parte mayor *AC*, es decir: dos números *a* y *b* están en razón aurea si $a/b = \varphi \approx 1,61803...$, donde φ es llamado como número áureo (Livio, 2007). En términos algebraicos, con $a = AC$, $b = CB$ y $a + b = AB$, tenemos que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi$$

A partir de lo mencionado anteriormente, preparemos la nueva herramienta. Primeramente, dibuje un segmento *AB*, usando "Segmento" desde el tercer ícono, establezca su punto medio, usando "Medio o Centro" desde el segundo ícono, y renombre este punto como *M*. Luego, trace una recta perpendicular, con "Perpendicular" desplegando el cuarto ícono, al segmento *AB* en el punto *B*. Seguidamente, dibuje una circunferencia, con "Compás" a partir del sexto ícono, con centro en *B* y radio *MB*. Nombre *D* al punto de intersección, usando "Intersección" desde el segundo ícono, de la circunferencia con la recta perpendicular.

A seguir, trace el segmento *AD*, dibuje una circunferencia con centro en *D* y radio *DB*. Nombre *E* a la intersección de los dos objetos. Finalmente, al encontrar la intersección de la circunferencia de centro en *A* y radio *AE* con el segmento *AB*, se obtiene la división de éste en razón áurea en el punto *C* (ver Figura 1). A continuación crearemos una nueva herramienta.

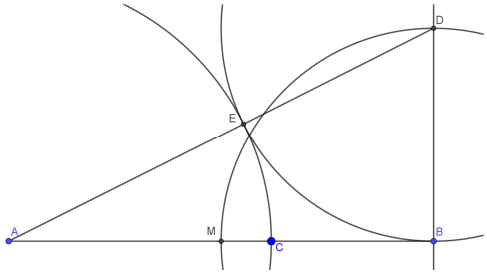


Figura 1. División de segmento en razón áurea.

Primero ocultaremos todos los objetos, con "Mostrar/ocultar objetos" del undécimo ícono, dejando sólo el segmento inicial *AB* y el punto de división áurea *C*. Luego, seleccione en menú "Herramientas" la opción "Crear una nueva herramienta", luego se selecciona como objeto de salida al punto *C* y como objetos de entrada a los puntos *A* y *B*. Finalizamos este proceso nombrando "*RazonAurea*" a la nueva herramienta. Adicionalmente, guarde esta nueva herramienta como archivo con extensión "*.ggt*" en menú "Herramientas", luego en "Gestión de herramientas" y en "Guardar como", por ejemplo, "*RazonAurea.ggt*". A cada "Nueva Ventana" en GeoGebra, para el resto de las actividades, comience abriendo el archivo "*RazonAurea.ggt*" para luego insertarla desde Menú "Confección de barra personal".

Actividad 2

Objetivo: Construir espiral en triángulos equiláteros de lados en razón áurea

Para diseñar la espiral en el auto replicado del triángulo equilátero, primero es necesario elaborar una nueva herramienta que vaya generando la curva sobre un lado del triángulo. En el quinto ícono se selecciona "Polígono regular" de tres vértices *ABC*. Luego se dibuja un "Arco de circunferencia", desde el quinto ícono, con centro en *B* y otros dos puntos *C* y *A*. Seguidamente,

seleccionar la herramienta "*RazonAurea*" para dividir (en razón áurea) el lado *CB* en el punto *D* (ver Figura 2). Seguidamente, en el menú "Herramientas", seleccionar "Crear una nueva herramienta", señalando como Objeto de salida al triángulo *ABC*, al arco de circunferencia y a los puntos *C* y *D* (ver Figura 3). Como Objeto de entrada seleccione los puntos *A* y *B*. Nombre a la nueva herramienta y guarde (por ejemplo, como "*ArcoLado.ggt*").

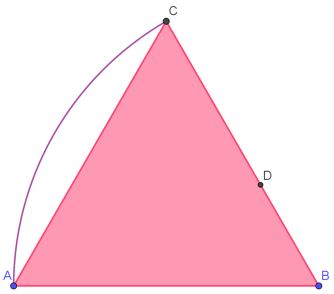


Figura 2. Triángulo equilátero, arco de circunferencia y división áurea de un lado

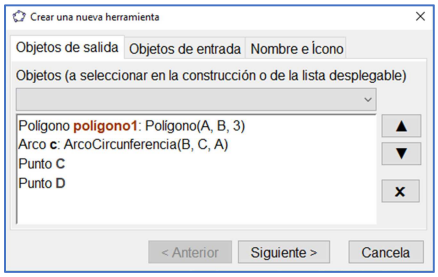


Figura 3. Creación de Herramienta de auto replicado (fractal).

A continuación, aplique la herramienta "*ArcoLado*" seleccionando los puntos *C* y *D*. Repita este proceso iterativo por lo menos unas cinco veces, para los otros lados del triángulo y coloree para obtener una representación, por ejemplo, como ilustrada en Figura 4 o en Figura 5.

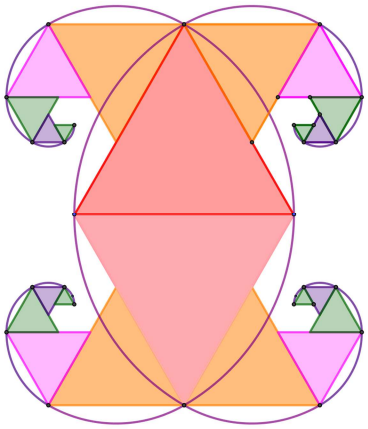


Figura 4. Proceso fractal de espirales y triángulos equiláteros en razón áurea.

Una de las características de estas construcciones realizadas es la razón entre los arcos que se van generando para construir la espiral, todos ellos en razón áurea: $\widehat{AC}/\widehat{CG} = \varphi$. Destacamos, que algunos procesos iterativos fractales de espirales áureos nos llevan a conectarnos con la naturaleza (ver Figura 6) y comprender estos fenómenos a través de la matemática.

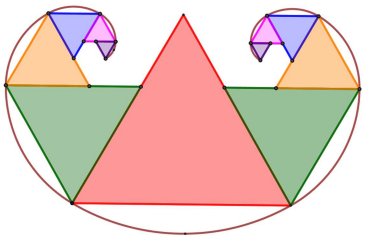


Figura 5. Otra forma de proceso fractal.



Figura 6. Espirales en la naturaleza

Actividad 3

Objetivo: Diseñar el Triángulo de Sierpinski con estrella de tres puntas en razón áurea

El matemático polaco Waclav Sierpinski (1882-1969) construyó, en 1919, este triángulo formado por tres copias auto-semejantes del paso anterior. Un objeto de estas características auto-semejante en distintas escalas se llama fractal. En ésta actividad se diseña una variante del triángulo de Sierpinski con la construcción de una estrella de tres puntas inscrita en un triángulo equilátero a partir de divisiones áureas de los lados. En el desarrollo de esta actividad se necesita construir dos nuevas herramientas: una para elaborar el triángulo de Sierpinski y otra para construir la estrella de tres puntas inscrita en un triángulo equilátero.

Para la primera herramienta, dibuje un triángulo equilátero *ABC*, seleccionando "Polígono regular" de tres vértices desde el quinto ícono. Luego se determinan los puntos medios de cada lado del triángulo, en "Medio o Centro" del segundo ícono. Seguidamente, en "Polígono" del quinto ícono, crear el triángulo *NLF*. Cambiar a color más claro éste último triángulo (ver Figura 7). Diríjase a Menú "Herramientas" y escoja "Creación de herramienta nueva". Como objetos de salida colocar el triángulo *NLF* y sus vértices. Como objetos de entrada a los puntos *A* y *B*. Guarde y nombre a la nueva herramienta "*Sierpinski.ggt*".

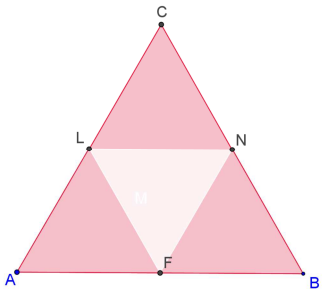


Figura 7. Triángulo de Sierpinski, primera etapa.

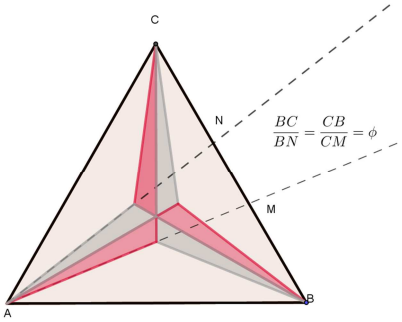


Figura 8. Estrella áurea.

Para la segunda herramienta, dibuje otro triángulo equilátero *ABC* y divida (ida y vuelta) al lado *CB* en razón áurea (con "*RazonAurea*") tal que $\frac{BC}{BN} = \frac{CB}{CM} = \varphi$. Luego, trace las semirrectas *AN* y *AM*. Repita en los otros lados del triángulo. Busque el punto medio del triángulo *ABC* y finalice construyendo seis triángulos internos que forman la estrella, alternando colores, como en Figura 8. Luego, seleccione los objetos necesarios para visualizar la estrella, como objetos de salida, y a los puntos *A* y *B* como objetos de entrada. Nombrar y guardar como "*EstrellaAurea.ggt*".

Para concluir la construcción del triángulo de Sierpinski con estrella de tres puntas en razón áurea, se utilizan las herramientas creadas sobre un triángulo equilátero. Usando "*Sierpinski*" genere sucesivos triángulos internos (los triángulos blancos, según Figura 7) y con "*EstrellaAurea*" seleccione en los dos vértices basales de cada triángulo (blanco) y obtendrá así la inserción de estrellas áureas. Repetir éste proceso, por lo menos, cuatro iteraciones y coloree el triángulo original (ver Figura 9). Finalmente ha construido usted un fractal de Sierpinski.

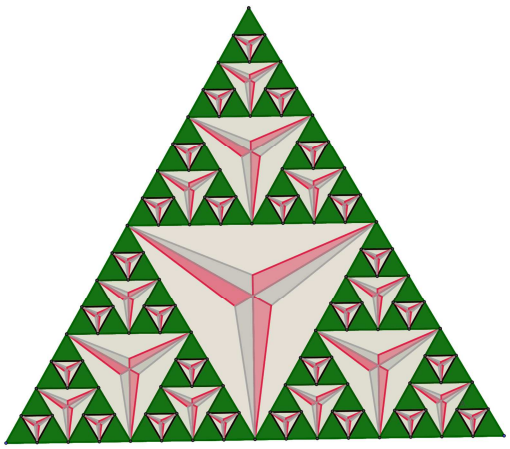


Figura 9. Fractal del Triángulo de Sierpinski

Actividad 4

Objetivo: Construir árbol pitagórico con triangulo áureo de Kepler

La construcción comienza a partir de la división de un segmento en extrema y media razón. Luego, continuamos con la construcción de un triángulo de Kepler. Desde cuarto ícono, elija "Perpendicular" y genere recta por *C* (punto de división áurea) perpendicular al segmento *AB*.

En seguida, seleccione "Compás", desde el sexto ícono, y construya una circunferencia con centro en *B* y radio *AC*. A continuación determine el punto de intersección entre la recta perpendicular y la circunferencia. Obtendrá dos puntos. Escoja el punto que se encuentre sobre el segmento *AB*, llámelo *M*, y genere el polígono *ABM* (Figura 10). Este polígono ABM es conocido como triángulo de Kepler, en honor al astrónomo alemán Johannes Kepler quien lo describe (Livio, 2007, p.173) en una carta así:

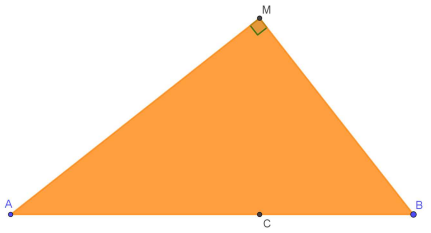


Figura 10. Triángulo (áureo) de Kepler.

> Si un segmento se divide entre el extremo y su proporcional, y se toma como hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto se halle sobre el punto que divide a la hipotenusa en dichas partes, entonces el cateto menor tendrá la misma longitud que la parte más larga del segmento de partida.

La principal característica de este triángulo es combinar dos aspectos fundamentales de la geometría euclidiana, el teorema de Pitágoras y el número áureo. En términos matemáticos, denotando $a = AC = BM = c$, $b = CB$, $h = CM$ y $d = AM$, tenemos por el teorema que

$$(a+b)^2 = c^2 + d^2 = c^2 + (a^2 + h^2) = c^2 + a^2 + (c^2 - b^2) = 3a^2 - b^2$$

Dividiendo esta última igualdad por b^2, y recordando desde Actividad 1 que $a/b = \varphi$ obtenemos el polinomio cuadrático que define al número áureo, ya que

$$(a/b)^2 + 2(a/b) + 1 = 3(a/b)^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^2 = \varphi + 1$$

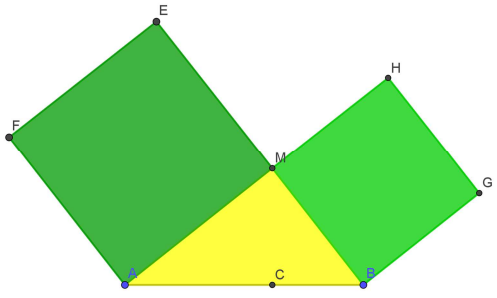


Figura 11. Colorido para árbol pitagórico a partir del triángulo de Kepler

Una vez construido el triángulo de Kepler, dibujamos dos cuadrados sobre sus catetos y coloreamos (opcional) como visualizado en Figura 11. En esta etapa creamos la herramienta fractal (de auto-replicado) para confección del árbol pitagórico. Para tal fin, diríjase a Menú Herramientas y a "Crear una herramienta nueva". Como objetos de salida seleccione el triángulo de Kepler y los cuadrados más sus vértices superiores. Para los objetos de entrada seleccione los puntos *A* y *B*, y finalice la nueva herramienta.

En esta etapa se aconseja guardar la herramienta fractal en archivo "*FractalKepler.ggt*" (ir a Herramientas, luego "Gestión de herramientas" y 'Guardar como") y abrir una nueva ventana.

En nueva ventana abra el archivo creado ("*FractalKepler*") para luego insertar la herramienta en Menú "Confección de barra personal". A continuación trace un segmento *AB*, seleccionado desde el tercer ícono, y marque nuestra herramienta fractal en los puntos extremos *A* y *B*. Repita este proceso por lo menos unas 6 iteraciones, adicione un cuadrado en la hipotenusa del primer triángulo y coloree de forma a obtener un árbol pitagórico como en Figura 12.

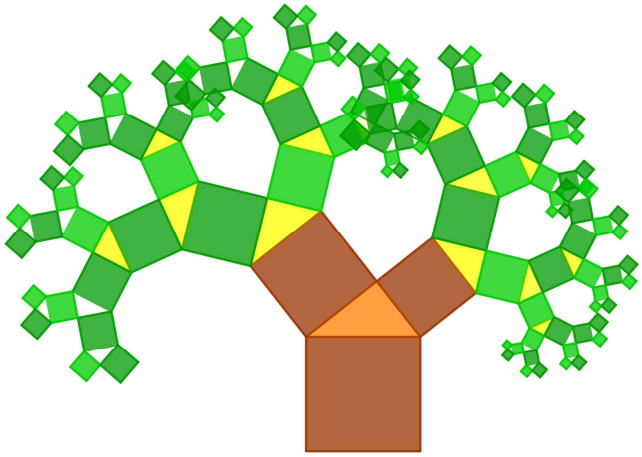


Figura 12. Árbol Pitagórico del Triángulo de Kepler.

Actividad 5

Objetivo: Construir Fractal de un cuadrado con reducción en razón áurea

Al igual que en Actividad 4, la siguiente construcción precisa de la división de un segmento en extrema y media razón. Luego continuamos con la construcción de un cuadrado. Despliegue el quinto ícono y elija "Polígono regular" y genere un cuadrado cuyos puntos iniciales (*A* y *B*) generen el lado base inferior del cuadrado. Luego, con la herramienta "*RazonAurea*" genere el punto *E* (punto de división áurea) en el segmento superior del cuadrado *DC*. En seguida, seleccione "Compás", desde el sexto ícono, y construya una circunferencia con centro en *C* y radio *DE*. A continuación elabore una semirrecta, desde tercer ícono, que pase por los puntos *E* y *C*. Luego, determine el punto de "Intersección", segundo ícono, entre la semirrecta y la circunferencia. Obtendrá el punto *F*. Oculte la circunferencia y utilice la herramienta de razón áurea para dividir en ambos sentidos cada uno de los lados del cuadrado (por ejemplo, con la herramienta seleccione *A* y *B*, y luego *B* y *A*). En seguida, genere sectores circulares, desde el sexto ícono, con centro en cada vértice y puntos de división áurea más distantes a ese vértice (por ejemplo, el sector circular *CGM* visualizado en Figura 13).

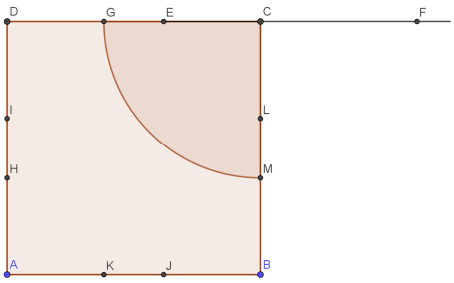


Figura 13. Divisiones áureas y sección circular en cuadrado.

Coloree los sectores circulares (rojo) y el cuadrado (amarillo). Posteriormente, creamos una herramienta para replicar el cuadrado original en un factor de reducción dado por el número áureo. Para tal fin, dirigirse a Menú Herramientas y apretar "Crear una herramienta nueva". Para los objetos de salida seleccionamos el cuadrado y los sectores circulares (más los puntos *D* y *C*). Para los Objetos de entrada seleccione los puntos *A* y *B*, y finalice la nueva herramienta. Obtendrá un nuevo cuadrado como en Figura 14. A continuación creamos otra herramienta (de auto-replicado) para confección del cuadrado fractal.

Para los objetos de salida seleccionamos el cuadrado menor y sus vértices *N*, *O* y *F* (según Figura 14). Para los Objetos de entrada seleccione los puntos *A* y *B*, y finalice la nueva herramienta. Repita este proceso por lo menos unas 4 iteraciones y finalice ocultando todos los puntos usados (desde el undécimo ícono "Mostrar/ocultar objeto") de forma a obtener un cuadrado fractal como visualizado en Figuras 15. Destacamos que los rectángulos "sobrantes" (en blanco) son rectángulos áureos.

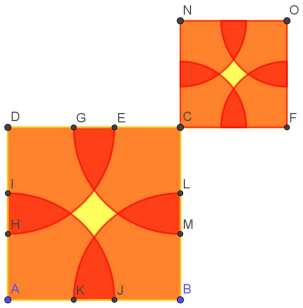


Figura 14. Cuadrados coloreados y diseño interior en razón áurea.

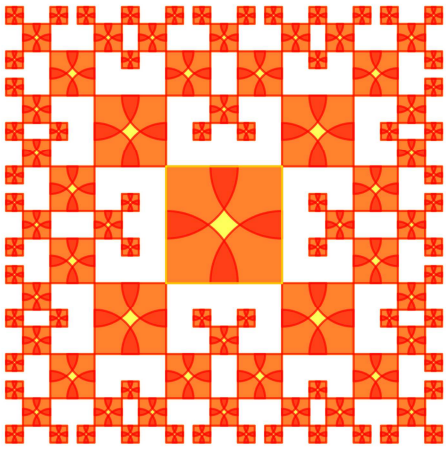


Figura 15. Cuadrado Fractal en reducción y diseños en razón áurea.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International journal of computers for mathematical learning*, *5*(1), 25-45.

Fernánez, S., & Figueiras, L. (2014). Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. *REDIMAT*, *3*(1), 7-29.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372-400.

Laborde, C., & Laborde, J. M. (2008). The development of a dynamical geometry environment: Cabri-géomètre. *Research on Technology in the Learning and Teaching of Mathematic*, *2*, 31-52.

Livio, M. (2007). *Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente*. 2da Edição, Editora Record Ltda. Rio de Janeiro.

Mandelbrot, B. B. (1997). *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión*. Tusquets S.A. Barcelona.

Sánchez, D., & Trumper, R. E. (2012). El Número Áureo φ, una propuesta didáctica. In *XV Jornada Nacional de Educación Matemática - SOCHIEM*. Temuco, Chile.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, *48*(5), 691-719.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A trajetória de uma professora formadora em uma disciplina de Estágio Supervisionado na Licenciatura em Matemática

Línlya **Sachs**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
linlyasachs@yahoo.com.br
Henrique Rizek **Elias**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
henriquerizek@hotmail.com

Resumo

Este texto objetiva apresentar a trajetória de uma professora formadora, em um curso de formação inicial de professores de Matemática, a partir de registros feitos por ela em um diário, durante um semestre, quando atuou em uma disciplina de Estágio Supervisionado. O material analisado nos permitiu acompanhar o processo envolvido no planejamento do estágio, passando pela realização e, por fim, as reflexões feitas pela professora formadora após esse período. O diário foi uma ferramenta que, por um lado, favoreceu a prática reflexiva da professora formadora e, por outro, possibilitou que ela, com subsídios teóricos e metodológicos, pesquisasse sua própria prática.

Palavras-chave: Educação Matemática, Professor Formador, Formação de Professores, Estágio Supervisionado, Diário.

Introdução

"Inicio aqui meu diário de campo como professora e orientadora de estágio supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática [...]. A ideia de fazer este diário surgiu ao ler um texto que falava das potencialidades do diário como instrumento para pesquisa nas áreas sociais. Como todos os semestres em que oriento estágio (já faz oito [...]) são repletos de sentimentos, sejam de ânimo, de ansiedade, de frustração, de alegria, de decepção, achei que isso deveria ser registrado". (06/03/2017)[1]

[1] Os trechos escritos em itálico e entre aspas referem-se ao diário escrito pela professora formadora, que é a primeira autora deste artigo. No fim, entre parênteses, está a data do registro no diário.

Este artigo tem como objetivo apresentar a trajetória de uma professora formadora, a partir de seus registros em um diário, em uma disciplina de Estágio Supervisionado na Licenciatura em Matemática. O olhar volta-se, portanto, para o formador de professores de matemática no processo de formação inicial.

A questão colocada por Fiorentini (1994, p. 46 apud Cury, 2001, p. 12), "quem forma o professor formador de professores?", aponta para um (possível) problema: no Brasil, os professores que atuam nos cursos de Ensino Superior não têm, necessariamente, formação para ser professor. Nas instituições públicas, são exigidos graus de mestre ou doutor para concorrer às vagas de professor de Ensino Superior; mas nenhum tipo de exigência é feito para que apenas licenciados sejam esses professores[2]. Isso inclui, contraditoriamente, os cursos de formação de professores: não é necessário ser licenciado para atuar em um curso de licenciatura.

Nacarato et al. (2015), ao fazerem uma síntese do mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática, englobando o período de 2001 a 2012, evidenciaram que o campo de pesquisa que diz respeito ao formador de professores é, ainda, carente, sendo foco de, apenas, 5% das pesquisas (dissertações e teses) levantadas. Isso significa, para esses autores, que muitas questões a respeito do professor formador ainda continuam em aberto para a pesquisa no campo da formação inicial.

Diante disso, indagamos a respeito do formador de professores: "quem somos, o que fazemos, o que poderemos fazer?" (Cury, 2001, p. 11). Em especial, no contexto do estágio supervisionado, estamos interessados em entender o processo envolvido no planejamento que o formador faz, as expectativas que tem, as suas compreensões durante a realização do estágio pelos licenciandos na Educação Básica e as reflexões por ele feitas após o término desse período.

Na sequência, apresentamos o contexto de realização desta pesquisa, bem como as escolhas teóricas e metodológicas, e algumas discussões que o material analisado (o diário da professora formadora) nos permite fazer. Ao longo do texto, buscaremos dar nossas respostas às perguntas lançadas por Cury (2001): Quem somos? O que fazemos? O que poderemos fazer?

O contexto e as escolhas

A formação de professores de matemática, no Brasil, para atuação nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio[3], se dá, essencialmente, em cursos de Licenciatura em Matemática. Existe a obrigatoriedade, de acordo com a legislação brasileira, que sejam desenvolvidas nesses cursos ao menos 400 horas de estágio supervisionado na área de formação e atuação na Educação Básica (Brasil, 2015).

Esta pesquisa acontece em um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública brasileira. À época da realização da pesquisa[4], o estágio supervisionado se dividia em quatro momentos – Estágio Supervisionado A, B, C e D – que somavam 405 horas. Cada um desses momentos estava organizado em uma disciplina, de modo que o professor da disciplina

[2] Na ausência de mestres ou doutores, muitas instituições públicas contratam especialistas ou, até, candidatos apenas graduados.

[3] Nos anos finais do Ensino Fundamental, isto é, do 6º ao 9º ano, as crianças devem ter de 11 a 14 anos, enquanto, no Ensino Médio, devem ter de 15 a 17 anos.

[4] No ano de 2017, o curso passou por uma reestruturação, em que foi modificada a organização do estágio supervisionado. Essas mudanças no estágio aconteceram de modo progressivo, sendo que, a partir do ano de 2019, o estágio ocorrerá apenas no novo formato.

orientava o estágio dos alunos matriculados[5].

Aqui, apresentamos a trajetória de uma professora da disciplina de Estágio Supervisionado B, com base no que ela registrou em um diário. Um objetivo da disciplina, entre outros, é propiciar uma experiência de docência na escola de educação básica diferenciada do estágio de regência em uma turma regular.

Como um modo de reflexão acerca das atividades desenvolvidas no estágio supervisionado, a professora da disciplina espontaneamente escreveu um diário de campo, no primeiro semestre de 2017. As aulas aconteciam às terças, quartas e sextas-feiras, no período noturno, e semanalmente ela escrevia o que havia se passado, a respeito do estágio supervisionado. Foram, ao todo, 14 registros, feitos de 6 de março a 1 de julho de 2017.

Os trechos utilizados do diário estão neste artigo da mesma forma como foram escritos, sem intervenções nossas. Fizemos apenas omissões de partes (indicadas por [...]) e a modificação dos nomes das pessoas envolvidas, para garantia do anonimato.

Por meio do diário, pudemos conhecer a narrativa de uma orientadora de estágio no curso de Licenciatura em Matemática. Ela apresenta os primeiros sentimentos, no início das aulas; ela fala de seus medos, de seus desejos, de suas afetações; ela planeja e, ao planejar, fala do que espera, mas também do que teme; ela muda o planejamento com o decorrer das atividades; ela comemora com pequenas realizações no estágio; ela reflete sobre o que se passou, em que considera ter contribuído na formação daqueles futuros professores e como poderia fazer de forma diferente... É uma narrativa que fala de si – e, nesse sentido, autobiográfica –, mas, também, que fala de outros, em sua forma particular de vê-los no mundo.

Compreendemos esse processo de escrita como um modo de autoformação da professora formadora. Os registros nos servem como material para conhecer sua trajetória naquele semestre, mas, para ela, é mais que isso; é um modo de se conhecer também, mas, além disso, é uma maneira de pensar sobre o vivido, sobre suas decisões e de planejar ações futuras.

Quem somos? O que fazemos?

A professora formadora tem licenciatura e bacharelado em Matemática, mestrado e doutorado em Educação Matemática. Atua no Ensino Superior desde o ano de 2011 e não tem experiência anterior como professora da Educação Básica. Trabalha, prioritariamente, com disciplinas de Educação Matemática no curso de Licenciatura em Matemática.

"Como sempre – e como uma forma de me reinventar –, começo a disciplina cheia de ideias! Resolvi que, neste semestre, repetiria as atividades que propus no semestre passado. Mas haveria uma mudança importante. Diferente dos últimos semestres, resolvi [...] que as oficinas seriam diferentes de como foram até agora". (06/03/2017)

Diferentes como? De que maneira poderiam ser essas oficinas? De acordo com Teixeira & Cyrino (2015), é importante que se proponha aos estagiários a utilização de estratégias de ensino diferenciadas, bem como a exploração de recursos variados no âmbito da regência, com vistas a manifestar/desenvolver, nos futuros professores, crenças sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, de modo a se apropriem do valor social da profissão. Dessa maneira, segundo esses

[5] Dependendo do número de alunos matriculados, o professor poderia pedir para que outros professores orientassem alguns estudantes também. No caso aqui investigado, a professora da disciplina orientou todos eles.

autores, o estágio deve "se constituir em uma ação formativa que influencia no desenvolvimento da identidade profissional docente de futuros professores" (p. 132).

A ideia de como seriam as oficinas "diferentes" veio de fora, de conversas com outras pessoas.

"*Esses dias, vi alguém falar sobre trazer para a escola pessoas da comunidade para oferecerem cursos daquilo que sabem fazer e achei a ideia boa – afinal, escola é muito mais do que português, geografia e matemática. E decidi unir isso com o discurso que tanto escuto (e com o qual não concordo!) por aí: "matemática está em tudo". Então, propus aos estudantes da turma que eles oferecessem oficinas de temas diversos, podendo ser o que eles se sentissem à vontade – fotografia, bordado, dança... – e, nesses temas, procurassem a matemática a ser abordada – não como assunto principal, mas secundário. Bom, eles toparam e agora vamos ver como vai ser.*" *(06/03/2017)*

O discurso de que "a matemática está em tudo" se mostrou como um desafio que a professora formadora decidiu assumir: se ela está em tudo, vamos propor oficinas de temas diversos, do cotidiano de algumas pessoas, e tentar abordar a matemática por meio desses temas. A ideia dela não era "forçar" a importância da matemática, mas que ela aparecesse naturalmente – caso aparecesse! Lins (1999) exemplifica com um assunto que costuma ser tratado por professores em aulas de matemática – que, por acaso, foi tema de uma das oficinas –, que são as pipas. Ele afirma que não faz sentido propor cálculo de área, de perímetro, da perpendicularidade, mas não falar sobre o que realmente importa para quem empina pipas: a capacidade de voo e a beleza. Assim, a professora pediu que os alunos tivessem o foco no tema da oficina e não na matemática, pois esta seria secundária.

A decisão pelos temas ficou por conta dos estudantes, que, inicialmente, diziam não ter ideias, não saber nada. Com conversas entre eles e com a professora, os temas escolhidos foram: Oficina de pipas, Oficina de Cultivo de Hortaliças, Oficina de *Stop Motion* e Oficina de Contação de Histórias.

Como podemos ver no trecho a seguir, a proposta das oficinas nesses moldes gerou insegurança na professora formadora, tanto no que diz respeito ao desenvolvimento delas como no papel que essas oficinas poderiam ter na formação desses futuros professores.

"Estão chegando as oficinas... e eu não sei o que me (os) espera! Parece que estou mais tensa que os próprios alunos – eles só não sabem disso! Não sei se a minha ideia foi boa, desconfio que não. Tenho pensado em que ministrar essas oficinas irá contribuir com a formação deles, já que não serão de temas matemáticos, mas a matemática irá aparecer (ou não) de uma forma transversal. Será que foi um equívoco propor algo tão diferente do tradicional? Digo isso, porque não acredito que "a" matemática (a da escola) irá aparecer nas oficinas... Apenas se forçar para que isso aconteça. O discurso de que a matemática está em tudo é muito forte e muito repetido por todos os lados; mas não tenho a menor dúvida de que não é bem assim. O interessante disso talvez seja a discussão que posso empreender com os alunos, após o término das regências, mas sinto que, além de faltar maturidade para tal, eles podem pensar que perderam tempo fazendo essas oficinas ou ainda que escolas que adotam pedagogias outras (como a Escola da Ponte) não funcionam." (25/04/2017)

A insegurança apresentada pela professora formadora vem, principalmente, de um refazer de sua ação, de uma busca por novas formas de viabilizar o desenvolvimento profissional dos licenciandos. De acordo com Barbato (2016, p. 265),

> Em vista da diversidade de saberes envolvidos na ação docente, os formadores agem em constante mudança para atender às diferentes demandas que decorrem da interação com as novas turmas. Desse modo, observamos que os formadores valorizam o saber adquirido na e pela experiência. Esse constante refazer da sua ação mostra-se como um exercício individual para muitos dos docentes que constroem seus saberes a partir das reflexões individuais sobre sua prática. Somente a reflexão individual sobre a prática pode originar um sentimento de insegurança sobre o papel do formador de professores e sobre a sua identidade, e a volatilidade dos saberes mobilizados traz a percepção de uma construção permanente de seu saber profissional.

Nesse sentido, a professora formadora, que inicia seu diário enfatizando sua experiência de oito semestres orientando estágio supervisionado, assume seu saber adquirido na e pela experiência ao longo desse período para propor algo novo (em relação ao que vinha realizando), visando pôr em discussão o discurso recorrente de que "a matemática está em tudo". Contudo, além do novo gerar insegurança no que diz respeito ao papel das oficinas na formação dos licenciandos, também gera insegurança sobre como se desenrolariam as atividades futuras. Certamente, se as regências fossem aulas tradicionais, os possíveis problemas seriam mais previsíveis, uma vez que, neste modelo, o professor tem mais controle sobre as situações de sala de aula – e, por consequência, a orientadora do estágio também.

A professora formadora relata em seu diário diferentes imprevistos ao longo das oficinas, desde aqueles mais comuns àqueles mais inusitados para uma aula de matemática. Por exemplo, na Oficina de *Stop Motion*, era preciso um projetor para mostrar aos estudantes vídeos feitos com essa técnica para iniciar a oficina. As estagiárias reservaram o único projetor da escola. Porém, "*uma professora, que havia usado* [o projetor] *anteriormente, guardou o cabo de energia em uma bolsa, que ficou na sua casa. Ou seja, não teve como projetar*" *(14/05/2017)*. A saída encontrada pelas estagiárias foi *"passar no computador e pedir para os estudantes se aproximarem para assistir" (14/05/2017)*.

Já na Oficina de Pipas, era essencial que não chovesse nos dias de oficina, pois, além de confeccionar as pipas, empiná-las fazia parte da aula. Não deu outra: choveu exatamente no primeiro dia. *"Nesse dia, choveu manhã, tarde e noite, sem trégua" (28/05/2017)*. Para este caso, a saída foi reduzir um dia da oficina (inicialmente prevista para quatro dias). Outra atitude da professora formadora, prevendo o baixo número de alunos da escola nos dias de oficina, foi convidar *"também, os alunos da UTFPR. Além disso, os alunos do Estágio Supervisionado B deveriam participar, como forma de ajudar os colegas. Todos toparam". (14/05/2017)*

As oficinas geraram, também, uma reflexão na professora sobre o processo de planejamento e de execução. No trecho seguinte, ela lamenta não ter dialogado mais com um dos estagiários que, na execução da oficina, realizou algo diferente do combinado:

> *"O que me incomodou foi a mudança que pode ter sido mal pensada ou como uma persistência de uma ideia inicial. Talvez […] eu não tenha dialogado o suficiente com ele sobre isso, entendendo suas razões e expondo as minhas. A falta de tempo foi, sem dúvida, uma das razões. Esse aluno faltou bastante e demorou para decidir o que faria. Também, por conta da greve do dia 28/4, todos os estudantes precisaram apresentar em um só dia – o que fez que ficassem corridas a apresentação e a discussão." (14/05/2017)*

Os estagiários contavam com o apoio da professora formadora para sanar dúvidas que surgiam no decorrer das oficinas – sejam elas relacionadas à matemática, ao tema escolhido ou a

outros assuntos.

"Nessa semana que passou, também marquei de conversar com a Aline e com a Viviane[6] sobre uma dúvida que ficamos no dia da apresentação das ideias das oficinas. No caso da oficina de Stop Motion, seria necessário definir, no Youtube, quanto tempo cada foto deveria ficar na tela, para dar uma ideia de movimento. Ficamos em dúvida se um dígito lá referia-se a milésimos de segundos. Pesquisei e percebi que se tratavam de décimos de segundos. Para não haver erro no pouco que havia de matemática na oficina (!), decidi conversar com elas sobre isso. No fim, não sei nem se elas falarão sobre isso para os alunos [...]." (04/06/2017)

Apesar dos imprevistos, as oficinas foram desenvolvidas dentro do esperado. Ao término delas, ocorrem os momentos de reflexão do que fora realizado. Tais momentos aconteceram, como veremos nos trechos a seguir, em dois âmbitos: i) uma reflexão coletiva entre os estagiários, norteada por perguntas elaboradas pela professora formadora; e ii) uma reflexão feita pela própria professora formadora, como uma autoanálise sobre suas próprias ações (Libâneo, 2002).

No trecho a seguir, destacamos a reflexão proposta pela professora formadora aos licenciandos, cujos objetivos, para ela, eram claros: pensar sobre as oficinas no formato desenvolvido e, principalmente, pensar sobre o discurso "a matemática está em tudo".

"Esta semana, com o término das oficinas, pedi para os alunos responderam a algumas perguntas [...]. Com essas perguntas, eu queria que eles começassem a pensar sobre as oficinas e sobre o papo de que a matemática está em tudo. Também, queria saber sinceramente deles o que eles acharam dessa maluquice minha, de propor oficinas de temas não matemáticos!!!" (10/06/2017)

A discussão, empreendida após uma escrita individual de respostas a essas perguntas feitas pela formadora, foi realizada com todos os estagiários.

"Nessa conversa, explorei bastante a questão de a matemática estar em tudo ou não. Uma situação curiosa que aconteceu foi que alunos que não viram quase nada de matemática nas suas oficinas continuarem dizendo que, sim, a matemática está em tudo – como foi o caso da oficina de Stop Motion. Ué... e por que não apareceu? Eles dizem que apareceu, só não deu para explorar porque o objetivo era fazer o vídeo, a pipa, a muda etc. ou por falta de tempo. Mas a matemática estava ali. Afinal, a matemática está em tudo! E, enquanto isso, o Carlos[7] insistia em dizer que não, a matemática não estava ali." (10/06/2017)

Além da reflexão coletiva, com os estagiários, a professora registrou em seu diário sua própria reflexão. A esse respeito, destacamos dois aspectos. Um em que ela pensa sobre a disciplina de estágio, o formato das oficinas e a continuidade ou não desse formato – como aparece no trecho a seguir:

"[...] caso eu continue com o estágio, penso sobre esse formato de oficinas que propus este semestre. Continuar? Acredito que não. E por quê? Nem eu sei ao certo. Mas penso que haja uma expectativa por parte dos estagiários em 'ensinar matemática' – assim como há, por outro lado, os que têm medo disso. O estágio seria o momento de aceitar o desafio e pensar em formas de se fazer isso. A grande dificuldade é o oferecimento de oficinas fora do horário de aula.

[6] Nomes fictícios.
[7] Nome fictício.

Como atrair participantes? Matemática não é tão interessante assim para que as oficinas fiquem cheias... As técnicas utilizadas pelos professores para que os estudantes participem costumam ser atribuição de nota (o famoso "pontinho") para quem participar, dizer que eles não sabem matemática, por isso precisam fazer a oficina, ou promessa de treinamento para o ENEM. Humm... nenhuma delas me convence. O que fazer, então? Problema para o próximo semestre... ou não!" (18/06/2017)

Outro aspecto está em quando a reflexão gira em torno de seus sentimentos e a maneira como o estágio supervisionado, enquanto etapa fundamental para formar futuros professores, mexe com a professora formadora – como no trecho seguinte:

"Ontem foi o seminário de socialização e tive a alegria de ter [as professoras] *Joana e Bárbara*[8] *comigo. Elas me fizeram acreditar que a proposta maluca de oficinas de temas não matemáticos foi uma boa! E não apenas elas... A apresentação dos alunos também me fez crer nisso. Percebi que a preparação das oficinas, a realização, os improvisos e os resultados são importantes na formação dos licenciandos, mesmo que não seja de um tema matemático. Parece que todo esse processo de se tornar professor independe, muitas vezes, se é de matemática ou não; há algo anterior ao tema da aula nessa formação. E a ousadia em propor temas que não tivessem relação direta com a matemática foi também disparador de discussões importantes – como a que se refere à máxima de que "a matemática está em tudo". Na apresentação de ontem, vi que cada um dos estagiários lidou de forma diferente com isso e chegou a conclusões diferentes; de todo modo, eles pensaram e debateram sobre isso – o que fez valer toda essa ousadia! [...] Há uma sensação de 'estamos juntos' entre nós e em momentos diversos: naquele de planejamento, naquele momento em que tudo parece ter dado errado, naquele de comemoração, pois tudo aconteceu! E acho que é isso que mexe tanto comigo! Termino esse Estágio feliz e, quem sabe, até uma próxima!" (01/07/2017)*

O exercício da reflexão é um elemento chave para o desenvolvimento profissional do professor. De acordo com Alarcão (2010), a noção de professor reflexivo "baseia-se consciência da capacidade de pensamento e reflexão que caracteriza o ser humano como criativo e não como um mero reprodutor de ideias e práticas que lhes são exteriores" (p. 44). Talvez, exatamente por essa consciência de sua capacidade de pensar e refletir – a própria intenção de escrever um diário evidencia a capacidade de reflexão sobre sua prática –, a professora formadora se permitiu propor algo novo, diferente do que vinha ocorrendo nos semestres anteriores. Do lado dos estagiários, ao provocar a reflexão coletiva, a professora formadora também permitiu que esses se colocassem no exercício de refletir sobre suas ações, sobre a disciplina e sobre o fato de a matemática estar em tudo.

O que poderemos fazer?

Neste artigo, propusemo-nos a apresentar a trajetória de uma professora formadora ao longo de uma disciplina de Estágio Supervisionado na Licenciatura em Matemática. Investigamos essa trajetória por meio de registros de seu diário, uma ferramenta que, ao nosso ver, cumpriu duas funções relevantes para o trabalho do professor formador e que indicamos com sendo atividades possíveis de serem constantemente feitas por esses profissionais.

A primeira delas, comentada ao longo deste texto, refere-se à reflexão do professor formador acerca de suas ações. Como vimos, a escrita de um diário pode favorecer a prática

[8] Nomes fictícios.

reflexiva de professores formadores, prática esta que não precisa ficar restrita à professora formadora da disciplina, mas pode se estender a outros professores formadores, que atuam no Estágio Supervisionado ou não. Discussões individuais e coletivas entre professores formadores podem (para não dizer "devem") ser feitas a fim de gerar novas compreensões sobre a formação inicial de professores.

A segunda atividade desencadeada pelo diário escrito pela professora e que pode ser feita por professores formadores é a pesquisa sobre a própria prática. Neste texto, os registros do diário foram utilizados para apresentar a trajetória da professora formadora, mas poderiam ser utilizados com mais ênfase nas análises de suas ações. Os registros escritos do diário permitem que os pensamentos e os sentimentos manifestados, as escolhas, as dúvidas, as incertezas sejam avaliadas e investigadas, com base em aportes teóricos, de modo a sistematizar o conhecimento produzido na prática desta ação docente.

Finalizamos o presente trabalho explicitando que buscamos dar nossas respostas às perguntas que nos instigaram: "Quem somos? O que fazermos? O que poderemos fazer?". Nossas respostas foram com base em uma única experiência ao longo de uma única disciplina e por meio de apenas um instrumento de produção de dados (diário), mas ainda há muitos outros contextos e maneiras de ampliarmos nossas respostas a esses questionamentos. Fica, então, o convite a todos os professores formadores que desejam debater e propor outras visões a respeito dos cursos de Licenciatura em Matemática!

Referencias y bibliografía

Alarcão, I. (2010). *Professores reflexivos em uma escola reflexiva*. 7. ed. São Paulo: Cortez.

Brasil. (2015). Ministério da Educação. Resolução nº 2, de 1 de julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. *Diário Oficial da União*, Brasília, Seção 1, 8-12.

Barbato, C. N. (2016). *A constituição profissional de formadores de professores de matemática*. 2016. 322 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba.

Cury, H. N. (2001). A formação dos formadores de professores de matemática: quem somos, o que fazemos, o que podemos fazer? In: Cury, H. N. (Org.) *Formação de professores*: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS. 11-28.

Libâneo, J. C. (2002). Reflexividade e Formação de Professores: outra oscilação do pensamento pedagógico brasileiro? In: Pimenta, S. G.; Ghedin, E. (Orgs). *Professor Reflexivo no Brasil*: gênese e crítica de um conceito. São Paulo: Cortez, p. 63-93.

Lins, R. C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática? In: Bicudo, M. A. V. *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp. p. 75-94.

Nacarato, A. M. et al. (2012). Tendências das pesquisas brasileiras que têm o professor que ensina matemática como campo de estudo: uma síntese dos mapeamentos regionais. In: Fiorentini, D.; Passos, C. L. B.; Lima, R. C. R. (Org.). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática*: período 2001 – 2012. Campinas: Unicamp. p. 17-41.

Teixeira, B. R. & Cyrino, M. C. C. T. (2015) O Estágio de Regência como Contexto para o Desenvolvimento da Identidade Profissional Docente de Futuros Professores de Matemática. *Alexandria* Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, 8 (3), 131-149.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O ensino da matemática em sala de aula por meio do lúdico

Cintia **Schneider**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
cintia.schneider1995@gmail.com
Dirlei Salete de **Souza**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
dirleisouza@hotmail.com
Felipe Junior **Crozetta**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
felipecrozetta@outlook.com
Karla Aparecida **Lovis**
Instituto Federal do Paraná – *Campus* Capanema
karla.lovis@ifpr.edu.br

RESUMO

O presente artigo tem por objetivo demonstrar como é possível promover conhecimentos matemáticos por meio de atividades lúdicas. Para atingir essa finalidade foram desenvolvidas atividades dinâmicas e lúdicas para o ensino da Matemática por meio de oficinas, com uma turma de 8º ano de uma escola no município de Lindóia do Sul, SC - Brasil. Esta oficina foi desenvolvida como item obrigatório na etapa I do Estágio Supervisionado do curso de Matemática – Licenciatura. Por meio da oficina obtivemos resultados positivos no que se refere aprendizagem, interação e participação dos alunos. Destacamos que com a inserção do lúdico, o aluno compreende melhor os conceitos matemáticos e que a interação com seus pares colabora para a efetivação da aprendizagem.

Palavras chave: Matemática, Lúdico, Interação.

Introdução

Considerando que as oficinas e as percepções a cerca dela, que serão expostas adiante, foram desenvolvidas durante o Estágio Supervisionado do curso de Matemática Licenciatura, toma-se a liberdade de dissertar brevemente sobre esta etapa tão relevante e construtiva do processo de formação de professores.

O Estágio Supervisionado é um cumprimento da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996 - Lei Federal n°. 9.394, de 20 de dezembro de 1996), que define que todo o curso de Licenciatura deve oferecê-lo para a formação de professores que poderão atuar na rede de ensino pública ou privada do Brasil.

Segundo Santos (2005) o estágio deve ser visto como uma oportunidade de formação contínua da prática pedagógica, na qual o licenciando assume o papel ativo e possibilita um confronto com a realidade que irá enfrentar no dia a dia. Esse é o momento mais propício, que objetivam o crescimento pessoal e profissional do futuro professor, além disso, o estágio é um dos momentos para que o acadêmico exerça na prática o que aprendeu na teoria.

O Estágio Curricular Supervisionado de Ensino é definido pelo Parecer CNE/CP 28/2001 (BRASIL, 2001, p.10) como:

> [...] o tempo de aprendizagem que, através de um período de permanência, alguém se demora em algum lugar ou ofício para aprender a prática do mesmo e depois poder exercer uma profissão ou ofício. Assim o estágio curricular supõe uma relação pedagógica entre alguém que já é um profissional reconhecido em um ambiente institucional de trabalho e um aluno estagiário. Por isso é que esse momento se chama estágio curricular supervisionado.

As experiências proporcionadas pelo estágio aproximam-se de uma vivência da diversidade de situações educativas, como da prática docente, situações adversas em sala de aula, relação entre professor e aluno, elaboração e planejamentos de aulas e de uma oficina, e por meio disso realizar uma análise e relatar as experiências vivenciadas durante o estágio supervisionado.

Este trabalho relata a experiência com atividades e jogos para o ensino da Matemática elaborados por dois acadêmicos da 5ª fase do curso de Matemática - Licenciatura do Instituto Federal Catarinense - Campus Concórdia/Brasil, durante uma oficina do Estágio Supervisionado. Esta oficina também foi desenvolvida como Prática como Componente Curricular - PCC na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem I. Por PCC entende-se:

> A prática como componente curricular é, pois, uma prática que produz algo no âmbito do ensino. Sendo a prática um trabalho consciente (…) de apoio do processo formativo, a fim de dar conta dos múltiplos modos de ser da atividade acadêmico-científica. Assim, ela deve ser planejada quando da elaboração do projeto pedagógico e seu acontecer deve se dar desde o início da duração do processo formativo e se estender ao longo de todo o seu processo. Em articulação intrínseca com o estágio supervisionado e com as atividades de trabalho acadêmico, ela concorre conjuntamente para a formação da identidade do professor como educador. Esta correlação teoria e prática é um movimento contínuo entre saber e fazer na busca de significados na gestão, administração e resolução de situações próprias do ambiente da educação escolar (BRASIL, Parecer CNE/CP nº 28/2001).

As atividades propostas foram desenvolvidas na Escola de Educação Básica Padre Izidoro Benjamin Moro, situada no município de Lindóia do Sul, SC. Foram observadas quatro aulas de Matemática em uma turma do 8º ano, no período matutino e a oficina desenvolvida no

contra turno escolar. A oficina contou com a presença de 20 alunos e teve duração de quatro horas/aula.

O tema da oficina foi escolhido após conversa com a professora regente da turma, a qual nos apresentou as maiores dificuldades dos alunos no momento. A oficina teve fundamentação na metodologia de jogos.

Na oficina abordou-se o conteúdo de expressões algébricas. A finalidade foi instigar os alunos com atividades de Matemática de forma diferenciada, dando ênfase as expressões algébricas. Por meio das atividades lúdicas buscou-se fazer com que os alunos vissem a disciplina da Matemática de forma contextualizada e prazerosa e não apenas como componente curricular.

O desenvolvimento de jogos permitem à criança vivenciar experiências com a lógica e o raciocínio, permitindo atividades físicas e mentais que favorecem a sociabilidade e estimulando as reações afetivas, linguística, cognitivas e sociais.

Conforme Piaget citado por Wadsworth (1984, p. 44):

> O jogo lúdico é formado por um conjunto linguístico que funciona dentro de um contexto social; possui um sistema de regras e se constitui de um objeto simbólico que designa também um fenômeno. Portanto, permite ao educando a identificação de um sistema de regras que permite uma estrutura sequencial que especifica a sua moralidade.

Borin complementa que (1996, p. 9):

> Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva, e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que esses alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem.

Assim, podemos destacar a importância da metodologia de jogos em sala de aula. Que além de proporcionar a criança um momento diferenciado, é também um momento de desbloqueio para que ela possa interagir em grupo. E se moldando a sociedade por meio das regras estabelecidas por ela.

Metodologia

A presente oficina foi desenvolvida no dia 3 de maio de 2018, no turno vespertino com a turma do 8º ano, na Escola de Educação Básica Padre Izidoro Benjamin Moro em Lindóia do Sul.

A oficina teve início as 13h05min e término as 17h05min. Trabalhou-se os seguintes tópicos: história da Matemática para embasar o conteúdo trabalho e mostrar em que situações do nosso cotidiano elas podem ser usadas, jogos para permitir que os alunos aprendessem de maneira mais lúdica e interativa, envolvendo, inclusive, a resolução de problemas. Além disso, a oficina foi desenvolvida em forma de gincana afim de que a competição estimulasse os alunos a desenvolver as atividades propostas.

Resultados e discussões

Para iniciar a atividade os acadêmicos deram as boas-vindas aos alunos e depois de uma breve fala da professora regente da turma, deu-se início as atividades. Todos se apresentaram falando seu nome, onde moravam, sua idade e outras coisas.

Depois de concluída essa parte de apresentações, deu-se o início das atividades, usando a história da Matemática. Desta forma explanou-se um pouco sobre a história da álgebra. Conforme Lins (1997), a palavra álgebra tem origem árabe que significa "restauração, restituição ou devolução" tendo referência com a transposição de um termo para outro lado da equação, esta introdução normalmente vem associada às equações que são expressões demonstradas por uma igualdade e sempre há uma "incógnita", que são termos algébricos a ser encontrado o valor numérico representativo. O aluno por sua vez poderá ampliar o modo de expressar e trabalhar melhor o raciocínio para conhecer valores ou termos, facilitando a resolução das equações e encontrando seu respectivo valor de representação da "letra" a ser conhecido o seu valor numérico.

Surgiu, então, a necessidade de se estabelecer generalizações de problemas de modo a chegar a uma resolução, o simbolismo moderno conhecido hoje, começou a despontar a partir de 1500 (BAUMGART, 1992), com a utilização dos símbolos modernos passou-se a utilizar-se de formas em que pudessem ser usadas em vários problemas que possuíssem uma mesma incógnita ou expressão.

Neste sentido, aponta-se que a história da Matemática é um instrumento de resgate da própria identidade cultural, o que se pode reforçar com o seguinte encaminhamento dado nos PCN:

> [...] ao verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração (BRASIL, 1998, p. 43).

No segundo momento um vídeo de produção própria foi passado para a turma. Esse vídeo tratava das expressões algébricas no cotidiano. Pereira, Pereira e Carão, (2008, p. 06), afirmam ser "[...] importante não negar os avanços da tecnologia e, sim, urgentemente nos apropriarmos desse processo, para podermos neles interferir". Amparados nesta justificativa é que fez-se uso do vídeo. Após o termino do vídeo aconteceu uma pequena fala para contextualizar o vídeo usando o exemplo de uma corrida de táxi, onde você paga a bandeirada e a incógnita da questão é o número de quilômetros que você vai rodar.

Depois disso, os estagiários fizeram uma dinâmica com o jogo "Eu tenho quem tem". Para dar início ao jogo foram distribuídas fichas para os alunos que continham frases. Exemplo: *eu tenho 10, quem tem 5 vezes 4*, assim quem tivesse o número 20 dava sequência ao jogo. O jogo tem uma sequência em que o aluno que começa o jogo deve finalizar a atividade, desta forma após 20 minutos, a atividade deu-se por encerrada. A mesma foi realizada 2 vezes para maior compreensão dos alunos.

O uso de jogos no contexto educacional com alunos que apresentam dificuldades de compreensão e de aprendizagem pode ser eficaz em dois sentidos, no qual o primeiro garantiria o interesse e a motivação dos discentes, e o segundo seria a possibilidade de aprimorar seus instrumentos cognitivos de modo a favorecer a aprendizagem dos conteúdos matemáticos (BRENELLI, 1996).

Os problemas podem ser de graus diferentes de dificuldades, mas se eles desafiarem a curiosidade do aluno poderá gerar o gosto pelo trabalho lógico e mental, além de proporcionar ao discente o gosto pelo triunfo da descoberta. De acordo com Polya (2006), a principal diferença entre uma questão considerada fácil e outra difícil pode estar em relação ao aluno reconhecer ou não o problema que está resolvendo com outro já resolvido, que tenha a mesma expressão.

No terceiro momento foi desenvolvida uma dinâmica em que os alunos foram divididos em dois grupos para realizar a atividade que consistia nos seguintes procedimentos: um estagiário lia a expressão (um número menos a sua metade) e os alunos achavam essa expressão que estava em fichas em cima das suas mesas, exemplo ($x - \frac{x}{2}$). Quando alguém erguesse a mão um dos estagiários ia até eles para pegar a resposta e conferir com o outro estagiário que estava com as respostas, após confirmada a resposta era anotado o ponto para o grupo no quadro.



Figura 1: Jogo da "Linguagem Algébrica".
Fonte: Os autores (2018).

Percebeu-se os alunos interessados em resolver as questões e interagindo com os componentes de seu grupo e do adversário. Macedo, Petty e Passos (2000, p. 36) destacam a visão piagetiana sobre o uso de Jogos matemático em grupos, ressaltando que atividades em grupos é mais do que propor situações grupais:

> O trabalho por equipes supõe necessariamente a cooperação entre o todo e as partes, exigindo um "compromisso" constante de cada um dos elementos. Porém trabalhar em equipes não é apenas propor situações grupais. A ideia de Piaget sobre esse tema é mais ampla porque considera as relações sociais como importante aspecto no contexto escolar. Nestes termos , cada um é responsável por si e pelo grupo ao mesmo tempo, ou seja, trabalhar em grupo significa aprender as consequências disso, o que implica respeito mútuo, trocas de idéias e consideração pelo outro.

No quarto momento desenvolveu-se um jogo chamado "Tabuleiro Algébrico", a qual tinha-se por objetivo que pudessem visualizar as expressões. O tabuleiro tinha um formato retangular dividido em várias casas. Cada casa continha uma expressão algébrica que era resolvida. Assim, após os alunos lançarem o dado e substituírem o resultado na expressão, eles determinavam quantas casas teriam que andar. Para ganhar o aluno teria que completar 3 voltas ao redor do tabuleiro.

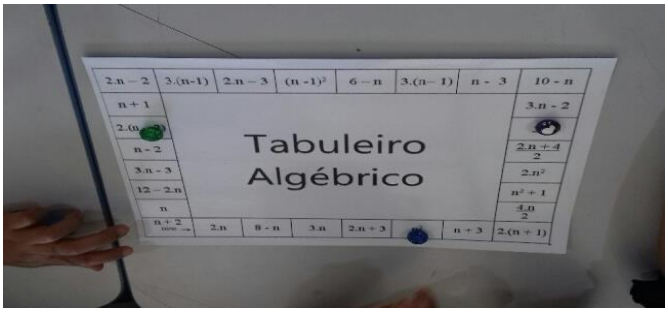


Figura 2: Jogo "Tabuleiro Algébrico".
Fonte: Os autores (2018).

O quinto momento programado foi o dominó algébrico e o dominó das 4 operações. Para jogar o dominó algébrico os alunos tinham que fazer as operações que continham em cada cartela do jogo, para poder dar sequência. Depois de um determinado tempo percebeu-se uma pequena insatisfação por parte dos alunos, pois a atividade já estava se tornando cansativa. Desta forma, os estagiários fizeram a atividade final, com a qual foi utilizado um baralho comum: a sala foi dividida em dois grupos, os estagiários chamam uma pessoa de cada grupo para fazer uma disputa, que acontecia da seguinte maneira: cada aluno recebia uma carta do baralho e não podia ver, colocava ela na testa e um dos estagiários falava a soma das duas cartas, ganhava quem acertava primeiro a carta que estava segurando. Eles ficaram muito animados e após terminar a disputa entre os dois grupos, foi realizado o encerramento com os alunos que por sua vez deram um feedback da oficina destacando os pontos positivos e negativos da oficina.

Segundo Macedo (1995) a competição em jogos educacionais, não é boa nem má. Ela caracteriza uma situação onde duas pessoas desejam a mesma coisa ou dela necessitam ao mesmo tempo. A teoria de Piaget mostra que a competição nos jogos é parte de um desenvolvimento maior, que vai do egocentrismo a uma habilidade cada vez maior em descentrar e coordenar pontos de vista.

Para deixar os alunos mais animados pela oficina foram distribuídos bombons em um gesto de engajá-los em participar de mais oficinas, para que eles também possam ver a matemática de um jeito diferente e significativa.

Os momentos proporcionados por essa atividade fizeram com que os alunos desenvolvessem suas habilidades matemáticas de maneira prazerosa, sem medo de uma disciplina que apresenta-se tão desafiadora aos estudantes. Ao final da oficina, solicitou-se que os alunos dessem seu *feedback* sobre a oficina aplicada. De maneira geral, eles descreveram que gostaram de todas as atividades desenvolvidas, principalmente, os jogos que envolviam competição, e que gostariam que essa metodologia fosse adotada em mais disciplinas, e não somente na de matemática. Segundo os relatos, a oficina os auxilia na compreensão do conteúdo de uma maneira divertida e prazerosa.

Considerações finais

Após a realização das atividades, destaca-se a importância das oficinas pedagógicas realizadas com os estudantes em sala de aula, por ser um momento diferenciado em que os alunos podem ter um momento de descontração, vinculado a metodologias de ensino e matemática. Ou seja, eles acabam se envolvem de uma forma lúdica com os saberes matemáticos.

Esta oficina contribui de forma significativa para formação acadêmica dos estagiários visto que permite ao futuro professor colocar em prática conhecimentos teóricos, bem como vivenciar a realidade de uma escola.

De um modo geral, destaca-se a curiosidade dos alunos presentes na oficina: todos estavam motivados a conhecer algo diferente, deixando de lado o perfil de aluno passivo e dando espaço a um aluno investigador. Proporcionou-se uma experiência contextualizada para os alunos, que puderam desmistificar certos receios em relação a matemática.

Durante a oficina vivenciou-se uma experiência significativa da profissão docente, desde o planejamento da oficina de acordo com a professora regente, o currículo da escola até a realização das oficinas e a relação entre aluno e professor.

No final após todos derem seu *feedback* conclui-se que estas práticas contribuem para o seu desenvolvimento e aperfeiçoamento da formação docente. Com a prática foi possível um aprendizado que não só ajuda na formação de um profissional, mas também como cidadão, desenvolve a capacidade de empatia, a necessidade de sentir-se útil ao ser humano, saber que a cada resolução de uma operação de adição ou multiplicação, por exemplo, o aluno consegue alcançar o objetivo estabelecido e ver então o sorriso no rosto dos alunos não tem preço.

Referências

Baumgart, J. K. (1992). *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. Volume 4. São Paulo: Atual, 1992.

Borin, J. (1996). Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP.

Brasil. MEC.CNE/CP. (2001). *Parecer nº 28 de 02 de Outubro de 2001*. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/sesu/ . Acesso em 20 de Outubro de 2018.

Brasil, *Parecer CNE/CP nº 28/2001*. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2016/37541-cne-seminario-formacao-professores-2016-apresentacao-06-marcia-gurgel-pdf/file. Acesso em 19.out.2018

Brasil. Ministério da Educação (1998). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2001. BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996.

Brenelli, R. P.(1996). O jogo como espaço para pensar: A construção de noções lógicas e aritmética. Campinas, SP: Papirus.

Lins, R. C.; Gimenez, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para século XXI*, (coleção Perspectivas em educação Matemática). Campinas: Papirus, 1997.

Macedo, L.. *Os jogos e sua importância na escola*. Fonte: Caderno de Pesquisa. Nº 93 (maio 1995).São Paulo. Fundação Carlos Chagas, 1995 p. 5- 11. Disponível em: https://www.construirnoticias.com.br/asp/matéria.asp?id=1487. Acesso em 26.Out.2018.

Macedo, L.; Petty, A. L. S.; Passos, N. C. (2000). *Aprender com jogos e situações problema.* Porto Alegre: Artmed.

Pereira, R. C. B; pereira, R. O; carrão E. V. A **Informática Educativa**: *professor, aluno e os problemas escolares no ensino aprendizagem*. Juíz de Fora: UFJF, 2008. Disponível em: <

http://www.ecsbdefesa.com.br/fts/INFOEDU.pdf>. Acesso em: 28.set.2018.

Polya, G. (2006). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

Santos, H. M. dos. (2005). *O Estágio curricular na formação de professores: diversos olhares.* In: 28ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED, GT 8 - Formação de Professores. Caxambu.

Wadsworth, B. *Jean Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau*. São Paulo, Pioneira, 1984.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O Ensino de Funções Trigonométricas Com o *Software* GeoGebra

Sonner Arfux de Figueriedo
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Brasil
sarfux@uems.br
Nielce Meneguelo **Lobo da Costa**
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN
Brasil
nielce.lobo@gmail.com

Resumo

Neste artigo se discute, num experimento de ensino, como futuros professores consolidam conceitos trigonométricos em uma experimentação de tarefas desenhadas em um ambiente virtual. Desenvolveu-se em um Curso de Licenciatura, Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Brasil. O aporte teórico desse recorte da pesquisa maior veio dos estudos sobre abstração reflexiva de Piaget como indicada por Simon e Tzur. A metodologia da pesquisa foi qualitativa com características do *Design-Based Research*, Cobb et al, e a análise foi interpretativa. Foi desenvolvida uma trajetória hipotética de aprendizagem, segundo Simon *et al*, nela utilizamos uma abordagem exploratória-investigativa de ensino. Os sujeitos foram três licenciandos e os resultados indicaram que, apesar de pouca experiência com o *Software*, houve um processo de abstração dos conceitos ao relacionarem o aspecto operacional com o estrutural, o qual o acadêmico só atingiria se conseguisse interiorizar de modo a captar as relações trigonométricas como um todo.

Palavras chave: Educação Matemática; Trigonometria; Tecnologia; Formação pedagógica.

Introdução: O estudo da Trigonometria

As origens da trigonometria são um tanto obscuras. Há alguns problemas no papiro de Rhind que envolvem a co-tangente de um ângulo diedro da base de uma pirâmide, na tábula cuneiforme dos antigos babilônica Plimpton 322 que continha uma notável tábua de secantes, também é possível que as investigações modernas sobre a matemática da Mesopotâmia antiga venham a revelar um desenvolvimento apreciável da trigonometria prática, sem falar nos Indus que consideravam a trigonometria como uma ferramenta para sua astronomia.

A trigonometria na antiguidade sempre foi ligada às partes da geometria e da álgebra, com os quais se relacionam, entretanto hoje é tratada como um tópico matemático independente nas propostas curriculares (conteúdo programático de matemática) do ensino fundamental ou médio. Euclides Roxo considerava que muitas questões da Geometria se resolvem rapidamente graças as noções básicas de trigonometria, e ele se valeu das pressuposições teóricas de educadores matemáticos tais como Gutton, ao afirmar que os tópicos matemáticos abordados nos livros didáticos utilizados no ensino secundário apresentavam separações estanques entre os vários ramos da matemática, tornando-os fragmentados (LOBO DA COSTA, 2004).

Sendo assim, ao longo dos anos, houve uma evolução no sentido da simplificação da linguagem até, chegarmos à escrita atual, mas nem por isso a geometria através do desenho perdeu sua importância como meio de comunicação e de expressão, e foi sendo sempre utilizado paralelamente à escrita.

De modo a garantir ao discente uma formação que o torne protagonista na construção do conhecimento, é fundamental que se aplique na formação inicial uma metodologia para o ensino de funções trigonométricas que inclua a Geometria Dinâmica. A metodologia proposta para o ensino é uma alternativa à tradicional, e se propõe a resgatar a importância da geometria como fonte de conhecimento, inspiração e criação.

Propusemos uma alternativa para o ensino e aprendizagem da trigonometria usando o *software* de Geometria Dinâmica *GeoGebra*[1] na procura de sanar as dificuldades encontradas pelos acadêmicos quanto à compreensão das definições relacionadas à trigonometria, Com o uso do *software GeoGebra* proporcionamos ao acadêmico ferramentas e estratégias para a exploração, relação, análise e demonstração de forma que construíssem com solidez os conceitos e identificassem as propriedades trigonométricas.

A pesquisa que subsidia este artigo foi desenvolvida em um curso de Licenciatura em Matemática e teve por objetivo elaborar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o ensino das funções seno e cosseno.

Assim, propusemos trabalhar o conteúdo de trigonometria no ciclo trigonométrico e introduzir as funções trigonométricas. A THA foi desenvolvida com acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UFMS.

Marco Teórico da Investigação

O marco teórico da investigação contemplou a caracterização do mecanismo cognitivo que se centra na relação atividade-efeitos em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem - THA (do inglês, Hypothetical Learning Trajectory-HLT), segundo Simon, Tzur, Heinz & Kinzel (2004), com uma taxonomia sobre os processos de generalização que parte da ideia de abstração reflexiva de Piaget (1977). Assim podemos analisar a relação entre a aprendizagem conceitual e as tarefas matemáticas, com esta elaboração da THA, o mecanismo oferece uma estrutura para pensar sobre como a tarefa matemática pode promover o processo de aprendizagem do licenciando (FIGUEIREDO et al, 2015).

A perspectiva teórica procede a uma particularização da ideia de abstração reflexiva elaborada a partir das ideias de Piaget (1977) sobre abstração reflexiva, utilizada por Simon e Tzur

[1]. Para mais informações ver: https://www.geogebra.org

(2004). Estes autores apontam que as ações dos estudantes produzem diferentes efeitos que podem ser considerados por ele no desenvolvimento de seus processos de abstração.

O enfoque proposto por Simon (1995) e por Simon e Tzur, (2004), para desenvolvimento profissional docente propõe um modelo de análise da prática do professor que permite, com posterioridade, incorporar resultados aos programas de formação de professores. Os autores explicam que enquanto os alunos se concentram em suas atividades com vistas a atingir sua meta, eles criam registros mentais, de modo que a atividade de experiência é gravada mentalmente e se desenvolve uma interação da atividade que é ligada ao seu efeito.

Este mecanismo baseia-se na descrição de Piaget (1977) sobre dois aspectos: o da reflexão e da abstração. O primeiro aspecto é uma projeção, no qual as ações em um nível tornam-se objetos (entrada) para as ações do próximo nível. O segundo aspecto é uma subjetividade conceptualização, no qual uma reorganização entre ações ocorre. O autor faz uma distinção entre os dois tipos de reflexão realizados pelos estudantes em seus registros da experiência.

Tzur e Simon (2004) partindo da noção de abstração reflexiva de Piaget, assumem que os processos mentais dos estudantes são elementos constituintes da compreensão de um objeto que por sua vez envolve duas fases: a fase participativa, na qual o estudante desenvolve diferentes atividades guiadas por um objetivo, qual seja, o de resolver uma tarefa matemática; a fase antecipatória, em que antes de uma determinada tarefa cuja resolução envolve o uso de um conceito matemático pelo aluno ele deve considerar pertinente o uso do conceito matemático na resolução dessa tarefa. Neste caso, o aluno pode usar o conceito de forma adequada, independentemente do contexto ou da tarefa.

O trabalho docente ao desenhar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem

O trabalho docente é uma atividade profissional que requer a mobilização de diferentes domínios do conhecimento em situações nas quais o professor deve tomar decisões, colocando seu "conhecimento em uso". Essa é competência docente de planejar situações de ensino e aprendizagem de matemática nas quais o professor mobiliza seus conhecimentos e faz uso do que conhece de matemática, de ensino e de tecnologia. São diferentes contextos e áreas nas quais o professor deve utilizar informações para as mais diversas tomadas de decisão.

O professor, a partir de sua intencionalidade pedagógica produz um “caminho” para a aprendizagem do aluno. Temos então um desenho e a planificação de instruções aos discentes, com definições dos objetivos da aprendizagem, os quais definem as metas a serem alcançadas; o desenho das tarefas propostas aos estudantes/professores; e a caracterização de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) contendo a previsão de como o pensamento e a compreensão dos estudantes/professores poderão evoluir, quando resolvem as tarefas matemáticas propostas.

Em nossa pesquisa destacamos a experimentação das tarefas desenhadas em um ambiente virtual, nesta se analisa a experiência a partir dos referenciais teóricos subjacentes a trajetória hipotética de aprendizagem dos estudantes/professores, e se trata de investigar se a atividades desenvolvidas pelos estudantes/professores correspondem ou não com o que foi planejado nas definições dos objetivos da aprendizagem e, e neste caso, em que medida os materiais e o entorno desenhado apoiam a aprendizagem projetada.

O Desenho do experimento

A investigação desenvolveu-se em um processo de formação inicial no qual se aplicou um experimento de ensino sobre funções trigonométricas usando o *Software GeoGebra* em uma

relação entre a atividade efeito com o uso de lápis e papel em um entorno tecnológico, cujo objetivo foi compreender a caracterizar o conceito de funções trigonométricas. A metodologia foi a qualitativa de cunho interpretativa com características do *Design-Based Research* segundo Cobb et al (2003). Criamos atividades relacionadas ao conteúdo de funções trigonométricas objetivando levar o acadêmico a identificar as razões trigonométricas, no ciclo trigonométrico, o conceito de periodicidade, amplitude, domínio, conjunto Imagem em funções trigonométrica possibilitando ao acadêmico uma ideia do que se trata esta abordagem no ensino de funções trigonométricas, ou seja, como organizar o raciocínio e de forma a construírem argumentações lógicas. Esperávamos que o acadêmico apresentasse alguma dificuldade relacionada à maneira de organizarem o raciocínio e construírem argumentações lógicas, também na operacionalização do *software*, uma vez que seria o primeiro contato com o *software GeoGebra.*

As atividades foram direcionadas a três acadêmicos do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Fundamentos de Matemática I. Abordamos conteúdo da trigonometria no triângulo retângulo numa perspectiva investigativa para o estudo de seno, cosseno e tangente, na qual iniciou-se a construção do conhecimento por triângulos retângulos, passando para o ciclo trigonométrico e pôr fim a utilização de gráficos das funções correspondentes. Para esta atividade disponibilizamos três encontros de duas horas/aula cada, nas dependências da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - Brasil, no laboratório de informática.

Primeiramente foi feita uma revisão da teoria no que se refere ao conceito das relações trigonométricas para o triângulo retângulo, e em seguida generalizando este conceito para o ciclo trigonométrico, partindo do pressuposto que os acadêmicos já estudaram este conteúdo quando cursou a disciplina regularmente. Na sequência foi apresentado o *software GeoGebra* ao acadêmico, informando que se trata de um *software* matemático que reúne geometria, álgebra, calculo e estatística em três janelas diferentes: Gráfica, algébrica e numérica. Esperamos respostas a algumas questões e/ou soluções que o acadêmico construa, tais como: Como você explicar, os conceitos de ângulo e de arco trigonométrico; Qual(is) estratégia(s) pode (m) ser utilizada (s) por um professor a fim de proporcionar a alunos a construção do significado de periodicidade; Como o aluno entende o significado da tangente de x, se ele percebe o x como argumento da tangente, e não como um produto de duas variáveis.

Nesta atividade esperamos que o acadêmico possa também relacionar dois aspectos de um único conceito: o aspecto operacional, em que o conceito é visto como processo, e o aspecto estrutural, no qual o conceito é visto como objeto.

Roteiro para construção de gráficos

O acadêmico recebeu um *applet*[2] (figura 1), em um arquivo do computador, construído previamente no qual o mesmo passou a fazer sua investigação, uma vez que a construção da figura requer um domínio maior do *Software*. Nesta atividade coube ao aluno observar e analisar a variação do seno, cosseno e tangente no clico trigonométrico, movimentando o ponto P, e visualizandoas funções no gráfico. Ao mesmo tempo em que observava o ciclo, o acadêmico tinha a opção de selecionar apenas uma ou mais opções, ou até mesmo todas ao mesmo tempo.

Nesta atividade o acadêmico pôde selecionar a opção que desejava, não fornecemos um roteiro, deixamos que ele criasse as suas funções e investigasse o que acontecia com a sua imagem no *software*. Nossa intervenção foi no sentido de propormos algumas questões com relação ao arco

[2] É um *software* aplicativo que é executado no contexto de outro programa.

construído pelo ponto P, medida do raio da circunferência, o comprimento da circunferência, o comportamento da função seno, função cosseno e função tangente observando nos respectivos quadrantes suas variações, sempre no intuito de o acadêmico compreender as relações e propriedades da trigonometria. Por meio da exploração do software de geometria dinâmica o recurso de arrastar, permite a visualização das propriedades das figuras construídas. Assim observamos e argumentamos junto ao acadêmico sobre como explicar, os conceitos de ângulo e de arco trigonométrico.

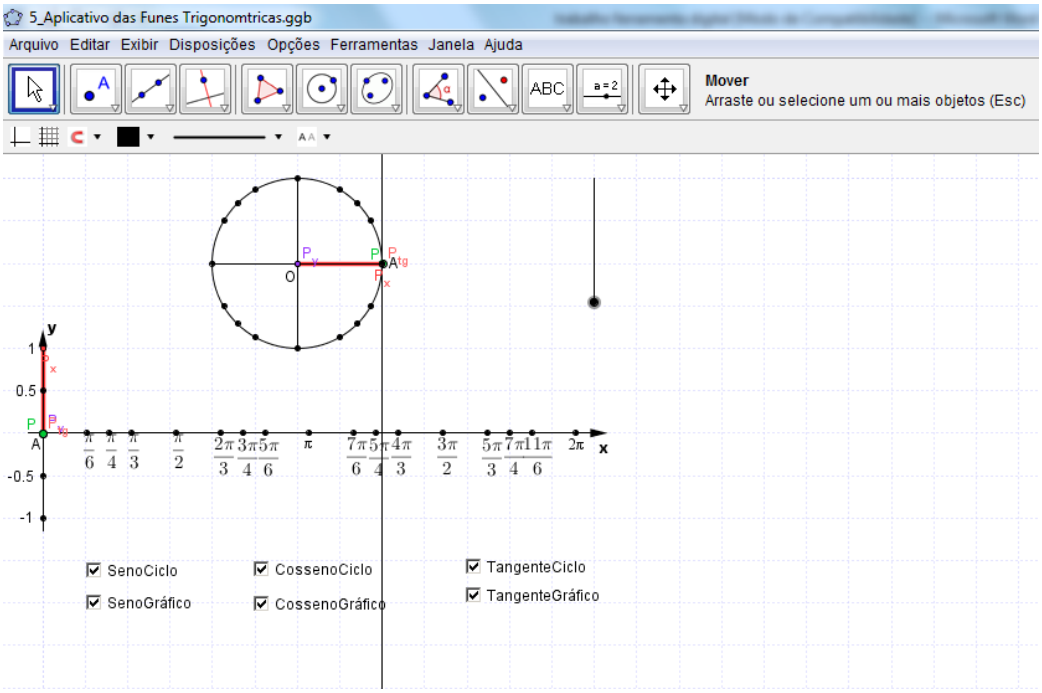


Figura 1 –Applet do Ciclo trigonométrico no *GeoGebra*

Após os estudantes empreenderem várias investigações foi então solicitado a eles que comentassem a atividade. Foi registrada a seguinte fala de um dos três acadêmicos: “com o *Software*, somos convidados a investigar diversas situações, podendo ter no nosso computador o registro de todas as situações criadas”.

Posteriormente disponibilizamos mais dois *applet*, de modo que ao manipular podiam observara construção gráfica da função seno e cosseno. Nesta atividade propusemos 5 (cinco) tarefas, disponibilizamos com o *Software* o eixo cartesiano e as opções f(x)=a. $\sin x$ (x), g(x)=b. $\sin x$, p(x)= $\sin(m.x)$ e q(x)= $\sin x + n$. O acadêmico digitava o valor para cada variável a, b, m e n, pertencente ao conjunto dos números inteiros e analisava as variações no gráfico da função.

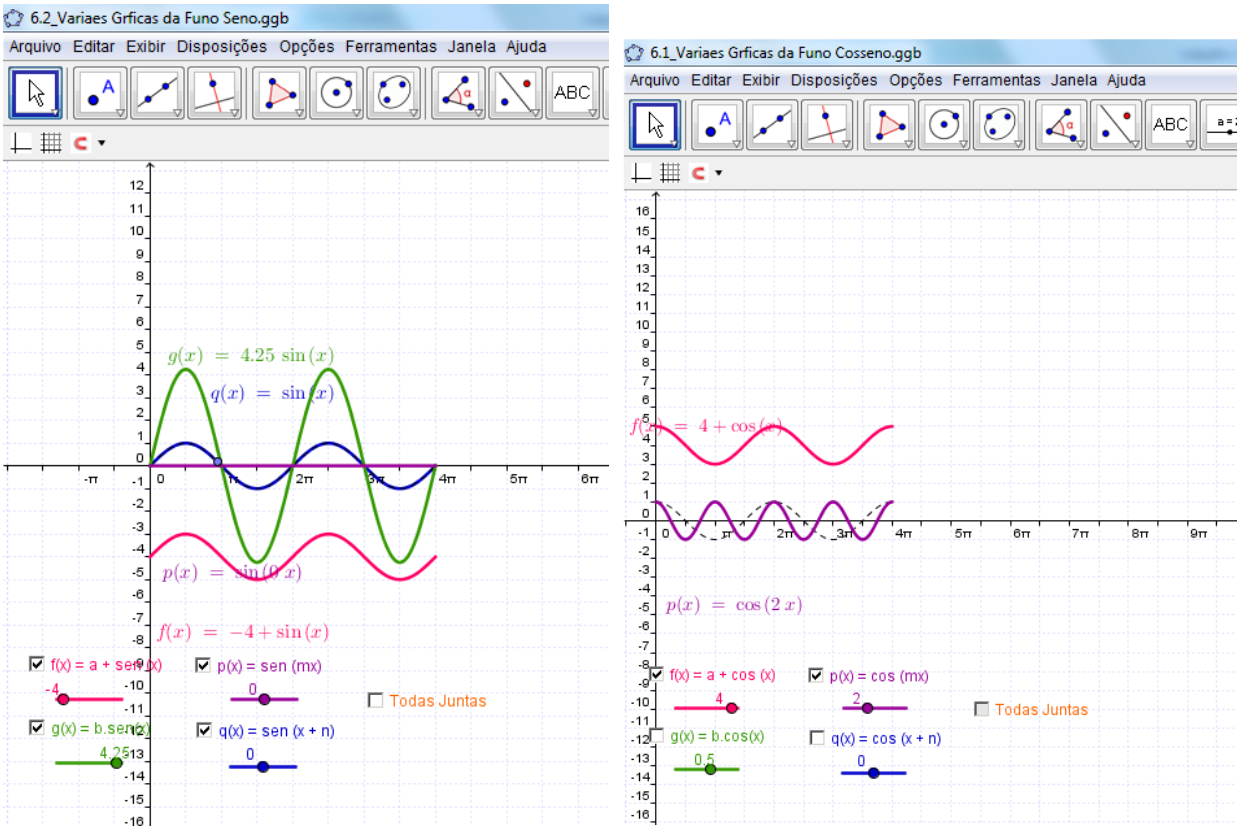


Figura 2: Applet da função seno e função cosseno no *GeoGebra*

- ✓ Tarefa 1: y= $\sin x$; y= $\sin x + 1$; y= $\sin x + 2$.

O que você observa ao comparar os gráficos na tarefa 1?

- ✓ Tarefa 2: y= $\sin x$; y= $\sin x - 1$; y= $\sin x - 2$.

O que você observa ao comparar os gráficos na tarefa 2?

- ✓ Tarefa 3: y= $\sin 2x$; y= $\sin 3x$; y= $\sin \frac{x}{2}$; y= $\sin \frac{x}{4}$.

O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 3?

- ✓ Tarefa 4: y= $2 \sin x$; y= $3 \sin x$; y= $4 \sin x$).

O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 4?

- ✓ Tarefa 5: $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; y = $\cos x$.

O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 5?

- ✓ Tarefa 6: y= $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; y= - cos (x).

O que você observa ao comparar os gráficos da tarefa 6?

O acadêmico observou a variação no eixo cartesiano na atividade da tarefa 1 e 2, relacionando com o período da função, e na tarefa 3 e 4 a diferença entre multiplicar a função seno ou cosseno por uma constante e a multiplicação da constante com o arco correspondente.

Nesta atividade registramos a seguinte fala deum dos acadêmicos: “agora sim pude perceber qual é variável o parâmetro que determina a variação do gráfico no eixo do x e do eixo do y, quando o gráfico encurta ou fica mais comprido”.

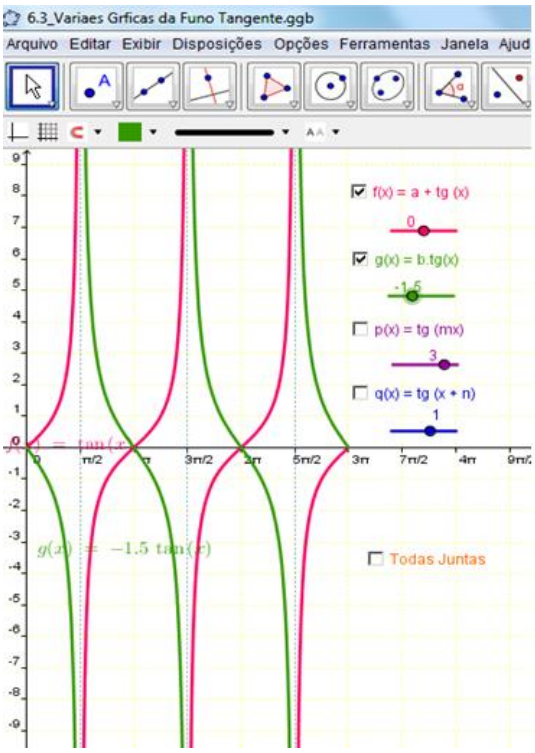


Figura 4: Applet da função tangente no *GeoGebra*

Neste último *Applet*, direcionamos nossa intervenção no sentido de responder à questão de como o acadêmico entende o significado da tangente de x, se ele percebe o x como argumento da tangente, e não como um produto de duas variáveis, sem esquecer nosso objetivo principal, observando os gráficos em relação a tangente.

Em nossas intervenções buscamos relacionar com esta ferramenta, sempre a discussão em relação ao conceito e definição dos conteúdos abordados, envolvendo a observação e reflexão que visam à atuação em situações contextualizadas, através de uma metodologia de formação investigativa, e com isto a possibilidade de o acadêmico colocar em prática seus conhecimentos na oportunidade de contato com o objeto em construção.

Na THA as tarefas matemáticas, Simon e Tzur (2004) identificaram tipos de tarefas que se pode propor aos alunos para que desenvolvam suas capacidades. Chamam de tarefas iniciais as que podem ser realizadas por estudantes que usam seu conhecimento prévio, já as tarefas que permitem que os alunos reflitam sobre ela própria relacionando-a para gerar abstração de regularidades na relação atividade-efeito, são denominadas de tarefas de reflexão e caracterizam ainda as tarefas de antecipação realizadas durante uma HLT às quais, para realização necessitam que o aluno tenha produzido uma abstração de regularidade na relação atividade-efeito.

Concluímos que as tarefas foram significativas para o ensino de funções seno, cosseno e tangente aliado a atividade de ensino com o *Software GeoGebra*, pois consideramos a aplicação do conceito a partir dos conhecimentos prévios dos alunos. Sabemos que a trigonometria pode ser abordada sob diferentes registros, de maneira a evitar aplicações que envolvam somente algoritmos e procedimentos, sobretudo algumas conexões entre a trigonometria e outras partes da matemática ou, talvez, entre está e as outras disciplinas como é proposta no Projeto Político Pedagógico do curso.

Os resultados permitem afirmar que a metodologia adotada auxiliou os alunos a ampliarem o conhecimento de tais conceitos, resultados também constatados em nossa intervenção com o acadêmico. No desenvolvimento do trabalho adotamos uma série de atividades investigativas para analisar as potencialidades e limitações do *Software* no ensino e aprendizagem da trigonometria, e assim, constatamos por meio desta sondagem, que foi possível diagnosticar que o *software* se mostrou muito eficaz, auxiliando os alunos a relacionarem os conceitos já vistos quando cursaram a disciplina regularmente.

Em nossa intervenção observamos e registramos algumas falas dos acadêmicos, mostrando a importância de se discutir a relação teoria e prática com um *software* matemático, possibilitando ao acadêmico a visualização e a interação, não ficando somente na fala do professor e na demonstração dos conceitos em lápis e papel. Consideramos que o acadêmico em virtude do pouco contato com o *software*, não realizou o processo de abstração da matemática ao relacionar o aspecto operacional e estrutural, no caso ele só atingiria se conseguisse interiorizar de modo a captar como um todo o conceito matemático da questão. Observamos ainda, que além da dificuldade de operacionalizar o *Software*, os acadêmicos apresentaram alguns erros conceituais no que tange à maneira de organizarem o raciocínio e construírem argumentações lógicas do conteúdo.

Nesta intervenção concluímos que a geometria dinâmica auxiliou nas atividades investigativas, de modo que os acadêmicos interagiram com o *software*. percebemos que a melhoria da prática depende do envolvimento do docente na busca de novas metodologias. Sendo assim, as análises nos levaram a concluir que as atividades auxiliaram os acadêmicos a construírem novos procedimentos e estratégias de ensino que contribuirão de forma positiva atingindo o objetivo da aprendizagem e investigação no ensino de função trigonométrica.

Referências

Coob, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003.). *Design experiments* in education research. Educational Researcher, v.32(n.1), pp. 9-13.

Figueiredo, S. A.; Lobo Da Costa, N. M.; Llinares, S. Valls, J. *Caracterização em uma Trajetória de Aprendizagem com Funções Trigonométricas.* XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática. Tuxtla Gutierrez. Mexico. 2015.

Lobo da Costa, N. M. (2004). *Formação de Professores para o ensino da Matemática com a informática Integrada à prática Pedagógica:* exploração e análise de dados em bancos computacionais. Tese de Doutorado em Educação. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Piaget, J. (1977). Studies in Reflecting Abstraction. *Sussex: Psychology Press*.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 26, No. 2, 114-145.

Simon, M. A., Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R, Heinz, K and Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305-329.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A abordagem TPACK para a integração da calculadora científica na prática docente através da metodologia Lesson Study

Jalman **Lima**
Université Catholique de Louvain
Bélgica
jalmanlima@gmail.com

Yuriko Yamamoto **Baldin**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
yuriko@dm.ufscar.br

Resumo

Considerando a questão "Como integrar a calculadora científica em sala de aula como um instrumento de aprendizado, sob perspectiva de formação de professores?" o objetivo deste trabalho é apresentar uma discussão sobre a integração da calculadora científica na prática docente, para além da inserção, fundamentada no Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo – TPACK. A pesquisa conta com a parceria das escolas públicas do estado de São Paulo, Brasil, em cursos de formação continuada que trabalham articulações do conteúdo curricular com a prática efetiva nas salas de aula. O planejamento, elaboração e execução dos roteiros didáticos com uso da calculadora científica foram fundamentados na metodologia Lesson Study como um processo de desenvolvimento profissional. Os resultados obtidos nos primeiros módulos possibilitam a interdisciplinaridade com outras áreas de conhecimento, indicando apropriação pelo professor do papel integrador da calculadora científica como uma alternativa de prática docente reflexiva para efetiva aprendizagem dos alunos.

Palavras chave: integração de tecnologia, calculadora científica, TPACK, Lesson Study, formação de professores, desenvolvimento profissional de professores, melhoria na sala de aula, aprendizagem participativa.

Introdução

Há mais de três décadas a tecnologia digital tem feito parte de estudos de pesquisadores em Educação Matemática no Brasil e no exterior. Dentre as tecnologias digitais, encontra-se a calculadora científica, uma das peças controversas de tecnologia educacional e de sua presença em sala de aula.

O mecanismo para especificar vários tipos de uso da calculadora no ensino básico e superior pode tomar diversas formas. Nos documentos curriculares oficiais é possível encontrar referências ao uso (ou não) da calculadora, bem como aos tipos específicos de calculadoras: básicas, científicas, gráficas e calculadoras com CAS (Computer Algebra System).

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) para o Ensino Fundamental e Médio permitem e encorajam o uso de calculadoras e as trazem como uma ferramenta que "... abre novas possibilidades educativas, como a de levar o aluno a perceber a importância do uso dos meios tecnológicos disponíveis na sociedade contemporânea. A calculadora é também um recurso para verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um valioso instrumento de auto-avaliação" (Brasil, 1997, p. 47).

Além disso, a Base Nacional Comum Curricular- BNCC (Brasil, 2017) para o Ensino Fundamental, recém aprovada e em elaboração para o Ensino Médio, traz, na página 96, como importante o uso de calculadoras "para avaliar e comparar resultados", sem, contudo, fazer referência sobre os tipos de calculadoras para os ensinos fundamental e médio. No entanto, não são apenas os tipos de calculadoras que estarão no foco da educação de professores atualizados para a realidade do século 21.

Neste trabalho, argumentamos que a simples menção à importância do papel das tecnologias na sala de aula, em particular das calculadoras científicas, não orienta os professores em exercício ou os cursos que estão a formar os futuros professores, sobre o que significa efetivamente trabalhar o conteúdo curricular das disciplinas específicas com o uso das tecnologias que impliquem na aprendizagem efetiva e consolidada do conteúdo curricular, com vistas à educação do cidadão inserido no mundo que convive com a tecnologia.

Kissane (2012) afirma que *"...* na prática é muito improvável que (os professores) usem materiais que não sejam oficialmente aprovados….. por essa razão, é bastante incomum que os professores de qualquer país usem calculadoras … em sala de aula se o currículo oficial e seu exame associado não sancionarem tal uso."

No Brasil, a situação é similar à descrita, com agravante dos documentos PCN ou BNCC não oferecerem aos professores a segurança e a confiança em mudar seus hábitos de métodos no ensino e aprendizagem na sala de aula, além de não haver orientações sobre "como mudar".

Isso coloca um desafio para motivar o uso de calculadoras no ensino básico para efetivamente cumprir as recomendações oficiais de integração da tecnologia no ensino e aprendizagem. Pelas nossas experiências, os professores carecem de formação para utilizar a calculadora científica como instrumento de aprendizado em sala de aula e, por conseguinte, poder desmistificar o seu papel de ser apenas um instrumento de cálculo e que não proporciona o desenvolvimento da compreensão da matemática na aprendizagem durante uma aula. O projeto do nosso trabalho tem como objetivo exatamente a formação continuada de professores que se tornem capazes de incorporar a mudança de concepção do papel de uma calculadora científica.

Nesta direção, apoiamos em Neves e Bittar (2015) que fazem uma importante observação sobre a carência de formações para o uso de tecnologias nos cursos de licenciatura do Brasil que podem contribuir para fomentar as discussões sobre o tema.

"Observávamos que os demais professores [...] careciam de formação para utilizar as tecnologias, pois muitos diziam que durante o processo de formação inicial, os cursos de licenciatura não haviam contemplado discussões e desenvolvimento de práticas para o uso das

atuais tecnologias disponíveis na escola. Alguns professores afirmavam que ... ao preparar os planejamentos, incluíam as tecnologias como recursos a serem utilizados no desenvolvimento de suas aulas, porém, na prática pedagógica, isso não acontecia." (Neves e Bittar, 2015)

É possível perceber que o trabalho do professor na educação básica se dá mediante desafios (Purificação, Neves & Brito, 2010). Neste contexto, as formações continuadas figuram-se como uma ferramenta essencial no processo constante e permanente de aperfeiçoamento dos professores, uma vez que permitem que estes agreguem conhecimento capaz de gerar transformação e impacto em suas práticas pedagógicas em sala de aula. Acreditamos que pesquisar, investigar, discutir e refletir representam, e isso requer, a busca permanente por formações continuadas que propiciem melhoria da prática pedagógica em sala de aula.

O objetivo deste trabalho é, portanto, trazer a discussão sobre a integração da calculadora científica na prática docente dentro do contexto de formações de professores, e para isso a metodologia de Pesquisa de Aula- Lesson Study norteia as propostas de atividades de formação do nosso projeto, como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula, como apontada em (Baldin & Felix, 2011).

A estrutura deste artigo apresenta a seguir tópicos de discussão sobre o quadro teórico de TPACK – Conhecimento tecnológico e pedagógico de conteúdo, em que se fundamenta a proposta das atividades do curso de formação continuada do projeto, o potencial da calculadora científica como promotor da interdisciplinaridade da nova base curricular, e da análise do potencial pedagógico das fases da Lesson Study em promover a capacitação do professor em alternativas didáticas com uso de tecnologia.

Conhecimento Pedagógico, Tecnológico de Conteúdo (TPACK)

No contexto de integração de tecnologias em sala de aula, Mishra e Koehler (2006) introduziram o conceito de Conhecimento Tecnológico e Pedagógico de Conteúdo, conhecido como TPACK, que deriva do Conhecimento Pedagógico de Conteúdo - PCK de Shulman (1986), que é o conhecimento requerido do professor para ensinar determinada disciplina dentro do currículo. O TPACK identifica a natureza do conhecimento requerido pelos professores para a integração da tecnologia em sua prática, ao mesmo tempo em que aborda a natureza complexa, multifacetada e situada do conhecimento do professor. O TPACK suporta um quadro teórico que combina três áreas de conhecimento: conhecimento tecnológico, conhecimento pedagógico e conhecimento de conteúdo, e estuda como estes conhecimentos se conectam entre si, levando ao contexto de ambiente escolar, gestão da sala de aula e das características sociais dos alunos envolvidos. Esse conhecimento é diferente do conhecimento de um especialista em tecnologia ou disciplinar e também do conhecimento pedagógico geral compartilhado pelos professores em todas as disciplinas. O TPACK é a base do ensino eficiente com tecnologia, e requer uma compreensão do professor da representação de conceitos que usam as tecnologias e de técnicas pedagógicas que usam tecnologias de maneira construtiva no ensino de disciplinas específicas. Isto requer conhecimento do que torna os conceitos difíceis ou fáceis de aprender, assim como saber como a tecnologia pode ajudar os alunos a enfrentar problemas com suas dificuldades, considerando o conhecimento prévio dos alunos. Ainda o TPACK pode ser analisado dentro das teorias da epistemologia, e do conhecimento de como as tecnologias podem ser usadas para construir o conhecimento existente e desenvolver novas epistemologias ou fortalecer as antigas. Estes aprofundamentos não são tratados neste artigo, por fugir do escopo.

No nosso trabalho a calculadora científica é a tecnologia que utilizamos para potencializar as atividades didáticas que possam trazer alternativas para o ensino e aprimoramento da aprendizagem significativa dos problemas de matemática e ciências (física, química, biologia), e de outras ciências dentro do contexto de atualização curricular. E o conceito de TPACK embasa as nossas propostas de roteiros didáticos.

A calculadora científica como ferramenta que possibilita a interdisciplinaridade

Um ponto importante do nosso trabalho é destacar a calculadora muito além de um dispositivo para manipulação aritmética. As calculadoras científicas evoluíram desde a primeira calculadora científica nos anos 70. Nessa época, a calculadora era usada principalmente para realizar cálculos longos, incluindo os cálculos de interesse de cientistas e engenheiros.

A calculadora científica foi aperfeiçoada nos últimos quarenta anos. Em vez de ser uma ferramenta para cientistas e engenheiros, ela tem sido aprimorada para servir como ferramenta para educação matemática. (Kissane, 2015).

A calculadora no contexto educacional é usada para representação de objetos matemáticos e conceitos, realizar conexão de significados, aumentar o entendimento sobre o significado do conceito numérico e promover o letramento matemático. Por exemplo, para estudantes do ensino fundamental anos finais, a calculadora científica surge como uma importante ferramenta para provocar curiosidade e interesse de usuários, como ilustrado na Figura 1. Reapresentando diferentes representações de frações, decimais e divisão.

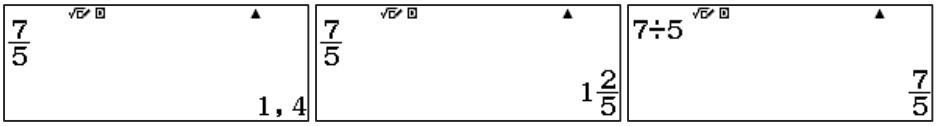


Figura 1. Reapresentando diferentes representações de frações, decimais e divisão.

A calculadora científica demonstra sua função mais promissora para o ganho educacional, quando é utilizada como dispositivo de exploração. Para ilustrar, consideremos estudantes aprendendo potenciação. Uma calculadora científica permite a exploração do significado de potências, especialmente quando os fatores dos números podem ser revelados.

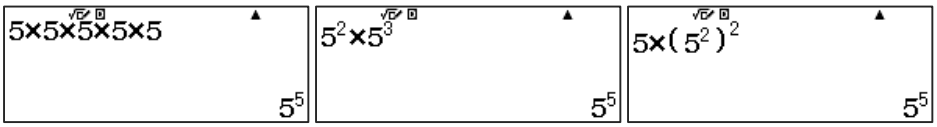


Figura 2. Explorando e entendendo potências.

Esta ferramenta possibilita a interdisciplinaridade preconizada pela nova Base Nacional Comum Curricular e já apontada pelos PCN e que ainda não está assimilada nas salas de aulas, a não ser em programas prontos de computadores. O domínio de linguagem matemática por meio da exploração de propriedades e de comparações de resultados numa calculadora abre as portas para trabalhar problemas de outras áreas de conhecimento que usam a linguagem matemática e notações científicas para seus conteúdos. Por exemplo, em um módulo para aulas de biologia do Ensino Médio, em execução no nosso projeto, a calculadora científica surge como uma valiosa ferramenta para conectar conceitos biológicos e matemáticos, tal qual para investigar o Gasto Energético Basal (GEB) de cada indivíduo para os próximos 20 anos, bem como o GEB quando estiver com 50 anos.

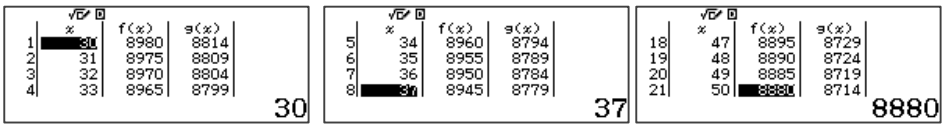


Figura 3. Ilustrações de telas da calculadora presentes no Roteiro de Aula sobre Nutrição: "Quanto necessitamos comer diariamente?".

Ao integrar a calculadora científica no roteiro de aula "Quanto necessitamos comer diariamente?", é necessário entender: as funções da calculadora científica (Conhecimento Tecnológico), entender a maneira pela qual o assunto (conteúdo específico, Nutrição) pode ser mudado pela aplicação da calculadora científica[1] (Conhecimento Tecnológico de Conteúdo) e como a calculadora científica pode ser incorporado dentro da metodologia de resolução de problemas, bem como considerar a problemática do planejamento apropriado de aulas (Conhecimento Pedagógico de Conteúdo). Para elaborar propostas de roteiros de aula integrada nesse sentido, a pesquisa leva em consideração questões que se levantam naturalmente: "Como os professores adquirem uma compreensão das relações complexas entre conteúdo, pedagogia e calculadora científica?" A abordagem padrão sugere que os professores simplesmente precisam ser treinados para manipular a calculadora científica. Partindo da necessidade de criar cursos de aperfeiçoamento especiais para professores na integração da tecnologia na sua prática docente, a pergunta natural surge: "Que metodologia é indicada para mudança de paradigma e integrar a calculadora científica na prática pedagógica do professor?"

A metodologia Lesson Study oferece um caminho para nortear o planejamento e execução das atividades e a reflexão sobre os resultados das mesmas e está presente no nosso projeto.

A Metodologia Lesson Study

No sentido de apontar uma mudança de paradigma para as formas de ensino da Matemática básica, como previstas nos PCN, a Lesson Study vem contribuir para capacitar os professores, de modo a promover melhorias na qualidade de aprendizagem de seus alunos (Baldin & Guimarães, 2012), (Baldin, 2010).

A Lesson Study é uma forma de desenvolvimento profissional realizado por ações colaborativas de professores que aprendem a pesquisar a aula. O Lesson Study é reconhecido internacionalmente como sendo uma forma extremamente eficaz de desenvolvimento profissional na mudança de práticas de sala de aula. (Isoda et al. 2007). Da mesma forma, ensinar através da resolução de problemas estruturados é amplamente reconhecido para desenvolver a capacidade dos alunos de pensar matematicamente e resolver problemas. O foco deste trabalho não é discutir a metodologia como estratégia para melhorar a prática do professor e a aprendizagem do aluno dentro da sala de aula (Baldin, 2009), mas sim fundamentar com esta metodologia a elaboração da proposta dos roteiros de aulas dos módulos do projeto. Para maiores detalhes da adequação necessária para impactar a prática na sala de aula referimo-nos a (Baldin & Felix, 2011).

Na próxima seção apresentamos os princípios básicos da metodologia Lesson Study em que se baseia o nosso projeto.

[1] O modelo usado foi a calculadora científica CASIO ClassWiz fx-991 LAX.

Os Princípios de Lesson Study

A Metodologia de Lesson Study consiste em atividade de pesquisa de uma aula (ou uma sequência de aulas) por professores, sendo uma atividade de grupo formado por pesquisadores, professores, coordenadores pedagógicos e até dirigentes. Em outras palavras, o Lesson Study é uma forma de investigação de uma aula-pesquisa sobre um tópico selecionado dentro do currículo escolar. O grupo pesquisa o planejamento (*conteúdo específico, estratégias de encaminhamento dentro da sala de aula, questionamentos adequados para estimular a aprendizagem participativa dos alunos, e previsão de possíveis soluções dos alunos*), para assim elaborar uma sequência didática a ser executada. Durante a execução do plano por um professor, o grupo observa a eficácia do plano elaborado de acordo com as evidências de aprendizagem dos alunos e analisando as expectativas iniciais. Após a realização da aula, o grupo se reúne para reflexão e avaliação do plano de aula como um todo, reunindo a auto-avaliação do professor com as contribuições críticas do grupo. A aula, assim analisada, pode retomar o ciclo com planejamento aperfeiçoado. (Isoda et al, 2007), (Fernandez & Yoshida, 2004), (Isoda, Arcavi, & Mena-Lorca, 2012).

Dentre todos as etapas do ciclo de uma Lesson Study o planejamento de uma aula com os ingredientes como citados acima constitui a pedra fundamental de todo o processo. Portanto, nos cursos de educação continuada de professores que almejam introduzir a Lesson Study como estratégia para promover mudança de paradigmas nas ações do professor na sala de aula, deve-se focar especialmente na aprendizagem do professor em "planejar uma aula" sob uma perspectiva diferente, mais completa e com dimensões que permitam a avaliação em si da aula durante a observação da mesma durante sua realização, assim como rever os seus olhares sobre a aprendizagem participativa do aluno através da execução do plano. (Baldin, 2010).

Tendo em vista que o nosso projeto está em execução com diversos módulos realizados e outras por realizar, notamos que o processo gradual de aprendizagem dos professores do grupo começa com a participação no plano de aula que é trabalhado inicialmente pelos pesquisadores para ser proposta para que o grupo a vivencie, para assim o grupo consiga acompanhar e compreender os itens do plano de aula, como parte da sua aprendizagem. É uma adaptação do ciclo da LS fundamentada por TPACK, dado que a inclusão da ferramenta tecnológica no plano de uma aula requer uma atenção redobrada na pesquisa.

Portanto, como Baldin (2009) afirma da necessidade de adaptar a metodologia de Lesson Study como Pesquisa de Aula, aos contextos da realidade brasileira nos cursos de educação de professores, o nosso projeto foca com prioridade o roteiro de aulas em que a integração da calculadora científica é realizada como uma aula inédita de resolução de problema-tema enaltecendo o significado do conhecimento de disciplinas específicas pelas facilidades que a calculadora traz para instigar a curiosidade, a exploração pela descoberta, a compreensão das possibilidades de generalizações e também da análise das limitações da calculadora.

Os passos da Lesson Study permitem a observação da eficácia de uma aula por meio de um planejamento cuidadoso, para então poder avaliar os resultados da aprendizagem dos alunos, que é o objetivo principal de uma aula.

Exemplo do projeto em escolas da rede estadual de ensino

A parceria do nosso projeto com a rede estadual de ensino básico, por meio da Diretoria de Ensino Regional de José Bonifácio, no estado de São Paulo, Brasil, está permitindo realizar a

médio e longo prazo as capacitações de professores no uso de calculadora científica, usando a metodologia Lesson Study para efetivamente levar os professores participantes a compreender a importância do planejamento criterioso de uma aula com integração da tecnologia, e trabalhando o conteúdo do currículo oficial em contexto ampliado de conectar os tópicos com dimensões de competências e habilidades preconizados em documentos oficiais, por exemplo, incluindo a educação financeira, educação pela cidadania, interdisciplinaridade com outras áreas como Física, Biologia, estando a Geografia e Química em planos imediatamente futuros. Além disso, o roteiro foi planejado para mudar a dinâmica de participação dos alunos para engaja-los na produção de suas respostas.

Um dos exemplos recentes do nosso projeto foi realizado por meio do roteiro pesquisado, testado por simulações pelos participantes antes de levar a sala de aula dos participantes, e depois analisado através de registros, fotos e questionários de avaliação. O tema foi a probabilidade de acerto no sorteio de loteria, a Mega Sena, que consiste em apostas em 6 escolhas entre os números de dois dígitos, de 01 a 60. Um texto motivador e explicativo foi colocado no início do roteiro com as regras da loteria, e a aula foi planejada com uma proposta de inclusão dos participantes vivenciando inicialmente as possibilidades dentro da sua turma de alguém acertar o prêmio. As primeiras atividades foram para que os professores identificassem o objetivo de trabalhar o pensamento de análise combinatória dentro de uma situação problema do cotidiano, por meio do questionamento "Qual é a melhor proposta?" e vivenciar as reações que ocorreriam dentro da sua sala de aula. O roteiro é cuidadosamente elaborado por meio de atividades, no início lúdicas, mas inquisidoras à medida que se exploram as probabilidades, as técnicas de elaborar a árvore de possibilidades e os cálculos mediados pela calculadora. A calculadora se mostra especialmente útil ao promover o senso numérico ao explorar a ordem de grandeza dos números que surgem nas diversas possibilidades de aposta e dos preços que se pagam pelas mesmas, assim como analisar as limitações próprias da tecnologia e, portanto, descobrir o potencial do conhecimento matemático para solucionar problemas. Enfim, a educação cidadã de promover o gasto responsável e tomada de decisões foram resultados implícitos na atividade.

Cerca de 45 professores da rede trabalharam o roteiro descobrindo novas formas de ensinar conteúdo com significados e com a tecnologia. Até o momento dois professores conseguiram levar a aula-pesquisa para suas salas de aula com registros da realização, e a análise dos relatos pós-aula são promissores em mostrar a superação do temor de deixar a zona de conforto, como também uma apreciação crítica do como os alunos podem aprender com nova ferramenta didática. Os professores do nosso projeto que ainda não testaram a aula-pesquisa são esperados que se sintam motivados a executar o roteiro e participar da análise coletiva a ocorrer.

Conclusões

Diante da resistência compreensível dos professores em enfrentar desafios de mudança no paradigma de ensino com vistas a aprendizagem participativa e significativa dos alunos, acreditamos que o projeto de integração da calculadora científica no contexto escolar, fundamentado pelo quadro teórico TPACK e realizado dentro da metodologia Lesson Study está trazendo respostas promissoras a questões de investigação que motivaram o projeto, na direção de alternativas para os cursos de formação de professores nos tempos atuais.

Bibliografia e referências

Baldin, Y. Y. (2009). O significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil. *XVIII ENCONTRO ANUAL DA SBPN.* São Paulo, 26 a 28 de setembro de 2009.

Baldin, Y. (2010). The Lesson Study as a strategy to change the paradigm of teaching mathematics: a Brazilian case. In *Proceedings of 4th APEC Tsukuba International Conference.* Tokyo: U. Tsukuba. http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2009/doc/pdf_20-21/YurikoYamamotoBaldin-paper.pdf

Baldin, Y. Y., & Felix, T. (2011). A Pesquisa de Aula (Lesson Study) como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula. *XIII CIAEM-IACME*. Recife.

Baldin, Y.Y., & Guimarães, L. (2012). El proceso de introducción de Estudio de Clases en Brasil (versão ampliada em espanhol do original The process of introducing Lesson Study in Brazil). Em *Isoda, Arcavi & Mena Lorca (Eds), El Estudio de Clases Japnés em Matemáticas, Su importância para el mejoramiento de los aprendizajes em el escenario global. Tercera edición. Valparaíso: Ediciones Universitárias de Valparaíso*. Pp 306- 315.

BRASIL. (1997). Brasil. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. 8.

BRASIL. (2017). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular- BNCC*. Brasília.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Isoda, M., Stephens.M., Ohara, Y. & Miyakawa, T. (2007). *Japanese Lesson Study in Mathematics, Its Impact, Diversity and Potential for Educational Improvement*. Singapore: World Scientific.

Isoda, M., Arcavi, A., & Mena-Lorca, A. (2012). *El Estudio de Clases Japnés em Matemáticas, Su importância para el mejoramiento de los aprendizajes em el escenario global. Tercera edición.* Valparaíso: Ediciones Universitárias de Valparaíso.

Kissane, B. (2015). Learning with Calculators: Doing More with Less. In: *25th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers: Mathematics: Learn, Lead, Link, 6 - 8 July 2015,*. Adelaide, Austrália.

Kissane, B. & Kemp, M. (2012). Calculators and the mathematics curriculum. *17th Asian Technology Conference in Mathematics. . Suan Sunandha Rajabhat University, Bangkok.*

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). *Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge.* Teachers College Record, 1017-1054.

Neves, T., & Bittar, M. (2015). Análise da Prática de um Professor no Ensino da Matemática: Possíveis Reflexões em um Processo de Integração de Tecnologia. *EM TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana, 5, número 3.*

Purificação, I., Neves, T., & Brito, G. (2010). Professores de Matemática e as tecnologias: Medo e Sedução. Em *Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores : Algumas reflexões* (pp. 31-57). Campo Mourão: FECILCAM.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 4-14.*

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desarrollo del pensamiento numérico en los primeros años de la educación primaria: la suma y resta de números naturales

Ana Patricia Maroto Vargas
Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
ana.maroto@ucr.ac.cr

Ignacio Arias Gómez
Recinto de Golfito, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
arias.i.30@gmail.com

Resumen

El presente taller pretende ofrecer al público participante diferentes estrategias que el docente de primaria puede utilizar con el estudiantado de los primeros años de la educación primaria para sumar o restar números naturales, sin necesidad de utilizar el método algorítmico tradicional. Las estrategias presentadas ayudan a fortalecer el cálculo mental y mayor conocimiento del sistema de numeración decimal. El material por presentar ha sido utilizado con estudiantes para maestros de primaria de dos recintos de una universidad estatal en Costa Rica con el fin de que comprendan la importancia del desarrollo de diferentes alternativas al método algorítmico para resolver ejercicios y problemas de cálculo mental.

Palabras clave: matemática, suma números naturales, resta números naturales, estrategias para sumar o restar, pensamiento numérico.

Introducción

El presente taller pretende motivar la discusión sobre diferentes estrategias que pueden ser compartidas con docentes de educación primaria para fomentar el uso del pensamiento numérico en sus estudiantes. Las estrategias pretenden fomentar la comprensión profunda del sistema de numeración decimal, de las propiedades y operaciones de números naturales, de manera que el estudiantado pueda resolver ejercicios y problemas de manera eficiente, sin necesidad del uso de algoritmos que promueven el uso de la memoria. Para este trabajo se presentan estrategias para suma y resta con números naturales, tema que es enseñado en los primeros niveles de la educación primaria. Como parte del taller se pretende establecer

conexiones con el significado del sistema decimal, asimismo con conceptos como agrupación y representación de números en la recta numérica.

Marco teórico

Pensamiento numérico

El pensamiento numérico debe ser promovido desde los primeros años de la educación primaria por su importancia para lograr el desarrollo de pensamiento matemático superior (Obando & Vásquez, 2008). El pensamiento numérico puede ser definido como: la comprensión general de números y operaciones, así como la habilidad e inclinación de usar esta comprensión de manera flexible para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles para manipular números y operaciones (McIntosh, Reys, & Reys, 1992, p. 3).

Según esos autores, el pensamiento numérico permite comprender los patrones que se establecen en matemáticas y la importancia de los números para resolver problemas de la vida cotidiana. El desarrollo de este pensamiento no implica la repetición mecánica de procedimientos que no ayudan a comprender profundamente el concepto de sistema de numeración decimal. Para lograr este tipo de comprensión profunda es importante la utilización de diferentes métodos para resolver las operaciones o problemas que son planteados al estudiantado, que le permiten profundizar en conceptos tales como la organización del sistema decimal a partir de potencias de base diez y la composición y descomposición de números, entre otros (Obando & Vásquez, 2008).

Adicionalmente, promover el desarrollo del pensamiento numérico permite al estudiantado comprender diferentes representaciones del mismo concepto y hacer conexiones a diferentes contextos matemáticos y de la vida cotidiana. Este es un proceso gradual, que debe ser promovido incluso antes de iniciarse la educación formal y que debe ser fortalecido en todos los niveles escolares (McIntos et al., 1992).

Almeida, Bruno & Perdomo-Díaz (2016) afirman que el pensamiento numérico tiene diferentes componentes: 1) comprender el significado de los números, 2) reconocer el valor relativo y absoluto de las magnitudes numéricas, 3) usar puntos de referencia al hacer cálculos numéricos, 4) componer y descomponer números, 5) utilizar diferentes representaciones de los números, 6) comprender el efecto relativo de las operaciones y 7) desarrollar estrategias apropiadas para evaluar si una respuesta es razonable (Almeida, Bruno & Perdomo-Díaz, 2016).

En este taller se presentan diferentes estrategias que pueden ser utilizadas por los docentes de enseñanza primaria para desarrollar la comprensión numérica de números naturales en sus estudiantes y fomentar el cálculo mental de manera eficiente.

Propuesta de los programas de estudio del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica

Los programas de estudio oficiales propuesto en el año 2012 por el Ministerio de Educación Pública (MEP) de Costa Rica tiene como enfoque principal del currículo la resolución de problemas. La propuesta plantea la necesidad de aprender matemática de calidad con profundidad, conectando diferentes áreas de la matemática y buscando el desarrollo de cinco procesos matemáticos centrales: razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, comunicar, y representar. El plan de estudios pretende el desarrollo de la competencia

matemática, la cual es definida como "la capacidad de los alumnos para aplicar conocimientos y habilidades, y para analizar, razonar y comunicarse con eficacia cuando plantean, resuelven e interpretan problemas relacionados con distintas situaciones" (MEP, 2012, p. 23). Para lograr esa competencia matemática el plan de estudios determina habilidades específicas que el estudiantado irá logrando como parte de su proceso de aprendizaje.

El MEP (2012) propone como parte de las habilidades por desarrollar en los estudiantes de enseñanza primaria el cálculo mental de resultados de operaciones básicas. Por esta razón nace la inquietud de generar estrategias que permitan en los estudiantes el desarrollo del pensamiento numérico, por medio de actividades que permitan abordar de manera diferente las propiedades de los números reales en operaciones como la suma o la resta, de esta manera al tener diversas estrategias podrán mejorar su cálculo mental.

Método de investigación

El material presentado en este taller ha sido diseñado por dos educadores matemáticos y fue utilizado como parte de un plan piloto con dos grupos de maestros en formación en dos sedes universitarias de la misma universidad en Costa Rica como parte de un curso de la carrera de Bachillerato en la Enseñanza Primaria. En total 47 estudiantes participaron del piloto, 26 en una sede y 21 en la otra. Con esta propuesta se está variando la metodología utilizada tradicionalmente en el curso para optar por un proceso de formación más acorde con la nueva propuesta del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012), con la cual se espera que el docente ofrezca al estudiantado posibilidades para resolver problemas de manera independiente. El cambio en la orientación del curso universitario pretende ofrecer al estudiante para profesor diferentes ideas de cómo puede ser enseñado el pensamiento numérico y al mismo tiempo se espera que la metodología empleada en clase favorezca el manejo profundo de concepciones y las propiedades básicas de los números naturales.

Metodología del taller

El desarrollo del taller se hará en tres partes. Primero, se introducirán algunas de las estrategias que pueden ser fomentadas para el desarrollo del pensamiento numérico, luego se le pedirá a las personas participantes resolver algunos problemas utilizando al menos tres de las estrategias planteadas. Se pedirá a algunas personas participantes comentar sus estrategias de solución y se motivará a las personas participantes a generar nuevas estrategias que consideren pueden implementarse para fortalecer el pensamiento numérico en el estudiantado. Durante todo este proceso se analizará los diferentes componentes propuestos por Almeida, et al. (2016) y mencionados en el marco teórico.

Se espera hacer notar que el uso de diferentes estrategias para resolver problemas con números naturales propicie el desarrollo de los cinco procesos matemáticos propuestos por el MEP. Las estrategias que se estarán abordando en el taller son las que se mostrarán seguidamente. Muchas de las estrategias están basadas en sugerencias dadas por Schifter, Bastable, Russell, Lester, Davenport, Yaffee, & Cohen (2010).

Suma de números naturales

Estrategia 1:
Encuentre el resultado de 48 + 25

Respuesta:

40 + 20 = 60
60 + 8 = 68
68+5 = 73

48 + 25 = 73

Estrategia 2: Encuentre el resultado de 48 + 25

Respuesta:

48 + 20= 68
68 + 2 = 70
70 + 3 = 73

48 + 25 = 73

Estrategia 3: Encuentre el resultado de 48 + 25

Respuesta:

40 + 20= 60
5 + 5 = 10
60 + 10 = 70
70 + 3 = 73

48 + 25 = 73

Estrategia 4: Encuentre el resultado de 48 + 25

Respuesta:

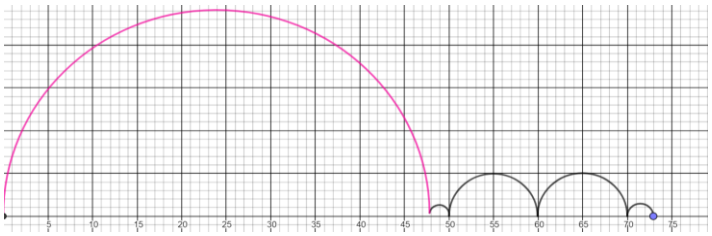


Figura 1. Representación gráfica de la suma 48 + 25.

Estrategia 5: Encuentre el resultado de 48 + 25

Respuesta:

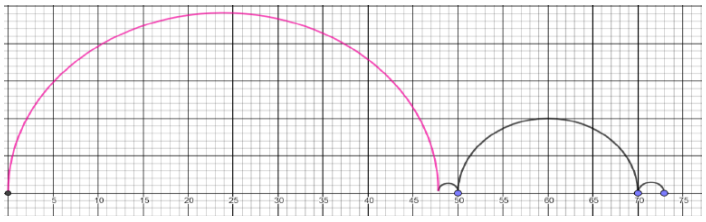


Figura 2. Representación gráfica de la suma 48 + 25.

Estrategia 6: Encuentre el resultado de 48 + 25

¿Cuáles son otras formas de representar esta suma en la recta numérica?

Estrategia 7: Encuentre el resultado de 48 + 25
¿Cuáles son otras formas de representar esta suma utilizando cualquier método numérico, dibujo o cualquier otra representación?

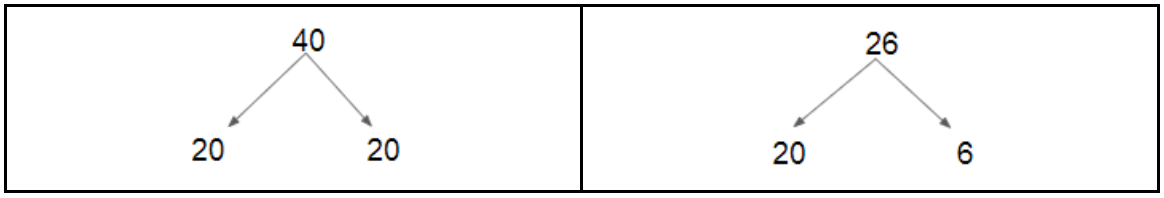
Resta de números naturales

Estrategia 1:
Encuentre el resultado de 40-26
Respuesta:

40 - 6 = 34
34 - 20 = 14

40 - 26 = 14

Estrategia 2:
Encuentre el resultado de 40-26
Respuesta: 40 - 26 = 14 porque



20 - 20 = 0 | 20 - 6 = 14

Estrategia 3:
Encuentre el resultado de 40-26
Respuesta:

26 + 4 = 30
30 + 10 = 40
4 + 10 = 14

40 - 26 = 14

Estrategia 4:
Encuentre el resultado de 40-26
Respuesta:

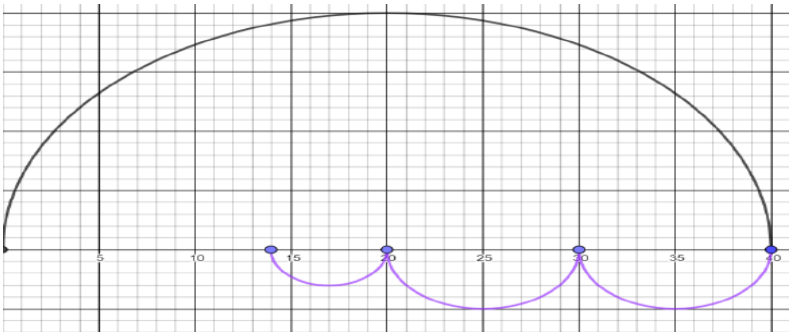


Figura 3. Representación gráfica de la resta 40 - 26.

Estrategia 5: Encuentre el resultado de 40-26
¿Cuáles son otras formas de representar esta suma en la recta numérica?

Estrategia 6: Encuentre el resultado de 40 - 26
¿Cuáles son otras formas de representar esta suma utilizando cualquier método numérico, dibujo o cualquier otra representación?

Estrategia 7:
Encuentre el resultado de 45 - 29
Respuesta:

$$29 = 5 + 4 + 20$$
$$45 - 4 = 40$$
$$40 - 20 = 20$$
$$20 - 4 = 16$$

$$45 - 29 = 16$$

Estrategia 8:
Encuentre el resultado de 35 - 16
Respuesta:

$$10 + 10 + 10 = 30$$
$$10 + 10 + 10 + 5 = 35$$
$$10 - 6 = 4$$
$$10 - 10 = 0$$

$$35 - 16 = 10 + 5 + 4 = 19$$

Estrategia 9:
Encuentre el resultado de 72 - 47
Respuesta:

$$72 - 40 = 32$$
$$32 - 2 = 30$$
$$30 - 5 = 25$$

$$72 - 47 = 25$$

Estrategia 10:
Encuentre el resultado de 72 - 47
Respuesta:

$$72 - 10 = 62$$
$$62 - 10 = 52$$
$$52 - 10 = 42$$
$$42 - 10 = 32$$
$$32 - 7 = 25$$

72 - 47 = 25

Entre la estrategia 9 y 10, ¿cuál considera como la estrategia más eficiente?, ¿por qué?

Estrategia 11:
Encuentre el resultado de 2000 - 547
Respuesta:

2000 - 500 = 1500
1500 - 40 =1460
1460 - 7 = 1453

2000 - 547 = 1453

Estrategia 12:
Encuentre el resultado de 2000 - 547
Respuesta:

1997 - 547 = 1450
1450 + 3 = 1453

2000 - 547 = 1453

Con este taller se espera generar reflexión sobre diferentes estrategias que se pueden implementar en el aula de matemática, para que el estudiantado logre una comprensión profunda del sistema de numeración decimal. Se pretende además que las personas participantes reflexionen sobre la necesidad de utilizar diferentes estrategias para resolver el mismo problema, de manera que cada estudiante puede aproximarse a la solución según sus conocimientos y destrezas. Se espera que las personas participantes generen nuevas estrategias que sean compartidas durante la discusión con el fin de enriquecer el conocimiento de todas las personas.

Referencias y bibliografía

Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo-Díaz, J. (2016). Strategies of number sense in pre-service secondary mathematics teachers. International Journal of Science and Mathematics Education, 14(5), 959-978.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de estudio en Matemática*. San José, Costa Rica: Autor.

Obando, G. y Vásquez, N. (2008). *Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica*. Documento presentado en el Encuentro colombiano de matemática educativa.

Schifter, D., Bastable, V., Russell, S. J., Lester, J. B., Davenport, L. R., Yaffee, L., & Cohen, S. (2010). *Building a system of tens. Facilitator´s guide*. New Jersey: Pearson.



Oportunidades de aprendizaje en la formación inicial de los licenciados en matemáticas de la costa Caribe de Colombia visto desde la aplicación del TEDS-M

Evelyn **Ariza** Muñoz
Universidad Castilla La Mancha
España
evelyncarmen.ariza@alu.uclm.es
José Antonio **González-Calero** Somoza
Universidad Castilla-La Mancha
España
jose.gonzalezcalero@uclm.es
Ramon **Cózar** Gutiérrez
Universidad Castilla-La Mancha
España
ramon.cozar@uclm.es
Mónica **Borjas**
Universidad del Norte
Colombia
m.borjas@uninorte.edu.co

Resumen

Las oportunidades para aprender (OTL) reflejan visiones particulares de lo que se espera que los futuros maestros sepan y puedan hacer en un aula (Stark y Lattuca, 1997; Schmidt et al. 2008). En esta comunicación se presentan cuáles son esos OTL para matemáticas terciarias en 214 futuros licenciados de matemáticas de la costa Caribe mediante la aplicación de un instrumento usado en un estudio internacional llamado TEDS_M. En concreto, se utilizó la medida de escala de Rash, donde 10 es neutral y una puntuación superior a 10 indica que los estudiantes tuvieron una oportunidad superior a la media de aprender los temas incluidos en una escala determinada, mientras que un promedio inferior a 10 significa que los estudiantes tuvieron menos oportunidad promedio de hacerlo. Los resultados indican que, en líneas generales, los futuros licenciados tienen menos oportunidades de aprender las matemáticas que necesitarán pare ejercer efectivamente como maestros de matemáticas.

Palabras claves: formación inicial, oportunidades para aprender, licenciados en matemáticas, costa Caribe, TEDS_M.

Contexto y Marco teórico

La formación inicial docente en la materia de Matemáticas es una problemática vigente a la que varios autores están prestando especial atención, debido a que la vinculan con diversos indicadores de rendimiento académico. Una muestra sería los bajos resultados que obtienen los estudiantes de primaria y secundaria en las pruebas internas y externas en especial la de los países en desarrollo (Darling-Hammond, 2000; Takayma, 2012; Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico, 2005).Nuestra pregunta de investigación se encuentra precisamente anclada en este contexto, e indaga cuáles son las oportunidades de aprendizaje que tienen en su formación inicial los licenciados en Matemáticas de la costa Caribe de Colombia visto desde la aplicación del TEDS-M. El TESD-M es un estudio Internacional sobre la Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas, centrado en analizar en qué medida los maestros están preparados para enseñar matemáticas en educación primaria y secundaria obligatoria. Con este fin, se estudió la variación en la naturaleza y el impacto de los programas de formación docente dentro y entre los siguientes países participantes: Asia oriental (Taiwán y Singapur) sudeste asiático (Malasia, Filipinas y Tailandia). De la antigua Europa del Este, bloque liderado por la Unión Soviética, (Rusia, Georgia y Polonia) Los países occidentales (Alemania, Noruega, España y Suiza) países americanos (Chile y EE. UU) de África (Botswana). (Tatto et al, 2008). El instrumento TEDS-M consta de 4 partes: parte A (datos sociodemográficos); parte B (oportunidades para aprender); parte C (conocimiento matemático); y, parte D (creencias).

Esta comunicación hace referencia a la parte B oportunidades de aprendizaje (OTL, por su sigla en inglés) y de ellas se menciona que pueden considerarse desarrolladas intencionalmente por los responsables de la política educativa y las instituciones de formación docente (Stark y Lattuca 1997). Las especificaciones nacionales y del programa de OTL reflejan visiones particulares de lo que se supone que los maestros de primaria y secundaria deben saber antes de ingresar al aula. En todos los países de TEDS-M, con excepción de Tailandia y Malasia, la enseñanza de las matemáticas representa una parte importante de las responsabilidades de los maestros de primaria porque trabajan como profesores de clase y enseñan la mayoría de las materias, incluidas las matemáticas. En Tailandia y Malasia, los maestros de primaria de matemáticas están incluso capacitados como especialistas en asignaturas y Enseñar principalmente matemáticas (Blömeke y Kaiser 2014).

El estado actual de la investigación sobre OTL en la formación del profesorado debe considerarse poca, ya que solo existen datos crudos sobre los componentes de la formación docente, en muchos estudios, solo el tipo de titulo o el número de cursos tomados se utilizó para definir OTL (Cochran-Smith y Zeichner 2005). En los países TEDS-M las OTL revelan diferencias cuantitativas (por ejemplo, cobertura alta, media y baja de las matemáticas, temas de pedagogía) así como las diferencias cualitativas (por ejemplo, cobertura de matemáticas específicas, temas de pedagogía) con los contextos culturales, su filosofía educativa es una característica importante que da forma a OTL y, por lo tanto, indica entre países heterogeneidad, derivada de visiones nacionales compartidas sobre la enseñanza que difieren entre países. (Blömeke y Kaiser 2014).

TEDS-M descubrió que OTL para las matemáticas, la pedagogía de las matemáticas y la pedagogía general dependía del nivel de grado y del plan de estudios que se esperaba que los futuros maestros enseñaran. Por ejemplo, programas para futuros docentes de primaria dieron más cobertura que los programas para docentes de secundaria básica a los conceptos básicos de

números, medición y geometría y menor cobertura de funciones, probabilidad y estadística, cálculo y estructura. Los programas diseñados para preparar a los maestros para que enseñen los grados más altos tendieron a proporcionar, en promedio, más oportunidades para aprender matemáticas que aquellos programas que prepararon a los maestros para los grados más bajos. (Tatto et al, 2008).

Los hallazgos de este estudio reflejaron así lo que parece ser una norma cultural en los países participantes, que los profesores que se espera que enseñen en primaria y especialmente en los grados inferiores necesitan poco contenido matemático más allá de lo incluido en el plan de estudios de la escuela. El patrón entre los futuros docentes secundarios generalmente se caracteriza por una mayor y más profunda cobertura del contenido de las matemáticas; sin embargo, hubo una mayor variabilidad en OTL entre los futuros profesores que se prepararon para la escuela básica secundaria que entre aquellos que estaban preparados para enseñar 11° y superiores (Tatto et al, 2008). Los países con programas que ofrecen las oportunidades más completas para aprender matemáticas tuvieron puntajes más altos en las pruebas de conocimiento TEDS-M por ejemplo: Los docentes de nivel primario y secundario en países de alto rendimiento como China Taipei, Singapur y la Federación Rusa tuvieron significativamente más oportunidades que sus contrapartes primarias y secundarias en los otros países participantes para aprender matemáticas a nivel universitario y escolar (Tatto et al, 2008).

Los hallazgos de TEDS-M dieron una oportunidad para examinar cómo distintos enfoques se desarrollan en la práctica. Si se necesita relativamente poco conocimiento del contenido para los grados inferiores, entonces se puede justificar un menor énfasis en la preparación de las matemáticas y la no especialización. La pregunta clave es si los docentes preparados de esta manera pueden enseñar matemáticas con la misma eficacia que los docentes con un conocimiento más extenso y profundo, como el demostrado por los docentes especializados (Tatto et al, 2008).

Al tener en cuenta lo anterior, es necesario estudios como el nuestro que se interesen por conocer las oportunidades de aprendizaje que tienen los futuros profesores de la costa Caribe de Colombia en el área de matemática ya que varios investigaciones indican que el contenido de las matemáticas y el conocimiento de la pedagogía que los maestros aprenden frecuentemente no es el conocimiento más útil para enseñar matemáticas (Ball & Bass, 2000; Graham, Portnoy y Grundmeier, 2002; Hill, Sleep, Lewis, & Ball, 2007) otros estudios (Even & Ball, 2009; Mullis et al., 2008) muestran que el conocimiento matemático de los estudiantes de primaria y secundaria es débil en muchos países, un resultado que puede ser, en parte, producto de la formación que reciben de sus profesores . También es relevante la afirmación de que las reformas educativas que afectan directamente a la preparación matemática de los docentes y el plan de estudios que se espera que impartan suelen estar motivadas por mandatos implementados con poca o ninguna base empírica que respalde su eficacia (Tatto, 2007). Estos cambios han llevado, en algunos casos, a sistemas incoherentes de formación del profesorado y a una creciente incertidumbre sobre lo que los profesores de matemáticas deben saber y sobre cómo la formación docente puede ayudarlos a adquirir dicho conocimiento (Tatto, Lerner y Novotná, 2009).

Metodologia

Atendiendo a las características de nuestra investigación, la muestra se constituye de 214 sujetos, 100 hombres y 114 mujeres, que se encontraban cursando el último año de sus estudios en programas de licenciatura (pregrado universitario) en matemáticas o en educación con énfasis en matemáticas, en las cuatro instituciones de Educación Superior, ubicadas en la costa Caribe en los departamentos de Barranquilla, Sincelejo, Magdalena y César donde se impartían los programas mencionados. El instrumento usado, como ya se ha descrito anteriormente, es el TEDS-M, que consta de 4 partes: parte A (datos sociodemográficos); parte B (oportunidades para aprender); parte C (conocimiento matemático); y, parte D (creencias).

El TEDS-M se usó desde la óptica de OTL para explorar qué matemáticas, pedagogía matemática, pedagogía general y áreas relacionadas habían estudiado los futuros docentes. Así, las respuestas a los ítems en cada una de estas áreas se combinaron para formar siete índices (OTL) que se enuncian a continuación:

1. Matemáticas de nivel terciario;
2. Matemáticas a nivel escolar;
3. Pedagogía de la educación matemática;
4. Pedagogía general;
5. Enseñar a estudiantes diversos;
6. Aprendizaje a través de experiencias escolares; y
7. Coherencia de su programa de formación docente.

De los siete índices, los cuatro primeros se relacionan con el contenido académico de los programas de formación docente en matemáticas. En cada ítem, se les pedía a los estudiantes que indicaran si alguna vez habían estudiado temas concretos, ya sea en su programa actual o anterior. Los otros tres índices se relacionaban con áreas que no son directamente contenido académico; por ejemplo, preguntaban la frecuencia con la que algunos estudiantes experimentaron actividades en sus respectivos programas, a aprender a enseñar a diversos estudiantes y aprender a través de experiencias basadas en la escuela.

El modelo de medición utilizado para estas escalas fue el modelo de Rasch estándar (1980), que permitió crear una medida que reflejaba oportunidades de aprender en una escala de intervalos. La media de cada una de estas escalas se estableció en 10. Un promedio superior a 10 indica que los estudiantes tuvieron una oportunidad superior a la media de aprender los temas incluidos en una escala determinada, mientras que un promedio inferior a 10 significa que los estudiantes tenían menos oportunidad promedio de hacerlo.

Resultados oportunidad para aprender matemáticas de nivel terciario

Los elementos de matemáticas de nivel terciario o de Educación superior OTL exploraron si los futuros docentes habían estudiado temas de cuatro áreas de matemáticas de nivel terciario:

1. Geometría; 1. Geometría, que incluye ítems sobre los fundamentos de la geometría axiomática, analítica y de coordenadas, geometría no euclidiana y la geometría diferencial;

2. Estructuras discretas y lógica; con ítems sobre álgebra lineal y abstracta, teoría de conjuntos, teoría de números, matemáticas discretas y lógica matemática.
3. Continuidad y funciones; y con ítems sobre cálculo inicial, multivariante, avanzado y ecuaciones diferenciales; y,
4. Probabilidad y estadística.

En las tablas se puede observar que la primera columna hace referencia al puntaje obtenido en una escala de 1 al 10. donde la media de cada una de estas escalas se estableció en 10. Un promedio superior a 10 indica que los estudiantes tuvieron una oportunidad superior a la media de aprender los temas incluidos en una escala determinada, mientras que un promedio inferior a 10 significa que los estudiantes tenían menos oportunidad promedio de hacerlo. La frecuencia es el número de estudiantes que se ubicó en esa escala. Por ejemplo, para el caso de los temas de geometría los datos válidos son 209 y de ellos 73 estudiantes se ubican 8,93, otros 73 estudiantes en 9,95 en la escala mencionada. Al ver el puntaje menor a 10 que es la media, se observa que el 73 + 73 conforman el 69.9% de los estudiantes que tuvieron menos oportunidad de aprender los temas de Geometría.

Tabla 1

Futuros docentes que estudiaron temas de Geometría

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	8,93	73	34,0	34,9	34,9
	9,95	73	34,0	34,9	69,9
	10,97	43	20,0	20,6	90,4
	11,98	19	8,8	9,1	99,5
	13,00	1	0,5	0,5	100,0
	Total	209	97,2	100,0	
Perdidos	Sistema	6	2,8		
Total		215	100,0		

Fuente: Teds_M aplicada en costa Caribe de Colombia 2018

Tabla 2

Futuros docentes que estudiaron temas de Estructuras Discretas y Lógica

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	8,36	26	12,1	12,3	12,3
	9,69	124	57,7	58,5	70,8
	11,01	49	22,8	23,1	93,9
	12,34	12	5,6	5,7	99,5

	13,66	1	0,5	0,5	100,0
	Total	212	98,6	100,0	
Perdidos	Sistema	3	1,4		
Total		215	100,0		

Fuente: Teds_M aplicada en costa Caribe de Colombia 2018

Tabla 3

Futuros docentes que estudiaron temas de Continuidad y Funciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	8,74	59	27,4	28,2	28,2
	10,15	119	55,3	56,9	85,2
	11,55	25	11,6	12,0	97,1
	12,95	6	2,8	2,9	100,0
	Total	209	97,2	100,0	
Perdidos	Sistema	6	2,8		
Total		215	100,0		

Fuente: Teds_M aplicada en costa Caribe de Colombia 2018

Tabla 4

Futuros docentes que estudiaron temas de Probabilidad y Estadística

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	9,46	157	73,0	74,4	74,4
	11,12	39	18,1	18,5	92,9
	12,77	15	7,0	7,1	100,0
	Total	211	98,1	100,0	
Perdidos	Sistema	4	1,9		
Total		215	100,0		

Fuente: Teds_M aplicada en costa Caribe de Colombia 2018

Conclusiones

Las oportunidades para aprender se muestran como una razón para que los programas de

licenciaturas en matemáticas de las universidades que participaron en la investigación reflexionen a nivel curricular que están enseñando y acerca de la percepción de sus estudiantes sobre su utilidad. De los futuros licenciados que se le aplicó el TEDS_M sólo 30% en el caso de Geometría y 27 % en el caso de estadística dice haberlo estudiado. Estos contenidos están relacionados con la enseñanza en la escuela, como señalan, por ejemplo, por organizaciones profesionales como el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 2000), por educadores de matemáticas como Niss (1999) o por legisladores como The Standing Conference of the Ministers of Educación y Asuntos Culturales de los Länder en la República Federal de Alemania (KMK 2005). Lo anterior se supone un tema importante ya que la mayoría de los egresados ejercen su profesión los primeros años en las escuelas.

En el caso de estructura discreta y lógica sólo un 29% de los estudiantes contestó si haberlo estudiado durante su programa de formación donde se incluyen los ítems de aprender álgebra lineal, cálculo inicial, los fundamentos de la geometría y estadísticas, temas muy típicos de la primera secuencia introductoria de la universidad Matemáticas en cada área pero aún relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en primaria escuelas y, por lo tanto, a menudo considerado como importante conocimiento de fondo.

Como es evidente a partir de los datos de TEDS-M, países como China Taipei y Singapur que obtienen buenos resultados en las pruebas internacionales de rendimiento estudiantil, como TIMSS, no solo aseguran la calidad de los participantes en la formación docente, sino que también cuentan con sistemas sólidos para revisar, evaluar, y acreditación de proveedores de educación docente. También cuentan con mecanismos sólidos para garantizar que los graduados cumplan con altos estándares de desempeño antes de obtener la certificación y el ingreso completo a la profesión (Tatto et al, 2008).

Bibliografía y referencias

Blömeke, S., Suhl, U., & Kaiser, G. (2011). Teacher education effectiveness: Quality and equity of future primary teachers' mathematics and mathematics pedagogical content knowledge. *Journal of Teacher Education*, 62(2), 154–171. doi: 10.1177/0022487110386798

Blömeke, S., Suhl, U., Kaiser, G., & Döhrmann, M. (2012). Family background, entry selectivity and opportunities to learn: What matters in primary teacher education? An international comparison of fifteen countries. *Teaching and Teacher Education*, 28, 44–55. doi: 10.1016/j.tate.2011.08.006

Cochran-Smith, M. & Zeichner, K. M. (Eds.) (2005). *Studying teacher education. The report of the AERA Panel on research and teacher education*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioural sciences*. (2nd ed.). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Cronbach, L. J. (1976). *Research on classrooms and schools: Formulation of questions, design, and analysis*. Stanford: Stanford University.

König, J., Blömeke, S., Paine, L., Schmidt, W. H., & Hsieh, F.-J. (2011). General pedagogical knowledge of future middle school teachers: On the complex ecology of teacher education in the United States, Germany, and Taiwan. *Journal of Teacher Education*, 62(2), 188-201. doi: 10.1177/0022487110388664

McDonnell, L. M. (1995). Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 17(3), 305–322. doi: 10.3102/01623737017003305

NCATE (2001). *NCATE's ten-year progress report—Accrediting body changing the status quo in teacher preparation: Many states adopt profession's standards*. Washington: NCATE.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 1-24. doi: 10.1023/A:1003715913784

Schmidt, W. H., Houang, R. T., Cogan, L., Blömeke, S., Tatto, M. T., Hsieh, F. J., & Paine, L. (2008). Opportunity to learn in the preparation of mathematics teachers: its structure and how it varies across six countries. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 40(5), 735–747. doi: 10.1007/s11858-008-0115-y

Schmidt, W. H., Blömeke, S., & Tatto, M. T. (2011). *Teacher education matters. A study of the mathematics teacher preparation from six countries*. New York: Teacher College Press.

Stark, J., & Lattuca, L. R. (1997). *Shaping the college curriculum: academic plans in action.* Boston: Allyn & Bacon.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework.* East Lansing: Michigan State University.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Rodriguez, M., Bankov, K., Reckase, M., et al. (2012). The Mathematics Teacher Education and Development Study (TEDS-M). Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics: First findings. Amsterdam: IEA.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Formación en el Pensamiento Computacional a través de juegos de mesa

Jaime Andrés **Carmona-Mesa**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
jandres.carmona@udea.edu.co
Mónica Eliana **Cardona** Zapata
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
meliana.cardona@udea.edu.co

Resumen

La literatura reporta la necesidad de formar profesores de las diferentes áreas en el Pensamiento Computacional a través de actividades sin ordenador, con el propósito de lograr conexiones profundas entre la naturaleza de este y la enseñanza en el área. Por lo tanto, en el presente estudio analiza las comprensiones de futuros profesores de matemáticas sobre las principales características del pensamiento computacional (descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción, generalización de patrones y diseño de algoritmos), por medio de una experiencia con el juego CLUE. En este estudio se utilizó el análisis de contenido para estudiar las comprensiones e interpretaciones de 11 futuros profesores de matemáticas que participaron en un grupo de discusión. Se concluye que, si bien los futuros profesores de matemáticas logran comprender los procesos de descomposición, reconocimiento y generalización de patrones, es necesario ampliar en experiencias que les permita alcanzar los procesos de abstracción y diseño de algoritmos.

Palabras clave: formación de profesores, Educación Matemática, actividades sin ordenador, CLUE.

Introducción

El término Pensamiento Computacional (en adelante PC) tuvo un amplio uso durante la década de 1980 y refería a las habilidades que las personas en áreas de informáticas adquieren a través de su trabajo en el diseño de programas y *software* (Khine, 2018). Actualmente, el término del PC es ampliado a la formulación de problemas cuya solución involucra descomposición, reconocimiento de patrones, representación, planificación y monitoreo, abstracción, automatización, algoritmos y análisis (Wing, 2006; 2008). En este sentido, el PC supone un conjunto de habilidades esenciales para la vida y una forma particular para afrontar problemas científicos y tecnológicos (Zapata-Ros, 2015).

En el marco de la Educación Matemática, el PC evidencia valiosos aportes en los procesos

de aprendizaje. Al respecto, Weintrop *et al.* (2016) abogan por incorporar el PC en las clases de matemáticas pues existe una relación recíproca: se usa el cálculo para enriquecer el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, y se aplican contextos matemáticos y científicos para enriquecer el aprendizaje computacional. En esta misma línea, diSessa (2018), English (2018), Gadanidis, Clements y Yiu (2018) y Pei, Weintrop y Wilensky (2018) exponen evidencia que les permite argumentar los cambios fundamentales del aprendizaje de las matemáticas al incluir el PC en el proceso educativo.

En consecuencia, la formación de profesores para la integración del PC en sus clases se constituye actualmente como un objeto de estudio que registra escasas investigaciones (Angeli y Jaipal-Jamani, 2018). Al respecto, Carmona-Mesa, Morales y Villa-Ochoa (2017) realizaron un estudio en la formación inicial de profesores de matemáticas para la integración del PC en sus clases; estos autores informan que el PC favoreció el diseño curricular de ambientes que integran tecnologías de manera eficiente, consiente e interdisciplinar para resolver problemas del contexto.

Para el caso de Medellín-Colombia, donde se desarrolló esta investigación, se registran políticas regionales que tienen como objetivo transformar las prácticas educativas al incluir profesores y estudiantes en proyectos que integran el PC a partir de la programación y robótica (Ruta N, 2015). Sin embargo, a nivel nacional no se han desarrollado investigaciones que brinden evidencia empírica para orientar dichos proyectos. Incluso, en las nuevas trasformaciones curriculares de los programas para formar profesores, no son claras las estrategias para lograr una formación en la integración de tecnología en los procesos educativos.

Esta situación se corresponde con lo planteado por Sands, Yadav y Good (2018) y Angeli y Jaipal-Jamani (2018), quienes sostienen que a pesar de la necesidad de formar frutos profesores para la integración del PC en sus clases, las Facultades de Educación carecen del conocimiento y de estrategias para hacerlo. Por lo tanto, es necesario desarrollar estudios que brinden evidencia empírica de estrategias que permitan formar futuros profesores en la integración del PC en sus clases. En particular, el presente estudio se propone atender esta problemática centrando el análisis en la formación inicial de profesores de matemáticas en una Universidad de la ciudad de Medellín.

Aspectos teóricos

La formación inicial de profesores para la integración del PC en sus clases, a pesar de su escasa investigación (Angeli y Jaipal-Jamani, 2018), se registra en la literatura que generalmente los futuros profesores no están familiarizados con la PC y tienen dificultades para encontrar conexiones entre este y el área que enseñan (Shute, Sun, y Asbell-Clarke, 2017). Hsu, Chang y Hung (2018) realizaron un meta-análisis de las investigaciones publicadas en revistas académicas entre el 2006 y 2017, este estudio les permitió concluir que los futuros profesores no han identificado claramente cómo enseñar el PC y que la mayoría lo hace a través de lenguajes de programación.

Esta evidencia es corroborada por la investigación de Sands *et al.* (2018), quienes concluyen que muchos profesores tienen muy poco conocimiento acerca de cuáles son las habilidades a desarrollar en el PC y desconocen cómo estas habilidades pueden implementarse en sus clases. Estos mismos autores indican que para lograr una formación exitosa de profesores en la integración del PC, es necesario implementar programas que ayuden desarrollar una comprensión profunda de lo que significa pensar computacionalmente. Al respecto, Kim y Kim

(2018) y Yadav *et al.*, (2016) sostienen que para lograr este objetivo es necesario incluir en la formación inicial de profesores cursos específicos en el PC. Además, la literatura reporta como principales enfoques utilizados en la formación inicial de profesores orientada en: actividades sin ordenador, programación a través de bloques, programación tangible, creación juegos digitales a través de programación, y robótica educativa (Angeli y Jaipal-Jamani, 2018).

De acuerdo a lo anterior, Kale *et al*. (2018), Sands *et al.* (2018) y Shute, Sun y Asbell-Clarke (2017) consideran como componente clave para ayudar a los profesores a conectar el PC con sus prácticas de enseñanza, ayudarlos a reconocer la naturaleza de este, la resolución de problemas de forma lógica (actividades sin ordenador), no simplemente a través de un lenguaje de programación. En ese sentido, Angeli *et al.* (2016) desarrollaron un curso destinado a formar futuros profesores en la integración del PC, con un enfoque en la solución de problemas del mundo real de forma lógica; estos autores informan que el tránsito de esta estrategia a la formulación de algoritmos en forma narrativa es una habilidad difícil de desarrollar para los profesores en formación inicial.

Lo presentado previamente, pone en evidencia la necesidad de ampliar en estrategias para la formación inicial de profesores en el PC, a través de la resolución de problemas de forma lógica (actividades sin ordenador). Por lo tanto, el presente estudio tuvo como finalidad contribuir en la formación inicial de profesores de matemáticas para la integración del PC por medio de juegos de mesa. Los juegos de mesa posibilitan la curiosidad, la experimentación y la investigación que llevan al aprendizaje, ayuda al desarrollo del pensamiento abstracto y el desarrollo de trabajo en equipo (Aristizábal, Colorado y Gutiérrez, 2016).

Autores como Barros, Rodríguez y Barros (2015) plantean que en los juegos se interiorizan y transfieren los conocimientos para volverlos significativos, porque permite experimentar, probar, investigar, ser protagonista, crear y recrear. En el mercado existen diferentes juegos de mesa para trabajar el PC (p. ej. C-jump y Robot Turtles) y se han desarrollado estudios que demuestran el potencial de estos en el desarrollo del pensamiento computacional (Riveros y Salguero, 2018). Sin embargo, los juegos de mesa existentes reflejan más un enfoque en programación tangible que propiamente actividades desconectas, que es el objetivo en esta investigación.

Aspectos metodológicos

En este apartado metodológico se describe el diseño de la intervención realizada al inicio del segundo semestre del 2018 y se presentan las decisiones para el registro de la información y posterior análisis. La intervención se desarrolló en un curso específico obligatorio y denominado Tecnologías en Educación Matemática, este buscó fortalecer la formación inicial de profesores en matemáticas a través de una adaptación temática y metodológica al PC. Esta adaptación temática al PC propone nuevas formas de abordar los problemas con la ayuda de los ordenadores o sin ella (Wing, 2006; 2011).

En particular, el primer eje temático, refiere a una introducción al PC y es donde realizó el presente estudio. A 11 futuros profesores (se usarán seudónimos) se les solicitó con ocho días de anticipación leer el documento “El pensamiento computacional y las nuevas ecologías del aprendizaje Computacional” (Valverde, Fernández y Garrido, 2015) para ser discutido en la siguiente sesión de clase de 3 horas. Esta sesión se dividió en dos momentos, se inició con el juego de mesa CLUE (Figura 1) y luego una discusión grupal de lo planteado en el documento a través de la experiencia desarrollada con el juego.

CLUE es un juego de mesa, sobre de detectives y misterio. El juego tiene tres tipos de cartas diferentes (sospechoso, habitación y arma); al iniciar se elige una de cada tipo y las tres detallan un asesinato; las demás cartas son repartidas entre los jugadores. El objetivo del juego es deducir dichos detalles por medio de pistas que se develan a medida que se avanza en este. En esencia, el participante que desarrolle su juego de la manera más sistemática y lógica es quien logra identificar rápidamente los detalles del asesinato. Por lo tanto, el propósito de esta intervención es generar un contexto rico para la resolución de problemas de forma lógica (Curzon y McOwan, 2018), que permita a los futuros profesores la creación de sentidos y significados del PC.

De acuerdo con lo anterior, el registro de los datos debía hacerse a través de las interacciones de los futuros profesores, en donde se logará describir y comprender las interpretaciones personales y colectivas. Arboleda (2008) y López (2010) reconocen el *grupo de discusión* como un método de investigación dialógico, basado en la producción de discursos, que consiste en reunir un grupo personas y suscitar entre ellas una discusión sobre un tema de interés y dirigida por un Moderador.



Figura 1: Juego CLUE, tomada de https://goo.gl/ky4BQg

En consecuencia, este estudio se desarrolló a partir de un grupo de discusión. El *grupo de discusión* fue moderado por el investigador principal de este estudio, quien orientó como un proceso de interacción que buscaba poner en juego las "representaciones, opiniones, actitudes, comportamientos, sistemas simbólicos, relaciones de poder y negociaciones mediante las cuales se llega a cierto consenso o a polarización en las posturas y concepciones de los participantes" (Cervantes, 2002, p. 77). Las interacciones entre los participantes fueron grabadas en video y luego trascritas, se desarrolló un análisis de contenido (Noguero, 2002) en los datos registrados a partir de los procesos que implica el PC: **descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción, generalización de patrones** y **diseño de algoritmos** (Kemp, 2014).

Resultados y discusión

Luego de terminar el primer momento del encuentro (actividad con CLUE), se pasa a desarrollar la discusión grupal del documento y contextualizando en la experiencia del CLUE. Por lo tanto, el Moderador inicia preguntando ¿cómo se entiende el pensamiento computacional y cómo se entiende a partir del ejercicio que realizado previamente? Al respecto, Camila menciona que:

> *"(…) con el juego [CLUE] se veía un pensamiento computacional cuando uno empieza a identificar la dinámica del juego, entonces qué tiene que hacer para ganar (…); los mismos compañeros cuando están jugando están dando pistas sobre lo que está pasando entonces una con el cuadrito [Figura 2] que tiene empieza a descartar, va elaborando una estrategia para resolver*

> *el problema que en ese momento del juego es ganar. Yo creo que ahí se vería el pensamiento computacional".*

La intervención de Camila pone en evidencia la **descomposición** del problema (necesidad de ganar el juego), a través de varios componentes que se pueden abordar de forma individual (Kemp, 2014). El primero son las pistas que dan los demás participantes, la dinámica del juego implica que al llegar con la ficha a un lugar se debe lanzar una hipótesis de quién es el sospechoso de ser el asesino y el arma utilizada, en caso de que alguno de los demás participantes tenga algunas de las tres cartas (se incluye él), debe mostrarla únicamente al jugador que lanzo la hipótesis. Por lo tanto, este es uno de los componentes claves de juego para poder ganar y Camila lo resaltó en su intervención. Otro aspecto destacado por Camila es "el cuadrito", el juego tiene como material complementario para cada participante un cuadro que incluye todos los tipos de cartas (sospechoso, habitación y arma) y se incluye con el objetivo de ayudar en registro de las cartas conocidas (pistas).

Posterior a la intervención de Camila se queda el grupo en silencio, a lo que el Moderador pregunta ¿alguien desea complementar la respuesta? y Tatiana menciona:

> *"el pensamiento computacional implica la descomposición, el reconocimiento de patrones, la abstracción, la generalización de patrones y el diseño de algoritmo. La descomposición yo creo que se ve más cuando generamos una hipótesis, entonces nosotros creíamos que era tal persona entonces preguntábamos por ella, entonces ya como que descartábamos ese culpable; cuando estaba en reconocimiento de patrones por ejemplo que mi compañera dijo tres [cartas] y a la otra [compañera], el que seguía volvió y dijo otros tres[cartas], entonces yo creo que no, este y este lo repitieron lo mostraron nuevamente dos veces entonces ya puedo ir descartando ese [trio de cartas], tampoco este, este si es".*

Tatiana reafirma la intervención de Camila en relación con la **descomposición** y amplía un aspecto clave del PC, **reconocimiento de patrones** (Kemp, 2014). Ella lo asocia con el ejercicio de juego de estar lanzando hipótesis en relación con el lugar, el sospechoso y el arma utilizada en el asesinato; en la medida que se van identificando varias pistas, Tatiana cruza estas fuentes de información y descarta las que coinciden. Es decir, si un participante *x* lanza la hipótesis que el arma utilizada fue la daga y en el baño y un participante *z* muestra una, luego, un participante *w* indica que el arma utilizada fue la daga y en la cocina, y el mismo participante *z* muestra otra carta, se asume que el participante *z* tiene la carta daga.

Al finalizar la intervención, Tatiana afirma "*la abstracción no, no logre verla así como tal en el juego pero la generalización sí, después de que uno tiene pistas ya uno puede llegar a decir quién fue".* Al respecto, Kemp (2014) reconoce que la **abstracción** ayuda a usar el detalle absolutamente necesario para el funcionamiento del sistema. Posterior a la intervención de Tatiana los futuros profesores quedan en silencio por algunos minutos, por lo tanto el Moderador toma la palabra y describe una situación donde se evidencia la abstracción:

> *"cuando Tatiana uso intriga [otro tipo de carta], y esa carta intriga decía que yo [Tatiana] podía preguntarle a todos por una carta, podría ser lugar, armas o sujetos, ella eligió arma, y ella preguntó ¿Quién tiene el candelabro? La pregunta era para ellos, para los demás, ella no tenía que responder, ella lo podría tener, sí, pero ella no tenía que responder y esperaba a los demás entonces qué pasó ahí, (...) llego un punto en donde todos empezaron, candelabro, nadie, nadie, candelabro no hay, entonces empezaron a contar cuantas armas hay ,hay seis armas pero nosotros no tenemos el candelabro entonces el candelabro puede estar ahí [entre las cartas elegidas al azar antes de iniciar el juego], sí, pero no necesariamente tiene que estar ahí porque ella [Tatiana]*

podía tener el candelabro, ella no lo tenía, pero podía tenerlo y los demás estaban en ese asunto".

El episodio referido por el Moderador plantea que la **abstracción** se identifica en el ejercicio cuando un jugador puede generar la confusión a partir de una carta que él tiene, pero quiere hacer parecer que es de las que se buscan para ganar el juego; es decir, que dicho participante comprende que esto es clave para ganar y lo usa para generar confusión en los demás. Posterior al episodio resaltado por el Moderador, pregunta por la generalización de patrones, a lo que José toma la palabra y menciona *"cuando usted preguntaba por tres cosas [sospechoso, habitación y arma], entonces si tres personas le mostraban, usted de una las descarta, yo creo que ahí se puede ver"*. La **generalización de patrones** permite definir conceptos en su forma más simple y reutilizar la definición para todas las instancias de ese concepto (Kemp, 2014), aspectos que corresponde con lo indicado por José. Luego, el Moderador pregunta ¿qué pueden mencionar del algoritmo? A lo cual todos quedaron en silencio por unos minutos.

Un algoritmo es un método preciso para resolver un problema dado, es una abstracción de un procedimiento paso a paso para tomar entrada y producir algún resultado deseado (Kemp, 2014; Wing, 2008). De acuerdo con Wing (2008) algunas caracteristicas como descomposición, reconocimiento y generalización de patrones son habilidades desarrolladas por áreas como la matemática; sin embargo, la abstracción (y por ende el algortimo) son caracteristicas más complejas y trascienden al contexto de la informática. Esto se corresponde con los momentos de silencio que se registran en la discusión al preguntar por ambos aspectos. Po lo tanto, el moderador le solicita a Natalia que comparta la estrategia que desarrolló para ganar el juego (fue la participante ganadora en el ejercicio).

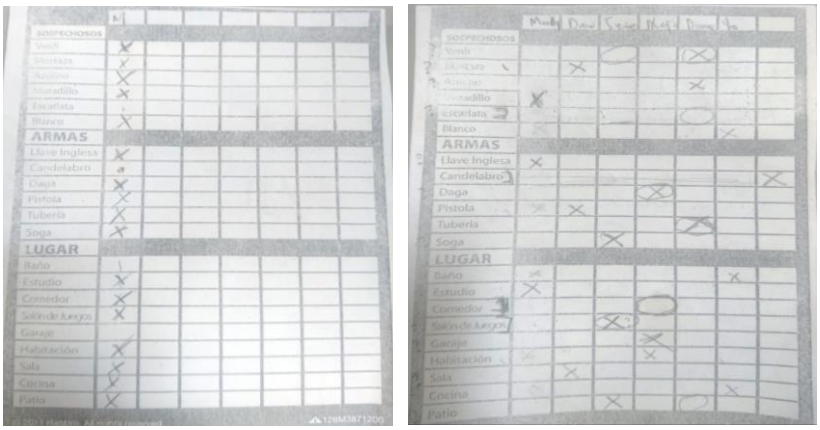


Figura 2: Tabla diligenciada por Camila (izquierda). Tabla diligenciada por Natalia (derecha).

En el desarrollo de la experiencia, Natalia construyó un algoritmo que le permitió ganar el juego rápidamente, la estrategia que siguió se divide en pasos sistemáticos y precisos (se corresponde con el proceso de **descomposición** de Camila). Ella para conocer qué cartas tienen y no tienen los demás participantes, le asignó una columna en la tabla a cada uno (Figura 2). Posterior a esto define: al plantear una hipótesis (toda hipótesis en el juego obliga indicar un lugar, sospechoso y arma) y ser mostradas las tres cartas en el juego significa que se deben descartar con una x (esto se corresponde con el proceso de **generalización** descrito por José). Luego, si muestran solo dos cartas aparece una incertidumbre de cuáles podrían ser, para lo cual definió encerrar en la casilla con un circulo y esperar a tener mayor información para descartarla con una x (coincide con el **reconocimiento de patrones** indicado por Tatiana).

El proceso desarrollado por Natalia da cuenta de las características resaltadas por los demás futuros profesores previamente, además los abstrae y asocia en un algoritmo por medio de una serie de pasos de entrada que la llevaron a ganar. En ese sentido, la experiencia vivida a través del juego CLUE se constituye como una herramienta importante para introducir el PC, que le permitió a los futuros profesores de matemáticas reconocer la naturaleza del pensamiento computacional en actividades sin ordenador (Kale *et al.*, 2018; Sands *et al.*, 2018; Shute, Sun y Asbell-Clarke, 2017).

Conclusiones

Los resultados de este estudio permiten concluir que la formación en el PC a través de experiencias sin ordenador, como el juego de mesa CLUE, posibilita la comprensión profunda de su naturaleza, su relación con el mundo real, las habilidades que permite desarrollar y la forma de implementarlo en el aula. Además, se evidencia que si bien los futuros profesores de matemáticas logran comprender los procesos de descomposición, reconocimiento y generalización de patrones, es necesario ampliar en experiencias que les permitan alcanzar los procesos de abstracción y diseño de algoritmos. Por lo tanto, se sugiere en futuras investigaciones la implementación de este tipo de recursos, acompañada de estrategias que favorezcan la sistematización de datos, la resolución de problemas, la codificación y organización de ideas; para luego trabajar de manera fluida en experiencias digitales como la programación por bloques o por líneas.

Referencias y bibliografía

Angeli, C., & Jaipal-Jamani, K. (2018). Preparing Pre-service Teachers to Promote Computational Thinking in School Classrooms. In *Computational Thinking in the STEM Disciplines* (pp. 127–150). Cham: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-93566-9_7

Angeli, C., Voogt, J., Fluck, A., Webb, M., Cox, M., Malyn-Smith, J., & Zagami, J. (2016). A K-6 computational thinking curriculum framework: Implications for teacher knowledge. *Educational Technology and Society*, *19*(3), 47–57.

Aristizábal, J., Colorado, H., & Gutiérrez, H. (2016). El juego como una estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento numérico en las cuatro operaciones básicas. *Sophia*, *12*(1), 117–127.

Barros, R., Rodríguez, L., & Barros, C. (2015). El juego del cuarenta, una opción para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias sociales en Ecuador. *Universidad y Sociedad*, *7*(2), 137–144.

Carmona-Mesa, J. A., Morales, S., & Villa-Ochoa, J. A. (2017). *Pensamiento Computacional en la formación inicial de profesores de matemáticas*. Colombia: Universidad de Antioquia. doi:10.13140/RG.2.2.33696.07688

Cervantes, C. (2002). El grupo de discusión en el estudio de la cultura y la comunicación. Revisión de premisas y perspectivas. *Revista Mexicana de Sociología*, *64*(2), 71–88.

Curzon, P., & McOwan, P. W. (2018). Rätsel, Logik und Muster. In *Computational Thinking* (pp. 49–64). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-662-56774-6_4

Hsu, T.-C., Chang, S.-C., & Hung, Y.-T. (2018). How to learn and how to teach computational thinking: Suggestions based on a review of the literature. *Computers & Education*, *126*, 296–310. doi:10.1016/j.compedu.2018.07.004

Kale, U., Akcaoglu, M., Cullen, T., Goh, D., Devine, L., Calvert, N., & Grise, K. (2018). Computational What? Relating Computational Thinking to Teaching. *TechTrends*, 1–11. doi:10.1007/s11528-018-0290-9

Kemp, P. (2014). *Computing in the national curriculum A guide for secondary teachers Computing in the*. Newnorth Print, Ltd. Bedford.

Khine, M. S. (2018). Strategies for Developing Computational Thinking. In *Computational Thinking in the STEM Disciplines* (pp. 3–9). Cham: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-93566-9_1

Kim, S., & Kim, H. Y. (2018). A Computational Thinking Curriculum and Teacher Professional Development in South Korea. In *Computational Thinking in the STEM Disciplines* (pp. 165–178). Cham: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-93566-9_9

López, I. (2010). El grupo de discusión como estrategia metodológica de investigación: aplicación a un caso. *Edetania: Estudios y Propuestas Socio-Educativas*, *38*, 147–156.

Noguero, F. L. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación*, *4*, 167–179.

Riveros, A., & Salguero, M. (2018). *Diseño de un Juego de Mesa como herramienta de apoyo para la enseñanza del pensamiento computacional a estudiantes de educación superior de la Universidad San Buenaventura de Cali (Trabajo de pregrado)*.

Sands, P., Yadav, A., & Good, J. (2018). Computational Thinking in K-12: In-service Teacher Perceptions of Computational Thinking. In *Computational Thinking in the STEM Disciplines* (pp. 151–164). Cham: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-93566-9_8

Shute, V. J., Sun, C., & Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review*, *22*, 142–158. doi:10.1016/j.edurev.2017.09.003

Valverde, J., Fernández, M., & Garrido, M. (2015). El pensamiento computacional y las nuevas ecologías del aprendizaje. *RED - Revista de Educación a Distancia*, *46*(15).

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33. doi:10.1145/1118178.1118215

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A:Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *366*, 3717–3725. doi:10.1098/rsta.2008.0118

Yadav, A., Hong, H., & Stephenson, C. (2016). Computational Thinking for All: Pedagogical Approaches to Embedding 21st Century Problem Solving in K-12 Classrooms. *TechTrends*, *60*(6), 565–568. doi:10.1007/s11528-016-0087-7

Zapata-Ros, M. (2015). Pensamiento computacional: Una nueva alfabetización digital. *RED. Revista de Educación a Distancia*, *46*(15).

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estudio de la parábola como lugar geométrico: una forma de ampliar el conocimiento especializado del profesor

Isabel **Torres** Céspedes.
Universidad de Lima
Perú
iztorres@ulima.edu.pe

Elizabeth **Advíncula** Clemente
Universidad de Lima
Perú
eadvincu@ulima.edu.pe

José Carlos **León** Ríos
Universidad de Lima
Perú
Jleonr@ulima.edu.pe

Ángel Homero **Flores** Samaniego.
Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM.
México
ahfs@unam.mx

Resumen

En las escuelas de nuestros países, observamos que los docentes de matemática de educación secundaria tienen dificultades al resolver problemas relacionados con la parábola y su enseñanza está centrada en el tratamiento algebraico de dicha cónica, dejando de lado su condición geométrica. El objetivo de este taller es explorar con material concreto y con el GeoGebra diversas situaciones que afiancen el conocimiento de la parábola como el lugar geométrico y sus propiedades. En este trabajo tomamos en cuenta el enfoque del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTKS) y seguimos una metodología cualitativa que toma en cuenta aspectos de la ingeniería didáctica. Finalmente, esperamos promover la reflexión en los docentes para trabajar los distintos objetos matemáticos con recursos que faciliten la comprensión del objeto matemático haciendo conjeturas y validándolas.

Palabras clave: Conocimiento especializado del profesor, parábola, lugar geométrico, material concreto, GeoGebra.

Introducción

Estamos de acuerdo con Flores y Gaita, C. (2014) cuando indican que el modelo conductista predomina en los planes de formación de profesores de matemática de educación del nivel primaria y secundaria en el Perú. Los actuales escenarios de aprendizaje muestran que existen diversos recursos y estrategias que pueden ser utilizados como apoyo para la enseñanza de la matemática, específicamente la parábola. Nuestra propuesta didáctica está centrada en el aprendizaje de la parábola y dirigida a profesores de educación secundaria. Hacemos uso de material concreto y de tecnología digital, con el objetivo de explorar la condición geométrica de la parábola y algunas de sus propiedades. Las secuencias didácticas ofrecidas en el taller incluyeron actividades con material concreto como papel, hilo, así como el uso de recursos digitales en el aula con el aplicativo Geogebra, con la finalidad de crear ambientes de aprendizajes dinámicos y motivadores que propicien de manera más efectiva el aprendizaje del estudiante. Las actividades propuestas ofrecen diversas situaciones que permitan reflexionar sobre el objeto matemático parábola.

Marco teórico y metodológico

La realización del presente taller tiene como marco teórico el modelo MTSK (por sus siglas en inglés: Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática), propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013).

Este modelo se centra en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas respecto de la enseñanza del contenido, en nuestro caso de la parábola. Tiene dos grandes dominios de conocimiento: conocimiento del contenido matemático (MK, por sus siglas en inglés) y conocimiento didáctico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés). En este taller, nos centramos en el conocimiento matemático (MK) que tiene como prioridad indagar los conocimientos matemáticos de los profesores de educación secundaria en relación con el contenido relativo a la parábola, pues observamos que los docentes en ejercicio presentan muchas deficiencias conceptuales en relación a este contenido, lo que pudimos confirmar cuando analizamos los resultados obtenidos en una evaluación diagnostica que aplicamos a un grupo de docentes de educación secundaria de nuestros países.

El conocimiento matemático (MK) está compuesto por tres subdominios de conocimiento: conocimiento de los temas (KoT, por sus siglas en inglés), conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM, por sus siglas en inglés) y conocimiento de la práctica matemática (KPM, por sus siglas en inglés).

En la tabla 1, se observa la descripción de cada subdominio del conocimiento matemático (MK).

Tabla 1

Descripción de los subdominios del conocimiento matemático (MK).

MK (Conocimiento matemático)		
KoT (Conocimiento del contenido	KSM (Conocimiento de la	KPM (Conocimiento de la práctica

matemático)	estructura matemática)	matemática)
Conocimiento de conceptos y procedimientos matemáticos con sus correspondientes fundamentos. Se concreta en saber matemáticas, conocer definiciones, propiedades, procedimientos, ejemplos específicos, significados y aspectos fenomenológicos asociados al contenido.	Considera la idea de conexión y complejidad del contenido matemático. Las conexiones abarcan las interconceptuales (comprenden vínculos entre ideas o conceptos matemáticos distintos) y temporales (enlazan los conocimientos previos y posteriores con el contenido de enseñanza).	Implica el modo de proceder en matemáticas. Incluye el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en matemáticas, el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, elegir representaciones, argumentar, generalizar o explorar, aspectos de la comunicación matemática.

Fuente: elaboración propia. 2018.

Este taller forma parte de un proyecto de investigación en proceso y está dirigido a docentes de nivel secundario (quienes atienden a estudiantes entre 13 y 17 años) e investigadores interesados en el tema que deseen profundizar en la problemática o aportar con sus observaciones al mejor desarrollo de la investigación.

En el subdominio KoT hemos considerado tres categorías: los contenidos, la fenomenología y los sistemas de representación de la parábola, cada uno de ellos con sus respectivos indicadores. Consideramos que el profesor de matemática debe tener conocimientos de contenidos básicos como conceptos, reglas, teoremas y sus significados en relación con el contenido, imágenes, representaciones de los contenidos y procedimientos, incluimos el conocimiento de propiedades correctas y otras incorrectas de la parábola cuando manejamos los sistemas de representación.

En la tabla 2, damos cuenta de dichas características. Nuestras actividades engloban los indicadores de cada categoría como el concepto de la condición geométrica de la parábola, en la fenomenología la representación de situaciones de distintos significados de la parábola, en los sistemas de representación la omisión del sistema de ejes coordenados la invariabilidad de las propiedades de la parábola-

Tabla 2

Categorías e indicadores del subdominio KoT.

Categorías	**Indicadores**
Contenidos	Conocimiento del concepto de parábola como lugar geométrico.
	Conocimiento de la parábola como la gráfica de una función cuadrática.
Fenomenología	Conocimiento de distintos significados del concepto parábola.
Sistemas de representación de la parábola	Representación de la condición geométrica de la parábola omitiendo el sistema de coordenadas cartesiano.

Fuente: elaboración propia. 2018.

En el subdominio KPM hemos considerado que el docente debe conocer la forma cómo se produce el conocimiento matemático y las reglas de sintaxis de la disciplina. Por ejemplo, demostrando que el único punto común entre una recta tangente a una parábola y dicha parábola es el punto de tangencia, y que dicho punto resulta de hacer la discriminante cero. Recurrimos al pensamiento deductivo e inductivo.

En la tabla 3, se muestran la categoría formas de validación y demostración, así como los indicadores relativos.

Tabla 3

Categorías e indicadores del subdominio KPM.

Categoría	**Indicador**
Formas de validación y demostración	Verificación de la condición geométrica de la parábola a partir de la construcción de dicha cónica.

Fuente: elaboración propia. 2018.

Asimismo, dado que nuestro estudio es de carácter cualitativo, nuestra metodología toma en cuenta aspectos de la ingeniería didáctica, la cual tiene como propósito analizar los procesos de construcción del aprendizaje a través secuencias de enseñanza. El diseño de esta investigación incluye las tres primeras fases de la ingeniería didáctica: el análisis preliminar en sus tres dimensiones, epistemológica, cognitiva y didáctica; la concepción y el análisis a priori para el diseño de las actividades del taller y la experimentación en el desarrollo de este.

Actividades sugeridas

En esta propuesta se plantean actividades y tareas relacionadas con la parábola, explorar su condición geométrica y sus principales propiedades. A continuación, se presentan algunas de las que desarrollaremos en el taller.

Actividad 1: Construcción de la parábola con doblado de papel

El objetivo de esta actividad es explorar el concepto de parábola como lugar geométrico, representar la condición geométrica de la parábola omitiendo el sistema de coordenadas cartesiano y determinar la ecuación de la parábola teniendo en cuenta las propiedades de sus elementos.

La actividad consiste en obtener una parábola doblando papel como se observa en la figura1. Luego se procede a los cuestionamientos para explicar por qué se forma dicha curva.

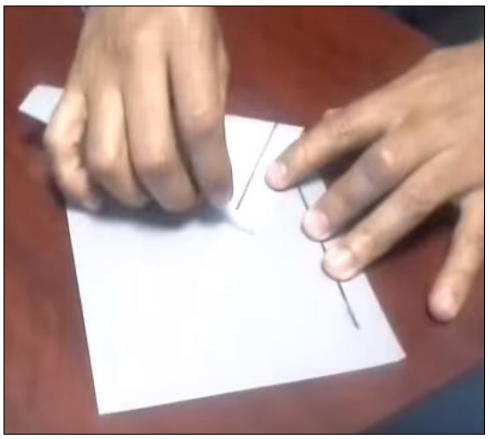


Figura 1. Construcción de la parábola con doblado de papel

Actividad 2: Construcción de la parábola con hilo y aguja

El objetivo de esta actividad es reconocer a la parábola como la gráfica de una función cuadrática y su representación geométrica en el sistema de coordenadas cartesiano; determinar la ecuación de la parábola teniendo en cuenta las propiedades de sus elementos; y, por último, determinar la ecuación ordinaria de la parábola y el reconocimiento de sus principales elementos.

La actividad consiste en obtener una parábola cruzando hilos según las posiciones previamente definidas y explicar por qué se obtiene dicha curva, como se observa en la figura 2.

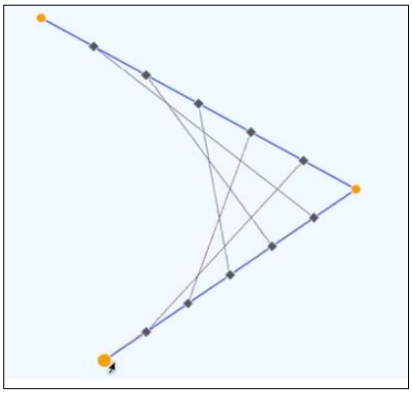


Figura 2. Construcción de la parábola con hilo y aguja.

Actividad 3. La parábola y el triángulo isósceles

Esta actividad hace uso del aplicativo Geogebr4a.El objetivo de esta actividad es construir una parábola haciendo uso de las propiedades de un triángulo isósceles y relacionarlas a la condición geométrica de la parábola, es decir la equidistancia que existe de un punto perteneciente a la parábola con la directriz y el foco.

En el desarrollo del taller, se requiere ocultar los ejes coordenados, la cuadrícula de la hoja y trazar en la vita gráfica un triángulo isósceles ABC.En la figura 3, se observa como el objeto

triángulo isósceles usa sus propiedades elementales para la construcción de una parábola, incluso parábola de forma oblicua.

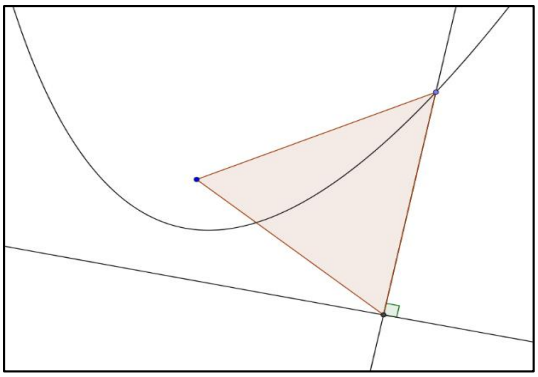


Figura 3. Construcción de una parábola a partir de un triángulo isósceles.

Actividad 4. Envolvente de una parábola

El objetivo de esta actividad es recrear en GeoGebra la construcción de una parábola doblando papel y mostrar que el trazo de una recta tangente a una parábola desde un punto exterior permite explicar la actividad del doblado de papel y además evidenciar un procedimiento para trazar una curva a partir de las intersecciones de rectas.

Antes de empezar la construcción es necesario ocultar los ejes coordenados y la cuadrícula en la hoja de trabajo que usaremos en GeoGebra. En la figura 4, mostramos el trabajo final de la envolvente de una parábola.

Luego, relacionar la actividad con una serie de preguntas ¿Cómo demuestra analíticamente que la recta $\mathcal{L}$ es tangente a la parábola?, ¿cuántas rectas tangentes a la parábola se puede trazar desde el punto P?, si el punto P está sobre el eje focal, ¿cuál es la posición de la recta que une los puntos de tangencia respecto a dicho eje?

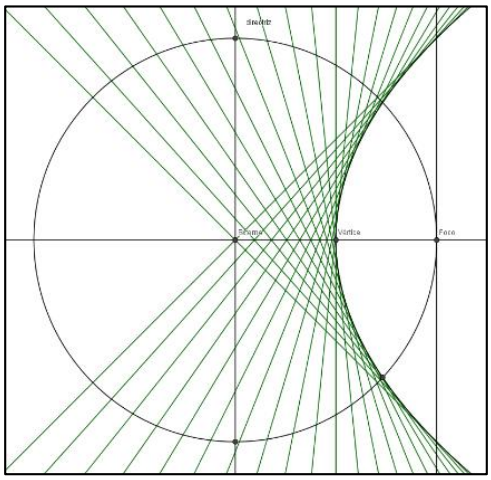


Figura 4. Construcción de una parábola por medio de rectas tangentes.

Consideraciones finales

Las actividades propuestas en este taller están diseñadas para reflexionar sobre la manera de fomentar el conocimiento del contenido (KoT) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM) en el profesor. Nos hemos enfocado en la exploración de una determinada situación matemática, producir una conjetura y buscar la manera de validarla, es decir, la forma de crear y producir matemática a través del razonamiento y la prueba.

Con esto esperamos que se sienten las bases para una reflexión más profunda sobre el modelo teórico MTSK y la forma de abordar la parábola como lugar geométrico.

Referencias y bibliografía

Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Mathematics Teacher Specialized Knowledge. En: *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics education* (CERME 8) (pp. 2985-2994)., Antalya, Turquía: ERME.

Flores, J. V. & Gaita, C. (2014). Situación actual de la Educación Matemática. en el Perú. *Revista de matemática, ensino e cultura, 9*(15), 82-95. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/304677241_Situacion_actual_de_la_educacion_matematica_en_el_Peru

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Programa de Estágio Supervisionado: uma real integração entre Universidade e Escola da Educação Básica

Barbara Corominas Valério
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo
Brasil
barbarav@ime.usp.br
Cláudia Cueva Candido[1]
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo
Brasil
cueva@ime.usp.br

Resumo

Este trabalho descreve a pesquisa realizada junto ao Programa de Estágio do Instituto de Matemática e Estatística da USP. Verifica-se a partir de análise de relatos que as ações desenvolvidas no programa promovem uma efetiva inserção dos futuros professores nas questões relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem da Educação Básica. A pesquisa, de caráter qualitativo, ocorreu nos últimos 10 anos envolvendo alunos de licenciatura em matemática e professores da Educação Básica da rede pública de ensino da Grande São Paulo. Relatamos também os principais resultados do projeto Ensino de Matemática Elementar do Observatório da Educação, financiado pela CAPES, realizado no ambiente do Programa durante os anos de 2013 e 2014, envolvendo também alunos do curso de pós-graduação. É possível concluir que as atividades desenvolvidas promovem uma formação inicial em que teoria e prática estão realmente integradas, propiciando ainda uma rica interação entre formação inicial e formação continuada.

Palavras chave: formação inicial, formação continuada, estágio supervisionado, pós-graduação em ensino de matemática.

Introdução

O Programa de Estágio Curricular Supervisionado foi criado no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, IME-USP, no início dos anos 2000, por ocasião de ampla reformulação do curso de Licenciatura em Matemática. Entre os objetivos de sua criação destaca-se o de promover, ainda na formação inicial de professores, a integração entre formação profissional e formação científica, em contraposição ao modelo vigente no século XX em que, após o Bacharelado em Matemática, o diploma de licenciado dependia apenas de complementação pedagógica.

[1] Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES (AUXPE - OBEDUC – 0988/2013).

Um dos fatores apontados para a separação entre teoria e prática na formação inicial de professores tem sido o distanciamento entre as Instituições de Ensino Superior e as escolas de Educação básica. Tal fato já era apontado por Schön em sua proposta de formação do profissional reflexivo

> (...) as escolas profissionais das universidades contemporâneas privilegiam o conhecimento sistemático. A racionalidade técnica, a epistemologia da prática predominante nas faculdades, ameaça a competência profissional, na forma de aplicação do conhecimento privilegiando a problemas instrumentais da prática. (2000, p.vii)

Implementado em 2009, o programa é composto pela disciplina "Projetos de Estágio", obrigatória para os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, e pelo curso "Aprendendo com Projetos", de extensão universitária, oferecido a professores de Educação Básica da rede pública de ensino da Grande São Paulo. Nele são realizadas 100 das 400 horas de estágio que um aluno de Licenciatura da USP deve cumprir.

Anualmente o IME-USP faz convênios com escolas públicas a fim de, não somente garantir a realização dos estágios, mas também apoiar a continuidade de formação dos professores. As atividades conjuntas são desenvolvidas a partir de projetos de ensino elaborados por grupos formados por alunos do curso de Licenciatura _ os estagiários_ e professores da rede pública _seus supervisores nas escolas_ sob a orientação de um docente do Departamento de Matemática e com apoio de educadores vinculados ao programa.

O trabalho desenvolvido de modo simultâneo nos cursos de Licenciatura e de extensão promove a articulação entre formação inicial e continuada de professores. Favorece a reflexão da prática profissional por parte dos professores regentes nas escolas parceiras e o real contato dos licenciandos com as questões específicas da futura profissão.

A presença do professor supervisor em todas as etapas do processo é fundamental para o sucesso das atividades. Por essa razão, os professores supervisores têm sido convidados a se matricularem no curso de extensão após mostrarem interesse pelo projeto ao lecionarem em escolas que já fizeram parceria com o programa ou ao participarem de atividades no CAEM (Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do IME/USP). Em 2009, na primeira vez que a disciplina e o curso de extensão foram oferecidos, a proposta também foi apresentada a algumas diretorias de ensino da região oeste da cidade de São Paulo, região onde está localizado o campus da Universidade. A finalidade dessa seleção é procurar garantir a participação de professores supervisores que realmente estejam dispostos a receber estagiários em suas salas de aula, que se envolvam com o grupo na elaboração de projetos e que socializem experiências de sua prática profissional durante os encontros do programa de estágios. Apesar dessa seleção parecer restritiva, desde a criação do programa, o IME/USP já firmou convênio com escolas públicas de todas as regiões da cidade de São Paulo e de municípios vizinhos; temos tido estágios realizados em todos os níveis da Educação Básica e, inclusive, na Educação de Jovens e Adultos. As características comuns entre as escolas parceiras têm sido, dentre outros, IDEB abaixo do esperado, falta de motivação para aprender e defasagem de conceitos de Matemática por parte de vários alunos. A característica comum aos professores participantes é a vontade de discutir essas questões e encontrar caminhos para melhorar seu trabalho junto aos alunos.

Desenvolvimento

O trabalho no Programa de Estágio Supervisionado é desenvolvido, no decorrer do ano letivo, em cerca de 18 encontros no IME/USP entremeados por 100 horas de estágio efetivo nas

escolas parceiras. Vale destacar que nos encontros contamos com a presença dos professores regentes de classe e dos educadores vinculados ao programa, além dos estudantes de Licenciatura.

No início de cada ano letivo os participantes dividem-se em grupos, compostos por um professor supervisor e cerca de quatro estagiários. Cada grupo escolhe um tema para o projeto de estágio e esquematiza o cronograma para sua execução. Desde as primeiras visitas às escolas os estagiários familiarizam-se com a sala de aula em que será aplicado o projeto. No primeiro semestre, com base no estudo dos conceitos matemáticos relacionados ao tema escolhido e em avaliação diagnóstica aplicada aos alunos da turma que receberá o projeto, o grupo esboça um pré-projeto e o submete à apreciação dos educadores e do docente responsável. Em reuniões subsequentes, as atividades propostas são, muitas vezes, reformuladas após serem apresentadas e discutidas pelos participantes do programa. Trata-se de um processo dinâmico em que fica clara a especificidade do trabalho do professor, em que, a todo momento, é preciso reavaliar as ações de modo a atender às necessidades dos alunos. Já no segundo semestre, os alunos passam à aplicação do projeto.

Na elaboração dos projetos de ensino, os estagiários são incentivados a desenvolver atividades diferentes das rotineiramente propostas pelo regente de classe, pois entendemos que é no momento do estágio que o estudante pode ousar e colocar em prática toda a teoria de Didática da Matemática, com o apoio da equipe de educadores e, principalmente, do professor supervisor. Com isso queremos discutir a viabilidade da aplicação de projetos inovadores, dar oportunidade aos alunos da escola parceira de participarem de atividades diferenciadas e aumentar o repertório dos professores regentes, mostrando a eles que a aplicação de atividades não rotineiras pode ser tão ou mais eficaz para a aprendizagem do que a sua prática usual.

Com essa perspectiva, colocamos em discussão alguns temas relacionados a metodologias de ensino e, especificamente, de Didática da Matemática. Textos envolvendo resolução de problemas, uso de jogos e materiais didáticos estruturados ou não, bem como conceitos de contrato didático, transposição didática, registros de representação semiótica, obstáculos didáticos, erros e aprendizagem significativa são naturalmente oferecidos para estudo e reflexão dos grupos.

O desenvolvimento dos projetos sinaliza que com o uso de atividades diferenciadas o processo de sistematização dos conteúdos fica facilitado. Não é raro encontrarmos relatos dos estagiários e dos professores supervisores que os alunos da educação básica fazem referência as atividades desenvolvidas no projeto de estágio ao resolverem questões solicitadas nas mais diversas avaliações.

Integração entre teoria e prática na formação inicial

A possibilidade que os licenciandos têm de trabalharem com uma turma da educação básica durante um ano e serem acompanhados pelo supervisor na escola e o professor na universidade, propicia uma grande troca de informação. Durante os encontros na universidade, os licenciandos relatam como foi a aplicação das atividades elaboradas, o que funcionou em sala de aula e o que eles fariam diferente. Neste momento, a presença do professor supervisor é fundamental, pois sua experiência sobre a realidade escolar é socializada com a turma, o que enriquece a discussão. Os sucessos são comemorados e os insucessos analisados. A diversidade de escolas e as diferentes faixas etárias de crianças envolvidas nos projetos possibilitam múltiplos olhares, enriquecendo as discussões coletivas e ampliando o nível de reflexão. Um aluno em 2017 relatou "O projeto é uma grande oportunidade de experimentar, de aprender com os erros ou acertos (...) é sempre bom aprender compartilhando experiências (...) Entre uma experiência e outra, o aluno é convidado a

refletir, a repensar, como fazer aquela atividade dar certo".

A influência das discussões realizadas é percebida nos relatórios finais elaborados pelos grupos. É comum encontrarmos trechos que refletem as discussões ocorridas. Um grupo, em 2017, que trabalhava com o 7º ano, após perceberem que vários alunos tinham errado o cálculo da divisão de 2416 por 8, resolveram tentar descobrir a origem do erro. Após vários alunos terem explicado como tinham resolvido a conta, o grupo percebeu que o erro era devido ao uso mecânico do algoritmo da divisão. Com isso, conseguiram identificar a origem do problema e puderam realizar atividades para sanar as dificuldades existentes. Os alunos tomam consciência que dificuldades em conteúdo de anos anteriores, precisam ser resolvidos.

Outro grupo, ainda em 2017, pontuou muito bem sobre a importância da realização de atividades diferenciadas sem, no entanto, abrir mão da sistematização do conteúdo. Com atividades diferenciadas, conseguiam um maior envolvimento da classe o que facilitava inclusive o posterior registro matemático do conteúdo.

Os licenciandos relatam a importância que o desenvolvimento do projeto tem para a formação deles como futuros professores. Frases como *pudemos colocar a mão na massa* são facilmente identificadas nos relatos. Uma aluna, em 2017, que já trabalhava como professora escreveu que para ela o projeto "Colaborou para aprimorar as técnicas de ensino, pois aprendi a sair do roteiro e empregar dinâmicas inovadoras".

Em 2013, os alunos quando questionados se tinham percebido em si alguma mudança de atitude após a aplicação do projeto, manifestaram que passaram a refletir sobre ações corriqueiras de um professor. Um aluno relatou "A maior mudança em mim foi de falar menos e dar mais pausas para os alunos pensarem. Alguns raciocínios que me pareciam óbvios são mais complicados que aparentam". Outro aluno escreveu "Sim, quando percebi que uma explicação, completa leva o aluno apenas a reproduzir as palavras que eu disse, passei a tentar levar o aluno a desenvolver o problema por si". Segundo Pimenta e Lima (2006, p.14) "A aproximação à realidade só tem sentido quando tem conotação de envolvimento, de intencionalidade, pois a maioria dos estágios burocratizados, carregados de fichas de observação, está numa visão míope de aproximação da realidade".

Pelos relatos, fica claro que os alunos reconhecem a importância em dominar o conteúdo específico, mas que só isso não basta. É necessário que se tenha o conhecimento pedagógico do conteúdo, que se conheça o aluno e suas potencialidades. Estas características podem ser comparadas com o que Shulman (1987, p.8) chama de "Categorias da base de conhecimento".

Integração entre pós-graduação e programa de estágio

O ambiente em que ocorre o Programa de Estágios do IME tem potencial para favorecer, não somente a interação entre formação inicial e continuada, mas também a articulação entre a pós-graduação e a Educação Básica.

Em particular, no bojo do Programa foi desenvolvido, nos anos de 2013 e 2014, o projeto "Ensino de Matemática Elementar", filiado ao Observatório da Educação e financiado pela CAPES. A equipe, formada por bolsistas da CAPES, contou com cinco professores da Educação Básica, do curso de extensão "Aprendendo com Projetos", cinco alunos de graduação, matriculados na disciplina "Projetos de Estágio", e três estudantes do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

Com o objetivo de estabelecer um vínculo de cooperação entre professores da rede pública

de ensino da grande São Paulo e os diversos personagens do IME-USP, a dinâmica de trabalho incentivou professores regentes a aprofundarem conhecimentos de Matemática e a desenvolverem autonomia para aprimoramento de sua prática profissional; além disso, promoveu uma forte interação entre pós-graduandos e professores da Educação Básica, de modo a motivar a pesquisa acadêmica por demandas reais da escola pública e, em contrapartida, contribuir para a reflexão dos professores quanto a suas práticas pedagógicas.

Os alunos da graduação atuaram como observadores efetivos das salas de aula dos professores regentes e auxiliaram os estudantes do Mestrado em Ensino na coleta de dados.

Os professores regentes foram incentivados a elaborarem, com apoio dos mestrandos, seus próprios projetos de ensino. Apesar de apresentarem uma certa resistência a exporem suas ideias e a trabalharem com essa metodologia, foram desenvolvidos pelas professoras e aplicados a suas turmas um projeto com mandalas, um projeto com jogos e um projeto de alfabetização matemática.

Os pós-graduandos, também presentes nos encontros do programa de estágio supervisionado, tiveram oportunidade de observar todo o trabalho realizado pelos estagiários e seus supervisores, de discutir sobre questões da prática do professor com todos os participantes.

Houve momentos de importante reflexão dos temas tratados no programa e pudemos constatar que a presença dos mestrandos na equipe facilitou o diálogo propiciou a diminuição da distância entre os professores da Educação Básica e os docentes da Universidade.

Além disso, o aprofundamento da interlocução entre professores e mestrandos incrementou troca de conhecimentos específicos de matemática e de metodologias de ensino e teve influência decisiva nas pesquisas que deram origem a três dissertações de Mestrado.

A partir do contato de uma das mestrandas com uma professora regente que já trabalhava com resolução de problemas em turmas de Ensino Médio surgiu o tema da primeira dissertação de Mestrado (Prado, 2015). Mestranda e professora regente de classe dedicaram-se a estudar o tema e, na pesquisa de campo, investigaram a incidência das diversas representações semióticas em que os alunos se apoiaram para resolver uma coleção de problemas adaptados do Rali Matemático Transalpino.

Outro trabalho de Mestrado teve origem em uma aparente contradição _ as professoras regentes destacavam, frequentemente, a importância do incentivo ao raciocínio lógico no ensino da Matemática e, no entanto, por meio de pesquisa documental foi possível constatar que, em geral, os conceitos matemáticos eram tratados, em suas salas de aula, de maneira mecânica e havia prevalência de solicitações de cálculo direto por meio de algoritmos; além disso, observou-se que a nota dada a questões de prova dependia muito mais da resposta certa do que do raciocínio do aluno. A análise de entrevistas e de várias discussões na equipe levou a concluir que, em geral, as professoras tinham dificuldade em identificar os tipos de validação de hipóteses matemáticas nos diversos níveis de escolaridade. Em particular, não faziam distinção entre argumentação lógica no tratamento de uma questão e o cálculo para obter a resposta. Além da dissertação de mestrado (Matheus, 2016), essa pesquisa contribuiu para a formação continuada com o oferecimento do curso de atualização "Desenvolvimento do Raciocínio Lógico" (CAEM, 2015) a cerca de 40 professores da Educação Básica.

A questão norteadora da terceira pesquisa de Mestrado (Silva, 2016) foi "em que medida, a participação de professores em cursos de formação continuada tem potencial reformador em sua prática profissional?". A mestranda analisou os projetos de ensino elaborados pelas professoras

regentes. Em entrevistas realizadas com as professoras de Educação Básica participantes, elas declararam que as atividades de formação continuada de que haviam participado ao longo da carreira, pouco influenciaram para qualquer mudança de sua prática. Relataram que, ao contrário, a elaboração de um projeto próprio de ensino, as atividades realizadas como supervisoras de estágio e as discussões sobre diversos temas abordados no processo motivaram-nas a refletir sobre as questões da sala de aula e a, efetivamente, transformar sua prática profissional.

Considerações finais

Após análise do material produzido ao longo destes anos, é possível afirmar que a participação nas atividades propostas propiciam aos estagiários uma experiência única. Ainda durante a formação inicial, os alunos de licenciatura têm a oportunidade de vivenciar a realidade escolar. Ao acompanharem uma turma de alunos da escola básica durante um ano, eles passam a ter conhecimento não só dos problemas relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, que antes tinham sido discutidos apenas a nível teórico, mas também passam a ter maior consciência dos problemas sociais que estão presentes na realidade de uma sala de aula e que interferem diretamente no desenvolvimento dos alunos. Zeichner salienta que "Pesquisas têm mostrado claramente que as experiências de campo constituem importantes ocasiões para que se efetive a aprendizagem docente" (2010, p.484).

Em 2009 uma aluna relata "Esse momento foi muito importante em minha formação como professora, proporcionou um primeiro contato profissional e favoreceu o desenvolvimento das primeiras ideias de reflexão sobre a prática ainda durante a formação inicial".

Desde sua criação o programa de estágios proporciona integração entre formação inicial e formação continuada. Mostra-se também ambiente rico para a articulação entre a pesquisa acadêmica em ensino e a prática profissional do professor de Matemática. Por meio de relatos de licenciandos e de entrevistas fornecidas a estudantes de pós-graduação, foi possível constatar mudanças importantes na atuação dos professores quanto a hábitos de estudo e pesquisa, planejamento didático, necessidade de motivar os alunos com atividades contextualizadas e desafiadoras, indicando que o programa de estágios tem potencial para contribuir eficazmente com a melhoria da Educação Básica.

Referências e bibliografias

Matheus, A. R. (2016). *Argumentação e Prova na Matemática Escolar*. (Dissertação de Mestrado) Universidade de São Paulo (IME-USP), Brasil.

Pimenta, S. G.; Lima, M. S. L. (2006). Estágio e docência: diferentes concepções. *Poíesis Pedagógica*, 3(3-4), 5-24. doi: **10.5216/rpp.v3i3e4.10542**

Prado, M. (2015). *Resolução de Problemas e Representações Semióticas: uma experiência no ensino médio inspirada no rali matemático*. (Dissertação de Mestrado) Universidade de São Paulo (IME-USP), Brasil.

Schön, D. A. (2000). *Educando o Profissional Reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre. Artmed.

Shullman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvad Educational Review*, 57, 1-22.

Silva, J. P. (2016). *Formação Continuada do Professor de Matemática: reconhecimento de indícios de prática reflexiva em um estudo de caso de processo de formação realizado por meio de projetos*. (Dissertação de Mestrado) Universidade de São Paulo (IME-USP), Brasil.

Zeichner, K. (2010). Repensando as conexões entre a formação na universidade e as experiências de campo na formação de professores em faculdades e universidades. *Educação*. Santa Maria, 35(3), 479-504.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Formação de profesores de Matemática: percepção de estudantes sobre pesquisa

Maria Elizabete de Souza Couto
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
melizabetesc@gmail.com
Zulma Elizabete de Freitas Madruga
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
betefreitas.m@gmail.com

Resumo

Este artigo objetiva apresentar e analisar percepções de estudantes de graduação em Matemática (Licenciatura) em relação à pesquisa. Trata-se de uma investigação qualitativa. Os participantes, alunos de uma universidade pública do sul da Bahia, responderam a pergunta "O que é pesquisa?", no início da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), quando se depararam pela primeira vez com a disciplina de Metodologia da pesquisa. Como método de análise de dados, utilizou-se Análise Textual Discursiva (ATD). Os resultados indicam que os alunos já apresentam percepções sobre pesquisa, como se desenvolve, os elementos que constituem um projeto de pesquisa e a necessidade de estudos teóricos para aprofundar e avançar nos estudos. E parecem entender que por meio da pesquisa é possível captar e apreender uma nova compreensão sobre a realidade estudada. Por fim, os alunos da licenciatura percebem a pesquisa como princípio formativo para ajudá-los a avançar nos seus conhecimentos.

Palabras clave: educação matemática, formação de professores, pesquisa, trabalho de conclusão de curso, percepção de estudantes.

Considerações Iniciais

Este trabalho tem como objetivo apresentar e analisar as percepções de estudantes de graduação em Matemática (Licenciatura) em relação à pesquisa, considerando que no final dos cursos de graduação os estudantes elaboram uma monografia chamada de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Em muitas universidades, há disciplinas que orientam para realização deste trabalho, introduzindo os estudantes no método científico e iniciando a formação do pesquisador.

Sendo assim, a indagação que norteou o trabalho foi: quais as percepções de um grupo de estudantes da disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) dos cursos de Matemática (Licenciatura) sobre pesquisa?

A discussão sobre pesquisa no início foi o norteador da organização da disciplina durante o semestre, para o professor e, principalmente, os alunos que estavam iniciando os estudos sobre o método científico e a pesquisa.

Pressupostos Teóricos

Conforme o relatório que aprovou as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação de professores para a Educação Básica (Brasil, 2001). Esse relatório indica ainda, ações para a integralização do curso que "devem ser desenvolvidas como atividades complementares à formação do matemático", com a finalidade de ampliar sua postura de estudioso e pesquisador, como a produção de monografia (Trabalho de Conclusão do Curso/TCC), e a participação em programas de iniciação científica. Na licenciatura, "o educador matemático deve ser capaz de tomar decisões, refletir sobre sua prática e ser criativo na ação pedagógica, reconhecendo a realidade em que se insere. Mais do que isto, ele deve avançar para uma visão de que a ação prática é geradora de conhecimentos" (Brasil, 2001, p. 6), bem como tem a oportunidade de participar de programas de iniciação científica e à docência (Programa de Iniciação à Docência/PIBID).

As Diretrizes não indicam a pesquisa na formação do professor de Matemática, mas valorizam a prática docente para o licenciado. Entretanto, pensar a pesquisa nos cursos de Matemática indica o desenvolvimento da formação acadêmica, considerando uma possibilidade para:

> a) Alargar os horizontes dos educandos, incentivando-os a ter um olhar mais analítico-crítico sobre a realidade social em que estão inseridos e da qual fazem parte.
> b) Construir questionamentos importantes sobre acontecimentos e objetos que possam induzir à realização de estudos científicos.
> c) Compreender que devemos fugir ao que nos é apresentado como dogmático (determinante de certezas), alienado (longe da realidade) e a-histórico, ao se elaborar suas metodologias de estudo.
> d) Relacionar o prazer em produzir cientificamente conhecimento com o prazer de se formar como profissional, unindo as competências advindas desses processos em movimentos importantes à mudança da sociedade como um todo (Barros & Lehfeld, 2010, p. 24).

Nos cursos de Licenciatura, as discussões sobre a produção do conhecimento, a formação de professores e a pesquisa começaram a ganhar corpo e fazer parte dos debates na academia, no contexto internacional, inicialmente com o inglês John Elliott e, na década de 1980, com Donald Schön, pesquisador americano, trazendo para o debate o papel e a função do pesquisador, considerando-o mais importante que o papel do professor, visto que está envolvido com a vida profissional, as relações entre pesquisa e prática, e também os currículos dos cursos de formação (Diniz-Pereira, 2000). No Brasil, essas discussões começaram a estar na pauta das universidades uma década depois.

Na pesquisa, a observação, análise e reflexão são elementos que indicam possibilidades para superar os limites colocados pelo modelo formativo da racionalidade técnica que, na formação e na pesquisa "nega o caráter ativo e histórico do sujeito, bem como as influências

recíprocas em relação ao seu meio sociocultural, não reconhecendo o que é mutável, observável, contraditório, ambíguo ou ambivalente" (Moraes & Valente, 2008, p. 23). Um indicativo de mudança na natureza da pesquisa que busca superar a abordagem quantitativa para a pesquisa qualitativa, bem como nos modelos formativos para a docência.

Nos anos de 1990, as discussões avançam e, nesse contexto, "a pesquisa na graduação passa a ter como finalidade ajudar a observar e a gerar questionamentos sobre a realidade que possa motivar a investigação científica para descrevê-la e compreendê-la" (Couto, 2017, p. 148-149). Como fruto dessas discussões e com a publicação, no Brasil, no início da década de 2000, das Diretrizes Curriculares para formação de professores, nos diversos cursos de graduação, a pesquisa começa a fazer parte dos cursos – Licenciatura -, além de valorizar a formação profissional enfatizando o caráter formativo e estratégico na produção de conhecimentos que podem ser "aprimorados e aproveitados pelos seus iniciantes em programas de pós-graduação, em nível de mestrado e doutorado, na área" (Barros & Lehfeld, 2010, p. 26).

Um momento de efervescência acadêmica, marcado pela incerteza e a construção de novos conhecimentos, visto que novos paradigmas começam a fazer parte das discussões e, entre avanços e desafios, a inserção da pesquisa ainda na graduação indica que este é um caminho promissor, embora dependa de muitas idas e vindas, como o movimento das ondas que se desdobram em ações, que se dobram e concretizam em processo de reflexão (Moraes, 2002), compreendendo que o

> [...] conhecimento produzido na pesquisa é fruto de processos que envolvem interpretação, e também criação, intuição, auto-organização e co-determinação por parte do sujeito pesquisador em sua relação com o objeto. E para comunicar o aprendizado ou o conhecido, o indivíduo usa a linguagem, as palavras e os diferentes discursos sobre o tema pesquisado (Moraes & Valente, 2008, p. 28).

Esse processo formativo nos cursos de graduação "que, anteriormente, era pensado apenas em uma visão macro, começa a delinear as microvisões e os microespaços, considerando, assim, as singularidades, particularidades e a diversidade" (Couto, 2017, p. 149).

Com as novas diretrizes e resoluções os microespaços começam a ser valorizados como temática de pesquisa e objeto de estudo. Na organização das licenciaturas, as orientações da Resolução Nº 2, de 1º de julho de 2015 (Brasil, 2015), nos artigos 5º, incisos II e III, 7º, incisos II e 8º, incisos XII estão indicando e valorizando a pesquisa como princípio formativo e pedagógico na formação do profissional do magistério e no aperfeiçoamento da prática educativa, bem como a viabilidade a programas de fomento à pesquisa sobre a Educação Básica, como exemplo, tem-se o PIBID. Tais situações permitem envolver-se em pesquisa, análise e discussão dos resultados de investigações de interesse da área educacional e específica, bem como recorrer a vários instrumentos e técnicas de pesquisa para construção de conhecimentos pedagógicos e científicos, objetivando a reflexão sobre a própria prática e a discussão e socialização de conhecimentos. Nesse sentido, a partir dos anos de 1990 a pesquisa começa a fazer parte da formação dos alunos, nos diversos cursos, nos programas de iniciação científica, docência e nos trabalhos de conclusão de curso (TCC). Um momento para ampliar o repertório de conhecimento, com levantamento de hipóteses, estudo aprofundado sobre a temática, refletir sobre o objeto de estudo à luz de uma teoria para encontrar respostas as suas indagações.

> A atividade de pesquisa é um fio que se entretece a todas as disciplinas trabalhadas no curso. É na pesquisa, na inserção cotidiana e nos diferentes espaços educativos, que surgem questões que alimentam a necessidade de saber mais, de melhor compreender o que está sendo observado/vivenciado, de construir novas formas de percepção da

> realidade e de encontrar indícios que façam dos dilemas desafios que podem ser enfrentados (Esteban & Zaccur, 2002, p. 22).

A pesquisa realizada tendo como objeto de estudo a prática pedagógica (Licenciatura) remete a um tipo de epistemologia, o que nos ajuda a aprender como uma pesquisa é desenvolvida segundo os princípios da abordagem qualitativa. Uma das oportunidades para a iniciação à pesquisa, para sistematização e ampliação do conhecimento e das habilidades adquiridas no curso, a articulação entre teoria e prática e entre o saber do aluno e a especificidade de sua formação (Bello, 2009). Assim, a pesquisa "exige que o mundo seja examinado com a ideia que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora de nosso objeto de estudo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49).

Tais princípios retratam e revelam a complexa rede de interações que constitui a experiência diária, mostram como se estrutura a produção de conhecimento em sala de aula e a inter-relação entre as dimensões cultural, institucional e instrucional (André, 1995) e formativa, as quais nos permite observar "os locais em que naturalmente se verificam os fenômenos nos quais está interessado, incidindo os dados recolhidos nos comportamentos naturais das pessoas: conversar, visitar, observar, comer, etc." (Guba, 1978; Wolf, 1978b, apud Bogdan & Biklen, 1994, p. 17). São ações que, numa pesquisa, oferecem pistas para aprender a estabelecer a relação entre teoria e prática, enxergando, no campo da pesquisa e com o material ali produzido, os conceitos teóricos estudados sobre o objeto de estudo e, algumas vezes, fazendo as análises a partir do local e sua condição, além de estabelecer a relação de confiança com os participantes e o local.

Pressupostos Metodológicos

Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e para a coleta de dados foi utilizado como instrumento narrativa/depoimento de 11 alunos de graduação de uma universidade pública do sul da Bahia, que cursavam Licenciatura em Matemática.

Os estudantes colaboradores da pesquisa estavam cursando no período de coleta de dados, a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso I (TCC I). Conforme o projeto acadêmico do curso há duas disciplinas de TCC - I e II. No TCC I o estudante deve elaborar um projeto de pesquisa junto com o orientador(a) e com a colaboração do professor da disciplina. No TCC II, o estudante desenvolve a pesquisa, elabora o relatório e apresenta o trabalho final, também amparado pelo orientador(a) e pelo(a) profesor(a) da disciplina.

A coleta de dados aconteceu na primeira aula da disciplina do segundo semestre de 2017, sob a forma de depoimentos/narrativas escritas, momento em que os estudantes explicitaram o que pensam sobre pesquisa, de uma forma bem livre e sem qualquer comentário anterior sobre o tema.

Para processamento dos dados, foi utilizada a Análise Textual Discursiva (ATD), conforme Moraes e Galiazzi (2013). Esse tipo de análise,

> [...] pode ser compreendida como um processo auto-organizado de construção de compreensão em que novos entendimentos emergem de uma sequência recursiva de três componentes: desconstrução dos textos do *corpus*, a *unitarização*; estabelecimento de relações entre os elementos unitários, a categorização; o captar do novo emergente em que a nova compreensão é comunicada e validada (Moraes, 2003, p. 192):

Na *descontrução* e *unitarização* houve uma fragmentação do texto coletado – depoimentos dos estudantes – com vistas a responder o questionamento inicial. Nesta etapa emergiram as unidades de significado que são definidas em função de um sentido pertinente ao propósito da pesquisa. Neste processo faz-se necessário que o pesquisador seja fiel em relação ao que consta no corpus da pesquisa.

A *categorização* é a etapa resultante do processo de organização e agrupamento das unidades de significado. Estas categorias podem ser classificadas de duas maneiras: *a priori*, quando surgem de uma forma objetiva e dedutiva no início da análise; e *emergentes*, aparecendo de uma forma indutiva e subjetiva no processo de análise dos dados, (Moraes & Galiazzi, 2013). Para categorizar, o pesquisador necessita de organização, atenção e potencial criativo.

O *metatexto* é a escrita que explicita a compreensão do pesquisador sobre o fenômeno investigado com base nas categorias elencadas no processo anterior. Nesta etapa, a escrita descreve o fenômeno e a interpretação do pesquisador, emergindo o novo, (Moraes & Galiazzi, 2013).

Nesta pesquisa foi adotado como *corpus* os depoimentos dos 11 estudantes da disciplina de TCC I que responderam a questão sobre 'o que é pesquisa'. E para efetivar a análise, foram consideradas as categorias que emergiram do material produzido: os depoimentos dos estudantes.

Resultados e Discussão

Foram analisadas 11 narrativas de estudantes de graduação: Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do sul da Bahia. Eles escreveram o que pensavam sobre pesquisa de uma forma ampla, no início da disciplina, momento em que ainda não tinham participado de discussões sobre a pesquisa, desenvolvimento e resultados na formação profissional.

Conforme análise dos depoimentos coletados emergiram duas categorias: *concepções de pesquisa e o fazer pesquisa* e *elementos que perpassam uma pesquisa*, descritos a seguir.

Concepções de pesquisa e o fazer pesquisa

Organizar o planejamento da disciplina TCC I após solicitar que escrevessem foi o ponto de partida, visto que assim, ficou evidente as noções e percepções dos alunos sobre o que é pesquisa, principalmente a pesquisa no curso de graduação. Eles tiveram uma hora para escrever. Em seguida, foi socializado e começaram as discussões. Para os alunos, pesquisa é:

> [...] fazer uma investigação, um estudo sobre um determinado assunto (Al. 1).
> [...] buscar informação acerca de um tema (Al. 2).
> [...] uma busca visando a alcançar algum objetivo, seja ele uma resposta específica, coleta de dados etc. (Al.3).
> [...] um estudo mais direcionado, coordenado e dirigido, onde buscamos informações relevantes acerca de um tema (Al.4).
> [...] um projeto onde iremos escolher um tema e trabalhar [...] ou seja, buscar fontes de estudo para aprofundar nesse tema (Al.5).
> [...] é uma busca que inclui uma análise de fatores (Al. 6).
> [...] a maneira de buscar conhecimento e aprimorá-lo por meio de leitura, vivência (Al. 7).
> [...] uma busca por informações, dados, fatos etc. sobre algo que se quer conhecer ou ter um conhecimento mais profundo, ou uma visão mais ampla a depender do seu objetivo (Al. 8).
> [...] surge a partir de um problema, uma dificuldade; seria a busca para uma solução (Al. 9).

Os alunos (Al.1 e Al.4) já participaram de pesquisa durante o curso (iniciação científica) e trouxeram como primeiro ponto para a discussão o estudo sobre o tema. Para os demais, essa seria a primeira oportunidade para a iniciação à pesquisa. Todavia, parecem perceber que este é

um momento para sistematização e ampliação dos conhecimentos e habilidades construídas nas disciplinas, a articulação entre teoria e prática, entre o saber do aluno e a especificidade de sua formação, bem construir conhecimento para além daqueles já estudados no curso (Esteban & Zaccur, 2002; Bello, 2009).

Fiorentini e Lorenzato (2009) destacam que a elaboração de um projeto de pesquisa, o que ocorre na disciplina de TCC I na universidade onde foi realizada a pesquisa, serve para mapear um camino a ser seguido durante o percurso investigativo, auxiliando ao estudante no esclarecimento dos rumos do trabalho.

Quando Al.8 sugere que a pesquisa dará uma visão ampla, isso indica a possibilidade de avançar os horizontes dos educandos, incentivando-os a ter um olhar mais analítico/reflexivo /crítico sobre a realidade social (Barros & Lehfeld, 2010).

Para o desenvolvimento da pesquisa indicaram que poderia ser realizada, em primeiro lugar, com estudos para aprofundamento do tema.

> Farei minha pesquisa através de leitura para entender a história por trás do meu objeto, como foi criado, o motivo pelo qual foi criado e porque ainda hoje é tão usado. Minha pesquisa será um resulto do meu entendimento do meu objeto. E, além disso, estudando, escrevendo, passando para o papel o que eu estou entendendo e como estou vendo o meu conteúdo (Al. 7).

> Meu projeto é um relato de experiência, onde pretendo explicitar a importância do conhecimento matemático para os professores dos anos iniciais. Os cursos de pedagogia possuem maior foco na parte de alfabetização e não possui muitas disciplinas relacionadas ao ensino da matemática. Escolhi como foco e objeto da minha pesquisa, uma professora dos anos iniciais que possuía grande resistência com a disciplina de matemática e que participou de uma formação continuada com esse foco (matemática). Espero conseguir mostrar a importância dessas formações e como elas realmente desencadeiam uma mudança. Além de buscar autores sobre o assunto (Al.9).

Al.7 indica que seu trabalho será realizado com leituras, provavelmente um trabalho bibliográfico ou uma revisão de literatura. Um tipo pesquisa também válido e criterioso, considerando sempre o seu objeto de estudo. Já Al.9 explicita que vai fazer um relato de experiência e pensa nas contribuições que pretende oferecer com sua pesquisa para os professores dos anos iniciais (pedagogo) que lecionam Matemática. Eles têm ideias preliminares em relação ao tipo de pesquisa que querem realizar. O delineamento do projeto na disciplina e com o(a) orientador(a) indicará a natureza da pesquisa e como fazer a coleta dos dados.

As duas pesquisas indicam a produção do conhecimento científico (Barros & Lehfeld, 2010), tendo como meio para a produção de conhecimento por caminhos diferentes. São possibilidades para revisitar as disciplinas estudadas no curso (Esteban & Zaccur, 2002) e a articulação teoria e prática (Bello, 2009), gerando novos conhecimentos sobre a realidade para que possam descrevê-la e compreendê-la (Couto, 2017). Essas pesquisas apresentam os microespaços (Couto, 2017) e o movimento não linear na construção do conhecimento (Moraes, 2002).

Elementos que perpassam uma pesquisa

Com ideias preliminares, os alunos foram trazendo à discussão os elementos que compõem uma pesquisa, principalmente no momento em que vão escrever o projeto de pesquisa (esse é um passo da disciplina TCC). Falaram do problema (Al. 9), do tema para estudo (Al. 2, Al. 4, Al.5), o aprofundamento nos estudos (Al.1, Al.4, Al.7, Al.8), para solucionar um problema (Al.9), o objetivo (Al.3) e as análises (Al.6). Nesse primeiro momento demonstraram um

conhecimento que ainda precisava ser organizado. Um conhecimento que, certamente, irá ser aprofundado pela pesquisa e as demais disciplinas no curso (Esteban & Zaccur, 2002; Bello, 2009).

Para escolher o tema, definir problema, escrever objetivos é preciso fazer escolhas, que na discussão com o(a) orientador(a) (Al.1) ajudará a definir e construir questionamentos sobre o objeto para avançar nos estudos científicos (Barros & Lehfeld, 2010). E para o desenvolvimento da pesquisa irão recorrer a fontes diversas (Quadro 1).

Quadro 1 - A pesquisa será realizada com [...]

Alunos	**Fontes que serão estudadas na pesquisa**
Al.1	Artigos
Al.2	Internet, livros, pesquisas similares, documentos, arquivos etc.
Al.3	-
Al.4	Livros e artigos
Al.5	Procurar fontes
Al.6	Busca de materiais
Al.7	Leitura
Al.8	Livros. Teses e dissertações (pesquisa teórica)
Al.9	Relato de experiência.
Al.10	Livros e artigos
Al.11	Leitura

Fonte: Elaborado com material produzido na pesquisa (2018).

Após a escolha da temática da pesquisa, em conjunto com o(a) orientador(a), já se podem seleccionar alguns textos que trarão maior esclarecimento, com vistas à delimitação do problema do estudo ou à formulação de questão de investigação (Fiorentini & Lorenzato, 2009).

Entre os 11 alunos, dois já expressaram o tipo de pesquisa que iriam realizar: pesquisa teórica (Al.8) e relato de experiência (Al.9). Os demais indicaram o material (fontes) que será utilizado o que sugere que realizarão, também, uma pesquisa bibliográfica ou revisão de literatura. Tais depoimentos mostram que já possuem certo conhecimento sobre a pesquisa e seu encaminhamento, e que por meio da pesquisa irão construir conhecimento para ampliar o repertório formativo. Porém, não retrataram, ainda, como será coletado o material da pesquisa. Uma tarefa que realmente precisa ser estudada na disciplina para que possam construir os instrumentos considerando o tipo de pesquisa que será desenvolvida.

Considerações Finais

Este artigo teve como objetivo apresentar e analisar as percepções de estudantes de graduação em Matemática (Licenciatura) em relação à pesquisa. Por meio dos dados, foi possível perceber que os alunos, do curso Licenciatura em Matemática, no início da disciplina TCC, já apresentam percepções sobre o que é pesquisa e como se desenvolve, os elementos que constituem um projeto de pesquisa e a necessidade de estudos teóricos para aprofundar e avançar nos estudos (Esteban & Zaccur, 2002). Embora de maneira sucinta, parecem já compreender que por meio da pesquisa é possível captar e apreender uma nova compreensão sobre a realidade estudada (Moraes & Galiazzi, 2013).

Por fim, os alunos da Licenciatura percebem a pesquisa como princípio formativo (Brasil, 2015) para ajudá-los a avançar nos seus conhecimentos.

Referências

André. M. E. D. A. (1995). Avanços no conhecimento etnográfico na escola. In: FAZENDA, I. (Org.). A pesquisa em educação e as transformações do *conhecimento*. Campinas, São Paulo: Papirus.

Barros, A. J. P., & Lehfeld, N. A. S. (2010). *Projeto de pesquisa:* propostas metodológicas. 20. ed, Rio de Janeiro: Vozes.

Bello, S. E. L. (2009). Trabalhos de conclusão de curso nas licenciaturas: a possibilidade de uma experiência na constituição docente. In: *Anais*... ENDIPE, Porto Alegre, PUC/RS.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto, Portugal: Editora Porto.

Brasil. (2001). *Parecer CNE/CES 1.302/2001*. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática.

_____. (2015). *Resolução CNE/CP nº 2, de 1º de julho de 2015* - Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. MEC.

Couto, M. E. S. (2017). A pesquisa educacional: a construção da professora como pesquisadora. In: Mororó, L. P., Couto, M. E. S., & Assis, R. A. M. *Notas teórico-metodológicas de pesquisas em educação:* concepções e trajetórias. Ilhéus: Editus.

Diniz-Pereira, J. E. (2000). *Formação de professores.* Pesquisas, representações e poder. Belo Horizonte: Autêntica.

Esteban, M. T., & Zaccur, E. (2002). A pesquisa como eixo de formação docente. In: Esteban, M. T., & Zaccur, E. *Professora-pesquisadora:* uma práxis em construção. Rio de Janeiro, DP&A.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2009). *Investigação em educação matemática*: percursos teóricos e metodológicos. 3ed. Campinas: Autores Associados.

Moraes, R. (2003). Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela Análise Textual Discursiva. *Ciência & Educação*. v. 9, n. 2, p. 191-211.

Moraes, M. C., & Valente, J. A. (2008). *Como pesquisar em educação a partir da complexidade e da transdisciplinaridade?* São Paulo: Paulus.

Moraes, M. C. (2002). *Educação a Distância:* fundamentos e práticas. Campinas: Unicamp/Nied.

Moraes, R., & Galiazzi, M. C. (2013). *Análise Textual Discursiva.* 2ed. Ijuí: Editora Unijuí.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Experiências avaliativas na formação inicial de professores: o contexto das Práticas de Ensino de Matemática

Vivilí Maria Silva **Gomes**
Universidade Federal do ABC (UFABC)
Brasil
vivili.gomes@ufabc.edu.br

Este trabalho tem como objetivo apresentar e discutir as experiências avaliativas ocorridas no âmbito da formação inicial de professores. O *lócus* de realização da pesquisa foi o Curso de Licenciatura em Matemática da UFABC no contexto das Práticas de Ensino de Matemática (PEM) como componente curricular, abrangendo o período de 2013 a 2018. Trata-se de um recorte de pesquisa na, sobre e para a ação pedagógica, onde são descritos seus encaminhamentos e resultados e apontadas possibilidades para a inovação da avaliação em processo. A avaliação, como parte do ato pedagógico, nele se imbrica e permeia as ações de sala de aula, perpassando a relação professor-aluno-conhecimento (Luckesi, 2011). Por se tratar de um componente curricular de caráter teórico-prático, o processo avaliativo além de contínuo é formativo, e com ênfase nos conteúdos procedimentais e atitudinais (Zabala, 2000).

As PEM incluem-se nos componentes curriculares didático-pedagógicos específicos do Curso e a eles estão vinculados os módulos de Estágio Supervisionado, constituindo-se num conjunto de cinco componentes distribuídos, sequencialmente, ao longo da matriz curricular. A pesquisa se realizou no âmbito das turmas nas quais as PEM foram ministradas, sendo duas turmas para o Ensino Fundamental e cinco turmas para o Ensino Médio. É nesse espaço e tempo que a docente universitária se lança a novos desafios metodológicos juntamente com os licenciandos, a experimentar um pouco das incertezas e da complexidade do "ser professor".

A abordagem metodológica é da pesquisa-ação que se delineia nos estudos de Thiollent e Colette (2014), na visão de autonomia e emancipação dos professores de Contreras (2012) e Freire (2011), exemplificados nos estudos de Ponte e Serrazina (2004) e Pimenta (2005). Possui, portanto, caráter qualitativo, de cunho hermenêutico (Denzin apud Lüdke & André, 2013).

As ações foram guiadas em direção aos objetivos didáticos (individuais, em grupos ou coletivos) e se resumem no que segue: A. Avaliação contínua do processo individual por meio dos registros e narrativas contidos em portfólios, construídos individualmente e compartilhados com o coletivo. B. Elaboração de atividades em grupos, apreciadas e avaliadas continuamente pelos participantes (avaliação pelos pares) por meio de exposição ou dramatização (simulação) e discussão em rodas de conversa nos diversos encontros e entre encontros em rede social. C. Elaboração de Projeto de Trabalho ou Sequência Didática pelo coletivo, a depender da turma, com discussão ao longo dos encontros e avaliação contínua pelos participantes. D. Regência de

aulas para alunos da rede pública de ensino em colaboração com suas professoras.

Para a organização das ações e seu acompanhamento, nos valemos do que chamamos de movimentos diagnósticos (MD), prospectivos (MP) e retrospectivos (MR), realizados ao longo dos encontros, de forma contínua, nos quais o processo avaliativo se apresenta imbricado. O processo é visualizado no diagrama da Figura 1.

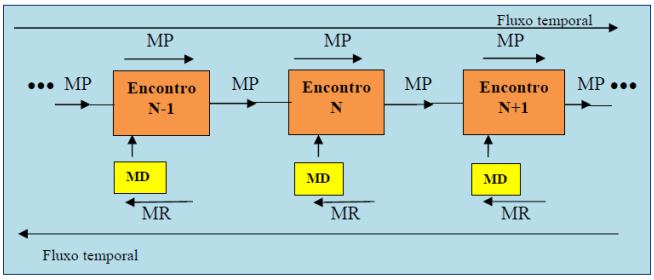


Figura 1. Sequência de encontros e os três movimentos (MD, MP e MR) feitos no processo.

A experiência com esses movimentos contínuos, como processo avaliativo e de correção de rotas, é o foco deste trabalho. Como exemplo de ação retrospectiva (MR), trazemos a elaboração dos portfólios. Preparados no decorrer das ações, os portfólios exigiram um olhar, *à posteriori*, para cada ação desenvolvida, incluindo uma avaliação do processo como um todo, com margem para a consideração de elementos artísticos nas expressões subjetivas neles contidas. Em seus portfólios, os estudantes apresentaram suas dúvidas e inquietações com muita fluidez, dado o ambiente de espontaneidade construído na convivência. Trouxeram suas impressões e expressões sobre o processo de construção do conhecimento, compartilhando suas angústias e expectativas. Os resultados indicam um modelo para um trabalho coletivo e colaborativo a ser feito pelos futuros professores em suas aulas, que integre formação e pesquisa (Cortesão & Stoer, 1997).

Referências Bibliográficas

Contreras, J. (2012) *A autonomia de professores*. São Paulo, Brasil: Cortez.

Cortesão, L., & Stoer, S. R. (1997) Investigação-ação e a produção de conhecimento no âmbito de uma formação de professores para a educação inter/multicultural. *Educação, Sociedade & Culturas*, 7, 7-28.

Freire, P. (2011). *Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática docente* (43ª ed). Rio de Janeiro, Brasil: Terra e Paz.

Luckesi, C. C. (2011) *Avaliação da aprendizagem: Componente do ato pedagógico*. São Paulo, Brasil: Cortez.

Lüdke, M. & André, M.E.D.A. (2013) *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas* (2ª ed). São Paulo, Brasil: EPU.

Pimenta, S. G. (2005) Pesquisa-ação crítico-colaborativa: construindo seu significado a partir de experiências com a formação docente. *Educação e Pesquisa*, 31 (3), 521-539.

Ponte, J.P., & Serrazina, L. (2004) Professores e formadores investigam a sua própria prática: O papel da colaboração. *Zetetiké*, 11 (20), 9-55.

Thiollent, M.J.M., & Colette, M. M. (2014) Pesquisa-ação, formação de professores e diversidade. *Acta Scientiarum. Human and Social Sciences*, 36 (2), 207-216.

Zabala, A. (2000) *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre, Brasil: Artmed.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Demanda Cognitiva e a Competência Observar com Sentido: análise de atividades com a temática Funções Exponenciais

Marcos Vinicius Fernandes **Calazans**
Universidade Federal do Sul da Bahia
Brasil
marcos.fernandes@ufsb.edu.br
Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
claudiag@ulbra.br
Salvador **Llinares** Ciscar
Universidad de Alicante
Espanha
sllinares@ua.es

Resumo

A formação de professores é um grande desafio a ser enfrentado por um país que está compromissado com o seu desenvolvimento e a garantia de acesso à cidadania. A qualidade dessa formação está presente na aquisição de competências docentes que preparem os estudantes de licenciatura para a sala de aula. Uma dessas competências é a de Observar com Sentido. Esta competência exige do licenciando a capacidade de compreensão do contexto, a partir das manifestações dos alunos e com a tomada de decisões. Para a ação docente específica é necessário verificar a demanda cognitiva das atividades prescritas, pois cada tipo evoca níveis de aplicação do conhecimento. Para ilustrar os níveis de demanda cognitiva, escolheu-se um livro didático de uma escola pública brasileira, no capítulo de Funções Exponenciais, temática investigada na pesquisa. Identifica-se os quatro níveis na obra escolhida, favorecendo a escolha didático-pedagógica por parte do professor de Matemática.

Palavras chave: formação de professores, observar com sentido, demanda cognitiva

Introdução

Percebemos que o trabalho docente vem mudando nos últimos anos, seja por novas competências exigidas ou pelo desafio das novas formas de comunicação e informação que cada vez mais estão dentro de sala de aula. Questiona-se a qualidade do professor, porém é esse

profissional que reúne as melhores condições para encarar o processo de ensinar e desenvolver a aprendizagem de seus estudantes.

Galvão, Ponte e Jonis (2018) afirmam que o profissional docente se depara com quatro desafios elementares, listados a seguir: novas formas de aprendizagem; elevada diversidade de alunos; evolução tecnológica e o desenvolvimento das competências exigidas para os alunos que vivenciam o século atual. Os mesmos autores apontam que ser professor exige mais do atual profissional, pois se espera que o mesmo cumpra algumas expectativas, como: refletir sobre a sua prática; investir no próprio desenvolvimento profissional, ser autônomo, responsável e criativo; investigar e avaliar o próprio desempenho e; trabalhar em equipe.

Alarcão, Freitas, Ponte e Tavares (1997) também se envolveram em traçar o perfil das necessidades docentes, dos saberes e competências profissionais. Os autores identificam dois fortes apelos de preparação do professor: um sólido conhecimento científico de base e, as competências de cunho educacional. Não se espera que os profissionais de educação adquiram tais características sozinhos. São os programas de formação docente que são os responsáveis, em seus desenhos e propostas, em oferecer condições para que os futuros professores se preparem, adequando suas ações aos novos desafios da prática docente. Na construção das competências necessárias à ação docente, destacamos uma competência importante na formação docente, a de Observar com Sentido.

Este artigo é um recorte de tese de doutoramento. O objetivo da tese é investigar a integração das demandas cognitivas nos planejamentos de ensino realizados por estudantes a professor de Matemática como elemento que contribua no desenvolvimento da competência docente Observar com Sentido, no tocante à temática Funções Exponenciais.

Competência Docente: Observar com Sentido

Uma vez atuante como professor é importante que o profissional se prepare o máximo possível para exercer bem sua prática. Vários autores pesquisaram o conhecimento profissional de professores e destacaremos os achados de Shulman (1987). Para esse pesquisador, o professor precisa dominar o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (Pedagogical Content Knowledge – PCK), que lhe permita a escolha das melhores estratégias para ensinar temas específicos e a estudantes com certas características, além de dotar a ele uma competência exclusiva do sujeito professor. É uma exigência de domínio de duas grandes esferas: o conhecimento pedagógico e o

conhecimento de conteúdo, com excelente base e segurança, para em seguida mesclá-lo buscando transformar a ação do professor uma interseção constante de tais esferas.

Ainda, durante a formação, é possível atribuir uma atividade intencional capaz de fazer o estudante a professor adquirir competências que ele levará para a sua vida profissional. Aqui apontamos a competência de Observar com Sentido. Para Hiebert (2007), Observar com Sentido está ligada a capacidade do professor de Matemática em adotar decisões e, em seguida, ações a partir do que o estudante parece estar aprendendo. Para Fernández, Valls e Llinares (2011), o Observar com Sentido tem sua importância por desenvolver a capacidade de ensinar Matemática, pela compreensão via estudante do que ele está aprendendo. Para Callejo, Valls e Llinares (2010), a qualidade de ensino está fortemente ligada ao estudante a professor dominar tal competência, daí a importância de os cursos de formação focarem no seu desenvolvimento.

Abordando mais especificamente o termo Observar com Sentido, trazemos as definições a partir dos estudos de Van Es e Sherin (2002). Para esses autores, tal competência é determinada por três habilidades: a capacidade de identificar os fatores importantes no processo de ensinar, fazer reflexões sobre as interações que surgem em sala de aula a partir do conhecimento gerado do contexto e relacionar todos os eventos que acontecem em sala de aula com outras ideias mais generalistas do processo que se é envolvido no ensino-aprendizagem da Matemática. Jacobs, Lamb e Philipp (2010) são mais sucintos e afirmam que as três habilidades inter-relacionadas são: identificar as situações relevantes e importantes, realizar uma observação tomando como partida os referenciais teóricos postos e tomar decisão sobre a sua ação. Então, o Observar com Sentido é, sobretudo, a exigência de dar atenção às estratégias usadas pelos estudantes, em suas interpretações dos conhecimentos matemáticos dos estudantes para poder decidir como agir baseado no entendimento matemático do aluno (NICKERSON, LAMB & LAROCHELLE, 2017). Acreditamos que a competência Observar com Sentido cumpre com as descrições necessárias para se fazer o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK).

Demanda Cognitiva – Análise e Classificação de Atividades

Penalva e Llinares (2011) afirmam a necessidade do professor, ao planejar suas aulas, terem em mente os objetivos a serem atingidos e como alcançar usando ferramentas, como por exemplo, as tarefas matemáticas. Para esses autores, tarefas matemáticas são as propostas feitas pelos professores no processo de aprender matemática. Ainda, os autores apontam que atividade é um

conjunto de tarefas a serem desenvolvidas pelos estudantes e que procedimentos são as formas de realização das tarefas.

Ainda nas pesquisas de Penalva e Llinares (2011), é possível traçar um vínculo entre aprendizagem e gestão das tarefas desde que elas, as tarefas, façam o estudante percorrer um caminho claro no sentido do entendimento do conteúdo matemático. Isso faz com que o professor tenha a compreensão que somente as tarefas não são suficientes para a aprendizagem, mas que se constituem como fatores que podem contribuir para o alcance dos objetivos. Para isso os autores reforçam que as tarefas devem fazer que seus estudantes pensem sobre o fazer matemática, superando apenas a recordação e os procedimentos soltos e valorizando o conhecimento prévio trazidos por eles.

Na atuação profissional, os professores deverão selecionar as tarefas que atendam os objetivos didáticos-pedagógicos traçados, adequando, para cada caso, o nível de exigência em cada situação. O ajustamento será feito a partir do nível cognitivo exigido aos estudantes. Llinares e Penalva (2001) trazem o termo Demanda Cognitiva informando que se trata da classe e nível de pensamento que se é exigido dos estudantes para a resolução da tarefa, apontando o que se alcança e o que se aprende em cada nível.

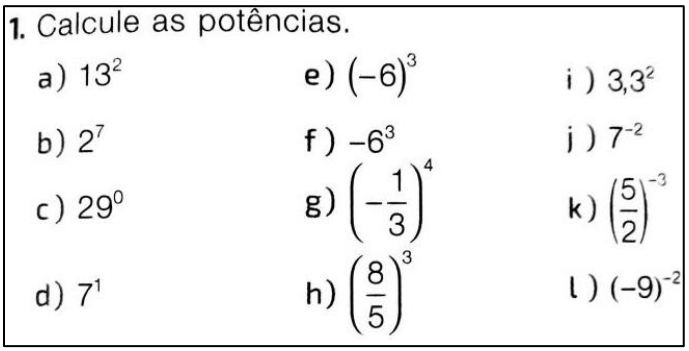
Smith e Stein (1998) classificam em quatro níveis de Demanda Cognitiva: tarefas que exigem a memorização (Nível 1); tarefas que usam procedimentos sem conexão (Nível 2); tarefas que utilizam procedimentos com conexão (Nível 3) e tarefas que exigem o "fazer matemática" (Nível 4).

Para a análise de atividades sob a óptica da Demanda Cognitiva, foi escolhido o livro didático Contato Matemática volume 1, da Editora FTD, de autoria de Joamir Souza e Jacqueline Garcia (2016). O referido livro é uma obra pertencente ao Programa Nacional de Livro Didático (PNLD) em vigor no triênio 2018-2020, distribuindo materiais didáticos dos componentes curriculares nas escolas públicas de todo o Brasil. A obra foi escolhida por ser utilizada pelos estudantes do Complexo Integrado de Educação de Porto Seguro (CIEPS), local de estágio supervisionado dos estudantes da Licenciatura Interdisciplinar em Matemática, Computação e suas Tecnologias da Universidade Federal do Sul da Bahia (UFSB).

Apresenta-se a seguir os níveis de demanda cognitiva, com exemplos retirados do referido livro didático, no capítulo de Funções Exponenciais.

De acordo com Smith e Stein (1998) as características de cada nível são:

Nível 1: tarefas que envolvem a reprodução de fórmulas e regras, com muita memorização, sem reflexões sobre as definições que estão sendo vistas.


1. Calcule as potências.

a) 13^2 e) $(-6)^3$ i) $3{,}3^2$

b) 2^7 f) -6^3 j) 7^{-2}

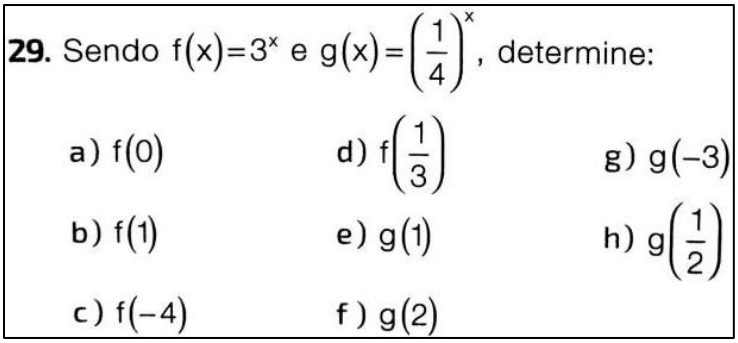
c) 29^0 g) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ k) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$

d) 7^1 h) $\left(\frac{8}{5}\right)^3$ l) $(-9)^{-2}$

Figura 1: Atividade 1
Fonte: Souza e Garcia (2016, p.139)

Observa-se que a atividade apresentada é de nível 1 pois requer apenas a aplicação de uma regra memorizada, sem fazer reforços ao conceito a ser apresentado.

Nível 2: exigem recurso por algoritmo, focada na obtenção das respostas ainda não fazem conexão com os conceitos matemáticos.


29. Sendo $f(x)=3^x$ e $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, determine:

a) $f(0)$ d) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ g) $g(-3)$

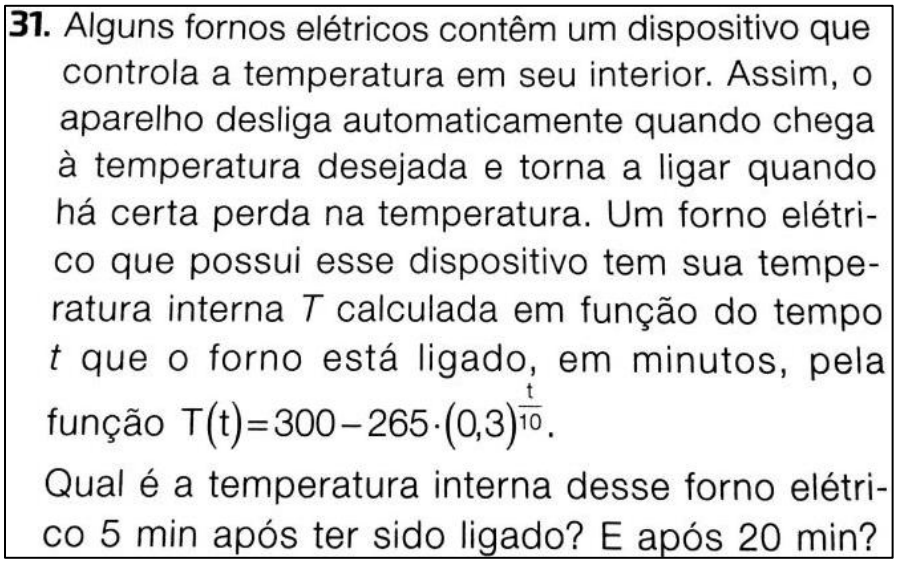
b) $f(1)$ e) $g(1)$ h) $g\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(-4)$ f) $g(2)$

Figura 2: Atividade 29
Fonte: Souza e Garcia (2016, p.144)

Classificou-se a atividade acima como nível 2 de demanda cognitiva por ainda dar ênfase na resposta, não fazendo conexão com o conhecimento específico da função exponencial, portanto uma tarefa que utiliza procedimento sem conexão.

Nível 3: intimamente relacionados com os conceitos ou procedimentos buscando a compreensão destes, apresentando claras conexões com as ideias ao subvalorizar o algoritmo pois o êxito se dará pela exigência de algum grau de esforço cognitivo.



31. Alguns fornos elétricos contêm um dispositivo que controla a temperatura em seu interior. Assim, o aparelho desliga automaticamente quando chega à temperatura desejada e torna a ligar quando há certa perda na temperatura. Um forno elétrico que possui esse dispositivo tem sua temperatura interna *T* calculada em função do tempo *t* que o forno está ligado, em minutos, pela função $T(t)=300-265\cdot(0{,}3)^{\frac{t}{10}}$.

Qual é a temperatura interna desse forno elétrico 5 min após ter sido ligado? E após 20 min?

Figura 3: Atividade 31
Fonte: Souza e Garcia (2016, p.144)

Para a questão escolhida como de nível 3, observa-se que já existe uma relação com o conceito matemático da função exponencial, exigindo uma melhor interpretação por parte do estudante, mesmo que exista um indicativo do conhecimento a ser aplicado. É uma tarefa que pedirá um procedimento com conexão.

Nível 4: Exigem um alto esforço cognitivo pois executam a tarefa por conhecerem e apresentarem a compreensão conceitual da matemática, verificado pelo pensamento complexo e muito distante do algorítmico em questões que não apresentam um indicativo de qual recurso deverá ser usado nem uma instrução prévia.

A questão abaixo é referente ao nível 4 de demanda cognitiva pois exige o "fazer matemática", uma vez que é necessário um aprofundado nível cognitivo a partir de uma questão que não dá indicativos de resolução. O estudante deverá resgatar seus conhecimentos matemáticos e testá-los em um contexto de maior complexidade.

35. Há uma lenda que credita a invenção do xadrez a um brâmane de uma corte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de trigo da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. Ou seja, a quantidade de grãos para cada casa do tabuleiro correspondia ao dobro da quantidade da casa imediatamente anterior.



artemisphoto/ Shutterstock.com

O tabuleiro de xadrez possui casas alternadamente claras e escuras, sendo 32 de cada. As peças utilizadas para jogar também são claras e escuras, sendo 16 peças para cada jogador. O jogo de xadrez estimula o raciocínio lógico, entre outros benefícios.

a) De acordo com a lenda, qual é a quantidade de grãos de trigo correspondente à casa 6 do tabuleiro? E à casa 10?

b) Escreva uma função *f* que expresse a quantidade de grãos de trigo em função do número *x* da casa do tabuleiro.

c) Sabendo que o tabuleiro de xadrez possui 64 casas, qual o conjunto domínio da função *f*?

d) Escreva, na forma de potência, quantos grãos de trigo devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez.

Figura 4: Atividade 35
Fonte: Souza e Garcia (2016, p.145)

Considerações Finais

O desafio posto da docência com qualidade exige uma preparação dos futuros professores para apresentar um arcabouço teórico e habilidades práticas. Uma forma de conduzir os estudantes a aprender a Matemática é pela prescrição de atividades e tarefas, desde que seja intencional e bem escolhida a partir de cada objetivo traçado, considerando o nível cognitivo a ser desempenhado.

Assim, chega-se ao conceito de demanda cognitiva que descreve o nível de exigência dada em quatro formas distintas. Caberá ao professor identificar o nível e apresentar ao estudante dado o que se queira atingir. A partir disso, é proposto então que o futuro professor de matemática conheça os níveis cognitivos inseridos no desenho de formação profissional e consiga planejar suas aulas com a escolha de atividades com diferentes níveis de demanda cognitiva.

A escolha de tarefas, quando inseridas em um contexto de percepção das manifestações de raciocínio matemático dos estudantes, está caracterizado pela aquisição da competência docente Observar com Sentido, competência essa que bem caracteriza o professor de Matemática (PENALVA & LLINARES, 2011).

O presente artigo aponta a existência de atividades que se encaixam nos níveis cognitivos, em um livro didático, fator este que contribuirá na atividade docente com qualidade.

Referências e Bibliografia

Alarcão, I., Freitas, C. V., Ponte, J. P., Alarcão, J., & Tavares, M. J. F. (1997). A formação de professores no Portugal de hoje (Documento de um grupo de trabalho do CRUP - Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas).

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57, 1-22.

Galvão, C., Ponte, J. P., Jonis, M. (2018) Os professores e sua Formação inicial. Práticas de Formação Inicial de Professores: Participantes e Dinâmicas. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Callejo, M.L; Valls, J; Llinares, S.(2010) Aprender a mirar con sentido situaciones de enseñanza de las matemáticas. In: M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (eds.), Investigación en Educación Matemática. Comunicación a los grupos de investigación. Seminario conocimiento profesional del profesor. XIV simposio de la SEIEM. Lérida.

Fernandéz, C; Llinares, S; Valls, J. (2011) "Mirando con sentido" el pensamiento Matemático de los estudiantes sobre la razón y proporción. Acta Scientiae, 13(1), 9-30.

Hiebert, J; Morris, A K; Berk, D; Jansen, A. (2007) Preparing teachers to learn from teaching. Journal of Teacher Education, 58, 47-61

Jacobs, V. R.; Lamb, L. L.; Philipp, R. A. (2010) Professional noticing of children's mathematical thinking. Journal for Research in Mathematics Education, v. 41, n. 2, 169-202.

Nickerson, SD; Lamb, L; Larochelle, R.(2017) Challenges in Measuring Secondary Mathematics Teachers' Professional Noticing of Students' Mathematical Thinking. Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts and Frameworks, 381-398.

Van Es, E. A.; Sherin, M. G. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers Interpretations of Classroom Interacts. Jl. Of Technology and Teacher Education, v. 10, n. 4, p. 571-596.

Penalva, M. C.; Llinares, S. (2011) Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria. In:GOÑI, Jesus María (coord) et al. Didáctica de las Matemáticas. Colección: Formación del Profesorado. Educación Secundaria. Barcelona: Editora GRAÓ. 12, 27-51.

Smith, M. S; Stein, M. K. (1998) Selecting ans Creating Mathematical Tasks: Foram Research to Practice. Matehmatics Teaching in the Middle Scholl, 3, 344-50.

Souza, J; Garcia, J. (2016). Contato Matemática. FTD, 139-145.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A formação compartilhada de professores no Clube de Matemática

Halana Garcez **Borowsky**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
halana.borowsky@gmail.com
Anemari Roesler Luersen Vieira **Lopes**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
anemari.lopes@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem como objetivo discutir a formação inicial de professores que ensinam matemática no projeto Clube de Matemática, desenvolvido na perspectiva do compartilhamento. O projeto é desencadeado pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEMat) da Universidad Federal de Santa Maria (UFSM/Brasil) a partir do movimento de planejamento, desenvolvimento e avaliação de atividades de ensino em turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas públicas parceiras. Tal processo é orientado pelos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural (Vygotsky) e da Atividade Orientadora de Ensino (Moura) e tem nos levado que a compreender a formação compartilhada está para além de realizar ações em conjunto, está direcionada à realização de ações em colaboração que promovem o desenvolvimento dos sujeitos envolvidos.

Palavras-chave: Clube de Matemática, Formação Compartilhada de Professores, Educação matemática.

Introdução

A Matemática, assim como outras ciências, reflete o processo humano de produção do conhecimento. Moura (2000, p.3) enfatiza que a criação do conhecimento matemático na esteira do desenvolvimento ocorre "ora na frente, puxando a imaginação criadora, ora atrás, sistematizando o inventado para que outros pudessem apoderar-se de ferramentas simbólicas", e, no ínterim desse movimento, o homem é motivado pela necessidade do controle das quantidades e formas da natureza para buscar a solução de problemas que possam lhe dar conforto material e psicológico. Mas ainda que a Matemática seja esse "organismo vivo" que ao nos dar novas ferramentas de interação com a natureza física e simbólica, contribui para que nossa humanidade mantenha-se viva e confortável, é recorrente o discurso que na educação escolar a matemática é

uma disciplina difícil de ensinar e de aprender.

Entendemos que a superação desse discurso perpassa, principalmente, pela formação dos professores que ensinam matemática. Isso significa compreender a formação docente como um processo de apropriação do conjunto de conhecimentos necessários para que o sujeito se torne professor que trabalha a serviço da educação. Em outras palavras, os caminhos de formação docente se constituem do mesmo modo como o processo de humanização: para tornar-se professor, o sujeito apropria-se dos movimentos histórico-culturais que perpassaram a constituição do trabalho docente.

Nesse sentido, o presente trabalho tem como objetivo discutir a formação inicial de professores que ensinam matemática no projeto Clube de Matemática (CluMat), desenvolvido na perspectiva do compartilhamento. Esse projeto CluMat é desencadeado pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEMat) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/Brasil) que é composto por acadêmicos dos cursos de Licenciatura em Pedagogia, Licenciatura em Matemática, de Pós-Graduação em Educação e Educação Matemática, professores da Educação Básica e do Ensino Superior. No CluMat os participantes planejam, desenvolvem e avaliam atividades de ensino em turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas públicas parceiras.

Entre os anos de 2014 e 2018, o CluMat foi desenvolvido em conjunto com as ações do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência no subprojeto interdisciplinar Educação Matemática (PIBID/InterdEM), financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). É nesse contexto que apresentamos aqui um recorte de uma pesquisa que buscou investigar as relações essenciais do movimento de formação docente no projeto Clube de Matemática, na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. Assim, nesse trabalho apresentaremos os aportes teóricos que orientam nossas ações (a Teoria Histórico-Cultural, a Teoria da Atividade e a Atividade Orientadora de ensino); os encaminhamentos metodológicos da pesquisa; um episódio de formação compartilhada que apresenta dados direcionados aos nossos objetivos e, por fim, algumas considerações.

Alguns pressupostos teóricos

A partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, entendemos a educação como uma via para o desenvolvimento humano, e não como uma mera aquisição de conteúdos e técnicas específicas. Por isso, destacamos que a educação escolar é importante em todas as fases do desenvolvimento e, de acordo com Rigon, Asbahr e Moretti (2010), a escola permite uma organização consciente dos processos de formação dos indivíduos a partir de uma organização intencional do ensino, que permite aos sujeitos a apropriação de conhecimentos, habilidades e formas de comportamento produzidas pela humanidade. “Nesse sentido, a escola é instituição privilegiada no que diz respeito às possibilidades de humanização do homem.” (Rigon; Asbahr; Moretti, 2010, p.29).

Vigotski (1998) expressa que a verdadeira essência da civilização consiste na construção propositada de monumentos para não esquecer fatos históricos preponderantes. Asbahr (2011) enfatiza que, na investigação do psiquismo humano, o ponto de partida é a história social, a história dos meios pelos quais a sociedade desenvolve-se e, nesse processo, desenvolvem-se os homens singulares. “A proposta vigotskiana é, portanto, compreender os fenômenos psicológicos

enquanto mediações entre a história social e a vida concreta dos indivíduos." (Asbhar, 2011, P.25).

Nesse entendimento de humanização, pautado pelos estudos de Vygotsky, Leontiev propõe a Teoria da Atividade. Para Lontiev (2014) o homem desenvolve-se a partir da sua atividade principal, sob influência das circunstâncias concretas da sua vida e do lugar que ocupa no sistema das relações humanas. O termo atividade é culturalmente utilizado de forma ampla, estando relacionado com a realização de uma tarefa, tendo essa conotação, inclusive, no meio educacional. No entanto não chamamos todos esses processos de atividade. No contexto deste trabalho, utilizamos o termo a partir dos pressupostos da Teoria da Atividade, para aqueles processos que satisfazem uma necessidade que corresponde às relações do homem com o mundo.

> Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo. (Leontiev, 2014, p.68)

Assim, ao pensarmos sobre o ensino de Matemática, entendemos que não é qualquer forma de organizar o ensino que irá proporcionar aos estudantes o desenvolvimento do pensamento teórico. Defendemos que o estudante vai aprender quando estiver em atividade e para tanto o ensino deve estar intencionalmente organizado pelo professor a partir do momento que o estudante adentra no espaço escolar.

A organização do ensino tem como premissa proporcionar a apropriação dos conceitos científicos pelos alunos e para que a aprendizagem se efetive "e se constitua efetivamente como atividade, a atuação do professor é fundamental na relação do estudante com o objeto do conhecimento, orientando e organizando o ensino" (Moura et al., 2010, p.94). Para tanto, é preciso que o professor crie condições para que o aluno possa agir movido por uma necessidade diretamente relacionada com a necessidade humana que levou à sistematização de tal conhecimento. Dessa forma, não estará apenas conhecendo empiricamente o objeto que trata a matemática, mas apropriar-se-á de todo um movimento dialético que envolve a constituição lógica e histórica do objeto estudado. Entendemos que, assim, a matemática assume papel fundamental para a efetivação do propósito da escola, afinal, o conhecimento matemático, sendo um patrimônio cultural, deve fazer parte não somente da história passada, mas contribuir efetivamente para o desenvolvimento da humanidade de gerações a gerações.

Mas como o professor pode organizar o ensino nessa perspectiva?

Com base nos pressupostos teóricos explicitados anteriormente e a partir da estrutura de atividade advinda de Leontiev, Moura (1996; 2010) propõe a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como encaminhamento metodológico para o ensino de matemática, que baliza as ações do Clube de Matemática. A AOE

> [...] respeita os diferentes níveis dos indivíduos e que define um objetivo de formação como problema coletivo é o que chamamos de atividade orientadora de ensino. Ela orienta um conjunto de ações em sala de aula a partir de objetivos, conteúdos e estratégias de ensino negociado e definido por um projeto pedagógico. Contém elementos que permitem à criança apropriar-se do conhecimento como um problema. E isto significa assumir o ato de aprender como significativo tanto do ponto de vista psicológico, quanto de sua utilidade. (Moura, 1996, p.32)

Desse modo, entendemos que a AOE proporciona não só a aprendizagem do aluno, mas contribui para a formação do professor. Afinal, nela, "estão presentes o conteúdo de aprendizagem, o sujeito que aprende, o professor que ensina e, o mais importante, a constituição de um modo geral de apropriação da cultura e do desenvolvimento do humano genérico". (MOURA et al., 2010, p.94).

Ao considerar que a formação docente não se reduz à sala de aula de um curso de licenciatura, mas constitui-se a partir de uma dimensão mais ampla, buscamos concebê-la como um processo histórico-cultural que pode trazer elementos que permitam uma análise mais complexa e profunda, que tem como eixo central o trabalho docente. Libâneo (2010, p.74) considera que, ao reportarmo-nos à THC, podemos compreender a formação profissional de professores por meio do trabalho real, "a partir das práticas correntes no contexto de trabalho e não a partir do trabalho prescrito, tal como aparece na visão da racionalidade técnica e tal como aparece também na concepção de senso comum".

Entendemos, portanto, que o processo só é possível quando os estudantes de licenciatura tem a possibilidade de compartilhar espaços formativos em que lhe são dadas essas oportunidades. Nesse sentido, para Lopes et al. (2016), é fundamental, no processo de formação do professor, criar situações em que haja a necessidade do compartilhamento das ações. Pois, desse modo, os sujeitos têm a oportunidade de desenvolver formas específicas de cooperação, que poderão permitir que ele atinja um nível adequado nas ações cognitivas por meio da apropriação e da conscientização do processo significativo da produção coletiva do conhecimento científico.

Na mesma direção, Placco e Souza (2006) destacam que aprender sobre a docência significa aproximar-se do conhecimento oferecido, apropriar-se dele a partir da própria história pessoal e particular, em um processo de ressignificação que ocorre na interação com o grupo. Esse processo constitui-se em instrumento de formação para formadores e sujeitos em formação, sendo a reciprocidade expressa na escuta entre todos os membros do grupo.

Assim, de acordo com Moura (2000), é na coletividade que se balizam as ações profissionais determinantes para o nível de formação do educador e, nessa direção, a formação se estabelece na interação com os pares e é movida por um motivo pessoal e coletivo. Para o autor, o motivo pessoal tem relação com o conjunto de conhecimentos e expectativas sobre a vida e os rumos que se acredita serem válidos para empreender o trabalho docente, já os motivos coletivos são dados por acordos que se estabelecem entre os que constituem a escola como grupo.

Encaminhamentos Metodológicos da Investigação

Como mencionado anteriormente, o Projeto Clube de Matemática – no decorrer da pesquisa – foi desenvolvido a partir das ações do subprojeto do PIBID InterdEM. O PIBID caracteriza-se, fundamentalmente, como um programa de ensino que possibilita, a estudantes de cursos de licenciatura, iniciação à docência; e, a professores da Educação Básica, uma perspectiva de formação contínua ao assumirem o papel de supervisores das atividades realizadas no âmbito do programa. A gênese do CluMat na UFSM está justamente em inserir futuros professores que ensinam Matemática no contexto escolar, com vistas à aprendizagem da docência, bem como a participação de professores da Educação Básica nesse processo formativo a partir da organização do ensino. Com o desenrolar do projeto, outras ações foram agregando-se ao processo de "estudo-planejamento-desenvolvimento-avaliação" das Unidades Didáticas, e investigações foram sendo realizadas.

Compreendemos que o CluMat proporciona aos estudantes da graduação contato direto

com a escola e com seu futuro objeto de trabalho (o ensino); aos professores da escola de Educação Básica uma participação efetiva em um espaço de formação em que podem ser protagonistas; aos colaboradores da pós-graduação e à professora coordenadora possibilidades de aproximação entre ensino e pesquisa. Nessa perspectiva, consideramos que as unidades didáticas (sobre conhecimentos matemáticos) produzidas no contexto do projeto se constituem como uma unidade entre as atividades de ensino, aprendizagem e formação.

Assim, é nesse processo que buscamos os dados que nos ajudaram a investigar as relações essenciais do movimento de formação docente no projeto Clube de Matemática, acompanhando, no decorrer do ano de 2015, todos os encontros de estudo, planejamento e avaliação do grupo que era composto por dez estudantes de graduação, cinco acadêmicas de pós-graduação, duas professoras da Educação Básica e a professora coordenadora. Esses encontros foram gravados em áudio e vídeo e, posteriormente, suas transcrições originaram os episódios de formação compartilhada que constituíram a análise da pesquisa.

Os episódios não retratam todo o processo que é desenvolvido pelo projeto, mas apresentam situações em que as unidades de análise podem ser evidenciadas, com certa regularidade, em um processo dinâmico dos encontros realizados. De acordo com Moura (2000) os episódios poderão ser frases escritas ou faladas, que constituídos de cenas definidoras, caracterizam-no. “Os episódios serão reveladores sobre a natureza e qualidade das ações. Quanto à natureza, podemos destacar: se trata de conceito, de modos de ação, de valores, de conhecimento estratégico [..] ou se é apenas conhecimento prático”. (Moura, 2000, p.60). O autor usa como analogia para explicar o movimento de escolha dos episódios a produção de um filme, pois o pesquisador deverá escolher as cenas com fins a contemplar seu objetivo, o roteiro é composto de cenas simples que, assim como no filme, procurarão passar a sensação de que o fenômeno está revelado. “O espectador será chamado a viver como diretor de montagens um conjunto de situações que, em movimento do total das cenas escolhidas, vai construindo a sua visão da comunidade a ser relatada.” (Moura, 2000, p.70).

Assim, a organização dos dados desta pesquisa possibilitou a constituição de episódios de formação compartilhada, sendo que no presente artigo, apresentamos um desses episódios.

O compartilhamento de ações na formação docente

O CluMat possui como característica o envolvimento entre sujeitos com diferentes formações: licenciandos em pedagogia, matemática, educação especial, alunos de pós-graduação e professores. Esse compartilhamento é destaque no episódio que aqui apresentamos, decorrente de um Encontro Geral de Avaliação do projeto, em que uma das acadêmicas de matemática relata sobre suas aprendizagens ao participar de um grupo com essa característica. Os nomes dos sujeitos da pesquisa são fictícios, mantendo os princípios éticos da pesquisa.

> **Rose:** Eu estou adorando, é muito bom, é claro que, como eu faço matemática, futuramente, vou ser professora de Ensino Médio ou séries finais do Ensino Fundamental, mas o que eu estou aprendendo aqui, eu acho que tem certas noções que a gente precisa ter para dar aula para qualquer idade, porque eu só consigo ver isso agora, estou começando a ver esse lado, e o contato com os pequenos é maravilhoso, não sei se eu tive sorte de pegar uma turma boa e um grupo bom.

> **Coordenadora:** É, isso também existe, eu acho assim, para quem faz matemática e quem já é formada em matemática, a gente começa a entender muita coisa dos anos finais e do Ensino Médio olhando para os anos iniciais
> **Rose:** E quando tu não tens a oportunidade, tu não te tocas, eu até achava assim, que pedagogia é importante, mas eu não tinha noção do quanto é importante, e foi uma boa escolha que eu fiz, não me arrependo.
> **Coordenadora:** E tem uma coisa que a gente comenta muito aqui, que é muito fácil para o professor, para nós, professores de matemática, pegar um sexto ano e dizer: "meu Deus, o que aquela professora fez até lá". Mas o que normalmente a gente, professor de matemática, faz, diz "nossa, essas crianças não sabem", mas aí queremos ensinar do jeito que a gente pensa ser correto e, quer dizer, a gente acaba não ensinando eles mesmo, e toda a dinâmica de todo esse aprendizado que a criança teve nos outros anos e compreender que não é que a criança não sabe, ela não sabe aquilo que eu quero passar, porque eu quero que ela chegue no sexto ano sabendo de cor a tabuada, sabendo fazer as operações, tudo aquilo que eu espero que ela saiba ela já tem de chegar no sexto ano sabendo, e aí, se ela não sabe o que eu faço, muitas vezes, eu t

Rose é acadêmica do curso de matemática e, anteriormente, participou como bolsista de iniciação à docência de um subprojeto de matemática do PIBID/UFSM. Optou por fazer parte do projeto CluMat a fim de ter outras experiências formativas, o que ela destaca em sua fala, "*futuramente, vou ser professora de Ensino Médio ou séries finais do Ensino Fundamental, mas o que eu estou aprendendo aqui, eu acho que tem certas noções que a gente precisa ter para dar aula para qualquer idade, porque eu só consigo ver isso agora"* (Rose). A referência a "*noções para dar aula"* traz indícios de que a estudante busca por um modo geral de ação sobre a docência. No CluMat, o desenvolvimento de desse modo geral de ação é sustentado pelos princípios teórico-metodológicos da AOE, que permitem que as acadêmicas se apropriem de conhecimentos – teóricos e práticos - sobre organizar o ensino.

No diálogo apresentado é levantada uma discussão que permeia com frequência a área da Educação Matemática, qual seja, o fato de que há um discurso de que os professores dos anos iniciais não sabem matemática e que os professores de matemática não têm "didática". A partir do que as participantes relatam na cena, podemos entender que um projeto formativo, que conta com a participação de sujeitos com diferentes formações, ao privilegiar uma dinâmica de interação de conhecimentos de diversas naturezas, pode romper com essas barreiras entre os cursos de formação, como no caso do CluMat, em que a preocupação se centra na possibilidade de que todos os sujeitos envolvidos se apropriem de conhecimentos, visando à organização do ensino. Lopes e Vaz refletem sobre isso:

> A constatação de que, no curso de Licenciatura em Matemática, não se aprende matemática para ensinar associada às críticas que são direcionadas aos professores dos anos inicias que não sabem esse conteúdo e ao que ressaltamos anteriormente, referente à influência do conhecimento na ação docente, levam-nos a refletir sobre quais conhecimentos matemáticos o professor deve ter, que lhe permitam ensinar matemática de maneira mais eficaz, fazendo com que seus alunos aprendam. (Lopes; Vaz, 2013, p.1022)

As reflexões que surgem a partir da experiência do CluMat nos levam a questionar seos processos de formação de professores lhes permitem a apropriação de conhecimentos que contribuam para a organização do ensino de matemática, visando o ensino na Educação Básica. A partir dos referenciais da Teoria Histórico-Cultural, acreditamos, assim como Moura, Sforni e

Araújo (2011, p.42), que "[...] o conhecimento produzido só se constitui efetivamente como tal quando inserido na atividade humana que lhe confere significado social e sentido pessoal". Contudo, essa compreensão, que para nós é considerada uma premissa, nem sempre está presente nas atuais propostas de formação de professores.

Do mesmo modo, com a interação entre as futuras professoras e as professoras em atuação, como mencionado anteriormente, encaramos a significação do trabalho docente como um elemento formador para todas. Na dinâmica do projeto, as professoras e as acadêmicas, ao organizar ações que objetivam o ensinar, também, requalificam seus conhecimentos (Moura, 1996). Sendo assim, a busca pela organização do ensino, recorrendo à articulação entre a teoria e a prática, visando à aprendizagem do aluno, constitui-se na atividade do professor, e esta, por sua vez, promove a atividade do estudante ao criar nele um motivo especial para a sua atividade: estudar e aprender teoricamente (MOURA et al., 2010). Assim, o planejamento, o desenvolvimento e a avaliação também constituem-se em elementos formativos para o professor.

Considerações finais

Ao pensar sobre a formação compartilhada, em especial no projeto CluMat/UFSM, podemos entender que compartilhar está para além de realizar ações em conjunto; é realizar ações em colaboração que promovam o desenvolvimento dos sujeitos envolvidos. O compartilhamento é uma condição para o desenvolvimento de uma coletividade e está presente na vivência, reflexão, discussão de experiências formativas que são pertinentes à atividade pedagógica desenvolvida dentro de um grupo, pertencente a uma dada prática social. Tomamos, portanto, a premissa da formação compartilhada como sendo um projeto coletivo que leva à atividade pedagógica, da mesma forma que a atividade pedagógica pressupõe um projeto coletivo, dessa maneira, constituindo uma unidade dialética do movimento formativo docente. De acordo com Lopes et at (2016)

> Sendo a educação um processo coletivo, é no compartilhar que o docente tem a oportunidade de apropriar-se de novos conhecimentos, pois, embora as ações possam ser de cada um daqueles que concretizam uma determinada atividade, a aprendizagem não acontece no que cada um deles faz de forma isolada, mas na interação entre sujeitos ou entre sujeitos e objetos. Assim, faz-se necessário que as ações sejam desenvolvidas por todos, mas que cada um tenha não só a oportunidade, mas o comprometimento de participar. (p.25)

A partir do episódio apresentado, podemos inferir que a premissa do compartilhamento torna-se um elemento importante na formação dos participantes do CluMat. Nessa perspectiva, concordamos com Lopes et al. (2016) que destacam que a possibilidade da interação de diferentes sujeitos, com diferentes conhecimentos de modo a permitir o compartilhamento de ações, sentidos e significações, pode ser determinante na mudança de qualidade no processo formativo com o qual os sujeitos estão envolvidos.

Referencias Bibliográficas

Asbahr, F. S. F. *"Por que aprender isso professora?" Sentido pessoal e atividade de estudo na psicologia histórico-cultural.* (2011). Tese (Doutorado em Psicologia) – Universidade de São Paulo, São Paulo.

Leontiev, A. N. (2014). Uma contribuição à teoria de desenvolvimento da psique infantil. In: Vigotskii, L. S. et al. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* São Paulo: Ícone.

Lopes, A. L. V.; Vaz, H. G. B. (2014). O Movimento de Formação Docente no Ensino de Geometria nos Anos Iniciais. *Educação & Realidade,* v.39, n.4, p.1003-1025, oct./dic. 2014. Disponível em; <http://www.scielo.br/pdf/edreal/v39n4/04.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2015.

Lopes, A.R. L. V. et al. (2016). Trabalho coletivo e organização do ensino de matemática: princípios e práticas**.** *Zetetiké,* v.24, n.45, p.13-28, 2016.

Moura, M. O. (1996). A atividade de ensino como unidade formadora. *Bolema,* Rio Claro, n.12, p.29-43.

Moura, M. O. et al. (2010). A atividade orientadora de ensino como unidade entre ensino e aprendizagem. In: MOURA, M. O. (Org.). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.* Brasília: Liber livro.

Moura, M. O. (2000) *O educador matemático na coletividade de formação*: uma experiência com a escola pública. Tese (Livre-Docência) - Universidade de São Paulo, São Paulo.

Moura, M. O.; Sforni, M. S. F.; Araújo, E. S. (2011). Objetivação e apropriação de conhecimentos da atividade orientadora de ensino. *Revista Teoria e Prática da Educação***,** v.14, n.1, p.39-50.

Placco, V. M. N. S.; Souza, V. L. T. (2006). *Aprendizagem do adulto professor.* São Paulo: Loyola.

Rigon, A. J.; Asbahr, F. da S. F.; Moretti, V. D. (2010). Sobre o processo de humanização. In: Moura, M. O. (Org.). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.* Brasília, DF: Liber Livro.

Vigotski, L. S. (1998). *A formação social da mente.* São Paulo: Martins Fontes.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ações e formações de professores sobre ensino e aprendizagem de matemática: movimentos de um grupo de pesquisa

Anemari Roesler Luersen Vieira **Lopes**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
anemari.lopes@gmail.com
Halana Garcez **Borowsky**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
halana.borowsky@gmail.com
Brasil
Patrícia **Perlin**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete
Brasil
patricia.perlin@iffarroupilha.edu.br
Sandra Aparecida Fraga da **Silva**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo – Campus Vitória
Brasil
sandrafraga7@gmail.com

Resumo

A partir da compreensão da importância da integração entre a Universidade e a Escola de Educação Básica e de que a interação entre os diferentes sujeitos que compõe esses espaços representa possibilidades de aprendizagem para todos, foi criado o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, na Universidade Federal de Santa Maria (GEPEMat/UFSM). Este grupo, formado por estudantes de graduação e da pós-graduação; professores da Educação Básica e do Ensino Superior, desenvolve diferentes ações de ensino, pesquisa e extensão, pautados nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural. Neste contexto, o presente artigo tem por objetivo descrever ações deste grupo, materializadas em projetos voltados ao ensino e processos formativos relacionados à Educação Matemática.

Palavras chave: grupo de pesquisa, educação matemática, interação universidade e escola, formação de professores, ensino e aprendizagem.

Introdução

Compreendendo que as discussões sobre Educação Matemática escolar devem ter como partícipes a escola e o professor e que, na organização de ações e investigações que envolvem diferentes sujeitos, a interação entre estes pode proporcionar aprendizagem a todos os

envolvidos, foi criado no ano de 2009 o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, na Universidade Federal de Santa Maria (GEPEMat/UFSM), Brasil. É constituído por estudantes de Licenciatura em Pedagogia, Matemática e Educação Especial, estudantes da Pós-Graduação em Educação e Educação Matemática, professores da Educação Básica e professores universitários que semanalmente se reúnem para a realização de estudos teóricos e investigações, bem como elaboração e desenvolvimento de ações em escolas públicas da rede de ensino estadual e municipal. Seus componentes, com diferentes formações, atuações e histórias de vida, se agregam a partir da preocupação comum com o ensino e a aprendizagem da matemática, materializada em diversos projetos.

O GEPEMat está organizado em duas linhas de pesquisa: ensino e aprendizagem, cujo objetivo é investigar propostas e processos educativos que envolvem o ensino e a aprendizagem em diferentes espaços e níveis educacionais; e formação de professores, que objetiva investigar, sob o enfoque da Teoria Histórico-Cultural, a formação docente em seus diferentes espaços e níveis educativos. Estas duas linhas, embora com objetivos específicos, articulam-se em diversas ações e investigações desenvolvidas pelos participantes do grupo.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é descrever ações do GEPEMat, materializadas em projetos voltados ao ensino e processos formativos relacionados à Educação Matemática. Para isso, inicialmente apontamos brevemente os fundamentos relacionados às dimensões orientadoras e executoras dos projetos. Posteriormente, destacamos três projetos que estão sendo desenvolvidos atualmente e finalizamos com algumas considerações.

Fundamentos teóricos orientadores

As ações desenvolvidas no âmbito do GEPEMat – que envolvem ensino, pesquisa e extensão – pautam-se na Teoria Histórico-Cultural por meio das obras de Vigotsky (2000, 2002) e, em especial, na Teoria da Atividade de Leontiev (1978,1983) e Atividade Orientadora de Ensino – AOE – de Moura (1996, 2010). Estes aportes têm sido importantes para compreendermos aspectos relevantes tanto sobre o processo de ensino e aprendizagem quanto da formação dos professores que ensinam matemática, dos quais destacamos alguns deles a seguir.

A concepção da educação que adotamos a entende como um processo de humanização (Leontiev, 1978), a partir da apropriação da cultura elaborada expressa na aprendizagem de conhecimentos historicamente produzidos, como no caso da Matemática. O processo de humanização está relacionado ao movimento histórico da humanidade que se desenvolve a partir da satisfação de necessidades. Isto implica em compreender a Educação Matemática como via para o desenvolvimento psíquico dos sujeitos e é função do professor promover, por meio da organização do seu ensino de matemática, as máximas capacidades cognitivas de seus alunos.

O desenvolvimento das funções psicológicas superiores está relacionado ao processo de ensino, sendo que a aprendizagem ocorre do nível interpsíquico para o intrapsíquico (Vigotsky, 2000, 2002), a partir da interação dos sujeitos. Esta compreensão ampara nossa premissa de que todas as ações desenvolvidas pelo grupo ocorrem a partir da interação entre diferentes sujeitos, que contribuem com diversas experiências e conhecimentos.

A importância dessa interação entre os sujeitos confirma-se por meio do compartilhamento de ações nas atividades em comum (Rubtsov, 1996) em que as ações e

operações envolvem a repartição de modos de ação entre participantes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. O compartilhamento é condição que implica a troca com o outro no sentido de que todos se apropriam tanto das ações desenvolvidas em interação, quanto dos sentidos e significados assumidos por elas, gerando um movimento de interdependência entre a diversidade dos conhecimentos dos sujeitos envolvidos e a mudança qualitativa tanto das ações, quanto dos conhecimentos (Lopes, 2009). Assim, entendemos que em um grupo, tal como o nosso, embora as ações sejam de cada um dos sujeitos, aquilo que concretiza sua aprendizagem não acontece a partir do que ele realiza de forma isolada. O compartilhamento é que vai permitir a cada um dos envolvidos a apropriação dos conhecimentos produzidos coletivamente.

Ainda, compreendemos a atividade do professor como atividade humana que promove o seu desenvolvimento. Ao nos referirmos ao termo atividade, o fazemos amparados em Leontiev (1978, p.69), para quem o termo identifica "os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo".

Em relação aos nossos encaminhamentos, nos pautamos na Atividade Orientadora de Ensino - AOE (Moura, 1996, 2010) como modo geral de organização do ensino de matemática, que exige do professor, entre outras coisas, a intencionalidade da ação pedagógica voltada a apropriação do conhecimento teórico por parte do aluno e a apropriação do movimento lógico histórico (Kopnin, 1978) do conceito a ser trabalhado. Para Moura (1996, p.32), a AOE "orienta um conjunto de ações em sala de aula a partir de objetivos, conteúdos e estratégias de ensino negociado e definido por um projeto pedagógico. Contém elementos que permitem à criança apropriar-se do conhecimento como um problema".

Ações do Grupo

Dentre as inúmeras ações do GEPEMat ao longo de sua existência, destacamos neste momento três projetos: "*Clube de Matemática"; "A Licenciatura em Matemática em questão: de que formação falamos?";* e *"Geometria e movimento lógico-históricos de seus conceitos"*. Os projetos possuem características que demonstram o compromisso do grupo em estreitar os laços entre Universidade e Escola de modo que privilegiam não somente a organização, o desenvolvimento e a avaliação de ações de ensino da disciplina com os estudantes, como também formação de professores que ensinam Matemática na Educação Básica.

Moura (2013) ao discutir, a partir da Teoria Histórico-Cultural, o que constitui um projeto, caracteriza-o como sendo "constituído por atividades realizadas por sujeitos que têm uma individualidade, mas que ao interagirem com outros também mobilizados pela mesma atividade, vão moldando cada indivíduo, dando-lhes qualidade nova" (Moura, 2013, p.10). O autor entende que o conceito de projeto tem uma interface com o conceito de atividade, afinal, ele é uma das criações do homem para organizar suas ações com vistas a uma determinada finalidade, uma objetivação e que o faz em um contexto que é histórico e cultural. Desse modo, fica claro que, para concretizá-lo, deve-se sujeitar à possibilidade que os sujeitos que o concretizam tenham suas ações orquestradas para um fim idealizado.

Assim, consideramos que cada um dos projetos que apresentamos se constitui como uma unidade de ações realizadas por sujeitos que, ao interagirem com outros, também, mobilizados pela mesma atividade, ganham qualidade nova. Desse modo, é possível compreender também

que o compartilhamento das ações permite o processo de mudança da qualidade de cada sujeito que, "ao fazer, aprende o modo geral de realizar ações adequadas a novas atividades que tenham por finalidade a satisfação da necessidade dos sujeitos envolvidos nessa atividade" (Moura, 2013, p.10).

O "*Clube de Matemática"* é um projeto de extensão instituído na UFSM desde o ano de 2009, financiado pelo Fundo de Incentivo à Extensão (FIEX/UFSM) e desenvolvido com o intuito de constituir um espaço de discussão teórica e metodológica sobre a organização do ensino de matemática a partir de ações desenvolvidas escolas de Educação Básica.

Compõem-se com a participação de estudantes dos cursos de Licenciatura em Pedagogia, Matemática e Educação Especial, estudantes de pós-graduação em Educação e Educação Matemática, professores da Educação Básica e professores universitários. Possui uma dinâmica que envolve a interação com as crianças na escola e a organização e avaliação das ações realizadas na universidade. O primeiro momento é o planejamento que é realizado coletivamente no grupo. Os acadêmicos vão até a escola e entram em sala de aula, acompanhados pela professora regente da turma, para realizarem as unidades didáticas que são pautadas nos pressupostos teóricos e metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino. Por fim, a avaliação acontece novamente na universidade, onde são discutidos aspectos relacionados não apenas às aprendizagens das crianças, mas, também, à aprendizagem da docência e do conteúdo matemático por parte dos professores e futuros professores envolvidos.

O projeto Clube de Matemática já esteve vinculado ao Observatório da Educação a partir do projeto "Educação Matemática nos Anos Iniciais: Princípios e Práticas da Organização do Ensino" (OBEDUC-PPOE) e integrou as ações do subprojeto Interdisciplinar Matemática 1º ao 6º ano do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID/UFSM), ambos programas da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Com o passar do tempo, o projeto foi se constituindo como um importante espaço de formação, pois proporciona aos estudantes de graduação um contato direto com a escola e com seu futuro objeto de trabalho (o ensino), os professores, pós-graduandos e professores universitários também estão em movimento de formação, pois consideramos que as unidades didáticas produzidas no contexto do projeto se constituem como uma unidade entre as atividades de ensino, aprendizagem e formação para todos os envolvidos.

Tal espaço formativo tem sido legitimado em pesquisas de mestrado e doutorado, em que o Clube de Matemática é o lócus das investigações acerca da formação de professores que ensinam matemática. Esse movimento, ao nosso entender, também possibilita que o projeto esteja em constante aprimoramento, buscando contribuir de modo mais efetivo com a realidade social a partir da formação docente, da organização do ensino de matemática e, também, do fortalecimento da interação da universidade e escola

Além do desenvolvimento de projetos cujo foco é o ensino e a aprendizagem da Matemática na Educação Básica, o grupo vem preocupando-se com a formação de professores. Nesta direção, desenvolve-se o projeto de pesquisa "*A Licenciatura em Matemática em questão: de que formação falamos*?", que iniciou em 2017. A discussão sobre a formação docente é premissa para todo aquele que trabalha em um curso de licenciatura, pois embora se possa constatar os avanços em relação às políticas educacionais implementadas pelo Ministério da Educação brasileiro nos últimos anos, direcionadas à formação docente e às práticas de ensino, ainda há falta de professores e sérias críticas aos cursos de formação inicial, principalmente

porque nos deparamos com professores que não sabem ensinar e alunos que não conseguem aprender. Em se tratando particularmente da formação do professor de matemática as questões são agravantes por dois motivos: o fato de que esta disciplina é uma das que mais reprova na Educação Básica e, diante disto, não há como deixar de refletir sobre as possíveis relações entre o fracasso escolar e a formação do professor; e a constatação da diminuição do número de professores de matemática habilitados, tanto pela reduzida procura - ou até permanência - por parte dos estudantes pelos cursos de licenciatura em Matemática, quanto pelo fato de que muitos habilitados não trabalham nesta área.

As ações investigativas deste projeto têm buscado traçar um perfil dos cursos de Licenciatura em Matemática do estado do Rio Grande do Sul, Brasil, visando identificar aspectos que os aproximam, dando continuidade aos estudos desenvolvidos pelo grupo ao participar de um projeto em âmbito nacional intitulado "Mapeamento e estado da arte da pesquisa brasileira sobre o professor que ensina Matemática" (Fiorentini, Passos, Lima; 2016). Do geral para o particular, o projeto pretende: conhecer as principais ideias referentes à formação de professores presentes na literatura dos anos de 1980 até a atualidade; investigar aspectos relativos à história dos cursos de licenciatura em Matemática do Brasil; organizar um banco de dados de pesquisas sobre o curso de Licenciatura em Matemática; elencar as principais recorrências presentes nas Propostas Político-Pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática, em relação a concepção de formação do futuro professor; apontar as principais recorrências presentes nas matrizes curriculares dos cursos de licenciatura em Matemática do Rio Grande do Sul no que diz respeito às disciplinas e ementas.

Tendo em vista que o projeto encontra-se em andamento, a expectativa é de que seus resultados permitirão um olhar mais apurado para os cursos de licenciatura do Rio Grande do Sul no sentido de subsidiar discussões sobre as reformas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática, em especial o da UFSM, e o aprofundamento das discussões e debates sobre formação inicial de professores.

Congregando a tríade ensino, pesquisa e extensão, desenvolvemos durante os anos de 2017 e 2018, o projeto "*Geometria e movimento lógico-históricos de seus conceitos"* com o objetivo de estudar o movimento lógico-histórico de conceitos geométricos para organizar ações relativas aos conteúdos de geometria estudados, dando destaque à organizações de Atividades Orientadoras de Ensino – AOE – e ao uso de recursos didáticos. Foi desencadeado a partir de ações de: estudo; planejamento; desenvolvimento e avaliação coletiva de ações de ensino de Geometria voltadas à Educação Infantil, aos anos iniciais e aos anos finais do Ensino Fundamental.

Participaram desta ação vários integrantes do referido grupo, dos diferentes níveis de ensino (licenciandos, mestrandos, doutorandos e professores). O estudo do movimento lógico-histórico dos conteúdos geométricos foi ampliado nos anos de 2017 e 2018, com leitura e discussão de diferentes textos como o de Lima e Moisés (2002). Estes autores apresentam uma geometria desenvolvida a partir da observação da natureza, envolvendo os sentidos, como o par mãos e olhos. Esta observação e o próprio desenvolvimento da humanidade levou a construção de diferentes movimentos que constituem a(s) geometria(s). Um desses movimentos é o da decomposição, no qual partimos da observação do espaço, decompomos para o plano e para a linha. Porém, este processo também pode ser compreendido a partir da composição, num movimento inverso. Com estes estudos, identificamos alguns nexos conceituais da geometria que

são as formas da natureza, a localização e as figuras geométricas. Notamos a necessidade de realização do estudo do movimento lógico-histórico dos conceitos geométricos anterior a fase de planejamento das ações e tarefas que foram desenvolvidas nas salas de aula da Educação Básica. Ressaltamos que a compreensão do movimento de decomposição e composição se fizeram presente nas tarefas e AOE ampliando a qualidade das ações desenvolvidas.

Em relação ao que foi desenvolvido nas salas de aula, escolhemos turmas diferenciadas e realizamos um trabalho vinculado aos nexos conceituais. Aplicamos as tarefas desde a educação infantil, envolvendo a localização e percepção de si e de objetos no espaço. No ensino fundamental, partimos das formas geométricas para, posteriormente, sistematizar discussões acerca das figuras geométricas. Nas sessões reflexivas, as participantes destacaram esse estilo do processo formativo, que contribui para a aprendizagem da docência. Embora tenhamos trabalhado em subgrupos, fazíamos momentos de compartilhamento dos estudos, planejamentos e ações desenvolvidas no coletivo. Esse movimento contribuiu para a aprendizagem de todos.

Considerações Finais

De modo geral, orientados por suas particularidades, os projetos têm como metas:

- proporcionar para professores e futuros professores possibilidades de discutir sobre ensino e aprendizagem da matemática do ponto de vista teórico e metodológico visando impactos em sua prática;
- possibilitar a estudantes da Educação Básica uma visão diferenciada da Educação Matemática, levando-os à aproximação com conhecimentos matemáticos;
- estabelecer parcerias que revelem possibilidades de universidade e escola de Educação Básica trabalharem juntas para uma educação de melhor qualidade, principalmente em se tratando do problemático ensino de matemática.

E, como resultado desses projetos, temos pesquisas de iniciação científica, trabalhos de conclusão de curso, dissertações e teses. Em suas especificidades, cada um desses trabalhos apresenta resultados que vem contribuindo para que consigamos compreender melhor processos relacionados à Educação Matemática, dos quais destacamos dois, especificamente em relação à formação de professores e ao ensino de matemática.

Em relação à formação de professores é possível identificar que a aproximação da universidade com a escola de Educação Básica com ações de inserção de estudantes de graduação no contexto escolar contribui significativamente para a formação tanto dos futuros professores, quanto dos professores atuantes com os quais interagem. Sobre o ensino, embora a matemática seja uma das disciplinas em que os alunos apresentam maior dificuldade, é possível pensar em modos de organizar o ensino que contribuam com a aprendizagem, desde que organizadas intencionalmente, a partir da apropriação de conhecimentos por parte do professor, ou seja, o professor precisa saber matemática e saber ensinar para poder desenvolver a sua atividade.

Ainda, em especial, essas pesquisas vêm apontando a relevância de espaços, tais como o composto pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, que oportunizam aos sujeitos que o compõem possibilidades compartilhadas de estudar e participar da organização e

desenvolvimento de ações de ensino, pesquisa e extensão que tem como foco o ensino e a aprendizagem da matemática na escola.

Por último, enfatizamos que os projetos desenvolvidos pelo GEPEMat, estão alicerçados por uma coletividade docente, em que os sujeitos ao realizarem suas ações dirigem-se à realização de objetivos traçados pelo grupo e cada um contribui, com seu esforço pessoal, para alcançá-los. Na coletividade, os objetivos são socialmente valiosos, ou seja, não se encerram no próprio grupo e essa deve ser uma premissa para a formação docente na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural.

Referências e bibliografia

Fiorentini, D.; Passos, C. L. B. & Lima R. C. R. (org.) (2016). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática*: Período 2001 – 2012. FE-Unicamp: Campinas, E-book. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/pf/subportais/biblioteca/fev-2017/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf

Kopnin, P. V. (1978). *A dialética como lógica e teoria do conhecimento***.** Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Leontiev, A. (1983). *Actividad, conciencia e personalidad.* Havana: Editorial Pueblo y Educacion.

Leontiev, A. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Horizonte Universitário, 1978.

Lima, L. C.; Moisés, R. P. (2002). *Uma Leitura do Mundo*: forma e movimento. São Paulo: Escolas Associadas.

Lopes, A. R.L.V. (2009). *Aprendizagem da docência em matemática: o Clube de Matemática como espaço de formação inicial de professores***.** Passo Fundo: Editora UPF.

Moura, M. O. (Org.) (2010). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.* Brasília: Líber livro.

Moura, M. O. (2013) Teoria da Atividade: contribuições para a pesquisa em Educação Matemática. In:

Encontro Nacional de Educação Matemática. *Anais*... Curitiba.

Moura, M.. (1996). A atividade de ensino como unidade formadora. *Bolema***.** São Paulo, 12, 29-43.

Rubtsov, V. (1996). Atividade coletiva e aquisição de conceitos teóricos de Física por escolares. In GARNIER, C.et. al. (Org). *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista: Escola russa e ocidental.* Trad. Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 186-195.

Vigotsky, L. S. (2000). *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

Vigotsky, L. S.(2002). *A formação social da mente***:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes.



Educação inclusiva na formação inicial: percepções de licenciandos em Pedagogia e Matemática.

Marina Andrades **Felipe**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
marina.andrades@gmail.com
Marlise **Geller**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
marlise.geller@gmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta uma investigação sobre as percepções de licenciandos em Pedagogia e Matemática em relação ao processo de alfabetização/letramento e de alfabetização matemática na perspectiva inclusiva, e na formação inicial que permeia os cursos. Participaram desta pesquisa 15 alunos, e envolveu um curso virtual pela plataforma moodle. Este artigo contempla um recorte de uma dissertação de mestrado e analisa, em uma abordagem qualitativa, as percepções sobre sua formação inicial e da alfabetização/letramento e da alfabetização matemática, sob o olhar do vínculo afetivo, junto a educação inclusiva. Pode-se inferir que os participantes apontam lacunas na formação inicial em relação as atividades práticas do docente com o aluno de inclusão e salientam e importância do vínculo entre professor e aluno.

Palavras chave: educação inclusiva, formação inicial, pedagogia, licenciatura em matemática.

Introdução

Esse artigo, decorrente de uma dissertação de mestrado em andamento em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, aborda a percepção dos licenciandos dos cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia, sobre o quanto a formação inicial aborda a educação inclusiva, e como percebem a alfabetização nesse mesmo viés, ainda sob o olhar do vínculo afetivo entre professor e aluno.

Os professores que irão atuar na disciplina de matemática, são os concluintes nos cursos de Matemática-Licenciatura e da Pedagogia, pois segundo a LEI 9394/1996 (BRASIL, 1996), "Art. 62. A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura plena, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nos cinco primeiros anos do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade normal".

A pesquisa norteadora dessa escrita, propõe-se a desenvolver uma formação para licenciandos, sobre a educação matemática inclusiva, e possui como pergunta geratriz: "Como a educação inclusiva, a partir de reflexões teórico-práticas, é construída na formação inicial de professores que ensinam matemática na educação básica?".

Formação de professores que ensinam matemática: algumas reflexões

A formação do profissional inicialmente propõe ensinamentos básicos, ou melhor, mostra as ferramentas que necessita para atuar em sua área habilitando-o através de um diploma. Sobre o que entendemos como certificado ou diploma, Santarosa (2010, p. 69) exemplifica: "é uma licença que necessita ser revalidada no decorrer do exercício profissional". Mas a construção do profissional como um todo, perpassa pelas atualizações que o mesmo vivencia, sejam por experiências na atuação ou cursos de curta e média duração.

O educador no brasil, para atuar, deve ser graduado no curso de Pedagogia (habilitação para ministrar aulas da educação infantil ao 5º ano do ensino fundamental, chamados anos iniciais do ensino fundamental) ou em um curso de Licenciatura específico para a área de atuação desejada, como a Matemática (habilitação para ministrar aulas do 6º ao 9º anos do ensino fundamental, chamado anos finais, e do 1º ao 3º anos do Ensino Médio).

Para a formação do profissional da educação, o caráter da mesma pode possuir o viés de "formação inicial" quanto "formação continuada", quando a mesma propõe discussões sobre a prática docente a estudantes que já as vivenciam, seja por meio de estágios, ou seus empregos quando já estão conectados a educação.

Os conceitos ou conteúdos, que são discutidos e/ou abordados durante a formação desse professor, vão muito além de "métodos" ou "fórmulas", pois o estudante deve refletir sobre seu

papel como educador e compreender o que de fato é necessário saber para atuar na prática docente. Para Franchi (1995, p. 66):

> O professor deve ter a sua disposição um conhecimento abrangente que ilumine sua ação. Este não pode limitar-se a conteúdos e instrumentos que trabalhará em sala de aula.

Ou seja, a reflexão, como ferramenta dessa formação, é imprescindível para preparar esse futuro educador para sua prática. Ainda é interessante destacarmos a formação do profissional voltado a área do ensino de matemática, que Gatti (2014, p. 39) destaca:

> A formação para a prática da alfabetização e iniciação à matemática e às ciências naturais e humanas é precária, como também é precária a formação para o trabalho docente nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio.

E como nós educadores nos percebemos sobre o cognitivo e emocional desses alunos? Estamos preparados para compreender e auxiliar esse aluno a se conhecer e entender como a cabeça dele funciona?

> Há quase ausência nesses cursos de formação em conhecimentos sobre o desenvolvimento cognitivo e socioafetivo de crianças, adolescentes e jovens, suas culturas e motivações. De modo geral, nas ementas dos currículos das licenciaturas encontram-se, nos fundamentos educacionais, proposições genéricas que passam ao largo de oferecer uma formação mais sólida (Gatti, 2014, p. 39).

A aproximação do docente ao processo de desenvolvimento cognitivo de seu educando é uma abordagem que deve ser introduzida em todas as formações docentes. Quando tratamos de formação de professores, estamos lidando com o aprimoramento de profissionais que atuarão diretamente na construção cognitiva e social de seres humanos, então estes profissionais devem estar preparados para compreender as necessidades cognitivas e afetivas que seus alunos estão necessitando, para encontrar estratégias e efetivar aprendizagens.

Metodologia

A pesquisa[1] desenha-se com uma abordagem qualitativa por meio do olhar do licenciando, nos cursos de pedagogia e matemática, já que a pesquisa qualitativa, de acordo com Bogdan e Biklen (2010), envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto da pesquisadora com a situação estudada, enfatizando o processo e se preocupando em retratar a perspectiva dos participantes.

A pesquisa envolveu um curso virtual ofertado na plataforma *Moodle*, composto por 4 módulos, com objetivos específicos, descritos na Tabela 1:

Tabela 1-Módulos e Objetivos do curso

Módulo	***Título***	***Objetivo do Módulo***
1	Legislação	Apresentar as leis que regem o trabalho do educador, discutindo o quanto as mesmas estão presentes nas escolas.
2	Caso 1 – Deficiência Intelectual	Discutir sobre a adaptação de conteúdos para um caso apresentado, sobre um aluno com Deficiência intelectual.
3	Caso 2 – Transtorno Bipolar	Apresentar um caso sobre uma aluna com transtorno bipolar, e organização do conteúdo matemático proposto para a série que a aluna frequenta.
4	Caso 3 – Síndrome de Down e MoyaMoya	Discutir sobre a adaptação de conteúdos no caso de uma aluna com múltiplas situações, em uma turma de 7º ano, que inclui mais 2 alunas.

Fonte: A pesquisa.

A análise aqui apresentada, compõe-se de um recorte do questionário inicial, apresentado aos licenciandos que realizaram o curso a que nos referimos anteriormente. Para conhecermos o grupo, algumas características são importantes serem apresentadas.

O grupo compõe-se de 15 estudantes, sendo 5 estudantes de Pedagogia, e 10 estudantes de Matemática - Licenciatura. Entre os participantes da pesquisa, obtivemos maneiras distintas de conclusão do Ensino Médio, aparecendo as modalidades EJA, científico, Magistério/Normal ou Técnico. Os estudantes estão distribuídos em semestres distintos, conforme quadro da Tabela 2:

[1] Aprovada pelo Comitê de Ética sob protocolo número CAAE: 78396017.6.0000.5349

Tabela 2-Participantes

Aluno Participante	***Curso***	***Semestre***	***Tempo de Experiência Docente***
A1	Pedagogia	8	3 anos
A2	Matemática	4	3 anos
A3	Pedagogia	3	10 anos
A4	Matemática	1	1 ano
A5	Matemática	5	3 anos
A6	Matemática	3	2 anos
A7	Pedagogia	2	1 ano
A8	Matemática	3	5 anos
A9	Matemática	4	menos de 1 ano
A10	Matemática	7	2 anos
A11	Matemática	3	1 ano
A12	Pedagogia	6	5 anos
A13	Pedagogia	4	1 ano
A14	Matemática	2	_
A15	Matemática	3	1 ano

Fonte: A pesquisa

O educador que está se formando, está com o perfil em constante transformação, onde antes os alunos que estavam buscando a formação superior para ensinar já tinham a experiência do curso Normal, hoje, grande parte inicia sua caminhada pela educação direto no ensino superior. Segundo Cunha (2005, p.24), o perfil do iniciante na licenciatura se modifica e:

> Dessa forma, não temos mais, no Curso Normal ou na Pedagogia, alunos/as que fizeram estágios ou já ingressaram na docência, como era comum. Não encontramos alunos/as com experiências de professores/as, com dúvidas e conflitos inerentes à teoria-prática, com questões e problemas da sala de aula.

No grupo, é importante destacar que apenas um integrante ainda não teve contato ou experiência efetiva com o ambiente escolar, e que as experiências relatadas pelos demais participantes inclui práticas de estágio, trabalho voluntário, e ainda, atuação como secretário de escola.

Vínculo afetivo e a educação inclusiva: análise dos dados

No questionário inicial, os participantes se posicionaram sobre o ensino inclusivo, e ainda trouxeram relatos sobre suas experiências envolvendo a inclusão escolar ou outros contatos com crianças com deficiência e/ou transtornos.

> [...]considero a inclusão efetiva desses alunos um grande desafio, a maior dificuldade é atitudinal, pois quando há um vínculo entre o aluno e o professor facilita a aprendizagem. (A3)

O vínculo entre o professor e seus alunos, transforma o contexto escolar em um ambiente de aprendizagem constante, e para essa relação, é importante que o professor compreenda o aluno como um ser social. Segundo Kramer (1989):

> [...] o trabalho pedagógico precisa se orientar por uma visão das crianças como seres sociais, indivíduos que vivem em sociedade, cidadãs e cidadãos. Isso exige que levemos em consideração suas diferentes características, não só em termos de histórias de vida ou de região geográfica, mas também de classe social, etnia e sexo. Reconhecer as crianças como seres sociais que são implica em não ignorar as diferenças. (KRAMER, 1989, p. 19)

Os futuros professores, participantes da pesquisa, percebem a importância da visão do professor para com o aluno, sobre suas habilidades e peculiaridades para o aprendizado. O participante A8, em seu relato sobre sua experiência, reflete acerca desses e outros aspectos:

> [...] foi uma experiência incrível, visto que cada um apesar de suas peculiaridades tem muito a mostrar e desenvolver. A maior dificuldade foi em não ter uma capacitação para tal atividade e então a falta de conhecimento em saber como agir em determinadas situações[...] (A8)

Ainda, descreve o quanto sua caminhada foi enriquecedora para sua formação como docente, e como percebe que devamos buscar capacitações e formações para nossa atuação:

> [...] ao decorrer dos anos foi muito gratificante, bem como posso afimar que aprendi muito em relação a inclusão e adaptação curricular, o que levo pra minha vida profissional, e também sei o quanto precisamos buscar e nos capacitar para receber e atender á esses alunos. (A8)

Durante uma atuação em estágio, o estudante A5, entendeu como uma angústia e dificuldade "conquistar a confiança da criança, em mim e em nela mesma em questões diversas, desde escrever ou até mesmo subir uma escada sozinha". E no final do questionário, ainda apresentou uma frase animadora:

> "É um desafio muito grande trabalhar com alunos de inclusão, mas com amor e dedicação vamos conseguir!" (A5)

Considerações finais

O intuito dessa escrita sucinta, é instigar ao leitor a busca por novas produções e pesquisas acerca da educação inclusiva, pela perspectiva dos estudantes. Um ponto positivo a ser exaltado, é a percepção desse estudante como parte integrante do processo, e se inserindo na aprendizagem desse estudante através do vínculo afetivo.

A caminhada já construída desse grupo de estudantes, propõe aos mesmos muitos questionamentos acerca da inclusão, e evidencia o quão importante se faz uma formação que inclua essa e outras discussões nos encontros acadêmicos.

Continuamos buscando uma educação de qualidade, e que permita ao futuro professor continuar sonhando com os saltos mais altos possíveis para ele e seus estudantes, e compreendendo a inclusão de todos os alunos no ambiente escolar, como um ambiente curioso e saudável de aprendizado.

Referências

Bogdan, R.; Biklen, S. K (2010). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brasil (1996). Lei 9.394/96, *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília: Ministério da educação e do Desporto.

Cunha, R. C. O. B.(2005). Lembranças de escola na formação inicial de professores/as. In: *Olhar de Professor.* Ponta Grossa, 23-38.

Franchi, E. P. (1995). A insatisfação dos professores, consequências para a profissionalização. In Franchi, E.P. (org). *A causa dos professores*. Campinas, PAPIRUS.

Gatti, B. (2014). A formação inicial de professores para a educação básica: as licenciaturas. Revista USP, (100), 33-46.

Kramer, S. (1989). Com a pré-escola nas mãos: uma proposta curricular. São Paulo: Ática.

Santarosa, L. M. C. (2010) (org). *Tecnologias digitais acessíveis*. Porto Alegre; JSM Comunicação Ltda,

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O estudo de aula como mecanismo didático em Residência Pedagógica

João Marcos Almeida **Ferreira**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
joaomarcos0120@gmail.com
José Emanuel Barbosa **Alves**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
emanuelbarbosaalves10@hotmail.com
Mariana Almeida **Ferreira**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
mariana2500almeida@gmail.com
Roger Ruben Huaman **Huanca**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
roger@uepb.edu.br

Resumo

O presente artigo descreve o estudo de aula como uma alternativa didática que foi proposta na etapa inicial do Programa Residência Pedagógica, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Objetivamos discutir a inserção de professores de matemática em formação, no ambiente escolar, para investigar colaborativamente e reflexivamente, sua prática futura. Entretanto, fez-se necessário uma revisão bibliográfica, tendo como principal teórico João Pedro da Ponte (2016) e por conseguinte realizou-se discussões entre bolsistas e orientador do programa. Evidenciamos as potencialidades de se trabalhar o estudo de aula como mecanismo didático, visando a interação e compreensão dos alunos, para que possam desenvolver, de forma significativa, uma aprendizagem de qualidade com o ensino de matemática.

Palavras-chave: Residência Pedagógica, Educação Matemática, Estudo de Aula. Mecanismo Didático. Formação de Professores. Ensino de Matemática. Prática Futura. Aprendizagem de Qualidade.

1 Introdução

A nova geração de alunos, exigem um perfil docente preparado para diversas situações em sala de aula. Contudo, o que se observa na íntegra, é que a maioria dos professores insistem em permanecer no tradicionalismo, priorizando seu papel de mero transmissor de conhecimentos (Freire, 1996).

Em contrapartida, com intuito de provocar essa mudança, programas como o Residência Pedagógica - RP, têm sido experimentados para verificar se o aperfeiçoamento na formação de professores e a exploração de diversos mecanismos didáticos surtem efeitos positivos na aprendizagem e construção da cidadania dos alunos. Diversos graduandos no país se tornaram bolsistas do programa financiado pela CAPES, que teve início no mês de agosto de 2018, em conformidade com a política nacional. Com isto, a formação de professores foi fortalecida, constituindo um profissional mais maduro e conhecedor de sua própria identidade docente.

Na área de Matemática, isto têm um grande significado, sabendo que ainda existe uma rejeição pela mesma. As tarefas propostas pelo Programa Residência Pedagógica, executado na Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campus Monteiro/PB, na etapa inicial, promoveram leituras e discussões de vários temas, dentre eles o estudo de aula, que despertou o interesse para escrever este artigo.

O Estudo de Aula é um mecanismo didático, com grandes potencialidades como processo de formação, já que os professores trabalham em conjunto visando a aprendizagem de seus discentes. Assim, neste artigo levantamos questões sobre o estudo de aula e como a sua realização favorece a formação inicial dos residentes.

Onuchic e Huanca (2013) num dos capítulos “A licenciatura em Matemática: o desenvolvimento profissional dos formadores de professores”, publicado no livro Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior, no ano de 2013, colocam algumas perguntas que podem ser inquietações de muitos pesquisadores sobre a formação de professores de Matemática.

> Como está nossa matemática? Como está nossa educação matemática? O que nós, pesquisadores, estamos produzindo nessa linha? Como nossa pesquisa acadêmica se relaciona com a educação básica? Há transferência do produto de nossas dissertações e teses para o trabalho do professor de matemática em sala de aula? Como concebemos a educação matemática no ensino superior? O que consideramos importante trabalhar, no processo de ensino e aprendizagem, com nossos alunos na licenciatura? Perguntamo-nos, também, se ser professor é uma profissão ou é apenas um ofício (Onuchic & Huanca, 2013, p. 310).

Todas essas perguntas fazem parte de inquietações de nossa vida enquanto alunos da formação inicial, também são perguntas que nos levaram a querer realizar o presente artigo, ou seja, nós residentes devemos estar preparados da melhor forma possível e que sejamos capazes de fazer matemática, sempre que possível, uma ponte de tópicos matemáticos que estamos estudando no curso de licenciatura em matemática com tópicos trabalhados nos Ensinos Fundamental e Médio.

2 Desenvolvimento

2.1 O Estudo de Aula na Residência Pedagógica

De acordo com Brasil (2018) o Residência Pedagógica é um programa articulado a CAPES que integra a Política Nacional de Formação de Professores e tem por objetivo unir teoria e prática através do aperfeiçoamento profissional nos cursos de licenciatura, promovendo a imersão do licenciando na escola de educação básica.

Através de um conjunto de etapas foi possível estudar a importância do estudo de aula como um mecanismo didático a ser aderido pelos profissionais que estão em campo, pelo qual irá promover ao professor uma visão mais ampla do aprendizado e desenvolvimento dos seus aprendizes.

O estudo de aula é realizado por uma equipe de professores e comunidade escolar, onde alguns professores centram-se na observação da aula lecionada por um ser docente, que não será o centro das atenções mas, o aluno e como ele desenvolve seu aprendizado. Em seguida iremos descrever como ocorreu as etapas de pesquisa e de como irão sobressair durante o andamento do Programa Residência Pedagógica.

2.1.1 Etapa 1: Entendo o Estudo de Aula através da pesquisa

Os bolsistas contemplados, iniciaram as atividades correspondente a etapa inicial entre os meses de agosto e setembro de 2018, no qual, tinham por exigências, o cumprimento de ações referentes a preparação teórica. Com isto, os estudos e as reflexões obtidas, ocasionaram discussões e tarefas definidas por parte do coordenador local, com intuito de refletir sobre a profissão docente.

Um dos textos indicados pelo coordenador do programa RP para discussão foi "O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática", publicado no bolema em 2016 pelos autores Ponte (et al., 2016), onde eles trazem um caso empírico de um estudo de aula, investigando as potencialidades desta ferramenta numa prática colaborativa e reflexiva; as quais iremos abordar.

2.1.2 Etapa 2: Observando a Realidade Escolar

O estudo de aula se tornou não apenas uma tendência nacional para formação de professores em Portugal, mas internacionalmente. Essa tendência ainda está sendo revista no Brasil, pois são estudos divulgados recentemente. A Educação básica brasileira vem atravessando momentos complicados, principalmente no ensino de matemática onde os alunos são treinados a resolver tecnicamente listas de exercícios e não a desenvolver seu pensar criticamente (Ponte et al., 2016).

Depois de receber todo suporte teórico, os integrantes do Programa Residência Pedagógica irão adentrar no convívio escolar por um período de quatro meses, para observarem, atividades em sala de aula, reuniões pedagógicas, conselho de classe, adquirir conhecimentos das atividades de gestão escolar. Por fim iremos preparar planos de atividades de acordo com as demandas educacionais dos alunos, onde de forma colaborativa desenvolveremos estudos de aula para sanar deficiências nas práticas dos professores de matemática e buscar efetivar uma aprendizagem diferenciada aos educandos, mostrando a eles uma nova visão da matemática.

2.1.3 Etapa 3: Prática dos estudos na regência

Conforme o Programa RP, os bolsistas após o período de observação, ficaram mais 10 meses residindo na escola, ou seja, no mínimo contendo 100 horas de regência de classe, de um total de 320 horas a cumprir da terceira etapa do Programa RP. Seguindo este cronograma e com base nas observações realizadas na etapa 2, iremos colocar em prática tudo que foi planejado, discutido e refletindo colaborativamente o que pode servir de apoio para entendermos o processo de ensino e aprendizagem decorrente do dia a dia do professor e seus alunos em sala de aula.

2.2 Estudo de Aula: Teoria e Prática para Capacitação dos Professores de Matemática

O estudo de aula se constrói inicialmente, com um problema sob as orientações curriculares, os resultados de investigação sobre a aprendizagem do tópico e a sua experiência anterior, além de prever "dificuldades dos alunos, antecipam possíveis questões que possam surgir na aula, constroem tarefas, formulam estratégias de ensino e preparam instrumentos para a observação", onde um grupo de professores, o qual todos participam não apenas lecionando, mas observando e tirando nota. Este ciclo significa que, o mais relevante é a aprendizagem dos alunos, promovendo nos professores, a autoconfiança e aprofundamentos teóricos.

O texto dos autores Ponte (et al., 2016) apresenta um caso na cidade de Lisboa, onde foram feitos estudos de aula para investigar as suas potencialidades e expandir este trabalho. Pela opinião da direção da escola, cinco professoras foram escolhidas. Inicialmente, negociou-se sobre os objetivos e a preparação das aulas, e ao final, notando-se um maior interesse, relatou-se a experiência. Reunidas, as professoras discutiram sobre os possíveis erros dos alunos, possíveis soluções, os questionamentos; como também, o que poderia ser feito para que eles pudessem compreender melhor sobre o assunto abordado, estes levantamentos foram chamados de discussão e natureza das tarefas, e análise das dificuldades dos alunos.

Após essa discussão, realiza-se um diagnóstico dos conhecimentos dos educandos, com o intuito de adaptar tarefas de acordo com os objetivos propostos, isto é, o planejamento. Depois, houve a discussão do diagnóstico e o que permeia nesta etapa, é a troca de experiências pelas professoras. Ao final, obtêm-se a sistematização das principais dificuldades e o conhecimento dos alunos.

Uma nova etapa, é a análise dos processos de raciocínio por meio dos exemplos resolvidos pelos alunos: a generalização e a justificação, que possibilitaram a troca de ideias sobre as oportunidades de generalização e tarefas para a aula de investigação, definindo novas atividades a serem feitas. Também foram feitas discussões coletivas na sala de aula, chamando atenção para o desempenho da aula investigativa.

2.3 Aprendendo a aprender ensinando: discussões sobre o Estudo de Aula

Finalizado o estudo de aula, foi feito um balanço global, expondo cada momento e questionando a experiência e a estranheza inicial das professoras; se valeu a pena investir nessa formação profissional; o que tinham achado da resolução de tarefas de matemática; a importância da realização do diagnóstico e de analisar a natureza das tarefas e o raciocínio dos alunos; e por fim, refletiram sobre o planejamento, a aula de investigação e sobretudo a reflexão pós-aula. Por conseguinte, as professoras refletiram sobre o trabalho realizado, como sintetiza Ponte (et al. 2016)

> Ao longo desta reflexão, as professoras reconheceram vários fatores que as podem ter levado a envolver-se no trabalho como a resolução de tarefas matemáticas e a exploração de temas como a natureza das tarefas e os processos de raciocínio dos alunos. Valorizaram em especial a importância das discussões coletivas na sala de aula. Destacaram ainda o trabalho colaborativo e a oportunidade para se constituírem num grupo de trabalho onde se integraram as professoras novas na escola (PONTE et al., 2016. p. 885).

Por não estarem acostumadas com estas tarefas no seu dia a dia, as professoras apresentaram uma significativa mudança o qual evidenciou a construção de novos saberes, o protagonismo da equipe formadora, o trabalho em equipe das professoras e a estrutura no geral do que foi abordado em cada uma das sessões, e o envolvimento em geral com os estudos de aula, tornando a profissão docente cada vez mais prazerosa.

Após a leitura do texto sobre o estudo de aula como processo de desenvolvimento de professores de matemática dos autores Ponte (et al., 2016), escrevemos uma resenha e posteriormente, debatemos sobre; procurando associar os fatores do texto, com o cronograma da Residência Pedagógica para a efetivação das tarefas propostas.

2.4 Uma Análise do Estudo de Aula Como Mecanismo Didático

Nos dias atuais, surgem novos desafios para o ensino da matemática. É neste sentido que é exigido do professor uma releitura da sua prática em sala de aula continuadamente, para isto, o professor deve sair de sua zona de conforto e tomar uma nova postura frente as suas próprias limitações, é neste sentido que as aulas ganham caracterizações peculiares, pois, os alunos são tratados não como meros telespectadores, mas, como protagonizadores de um ensino de qualidade. De acordo com Nóvoa (1992):

> A formação não se constrói por acumulação (de cursos, de conhecimentos ou de técnicas), mas sim através de um trabalho de reflexividade crítica sobre as práticas e de (re)construção permanente de uma identidade pessoal. Por isso é tão importante investir a pessoa e dar um estatuto ao saber da experiência (NÓVOA, 1992, p. 13).

Por parte de muitos profissionais das licenciaturas em matemática, a uma grande preocupação com a forma de como o professor leciona sua aula, suas experiências e de como os alunos desenvolvem o aprendizado. É neste sentido que o estudo de aula torna-se tão importante ao ponto de mostrar ao professor as situações que necessitam de mudança em sala de aula, conduzindo o docente a uma análise do que está sendo transmitido, aperfeiçoando sua prática através do que ele ensina e de como seus alunos aprendem. A prática aqui analisada pelo professor irá fruir de acordo com o desenvolvimento dos seus alunos, não será algo repentino, porém, trabalhado, levando-o a pensar criticamente. Para que um trabalho como o estudo de aula seja desenvolvido em uma instituição de ensino, deve haver uma efetivação do corpo docente, neste caminho a inexperiência ou comodismo devem ser vencidos como Barros (2018) disse,

> O impacto da experiência do professor sobre o aprendizado dos alunos pode ser afetado por vários fatores, como o próprio comportamento do docente. Pode ocorrer, por exemplo, que professores mais experientes reduzam seu nível de esforço exatamente por perceberem que são melhores ou por serem mais bem remunerados por tempo de serviço e não por terem um melhor desempenho em sala de aula. Se isso acontecesse, o impacto potencial da experiência sobre o aprendizado do aluno estaria subestimado, pois os professores anulariam parte desse efeito com um menor empenho (Barros, 2018, online)

Ao tratar o estudo de aula como mecanismo didático, surgem uma corporação de procedimentos que devem ser seguidos e analisados com certa rigidez e comprometimento dos futuros professores. O ensino através do estudo de aula é composto por uma sequência de tarefas como planejamento, discussão e análise de aulas que tem por objetivo conhecer as dificuldades dos alunos, os aspectos positivos de cada um e buscar de forma concreta a compreensão do aluno, para que ele possa desenvolver seu conhecimento. É neste papel traçado pelo professor que a didática tem sua participação efetiva, pois, sem ela seríamos meros reprodutores. Libâneo (2017) diz,

> O ensino consiste no planejamento, organização, direção e avaliação da atividade didática, concretizando as tarefas da instrução; o ensino inclui tanto o trabalho do professor (magistério) como a direção da atividade de estudo dos alunos. Tanto a instrução como o ensino se modificam em decorrência da sua necessária ligação com o desenvolvimento da sociedade e com as condições reais em que ocorre o trabalho docente. Nessa ligação é que a Didática se fundamenta para formular diretrizes orientadoras do processo de ensino (Libâneo, 2017, p.53).

3 Conclusão

Carvalho e Carvalho (2012) enfatizam que a incumbência do professor nas escolas e instituições de Ensino Superior é a de discutir o próprio processo de educação, o que passa por estimular a curiosidade e a seriedade dos alunos, não garantindo, mas permitindo que estes percebam que existem contradições na sociedade, possibilitando com isso que alguns continuem de maneira mais comprometida nesse processo de transformação.

Nesse sentido, Onuchic e Huanca (2014) dizem que, uma proposta de formação inicial precisa dar oportunidade aos professores e futuros professores, entre outras situações, de repensar e problematizar suas concepções sobre processos de ensino e de aprendizagem.

> Diante da atenção voltada para o ensino, apresentamos uma perspectiva sobre o conhecimento do conteúdo no ensino, a qual considerava importante na formação de professores, baseada em três categorias: conhecimento do conteúdo da matéria; conhecimento pedagógico do conteúdo; e conhecimento curricular (Shulman, 1986, apud Onuchic & Huanca, 2014, p. 1023).

Assim, ao discutirmos sobre o estudo de aula, nos deparamos com suas potencialidades e como este seria útil para as tarefas do Residência Pedagógica, apropriando suas respectivas situações didáticas. Deste modo, houve o diálogo da teoria com a prática das professoras, que apresentaram significativo avanço em seu desenvolvimento profissional.

Concomitantemente, nos imaginamos atuando no estudo de aula e como este atribuirá valor à nossa profissão docente. O estudo de aula é um mecanismo didático fundamentado na colaboração e na reflexão, e no entanto, requer cuidados para seu indispensável sucesso.

4 Bibliografia e referências

Barros, R. P. *Experiência do professor em sala de aula*. Disponível em http://www.paramelhoraroaprendizado.org.br/Conteudo/verbete.aspx?canal=2010070114555050 1160&subtema=20100615161126445512&verbete=20110419151037476242. Acesso em 25 out. 2018.

Brasil. (2018). *Residência pedagógica*. CAPES. Disponível em: https://capes.gov.br/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica. Acesso em 25 out 2018.

Carvalho, L. M. O., &Carvalho, W. L. P. (2012). *Formação de professores e questões sociocientíficas no ensino de ciências*. São Paulo: Escrituras.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática docente*. São Paulo: Paz e Terra.

Libâneo, J. C. (2017). *Didática*. Cortez Editora.

Nóvoa, A. (1992). *Formação de professores e profissão docente*. Lisboa: Dom Quixote.

Onuchic, L. R., & Huanca, R. R. H. (2013). A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: Frota, M. C. R., Bianchini, B. L. & Carvalho, A. M. F. T. (Orgs.). *Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior*. 1ed. Campinas: Papirus, p. 307-331.

Onuchic, L. R., & Huanca, R. R. H. (2014). Uma Revolução no Campo da Formação dos Professores de Matemática. In: A*nais do II Congresso Nacional de Formação de Professores e XII Congresso Estadual Paulista sobre Formação de Educadores*. Águas de Lindóia: Universidade Estadual Paulista, p. 1020-1031.

Ponte, J. P. d. et al. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Bolema*, v. 30, n. 56, p. 868–891.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Una comunidad de práctica de profesores en formación que reflexiona sobre el concepto de función

Andrea Carolina **Quintero** Baños
Universidad Industrial de Santander
Colombia
Andreacquinterob@gmail.com
Sandra Evely **Parada** Rico
Universidad Industrial de Santander
Colombia
Sanevepa@uis.edu.co

Resumen

En este documento se presenta el avance de una investigación que está enmarcada en la línea de formación de profesores, específicamente en la formación inicial. Ésta tiene como objetivo caracterizar el pensamiento reflexivo de una comunidad de práctica de profesores de matemática en formación que negocia el concepto de función. Por medio de éste, se pretende responder a la pregunta: ¿Qué significados sobre el concepto de función y su enseñanza, construye una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación? Para lograr el objetivo de investigación proponemos trabajar bajo una interpretación del modelo de Reflexión-y-Acción (R-y-A) de Parada (2011), modelo que facilita al profesor en formación analizar y reflexionar sobre aspectos puntuales de sus primeras prácticas. A su vez, proponemos una metodología para trabajar en cursos de formación inicial de profesores de matemáticas que se caracterizan como una comunidad de práctica.

Palabras clave: Modelo de reflexión y acción, formación de profesores, comunidad de práctica, negociación de significados, concepto de función.

Problemática y contexto

Algunos autores como Hitt, (1996; 1998), Olvera (2015), Carlson y Oehrtman (2005) y Amaya, Pino-Fan, Medina (2016) mencionan dificultades que tanto estudiantes como profesores muestran en la comprensión del concepto de función. En particular, es de gran preocupación las dificultades que los docentes puedan presentar alrededor de un concepto, ya que estos son quienes tienen la tarea de enseñar. Shulman (1987) ratifica que un profesor que hace parte de una unidad educativa, debe comprender bien la estructura y la organización conceptual de la materia a enseñar.

En el desempeño del profesor, se deben afrontar constantemente situaciones donde no se tiene una respuesta inmediata, y es aquí cuando pueden salir a flote las diferentes dificultades

que los docentes tienen alrededor de un concepto. Por ello, es de gran importancia incentivar a los docentes a realizar constantemente una tarea reflexiva sobre su quehacer, y que dicha reflexión sea vista como un proceso de aprendizaje, en el que se identifiquen dificultades y fortalezas, para así plantear alternativas de mejoramiento y superación.

Al respecto, Flores (1998) recalca la importancia de la reflexión como una herramienta en la formación inicial y desarrollo profesional de los profesores, ya que esta permite que los profesores mediten e indaguen sobre las dificultades que se pueden presentar en su práctica.

La universidad industrial de Santander (UIS) cuenta con una Licenciatura en Matemáticas, la cual tiene tres ejes de formación, matemático, didáctico y pedagógico. El eje matemático, es el encargado de brindar una formación sólida sobre los objetos matemáticos, y es en el componente didáctico donde los estudiantes se confrontan con sus saberes, esto se da en el momento en que reflexionan epistemológica y didácticamente sobre los diferentes objetos matemáticos, precisamente cuando necesitan hacer diseños didácticos para la enseñanza.

Una de las materias que ofrece este componente didáctico es Didáctica del cálculo, la cual está orientada específicamente a reflexionar sobre los objetos matemáticos estudiados en Cálculo, entre ellos el concepto de función. Este curso ofrece una balanza equilibrada de aspectos epistemológicos y aspectos didácticos del cálculo diferencial, por lo tanto, su objetivo es ofrecer desde la teoría y la práctica fundamentos para el diseño de metodologías adecuadas para el aprendizaje del cálculo (Escuela de Matemáticas, 2010).

En este contexto, se identifican dos oportunidades de investigación y acción para la mejora de un programa de formación inicial de profesores, oportunidades como: i) la constitución de comunidades de práctica para la formación inicial de profesores, y, ii) el fortalecimiento tanto conceptual como didáctico de la noción de función.

Así, resulta de nuestro interés responder a la pregunta de investigación: ¿Qué significados sobre el concepto de función y su enseñanza, construye una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación? Para dar respuesta a esta pregunta, nos planteamos como objetivo: caracterizar el pensamiento reflexivo de una comunidad de práctica de profesores de matemática en formación que negocia el concepto de función.

Aspectos teóricos y conceptuales

Para el desarrollo de la investigación usaremos principalmente una interpretación del modelo Teórico-metodológico de Reflexión y Acción (R-y-A) de Parada (2011), en el cual se propone trabajar al interior de Comunidades de Práctica (CoP) de educadores matemáticos. Dado que dicho modelo se enmarca dentro de la teoría social de las CoP, es importante describir aquí algunos de los elementos de dicha teoría.

Para Wenger (1998), una CoP es un grupo de personas que tienen algunas cosas en común, por ejemplo, comparten una preocupación, un conjunto de problemas o presentan interés por algún tema, y que sobre lo que tienen en común, trabajan colaborativamente para construir el conocimiento que favorecerá a cada uno de los miembros de la comunidad.

El mismo autor menciona que dentro de las comunidades de práctica se posibilitan tres aspectos particulares: i) la negociación de significados: es el proceso mediante el cual los participantes de una comunidad de práctica interactúan unos con otros, permean y enriquecen sus

significados con relación a los de los demás; ii) la participación: se refiere al proceso que combina las habilidades de hacer, hablar, pensar, sentir y pertenecer, y se caracteriza por ser un proceso tanto personal como social en el que interviene el cuerpo, mente, emociones y relaciones sociales, y; iii) la cosificación: puede verse como un proceso o un producto que incluyen hacer, diseñar, representar, nombrar, codificar, describir, percibir, interpretar, utilizar, reutilizar, descifrar y reestructurar, pero tomando estos no solamente como objetos concretos, sino también como reflejos de las prácticas y de los significados propios de los participantes de una comunidad de práctica.

Una interpretación del modelo R-y-A para el estudio de la función

Como ya se había mencionado, Parada (2011) retoma las ideas de la teoría de comunidades de práctica de Wenger (1998) en el planteamiento de un modelo teórico y metodológico denominado *modelo de reflexión-y-acción en comunidades de práctica de educadores de matemáticas (R-y-A).* La Figura 1 presenta una interpretación de dicho modelo.

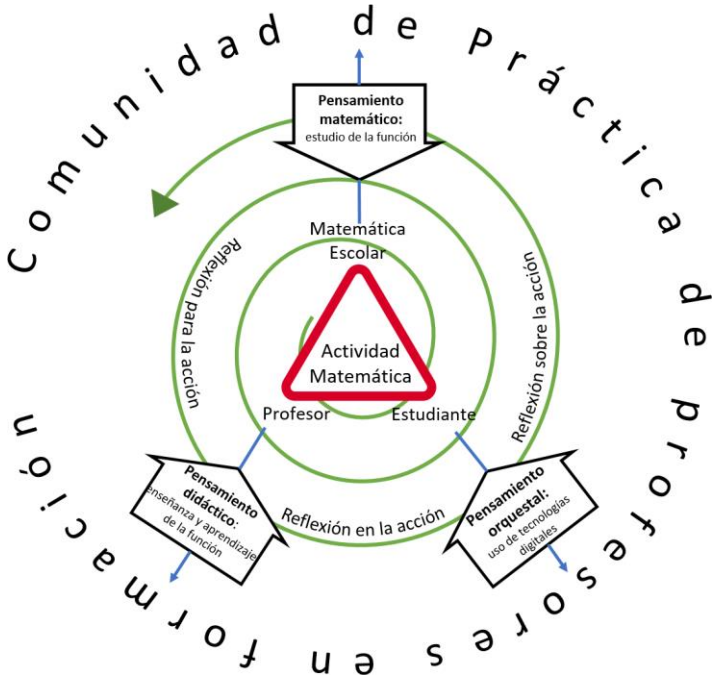


Figura 1. Bosquejo de la Interpretación del modelo R-y-A de Parada (2011)

La descripción del modelo R-y-A que se recoge en este documento se hace desde las palabras del autor, la cual se encuentra ampliamente explicada en Parada (2011). El anillo exterior hace énfasis en que las actividades de reflexión y acción que se plantean se promueven al interior de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas, en la investigación que aquí se reporta hablaremos de una comunidad de profesores de matemáticas en formación que hacen parte de un curso de didáctica del cálculo.

El esquema tiene una lectura del centro al exterior. Tiene de fondo la actividad matemática que surge de la interacción de un triángulo pedagógico tomado de Saint-Onge (1997) citado por Parada (2011), en el que se identifican las siguientes relaciones: i) Matemática escolar - profesor:

relación de comprensión; ii) Profesor – estudiante: relación de mediación, y; iii) Estudiantes – matemática escolar: relación de estudio.

Parada retoma las ideas de Chevallard, Bosh y Gascón (1997) para caracterizar la actividad matemática por medio de tres tipos de actividades que pueden considerarse matemáticas: i) cuando se resuelven problemas a partir de herramientas que ya se conocen; b) enfrentarse a un problema que no sabe resolver, y; iii) cuando se crean matemáticas. En el modelo R-y-A se espera que sea el profesor quien despliegue una actividad matemática, para que tenga claridad de qué es lo que quiere lograr en la clase, y como lo va a lograr, esto en términos de los tres tipos de pensamiento.

Por otro lado, la autora explica que el modelo se muestra en forma de espiral, porque considera que los procesos de reflexión van evolucionando en la medida en que se van haciendo parte del ser humano; las reflexiones van a ser más objetivas, más críticas y con mayor sustento en la medida que se analizan. Parada propone realizar el proceso de reflexión en tres momentos: i) reflexión-para-la acción, la cual se da antes de la clase; ii) reflexión-en-la acción, se hace presente durante la clase, y; iii) reflexión-sobre-la acción, se da después de clase. Terminados los tres momentos, se inicia otra vuelta en espiral.

Las tres flechas que se presentan alrededor de la espiral, dan cuenta de tres aspectos sobre los cuales se propone desarrollar el pensamiento reflexivo de los profesores de matemáticas y son transversales en los tres procesos de reflexión. Estos aspectos son: pensamiento matemático (estudio de la función), pensamiento didáctico (enseñanza y aprendizaje de la función) y el pensamiento orquestal (Uso de tecnologías digitales).

Aspectos metodológicos

Esta propuesta se basa en la metodología de investigación acción-colaborativa, desde la perspectiva de Elliott (1993), quien menciona que este tipo de investigación se encarga de realizar un estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción en la misma, y es colaborativa porque la investigadora tiene el papel de moderadora en la comunidad de práctica.

La población en la cual llevaremos a cabo la investigación, es un curso de didáctica del cálculo que hace parte de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS. Una primera planeación curricular del curso caracterizado como comunidad de práctica, fue realizada como contexto de la investigación aun en curso de Amaya (2017), la cual fue puesta en escena durante el primer semestre del 2018.

Para el segundo semestre del presente año, se tomó como base la planeación del curso anterior, con algunas modificaciones, con el fin de que las dinámicas allí definidas posibilitaran en el curso la reflexión sobre el concepto de función.

A continuación se describen las fases del proceso metodológico de la investigación, del cual se presenta un bosquejo en la Figura 2.

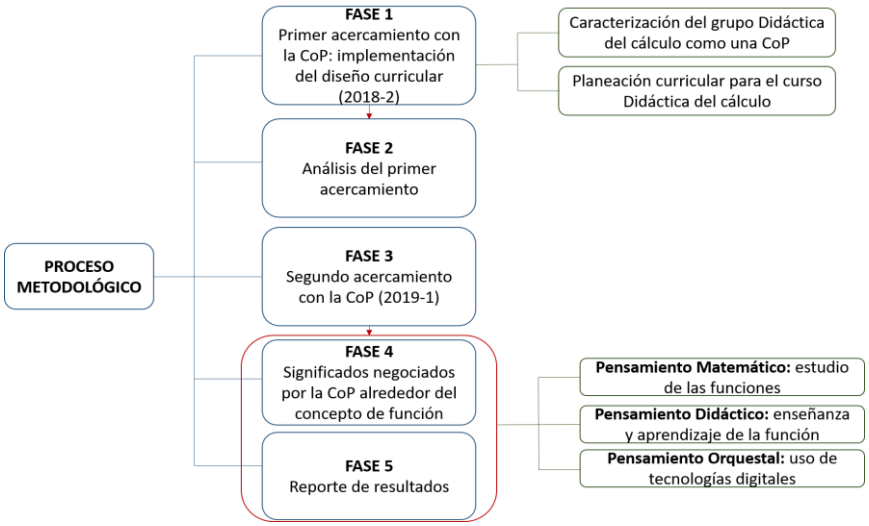


Figura 2. Esquema proceso metodológico

FASE 1: Primer acercamiento con la CoP: implementación del diseño curricular

Como ya se mencionó, la planeación curricular de este curso se está llevando a cabo durante el segundo semestre de 2018. Para la planeación de éste, y para posibilitar la negociación de significados de los profesores en formación, fue esencial el modelo de Reflexión y Acción descrito en el apartado anterior.

En un primer momento se caracteriza el grupo Didáctica del cálculo como un CoP en términos de Wenger (1998), quien menciona que éstas deben cumplir 3 criterios: tener compromiso mutuo, ser una empresa conjunta y tener un lenguaje compartido.

Un segundo momento de la fase 1, es la planeación curricular para el curso Didáctica del cálculo. Ésta planeación se compone de cuatro partes esenciales: exposiciones, tutorías, talleres y un proyecto de diseño didáctico. La participación directa de la investigadora, será en la implementación de los talleres y el diseño curricular que deben realizar los profesores en formación.

Las actividades del diseño curricular del curso, posibilitan que la clase sea un espacio de exploración, reflexión y cosificación de significados, donde se favorece los debates y discusiones alrededor de temas que hacen parte del cálculo diferencial (variación, funciones, límites y derivadas).

FASE 2: Análisis del primer acercamiento

La implementación de la planeación curricular antes descrita, la analizaremos a lo largo del semestre con la intención de ir realizando los ajustes para el nuevo acercamiento con la CoP (2019-1). Para ello, llevaremos a cabo el diseño de una matriz en la que se cruzarán las diferentes actividades de la comunidad con los tres aspectos del pensamiento reflexivo del modelo teórico R-y-A. Aspectos que tomaremos como categorías de análisis.

FASE 3: Segundo acercamiento con la CoP

La implementación del rediseño curricular del curso Didáctica del cálculo, en el cual haremos las modificaciones necesarias tanto a la metodología del curso como a los talleres de reflexión, modificaciones que surgirán de los resultados de la fase 2.

FASE 4: Significados negociados alrededor del concepto de función

Para el análisis de los datos usaremos el modelo R-y-A de Parada (2011), de donde se retoman sus tres pensamientos que usaremos como categorías de análisis: Pensamiento matemático, Pensamiento didáctico y Pensamiento orquestal.

FASE 5: Reporte de resultados

El reporte de resultados dará cuenta de un par de casos de estudio, en los que se pueda evidenciar el proceso de negociación logrado a partir de las dinámicas posibilitadas en la comunidad de práctica.

Algunas reflexiones

Algunas reflexiones respecto a lo que se ha hecho hasta el momento son: i) El grupo Didáctica del cálculo como CoP ha pasado de tener una participación aislada a tener una participación natural, ii) La planeación del curso ha permitido que los profesores en formación reflexionen sobre cada una de las acciones llevadas a cabo en la CoP, y iii) Se ha evidenciado que los profesores en formación presentan dificultades en el concepto de función, ven la función únicamente como una interdependencia de variables.

Referencias y bibliografía

Amaya, E. (2017). Significados de la demostración en una comunidad de práctica de profesores de matemática en formación. (Propuesta de investigación no publicada). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Amaya, T. Pino-Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. Educación Matemática, Volumen 28, pp. 111-144.

Carlson, M. y Oehrtman, M. (2005). Research sampler 9: Key aspects of knowing and learning the concept of function. *Mathematical Association of America*. Recuperado de http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html

Elliott, J. (1993). El cambio educativo desde la investigación-acción, Madrid: Morata.

Escuela de Matemáticas. (2010). *Proyecto educativo que soporta la reforma del programa de Licenciatura en Matemáticas*. Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga.

Flores. P. (1998) Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos. *Revista de didáctica de las matemáticas*, Volumen 17, pp. 37-50.

Hitt F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Editor), *Investigaciones en Educación Matemática* Vol. I (pp. 245-264). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Hitt F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, *17* (1), 123-134.

Olvera, M. (2015). *El uso de herramientas digitales en el estudio de funciones y el desarrollo de competencia matemática para la enseñanza.* (Tesis de Doctorado). Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional.* (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.



Jogos e aplicativos matemáticos para os anos iniciais

Alexandre **Wegner**
Universidade de Santa Cruz do Sul - UNISC
Brasil
alexandrewegn@unisc.br
Cláudio José de **Oliveira**
Universidade de Santa Cruz do Sul - UNISC
Brasil
coliveir@unisc.br
Daiane **Kipper**
Universidade de Santa Cruz do Sul - UNISC
Brasil
daianekipper25@gmail.com

Resumo

O objetivo da presente comunicação consistiu em desenvolver atividades pautadas no uso de tecnologias na Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Com base nesse objetivo, apresentamos a problemática que conduz e impulsiona o presente estudo: Como alunas do curso de Pedagogia avaliam o uso de jogos e aplicativos para o ensino das Matemáticas em sala de aula? A produção de dados se deu em uma aula da disciplina de *Linguagem Matemática na Educação I* no curso de Pedagogia. As atividades foram realizadas em grupos, com os quais foram trabalhados jogos e aplicativos matemáticos. Com base nessas experiências, as alunas realizaram relatos escritos, os quais compõem a empiria da pesquisa. Da análise do material de pesquisa, podemos inferir que experiências com o uso de recursos tecnológicos na formação inicial de professores que ensinam Matemática, são relevantes para o exercício da sua profissão.

Palavras-chave: educação, matemática, pedagogia, tecnologia, jogos, aplicativos, formação de professores, anos iniciais.

Introdução

Entendemos a e concebemos a Matemática Escolar “como uma disciplina diretamente implicada na produção de subjetividade, como uma das engrenagens da maquinaria escolar que funciona na produção dos sujeitos escolares” (Knijnik, Wanderer, Giongo, & Duarte, 2012, p.

25). Compreendemos que a Matemática ensinada e aprendida na escola é uma das matemáticas, pois no cotidiano dos mesmos há outras formas de se pensar matematicamente. De acordo com Neves (2016, p. 264) "No discurso da Educação Matemática, um dos enunciados que têm servido para justificar o baixo aproveitamento dos alunos em Matemática é o de que "Os alunos não aprendem Matemática por 'falta de base'". Sabemos que esse discurso toma como referência a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar, pois essa 'falta de base' se dá no contexto da sala de aula. Logo, uma pergunta se apresenta: de qual base estamos falando? Com isso, os cursos de Pedagogias têm um importante papel no entendimento dessa 'base matemática', pois são os professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais responsáveis pelas primeiras experiências dos alunos com a Matemática Escolar.

Para compreender a relação de futuros professores, estudantes de Pedagogia, com a Matemática Escolar recorremos a tecnologia como uma ferramenta propulsora na sala de aula. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN) já abordavam a inserção de tecnologias na sala de aulas, desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. De acordo com o referido documento:

> O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, completar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão dos conhecimentos. Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento (Brasil, 2000a, p.41).

Com base nas experiências, do primeiro autor deste estudo, como professor em diversos cursos de graduação, a empiria da pesquisa emergiu da oportunidade em ministrar uma aula em formato de oficina para alunas do curso de Pedagogia, na disciplina *Linguagem Matemática na Educação I*. O objetivo da referida oficina consistiu em desenvolver atividades pautadas no uso de tecnologias na Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Com base nesse objetivo, apresentamos a problemática que conduz e impulsiona o presente estudo: *Como as alunas do curso de Pedagogia avaliam o uso de jogos e aplicativos para o ensino das Matemáticas em sala de aula?*

Para potencializar a atividade e atender ao objetivo proposto em atribuir importância aos jogos e aplicativos matemáticos possíveis de serem usados por docentes em suas aulas, para o ensino das Matemáticas nos anos iniciais do Ensino Fundamental; criamos uma lista de jogos e aplicativos que pode ser conferida na tabela abaixo:

Quadro 1

Resumo dos jogos e aplicativos usados em sala de aula com seus links de acesso

Jogo nº	Nome do jogo	Link de acesso
1	Números	http://www.jogosgratisparacriancas.com/jogos_bebes_criancas/jogar_numeros.php
2	Jogo do Bóris	http://www.jogosgratisparacriancas.com/jogos_bebes_criancas/16-jogo-boris.php
3	Corujas	http://www.jogosgratisparacriancas.com/jogos_bebes_criancas/14-jogar-corujas.php
4	Diferenças	http://www.jogosgratisparacriancas.com/jogos_criancas_clique/13_diferencas1.php
5	Tangram	https://rachacuca.com.br/jogos/tangram-32/
6	O lobo e a ovelha	https://rachacuca.com.br/jogos/o-lobo-e-a-ovelha/
7	Número Complementa.	https://rachacuca.com.br/jogos/numeros-complementares/
8	Paciência	Geralmente disponível nos computadores
Aplicativos nº	Nome do aplicativo	Link de acesso
1	Adição e subtração	https://play.google.com/store/apps/details?id=kids.juegodesumas&hl=pt_BR
2	Tabuada básica	https://play.google.com/store/apps/details?id=br.com.jeronimo.tabuadabasica&hl=pt_BR
3	Kids numbers and math	https://play.google.com/store/apps/details?id=zok.android.numbers&hl=pt_BR
4	Formas	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.oki.shapes&hl=pt_BR
5	Crianças jogos mat.	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.preschool.kidsmathgames&hl=pt_BR
6	Matemática de miúdos	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.developdroid.mathforkids&hl=pt_BR
7	Protractor	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.keuwl.protractor
8	Conversos de unid.	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.ba.universalconverter
9	Aprender. a contar o tempo	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.TellingTimeForKids
10	Photomath	https://play.google.com/store/apps/details?id=com.microblink.photomath

Fonte: material utilizado pelos autores, quando do trabalho com jogos e aplicativos.

Ações metodológicas

A proposta foi desenvolvida de forma prática, pois os jogos foram projetamos através do *data show* e explorados pelas alunas através do seus notebooks e celulares conectados à internet. Ao projetar a lista de jogos e aplicativos, para serem manipulados durante a aula, destacamos a publicação de Dullius e Quartieri (2006, p. 2):

> A presença das tecnologias, principalmente do computador, requer das instituições de ensino e do professor novas posturas frente ao processo de ensino e de aprendizagem. Essa educação necessitará de um professor mediador do processo de interação tecnologia/aprendizagem, que desafie constantemente os seus alunos com experiências de aprendizagem significativas.

Frente as novas demandas, o professor se senti no dever de acompanhar os novos processos tecnológicos, tarefa que não tem sido fácil frente a rapidez das mudanças. A formação inicial apresenta-se como um espaço importante para conhecer novas tecnologias e realizar trocas com de conhecimentos com os colegas. Para Valente:

> A introdução do computador na educação tem provocado uma verdadeira revolução na nossa concepção de ensino e de aprendizagem. Primeiro, os computadores podem ser usados para ensinar. A quantidade de programas educacionais e as diferentes modalidades de uso do computador mostram que esta tecnologia pode ser bastante útil no processo de ensino-aprendizado (Valente, 2007, p. 2).

Embasado em Valente (2007), Dullius e Quartieri (2006) escolhemos jogos e aplicativos para computador ou telefone celular, que permitissem trabalhar tópicos matemáticos desenvolvidos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamenta. Na tabela, primeiramente apresentamos oito jogos, que são: O jogo 1, *Número,* foi escolhido para trabalhar a "contagem de números naturais"; o jogo 2, *Jogo do Bóris*, foi escolhido para trabalhar com "noções de maior ou menor"; o jogo 3, *Kids numbers and math*, retorna o conteúdo de "contagem", e trabalha "multiplicação por 2", "maior ou menor"; o jogo 4, *Formas*, analisa as questões de "diferença ou igualdade"; o jogo 5, *Crianças jogos mat*., foi escolhido por trabalhar com a geometria, a rotação, a localização e a imaginação; o jogo 6, *Matemática de miúdos*, induz a criação de "planos estratégicos" e "raciocínio lógico"; o jogo 7, *Protractor,* além de trabalhar as questões do jogo 6 também trabalha a soma, pois precisam complementar os números para encontrar o resultado "dez"; o último jogo analisado, *Paciência*, é encontrado em quase todos os computadores, o famoso jogo de "Paciência", cujo trabalha ordem, organização, diferenças, estratégia e se apresenta uma boa base para a área da Estatística.

Na mesma tabela, também apresentamos dez aplicativos desenvolvidos na oficina trabalhada na disciplina de *Linguagem Matemática na Educação I*, que foram adicionados pela maioria dos estudantes aos seus telefones, os quais são: O aplicativo 1, *Adição e subtração,* de modo divertido trabalha a "soma e a subtração"; o aplicativo 2, *Tabuada básica*, trabalha a "multiplicação"; o aplicativo 3, *Kids numbers and math,* é um kit completo para o exercício de várias "operações aritméticas" com figuras e objetos do cotidiano das crianças; o aplicativo 4, *Formas,* manipula as principais "formas geométricas" animadamente; o aplicativo 5, *Crianças jogos mat*, ocupa as "operações básicas" de modo divertido; como as "quatro operações" (adição, subtração, multiplicação e divisão) são muito importantes para o estudo nos anos iniciais do Ensino Fundamental; o aplicativo 6, *Matemática de miúdos,* trabalha a aplicação; o aplicativo 7, *Protractor*, introduz a ideia de "ângulo"; o aplicativo 8, *Conversos de unid.,* um interessante "conversor de medidas"; o aplicativo 9, *Aprender.a contar o tempo,* auxilia na compreensão do tempo e aprendizagem de como se lê as "horas no relógio" analógico; o último aplicativo,

Photomath, se utiliza da câmera do telefone do mesmo modo que o sétimo, uma ferramenta que pode ser interessante para a realização das tarefas de casa, pois realiza quase todas as operações do Ensino Básico ao Superior sem precisar digitar, apenas fotografar o que está escrito no caderno ou em outro lugar.

As alunas do curso de Pedagogia, que participaram como sujeitos da pesquisa, em grupos, fizeram o uso dos aplicativos e jogos sugeridos na tabela acima. Assim, todos os sujeitos puderem experimentar a matemática num formato digital e com isso verificar a efetividades desses softwares no ensino e aprendizagem das matemáticas. A tarefa da aula foi concluída com a pesquisa e indicação de outro jogo ou aplicativo para os colegas de curso, gerando lastro para mais trabalho. Na próxima etapa apresentaremos os relatos escritos dos participantes da atividade.

Relatos dos participantes da atividade

Conforme escrito nas *Ações metodológicas*, agora passamos a apresentar os relatos escritos dos sujeitos da pesquisa que foram realizados por grupo, sendo no total cinco grupos:

O grupo número um relata sobre os jogos quatro e cinco e o aplicativo nove: Através do jogo escolhido, *Aprender a contar o tempo*, a criança desenvolve na prática a noção das horas, onde o aplicativo pede para mostrar no relógio o horário indicado ao lado. Com este conhecimento, que normalmente é ensinado no 2º ano, a criança acaba, automaticamente, se policiando no horário e nos minutos, compreendendo assim o horário que começa a sua aula, o horário que precisa ir dormir para acordar cedo pela manhã e até o tempo que pode brincar, entre outros exemplos. (Grupo 01, sobre o aplicativo nº 9).

Jogo as *Corujas Observadoras* é um Jogo Educativo para crianças de 2, 3 e 4 anos. No jogo aparece inicialmente 1 coruja de um tamanho e determinada cor, depois de clicar a segunda vez apareceu outra coruja de cor e tamanho diferente, assim foi a sequência até aparecerem várias corujas de várias cores e tamanhos. Depois ao clicar novamente as corujas foram sumindo. O jogo é divertido e as crianças aprendem o conceito de causa e efeito. (Grupo 01, sobre o jogo nº 3).

Jogo *Tangram-Racha Cuca* consiste em completar figuras com formas geométricas, colocando-as simetricamente em seu devido lugar. As figuras prontas, sempre dão impressão de alguma coisa, parecem números, letras, animais, objetos, etc. É um jogo bastante viciante, quanto mais se joga, mais se quer jogar. Tem sempre as mesmas peças para formar as figuras diferentes. (Grupo 01, sobre o jogo nº 5).

O primeiro grupo fez menção a aprendizagem do tempo, o que nem sempre é fácil compreender a noção de hora com base em desenhos estáticos desenhados na cartolina (uma forma muito utilizada em sala de aula para trabalhar o tempo); analisou um aspecto importante de "causa e efeito" a partir das multiplicações por dois, comparações entre maior e menor. O *Tangram* foi citado entusiasticamente devido aos recursos geométricos que ele permite trabalhar, estudar, compreender.

A segunda equipe analisou principalmente os jogos cinco, seis, sete e oito: Com o jogo *Paciência* o aluno desenvolve a atenção e raciocínio lógico, os aspectos relacionados a ele são números, quantidade e sequência. Faixa de ensino: 3º ao 5º ano. (Grupo 02, sobre o jogo nº 8).

Lobo e a ovelha, esse jogo trabalha o raciocínio lógico, pois você faz várias tentativas até conseguir acertar. Raciocínio lógico, estratégica, faixa de ensino do 2º ao 5º ano. (Grupo 02, sobre o jogo nº 6).

Tangram desenvolve raciocínio, noção de espaço, tentativas e paciência, porque as crianças devem analisar as peças para ver onde é o lugar correto de cada uma. As cores também são importantes neste jogo. (Grupo 02, sobre o jogo nº 5).

Números complementares, esse jogo pede que se 'ligue' dois números que, somados, tenham resultado 10, assim, eliminado o maior número de bolinhas em menor tempo. Trabalha com o raciocínio e a percepção. (Grupo 02, sobre o jogo nº 7).

O grupo 2 preferiu analisar os jogos de estratégia e raciocínio lógico, citando o jogo de *Paciência* e no jogo *Lobo e a ovelha*, que requerem observação, tentativas, até alcançarem os objetivos, também destacaram os *Números complementares*, ferramenta apropriada para a criança estudante perceber, tentar e descobrir diferentes modos de se chegar ao resultado 'dez', até poderíamos dizer que é um começo para o estudo das 'Partições'. O *Tangram* também foi citado, por se tratar de um jogo que prende a atenção do aluno.

O grupo número 3 enfatizou os jogos quatro e cinco e os aplicativos três e nove: *Aprender a contar o tempo* estimula a concentração, a memorizar números, conhecer as horas. (Grupo 03, sobre o aplicativo nº 9).

Diferenças permite analisar as semelhanças e diferenças nas imagens apresentadas. Possibilitando também contar quantos são iguais/diferentes, agrupar e comparar. (Grupo 03, sobre o jogo nº 4).

Quebra-cabeça Tangram estimula o raciocínio, o pensamento lógico. Permite que a criança teste as possibilidades encaixando as peças. Desenvolve a capacidade de visualização e noção espacial, bem como as formas geométricas. (Grupo 03, sobre o jogo nº 5).

Kids numbers and Math estimula o aprendizado dos números, compreender diferenças entre maior e menor, subtração e multiplicação de forma lúdica e animada. (Grupo 03, sobre o aplicativo nº 3).

O referido grupo salientou as 'diferenças' para o estudante compreender a ordem de uma de uma 'reta numérica'. Também relataram sobre o fascínio da geometria no *Tangram*; do quanto o jogo pode se produtivo na compreensão da geometria.

O quarto grupo fez menção apenas ao jogo do *Tangram*, passaram praticamente a aula toda se desafiando chegando a níveis avançados em seu ranking: O jogo do *Tangram* é composto por 7 peças com formas e texturas diferentes e faz com que se trabalhe as tentativas. As fases que eu achei fácil, já para a minha colega passou a ser difícil, fazendo com que nós duas jogássemos juntas. O *Tangram* pode ser trabalhado na Educação Básica; também pode ser trabalhado manualmente, tendo possibilidades de construção de atividades e conceitos diferentes do computador. (Grupo 04, sobre o jogo nº 5).

No relato do grupo 5 foi destacado os jogos cinco, seis e o aplicativo dois: O jogo *Quebra-cabeça Tangram* exige concentração, raciocínio lógico, paciência e tempo para pensar cada passo no jogo, encaixando cada peça geométrica que faz parte do jogo, logo aprendem as formas geométricas. Tudo a ver com a Matemática. (Grupo 05, sobre o jogo nº 5).

No jogo, *O lobo a ovelha e a couv*e precisamos testar várias tentativas, até acertar, tivemos

vários erros com persistência conseguimos. Primeiro nós levamos a ovelha, depois a couve, mas não deixamos a ovelha sozinha com a couve, precisamos pensar como se fosse um quebra-cabeça. Para ajudar as crianças a pensarem e estimularem o raciocínio lógico. (Grupo 05, sobre o jogo nº 6).

Aprendendo a tabuada, com o aplicativo a criança responde o resultado da multiplicação que aparece na tela. O professor pode construir as tabelas de multiplicação com os alunos, utilizando o aplicativo. (Grupo 05, sobre o aplicativo nº 2).

Trabalharam com estratégias de soluções apoiadas nos jogos cinco e seis; foram os únicos a darem visão exclusiva ao aplicativo do *Aprendendo a tabuada*, consideram importantíssima a questão de se aprender e construir as tabelas de multiplicação.

Nessa perspectiva, o entendimento das alunas do curso de Pedagogia com relação a atividade desenvolvidas durante a aula ministrada na disciplina *Linguagem Matemática em Educação I*, estão em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental, lendo:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas (Brasil, 2000b, p. 46).

A tecnologia como uma possibilidade de compreender a Matemática escolar e a Acadêmica com base em um formato digital que dá movimento ao conteúdo, ou seja, uma forma interativa de ‘matematizar’. Tendo em vista que o mundo tem se tornado cada vez mais digital, a forma como pensamos e matematizamos tem acompanhado as mudanças tecnológicas, logo a sala de aula precisa se aproximar do mundo digital que está sendo vivenciado e experimentado cada vez mais por crianças e adolescentes.

Considerações

Ao ler os relatos dos participantes da atividade fica evidente que o uso de jogos e aplicativos, são efetivos para pensar as matemáticas em sala de aula. Observamos que todos os grupos fizeram uso do jogo número 5, *Tangram*, sinalizando as possibilidades de encantamento das alunas para o desenvolvimento do raciocínio lógico, matemático, geométrico. Isso não significa que os mesmos não tenham acesso ao jogo mencionado na versão física, mas no formato digital o *Tangram* o jogo envolveu os sujeitos da pesquisa de uma forma lúdica e interativa

Com base nos relatos escritos foi observada no que os alunas do curso de Pedagogia consideram importantes os exercícios para a organização do pensamento. Os jogos e aplicativos podem contribuir na formação de atitudes e para enfrentar desafios em outras situações da vida cotidiana Também podemos inferir que os jogos e aplicativos podem ser facilitadores no processo da aprendizagem, pois possibilitam a troca de experiências e permitem a criação de hipóteses a partir das experiências individuais ou do grupo .Este método de trabalho se faz importante para as alunas envolvidos na pesquisa, pois as mesmas são as futuras professoras que também ensinarão matemáticas, embasado em Wegner (2011, p. 88), citamos:

> [...] em conjunto, conseguir-se-á uma aula diferente, que melhorará as condições dos alunos para desenvolverem o raciocínio, resultando num melhor preparo para enfrentarem o mercado de trabalho, que propriamente exigirá além dos conhecimentos básicos, a eficiência em relação à tecnologia, e adaptabilidade, as novas ferramentas de acordo com o avanço da ciência.

Com base na problemática desenvolvida nessa pesquisa, verificamos que as alunas do curso de Pedagogia avaliam de forma produtiva as atvidades com jogos e aplicativos para o ensino das Matemáticas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Tais atividades permitem a proposição de ações mais interativas por parte das futuras professoras – alunas do curso de Pedagogia –, de modo que a sua atuação futura em sala de aula possa aproximar a Matemática Escolar do mundo tecnológico e interativo que tem se apresentado no nosso cotidiano.

Referências e bibliografia

Brasil (2000a). *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Brasil. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf

Brasil (2000b). *Parâmetros Curriculares Nacionais do Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental*. Brasil. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

Dullius, M. M., & Quartieri, M. T. (2006). *Recursos Computacionais nas Aulas de Matemática*. Rio Grande do Sul, Lajeado. Recuperado de http://tecmat-ufpr.pbworks.com/f/R0168-1.pdf

Knijnik, G., Wanderer, F., Giongo, I. M., & Duarte, C. G. (2012). *Etnomatemática em movimento.* Belo Horizonte: Autêntica.

Neves, J. C. M. (2016). Metodologias de pesquisa na área da educação (matemática). In: Wanderer, F., & Knijnik, G. (Org.). *Educação Matemática e Sociedade* (pp. 37-54). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Valente, J. A. (2007). *Diferentes Usos do Computador na Educação*. São Paulo, Campinas. Recuperado de http://nied.unicamp.br/publicacoes/separatas/Sep1.pdf

Wegner, A. (2011). *Uma abordagem do uso do software Graphmatica para o ensino de funções na primeira série do ensino médio.* Dissertação de Mestrado, Universidade do Vale do Taquari, RS, Brasil.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ensino de Geometria com o *SketchUp*: atividades investigativas a partir da Teoria de van Hiele

Edite Resende **Vieira**
Colégio Pedro II/Projeto Fundão – Instituto de Matemática – UFRJ
Brasil
edite.resende@gmail.com

Resumo

Este artigo tem como finalidade refletir sobre episódios vivenciados por alunos do 4º do Ensino Fundamental de uma escola federal da cidade do Rio de Janeiro em atividades de Geometria. Trata-se de uma pesquisa qualitativa realizada pela professora do Laboratório de Informática, autora desta comunicação, a qual se propôs investigar, a partir da Teoria de van Hiele, o conhecimento geométrico dos alunos acerca das figuras tridimensionais com o uso do software *SketchUp*. A metodologia utilizada considerou os princípios de uma sequência didática como prática educativa que articula teoria e prática. Ficou evidente nas atividades realizadas que alguns alunos reconheceram as figuras tridimensionais, identificaram os elementos que as constituem e fizeram as devidas representações no plano. Os dados também indicaram que as atividades no software permitiram à professora pesquisadora reconhecer que alguns alunos alcançaram o Nível 1 da Teoria de van Hiele, e outros estão progredindo para o nível seguinte.

Palavras chave: anos iniciais, tecnologia digital, *SketchUp*, Teoria de van Hiele, formação de professores.

Introdução

Desde o seu nascimento, a criança está em contato com o mundo. Ao observar, comparar e manipular objetos, ela vivencia situações ligadas à Geometria. A Geometria é um campo da Matemática que está relacionado ao nosso cotidiano.

As possibilidades de a criança conhecer a realidade do mundo em que vive dependem das relações que estabelece com o que está ao seu redor, como pessoas, lugares e objetos. Segundo Pires, Curi e Campos (2001), esse é o espaço que a criança percebe e que, posteriormente, lhe possibilitará construir um espaço representativo.

O estudo do espaço geométrico e das formas inicia-se a partir do que é percebido até que possa ser concebido pelo indivíduo, ou seja, esse processo é concretizado por meio da percepção das formas geométricas básicas e de suas características. Quando a criança se depara com um ambiente que lhe permite explorar as noções geométricas dos objetos do mundo físico, um mundo de possibilidades se abre para ela.

Na concepção de Fagundes (1977, p. 3), "para conhecer um objeto, um fato, é preciso agir sobre ele, modifica-lo, transformá-lo, compreender o processo dessa transformação e, como consequência, entender a maneira como o objeto é construído". Especialmente para os alunos dos primeiros anos de escolaridade, a quem se recomenda o início do estudo de Geometria com a manipulação de materiais concretos – etapa fundamental para a construção do pensamento geométrico –, com o uso das tecnologias digitais, o aluno pode dar um salto na compreensão desse processo de transformação e de construção do objeto.

Nesse sentido, Kaleff (2003) argumenta que a Informática pode facilitar os problemas enfrentados no ensino de Matemática e, em particular, em Geometria, relacionados à visualização, observação e manipulação de objetos geométricos. Segundo a autora, há vários software[1] com uma gama de recursos que contribuem para a construção da percepção espacial.

Assim, este artigo tem como finalidade refletir sobre alguns episódios vivenciados por alunos do 4º do Ensino Fundamental de uma escola federal da cidade do Rio de Janeiro em atividades de Geometria. Tais episódios são recortes de uma pesquisa implementada pela professora do Laboratório de Informática, autora desta comunicação, a qual se propôs investigar, a partir da Teoria de van Hiele, o conhecimento geométrico dos alunos acerca das figuras tridimensionais com o uso do software *SketchUp*.

O ensino de Geometria nos anos iniciais

Pesquisas como a de Pavanello (1993), Lorenzato (1995) e Fainguelernt (1999) sinalizam o esquecimento ou omissão do processo de ensino e aprendizagem da Geometria no Brasil, especialmente em escolas públicas. Durante muito tempo o ensino de Geometria não se renovou, perdendo seu vigor, como ressaltado por Fainguelernt (1999).

Educadores matemáticos mostraram preocupação acerca da desvalorização do ensino de Geometria nas escolas e iniciaram, ao longo da década de 90, um movimento de discussão e reflexão para tentar reverter a situação. A partir do consenso desses pesquisadores sobre a importância do trabalho com noções geométricas desde a pré-escola, observou-se, no final dos anos 90, um processo de valorização da Geometria que contribuiu para a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997). Com o despontar dessas novas diretrizes para os currículos nas escolas brasileiras, o ensino de Geometria começou a ter outra configuração em todo o Ensino Fundamental, uma vez que se passou a dar especial relevo aos conceitos geométricos, destacando sua importância.

Tal importância se justifica uma vez que a criança, desde o seu nascimento, está em contato com o mundo, ou seja, um mundo tridimensional. Esse aspecto também é comentado por Nasser e Tinoco (2004). Elas consideram o conteúdo de Geometria a ser ensinado como um "edifício geométrico" e, como todo edifício, ele deve ter os alicerces firmemente construídos desde os primeiros anos de escolaridade. De acordo com as autoras,

> Desde o pré-escolar as crianças podem criar a base para o seu edifício geométrico, vivenciando atividades que permitam observar imagens da natureza, como as folhas, que em alguns casos possuem uma simetria perfeita. Devem também explorar o espaço, comparando objetos com formas geométricas (Nasser & Tinoco, 2004, p. vii).

[1] Cabri-Géomètre, Euklid, Sketchpad, Geoplan, Cinderella, Geogebra, Calques 3D, Shapari, Régua e Compasso, entre outros.

Atualmente, a Base Nacional Comum Curricular[2] – BNCC (Brasil, 2017) privilegia um ensino de Geometria pautado no estudo de um vasto conjunto de conceitos e procedimentos fundamentais para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. De acordo com esse documento, as ideias matemáticas essenciais ligadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. Na proposta oficial supracitada, fica evidente no ensino de Geometria que "estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes (Brasil, 2017, p. 269).

Pensamento geométrico: habilidades necessárias

A visualização e a representação são habilidades importantes a serem desenvolvidas por estudantes da Educação Básica, principalmente os alunos dos anos iniciais de escolaridade. É, portanto, um tema relevante para as pesquisas em Educação Matemática.

De acordo com Pais (1996), há quatro elementos fundamentais que intervêm fortemente nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria Plana e Espacial: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental. No início da aprendizagem, os objetos são a primeira forma de representação dos conceitos geométricos. Por objeto, entende-se o material manipulativo que representa uma forma geométrica. O desenho é a segunda forma de representação desses conceitos e, assim como o objeto, é de natureza essencialmente concreta e particular, consequentemente, oposta às características gerais e abstratas dos conceitos.

A interpretação de significados com auxílio de desenhos de figuras tridimensionais apresenta um grau de complexidade maior do que aquela feita a partir dos objetos. Conforme ressalta Pais (1996, p.68), "Quer seja na representação de figuras planas ou espaciais, o desenho tem sido, na realidade, uma passagem quase que totalmente obrigatória no processo de conceitualização geométrica".

Pais (1996) apresenta seu ponto de vista acerca do desenvolvimento do pensamento geométrico. Para a construção do conhecimento teórico dos alunos, é necessário que o professor contemple tanto os aspectos intuitivos quanto os experimentais. Assim, no início da escolarização, é mais indicado que a construção dos conceitos geométricos se dê a partir de atividades que priorizem a experimentação das ideias das crianças por meio de objetos manipuláveis. No entanto, segundo o autor, essa manipulação não deve restringir-se a uma simples atividade lúdica. Espera-se que, com o manuseio, o aluno possa, sob a orientação do professor, descobrir propriedades sobre o ente geométrico subjacente àquele objeto.

Além do manuseio de objetos, a visualização e a representação são elementos essenciais para a construção do pensamento geométrico. Pesquisas, tais como as de Barbosa (2011) e Carvalho (2010), assinalam a importância do desenvolvimento dessas habilidades pelos alunos no estudo das figuras espaciais e planas. Do ponto de vista de Carvalho (2010), a habilidade de representar figuras tridimensionais no plano e de interpretar desenhos que reproduzem os sólidos geométricos constitui uma das etapas do processo de desenvolvimento da visualização espacial

[2] A BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2017, p. 7).

dos alunos. Nesta mesma linha de pensamento, Parzysz (1988), citado por Carvalho (2010), afirma que os estudantes encontram dificuldades na codificação e decodificação de desenhos.

Assim, a habilidade de reconhecimento de objetos tridimensionais a partir de representações planas deve ser treinada continuamente ao longo da educação básica, e o uso de recursos tecnológicos pode facilitar esse processo, seja na realização direta de atividades, seja na elaboração de materiais pelo professor. Nesse sentido, Gutiérrez (2006, p. 26) assegura que "os programas de computador [...] são ideais para as explorações e investigações em geometria. Além disso, constituem um estímulo para a utilização do raciocínio dedutivo [...]". O caráter exploratório de alguns software disponíveis permite aos alunos desenvolver seu espírito de investigação e fazer conjecturas.

Para a pesquisa em pauta, dentre os recursos disponibilizados, escolheu-se o software *SketchUp*[3] pela facilidade de utilização e interação. O *SketchUp* apresenta um conjunto de recursos e aplicativos que possibilita a criação de modelos em três dimensões (3D) e a exibição das produções a partir de vários pontos de vista. Trata-se de um software que não foi construído para o ensino de Matemática, mas para profissionais das áreas de design, arquitetura e engenharia. Sua manipulação exige o conhecimento de retas, pontos, ângulos, figuras planas, paralelismo, perpendicularismo, enfim, a exploração de uma série de conceitos geométricos que o torna um programa interessante para ser utilizado em projetos pedagógicos de Geometria. A sua utilização estimula o aluno a construir situações bem próximas do seu cotidiano, a fazer conjecturas e a validar ou não a sua hipótese. Os desenhos feitos nesse software permitem que o aluno descubra as propriedades das figuras geométricas, estabeleça relações e identifique semelhanças e diferenças entre elas, valorizando a investigação e a aprendizagem por descoberta.

Desenvolvimento do raciocínio geométrico: o modelo de van Hiele

O modelo de van Hiele teve origem na década de 50 quando Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof, professores de Matemática, apresentaram, em suas teses de doutorado, uma forma diferenciada para desenvolvimento do raciocínio geométrico, visto que seus alunos do curso secundário na Holanda apresentavam dificuldades na aprendizagem de Geometria.

De acordo com Nasser e Sant'Anna (2000), o modelo considera que os alunos avançam por meio de cinco níveis de compreensão de conceito, de forma sequencial e hierárquica. Segundo as autoras, o avanço de níveis depende mais de uma aprendizagem propícia do que de idade ou maturação, cabendo ao professor selecionar cuidadosamente as atividades. Elas ainda ressaltam que na Teoria de van Hiele, para que seja possível a compreensão por parte dos alunos e ocorra a aprendizagem, é necessário que se estabeleça relação entre o objeto a ser estudado e a linguagem própria, ou seja, a aula não deve ser ministrada em um nível não atingido pelos alunos.

Nasser e Sant'Anna (2000) apresentam os cinco níveis para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria do modelo de van Hiele, a saber, Nível 1: Reconhecimento; Nível 2: Análise; Nível 3: Abstração; Nível 4: Dedução e Nível 5: Rigor.

Os van Hiele, citado por Silva e Candido (2014), sinalizaram em seus trabalhos que mais importante que a idade cronológica dos alunos é o encaminhamento dado em sala de aula pelo professor. Assim, o modelo van Hiele propõe cinco fases de aprendizagem que, desenvolvidas sequencialmente, propiciam o avanço de um nível de pensamento para o imediatamente mais

[3] Mais informações disponíveis em http://bausketchup.blogspot.com.br. Acesso em 25 de out. de 2012.

avançado; Fase 1: questionamento ou informação; Fase 2: orientação dirigida; Fase 3: explicação; Fase 5: orientação livre e Fase 5: integração.

Dessa forma, professor é um elemento de grande importância para auxiliar o aluno no seu desenvolvimento, proporcionando um ambiente propício à aquisição de conhecimentos.

Metodologia: o caminho percorrido

A metodologia deste estudo foi desenvolvida na perspectiva qualitativa, em uma escola federal da cidade do Rio de Janeiro, com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental.

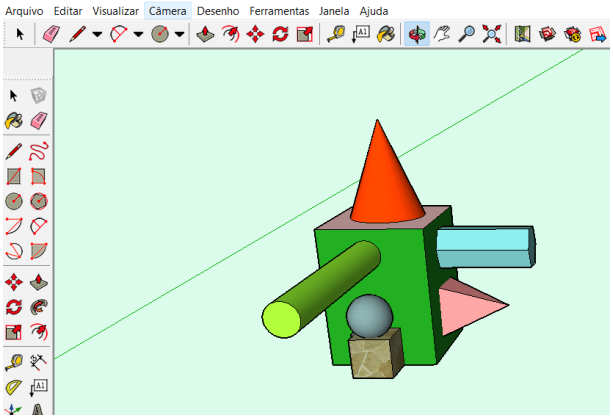
A opção por esse tipo de metodologia se justifica porque nela o investigador qualitativo não fica fora da realidade que estuda; pelo contrário, concebe e tenta compreendê-la em sua totalidade (Triviños, 1992).

Os dados foram coletados por meio de observação participante, dos registros das atividades dos alunos no software *SketchUp* e de gravação de áudio das discussões nas aulas. A pesquisa foi aplicada durante 4 semanas, em dois tempos de aula semanais, no Laboratório de Informática, em agosto/setembro de 2017.

A sequência de atividades foi planejada a partir da concepção de Zabala (1998). No entendimento do referido autor, as características da prática educativa são definidas a partir da maneira que a sequência didática é organizada. Por conseguinte, uma sequência didática bem planejada, com intenções bem definidas e objetivos claros e precisos, poderá constituir um recurso metodológico eficiente para atingir os objetivos de quaisquer áreas curriculares.

O retrato da pesquisa: alguns episódios

Para mostrar os resultados da pesquisa realizada, esta comunicação apresenta uma atividade que foi colocada no telão para a turma resolver coletivamente.



João pegou seus sólidos geométricos e construiu o seguinte prédio. Veja!

a) Quantos sólidos João utilizou?

b) Que sólidos ele utilizou? Escreva o nome deles.

c) Dentre os sólidos que estão sobre a mesa, quais os utilizados por João?

d) Agora, construa um prédio na tela do computador e monte-o com os sólidos geométricos.

Figura 1. Atividade 1

No item (a), todos os alunos responderam 7 sólidos. Eles utilizaram a ferramenta *Orbitar* do aplicativo para girar e explorar a construção de João.

Quanto ao item (b), nenhum aluno conseguiu nomear os sólidos corretamente. Eles identificaram o cone como triângulo; o paralelepípedo como retângulo; o cubo como quadrado; o cilindro como círculo; a pirâmide como triângulo, o prisma como losango e a esfera como bola. É importante destacar que dois alunos intercederam quando a turma nomeou a esfera como bola.

Eles alegaram que bola não é o nome correto para aquele sólido. Para eles, a esfera também era um círculo.

Foi possível constatar no item (b) dessa atividade que os alunos não têm o vocabulário adequado para nomear os sólidos geométricos, sendo necessário um trabalho mais efetivo por parte do professor. Assim, os alunos não reconheceram os sólidos por sua aparência global. Ficou evidente que os alunos também não identificaram os elementos de cada sólido, confundindo-os com as figuras geométricas planas.

Para resolver o item (c), cada dupla de alunos, pois os alunos trabalham em dupla no computador, recebeu uma caixa com 11 sólidos. Um tempo foi dado para eles fazerem comparações entre os sólidos geométricos e suas respectivas representações no plano, estabelecendo relações e analisando cada elemento. É importante destacar que todas as duplas reconheceram a representação dos sólidos geométricos na tela do computador, configurando, assim, o reconhecimento e a comparação das figuras por sua aparência global, conforme o Nível 1 do modelo de van Hiele.

As figuras seguintes são as construções de duas duplas, solicitadas no item (d)

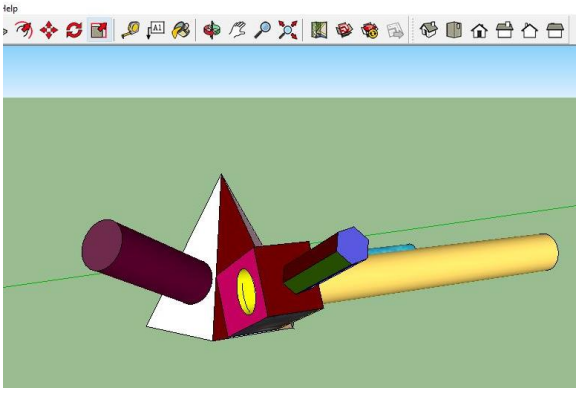


Figura 2. Prédio construído pelos alunos S e D

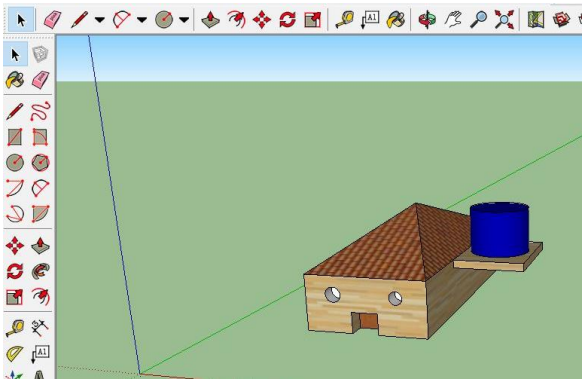


Figura 3. Prédio construído pelas alunos X e Y

Os alunos, de um modo geral, conseguiram representar sua construção da tela do computador com os sólidos geométricos. Apenas duas duplas tiveram dificuldades, embora a pesquisadora tenha feito intervenções, sinalizando os elementos que constituem os sólidos escolhidos: cantos, linhas de dobras, paredes e faces (nomes dados pelos alunos).

Considerações Finais

Nosso objetivo quando da realização dessa comunicação foi refletir sobre episódios vivenciados por alunos do 4º do Ensino Fundamental de uma escola federal da cidade do Rio de Janeiro em atividades de Geometria. Assim, ao realizarmos a análise nos diferentes instrumentos de coleta, foi possível construirmos proposições significativas emersas no contexto das aulas no Laboratório de Informática.

As análises apresentadas indicaram que o *SketchUp* foi um recurso imprescindível para promover a investigação e exploração das figuras geométricas espaciais. O ambiente característico do aplicativo oportunizou reflexões, auxiliando os alunos na resolução das atividades e na tomada de decisões. No entanto, ficou evidente as dificuldades dos alunos na resolução de algumas atividades. Nenhum dos alunos conseguiu nomear as figuras tridimensionais. Alguns foram capazes de identificar os elementos que as constituem, apesar de não utilizarem o vocabulário adequado. É importante destacar que os alunos não apresentaram dificuldade em reconhecer, dentre os sólidos geométricos sobre a mesa, os que estavam representados na tela do computador, reconhecendo as figuras por sua aparência global.

Os dados também indicaram que as atividades no software permitiram à professora pesquisadora reconhecer que alguns alunos alcançaram o Nível 1 da Teoria de van Hiele, e outros estão progredindo para o nível seguinte.

Para finalizar, ficou claro durante essa investigação que ações precisam ser implementadas com esses alunos no sentido de dar oportunidades para que eles possam manipular objetos, visualizar e representar e, assim, contribuir para o desenvolvimentos de habilidades necessárias à construção do pensamento geométrico.

Referências Bibliográficas

Barbosa, C. P. (2011). *O pensamento geométrico em movimento: um estudo com professores que lecionam Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG).*Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/ SEF,1997. 142 p.

Brasil. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a Base. Brasília, MEC/SEB, 2017.

Carvalho, M. L. de O. (2010). *Representações planas de corpos geométricos tridimensionais: uma proposta de ensino voltada para a codificação e decodificação de desenhos*. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, ouro Preto.

Fagundes, L. da C. (1977). *Materiais manipulativos no ensino de matemática a crianças de 7 a 14 anos: período das operações concretas.* Palestra proferida no Seminário Nacional sobre recursos audiovisuais no Ensino de 1º Grau, Brasília. Recuperado de: http://www.pead.faced.ufrgs.br/sites/publico/eixo4/matematica/livros/leituras/01_materias_manipulativos.htm.

Fainguelernt, E. K. (1999). *Educação Matemática: representação e construção em Geometria*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Gutiérrez, A. (2006). *La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría.* Recuperado de: http://www.altascapacidades.org/uploads/6/3/7/5/6375624/ensenanza_aprendizaje_geometria.pdf.

Kaleff, A. M. (2003). *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra cabeças geométricos e outros materiais concretos*. 2. ed. Rio de Janeiro: EDUFF. 209 p.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista*, SBEM, São Paulo. n. 4, p. 3-13, 1995.

Nasser, L., &Tinoco, L.(Coords.). (2004). *Curso básico de geometria: enfoque didático*. 3 ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM. Projeto Fundão, 2004. v. 3. 125 p.

_____; Sant'Anna, N. P. (2000). *Geometria segundo a Teoria de Van Hiele*. 3 ed. Instituto de Matemática/UFRJ: Projeto Fundão, 2000.

Pais, L. C. (1996). Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. *Zetetiké*, UNICAMP-SP, v. 4, n. 6, 65-74.

Pavanello, R. M. A. (1993). O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, Universidade Estadual de Campinas, ano 1, n. 1,7-17.

Pires, C. M. C.; Curi, E., & Campos, T. M. M. (2001). *Espaço e Forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries do Ensino Fundamental*. São Paulo: PROEM.

Silva, L.,& Candido, C. C. (2014). *Modelo de aprendizagem de geometria do casal Van Hiele*. Recuperado de https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=302963.

Triviños, A. N. S. *Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação*. São Paulo: Atlas, 1992. 176 p

Zabala, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Significados sobre la demostración matemática en una comunidad de práctica de clase

Edwin Andrés **Amaya** Sánchez
Universidad Industrial de Santander
Colombia
andrewing15@hotmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

Este documento muestra avances de una investigación que tiene como objetivo caracterizar los significados negociados por una comunidad de práctica de clase de profesores de matemáticas en formación, que participan en un curso de Didáctica del Cálculo y que reflexionan acerca del proceso de la demostración. Se usa el marco teórico de la práctica social de Wenger (2001) como fundamento de la comunidad de práctica. Presentamos resultados de una actividad en la que se pidió hacer demostraciones relacionadas con el tema de funciones a 13 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, la cual permitió identificar los significados que ellos le atribuyen a la demostración asociados a la función matemática. Entre dichos significados se pudo encontrar que la demostración puede hacer uso del álgebra, ser explicativa y permitir descubrir otras propiedades.

Palabras clave: Comunidad de Práctica, Profesores de Matemáticas en Formación, Demostración.

Introducción

Se necesita tener una mirada más comprensiva y amplia de las funciones y del papel de la demostración del que se le da de forma tradicional en las aulas, por tanto en la enseñanza de las matemáticas se requiere que los alumnos tengan actividades significativas para su desarrollo. (Crespo y Ponteville, 2003). Los profesores de matemáticas en formación necesitan comprender muy bien los objetos matemáticos con los que van a relacionarse en su labor docente. Ellos deben tener claro los argumentos necesarios para la comprensión de los contenidos que enseñan. En ese sentido, nuestro trabajo apunta a identificar la manera en que los profesores en formación llevan a cabo sus demostraciones y reflexionan sobre éstas a medida que negocian sus

significados mediante la participación, apuntando a la adquisición de herramientas teóricas y metodológicas, útiles para diseñar e implementar actividades en el aula relacionadas con la demostración.

Aspectos teóricos

En el marco de la Teoría de la práctica social, prestamos especial atención a indagar acerca del proceso de negociación de significados, en nuestro caso de la demostración, el cual requiere desarrollar la interacción de los participantes que se van ajustando a la práctica para reflexionar y tomar acciones sobre el uso que se le da a la demostración en el aula de matemáticas. La participación de los profesores en formación permite un escenario donde se exponen las experiencias y conocimientos individuales bajo la interacción con los demás miembros de la comunidad. La negociación establecida, no es sinónimo de "acuerdo total" respecto a alguna interpretación, sino de un nivel de afinidad que permite el éxito de la comunicación y genera la cultura de la clase. En cuanto a la demostración matemática, autores como De Villiers (1993) señalan que cuando estas son presentadas por el profesor a los estudiantes como un producto ya materializado, sin la participación de ellos en su producción, es muy probable que eso produzca una experiencia poco significativa, es por ello que plantea algunas funciones de la demostración que son: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación; con las que se proporciona una visión más comprensiva de la función y el papel de la misma que se puede dar en el aula de clase. Por tanto, hay que prestar especial atención a la forma en que se discute el papel de la demostración por parte de los profesores en formación, de tal manera que sientan la importancia de llevarla al aula.

Metodología

Para la intervención con la comunidad de práctica se diseñaron y aplicaron una serie de actividades con las que se quería promover la reflexión por parte de profesores de matemáticas en formación alrededor de la demostración. Presentamos una actividad que se enmarca dentro de un curso de Didáctica del Cálculo donde se trabaja alrededor de los conceptos de función, límite, derivada e integral, en esta oportunidad se muestran algunos resultados relacionados con el tema de funciones y con la cual se indagó sobre el significado de la demostración asociado a este tema. En la actividad se pidió responder a lo siguiente:

1. Suponga que f y g son funciones pares.
   - ¿Qué puedes decir sobre $f+g$ y $f.g$?
   - ¿Qué puedes decir si f y g son impares?

   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

2. Sean f y g dos funciones lineales.
   - ¿Qué puedes decir acerca de la composición?
   - ¿Cómo es su pendiente?

   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

3. Considera la familia de funciones $f(x)=\frac{1}{x^n}$, donde n es un entero positivo.
   - ¿Cómo es la función cuando n es par?
   - ¿Cómo es la función cuando n es impar?

   Plantea tus conjeturas y demuéstralas.

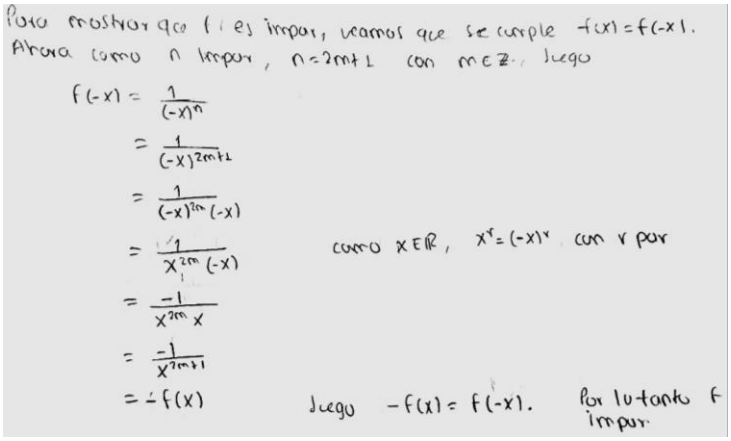
En cada ítem de los anteriores, los profesores en formación plantearon sus conjeturas y las demostraron, pues en el planteamiento de conjeturas, la persona puede darse cuenta de propiedades que le pueden servir para construir la demostración.

Las demostraciones que se pidieron hacer, se pueden abordar de distintas maneras. Cuando ellos plantearon su respuesta y mediante la puesta en común, se pudo evidenciar el significado que se le está asociando a la demostración, es decir, primero, si la demostración que produce es de tipo empírico o deductivo y segundo, el porqué de dicha presentación. Para el análisis de la información se tuvieron en cuenta los argumentos de las respuestas dadas por los participantes de la comunidad, las funciones de la demostración que señala De Villiers (1993) y categorías emergentes de significados.

Resultados

En el contexto de la comunidad se han tenido acercamientos a distintos tipos de demostración y su significado en los que se encontró que la mayoría de los profesores en formación considera la demostración desde un punto de vista estrictamente formal deductivo donde esté presente el uso exclusivo del álgebra. Para la presente actividad que se reporta, se pudo encontrar que siguen dándose diferentes posiciones frente a la demostración y algunos cambios en los puntos de vista de algunos de ellos. Entre las demostraciones surgieron en la comunidad, están aquellas que se presentan de manera retórica, de manera algebraica, de manera gráfica y otros no logran establecer la demostración debido a la falta de dominio conceptual.

Uno de los participantes de la comunidad presenta su demostración al ítem 3 (figura 1), haciendo uso principal del lenguaje algebraico, siendo una demostración de tipo deductiva formal donde usa las propiedades de las funciones pares e impares para construir la demostración que para él son básicas y suficientes para entenderla. Este profesor en formación hace la demostración con el fin de mostrar que el enunciado es verdadero para cualquier n, viéndola como una herramienta que debe hacer uso principal del álgebra para ser aceptada como demostración. Se puede decir que la manera en la que ellos realizan sus demostraciones, así también será su forma de evaluar las demostraciones que se presenten de algún estudiante en el aula, donde pueden aceptar o no diversidad que pueden ser de tipo empírico o deductivo.


Para mostrar que f es impar, veamos que se cumple $f(x) = f(-x)$.
Ahora como n impar, $n = 2m+1$ con $m \in \mathbb{Z}$. Luego

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^n} = \frac{1}{(-x)^{2m+1}} = \frac{1}{(-x)^{2m}(-x)} = \frac{1}{x^{2m}(-x)} = \frac{-1}{x^{2m}x} = \frac{-1}{x^{2m+1}} = -f(x)$$

como $x \in \mathbb{R}$, $x^r = (-x)^r$ con r par

Luego $-f(x) = f(-x)$. Por lo tanto f impar.

Figura 1. Demostración de la segunda parte del ítem 3

En la respuesta de otro de los profesores en formación para el mismo ítem 3 (figura 2) se puede evidenciar una demostración haciendo uso principal de lenguaje retórico. Esta demostración se con el fin de dar a entender lo que sucede con la función al elevarla a una potencia impar. Se puede evidenciar el uso de la demostración como un medio de *explicación* (De Villiers, 2003) pues proporciona una visión de por qué la proposición es cierta. En la presentación de esta respuesta a toda la clase, los profesores en formación mencionan que si dicha demostración es para enseñar a estudiantes de cálculo diferencial, entonces es válida para que quede claro en ellos las propiedades utilizadas.

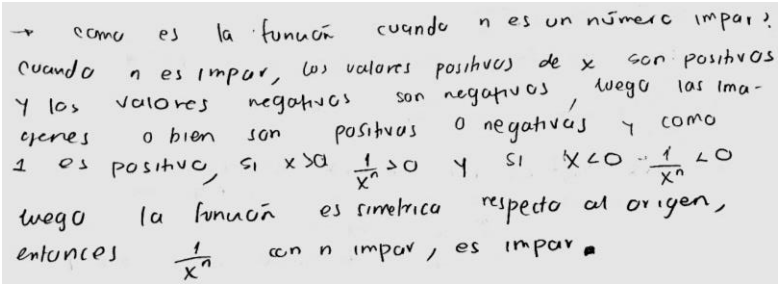


Figura 2. Demostración de la segunda parte del ítem 3

Conclusiones

En la discusión y análisis de las respuestas dadas por parte de los profesores en formación y el investigador, se concluyó que se debe considerar en la enseñanza de estos temas en alumnos de cálculo diferencial, esencialmente que ellos comprendan por qué una proposición es cierta, desarrollar la capacidad de mostrar su validez e importancia y una forma de darse cuenta de ello puede ser inicialmente mediante razonamientos empíricos, para luego llegar a generalizar y entonces demostrar deductivamente

Referencias y bibliografía

Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003a). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 17* (1), 39-44. México.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"* (26), 15−30.

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Barcelona, Paidós. Traducción de Genis Sánchez Barberán.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Silvia Johanna **Pineda** Garavito
Universidad Industrial de Santander
Colombia
vidana0619@hotmail.com

Sandra Evely **Parada** Rico
Universidad Industrial de Santander
Colombia
sanevepa@uis.edu.co

Formación inicial de profesores de matemáticas en atención a la diversidad

Resumen

Este documento comunica resultados de una investigación curricular cuyos objetivos son: desarrollar un curso enfocado en la atención a la diversidad en clase de matemáticas y describir los aprendizajes construidos por profesores en formación que reciben instrucción sobre atención a la diversidad. El estudio se desarrolló en seis fases donde se realizaron dos pilotajes de un curso enfocado en atención a la diversidad en el aula y se siguió a un caso de estudio durante su proceso de formación. La investigación concluyó con el diseño e inclusión en el plan de estudios de la licenciatura de una asignatura que forme al profesor en atención a la diversidad en el aula; y, haciendo uso del Modelo "Reflexión-y-Acción" de Parada (2011), entre los aprendizajes evidenciados se tiene que el profesor dio importancia a las características de los estudiantes o del grupo para realizar sus planeaciones de clase.

Palabras clave: Formación inicial de profesores, atención a la diversidad, diseño curricular.

Introducción

Una educación para todos involucra que las personas asistan a la institución educativa de su sector y puedan gozar de todos los recursos que tiene ésta, sin que se discrimine o limite su participación (UNESCO, 1990, 1994, 2000). De la revisión bibliográfica realizada se encontró reglamentación internacional y nacional (Colombia) que respalda la atención a la diversidad en el aula, pero autores como Figueroa y Muñoz (2014) afirman que a pesar de los documentos legales existentes no se consigue garantizar prácticas que atiendan la diversidad. Lo anterior se puede deber a la necesidad de formar al profesorado alrededor del tema (Aké, 2015).

Después de la revisión bibliográfica realizada decidimos revisar el programa de Licenciatura en Matemáticas de una universidad de Colombia, contexto de estudio. Entre las competencias del egresado planteadas en el programa encontramos algunas relacionadas con la implementación, por parte de los profesores, de acciones educativas que favorezca el aprendizaje de todos los estudiantes (Escuela de Matemáticas, 2012), pero las asignaturas reportadas en dicho plan no hacen alusión explícitamente a la atención a la diversidad. Dado que el contexto de la investigación se enmarca en la formación inicial de Licenciados en Matemáticas alrededor de la atención a la diversidad, se plantearon los siguientes objetivos: i) Desarrollar un curso enfocado en la atención a la diversidad en clase de Matemáticas, y ii) Describir los aprendizajes logrados por profesores en formación que reciben instrucción sobre atención a la diversidad en clase de matemáticas.

Aspectos conceptuales

El modelo de Reflexión y Acción (R-y-A) de Parada (2011) fundamentó la metodología de la investigación que aquí se reporta. En la Figura 1 se muestra un bosquejo del modelo. Dentro de la espiral se encuentra el triángulo pedagógico, en cuyos vértices están el profesor (P) – estudiante (E) - matemática escolar (ME), y en el centro la actividad matemática (AM). La actividad matemática está pensada en posibilitar que el alumno, independientemente de sus características pueda construir matemáticas al ritmo y al nivel que le sea posible.

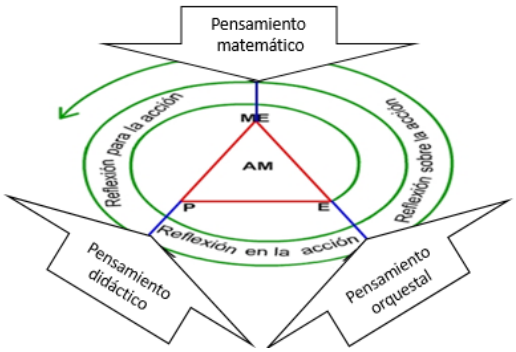


Figura 1: Modelo de "Reflexión-y-Acción". Fuente: Parada (2011)

El docente desarrolla su pensamiento reflexivo sobre la actividad matemática que promueve en clase en tres momentos: antes, durante y después de la clase. El profesor en formación inicial desarrolla su pensamiento reflexivo mediante la práctica experimental que se llevó a cabo en las asignaturas Fundamentación Didáctica y Seminario de Práctica Pedagógica, y posteriormente en la práctica vivencial que se hizo en las asignaturas: Práctica Docente I y Práctica Docente II.

Las tres flechas alrededor de la espiral representan aspectos sobre los cuales se propone desarrollar el pensamiento reflexivo de los profesores de matemáticas: pensamiento matemático, pensamiento didáctico y pensamiento orquestal. A continuación se describirá la manera cómo se interpretó cada uno de los pensamientos teniendo en cuenta el contexto de una investigación en la línea de atención a la diversidad en el aula de matemáticas.

El pensamiento matemático del profesor, implica que el profesor use sus saberes matemáticos y los logre aterrizar en diseños de aprendizaje adaptados a los estudiantes con sus diferentes procesos y características de aprendizaje. Con relación al pensamiento didáctico uno de los aspectos a tener en cuenta para caracterizar dicho pensamiento del profesor son las adaptaciones curriculares que él realice en clase. Según Blanco (1996) por adaptaciones curriculares se entienden como las modificaciones (cambios, énfasis) que requieren realizarse en

los diversos componentes del currículo básico para adecuarlos a las diferentes situaciones, grupos y personas para las que se aplica, como una respuesta a las necesidades educativas de los educandos. Se hace referencia a las adaptaciones curriculares como una manera de atender la diversidad en el aula de clase, pero aclaramos que es necesario re-pensar el currículo de tal manera que se tenga en cuenta la diversidad del alumnado, esta labor no solo está en manos del profesor, es necesario el apoyo de toda la comunidad educativa para lograrlo.

Con relación al pensamiento orquestal se analizó la conducción de la clase por parte del profesor, y la manera cómo usa los recursos que seleccionó, de acuerdo a la actividad matemática que tiene prevista para sus estudiantes; estos aspectos se tomaron como categorías a priori para describir los aprendizajes construidos por profesores en formación que reciben instrucción sobre atención a la diversidad en clase de matemáticas.

Metodología

El estudio aquí expuesto se desarrolló en seis fases y un estudio preliminar a dichas fases para responder a los dos objetivos propuestos. A continuación se describirá cada uno:

Estudio preliminar. Se consultó los planes de estudio de las licenciaturas del país y se encontró que al menos la mitad no tienen alguna asignatura en la que se forme al profesor alrededor de la atención a la diversidad.

Fase 1. Revisión del plan de estudios del programa y diseño del curso: Se constató que no había asignaturas en la que se forme a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en atención a la diversidad, por ello, se diseñó un curso para atender esta falencia.

Fase 2. Primer pilotaje del diseño del curso: Este acercamiento se hizo mediante una adaptación curricular a la asignatura ya existente en el plan de estudios (Seminario de Práctica). El curso se dividió en tres partes: i) acercamiento teórico a la investigación en Educación Matemática; ii) Estudio y reflexión alrededor de la atención a la diversidad (aspectos legales, características físicas, cognitivas, sociales, comportamentales, etc.) y el rol del profesor de matemáticas como facilitador del aprendizaje; y iii) estudio teórico-práctico de metodología cualitativa (diseño y desarrollo de un proyecto en el que se problematiza sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en personas con características diferenciadas.

Fase 3. Análisis de resultados del primer pilotaje y rediseño del curso: El análisis curricular del curso se realizó basado en dos aspectos: los contenidos del curso y los proyectos de clase. Los posibles aprendizajes de la experiencia realizada (en el primer acercamiento) se usaron para responder al segundo objetivo de investigación.

Fase 4. Segundo pilotaje del diseño del curso: Puesta en escena del rediseño del curso.

Fase 5. Análisis de resultados del segundo pilotaje: Tal como se mencionó en la Fase 3, el análisis curricular valoró el logro de los objetivos tanto del componente teórico como el práctico. Los resultados de esta fase se usaron para el diseño curricular de un curso que se esperaba proponer para la reforma del programa de Licenciatura en Matemáticas.

Fase 6. Selección y seguimiento del caso de estudio: Se siguió en las asignaturas de Práctica Docente a los estudiantes egresados del primer pilotaje, y se seleccionó un caso de estudio para evaluar los aprendizajes logrados. Para analizar los resultados se usó el Modelo "Reflexión-y-Acción" de Parada (2011), dichos aprendizajes se categorizaron en cada uno de los componentes

del pensamiento reflexivo del profesor.

Conclusiones

Con relación al primer objetivo de investigación se concluyó con el diseño de una asignatura llamada Educación Matemática y atención a la diversidad, la cual se incluyó en el nuevo plan de estudios de la licenciatura.

Con relación al segundo objetivo de investigación se evidenció algunos aprendizajes logrados. A continuación se mencionarán teniendo en cuenta los tres pensamientos mencionados en el modelo R-y-A:

Pensamiento matemático: El caso de estudio, en cada uno de los cursos por los que transitó, reflexionó sobre los objetos matemáticos con los que tuvo contacto, según el contexto en que se desempeñó. Además, resignificó algunas de las concepciones que tenía con relación a: las propiedades de la potenciación, los números enteros y la suma de números naturales. Todo esto, basado en lecturas de documentos de educación matemática.

Pensamiento Didáctico: El caso de estudio dio importancia a las características de los estudiantes o del grupo para realizar sus planeaciones; se apoyó en investigaciones en educación matemática para el diseño de las planeaciones; y comprendió que los errores de los estudiantes no son accidentales ya que están basados en conocimientos y experiencias previas, pudiendo tener diferentes causas que los motivan (dificultades didácticas, epistemológicas, cognitivas, de actitudes, entre otras).

Pensamiento Orquestal: comprendió la necesidad de incorporar diferentes instrumentos que posibiliten el aprendizaje de todos sus estudiantes; y seleccionó los recursos necesarios dependiendo de la actividad matemática que desea promover y de las características de sus estudiantes.

Referencias y bibliografía

Aké, L. (2015). Matemáticas y educación especial: realidades y desafíos en la formación de profesores. En López-Mojica, J. y Cuevas, J. (Coords), *Educación especial y matemática educativa*. pp. 15-32, México: Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat; Universidad Autónoma de San Luis de Potosi.

Blanco, R. (1996). *Alumnos con necesidades educativas especiales y adaptaciones curriculares*. Madrid: CNREE, MEC.

Escuela de Matemáticas. (2012). *Informe de autoevaluación con fines de acreditación*. Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga.

Figueroa, I. y Muñoz, Y. (2014). La Guía para la Inclusión Educativa como herramienta de autoevaluación Institucional: Reporte de una Experiencia. *Revista Latinoamericana de Inclusión Educativa*, 8(2), 179-198.

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional*. (Tesis de Doctorado). Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

UNESCO (1990). *Declaración mundial sobre la educación para todos*, UNESCO, Jomtien, Tailandia.

Recuperado de http://www.unesco.org/education/pdf/JOMTIE_S.PDF

UNESCO (1994). *Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad*, Ministerio de Educación de España y UNESCO, Salamanca, España.

UNESCO (2000). *Informe final del Foro Mundial de la Educación en Dakar*, Dakar, Senegal.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A Atividade coletiva na formação inicial do professor de matemática: a elaboração do jogo como tarefa

Bruno Silva **Silvestre**
Universidade Federal de Goiás
Brasil
brunosilvestre.prof@gmail.com
Wellington Lima **Cedro**
Universidade Federal de Goiás
Brasil
wcedro@ufg.br

Resumo

O artigo tem por objetivo analisar as ações coletivas dos estudantes em formação inicial em matemática que sinalizam atividade de estudo, tendo o jogo como recurso de ensino importante para a organização do trabalho docente. Fundamenta-se nos pressupostos da Teoria Histórico Cultural sobre a formação do professor de matemática, elencando: os conceitos de Atividade propostos por Leontiev (1983), o jogo como recurso de ensino e a atividade de estudo referenciado em Davydov (1988) e Rubtsov (1996). A metodologia fundamenta-se na observação participante, fruto de uma pesquisa de mestrado realizada em 2016 em uma universidade brasileira, durante uma disciplina que abordava atividades lúdicas no ensino de ciências e matemáticas. A análise ressalta: as ações de planejamentos coletivos, as produções socializadas e o diálogo entre os estudantes como sinalizadores da apropriação do jogo como recurso relevante para a organização do ensino de matemática.

Palavras chave: atividade de estudo, coletividade, formação inicial, professor de matemática.

Introdução

Apresenta-se um recorte de uma pesquisa acadêmica, fruto de uma dissertação defendida no ano de 2016, que investigava a formação profissional inicial do professor de matemática, durante uma disciplina de núcleo livre, intitulada “Ensino de Ciências e Matemáticas por meio de atividades lúdicas na educação básica”, em uma universidade brasileira. O foco inicial da pesquisa era analisar a formação docente em matemática de modo a perceber o jogo como um

importante recurso de ensino. Essa análise gerou outras inquietações, quanto à organização do trabalho docente e, sobretudo, à organização do trabalho docente de matemática tendo o jogo como recurso de ensino. Com ênfase na organização docente em matemática, que tem o jogo como recurso, especialmente nas ações de planejamento dos estudantes em organizar o ensino coletivamente por meio de uma tarefa, descreve-se, ao longo deste texto, alguns elementos que fundamentam a formação inicial do professor de matemática, sobretudo o seu preparo para docência, em que o jogo é compreendido como um recurso relevante ao ensino.

Estrutura-se o artigo em três seções, sendo que a primeira dialoga teoricamente com a Teoria da Atividade e a atividade de estudo caracterizada pela socialização de ações coletivas; a segunda aborda os dados experimentais, por meio da observação participante do trabalho de Silvestre (2016), descrevendo as principais ações coletivas que os estudantes em formação profissional inicial desenvolveram para planejar e organizar o ensino de matemática por meio do jogo; e, por último, apresenta-se algumas considerações sobre a relevância do trabalho colaborativo desenvolvido na coletividade para um ensino de matemática eficiente e dialético.

A Teoria da Atividade: contribuições à atividade de estudo coletivo na formação do professor de matemática

A pesquisa fundamenta-se nos pressupostos da Teoria Histórico Cultural, que, por sua vez, está em confluência epistemológica no materialismo histórico dialético e referenciada nas obras de autores russos, com destaque em Leontiev (1983), Davydov (1988), Rubtsov (1996) e Repkin (2014). Apoia-se à psicologia pedagógica, principalmente por tentar compreender os aspectos mentais e subjetivos, relacionados à dialética, em que os estudantes em formação profissional inicial em matemática entendem e apropriam-se dos conhecimentos didáticos, sobretudo às ações de planejamentos para a organização do ensino. Nessa perspectiva, o presente texto remete-se a elementos da psicologia leontieviana e preocupa-se com a aplicabilidade desta à educação matemática.

A apropriação da Teoria da Atividade por pesquisadores brasileiros tem-se mostrado eficiente para compreensão de alguns processos e métodos de pesquisa, como apontam Duarte (2002) e Asbahr (2005), relacionando-a à área da educação. Compreende-se em Leontiev (1983) que a vida humana, em todo o seu processo ontológico, é uma sucessão de atividades que vão substituindo umas às outras, percebendo que a atividade em sua estrutura concebe aspectos de orientação – necessidades, motivos e tarefas – e de execução – ações e operações. Os aspectos de

orientação estão relacionados às ações mentais do homem, aos processos psíquicos e aos aspectos de orientação, que condizem com as ações manipulativas que podem ser objetais e/ou mentais. Segundo Leontiev (1983), na vida do ser humano há três atividades principais: jogo, estudo e trabalho, sendo a primeira evidenciada na infância, a segunda quanto se ingressa na escola e a terceira na fase adulta. Tais atividades não são únicas, mas potencializam os desenvolvimentos psíquicos. O trabalho de Davydov (1988) apoia-se na Teoria da Atividade e desenvolve pesquisas sobre a Atividade de Estudo, caracterizada como principal por Leontiev (1983), ao afirmar que, para um sujeito estar em atividade de estudo, o professor deve organizar o ensino de modo que crie condições e possibilidades para que o sujeito tenha necessidades e motivos para aprender, geralmente ocasionado por uma tarefa intencionalmente organizada, que desencadeará ações e operações para a sua resolução. Nesse processo de desenvolvimento de ações mentais e/ou objetais é que se dá a apropriação do conhecimento. Rubtsov (1996), seguindo essa premissa e estrutura de atividade de estudo, propõe que o professor organize a tarefa de estudo de modo a conceber uma situação problema, que coloque os estudantes para desenvolverem ações mentais de: estratégias, observação, manipulação, reflexão e pensamento crítico socializado para a solução do problema, ao qual usa-se o termo atividade em comum. Sobre esse tipo de atividade, desenvolvem-se os seguintes aspectos:

> 1 – As crianças têm como tarefa organizar a sua atividade cognitiva. Para isso, podem utilizar um "esquema de pesquisa", no qual o objeto de pesquisa, o problema, os meios de resolução e de controle são apresentados sob a forma de signos e símbolos.
>
> 2 – A classe é dividida em diversos grupos, cada um dos quais tendo parte do problema a ser resolvido (isto é, propõe o problema, outro resolve, um terceiro testa a solução, outro, ainda, faz a avaliação). Assim, o trabalho essencial, tal como o planejamento ou o controle da atividade, será efetuado pela criança e não pelo professor. Além disso, uma nova distribuição das tarefas permitirá à criança experimentar todos os papéis envolvidos.
>
> 3 – Os resultados do trabalho de todo o grupo dependem da qualidade do trabalho de cada um e da sua capacidade de cooperar e de autocorrigir-se. (RUBTSOV, 1996, p. 134).

Na proposta de Rubtsov (1996), há uma teorização da atividade comum, ou seja, coletiva, proposta para crianças, para que estas pudessem apropriar dos conhecimentos científicos da física. No entanto, observa-se ser possível aplicar a teoria a qualquer área do conhecimento, já que os parâmetros da atividade comum são: a resolução de problemas por meio

de representações, a divisão da turma em grupos para solução coletiva e as relações entre os grupos no sentido de contribuir com a melhor resolução do problema. Nesta mesma perspectiva, Rivina (1996) concorda com a atividade em comum/coletiva e demonstra que, nos momentos de socialização das ideias objetivas pelos grupos, há uma melhor compreensão do problema e de sua solução: "[...] pois ao comparar diferentes pontos de vista e diferentes posições, chegam a uma melhor compreensão do problema a resolver" (p. 139). A autora, ainda, apresenta quatro categorizações para se resolver um problema proposto na coletividade: 1) Divisão e trocas entre os participantes relativamente aos elementos estruturais; 2) Construção de modelos; 3) Conflito de conceitos e 4) Atividades em comum baseadas em jogos. Desse modo, a observação participante, referenciada neste trabalho, aborda a atividade de estudo dos estudantes do curso de licenciatura em matemática da universidade brasileira em questão no desenvolvimento de uma tarefa de estudo, mobilizada por meio de problemas, que eram a elaboração e o planejamento de uma situação de ensino de matemática que tivesse como recurso o jogo, visando, sobretudo, a aprendizagem da docência.

A elaboração e o planejamento de uma situação de ensino: o jogo em destaque

Para o desenvolvimento da observação participante, o pesquisador acompanhou toda a disciplina de núcleo livre "Ensino de Ciências e Matemática por meio de atividades lúdicas na educação básica", ministrada no segundo semestre do ano de 2014. O professor formador propôs para os estudantes uma tarefa, à qual considera-se teoricamente como tarefa de estudo, realizada em grupos, contendo em cada grupo de quatro a seis participantes. A finalidade consistia em organizar e planejar uma situação de ensino que tivesse o jogo como recurso e que os estudantes, após organizarem tal situação, iriam experimentá-la em dois momentos, com outros públicos que não fossem a própria turma. Para a produção de dados, foram utilizados instrumentos, como: gravações de algumas aulas em que os estudantes tinham momentos de organização e planejamentos de ensino, entrevista ao final da disciplina de núcleo livre e registros escritos dos estudantes sobre os planejamentos e, também, um relato de experiência produzido por cada grupo, apresentado ao final da disciplina. Para análise desta proposta, utiliza-se algumas transcrições dos momentos de organização coletiva de planejamento dos estudantes e trechos da entrevista final, quando finalizavam a disciplina, ressaltando os sentidos atribuídos sobre o jogo e a organização do ensino.

Para a escolha dos recortes da pesquisa de Silvestre (2016), considera-se a relevância dos momentos que melhor indicam, durante a observação participante, o desenvolvimento do trabalho coletivo dos estudantes, para a apropriação da docência matemática, especialmente a que se utiliza do jogo como recurso. Além dessa justificativa, pauta-se no materialismo histórico dialético, compondo recortes que demonstram as relações entre os sujeitos, o conhecimento matemático e a organização do ensino, compreendido nas relações enfatizadas por Marx (1968) como dialéticas, objetivadas nas relações entre o homem e o mundo, sobretudo no processo de tornar-se professor de matemática.

Destaca-se, no quadro 01, uma transcrição de áudio de um dos grupos no momento de planejamento, sendo possível identificar a troca de ideias para a qualidade da situação de ensino.

Quadro 01 – Transcrição de áudio do momento de planejamento do grupo "basquemática" para o desenvolvimento da tarefa de estudo pensado coletivamente

1. Pesquisador: Como vocês vão desenvolver o conteúdo.
2. Daniela: Calma uma coisa de cada vez! Vocês pensam e depois vocês relacionam. Não é só matemática, matemática, matemática, matemática!
(Risos)
3. Daniela: Nossa!
(Pausa)
4. Daniela: Lembra do Wellington falando: "Não necessariamente tem que ser a matemática pela matemática"
5. Mateus: Não, não estou falando que é a matemática.
6. Daniela: Tem que ser o jogo, para a matemática. Não a matemática para a matemática.
7. Alana: A matemática para não matemáticos.
(Risos)
(Momento incompreensível)
8. Daniela: Tem gente que odeia matemática, está lá por que precisa. Não é um trem chato, é um trem legal, divertido! Nosso jogo vai cair no tedio puro, a pessoa já não gosta da matemática e tem que jogar matemática.

Cena I – Transcrição do primeiro momento de planejamento do grupo Basquemática.

Fonte: SILVESTRE (2016, p. 120)

Percebe-se, por meio da análise das falas dos estudantes em formação inicial, que, quando questionados pelo pesquisador, o que eles tinham conjecturado quanto ao conteúdo de matemática presente no jogo entram em uma sequência de respostas, em que se preocupavam, ainda, com os procedimentos do jogo, elencando, por meio do diálogo, nas contribuições de Daniela, Mateus e Alana – nomes fictícios para preservar a identidade dos participantes – a ideia de que o jogo deveria ser divertido, que a matemática presente no jogo deveria ser algo que motivasse e criasse necessidades nos participantes, expressos nas ideias: *"Não é um trem chato,*

é um trem legal, divertido!". Percebe-se, neste trecho, além das ações de diálogo desenvolvidas pela consciência, por meio do pensamento objetivado nas falas dos participantes, as contradições de ideias expostas pelos participantes que, após determinarem/conjecturarem várias possibilidades, chegam a um "acordo" para decidir como se desenvolveria a situação de ensino em si. Após refletirem coletivamente na melhor escolha, os participantes decidem por fazer um jogo em que a matemática esteja presente, mas de forma divertida, desmistificando o paradigma de que estudar matemática é chato.

O quadro 02 apresenta a transcrição de áudio de outro grupo, elucidando as regras presentes no jogo em desenvolvimento para ser um recurso de uma situação de ensino, que é pautado, também, no diálogo e nas relações dialéticas do pensamento objetivados por meio da fala.

Quadro 02 - Transcrição de áudio do momento de planejamento do grupo "roleta matemática" para o desenvolvimento da tarefa de estudo pensado coletivamente

[...]
1. Fabrício: Participantes?
2. Ohana: Os professores, os orientadores e os alunos.
[...]
(Pausa, barulho de movimentação nas cadeiras)
3. Fabrício: Quais são as regras? Ahhhh!
4. Ohana: Um minuto para responder...
5. Fabrício: É! Um minuto para responder.
6. Ohana: Tem duas chances para responder, por que se não passa para o outro grupo.
7. Fabrício: Duas chances para responder?
8. Ohana: Sim. Tipo, se eu chutar duas vezes e não saber a resposta certa lança a pergunta para o outro grupo.
9. Fabrício: Mas aí não tem quem errar já dava ponto para o outro?
10. Ohana: É pode ser! Pode ser assim.
11. Fabrício: Então coloca...
12. Ohana: Pode ser assim, se errar a pontuação passa para o outro grupo.
13. Fabrício: A pontuação passa para o grupo adversário.
14. Ohana: É acho que só.
15. Fabrício: A regra básica é essa né? Um minuto para responder cada pergunta. Se errar passa para o grupo adversário. Aí vai escolher um líder ne?
16. Ohana: É!
17. Fabrício: É....
(Pausa nas falas do grupo)
18. Fabrício: Aí as perguntas são passadas para o time adversário né?
(Pausa nas falas do grupo)

Cena II – Transcrição do primeiro momento de planejamento do grupo Roleta Matemática.

Fonte: SILVESTRE (2016, p. 121-122)

No quadro 02, pode-se destacar a estruturação das ideias sobre a situação de ensino, quanto às regras do jogo, pensadas com a contribuição dos participantes do grupo, por meio da

fala e do pensamento sobre o que concebiam como melhor para determinarem a situação de ensino.

Em confluência com a análise das falas e dos diálogos dos estudantes demonstrados até o momento, destaca-se, a seguir, um trecho da entrevista de Fabricio – nome fictício – em que o próprio estudante reconhece a importância do trabalho coletivo e a troca de experiências e informações que enriquecem e qualificam a tarefa desenvolvida.

> [...] sobre o que considera mais importante durante a disciplina de núcleo livre: "O que eu mais aprendi aqui cara, foi o trabalho de grupo, o trabalho de equipe, [...]" (Fabricio, 4F). Neste *flash*, percebemos a importância do trabalho em grupo, ou trabalho colaborativo para apropriação de determinado conhecimento. [...] destacamos que o trabalho em equipe não foi só importante para que os sujeitos em formação construíssem, planejassem e organizassem o ensino por meio do jogo, percebendo-o enquanto recurso de ensino de matemática básica, mas na perspectiva de considerar o trabalho em grupo e colaborativo incorporado à sua prática docente: "A gente não trabalha o aluno para aprender o conteúdo matemático, a gente trabalha o aluno para apreender aplicar o que ele vê na escola na vida em sociedade. A pessoa não consegue viver sozinha né? A gente não consegue viver sozinho. Então o aluno para aprender viver em sociedade ele tem que aprender a trabalhar em grupo. A gente que está aqui, dentro da faculdade, ver como isso é importante, né?" (Fabricio, F). (SILVESTRE, 2016, p. 157)

Na citação acima, de uma parte da entrevista realizada com Fabricio, tem-se a concepção de que o estudante demonstra relevância nas relações e nas ações coletivas constituídas e desenvolvidas com os grupos e, consequentemente, com toda a turma para a elaboração da situação de ensino, reconhecendo, inclusive, que não é possível viver em sociedade sem as relações em grupo, o trabalho em grupo, coletivo, é de muita importância, *"[...] para aprender viver em sociedade ele tem que aprender a trabalhar em grupo"*, ressaltando a relação homem-mundo.

Desse modo, caracteriza-se como tarefa de estudo dos estudantes, organizada intencionalmente pelo professor regente, a resolução do problema em desenvolver uma situação de ensino de matemática que houvesse o jogo como recurso. A organização dessa tarefa proposta aos estudantes da licenciatura em matemática apresenta-se em confluência com a atividade de estudo, sendo que os estudantes foram mobilizados a criarem necessidades e motivos para o desenvolvimento da tarefa que, por sua vez, ocasionou ações e operações para que os estudantes conseguissem criar a situação de ensino. Destaca-se, portanto, que a constituição do trabalho em grupo – desenvolvido pelos estudantes – no desenvolvimento da tarefa de estudo se deu pelas

ações dialéticas dos estudantes, objetivadas por meio da fala e das expressões de suas consciências nas relações: conteúdo matemático, nos momentos de organização do jogo, evidenciado no ensino de matemática, proposto na própria tarefa de estudo desenvolvida pelos estudantes.

Algumas considerações

Considera-se que as ações desenvolvidas pelos estudantes enquanto organizavam e planejavam o ensino de matemática, tendo o jogo como recurso, destacam-se nas ações mentais de pensamento – relacionadas à consciência – objetivadas nas falas dos estudantes, quando um contribuía com o outro, e, nesses processos de contribuições mútuas, chegou-se a consolidação da situação de ensino de matemática, evidenciada nas relações de conteúdo matemático, no jogo com presença de regras/motivador de toda a situação de ensino e, também, no modo que iriam proceder com o ensino – didática. As ações coletivas aqui evidenciadas condizem com o instrumento utilizado – transcrições das falas captadas por meio do áudio – com os estudantes em formação, que, por sua vez, demonstraram a relação de relevância do trabalho e o enriquecimento de sua qualidade quando dialogado e construído por meio das contradições de pensamento, argumentação e ideias objetivadas nas falas dos estudantes, para compreenderem, sobretudo, a atividade pedagógica do professor de matemática.

Destacam-se as relações do homem com o mundo, mediadas pelo pensamento e substanciada pela consciência, em destaque neste trabalho nas ações da consciência objetivadas nas falas dos estudantes, nas quais, por meio de contradições, chegou-se à determinação específica da situação de ensino que se desejava, sendo motivadora e criadora de necessidades de aprendizagem, capaz de possibilitar movimentos de ação e operação para o seu desenvolvimento, cumprida a tarefa de estudo proposta, cumprindo sua finalidade última, que era utilizar o jogo como recurso relevante ao ensino de matemática.

Referências

Asbahr, F. S. F. (2005) A pesquisa sobre a atividade pedagógica*:* contribuições da teoria da atividade. *Revista Brasileira de Educação.* Nº 29. Mai/Jun/Jul/Ago. 108-119

Davydov. V. V. (1988) *Problemas do ensino desenvolvimental* – a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas da versão em inglês: Problems of Developmental Teaching. Revista de Educação Soviética, agosto, v. 30, nº 8.

Duarte, N. (2002) A teoria da atividade como uma abordagem para a pesquisa em educação. *PERSPECTIVA,* Florianópolis, v. 20, n. 02, p.279-301, jul./dez. 2002

Leontiev, A. N. (1983) *Actividad, consciencia, personalidad.* Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Marx, K. (1968) *O Capital:* crítica da economia política. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira. v.1.

Rivina. I. (1996) A organização de atividades coletivas e o desenvolvimento cognitivo em crianças pequenas. In. CATHERINE. G. et al *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista.* Escolas russa e ocidental. Tradução Eunice Gruman. – Porto Alegre: Artes Médicas. 138-150

Repkin, V. V. (2014) O ensino desenvolvente e a atividade de estudo. *Ensino Em Re-Vista,* v.21, n.1, p.85-99, jan./jun.

Rubtsov, V. (1996) A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. In. CATHERINE. G et al. *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista.* Escolas russa e ocidental. Tradução Eunice Gruman. – Porto Alegre: Artes Médicas. 129-137

Silvestre, B. S. (2016) *A formação do professor de matemática:* o jogo como recurso de ensino. Dissertação – Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, UFG, Goiânia. 215 f.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O Conhecimento Matemático como Fator Determinante no Ensino e na Aprendizagem: Percepções de Professores Brasileiros que Ensinam Matemática

Marlo Mendes de Souza Junior
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
marlojunior.mat@gmail.com

Rafaela Oliveira Carvalho
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
rafacarvalho146@gmail.com

Raquel Carneiro Dörr
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
raqueldoerr@gmail.com

Rebeca de Miranda Silva
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
rebecamirandasilva@gmail.com

Regina Pina Silva
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil
reginapina@gmail.com

Resumo

O ensino e a aprendizagem de Matemática no Brasil têm suscitado discussões em função dos resultados, ainda abaixo do esperado, a presentados pelos estudantes nas avaliações em larga escala. Assim, questionam-se a formação inicial dos professores que ensinam Matemática, o distanciamento da formação acadêmica em relação à prática e o impacto do conhecimento matemático na atuação docente. Desse modo, desenvolveu-se um estudo com 45 professores que ensinam Matemática, tendo como

objetivos: identificar as percepções desses professores, licenciados em Pedagogia e Matemática, sobre suas práticas de ensino e conhecer suas aspirações por aprimoramento em conteúdos matemáticos específicos. Os participantes responderam a duas perguntas acerca de suas percepções, atuação docente e necessidades formativas. Os dados foram submetidos à análise de conteúdo e os resultados mostram que eles consideram a Matemática como componente curricular difícil de ser ensinada e têm na geometria o tópico curricular mais requerido para aprofundamento.

Palavras-chave: aprendizagem, conhecimento matemático, ensino, formação de professores, geometria.

Contexto da investigação e referencial teórico

O ensino e a aprendizagem de Matemática no Brasil têm suscitado discussões em vários setores da sociedade pelos resultados, ainda abaixo do esperado, apresentados pelos estudantes nas avaliações em larga escala, tais como o *Programme for International Student Assessment* (PISA), o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE), entre outras. Do mesmo modo, acentuam-se, os debates acerca das reformas curriculares dos Cursos de Licenciatura em Matemática e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Gatti, 2013; Santos, 2014; OCDE, 2016; Brasil, 2016). Nesse contexto, questionam-se o ensino e o aprendizado da Matemática da Educação Básica ao Ensino Superior e também a formação inicial que os professores que ensinam Matemática (Fiorentini, 2003) têm recebido nas diferentes Instituições de Ensino Superior, em especial, o distanciamento da formação acadêmica em relação à prática em sala de aula e o impacto do conhecimento matemático na atuação docente. (Ball, Hill & Bass, 2005).

O conhecimento matemático do professor tem sido amplamente abordado nos debates relativos à qualidade da Educação Básica no Brasil, desde as últimas décadas do século passado. Entretanto, o que vem a ser esse conhecimento? Shulman (1986), ao desenvolver o "*knowledge base for teaching*" (base de conhecimentos para o ensino), classifica os diferentes tipos de conhecimentos necessários à prática docente. Dentre eles estão o conhecimento do conteúdo, do curricular, do pedagógico do conteúdo, do cognitivo dos estudantes, entre outros. Em relação ao conhecimento do conteúdo, entende-se, a partir dessa abordagem teórica, que a sua estrutura difere de acordo com as diferentes áreas de conhecimento, ou seja, esse conteúdo vai além do conhecimento dos fatos ou dos conceitos da área e integra, além da capacidade do professor de apresentar aos estudantes as verdades aceitas na área, a capacidade de explicar porque determinado resultado é considerado verdadeiro, como ele se relaciona com outros resultados ou porque é pertinente conhecê-lo. Além disso, engloba a compreensão, por parte do professor, sobre a posição que determinados tópicos curriculares assumem, se central ou periférica, na disciplina.

Todo esse entendimento tem contribuído para a realização de inúmeras pesquisas e para a ampliação da compreensão do Conhecimento Base do professor para ensinar Matemática. Nesse

sentido, destacamos os trabalhos liderados por Ball e Hill. Eles sistematizaram diversos resultados de pesquisas a partir do referencial teórico de Shulman (1986) e desenvolveram a noção do Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching*). (Hill et al., 2005; Ball et al., 2005; Ball, Tames & Phelps, 2008).

Como sabemos, a formação de professores é um processo complexo iniciado na graduação, refletido, ampliado, transformado ou não no desenvolvimento profissional, concretizado, desenvolvido e significado em sala de aula a partir das inúmeras experiências advindas do ambiente escolar. Os conhecimentos construídos ao longo dessa trajetória são determinantes para o ensino e aprendizagem dos estudantes, do mesmo modo que as noções de Matemática científica e escolar e suas oscilações, enquanto objeto de estudo e de trabalho na escola (Fiorentini et al., 2016).

Moreira & David (2005) auxiliam nesses entendimentos ao discutirem a "transposição didática" (Chevallard,1991) e as "práticas escolares" (Chervel, 1990). Os autores concluem que "A Matemática escolar não se reduz a uma versão elementar e 'didatizada' da Matemática científica" (Moreira & David, 2005, p. 51) e "a prática profissional do professor de Matemática da escola básica é uma atividade complexa, cercada de contingências, e que não se reduz a uma transmissão técnica e linear de um 'conteúdo' previamente definido" (Moreira & David, 2005, p. 52). Já Diniz-Pereira (1999) discute as limitações dos cursos de formação inicial ao tratar o conhecimento matemático necessário à prática docente em Matemática, seja para os anos iniciais e finais do ensino fundamental, seja para o ensino médio. Para ele, tais limitações filiam-se às estruturas curriculares clássicas das licenciaturas do Brasil, surgidas na década de 1930, às quais são denominadas modelo "3 + 1". Nesse padrão, os três primeiros anos do curso de licenciatura são destinados às disciplinas específicas e as disciplinas de natureza pedagógica eram justapostas no último ano. Em suas publicações, o autor chama este modelo de racionalidade técnica e afirma:

> Nesse modelo, o professor é visto como um técnico, um especialista que aplica com rigor, na sua prática cotidiana, as regras que derivam do conhecimento científico e do conhecimento pedagógico. Portanto, para formar esse profissional, é necessário um conjunto de disciplinas científicas e um outro de disciplinas pedagógicas, que vão fornecer as bases para sua ação. No estágio supervisionado, o futuro professor aplica tais conhecimentos e habilidades científicas e pedagógicas às situações práticas de aula (Diniz-Pereira, 1999, p. 111-112)

Complementando as análises acerca da complexidade relativa à formação inicial do professor que ensina Matemática, somam-se resultados que afirmam que a identidade do professor apresenta marcas das trajetórias vividas e, por isso, não pode ser dissociada de sua história de formação ou dos formadores com os quais ele conviveu (Dörr & Pina Neves, 2014; Nacarato, Oliveira & Fernandes, 2017). Ademais, D'Ambrosio (1993) já nos alertava que dificilmente um professor de Matemática formado em programa obsoleto estará preparado para enfrentar os desafios das modernas propostas curriculares.

Logo, considerando este complexo cenário da formação de professores brasileiros que ensinam Matemática e as necessidades de compreensão sobre o impacto do conhecimento

matemático do professor em sua prática docente, delineamos o presente estudo, tendo como objetivos:

i) identificar as percepções de professores que ensinam Matemática, licenciados em Pedagogia e Matemática, sobre suas práticas de ensino;

ii) conhecer suas aspirações por aprimoramento em conteúdos matemáticos específicos.

A escolha do objeto justifica-se pelo entendimento do grupo de pesquisa em relação à formação matemática de professores como importante elemento de influência em sua prática docente, e, consequentemente, no desenvolvimento de metodologias de ensino e nos resultados de aprendizagem dos estudantes.

Método

Participaram do estudo 45 professores que ensinam Matemática (23 homens e 22 mulheres), em sua maioria licenciados em Matemática e alguns em Pedagogia. Todos eles participavam, no momento da realização do estudo (fevereiro de 2018) de um Curso de Especialização em Metodologias de Ensino em Matemática, realizado na modalidade à distância e oferecido por uma universidade pública do Distrito Federal do Brasil em parceria com a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Os participantes são, em sua maioria, provenientes de Cursos de graduação de instituições privadas de Ensino Superior. Eles atuam, em sua maioria, em escolas da rede pública, como docentes de Matemática com tempo variado (desde os ingressantes na profissão com 1 ano de atuação, até aqueles que já atuam há 27 anos) e, além disso, possuem idades entre 23 a 52 anos.

Os participantes responderam a duas perguntas que solicitavam a justificativa para a resposta, organizadas em instrumento individual entregue a eles impresso em papel A4. Eles responderam a elas sem limitação de tempo e sem diálogo com os colegas de curso; foram voluntários e não receberam nenhum favorecimento em função de sua participação. As perguntas apresentadas foram as seguintes:

i) Você considera que a Matemática é difícil de ensinar? Justifique sua resposta.

ii) Que conteúdo de Matemática da Educação Básica você gostaria de estudar com mais profundidade? Justifique sua resposta.

Os dados obtidos foram organizados em quadros para facilitar a leitura e submetidos à análise de conteúdo, tomando-se a proposição como unidade de análise (Bardin, 1977; Fávero & Trajano, 1998). Este relato de pesquisa está inserido em contexto investigativo mais amplo e em desenvolvimento. Desse modo, este artigo traz resultados gerais os quais integrarão, posteriormente, resultados pormenorizados.

Resultados Gerais e discussões

Do total de participantes, 28 deles pertenciam e atuavam como docentes de Águas Lindas e 17 de Anápolis, ambas cidades situadas no estado de Goiás, sendo 45 respostas ao todo. Referente à primeira pergunta, foram obtidas um total de 25 respostas "sim", das quais 13 respostas são dos professores de Águas Lindas e 12 de Anápolis. Por outro lado, 16 respostas foram "não", dessas

11 são de Águas Lindas e 5 de Anápolis. Além disso, um professor de Águas Lindas não soube responder e 3 professores, também do mesmo município, responderam "depende".

Com relação à segunda pergunta, foram mencionados um total de 17 conteúdos, dos quais 53 eram citações totais de conteúdos específicos. Assim, listamos os tópicos curriculares da Educação Básica que os professores participantes gostariam de estudar com mais profundidade, os quais foram citados mais de uma vez nas respostas: geometria, probabilidade, álgebra, trigonometria, cônicas, polinômios, história da Matemática, logaritmo, matemática financeira, teoria dos números, funções, estatística, divisores, frações, potenciação, problemas matemáticos e análise combinatória. Dentre esses conteúdos, os que aparecem com mais frequência são geometria, citado 23 vezes, seguido de trigonometria¸ 6 vezes, e probabilidade, 4 vezes. Álgebra e matemática financeira foram citadas apenas 3 vezes. Funções e frações foram citadas 2 vezes. O restante foi citado uma vez e um professor não soube responder.

Essas informações foram organizadas nos gráficos seguintes:

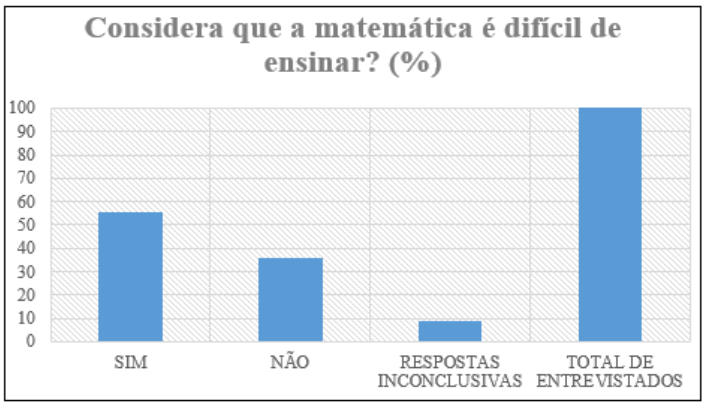


Figura 1. Percentual de respostas à primeira pergunta.



Figura 2. Percentual de respostas à segunda pergunta.

De acordo com as orientações de Fávero & Trajano (1998), em relação à primeira pergunta, quatro proposições foram evidenciadas: a Matemática é difícil de ensinar porque os estudantes não possuem os pré-requisitos conceituais básicos; a Matemática é difícil de ensinar porque possui

linguagem abstrata e específica; a Matemática é difícil de ensinar porque estudantes e famílias compartilham representação negativa dessa área de conhecimento. Já em relação à segunda pergunta, três proposições foram evidenciadas: os professores gostariam de aprofundar seus conhecimentos em geometria porque não estudaram esse tópico curricular na Educação Básica e apresentaram como justificativa "para aprender novas formas de ensiná-la"; "acho difícil explicar o conteúdo"; "porque tenho dificuldade nesses conteúdos". Os professores gostariam de aprofundar seus conhecimentos em geometria, trigonometria e probabilidade porque possuem dificuldades conceituais e metodológicas relativas a esses tópicos curriculares; pelo mesmo motivo, os professores gostariam de aprofundar seus conhecimentos em álgebra, matemática financeira e funções.

Entendemos que os resultados, mesmo sendo desvelados em 2018, apresentam similaridades com estudos anteriores. Moreira & David (2005), por exemplo, afirmam que a formação matemática do licenciando se desconecta da prática docente. As respostas obtidas levam-nos a concordar com estes autores se estabelecermos uma relação direta entre a formação dos professores e suas respostas, independentemente se forem licenciados em Pedagogia ou Matemática.

Avaliamos, também, que os resultados gerais apresentados denunciam a manutenção de uma realidade amplamente discutida na literatura sobre o ensino e a aprendizagem de geometria na Educação Básica. Muitos estudos referem-se a este fato a partir de termos como "omissão e (ou) abandono". Ver, por exemplo, Pavanello (1993); Pina Neves (2010), Kaleff (2003), Salazar (2009), Almeida (2010). Desse modo, infere-se que se mantém, no âmbito da atuação profissional dos professores participantes do estudo, "[...] presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou geometria não sabe como ensiná-la" (Lorenzato, 1995, p. 4).

Tais resultados preocupam-nos tendo em vista os resultados de estudos como os de Fillos (2006) que afirma que a geometria é fundamental para a compreensão do mundo e a participação ativa do homem na sociedade, pois facilita a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento e desenvolve o raciocínio visual. Fonseca et al. (2001) registram que ela é importante veículo para o desenvolvimento de habilidades e competências, tais como a percepção espacial e a resolução de problemas, pois oferece aos sujeitos oportunidades de observar, comparar, medir, inferir, validar, generalizar e abstrair. Sendo assim, os autores defendem que a reformulação do ensino de geometria não é apenas uma questão didático-pedagógica, é também epistemológica e social.

Em referência específica ao Ensino Médio, os documentos governamentais apontam que as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e na visualização de partes do mundo que o cerca. Além disso, defendem que essas competências são importantes na compreensão e na ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. Quanto ao Ensino Superior, as diretrizes curriculares para os cursos de licenciatura em Matemática destacam que os cursos devem proporcionar ao licenciando estudos de fundamentos de geometria, bem como de conteúdos presentes no currículo da Educação Básica.

Todos os argumentos pontuados até o momento permitem-nos algumas conclusões: o ensino de geometria é imprescindível para o desenvolvimento humano, é defendido por pesquisadores da

área, é defendido nos textos dos documentos oficiais e a aprendizagem geométrica é pontuada como possível, desde que o ensino e a aprendizagem de geometria sejam (re)construídos em todos os níveis de ensino. Essas indagações são pertinentes se considerarmos o contexto social brasileiro. D' Ambrosio (1993) afirma que nossa sociedade, em geral, e nossos estudantes, em particular, não veem a Matemática como a disciplina dinâmica que ela é com espaço para criatividade e emoção.

Referências

Almeida, T. (2010). *Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Ball, D. L., Hill, H. C & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who knows Mathematics Well Enough to Teach Third Grand, and How Can We Decide? *American Educator*, *29*(1), 14-46. Recuperado em http://hdl.handle.net/2027.42/65072

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. doi:10.1177/0022487108324554

Bardin, L. (2006). *Análise de conteúdo* (L. de A. Rego & A. Pinheiro, Trads.). Lisboa: Edições 70. (Obra original publicada em 1977).

Brasil (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular Ensino Médio*. Recuperado em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf

Chervel, A., (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação, 2*, 177-229.

Chevallard, Y., (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

D'ambrosio, B. S. (1993). Formação de professores de Matemática para o século XXI: o grande desafio. *Pro-Posições, Campinas, 4*(1), 10.

Diniz-Pereira, J. E. (1999). As licenciaturas e as novas políticas educacionais para formação docente. *Educação & Sociedade, 68,* 109-125.

Dörr, R. C., & Pina Neves, R. S. O Perfil de Ingressantes na Licenciatura em Matemática de uma Instituição Pública Federal do Distrito Federal. In: VI EBREM Encontro Brasiliense de Educação Matemática, 2014, *Anais*... Brasília, 2014.

Fávero, M. H., & Trajano, A. (1998). A leitura do adolescente: Mediação semiótica e compreensão textual. *Psicologia, Teoria e Pesquisa, 3*, 229- 240.

Fillos, L. M. (2006). O ensino da geometria: depoimentos de professores que fizeram história. In: EBRAPEM, Belo Horizonte. Recuperado em: http://www.fae.ufmg.br:8080/ebrapem/completos/05-11.pdf

Fiorentini, D. (2003). *Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. São Paulo: Mercado das letras.

Fiorentini, D. et al. (2016). O professor que ensina Matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. In: D. Fiorentini, C. L. B. Passos, & R. C. R. Lima (Org.). *Mapeamento da*

pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001 – 2012. , (pp. 17 – 42). Campinas, SP: FE/UNICAMP. E-Book. ISBN 978-85-7713-198-3.

Fonseca et al. (2001).

Gatti, B. A. (2013). Possibilidades e fundamentos de Avaliações em larga escala: primórdios e perspectivas contemporâneas. In: A. Bauer, & B. A. Gatti, (Org.). *Vinte e cinco anos de avaliação de sistemas educacionais no Brasil*. (pp. 47-69). Florianópolis: Insular, v. 2.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42,* 371-406.

Kaleff, A.M. (2003). *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos.* Rio de Janeiro: EdUFF.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista* – SBEM, São Paulo, *4*, 3-13.

Moreira, P. C., & David, M. M. M. S. (2005). O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. Revista brasileira de educação, *28*, 50-62.

Nacarato, A. M., Oliveira, A. M. P. de, &. Fernandes, D. N. (2017, jan./abr.). Histórias da formação e de professores que ensinam Matemática: possíveis aproximações teórico-metodológicas. *Revista Zetetiké, 25*(1), 46-74.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). (2016). *PISA 2015 results in focus*. Recuperado em http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa_2015_brazil.pdf

Pavanello, M. R. (1993). O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Revista Zetetiké, 1*(1), 7-17.

Pina Neves, R. da S., & Baccarin, S. A. de O. (2010). Estratégias de resolução de problemas de ingressantes no curso de licenciatura em Matemática: um estudo de caso por meio da replicação de itens do ENEM 2009. In X Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Salvador. *Anais…* ISSN 2178-034X.

Salazar, J. V. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço.* Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Santos, E. R. dos. (2014). *Análise da produção escrita em Matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino.* Tese (Doutorado em Ensino de 73 Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Shulman, L. S. (1986). *Those who understand: knowledge growth in teaching*. *Educacional Researcher, 15*(2), 4-14.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A Análise Matemática na constituição de Conhecimentos Didático-Matemáticos para a atuação de professores de Matemática no Ensino Médio: uma análise epistêmica de uma atividade sobre Números Racionais

Paulo Cesar Pereira **Napar**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
paulonapar@gmail.com
Carmen Teresa **Kaiber**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
carmen_kaiber@hotmail.com

Resumo

Apresenta-se, neste artigo, um recorte de uma pesquisa em nível de mestrado intitulada "A Análise Matemática na Constituição de Conhecimentos para a atuação do Professor de Matemática no Ensino Médio: uma análise na perspectiva epistêmica do Enfoque Ontossemiótico". A proposta deste excerto considera a análise de uma atividade, presente em um livro de Análise Matemática para Licenciatura, sobre Números Racionais, buscando uma articulação com um objeto de estudo do Ensino Médio para identificar potencialidades que alicerçam o Conhecimento Didático-Matemático de professores de Matemática do Ensino Médio. A análise toma como referência os pressupostos epistêmicos da ferramenta de análise didática da Idoneidade Didática do Enfoque Ontossemiótico, sendo conduzida em uma perspectiva qualitativa. Os resultados apontam que a atividade, de contexto da Análise Matemática, apresenta uma possível articulação com conhecimentos matemáticos do Ensino Médio no que se refere a utilização de provas matemáticas, mostrando-se como uma potencialidade para alicerçar conhecimentos da atuação docente nesse nível de ensino.

Palavras chave: Análise Matemática para Licenciatura, Ensino Médio, Enfoque Ontossemiótico, Números Racionais, Conhecimentos Didático-Matemáticos.

Introdução

Investigações sobre a Análise Matemática, como a de Reis (2001), Moreira, Cury e Vianna (2005) e Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013), apresentam discussões sobre o papel da Análise no contexto dos cursos de formação de professores de Matemática. Essas pesquisas

surgem em torno de debates sobre como o alto nível de complexidade matemática, apresentado em determinados componentes curriculares, contribui para o desenvolvimento de competências profissionais para os futuros professores de Matemática.

A Análise, enquanto área de estudo que formaliza, rigorosamente, os conceitos matemáticos envolvidos no tratamento do conjunto dos Números Reais e do Cálculo (Ávila, 2006), coloca em evidência um conjunto de competências que, segundo Moreira, Cury e Vianna (2005), prioriza a constituição de conhecimentos matemáticos, deixando de lado, por vezes, a formulação de conhecimentos que contribuem para a formação pedagógica e didática de futuros professores. Apesar disso, tal como destacam as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática (Brasil, 2001), essa é uma área de conhecimento que deve ser abordada nos cursos de formação de professores de Matemática. Pondera-se que, se por um lado a Análise é conduzida pela visão do mundo puramente matemático, por outro, deve-se olhar para as contribuições que os conhecimentos provenientes dessa área têm a oferecer para a formação docente de professores de Matemática.

Considerando elementos do contexto apresentado, foi desenvolvida uma pesquisa no âmbito de uma dissertação de mestrado que teve como objetivo investigar articulações entre os conhecimentos matemáticos institucionais da Análise Matemática para Licenciatura em Matemática e os do Ensino Médio que apresentassem potencialidades para alicerçar o conhecimento do professor de Matemática para atuar no Ensino Médio. Essa pesquisa, de carácter qualitativo, partiu de pressupostos teóricos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) (Godino, 2009; Godino; Batanero & Font, 2008; Godino et al., 2017), buscando por possíveis articulações institucionais entre objetos matemáticos da Análise Matemática e os do Ensino Médio, os quais se constituíssem como potencialidades no desenvolvimento de Conhecimentos Didático-Matemáticos para a atuação dos professores.

A partir do contexto mencionado apresenta-se, aqui, um recorte dessa investigação que considera a análise das potencialidades de uma atividade, presente em um livro de Análise Matemática para Licenciatura (Ávila, 2006), sobre Números Racionais. Essa análise parte do entendimento de uma possível articulação com conhecimentos que, com referência em Souza (2013), estão presentes no Ensino Médio. Toma-se como pressuposto teórico os constructos advindos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), particularmente no que se refere a Idoneidade Didática em sua dimensão epistêmica (Godino, 2009; Godino; Batanero & Font, 2008), direcionando-se para apontamentos sobre a constituição de Conhecimentos Didático-Matemáticos (Godino, 2009; Godino et al., 2017) para a atuação no Ensino Médio (Napar, 2018). Essa análise toma como foco aspectos relacionados a atividade enquanto situação-problema e a sua resolução, discutindo-se, com base no EOS, sobre os potenciais conhecimentos epistêmicos que emergem para a prática docente.

Aspectos teóricos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática

O marco teórico do Enfoque Ontossemiótico toma como base os aportes teóricos da Didática da Matemática francesa apontando para uma ontologia de objetos matemáticos que contemple uma visão que entende a Matemática em um triplo aspecto: atividade de resolução de problemas socialmente compartilhada, linguagem simbólica e sistema logicamente organizado (Godino, 2009; Godino; Batanero; Font, 2008).

O EOS, atualmente, se estrutura a partir de cinco grupos teóricos, a saber: (1) Sistemas de Práticas, (2) Configurações de Objetos e Processos Matemáticos, (3) Configuração e Trajetória Didática, (4) Dimensão Normativa e (5) Idoneidade Didática (Godino et al., 2017).

A Idoneidade Didática se constitui em uma ferramenta de análise própria para investigar elementos do trabalho docente frente aos objetos matemáticos e as relações nas práticas matemáticas, permitindo, assim, uma intervenção eficaz na sala de aula (Godino, 2009) e nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Refere-se a um processo que integra, harmonicamente, um conjunto de seis dimensões: epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, emocional e ecológica. A dimensão epistêmica diz respeito, em um processo de estudo, ao grau de representatividade que há, do ponto de vista institucional, entre o significado atribuído a um objeto em relação a sua referência matemática (Godino; Batanero & Font, 2008)

A dimensão epistêmica considera, em um processo de estudo matemático, componentes e indicadores que podem ser utilizados como uma ferramenta de análise didática, aqui intitulada como Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica (FADDE), a qual é apresentada e descrita no quadro da Figura 1.

Componentes	Indicadores
Situações-problema	-Apresentam-se mostras representativas e articuladas de situações de contextualização, exercícios e aplicações. - Propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	- Percebe-se o uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica...), tratamento e conversões entre as mesmas. - O nível de linguagem adequado aos educandos a que se dirige. - Propõem-se situações de expressão e interpretação matemática.
Regras (Definições, proposições, procedimentos)	- As definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem. - Apresentam-se os enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado.
Argumentos	- Promovem-se situações as quais o educando tenha que argumentar e justificar o pensamento matemático. - As explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível a que se dirigem.
Relações	- Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições e etc.) se relacionam e se conectam entre si. - Identifica-se a articulação dos diversos significados dos objetos que intervêm nas práticas matemáticas.

Figura 1: Componentes e indicadores da FADDE
Fonte: traduzido e adaptado de Godino (2009).

Destaca-se que as análises conduzidas neste trabalho possuem um direcionamento a constituição do conhecimento do professor de Matemática. Nesse sentido, considera-se uma visão para a ferramenta didática tendo em conta a modelização do conhecimento, no âmbito epistêmico, para a atuação docente. Esse olhar, segundo Godino (2009) e Godino et al. (2017), é denominado por Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM).

Os CDM de professores de Matemática, como no âmbito da Idoneidade Didática, são entendidos nas perspectivas epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, emocional e ecológica (Godino, 2009; Godino et al., 2017). Entende-se que esse modelo pressupõe os conhecimentos necessários para que o processo de ensino da Matemática, por parte dos professores, seja o mais qualificado possível.

Na perspectiva epistêmica, foco deste trabalho, são considerados duas classes de conhecimentos do professor que se inter-relacionam na constituição dos CDM: conhecimento comum do conteúdo e conhecimento ampliado do conteúdo. Toma-se, com base em Godino et al. (2017), uma interpretação para essas noções na presente investigação, na qual se concebe que o conhecimento comum do conteúdo se constitui nas possibilidades de conexões matemáticas que os conhecimentos da Análise Matemática têm para alicerçar o conhecimento específico do professor. Já o conhecimento ampliado do conteúdo, refere-se ao desenvolvimento de competências para identificar, significar e relacionar os conhecimentos matemáticos da Análise Matemática com os do Ensino Médio, bem como a outros contextos que podem estar envolvidos na prática profissional de professores de Matemática.

Aspectos metodológicos

A investigação, na qual a análise aqui apresentada se insere, foi conduzida em uma perspectiva qualitativa. Nesse contexto, os aportes do EOS forneceram elementos pertinentes para a realização da mesma. A atividade tomada para análise refere-se a uma questão sobre a transformação de um número em forma decimal para a sua forma fracionária. A questão foi extraída de um livro Análise Matemática para Licenciatura (Ávila, 2006) e, a partir da constituição de uma resolução que leva em conta o contexto de provas e justificativas matemáticas, apresenta-se uma análise formulada à luz dos componentes e indicadores da chamada Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica (FADDE) (Godino, 2009; Godino; Batanero & Font, 2008, Godino et al., 2017), como já destacado.

A análise dos dados é orientada por uma perspectiva que considera o cenário de conhecimentos matemáticos que apresentam potencialidades para a atuação de professores de Matemática do Ensino Médio (Napar, 2018). Nesse intuito, aborda-se uma articulação entre os conhecimentos da área de Análise com os conhecimentos do Ensino Médio orientada pelas potenciais contribuições, no âmbito epistêmico, a constituição de Conhecimentos Didático-Matemáticos (Godino, 2009; Godino et al., 2017).

Apresentação, análise e discussão

A atividade utilizada para análise neste recorte está no contexto da Análise Matemática para Licenciatura (Ávila, 2006), referindo-se a uma questão interpretada, aqui, como uma situação-problema: "Prove que a dízima periódica $0{,}21507507\ldots$ é igual a $\frac{21507-21}{99900} = \frac{21486}{99900} = \frac{3581}{16650}$" (Ávila, 2006, p. 31).

Para avaliar as potencialidades dessa atividade, apresenta-se uma possível resolução, no quadro da Figura 2, conduzida por etapas (coluna 1) que são explicadas em linguagem natural (coluna 2) e conduzidas no âmbito da linguagem aritmética e algébrica (coluna 3).

Etapa	Explicação em linguagem natural	Explicação em linguagem aritmética/algébrica
	Tomando um número y tal que $y = 0{,}21507507\ldots$	$y = 0{,}21507507\ldots$
(1)	Multiplicando ambos os lados por 100 com o objetivo de deixar somente o valor referência do período (507) representado como número decimal.	$100y = 21{,}507507\ldots$
(2)	Separando a parte inteira da decimal no membro direito da igualdade.	$100y = 21 + 0{,}507507\ldots$

(3)	Tomando como referência o $k = 0{,}507507507\ldots$ com o objetivo de encontrar a fração geratriz do referido valor.	$k = 0{,}507507507\ldots$
(4)	Multiplica-se a igualdade por 1000 para tomar uma parte referência do período (507) para encontrar a fração geratriz.	$1000k = 507{,}507507507\ldots$
(5)	Realizando a subtração da linha (4) em relação a (3).	$1000k - k = 507{,}507507507\ldots - 0{,}507507507\ldots$
(6)	Realizando a subtração e multiplicando ambos os lados da igualdade por 999.	$k = 0{,}507507507\ldots = \frac{507}{999}$
(7)	Substituindo a fração encontrada para $k = 0{,}507507507\ldots$ da linha (6) na equação da linha (2).	$100y = 21 + \frac{507}{999}$
(8)	Colocando o membro direito da igualdade sobre o mesmo denominador.	$100y = \frac{21 \times 999 + 507}{999}$
(9)	Resolvendo a equação no membro direito e multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{100}$.	$y = \frac{21{,}486}{99900}$
(10)	Pela sexta classe de equivalência da fração encontrada.	$y = \frac{21{,}486}{99900} = \frac{3581}{16650}$

Figura 2: Prova de que 0,21507507... equivale a $\frac{3581}{16650}$

Fonte: Napar (2018).

Com referência a resolução produzida, discute-se, no que segue, os resultados frente aos aspectos teóricos do EOS, a partir da aplicação Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica, no contexto dos Conhecimentos Didático-Matemáticos.

Como mencionado anteriormente, a questão abordada retoma conhecimentos que, ao chegar nos estudos da Análise de Matemática, já devem ser de domínio de acadêmicos dos cursos de Licenciatura, considerando o conjunto de conhecimentos e competências com provas e demonstrações matemáticas que são adquiridos nas áreas de cálculo, álgebra e geometria ao longo da formação docente em Matemática (Reis, 2001). Nesse sentido, pondera-se que as revisitações desses conhecimentos se mostram necessárias no âmbito da Análise Matemática, pois é nessa área, especificamente, que o rigor com provas e demonstrações é cobrado em alto nível de complexidade (Reis, 2001; Ávila, 2006).

No âmbito do componente de situações-problema, foi possível perceber que a atividade demanda de competências referente a provas matemáticas que partem de uma situação envolvendo uma potencial contextualização de um conhecimento a ser trabalhado no Ensino Médio. Esse argumento decorre do fato de que, os potenciais conhecimentos mobilizados pelo professor colocam em jogo um conjunto de pensamentos e competências que se mostram presentes em relações com objetos matemáticos que, também, estão presentes no nível do Ensino Médio, tal como pode ser observado na Figura 3.

R6. Escreva cada item a seguir na forma fracionária		
a) 1,725	b) 0,848484...	c) $5,3\overline{27}$
Resolução:		
a) Seja $x = 1{,}725$. Logo: $1000x = 1{,}725 \times 1000$ $1000x = 1725$ $x = \frac{1725}{1000} = \frac{69}{40}$ Portanto, $1{,}725 = \frac{69}{40}$	b) Seja $x = 0848484\ldots = 0,\overline{84}$. Logo: $100x = 0,\overline{84} \times 100$ $100x = 84,\overline{84}$ $100x = 84 + \underbrace{0,\overline{84}}_{x}$ $100x = 84 + x$ $99x = 84$ $x = \frac{84}{99} = \frac{28}{33}$ Portanto, $0848484\ldots = \frac{28}{33}$	c) Seja $x = 5,3\overline{27}$. Logo: $10x = 5,3\overline{27} \times 10$ $10x = 53,\overline{27} \times 100$ (I) $1000x = 5\,327,\overline{27}$ (II) Subtraindo I de II, temos: $1000x - 10x = 5\,327,\overline{27} - 53,\overline{27}$ $990x = 5\,274$ $x = \frac{5274}{990} = \frac{293}{55}$ Portanto, $5,3\overline{27} = \frac{293}{55}$

Figura 3: Procedimentos para encontrar a forma fracionária de um decimal no âmbito do Ensino Médio
Fonte: Souza (2013).

A atividade, presente em um livro didático do Ensino Médio (Souza, 2013), se mostra como uma situação para a aplicação de um conhecimento matemático em um contexto diferente do qual se insere na Análise Matemática. A mesma faz com que os objetos de prova e demonstração matemática, assim como a representação fracionária de um racional representado como decimal, se articulem e se relacionem (componente das relações) em dois contextos diferentes de ensino e aprendizagem: o primeiro considera o ensino de Análise, cenário em que o rigor matemático é requisito para provar e demonstrar proposições, teoremas e hipóteses (Reis, 2001); o segundo refere-se a um contexto de nível médio no qual o rigor matemático, por vezes, deve ser deixado de lado para dar lugar a significação matemática do aluno no mundo exterior (Moreira; Cury; Vianna, 2005).

Tendo em vista os cenários mencionados, entende-se que não se deva desconsiderar a abordagem de rigor matemático que a Análise tem em suas bases, pois essa visão pode, e deve, fazer parte da visão do professor de Matemática a fim de corroborar para suas significações pessoais e institucionais que desenvolve na formulação de suas competências matemáticas (Godino et al., 2017). Destacar uma discussão em torno da Análise Matemática, que envolva a questão da prática docente no Ensino Médio, não implica em reduzir o nível de rigor que é tomado na abordagem de seus conteúdos, mas sim em compreender a complexidade de fatores e condicionantes matemáticos importantes no desenvolvimento dos conhecimentos comum e ampliado de professores de Matemática (Godino et al., 2017; Napar, 2018). Tal questão, no âmbito epistêmico, pressupõe a busca de horizontes matemáticos, em processos de estudo, que partam das significações dos objetos matemáticos no desenvolvimento de Conhecimentos Didático-Matemáticos (Godino, 2009).

Em relação aos componentes de linguagem e argumentos, a atividade condiz com a necessidade de que o professor de Matemática manifeste a articulação de conhecimentos que envolvem procedimentos a serem explicitados por meio de uma linguagem clara e precisa. Esse tipo de situação problema configura-se em uma situação que pode demandar reconhecimento e transição efetiva entre dois tipos de linguagem: o aritmética e algébrica, linguagens matemáticas utilizadas para resolver o problema e apresentar, de modo simbólico, a solução do problema; natural, por incorporar uma avaliação sobre os procedimentos utilizados para resolver a questão, mostrando a necessidade de se justificar, explicar e explanar a etapas para a elaboração da resolução e solução.

No contexto mencionado, a conversão de uma linguagem para outra requer, primeiramente, o conhecimento sobre as técnicas de demonstração e a forma como as mesmas podem ser conduzidas, atrelando-se a necessidade da utilização de argumentos e recursos que mostram o entendimento do aluno sobre o objeto matemático envolvido (Godino, 2009). Tendo um olhar específico a linguagem natural, num âmbito da prática docente, pondera-se que essa seja necessária para que o professor tenha condições de conduzir e justificar, matematicamente, os procedimentos adotados para o que se buscava provar. Na percepção de conhecimento epistêmico do professor destaca-se, por um lado, o conhecimento comum do conteúdo, condicionado ao objeto de ensino (conversão de racionais em forma decimal para forma fracionária) e, por outro, o conhecimento ampliado do conteúdo, que relaciona as práticas de argumentação e prova dedutiva em nível de rigor (conhecimento ampliado do conteúdo) que pode levar o professor a pensar e repensar em estratégias de conduzir demonstrações aos alunos do nível Médio.

No que se refere ao componente de regras, aponta-se que as perceptivas de definição, proposições e procedimentos estão adequadas ao nível dos estudantes. Além disso, a atividade, dependendo da forma como é conduzida em aulas dos componentes curriculares de Análise Matemática (conhecimento ampliado do conteúdo), pode ser abertura a discussão de regras que devem ser de abordagem pelo professor do Ensino Médio (conhecimento comum do conteúdo). Destacam-se, por exemplo, as ideias direcionadas a: tratamento de operações algébricas elementares; conhecimentos que envolvem o tratamento com equações algébricas; caminhos da prova matemática e das diferentes regras que podem ser consideradas para garantir a correção e resolução do problema.

Tendo se refletido sobre os resultados obtidos a partir do ponto de vista da FADDE e das potencialidades para o CDM de professores de Matemática, apresenta-se as considerações percebidas.

Considerações Finais

Na análise conduzida foi possível observar elementos que envolvem noções vinculadas aos componentes e indicadores da FADDE que podem propiciar um olhar crítico aos condicionantes dos processos matemáticos. Destaca-se como principal achado que a atividade, assim como trabalhada no âmbito de contexto e rigor da Análise Matemática, pode ser conduzida em um caminho de uma prática para o Ensino Médio, dependendo das transposições adotadas. Nesse sentido, a atividade apresenta objetos matemáticos, tal como se evidenciou pela análise, que podem servir de base constituinte do conhecimento comum do professor, levando em conta que, apesar das diferentes abordagens do problema, o objeto de estudo se mostrou o mesmo. Além disso, a referida atividade destacou uma noção de conhecimento ampliado do conteúdo, já que conduz a ideia da possibilidade de relacioná-la ao conhecimento para a o contexto em que se inserem os conhecimentos da prática docente, vinculando-se a uma percepção que vai além do conhecimento matemático formal, apresentando um papel de formulação de perfil profissional para a ação matemática em sala de aula. Olhando para a articulação desses dois conhecimentos, portanto, entende-se que foi possível identificar potencialidades dessa situação proposta para a constituição dos CDM de professores de Matemática.

Por fim, entende-se que em um cenário de formação profissional de futuros professores de Matemática, e de professores de Matemática já em exercício, deva-se ter um olhar tanto para o contexto matemático que é rigoroso no tratamento com definições, proposições e teoremas quanto àqueles conhecimentos que são inerentes as competências necessárias para a atuação de

professores de Matemática na educação básica. Uma das possibilidades que se vê para isso, considerando a investigação como um todo, está em colocar em jogo discussões de questões e situações matemáticas do âmbito da Análise Matemática em discussões de situações didáticas para o Ensino Médio, o que pode contribuir para entendimentos da importância da Análise em cursos de Licenciatura em Matemática.

Agradecimentos: trabalho realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Agradecimento a FULBRA – Fundação ULBRA pelo apoio a participação no evento.

Referências

Ávila, G. S. S. (2006). *Análise Matemática: para licenciatura*. São Paulo: Blucher.

Brasil, Ministério da Educação (2002). *Das Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Brasília, DF.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Versão eletrônica], *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D.; Giacomone, B.; Batanero, C. & Font, V. (2017). Enfoque ontossemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas [Versão eletrônica], *Bolema*, 31 (57), 90-113.

Moreira, P. C.; Cury, H. N. & Viana, C. R. (2005). Por que análise real na licenciatura. Recuperado em: https://www.researchgate.net/profile/Plinio_Moreira/publication/228618120_Por_que_analise_real_na_licenciatura/links/00b7d5149fdcaa877e000000/Por-que-analise-real-na-licenciatura.pdf.

Napar, P. C. P. (2018). *A Análise Matemática na constituição de Conhecimentos para a atuação do professor de Matemática no Ensino Médio: uma análise na perspectiva epistêmica do Enfoque Ontossemiótico*, Dissertação de Mestrado, Universidade Luterana do Brasil, Canoas, RS, Brasil.

Otero-Garcia, S. C.; Baroni, R. L. & Martines, P. T. (2013). Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de matemática [Versão eletrônica], *Educação Matemática Pesquisa*, 15 (3), 692-717.

Reis, F. S. (2001). *A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Souza, J. R. (2013). *Novo Olhar: Matemática*. São Paulo: FTD.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Uso de materiais manipuláveis como recurso didático no curso de formação de professores de matemática.

Barbara Corominas Valerio
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo
Brasil
barbarav@ime.usp.br

Existe uma vasta teoria que discute as potencialidades do uso de materiais manipuláveis durante o processo de ensino-aprendizagem. Em particular, na área de Matemática, é possível encontrar vários trabalhos que sugerem o uso de sólidos geométricos, material dourado, Tangram, dentre outros.

Nos cursos de formação inicial de professores de Matemática, não é difícil encontra trabalhos desenvolvidos pelos alunos onde é estimulado o uso de materiais manipuláveis. Em geral, são desenvolvidas atividades ou sequencias didáticas que podem ser utilizadas em turmas da Educação Básica, com o objetivo de favorecer uma aprendizagem mais significativa a estes alunos. Estas atividades normalmente são socializadas durante as aulas na universidade, como fruto de trabalhos de Prática Como Componente Curricular ou nas atividades vinculadas ao estágio curricular supervisionado. Segundo Lorenzato (2010), os professores devem aprender a fazer uso de materiais manipuláveis para o ensino da matemática ainda durante a formação inicial. Aprender fazer uso, no entanto, não significa apenas aprender a utilizar os materiais, mas saber qual é o momento mais apropriado de usá-lo em sala de aula, para que o processo de ensino e aprendizagem realmente seja favorecido, "mais importante que dispor do material didático, é saber emprega-lo". (LORENZATO, 2010, p.111).

Quais seriam então os benefícios ao se utilizar destes recursos com os alunos do curso de Licenciatura em Matemática?

É possível definir, pelo menos, dois objetivos principais ao utilizar materiais manipuláveis nas aulas do curso de graduação: favorecer uma aprendizagem mais significativa aos alunos do curso e, ao mesmo tempo, mostrar para os futuros professores, como pode ser motivador e interessante o uso destes materiais em sala de aula. Pesquisas indicam, que professores tendem a reproduzir mais as experiências vivenciadas durante a sua formação, do que as teorias estudadas.

Diante disto, sempre optei pelo uso de materiais manipuláveis, quando tive oportunidade nas disciplinas ministradas. Nestes casos, os alunos eram responsáveis por construir os materiais, os quais foram utilizados em atividades de investigação com o objetivo de facilitar a compreensão do tema estudado ou auxiliar na visualização do objeto matemático estudado. A construção dos materiais em geral envolvia o manuseio de cartolina (ou papel similar), canudos, barbante, varetas.

Foi uma experiência muito rica para os alunos, visto que muitos deles nunca tinham manipulado estes objetos para fins didáticos.

Um exemplo deste tipo de atividade, foi o trabalho que desenvolvi no primeiro semestre de 2018 com alunos do curso de licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística -IME-USP, que estavam matriculados em uma disciplina da área de Geometria. O assunto estudado era Volume de Sólidos Geométricos e a proposta da atividade era validar a fórmula do volume da pirâmide. Nesta atividade os dividiram um paralelepípedo em três pirâmides, ou melhor dizendo, eles construíram três pirâmides que justapostas de forma conveniente formavam um paralelepípedo. Para validar a fórmula do volume os alunos tiveram de mobilizar vários conceitos de geometria plana e fazer uso do importante Princípio de Cavalieri. Para a análise ser a mais geral possível, as três dimensões do paralelepípedo eram distintas (BONOMI et al).

Cito, a seguir, o relato de dois alunos da disciplina que colaboram para a conclusão que o uso de materiais manipuláveis pelos licenciando durante a sua formação inicial contribui de forma positiva para o futuro uso deste material "Para o curso de Licenciatura é de extrema importância sair do método comum, provar, provar e mais provar, confeccionar figuras é um método totalmente lúdico, que eu irei levar para os meus alunos..." e “Especificamente para a atividade entregue hoje...não acredito que teríamos conseguido entregar sem termos em mãos as figuras construídas...”.

Referencias e bibliografia

Lorenzato, S. (2010). *Para Aprender Matemática*. Campinas, SP. Autores Associados. Coleção formação de professores.

Bonomi, M.C.,Monteiro, M.S. Um problema: o volume da pirâmide. Recuperado de http:// www.ime.usp.br/~dpdias/2017/ArtMarthaCris2008.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Um curso presencial sobre o teorema da incompletude de Gödel para estudantes de licenciatura em Matemática

Rosemeire de Fátima **Batistela**
Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana
Brasil
rosebatistela@hotmail.com

Resumo

Nesta oportunidade apresentamos um curso que trata do teorema da incompletude de Gödel (TIG) direcionado para estudantes de licenciatura em Matemática. Consideramos que o conhecimento deste teorema é importante e significativo para professorandos e requer atenção da comunidade da Educação Matemática, dado que as consequências deste teorema se relacionam com a concepção de Matemática ensinada em todos os níveis escolares, que, muito embora não tenham relação com conteúdos específicos, expõem o alcance do método de produção da Matemática. Este teorema não é elencado entre os conteúdos a serem trabalhados neste curso de licenciatura, porém, ressaltamos a importância do conhecimento de aspectos deste resultado pela parte dos que se qualificam para o ensino de matemática na Educação Básica uma vez que ele explicita as limitações a que está sujeito o método axiomático com o qual a Matemática é produzida.

Palavras chave: teorema da incompletude, Kurt Gödel, ensino de matemática, forma/ação de profesores, profesores de matemática, licenciatura em matemática, educação matemática, proposta pedagógica, curso presencial.

Apresentação

Em geral o TIG, que diz da incompletude de grande parte das teorias matemáticas, quais sejam, as que tenham na base os axiomas da aritmética dos números naturais de Giuseppe Peano (1858-1932)[1] em sua formalização, não é ensinado em cursos que qualificam professores para o ensino de Matemática na Escola Básica no Brasil.

[1] Também conhecidos como axiomas de Dedekind-Peano, pois Richard Dedekind (1831-1916), em 1888, propôs uma coleção de axiomas para os números naturais e Peano em 1889 publicou uma versão mais precisamente formulada das anteriores, em uma coleção de axiomas no seu livro, "Os princípios da Aritmética apresentados por um novo método" (*Arithmetices principia, nova methodo exposita*). Desde então, esse conjunto de axiomas vem sendo usado da forma

Em Batistela (2014) está exposta nossa argumentação a respeito da importância do ensino deste teorema para professores de matemática, pois, por meio dele é que a Matemática deu-se conta das limitações em seu modo de produção. Uma vez que a principal função de um professor de Matemática seja ensinar o estudante a pensar e a pensar de modo matemático é imprescindível que este aspecto da Matemática seja considerado e tratado em cursos de licenciatura.

Nosso arrazoado em Batistela (2014) é pela defesa de um trabalho matemático filosófico que trate junto a professores de matemática sobre essa dimensão da matemática que vai além da comumente considerada por professores da Escola Básica, que é a utilidade da matemática e a possibilidade de contextualização dos conteúdos matemáticos no cotidiano. Temos consciência que o trabalho que prioriza essa contextualização, somente, é realizado na maioria das vezes com a crença de que essa proposta poderá, entre todas as que conhece, ser a mais produtiva em termos de aprendizagem dos alunos. Porém, essa ocorrência parece predominar na Escola Básica e tem-se em cursos de licenciatura em Matemática estudantes que passaram vários anos na escola vivenciando esta prática e no momento da forma/ação[2] de professores precisam ser apresentados à outros aspectos da Matemática que não somente o da matemática que pode ser contextualizada no cotidiano e que virá a ser ensinada na Escola. Segue uma reflexão sobre a relevância de tangenciarmos em cursos de licenciatura resultados que mostrem a Matemática para além daquela que se ensina na Escola e que se utiliza nas práticas cotidianas:

> Um olhar pragmático e sem reservas permite-nos afirmar que de todos os assuntos ensinados na escola na disciplina Matemática, a usabilidade se dá nas quatro operações e algumas partes da geometria e somente agrimensores utilizarão diretamente a geometria aprendida na escola em seu ambiente de trabalho. As demais profissões, inclusive as da área de exatas, têm como objeto de ensino outros aspectos da Matemática, cuja relação com a Matemática ensinada na escola é um fio quase invisível. Batistela (2014, p. 8-9).

O conhecimento do teorema da incompletude de Gödel possibilita uma imersão na realidade do sistema formal da Matemática e no âmbito do ensino de Matemática isso pode afastar o mito cultural de que a Matemática tem resposta correta para tudo, e, também, enfraquecer a visão de que a Matemática tem as rédeas da situação de produção de verdade. Uma visão de Matemática desprovida do conhecimento dessa limitação do método axiomático carrega consigo a ideologia da superioridade desta disciplina entre as demais disciplinas escolares.

Em Batistela (2017) apresentamos uma possibilidade de trabalho com o TIG em um curso de licenciatura de forma que aspectos deste resultado sejam abordados em conexão com outros que constam nas ementas de algumas componentes curriculares. Durante a análise para a elaboração da proposta pudemos compreender que há níveis distintos de possíveis compreensões e de ensino do TIG e a compreensão de uma demonstração dele requer conhecimento e trato com determinado ferramental dessa ciência. A demonstração original de Gödel não se entrega facilmente a um leitor sem familiaridade com lógica matemática. Porém, há várias

como foram criados. Os termos indefinidos são três: 'número', 'zero' e 'sucessor imediato de' e os axiomas são cinco: i) zero é um número; ii) o sucessor imediato de um número é um número; iii) zero não é sucessor imediato de um número; iv) não há dois números que tenham o mesmo sucessor imediato; e v) (que formula o princípio da indução matemática) qualquer propriedade pertencente a zero e também ao sucessor imediato de cada número que tenha a propriedade pertence, a todos os números.

[2] Pode-se ver mais sobre forma/ação do profesor de matemática em Bicudo (2013). Aqui "forma/ação está sendo compreendida como um processo contínuo e ininterrupto de devir em que *forma* e *ação* estão sempre em mudança, em transformação e estão implicados mutuamente, em marcha, em movimento de acontecer junto à matéria, de ir sendo, de mover-se continuamente...", conforme Batistela (2017, p. 3).

demonstrações realizadas posteriormente e entre elas as que se valem de recursos e de uma cultura matemática mais atual, as quais acreditamos que sejam mais acessíveis, é o caso da demonstração explicitada em Shoenfield (1967) no capítulo que trata de incompletude e indecidibilidade de teorias. No âmbito das várias demonstrações do TIG, que objetivam ser acessíveis aos não especialistas no ferramental lógico matemático, a ilustração da demonstração original de Gödel realizada por Nagel e Newman (1973) se destaca pela possibilidade de imersão nas ideias da demonstração original de Gödel que o estudo proporciona.

O curso que aqui apresentamos é dirigido à estudantes de licenciatura em Matemática no horizonte de possibilidades da Educação Matemática e por assim ser considera que esteja dialogando com pessoas que apresentam familiaridade com o ferramental matemático, pois este campo de conhecimento pressupõe o conhecimento da Matemática.

A palavra *horizonte* diz respeito àquilo que é visível em um campo aberto à compreensão, desde onde se está até o alcance de nossa mirada perceptiva, aqui entendida como "espiritual", ou seja, da clareza do nosso entendimento. Desse modo, *horizonte de possibilidades* revela o campo de possibilidades do que pode ser compreendido, pois não se pode determinar como e o que será compreendido pelos sujeitos cognoscentes. Neste trabalho, o *horizonte* da Educação Matemática expõe possibilidades de compreensões do teorema como dado, focando sua demonstração, sua inserção histórica no âmbito da Matemática, a importância da axiomatização na produção matemática e outras compreensões que a questão da incompletude dispara.

Das ideias que compõem o curso para o ensino do TIG

No âmbito de nossa compreensão, de que há vários níveis possíveis de se trabalhar com o TIG com alunos de graduação em Matemática, desde uma discussão do enunciado, sem entrar nos detalhes da prova, até, por exemplo, uma discussão que abranja uma demonstração formal e a discussão das ideias utilizadas nela, apreendemos que o trabalho com a demonstração do TIG abordando todos os detalhes deste teorema demandaria muita maturidade e por isso optamos por trabalhar com a ilustração da demonstração do TIG realizada por Gödel trazida em Nagel e Newman (1973).

Distinguimos que a formação cultural matemática de um professor solicita que estes professores em forma/ação tomem contato com o TIG, o qual diz das possibilidades de ser da própria Matemática e da distinção entre *verdade* matemática e *demonstrabilidade* matemática.

Em Batistela (2017) apresentamos que tratando-se de um resultado que é provado no âmbito da *aritmética de Peano*, poderia ser referenciado nos momentos em que este assunto estiver sendo focado. Da mesma forma, a ideia de resultado que anuncia impossibilidades (e possibilidades também) conecta-se até certo ponto com *os problemas clássicos da Antiguidade* (a quadratura do círculo, trissecção de um ângulo qualquer, duplicação do cubo), com o teorema de Abel sobre a impossibilidade de resolver equações de quinto grau com radicais, entre outros. O TIG, que anuncia a impossibilidade da solução positiva do segundo problema de Hilbert o qual solicitava a demonstração, na própria aritmética, da compatibilidade dos axiomas aritméticos. Este fato que repercute na impossibilidade da realização do seu programa original, pode ser apresentado junto aos demais teoremas de impossibilidade e, ao mesmo tempo, diferenciando-o, por ser um resultado de impossibilidade da metamatemática.

O TIG aparece num momento histórico em que a Matemática vinha passando por tentativas de fundamentação em diferentes bases. As escolas intuicionistas e logicistas, cada uma pelo seu motivo, tinham fracassado na realização completa do objetivo idealizado. Os formalistas seguiam em pé, mas o resultado de Gödel de 1931 dá a última palavra que decreta a

impossibilidade do intento originalmente concebido por essa escola. Esse assunto, *as correntes filosóficas que buscaram fundamentar a Matemática*, costuma ser tratado em cursos de Licenciatura e vislumbramos que este seria também uma ocasião de apresentação do TIG, pois ele aponta a impossibilidade de se fundamentar a Matemática completamente sob a base da aritmética, que era o objetivo dos formalistas. Este resultado reverbera também sob as ambições e expectativas de a Matemática ser uma ciência absoluta que produz e prova, simultaneamente, todas as suas verdades.

Outra ocasião oportuna julgamos que seja em situações de ensino em que se mostre a Matemática como uma realização histórico-cultural humana, sujeita às características de seu modo de produção, o método axiomático, e como uma ciência viva em acontecimento, ainda sujeita a dúvidas. Nesse momento, seria plausível apresentar a incompletude da Matemática como uma impossibilidade, mas também como abertura para essa ciência, já que permite um revigoramento e surgimento de outras teorias. Também seria apropriado evidenciar mudanças no modo pelo qual na Matemática são encarados os problemas após o TIG, pois esse teorema afirma que há um conjunto de problemas indemonstráveis que independe do ideal cognitivo dos matemáticos e do empenho destinado às suas provas. Estes, embora indemonstráveis, trazem ao conhecimento a natureza revigorante da Matemática que não permite se circunscrever, ou seja, ter os limites de suas teorias bem determinados e circunscritos a elas.

O tema da criação das *geometrias não-euclidianas*, por ser um resultado que diz sobre a relatividade de verdades matemáticas em relação aos axiomas do sistema, também mostra que tais verdades são restritas aos axiomas da teoria. Isso desmente a concepção de que a Matemática é uma estrutura única e totalizante, assemelhando-se à mensagem do TIG, quando afirma que haverá verdades matemáticas que não são deduzidas dos axiomas da base da teoria e que não podem ser provadas naquela teoria.

Entendemos que cabe fazer dessas conexões temáticas percebidas uma oportunidade de abordagem e discussão das ideias do TIG para professores em forma/ação.

A fenomenologia considera imprescindível que os estudantes em forma/ação em cursos de licenciatura em Matemática vivenciem experiências com o objeto matemático as quais ofereçam oportunidade que os conduzam ao pensar matematicamente, trabalhando com intuições[3] e, também, com o método axiomático dedutivo, além de compreenderem as aplicações dessa ciência e situações contextualizadas no mundo sociocultural em que a Matemática é importante. Desse modo, o curso proposto arquiteta experiências estruturadas

Do curso em si

A partir do afirmado acima a proposta prevê a abordagem do TIG conectando-o com os seguintes temas: teorema fundamental da aritmética (que garante o processo de atribuição unívoca dos números de Gödel realizada por Gödel em sua demonstração do TIG); Geometrias não euclidianas; Problemas clássicos da Antiguidade; e, problema 2 de Hilbert.

Este tratamento é elaborado para ser realizado de forma intelectualmente honesta no sentido de oportunizar ao graduando conhecê-lo, vivenciando o resultado em sua dimensão de ideias de que ele se vale, que ele estabelece, bem como suas conclusões e sua demonstração, em

[3] A intuição revela-se para nós como uma fonte originária de doação de conhecimento. Fontana (2007, p. 168) afirma que "a fenomenologia husserliana recoloca a intuição como conhecimento evidente e racional plenamente capaz de alcançar o plano ontológico fundador de todo fenômeno". Intuições aqui significam tanto as sensoriais como as essenciais.

diferentes aspectos durante o curso avançando em complexidade e culminando no trabalho com a ilustração da demonstração realizada por Gödel.

No que se refere ao trabalho com uma demonstração do TIG, Ferreira e Santos (2015) constatam que o trabalho com provas e demonstrações, de modo geral, em sala de aula contribui para o desenvolvimento de uma forma de pensamento que aprofunda o entendimento matemático e, além disso, aprimora a argumentação natural do homem. Dessa forma e por nossa experiência pessoal com a demonstração do TIG compreendemos que o trabalho com uma demonstração do TIG pode aprofundar o entendimento dos estudantes sobre a incompletude da Matemática.

Trazendo em mais detalhes, o curso tratará de alguns aspectos que podem ser antevistos, quais sejam:

Apresentar o cenário matemático presente à época do surgimento deste teorema, expondo-o como a resposta negativa para o projeto do Formalismo que objetivava formalizar toda a Matemática a partir da aritmética de Peano,Batistela, Bicudo e Lazari (2017). Além disso, trazer no contexto, as outras duas correntes filosóficas, Logicismo e Intuicionismo, e os motivos que impossibilitaram o completamento de seus projetos, que semelhantemente ao Formalismo buscaram fundamentar a Matemática sob outras bases, a saber, a Lógica e os constructos finitistas, respectivamente. Trabalhar o aspecto de que teorema da incompletude de Gödel aparece oferecendo resposta negativa à questão da consistência da aritmética, que era um problema para a Matemática na época, estabelecendo uma barreira intransponível para a demonstração dessa consistência, da qual dependia o sucesso do Formalismo e, consequentemente, a fundamentação completa da Matemática no ideal dos formalistas.

Focar na demonstração deste teorema expondo-a por meio da obra de Nagel e Newman (1973) e conduzir o leitor pelos meandros da prova desenvolvida por Gödel em 1931, ilustrando-a, bem como, as ideias utilizadas nela, aclarando a sua compreensão. Possibilitar a experiência dos estudantes com a numeração de Gödel com a qual ele realiza a aritmetização da metamatemática que viabiliza a construção da proposição indecidível.

Trabalhar uma discussão focada na proposta de Bourbaki (1950) para a Matemática, por compreendermos que a atitude desse grupo revela a forma como o TIG foi acolhido nessa ciência e como ela continuou após este resultado. Nessa exposição aparecerá que o grupo Bourbaki assume que o teorema da incompletude não impossibilita que a Matemática prossiga em sua atividade, ele apenas sinaliza que o aparecimento de proposições indecidíveis, até mesmo na teoria dos números naturais, é inevitável.

Trabalhar algumas ideias do TIG explicando e discutindo sua mensagem, bem como os desdobramentos do TIG uma vez que entendemos que as consequências deste teorema se relacionam com a concepção de Matemática ensinada em todos os níveis escolares, que, muito embora não tenham relação com conteúdos específicos, expõem o alcance do método de produção da Matemática.

Em síntese, a proposta do curso no todo deverá apresentar que à época do aparecimento do TIG reinava a concepção que trazia o entendimento de que não havia *ignorabimus*[4], Hilbert

[4] Em Hilbert (2003, p. 11) pode-se ler: "O axioma da solubilidade de cada problema é somente uma particularidade característica do pensamento matemático ou é possível uma lei geral inerente à natureza de nosso pensamento que todas as perguntas colocadas possuem respostas? [...] Esta convicção de que a solubilidade de um problema matemático nos dá um forte estímulo durante o trabalho, nós ouvimos um grito contínuo que vem de dentro: *Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!* (*Aí está o problema, procura a solução. Você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois na Matemática não existe "ignoremos"!*)*"*.

(2003), isto é, de que não haveria problema bem colocado que com o devido empenho dos matemáticos não tivesse solução. Após Gödel, essa concepção não se sustenta mais. O encontro de Gödel com o indecidível em seu TIG confere a esta ciência uma visão de que nela há sentenças matematicamente bem formuladas e verdadeiras que não podem ser formalmente expressas como tal.

Assim, posteriormente ao TIG, compreende-se que as teorias que incluem números naturais em sua formalização são constituídas por proposições demonstradas (teoremas), proposições não demonstrados (conjecturas) e proposições indemonstráveis (indecidíveis), ou seja, proposições verdadeiras que não podem ser provadas como tal (ou como não verdadeira) na teoria, ultrapassando a ideia do *ignorabimus*, vigente até então.

No bojo da proposta, focando outras decorrências do TIG, trataremos de apresentar pontos relevantes que se desdobram do resultado, destacando, a distinção entre *verdade* matemática e *demonstrabilidade* matemática bem como, a relatividade de uma verdade matemática que é restrita aos axiomas da teoria em que ela pode ser formulada. Por outro viés, a dimensão de impossibilidade (e possibilidade) que ele anuncia para o problema da prova da consistência da aritmética e a resposta final que ele, o TIG, dá às escolas filosóficas que buscavam fundamentar a Matemática sob bases firmes. Também, priorizaremos apresentar a Matemática após o TIG e como ela segue sendo construída após este revés em seu autoconhecimento.

Considerações finais

O curso proposto visa oportunizar ao licenciando em Matemática conhecer o TIG, vivenciando este resultado e a dimensão de ideias de que ele se vale, que ele estabelece, bem como suas conclusões e sua demonstração pasando pelo trabalho com a ilustração da demonstração realizada por Gödel. Este curso já foi realizado uma vez por ano na Universidade em que lecionamos.

A incompletude de uma teoria é uma consequência de seu sistema axiomático. Uma teoria consiste em um sistema axiomático e todos os seus teoremas, os quais são derivados do conjunto de axiomas da base da teoria por meio do método axiomático. Uma vez que há um indecidível em uma teoria, sendo o indecidível uma declaração verdadeira, deduzida por um argumento metamatemático, o que fica evidente é que aquela teoria possui verdades e que ela própria não tem possibilidade de provar. Disso entendemos que, na prática, não é toda prova que pode ser reduzida aos axiomas da base do sistema, ou seja, tem-se que aqueles axiomas que estão na base do sistema formal daquela teoria não são uma coleção que dá conta de provar todas as verdades daquela teoria. Isso também evidencia que não se tem clareza sobre a coleção de axiomas que tal indecidível necessitaria para ser provado. Por exemplo, pode-se ter uma sentença verdadeira da teoria dos números expressa na linguagem da aritmética, ou seja, derivada dos axiomas de Peano, cuja prova poderia necessitar de algum axioma da topologia ou da análise complexa, isto é, pode ser que a prova da sentença necessite de algum(s) outro(s) axioma(s) de alguma(s) outra(s) teoria(s).

Gödel institui que os axiomas de Peano apenas descrevem parcialmente a teoria dos números naturais. Logo, não é todo corpo consistente de proposições que pode ser descrito por uma coleção de axiomas. O TIG diz que o corpo da teoria dos números naturais é um corpo consistente de proposições sem axiomatização recursiva. Uma vez computadas as instruções, um computador pode reconhecer axiomas e regras básicas para derivar teoremas e reconhecer se uma prova é válida. Contudo, não pode determinar se a prova para uma afirmação existe, pois, para saber isso, deve-se esperar e ver se a prova ou a negação dela é gerada. Disso, resulta que

não se saberá por este método quais proposições são teoremas. Daí procede a afirmação de que o método axiomático possui uma limitação técnica.

O TIG confirma a existência de uma característica fundamental em relação ao modo de se fazer Matemática, e nossa visão é que por isso ele é um resultado cultural que se relaciona diretamente ao modo como se compreende Matemática e por conseguinte, à que ensinamos.

Dada a importância desse teorema, conforme pode-se ver mais em Batistela e Bicudo (2018), principalmente no que se refere à sua relevância cultural para a Matemática, entendemos que a apresentação do resultado do fenômeno gödeliano é uma informação imprescindível que deve estar presente entre os conteúdos elencados para serem trabalhados em cursos de Licenciatura em Matemática.

Referências

Batistela, R. F. (2014, novembro). O teorema da incompletude de Gödel e os professores de Matemática. Anais do *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, Recife, PE, Brasil, 18. Recuperado de http://www.lematec.net.br/CDS/XVIIIEBRAPEM/PDFs/GD11/batistela11.pdf

Batistela, R. F. (2017). *O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática* (Tese de doutorado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil. Recuperado de https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/148797/batistela_rf_dr_rcla.pdf?sequence=3

Batistela, R. F., Bicudo, M. A.V. B., & Lazari, H. (2017). Cenário do Surgimento e o Impacto do Teorema da Incompletude de Gödel na Matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. 10 (3). 198-207. Recuperado de file:///C:/Users/Home/Downloads/4749-18324-1-PB%20(3).pdf. doi: http://dx.doi.org/10.17921/2176-5634

Batistela, R. F., & Bicudo, M. A. V. (2018). The Importance of Teaching Gödel's Incompleteness Theorem in Mathematics Teacher Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 33, 1-13. Recuperado de http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome33/index.html

Bicudo, M. A. V. (2013). O professor de matemática em forma/ação. *Encontro Nacional de Educação Matemática*, Curitiba, PR, Brasil, 11.

Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics. *The American Mathematical Monthly.* 57(4), 221-232.

Ferreira, F. A., Santos, C. A. B. (2015). Uma análise hermenêutica de pesquisas apresentadas no ICME no período de 2003 a 2013 sobre práticas e saberes docentes em atividades de provas e demonstrações matemáticas. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 6, 12-21. Recuperado de http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1030/727

Hilbert, D. (2003). Problemas matemáticos. *Revista Brasileira de História da Matemática.* Tradução de S. Nobre. 3, (5), 5-12. Recuperado de http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-

%20vol.3,%20no5,%20abril%20(2003)/Discurso%20Hilbert%20-%20RBHM,%20Vol.%203,%20no%205,%20p.%205%20-%2012,%202003.pdf

Nagel, E., Newman, J. R. (1973). *Prova de Gödel*. Tradução de G. K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo.

Shoenfield, J. R. (1967). *Mathematical Logic*. London: Publishing Company.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Uma caracterização das tarefas desenvolvidas na disciplina Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental em Matemática de uma instituição privada brasileira

Diego Fogaça **Carvalho**
Universidade Norte do Paraná
Brasil
diegofocarva@gmail.com
Osmar **Pedrochi** Junior
Universidade Norte do Paraná, Bolsista PNPD – CAPES
Brasil
ojpedrochi@yahoo.com.br
Fátima Aparecida Dias da **Silva**
Universidade Norte do Paraná
Brasil
fatimadias.consultoria@gmail.com

Resumo

Neste estudo, temos por objetivo caracterizar por meio dos saberes docentes, de acordo com Tardif (2002), as tarefas desenvolvidas na disciplina de Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental, componente curricular de um curso de Licenciatura em Matemática, ofertado na modalidade Educação a Distância de uma universidade privada brasileira. Para organização e análise dos dados, utilizou-se a Análise de Conteúdo de Bardin (2016), em um movimento de categorização *a priori*. Advindo desse movimento analítico, foi possível compreender que todas as tarefas possibilitam manifestações dos saberes docentes, bem como os processos de reflexão da e na ação e a reflexão da reflexão da ação, de modo a configurar um ambiente propício para a aprendizagem da docência.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Estágio Curricular Supervisionado, Formação do professor de matemática, Educação a Distância, Saberes Docentes.

Introdução

No Brasil, no ano de 2002, por meio da publicação das resoluções CNE/CP1, de 18 de fevereiro de 2002 e CNE/CP2, de 19 de fevereiro de 2002, pelo Conselho Nacional de Educação, houve a instituição das Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica, nível superior, para os cursos de Licenciatura Plena, as quais se constituíram "um

conjunto de princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização institucional e curricular de cada estabelecimento de ensino" (Brasil, 2002, p.1).

Em suma, esses documentos, além de trazer um entendimento sobre o papel da educação, do professor e, consequentemente, da formação docente, apresentou uma distribuição de como a carga horária deveria ser organizada, definindo o valor mínimo de 2800 (duas mil e oitocentas horas), distribuídas, de acordo com Brasil (2002) em: 400 (quatrocentas) horas de prática como componente curricular, ao longo do curso; 400 (quatrocentas) horas de estágio supervisionado a partir do início da segunda metade do curso; 1800 (mil e oitocentas) horas de aulas para os conteúdos de natureza científico-cultural; 200 (duzentas) horas para outras formas de atividades acadêmico-científico-culturais.

Após essas publicações, os cursos de licenciatura tiveram dois anos para se adequar às solicitações. Pode-se interpretar, com base nos documentos, que as ações realizadas pelo CNE, visaram garantir para a formação de professores um espaço para a articulação entre a teoria e prática, principalmente a evidenciação da carga horária para prática como componente curricular e estágio supervisionado.

No ano de 2015, o mesmo conselho publicou a Resolução nº 2, de 1º de julho de 2015, em que houve uma ampliação da regulamentação, incluindo a formação continuada. Em suma, além da formação inicial, que inclui a curso de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e os cursos de segunda licenciatura, a formação continuada de professores também ganhou um contorno legal no Brasil. Interpreta-se que um dos objetivos dessa resolução, dá-se pela necessidade da formação docente estar alinhada aos pressupostos que virão a compor a Base Nacional Comum para o Ensino Fundamental e Médio.

Nessa resolução, também foi ampliada a carga horária do curso de licenciatura, constituindo de 3200 (três mil e duzentas horas), com a duração mínima de oito semestres letivos ou quatro anos. Dessa forma, foram destinadas 400 (quatrocentas) horas para prática como componente curricular, 400 (quatrocentas) horas para o estágio supervisionado na área específica de formação, 2200 (duas mil e duzentas horas) para a realização de atividades formativas distribuídas em dois grandes núcleos formativos, a saber: o primeiro de estudos de formação geral, áreas específicas e interdisciplinares, campo educacional, seus fundamentos e metodologias, e das diversas realidades educacionais; o segundo se refere ao núcleo de aprofundamento e diversificação de estudos das áreas de atuação profissional, incluindo os conteúdos específicos e pedagógicos, priorizados pelo projeto pedagógico das instituições. Por fim, 200 (duzentas horas) de atividades teórico-práticas de aprofundamento em áreas específicas de interesse do aluno, englobando seminários, iniciação científica, iniciação à docência, intercambio, entre outras.

Com essa breve contextualização, do ponto de vista legal, pode-se elucidar como que a prática docente e sua articulação com a teoria foram ganhando proporções, sendo inseridas nas resoluções que normatizam os cursos de formação docente em âmbito nacional. Consequentemente, o Estágio Curricular Supervisionado se constituiu, junto à Prática como Componente Curricular, espaços para que a abordagem da prática e sua articulação com a teoria possam acontecer. Diante desse contexto, este artigo tem por objetivo caracterizar as atividades previstas na disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental, componente curricular de um curso de Licenciatura em Matemática a distância de uma instituição privada brasileira. Para essa caracterização, será utilizado a tipologia dos saberes docentes, elaborada pelo

pesquisador canadense Maurice Tardif (2002). Em suma, almeja-se associar os tipos de saberes docentes propícios de serem mobilizados em cada uma das atividades, elaborando, assim, um perfil.

Na sequência, explana-se a tipologia de saberes docentes, utilizadas neste contexto investigativo, como categorias a *priori* para análise do manual da disciplina analisada.

Alguns apontamentos a respeito da formação de professores

Nesta seção realiza-se algumas ponderações a respeito da formação de professores e, na sequência, aprofunda-se a tipologia de saberes docentes, elaborada por Tardif (2002).

Para Ibernóm (2006) é de extrema importância que a formação de professores considere as mudanças sociais que estamos vivenciando e as incorpore no currículo, preparando professores para atuar em uma sociedade em transição. Dessa forma, é importante que sejam viabilizados espaços de participação, discussão e reflexão, de modo que os professores possam interagir entre si, aprendendo a conviver e atuar em contexto de transição e incerteza.

Zaichner (1993), afirma que a formação docente deve promover o desenvolvimento do pensamento reflexivo e analítico, para que os professores exerçam um papel ativo nos processos de inovações curriculares. Contreras (2002), por sua vez, destaca que a reflexão do professor não deve se limitar a sala de aula, é necessário ir além, de modo a obter uma compreensão teórica a respeito dos elementos que condicionam a prática docente,

Essas afirmativas corroboram para que se possa pensar na opção realizada por utilizar a tipologia de Tardif (2002) como categorias a priori. Essa opção se deu pelos critérios que foram utilizados pelo autor se relacionarem diretamente com a prática do professor. De acordo com o autor, o modelo por ele proposto foi construído "a partir das categorias dos próprios docentes e dos saberes que utilizam efetivamente em sua prática profissional cotidiana" (Tardif, 2002, p.18).

Ao iniciar a obra, Saberes Docentes e Formação Profissional, Tardif (2002) apresenta os fios condutores de seu texto e assume o seguinte posicionamento: a "minha perspectiva procura, portanto, situar o saber do professor na interface entre o individual e o social, entre o autor e o sistema, a fim de captar a sua natureza social e individual como um todo" (Tardif, 2002, p.16).

O primeiro fio condutor diz respeito à relação entre saber e trabalho. Para o autor, o saber está a serviço do trabalho, ou seja, o trabalho se constitui um condicionante para as relações que os professores estabelecem com os saberes, pois "nunca são relações estritamente cognitivas: são relações mediadas pelo trabalho que lhes fornece princípios para enfrentar e solucionar situações cotidianas" (Tardif, 2002, p.17).

O segundo fio condutor diz respeito ao pluralismo imputado aos saberes docentes, ou seja, os saberes que os professores se valem na prática, em sala de aula, são compostos por um amalgama de princípios: "o saber dos professores é plural, compósito, heterogêneo, porque envolve, no próprio exercício do trabalho, conhecimentos e um saber-fazer bastante diverso, provenientes de fontes variadas e, provavelmente, de natureza diferente" (Tardif, 2002, p.18).

O próximo fio condutor diz respeito ao fato de os saberes docentes serem temporais, ou seja, são adquiridos em um contexto de história de vida, de uma carreira profissional. Consequentemente, para o autor, ensinar pressupõe aprender a ensinar, ou seja, um processo de aprendizagem e domínio progressivo dos saberes que são necessários para a realização do trabalho.

Pela maneira como os saberes docentes são caracterizados até o momento, heterogêneos e

temporais, deve-se pensar na maneira como os professores realizam essa articulação. Para o autor, esse fato se dá pelo trabalho, pela utilidade no ensino:

Nessa ótica, os saberes oriundos da experiência do trabalho cotidiano parecem constituir o alicerce da prática e da competência profissionais, pois essa experiência é, para o professor, condição para aquisição e produção de seus próprios saberes profissionais. Ensinar é mobilizar uma ampla variedade de saberes, reutilizando-os no trabalho para adaptá-los e transformá-los pelo e para o trabalho (Tardif, 2002, p.21).

Dessa forma, nesse fio condutor, o autor assume a experiência do trabalho docente como fundamento para os saberes.

Outra característica atribuída ao trabalho dos professores, é o fato de ser interativo, ou seja, o professor, trabalhador, interage diretamente com o "objeto" de trabalho, o aluno, por meio da interação humana, diferente dos modelos tradicionais de educação que se pautam no modelo fabril, advindo da revolução industrial, estruturado em modelos do trabalho material.

Por fim, ao descrever o último fio condutor, o autor destaca a emergência de se pensar nesse instante a formação docente, tomando como parâmetro os saberes docentes e as realidades específicas do cotidiano dos professores.

Com a apresentação desses pressupostos, compreende-se uma aderência com as diretrizes elaboradas pelo Conselho Nacional de Educação do Brasil, principalmente a valorização da prática docente e sua articulação com a teoria, justificando a opção teórica realizada.

A tipologia elaborada por Tardif (2002) considera os saberes docentes como um amalgama, oriundo de diversos contextos epistemológicos, situados temporalmente, que tomam a sua eficiência para o ensino como critério de valoração. Para o autor, define-se os saberes docentes "como um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais" (Tardif, 2002, p.36).

Os saberes da formação profissional, refere-se ao conjunto de saberes que são abordados pelas instituições de formação de professor. O processo de ensino e aprendizagem e seus atores, referem-se ao objetivo de pesquisa nas ciências humanas, especificamente as áreas de educação e ensino. Essas áreas do saber, de acordo com o autor, além de produzir os saberes, promove a sua incorporação na prática do professor.

Porém, para o autor, a prática do professor não é somente um objeto de saber das ciências da educação, é uma atividade que mobiliza diversos saberes, denominados saberes pedagógicos, esses saberes "apresentam-se como doutrinas ou concepções provenientes de reflexões sobre a prática educativa no sentido amplo do termo, reflexões racionais e normativas que conduzem a sistemas mais ou menos coerentes de representação e orientação da atividade educativa" (Tardif, 2002, p.37).

Os saberes disciplinares referem-se aos que são incorporados pelas instituições universitárias. Esses saberes correspondem a diversos campos do conhecimento, integrados sobre a forma de disciplina. Pode-se interpretar que, em relação à matemática, seriam as geometrias, a análise, o cálculo diferencial e integral, a estatística, entre outras áreas da matemática. Para o autor, esses saberes emergem da tradição cultural e dos grupos que produziram esses conhecimentos.

Os saberes curriculares, em suma, consistem nos programas escolares, ou seja, nos discursos,

objetivos, métodos e conteúdo; a partir dos quais as instituições escolares categorizam e apresentam os saberes sociais selecionados para a formação de uma cultura erudita.

Por fim, Tardif (2002, p.39) define os sabres experienciais, elaborados pelos professores no exercício da prática de sua profissão. Para o autor, esses "saberes brotam da experiência e são por ela validados. Eles incorporam-se à experiência individual e coletiva sob a forma de *habitus* e de habilidades, de saber-fazer e de saber-ser".

Assumindo a tipologia como categorias *a priori*, deu-se início aos procedimentos de análise das tarefas que compuseram o manual da disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental, na continuidade são apresentadas considerações a respeito do método de análise do material analisado.

Considerações teórico-metodológicas

Para a constituição desse artigo, tomou-se como objeto de análise o Manual de Estágio em Matemática no Ensino Fundamental, elaborado pelos professores do curso de Licenciatura em Matemática, na modalidade a distância, aplicado no ano de 2017. Tem-se por intuito, caracterizar as tarefas por meio da tipologia docente de Tardif (2002), com o intuito de elaborar um perfil.

O manual de estágio foi composto por onze seções que abordam desde orientações de como o aluno deve proceder no ambiente escolar até as fichas que devem ser preenchidas e anexadas no relatório final. Há, também, um cronograma com as datas de entrega e a exemplificação de todo o procedimento que o futuro professor deve realizar para estabelecer um convênio entre a universidade e escola.

Para este artigo, valeu-se de inspirações nos procedimentos da Análise de Conteúdo, sendo, assim, compreendida:

> Definitivamente, o terreno, o funcionamento e o objetivo da análise de conteúdo podem resumir-se da seguinte maneira: atualmente, e de modo geral, designa sob o termo de análise de conteúdo: Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/ recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens. (Bardin, 2016, p.48).

Dessa forma, os saberes docentes foram considerados categorias *a priori*, nas quais cada tarefa prevista foi alocada. Cabe destacar que a utilização do termo inspirações se deve ao fato de que, não necessariamente, uma tarefa está diretamente relacionada a um tipo de saber docente, podendo contemplar mais de um. Consequentemente, esse fato vai de encontro ao critério da exclusão mútua, conceituado por Bardin (2016) um indicador de uma boa categoria. Todavia, não se compreende, nesse contexto investigativo, de acordo com a forma que a Análise de Conteúdo foi utilizada, o não respeito à exclusão-mútua um desqualificador da análise. Em suma, o termo inspirações tem a intenção de para amenizar o conflito descrito anteriormente.

A análise dos dados foi iniciada por meio da organização das informações em um quadro, em que foi disposto o objetivo de aprendizagem da tarefa e os saberes docentes que se interpretou serem mobilizados. Em suma, desse movimento analíticos, culminou na elaboração de um perfil, descrito e analisado na continuidade deste trabalho.

Os saberes docentes mobilizados pelas tarefas da disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental

O Manual utilizado na disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental foi composto por nove tarefas que tem por objetivo proporcionar uma imersão do futuro professor na realidade da sala de aula, de modo que seja possível reconhecer semelhanças e diferenças nas séries que compõe os anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano). Busca-se, também, a associação entre teoria e prática, tendo o currículo como contexto. Em suma, almeja-se constituir uma configuração de aprendizagem da docência que visa uma articulação interdisciplinar do conteúdo matemático por meio da observação, reflexão, supervisão com a realidade observada.

A primeira atividade da disciplina visa a apresentação do futuro professor no ambiente escolar. Refere-se a um pedido formal para o diretor e professor regente, com o intuito de obter autorização para a realização do estágio. Interpreta-se que a atividade, além de ser um primeiro contato, pode proporcionar ao futuro professor uma primeira impressão da estrutura organizacional da escola, bem como as turmas em que desenvolverá suas atividades.

As duas próximas tarefas têm por objetivo proporcionar momentos de leitura, reflexão e síntese, levando o futuro professor a ler e resenhar um artigo que aborda o papel do estágio curricular supervisionado na formação do professor de matemática e uma análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Interpreta-se que essas tarefas proporcionam situações em que os futuros professores podem mobilizar de forma direta saberes que estão relacionados com a formação profissional, especificadamente os saberes pedagógicos, principalmente pelos artigos da área de Educação Matemática, reportar uma situação de estágio supervisionado, caracterizando seu papel no desenvolvimento profissional do professor de matemática. Por outro lado, a análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais, oportuniza ao futuro professor conhecer os saberes curriculares que subsidiam o Ensino Fundamental, conhecendo os objetivos, temas transversais, a maneira como o conteúdo matemático é distribuído ao longo das séries. É possível, também, que o futuro professor tenha contato com os saberes pedagógicos, que são as sugestões metodológicas apresentadas pelo documento.

Cabe esclarecer que essa atividade deverá ser atualizada, principalmente pela publicação da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) que trouxe outros contornos para a Educação Básica brasileira.

A quarta tarefa refere-se a um momento de entrevista com a direção da escola, podendo ser realizada com o diretor ou com a direção auxiliar. Objetiva-se que o futuro professor conheça a função da direção na escola, bem como as ações que podem ser tomadas por essa instância para contribuir no processo de ensino e aprendizagem, organização e função do conselho de classe e o projeto político pedagógico. Interpreta-se que essa entrevista pode mobilizar saberes curriculares, bem como saberes experienciais, situados no contexto da escola.

Na tarefa sequente, o futuro professor realizará a observação de dezoito aulas, distribuídas em três turmas do Ensino Fundamental. Tem-se por intuito mobilizar vários saberes docentes, mas compreende-se que o foco está na atuação do professor, ou seja, a maneira como atua, fundamentado em seus saberes experienciais. No entanto, é possível que o futuro professor tenha contato com os saberes disciplinares e pedagógicos, dependendo da gestão de classe e da matéria realizado pelo docente observado.

A análise do livro didático utilizado pelo professor, refere-se a próxima atividade apresentada pelo manual. Interpreta-se que a tarefa pode proporcionar a mobilização de saberes disciplinares, curriculares e pedagógicos articulados, de modo a estruturar um contexto em que esses saberes se articulam para compreensão da maneira como o autor do livro didático estrutura o processo de ensino e aprendizagem da disciplina.

Após a análise do livro didático, as tarefas sequentes têm por objetivo estruturar a realização da regência. Em um primeiro momento, o futuro professor deverá planejar seis aulas que serão ministradas em uma das salas que realizou a observação. Na sequência, deve apresentar esse planejamento para o professor regente, com o intuito de haver um refinamento e adequações à realidade da sala de aula. Por fim, deve ministrar essas aulas, supervisionado pelo professor da turma.

Interpreta-se que essa sequência de tarefas pode proporcionar a articulação de toda a tipologia de saberes docentes apresentados por Tardif (2002), assumindo a prática em sala de aula como contexto e a aprendizagem dos alunos o objetivo da ação do futuro professor. Cabe destacar que a presença do professor regente é de suma importância para a efetivação do ambiente de aprendizagem configurado, pois seus saberes experienciais são mobilizados, refinando as aulas apresentadas, desencadeando um processo reflexivo de aprendizagem da docência, situada na prática.

Na continuidade, oportuniza-se a realização de um processo reflexivo, por parte do futuro professor, das atividades realizadas até o momento. É sugerida a leitura de um artigo sobre o estágio supervisionado na disciplina matemática que tem por objetivo motivar o estudante a refletir sobre todas as situações formativas vivenciadas anteriormente. Interpreta-se a mobilização de saberes pedagógicos, por se tratar de um texto da área da Educação Matemática, mas os demais saberes também podem ser mobilizados, principalmente pela oportunidade de pensar no que foi vivenciado, pontos valorados por positivos, bem como negativos.

As próximas tarefas visam abordar a inserção das tecnologias digitais no ensino de matemática. Foi pedido para que os futuros professores entrevistarem o professor regente com o objetivo de conhecer como as tecnologias digitais são utilizadas nas aulas de matemática e quais são esses aplicativos. Na sequência, foi requerida a elaboração de um projeto envolvendo tecnologias digitais em aulas de matemática. Interpreta-se uma complementariedade entre as duas tarefas, principalmente pela entrevista proporcionar que o professor regente possa compartilhar seus saberes experienciais. Ao elaborar o projeto, o estudante poder-se-á fundamentar em vários saberes docentes resultantes das experiências que vivenciou na disciplina, bem como os apresentados na entrevista.

Para finalizar, a última tarefa refere-se à escrita do Relatório Final de Estágio, momento de organizar os manuscritos das tarefas realizadas ao longo da disciplina. Novamente, compreende-se que o amalgama de tipos de saberes docentes encontram condições propícias para serem mobilizados.

Ao olhar transversalmente para os dados, é possível observar uma valorização dos saberes experienciais mobilizados pelo professor supervisor do estágio e um processo de refinamento desses saberes com a prática e o conjunto de saberes docentes em formação do futuro professor. Interpreta-se que o ambiente formativo configurado tende a possibilitar o desenvolvimento do pensamento reflexivo da prática em sala de aula por meio da experiência. De acordo com Tardif (2002, p.53): a

> experiência provoca, assim, um efeito de retomada crítica (retroalimentação) dos saberes adquiridos antes ou fora da prática profissional. Ela filtra e seleciona os outros saberes, permitindo assim aos professores reverem seus saberes, julgá-los e avalia-los e, portanto, objetivar um saber formado de todos os saberes retraduzidos e submetidos ao processo de validação constituído pela prática cotidiana.

Nesse sentido, interpreta-se que a disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental se configura uma oportunidade de aprendizagem da docência em matemática, bem como o início de um processo formativo com as características supracitadas, apresentadas por Tardif (2002).

Na sequência, apresenta-se algumas considerações finais e aspirações que se configuram em possibilidades de direcionamentos futuros de outras investigações.

Considerações Finais

Partindo do objetivo de caracterizar as tarefas desenvolvidas na disciplina de Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental, pertencente ao currículo de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade privada na modalidade a distância, considerou-se a tipologia de saberes docentes de Tardif (2002) como um conjunto categorial a *priori*. Proveniente do movimento analítico, foi possível interpretar que o conjunto de tarefas propicia a mobilização de toda a tipologia de saberes.

Destaca-se que, no desenrolar da disciplina, há tarefas que enfocam os saberes de modo específico, como, por exemplo, os pedagógicos ou curriculares. Porém, na maioria das tarefas, foi perceptível que houve possibilidades de mobilização de todos os saberes docentes, ou seja, a constituição de um amálgama que considera o processo de ensino e aprendizagem em matemática, em sala de aula, como referente para aprendizagem da docência.

Em suma, interpretou-se que a maneira como a disciplina de Estágio foi estruturada, fomentou a participação do professor regente do estágio de modo a configurar um ambiente propício para que seus saberes experienciais fossem inseridos no escopo de possibilidades formativas para o futuro professor.

Cabe destacar que, futuramente, tem-se a intenção de analisar os relatórios apresentados pelos futuros docentes, com o intuito de conhecer a maneira como cada uma dessas tarefas foram realizadas. Almeja-se, com este artigo, a elaboração de um quadro de expectativas que se constituirá referência para o processo investigativo descrito anteriormente.

Referências e bibliografia

Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70.

Contreras A. (2002). *A autonomia de professores*. São Paulo: Cortez.

Imbernón, F. (2006). La profesión docente desde el punto de vista internacional ¿qué dicen los informes?. *Revista de Educación*, 340, 41-50.

Resolução CNE/CP 1, de 18 de fevereiro de 2002. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, cursos de licenciatura, de graduação plena. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf

Resolução CNE/CP 2, de 19 de fevereiro de 2002. Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CP022002.pdf.

Resolução CNE nº2, de 1º de Julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduandos e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Recuperado de http://pronacampo.mec.gov.br/images/pdf/res_cne_cp_02_03072015.pdf

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes.

Zeichner, K. M.(1993). *A Formação Reflexiva de Professores, Ideias e Práticas*. Lisboa: EDUCA.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, Brasil: formação para a docência e intervenção social

Janaína Mendes Pereira da Silva
Universidade de Brasília
Brasil
Jana.mendes.ps@gmail.com
Mauro Luiz Rabelo
Universidade de Brasília
Brasil
tunoluiz@gmail.com
Raquel Carneiro Dörr
Universidade de Brasília
Brasil
raqueldoerr@gmail.com
Vitor Estevan dos Santos
Universidade de Brasília
Brasil
Vitor.santos9@gmail.com
Paulo Victor Mourão Silva
Universidade de Brasília
Brasil
Pou14123@hotmail.com

Resumo

Este texto apresenta um relato da constituição do Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal que é uma atividade desenvolvida a partir do trabalho colaborativo e voluntário de educadores matemáticos que intervêm socialmente com estudantes e professores de Escolas Públicas, por meio da oferta de vivências em matemática. Além disso, este trabalho também apresenta um projeto de pesquisa em desenvolvimento, que tem como objetivos: 1/ Coletar, organizar e formatar as vivências já produzidas e as em produção nos Circuitos de Vivências em Matemática do Distrito Federal; 2/ Produzir *website* para a socialização dessa produção, integrando diferentes recursos tecnológicos disponíveis; 3/Instituir a pesquisa colaborativa em todas as instâncias de produção, organização, avaliação e socialização das vivências. Por fim, serão descritos os resultados alcançados pelo projeto em seu primeiro ano de execução.

Palavras chave: Circuito de Vivências, formação continuada, intervenção social.

Introdução

A formação inicial e continuada dos professores que ensinam matemática[1] tem inquietado a sociedade brasileira e sido amplamente investigada, gerando debates e muitas publicações, tanto no Brasil quanto em outros países. Os estudos de D'Ambrosio (1993), Fiorentini (2005), Ponte (1998), Nacarato (2003), Borba (2006), entre outros, exemplificam este movimento e contribuem para o entendimento de possibilidades e dificuldades relacionadas à formação do licenciado no Brasil (Gatti, 2011). Nesse contexto, ampliam-se, também, os estudos que revelam: a escassez de docentes para o Ensino Médio na rede pública; o alto índice de desistência na carreira; o aumento dos afastamentos por motivos de saúde; a aversão declarada, entre os jovens, à carreira docente. Tudo isso explicita aspectos da relação entre educação e trabalho, em especial, a pauperização, a precarização e a proletarização do trabalho docente, como analisam Oliveira (2003) e Sampaio e Marin (2004), fatores esses que lançam desafios urgentes para os diferentes setores da sociedade brasileira.

Muitas possibilidades vislumbradas na literatura acadêmica têm contribuído para a melhoria da formação inicial e continuada do professor que ensina matemática e registram experiências exitosas, vivenciadas em diferentes instituições com públicos também diversos. Algumas podem ser conhecidas, recriadas e/ou ampliadas e são, na maioria, divulgadas pelas sociedades, organizações e/ou grupos da área de Educação, Matemática, Educação Matemática e Psicologia da Educação Matemática, no Brasil e no Exterior.

Nesse ínterim, a Faculdade de Educação e o Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, UnB, têm contribuído decisivamente *para* e *na* produção de material didático para os processos de formação continuada de professores que ensinam matemática no Brasil. Como exemplo, temos: o projeto pioneiro, coordenado pela professora Nilza Eingenheer Bertoni, Doutora Honoris Causa pela UnB, denominado: "Um novo Currículo de Matemática[2] da 1ª a 8ª séries – Subprograma para o ensino da Ciência – SPEC – MAT – UnB/MEC/CAPES/PADCT2"; O Curso de Pedagogia para Professores em Início de Escolarização (PIE) em parceria com a SEEDF, que congregou professores da rede pública de ensino, pesquisadores e egressos dos vários níveis de formação da UnB, entre eles, do Programa de Pós-Graduação em Educação, da Faculdade de Educação, da linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem; o Programa Gestão da Aprendizagem Escolar (GESTAR), que congregou outros pesquisadores, entre eles egressos do departamento de matemática – como é o caso do Prof. Cristiano Alberto Muniz –, em uma proposta de formação continuada em matemática para professores dos Anos Inicias e Finais do Ensino Fundamental, sendo desenvolvido em vários estados da federação. Além desses, destacam-se, também, o Pró-letramento, o Pacto Nacional para a Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), o Pacto Nacional pelo fortalecimento do Ensino Médio, entre muitos outros[3]. Mais recentemente, destacam-se os materiais produzidos no âmbito do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e do Programa de Educação Tutorial (PET)[4].

---

[1] Termo usado por Fiorentini (2005) para se referir aos professores licenciados em pedagogia e matemática, docentes de matemática na Educação Básica.

[2] Para mais informações acesse: <http://32reuniao.anped.org.br/arquivos/trabalhos/GT19-5778--Int.pdf>

[3] Informações sobre todos eles podem ser obtidos no *site* do Ministério da Educação http://pacto.mec.gov.br/ .

[4] < http://www.mat.unb.br/>

Todavia, apesar da qualidade dos materiais produzidos para os processos de formação continuada (presencial, semipresencial, a distância), vivenciamos, ainda, resistências e dificuldades em promover mudanças na prática docente e ampliar a aquisição conceitual em matemática pelos professores (Fiorentini, 2005, 2012). Tais evidências nos permitem afirmar que é preciso repensar, então, e cada vez mais, a formação inicial, em especial, o modo como os cursos de licenciatura em pedagogia e matemática estão organizados em termos de projeto político pedagógico e matriz curricular e como são de fato geridos e executados. Percebe-se, ainda, a não superação do modelo de licenciatura segundo a fórmula "3+1" em muitas instituições e, mesmo naquelas que já alteraram essa fórmula, os avanços são lentos devido ao isolamento entre as diferentes áreas de conhecimento (Fávero & Pina Neves, 2011; Pina Neves, 2008). Cientes de tudo isso, avaliamos que se faz necessário unir professores e pesquisadores das faculdades de educação e dos departamentos de matemática para a construção de propostas de formação inicial que articulem, a contento, matemática científica e matemática escolar (Moreira & David, 2003), tendo a Educação Básica como parâmetro para as ações formativas (Muniz, Pina neves & Nascimento, 2009). Entende-se que são necessárias ações que não fiquem restritas aos "muros" da universidade, mas que dialoguem com a escola e seus professores. A partir desses entendimentos e de posse das aprendizagens construídas no projeto de extensão intitulado Serviço de Atendimento Matemático à Comunidade[5] (SAMAC), nasceu, em 2004, o Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal.

O Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal (Brasil)

O processo de constituição e execução dos Circuitos pode ser resumido na tabela 1, apresentada a seguir, com destaque para as fases, os participantes, as ações, entre outros aspectos.

Tabela 1

Circuitos de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal

Título	**Circuito de Vivências em Matemática**
Datas importantes	2003 – discussão/planejamento; 2004 – início das atividades; Situação atual: em desenvolvimento
Instituições envolvidas	Universidade de Brasília (Departamento de Matemática e Faculdade de Educação); Instituto Federal de Brasília; Universidade Católica de Brasília; Faculdade Projeção de Taguatinga (Antiga Faculdade Jesus Maria José) Faculdade Estácio de Sá (Antiga Facitec de Taguatinga)

[5] Iniciou-se em 1996, no Departamento de Matemática, por meio de um projeto de extensão, o Serviço de Atendimento Matemático à Comunidade (SAMAC), sob a orientação da professora Maria Terezinha Jesus Gaspar. O projeto contou com a participação de bolsistas e voluntários dos cursos de licenciatura em matemática e pedagogia e ofertou, gratuitamente, à comunidade local atendimento em matemática escolar. Este trabalho propiciou aos estudantes de graduação a oportunidade de interagir com estudantes e professores do ensino fundamental e médio e da comunidade em geral por meio de propostas pedagógicas discutidas pelo grupo em momentos de formação no projeto. Essa oportunidade propiciou a criação, produção, construção, experimentação e validação de sequências de ensino para o processo de aprendizagem matemática.

Objetivos	1/ promover o pensar e o fazer matemática de maneira investigativa e criativa junto a estudantes da Educação Básica de Escolas Públicas da SEEDF; 2/ promover a produção de vivências em matemática por estudantes de graduação, pós-graduação, professores e pesquisadores da área de ensino de matemática, vinculados aos cursos de licenciatura em matemática e pedagogia de instituições públicas e particulares; 3/ desenvolver e avaliar as vivências em matemática produzidas; 4/ instituir a pesquisa colaborativa como ferramenta de formação inicial e continuada para o professor e/ou futuro professor que ensina matemática.
Princípios teórico-metodológicos	Produção de vivências em matemática tendo como referência o currículo de matemática da SEEDF em consonância com os aspectos teórico-metodológicos defendidos por Muniz (2010), Bertoni (1983, 2003, 2008) e Skovsmose (2000).
Metodologia	Eles são realizados em escolas públicas, previamente agendadas; cada vivência em matemática é desenvolvida por dois ou mais responsáveis, durante 40 minutos, em regime de circuito. Com isso os participantes têm a oportunidade de vivenciar até 5 vivências.
Demanda	A busca por agendamentos cresce a cada ano e o calendário anual é organizado com bastante antecedência. Para atender a demanda das escolas – sem lista de espera – o número de circuitos e pessoas envolvidas deveria triplicar.
Avaliação	As vivências são avaliadas tanto pelos estudantes das escolas atendidas quanto pelos que oferecem as vivências por meio de formulários de avaliação construídos para esse fim pela equipe. As avaliações têm auxiliado nos processos de reelaboração e adequação das vivências aos princípios teórico-metodológicos.

Fonte: SBEM-DF.

As vivências são produzidas de modo colaborativo, assim como propõe Fiorentini (2005) tendo sempre um(a) coordenador(a) que dialoga com seus proponentes. Esses, por sua vez, são vinculados às instituições e programas envolvidos. Depois de aplicadas nas escolas, muitas delas passam por adaptações em função das aprendizagens provenientes da prática. Assim, os Circuitos de Vivências em Matemática do Distrito Federal têm sido realizados desde novembro de 2004 até a presente data. Eles têm atendido grande quantitativo de estudantes da educação básica, distribuídos em escolas públicas de diferentes regiões do Distrito Federal.

Desse modo, o Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal tem se constituído em importante instância de formação inicial e continuada para os professores e futuros professores que ensinam matemática no DF, na medida em que integra profissionais da escola e da universidade e utiliza a investigação matemática como princípio no planejamento e mediação das vivências. Entretanto, ele apresenta dois grandes desafios, quais sejam:

Desafio 1 – a sua não formalização enquanto projeto de pesquisa interinstitucional na área de formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática, que leva à falta de validação científica para os processos de produção, aplicação e avaliação das vivências produzidas.

Desafio 2 – a falta de coleta, organização, formatação e socialização das inúmeras vivências já produzidas e das que estão em fase de produção.

Em função desses desafios e apesar de todas as conquistas em termos de produção colaborativa, do número de escolas e de estudantes atendidos, do número de instituições envolvidas, os Circuitos não têm organizado e nem socializado seus materiais para consulta, gerando a perda de vivências e impossibilitando que mais pessoas as acessem e possam se beneficiar do material produzido.

Logo, entendemos que a coleta, a organização, a formatação e a socialização de toda essa produção já realizada e da em fase de produção, em um *website* concebido para o acesso de professores e estudantes ampliaria as possibilidades de divulgação dos conhecimentos construídos de modo colaborativo e permitiria a consulta em quaisquer dispositivos e lugares, utilizando as possibilidades e conveniências oferecidas pela internet. Desse modo, temos um projeto de pesquisa em desenvolvimento que tem atuado com os seguintes propósitos:

- coletar, organizar e formatar todas as vivências em matemática já produzidas nos Circuitos de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, de 2004 a 2015;
- promover o pensar e o fazer matemática de maneira investigativa e criativa com estudantes da Educação Básica de Escolas Públicas da SEEDF;
- promover a produção de vivências em matemática por estudantes de graduação, pós-graduação, professores e pesquisadores da área de ensino de matemática, vinculados aos cursos de licenciatura em matemática e em pedagogia de instituições públicas e particulares;
- produzir um *website* para a socialização dessa produção integrando diferentes recursos tecnológicos disponíveis;
- instituir a pesquisa colaborativa como ferramenta de formação inicial e continuada para o professor e futuro professor que ensina matemática, assim como defende Fiorentini (2005), em todas as instâncias de produção, organização, avaliação, execução e socialização das vivências.

Metodologia do Projeto

Nesta seção descreveremos o projeto de pesquisa em desenvolvimento e que configura-se como uma pesquisa colaborativa, assim como defende Fiorentini (2005) no contexto da formação de professores que ensinam matemática, a partir do diálogo com construtos teóricos produzidos em outras áreas e por experiências já desenvolvidas no âmbito da instituição sede da investigação como discutido anteriormente nos estudos de: França, Pina Neves e Pires (2015); Grebot, Gaspar e Dörr (2013); Dörr e Pina Neves (2014), entre outros.

Desse modo, Magalhães (2004, p. 75) conceitua colaboração como a prática em "que todos os agentes tenham voz para colocar suas experiências, compreensões e suas concordâncias e discordâncias em relação aos discursos de outros participantes e ao seu próprio". Desgagné (1997), citado por Ibiapina (2008), considera a colaboração como fator que implica em negociação dos conflitos que são inerentes ao processo de ensino e aprendizagem, representando formas de superação do aprendido, visto que favorece a tomada de decisões democráticas, a ação comum e a comunicação entre pesquisadores e professores.

Logo, a pesquisa colaborativa considera todos os participantes do processo aprendizes, pois as ações interpsicológicas e intrapsicológicas dos partícipes envolvidos se cruzam,

proporcionando a interação entre pesquisador e professor. Desse modo, como enfatiza Ibiapina (2008, p. 40): "Esse processo implica em conflitos propiciadores de oportunidades de compreensão crítica por parte dos envolvidos sobre o que está sendo discutido".

No projeto que estamos desenvolvendo, a investigação colaborativa perpassa todas as etapas propostas como uma forma de reconstrução e aprimoramento das ações desempenhadas pelos envolvidos no processo. As etapas em desenvolvimento são as seguintes:

1. Coleta das vivências já produzidas; busca histórica junto aos membros do circuito de vivências desde seu início em 2004 com o intuito de acessar todo o material já produzido.
2. Avaliação das vivências tendo como parâmetro o embasamento teórico adotado; caso a vivência apresente algum descompasso conceitual ou procedimental, ela será adaptada, tendo o apoio e a concordância do autor ou autora original.
3. Coleta de autorizações para socialização das vivências de todos os autores.
4. Definição dos recursos didáticos e dos formatos a serem utilizados nos processos de formatação das vivências.
5. Formatação e revisão do conteúdo das vivências a partir de recursos atuais de tratamento de texto e imagem, bem como revisão quanto às normas vigentes.
6. Construção do *website* para a socialização das produções.
7. Período de experimentação com professores da SEEDF e estudantes de Licenciatura em Matemática e Pedagogia.
8. Lançamento e disponibilização do *website p*ara consultas, experimentação e sugestões junto à comunidade acadêmica e educacional do DF.
9. Formação presencial junto a professores da SEEDF para exploração do *website* e produção de novas vivências em matemática.
10. Ofertar, de modo regular, os Circuitos de Vivências em Matemática do Distrito Federal, garantindo a coleta, a organização, a formatação e a avaliação das vivências produzidas;

Considerações finais

O projeto de pesquisa aqui descrito iniciou-se formalmente em fevereiro de 2018 e, ao final desse mesmo ano, teve como resultados da primeira fase a construção de um *website* que ficará em testes por um período de seis meses. Nesse canal digital de informações, a equipe de pesquisadores tem trabalhado para que um maior número de oficinas de atividades matemáticas estejam disponíveis para consulta e informação à comunidade de estudantes e professores de Matemática em todos os níveis e sirva para o professor, ou futuro professor que ensina matemática, de modo a lhe auxiliar no processo de aprendizagem e ensino da matemática nas modalidades presencial e a distância.

O trabalho de pesquisa está previsto para durar ainda mais um ano e, ao final, será possível ter acesso às chamadas vivências em matemática dos anos iniciais ao Ensino Médio, produzidas nos Circuitos de Vivências. Além disso, no *website* criado será possível

a atualização de modo contínuo do banco de oficinas. Ou seja, as ações dos novos Circuitos poderão ser catalogadas logo após a sua realização.

Por fim, ainda estão planejados para o último ano do projeto a capacitação de professores-formadores da Secretária de Estado e Educação do Distrito Federal, Brasil, e a formação de colaboradores para o planejamento, elaboração e validação de materiais pedagógicos para o ensino de matemática na Educação Básica.

Referências e bibliografia

Andrade, G. G., & Rabelo, M. L. (2007). O Enem e os Desafios da Correção das Redações. In: G. G. Andrade & M. L. Rabelo (Org.). *A produção de textos no Enem: desafios e conquistas*. (pp.11-24). 1ed. Brasília: EdUnB, v. 1.

Arroyo, M.G. (1980). Operários e educadores se identificam: que rumos tomará a educação brasileira. *Educação & Sociedade, 5*, 5-23.

Bertoni, N. E. (1983). Geometria + Laboratório + M. C. Escher. *Revista do Professor de Matemática, 2*. Rio de Janeiro: SBM.

Bertoni, N. E. (2003). Entrevista concedida à Educação Matemática em Revista – *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática* , *10*(14). São Paulo: SBEM.

Bertoni, N. E. (2008). A construção do conhecimento sobre número fracionário. *Bolema – Boletim de Educação Matemática, 21*(31). Universidade Estadual Paulista.

Borba, M. C. (2006). *Tendências internacionais em formação de professores de matemática.* [A. O, Júnior, Trad.] Belo Horizonte: Autêntica. [Trabalho original publicado em 2000].

D'Ambrosio, U. (1993). *Etnomatemática:* arte ou técnica de explicar e conhecer. 2. ed.São Paulo: Editora Ática.

Desgagné, S. (1997). Le concept de rechereché collaborative: l`idée d`um rapprochement entre chercheurs universitaries etpraticiens enseignantts. *Reveu dês de L`Éducation*, *23*(2), 371-393.

Dörr, R. C., & Pina Neves, R. S. (2014). O Perfil de Ingressantes na Licenciatura em Matemática de uma Instituição Pública Federal do Distrito Federal. In VI EBREM Encontro Brasiliense de Educação Matemática, *Anais...* Brasília.

Fávero, M. H., & Pina Neves, R. S. (2011). La intervención psicopedagógica como opción teórico-metodológica para la formación inicial de profesores de matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 28*, 99-116. Acessado: 07 jul. 2015, em: http://www.fisem.org/web/ union/

Fiorentini, D. (2012). Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7*(10), 63-78.

Fiorentini, D. (2005, jun.). A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática. *Revista de Educação PUC-Campina*s, 18, 107-115.

França, J.A., Pina Neves, R. S., & Pires, L. G. (2015). A análise da produção escrita de escolares do terceiro ano do ensino médio: atividade de formação no contexto do PIBID de matemática da Universidade de Brasília. In: Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa, *Anais*... Coimbra.

Gatti, B. A. (2011). *Políticas Docentes no Brasil: um estado da arte*. Brasília: Ministério da Educação, 295p.

Grebot, G., Gaspar, M. T. J., & Dörr, R. C. (2013). Experiências Matemáticas e experiências com alunos na formação de professores: desdobramentos do programa PIBID/MAT da Universidade de Brasília. In VII CIBEM Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, *Actas…* Montevideo.

Ibiapina, I. M. L. de M. (2008). *Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos.* Brasília: Líber Livro.

Magalhães, M. C. C. (2004). A linguagem na formação de professores como profissionais reflexivos e críticos. In M. C. C. Magalhães (Org.). *A formação do professor como um profissional crítico*: linguagem e reflexão. (pp. 59-85). Campinas, São Paulo: Mercado de Letras.

Moreira, P. C., & David, M. M. M. S. (2003). Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké*, *11*(19), 57-80.

Muniz, C. A. (2008). Políticas públicas e formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática. GT-19: Educação Matemática. In 31ª Reunião Anual da ANPEd: Constituição Brasileira, Direitos Humanos e Educação, Caxambu, MG. *Anais*.... Acessado em 20 mar. 2017 em: http://31reuniao.anped.org.br/5trabalhos_encomendados/trabalho%20encomendado%20-%20gt19%20-%20cristiano%20alberto%20muniz.pdf

Muniz, C. A. (2010). *Brincar e Jogar*: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. 1. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 145 p .

Muniz, C.A., Pina Neves, R. S., & Nascimento, A.M.P. do. (2009). Entre o olhar, o esquema e a intervenção psicopedagógica na produção matemática da criança. *Perspectivas da Educação Matemática*, *1*, 79-110.

Nacarato, A. M. (2003). A escola como lócus de formação e de aprendizagem: possibilidades e riscos da colaboração. In D. Fiorentini & A. M. Nacarato (Orgs.). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática.* (pp. 175-195). Campinas, SP: Musa.

Oliveira, D. A. (2003). *As reformas educacionais na América Latina e os trabalhadores docentes.* Belo Horizonte: Autêntica.

Pina Neves, R. da S. (2008). A divisão e os números racionais: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília-DF.

Ponte, J. P. (1998). O conhecimento profissional do professor de matemática. *Educação, Sociedade e Culturas*, *9*, 189-195.

Sampaio, M. das M. F., & Marin, A. J. (2004, set./dez.). Precarização do Trabalho docente e seus efeitos sobre as práticas curriculares. *Revista Educação & Sociedade*, 25(89), Campinas, SP.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema – Boletim de Educação Matemática, 14*, 66-91.

Formación continua y desarrollo profesional

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tarefas de aprendizagem profissional e suas potencialidades para formação continuada de professores dos anos iniciais

Lilian Cristina de Souza **Barboza**
Universidade Federal do ABC, campus Santo André
Brasil
lilicrissb@gmail.com
Alessandro Jacques **Ribeiro**
Universidade Federal do ABC, campus Santo André
Brasil
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo

Esta oficina objetiva apresentar potencialidades do trabalho com tarefas de aprendizagem profissional (TAP) para possibilitar a mobilização e (re)construção de conhecimentos para ensinar matemática nos anos iniciais, com foco no desenvolvimento do pensamento algébrico para o trabalho com os diferentes significados do sinal de igualdade. O trabalho com tarefas de aprendizagem profissional, com uso de exemplos de práticas reais (vídeos, transcrições de áudios, protocolos de tarefas dos estudantes) ou exemplos de práticas fictícias, que os professores poderiam se reconhecer (algo que poderia ocorrer antes, durante ou após uma aula), compõe uma demanda maior da pesquisa de mestrado em andamento, cuja metodologia ancora-se em uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo. Nesta perspectiva, com as tarefas de aprendizagem profissional a serem propostas pretende-se promover discussões e reflexões sobre o conhecimento que o professor precisa ter e a importância de sustentá-lo e aprofundá-lo para repensar suas práticas e possibilitar aprendizagem dos estudantes.

Palavras clave: Continuada, Professores que Ensinam Matemática, Anos Iniciais, Pensamento Algébrico, Sinal de Igualdade, Conhecimento do professor.

Introdução

A formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais pode ser discutida a partir de conexões e interlocuções que se pode estabelecer entre os resultados de estudos e pesquisas (Ball& Cohen, 1999; Smith, 2001; Ball. Ben-Peretz & Cohen, 2014; Silver et al, 2007) e a prática letiva dos professores. Alguns autores nos apontam a potencialidade de

fundamentar este contexto de formação na mobilização e (re)construção do conhecimento de professores que continuam a aprender no exercício de suas práticas (Ponte & Oliveira, 2002; Ponte &Quaresma, 2016).

Logo, o conhecimento do professor passa a ter um aspecto fundamental em sua formação, conforme nos evidencia Serrazina (2013), afirmando que este está inter-relacionado com o nível de confiança do professor, quer relativamente à matemática e ao seu ensino, quer àquilo que considera que os seus alunos são capazes de aprender em Matemática. Neste contexto estabelece-se uma relação positiva entre a confiança dos professores, que aumenta na medida em que eles passam a construir novos conhecimentos específicos do conteúdo e consequentemente possibilita uma melhora também no conhecimento pedagógico o que, por sua vez, acarreta a exigência de saber mais matemática. Compreendemos que tal lógica se estabelece na sala de aula, porém é possível estabelecer-se também, na medida em que professores puderem trocar experiências, discutir e compartilhar seus desafios, medos, incertezas, os imprevistos, suas práticas profissionais, seus novos conhecimentos, todos, alicerçados à luz das teorias (Serrazina, 2013).

A formação se dá a partir de práticas profissionais centradas na sala de aula, no hábito da reflexão sobre as práticas e na conscientização de que mudanças são necessárias para dar respostas aos desafios do ensino da matemática (Serrazina, 2009). Assim sendo, estabelece-se a importância do fazer, da elaboração de tarefas, da reflexão, das discussões e compartilhamento e da (re)elaboração de novas práticas.

Compreendendo que devemos possibilitar oportunidades de aprendizagem profissional em contexto de formação continuada, proporemos o trabalho com as tarefas de aprendizagem profissional (TAP), que possam favorecer a aprendizagem profissional do professor para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade, um dos elementos do pensamento algébrico. Estes autores ainda reforçam, que para aprender na prática e com a prática, é necessário ao professor investigar o ensino no ensino, de modo que, além de compreender o conhecimento que está presente no pensamento dos estudantes, também aprenda a promover desequilíbrios e novas hipóteses e interpretá-las no contexto de ensino e aprendizagem da sala de aula. (Ball & Cohen, 1999).

Retomando as concepções sobre aprendizagem profissional, ressaltamos que Ball e Cohen (1999) indicam que sua concepção de aprendizagem profissional deve estar baseada nas discussões coletivas, pois assim, as trocas com outros profissionais podem permitir compreender, comparar, (re)formular suas próprias (in)certezas, ampliando assim suas próprias oportunidades de aprender.

Baseados em Smith (2001), as tarefas matemáticas, os episódios de ensino (recortes da prática na sala de aula, seja real ou fictício) e a compreensão do pensamento dos estudantes, são alguns dos elementos que oportunizam a aprendizagem profissional dos professores e estão presentes em nossas TAP.

Ainda ancorados em Ball e Cohen (1999), apresentamos seu modelo pedagógico de aprendizagem profissional para a formação de professores, o qual é estruturado em três pilares de componentes-chave: as TAP, em torno de materiais de prática e implicação de conteúdos, a natureza das discussões propiciadas a partir dos desdobramentos das referidas TAP e o papel dos formadores, que propiciariam tais tarefas e discussões. O impacto deste tripé possibilitaria o desenvolvimento de oportunidades de aprendizagem profissional e novas práticas letivas.

As TAP da pesquisa de mestrado da primeira autora, bem como a que será apresentada nesta oficina, foram arquitetadas nos pressuposto e domínios do MKT, referencial teórico de Ball e seus colaboradores (2008) tomando por base: (i) o que os professores precisam saber sobre matemática para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade; (ii) quais práticas letivas irão oportunizar a interação e construção de conhecimentos aos alunos e alunas; (iii) quais tipos de tarefas e abordagens são potenciais ao ensino do sinal de igualdade. Ancorados ainda neste referencial teórico, entendemos que reconhecer os possíveis erros e equívocos cometidos pelos alunos e alunas e dimensionar a sua natureza, é parte do conhecimento especializado do conteúdo. Planejar o ensino, pensar sobre a disposição dos estudantes, escolher e elaborar as tarefas e antecipar as respostas dos alunos e alunas faz parte do conhecimento do conteúdo e dos estudantes. Compreender os desdobramentos do ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade desde os anos iniciais e seu impacto nos anos escolares subsequentes é parte do conhecimento do conteúdo e do currículo. Por fim, compreender as diferenças dos tipos de tarefas, as possíveis intervenções possibilitadoras de entender de modo mais aprofundado o conteúdo trabalhado é parte do conhecimento do conteúdo e do ensino.

O desenvolvimento do Pensamento Algébrico

Pesquisas recentes indicam a possibilidade e importância de desenvolver o pensamento algébrico (PA) desde os anos iniciais (Kieran et al, 2016; Mestre, 2017; Molina, 2011; Britt & Irwin, 2011; Ponte & Branco, 2013), evidenciando-nos os contributos que tal trabalho à aprendizagem do professor que ensina matemática nos anos iniciais e ao ensino que ele pode oferecer. Assim, consideram que o desenvolvimento do PA, desde os primeiros anos de escolaridade, como um fio condutor curricular, pode servir de base para alicerçar a compreensão e experiência dos professores na preparação de um trabalho algébrico aprofundado, que permita aos estudantes apropriar-se de conhecimentos essenciais à matemática dos anos finais.

Em consonância, Kieran et al, (2016), asseguram que o ensino da Álgebra desde os anos iniciais tem por objetivo promover uma forma de pensamento, ou seja, um hábito de buscar regularidade e articular, testar, fornecer regras ou conjecturas para uma infinita classe de números, reafirmando o que foi discutido até o momento. Os mesmos autores afirmam ainda, que promover o desenvolvimento do PA é alcançado por meio de interações que se dão em sala de aula, ao redor de ideias que os alunos e alunas elaboram, algumas vezes em pares, ou até mesmo em pequenos grupos.

A inserção do desenvolvimento do PA, também é reforçada por Britt &Irwin (2011), em que os autores salientam, que a implementação do trabalho com o PA, fornece oportunidades para todos os alunos e alunas, por trabalhar com várias camadas de consciência de generalidade em todas as áreas do currículo de Matemática, antes de qualquer introdução formal para a Álgebra.

Compactuamos com a noção de Pensamento Algébrico como "um hábito da mente que permeia toda a matemática e que envolve a capacidade dos alunos de construir, justificar, e expressar conjecturas sobre as relações e estruturas matemáticas". (Blanton & Kaput, 2004, p. 142). Bem como as de Kieran (2007, 2011), que indica que a álgebra nos anos iniciais não é entendida como um conjunto de regras a ser operacionalizadas, mas antes, um modo de pensar, o que contribui para uma visão mais aprofundada da Matemática.

Escolhemos entre a gama de conteúdos matemáticos o trabalho com os diferentes significados do sinal de igualdade, pois em Matemática, a noção de igualdade desempenha um papel fundamental, pois estabelece relações de equivalência, estando sempre relativa a uma propriedade. Ponte, Branco and Matos (2009) apontam três significados atribuídos ao sinal de igualdade: o de operacional, largamente usado desde os anos iniciais e entendido como dar o resultado de uma operação (exemplo 2 + 5 = 7); o de equivalência, que possibilita a noção de equilíbrio entre os termos que estão antes e os que estão depois do sinal de igualdade, sendo essencial à compreensão conceitos algébricos a serem amplamente estruturados nos anos finais (exemplo: 3 + 4 = 2 + 5); e o relacional, quando possibilita estabelecer relações funcionais de variáveis (exemplo 10 + 5 = 12 + ___) (Stephens & Ribeiro, 2012; Trivilin & Ribeiro, 2015).

Desenvolvimento da oficina

Com o pressuposto de ancorar esta oficina em possibilidades de construção, mobilização e refinamento do conhecimento dos professores e sua aprendizagem profissional, vamos propor uma tarefa de aprendizagem profissional aos professores dos anis iniciais, sobre os diferentes significados do sinal de igualdade.

Nesta oficina iremos discutir e refletir sobre a importância do conhecimento do professor tanto para resolver esta tarefa, tendo por base a exploração de algumas situações associadas a dar sentido e significado às estratégias de resolução apresentada por estudantes, quanto para envolver-se em discussões coletivas. Queremos possibilitar as antecipações que os professores precisam fazer ao trabalhar com os conteúdos matemáticos, neste caso os diferentes significados do sinal de igualdade, para antecipar possíveis dificuldades dos estudantes, formas alternativas de resolução, questionamentos e questões-chave que possibilitem orquestrar discussões matemáticas, junto a seus estudantes (Stein et al., 2008).

O conhecimento matemático que queremos mobilizar vai além de saber e conhecer o conteúdo matemático para si mesmo, pois possibilita avançar na compreensão dos "porquês matemáticos", que estão intrínsecos às resoluções apresentadas pelos estudantes.

Nesta perspectiva a oficina acontecerá em 3 momentos distintos e complementares: (i) breve explanação da proposta da TAP; (ii) os participantes, divididos em pequenos grupos, resolverão a primeira e a segunda parte da TAP; (iii) abriremos uma plenária para o compartilhamento das respostas e reflexões de cada grupo.

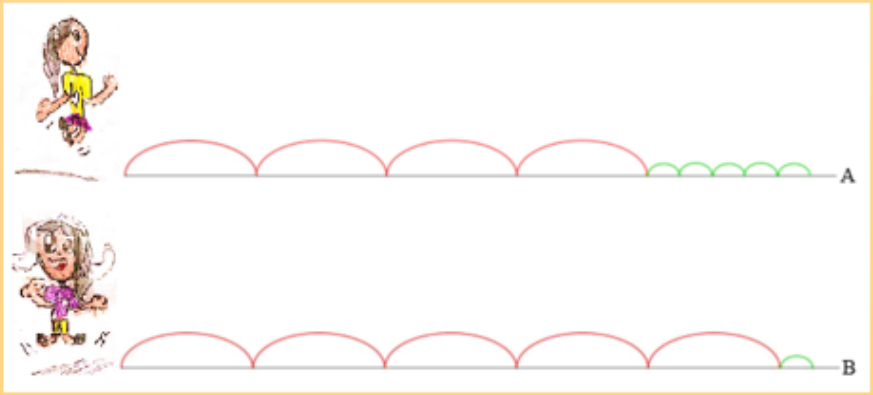
Um exemplo a ser explorado na TAP

Apresentamos aqui, apenas parte da tarefa a ser explorada na oficina, na perspectiva de trazer algumas discussões sobre a especificidade da tarefa e sobre o conhecimento especializado do conteúdo e conhecimento do conteúdo e dos estudantes. A tarefa que aqui se apresenta objetiva explorar conhecimentos matemáticos associados ao significado de equivalência do sinal de igualdade, a propriedade comutativa da adição e o reconhecimento de padrões, tratando das dificuldades e antecipações que professores podem fazer antes de implementar uma tarefa em sala de aula e dos desafios que as resoluções apresentadas por estudantes podem trazer.

Parte da TAP dos professores é analisar a tarefa implementada em uma sala de aula, (conforme apresentada pela *Figura 1*) antecipar as possíveis dificuldades e resoluções e

Durante a aula de Educação Física, a professora Thaís propôs à sua turma, realizar dois percursos diferentes, mas ambos com o mesmo comprimento. Em cada percurso havia uma quantidade de saltos, todos de mesmo comprimento e indicados pela cor rosa e uma quantidade de passos, também com mesmo comprimento e indicados pela cor verde.

Vitória fez o percurso A e Alice o percurso B, observe:



Quantos passos correspondem ao percurso todo? Explique como conseguiu chegar ao resultado.

Adaptada de Ponte, Branco e Matos, 2009, p. 38.

posteriormente, atribuir sentido e significado às resoluções apresentadas pelos estudantes, bem como apontar indagações e devolutivas construtivas para que os estudantes melhor compreendessem suas resoluções.

Figura 1. Parte da TAP: As resoluções e seu desafios.

Algumas considerações

Acreditamos que escolher tarefas, o modo como serão aplicadas, antecipar as possíveis resoluções e possíveis equívocos, bem como analisar atentamente as resoluções apresentadas pelos estudantes, indo além do critério de correto ou (in)correto. Faz-se importante atentar-nos que se damos atenção aos equívocos e dificuldades que os estudantes apresentam, também devemos olhar para as resoluções inesperadas e muitas vezes não pensadas pelos professores. Esta mobilização de conhecimentos do conteúdo e dos estudantes e ampliação do conhecimento

especializado, torna essencial a formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais, que continuam a aprender no decorrer de suas práticas.

Referências e bibliografía

Ball, D. L., Ben-Peretz, M. & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal Of Educational Studies,* p. 317-335.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, Thousand Oaks, v. 59, p. 389-407.

Ball, D. L. & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: toward a practice-based theory of professional education. In: SYKES, G; DARLINGHAMMOND, L. (Ed.). *Teaching as the learning profession*: handbook of policy and practice. São Francisco: Jossey-Bass, p.3-32.

Blanton, M. & Kaput, J. (2008). Building disctrict capacity for teacher development in algebraic reasoning. In: Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (Org.) Algebra in the Early Grades. Nova Iorque: Lawrence Erlbaum Associates,p. 133-160.

Britt, M. S. & Irwin, K. C. (2007). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study. *ZDM*, [s.l.], v. 40, n. 1, p.39-53, 13 out.

Kieran, C. et al. (2016). *Early Algebra*. ICME-13 Topical Surveys, [s.l.]. Springer International Publishing.

Mestre, C. & Oliveira, H. (2012). A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4. º ano. *Interacções*, n. 20, p.9-36.

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica: Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. In: ENCONTRO DE INVESTIGACAO EM EDUCACAO MATEMÁTICA, 2011, Póvoa do Varzim. Atas. Póvoa do Varzim: EIEM, p. 27 - 51.

Ponte, J. P., Branco N. & Matos A. (2009). A Álgebra no ensino básico, Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J. P. & Branco, N. (2013). Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista*, v. 1, n. 40, p.39-53.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. Educational Studies In Mathematics, [s.l.], v. 93, n. 1, p.51-66, 2 fev. *Springer Nature*.

Ponte, J. P. & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, v.2, n. 11, p. 145-163.

Serrazina, M. de L. (2013). O programa de formação contínua em matemática para professores do 1º ciclo e a melhoria do ensino da matemática. *Da Investigação às Práticas*, Lisboa, v. 3, n. 2, p.75-97.

Silver, E. A. et al. (2007). Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal Of Mathematics Teacher Education*, Springer Netherlands, v. 10, n. 4, p.261-277.

Smith, M. S. (2001). Practice-Based Professional Development for Teachers of Mathematics. Virgínia: NCTM.

Stein, M., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: five practice for helping teachers move beyond show and tell. Mathematical Thinking and Learning, 10(4), p. 313-340.

Stephens, M & Ribeiro, A. J. (2012). Working towards algebra:the importance of relational things.

Revista Latinoamericana de Investigación en Metemática Educativa. n. 15(3), p. 373-402.

Trivilin, L. R. & Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento matemático para o ensino de diferentes significados do sinal de igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Bolema*, v. 29, n. 51, p.38-59.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estrategias de enseñanza para fracciones y problemas multiplicativos

Marta **Ramírez** Cruz
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
mramirez@cinvestav.mx
Marta Elena **Valdemoros** Álvarez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
mvaldemo@cinvestav.mx

Esta comunicación se presenta en el marco de una investigación llevada a cabo con profesores en servicio. El propósito es identificar el conocimiento matemático y didáctico que pone en práctica una profesora con experiencia, cuando enseña temas relacionados con problemas multiplicativos ligados a las fracciones, así como las reflexiones que la maestra hace de su práctica docente. Los instrumentos metodológicos utilizados en la investigación fueron un cuestionario y una entrevista. En el presente reporte de investigación se integraron algunas tareas y fragmentos que permiten mostrar datos relevantes de la enseñanza propuesta por la profesora Rosa, así como algunas reflexiones que de ésta derivaron.

Palabras clave: Fracciones, problemas multiplicativos, unidad, representaciones gráficas y reflexión de la práctica.

Introducción

En esta comunicación nos interesa mostrar algunos aspectos de la práctica de una profesora de matemáticas; consideramos que es fundamental identificar los conocimientos matemáticos y didácticos con los que cuenta porque se consideran factores importantes en el diseño de actividades que se llevan al aula, así lo han señalado investigadores como Kieren (1988) cuando menciona que corresponde al profesor la creación de ambientes propicios para la construcción de conocimientos relacionados con los números fraccionarios en la clase de matemáticas.

Con base en la idea anterior y en los reportes de investigaciones previas orientadas al desempeño de los profesores en el aula, en este estudio nos interesa analizar los conocimientos de esta profesora relacionados con la enseñanza de la multiplicación y división de fracciones, a través del desarrollo de problemas multiplicativos en la escuela secundaria.

Problema de investigación

Se considera que el profesor con experiencia en la enseñanza tiene un abanico de estrategias para llevar al aula y para comunicarlas; se han realizado investigaciones en torno a los profesores y sus conocimientos matemáticos, aunque la mayoría de dichos reportes de investigación se enfocan hacia los docentes en formación básica e inicial. En este sentido Ball (2000) consideró la importancia de crear valiosas oportunidades de aprendizaje para los futuros profesores; ella señala que el contenido matemático influye en una buena enseñanza tomando en cuenta los conocimientos sobre el contenido disciplinar de los profesores, cómo lo saben y lo que son capaces de transmitir matemáticamente. En este orden de ideas el propósito de este trabajo consiste en identificar los conocimientos matemáticos y didácticos de una profesora de matemáticas de educación secundaria con la finalidad de una mejora en la enseñanza.

Preguntas de investigación

En la enseñanza de operaciones ligadas a las fracciones en la escuela secundaria, con profesores en servicio, interesa conocer: a) ¿cuáles son los contenidos de la Matemática Educativa a los que recurre la maestra Rosa para enseñar problemas multiplicativos que implican números fraccionarios? b) ¿De qué manera el autoanálisis reflexivo de su práctica docente contribuye a la mejora de su enseñanza?

Los objetivos de la investigación

Objetivo general: Con base en los cuestionamientos iniciales, este trabajo pretende identificar el conocimiento de la Matemática Educativa de una profesora en la resolución de problemas multiplicativos referidos a las fracciones, reflexionar sobre sus fortalezas y áreas de oportunidad.

Objetivos específicos: a) Identificar las estrategias que utiliza una profesora de educación secundaria al resolver problemas multiplicativos que implican números fraccionarios para analizar las estrategias y reflexionar sobre ellas para incorporarlas en actividades del aula. b) Determinar si el análisis de sus propias estrategias favorece la reflexión global acerca de su práctica docente. Para llevar a cabo lo anterior, se dio seguimiento a la profesora Rosa a través de un cuestionario inicial y posteriormente durante una entrevista, para conocer e identificar los conocimientos matemáticos y didácticos que subyacen en su *praxis,* cuando ella resuelve las tareas propuestas.

Marco teórico

En este espacio teórico se destacan distintos contenidos relevantes a nivel del reconocimiento de las operaciones con fracciones como la multiplicación y la división, las que en este comunicado son planteadas a través de problemas multiplicativos. Asimismo, esos aspectos particulares son destacados en cada párrafo con itálicas; todos ellos destacan la importancia de tales contenidos en el desarrollo de la presente investigación.

Kieren (1983) menciona que las fracciones están constituidas por constructos con cuatro significados: medida, cociente (con referencia al reparto), razón, operador multiplicativo y la relación parte-todo. Estos conocimientos forman la base del conocimiento de número racional; en este estudio, interpretamos a tales constructos como los que se construyen a partir de nociones elementales previas.

En lo que se refiere a la relación *parte-todo* se expresa a partir de regiones geométricas, conjuntos de objetos y la recta numérica, con ello se implica la noción de longitud y área. Kieren

(1985) menciona que la representación gráfica de solución puede proporcionar pistas valiosas de los procesos de pensamiento de los sujetos que tratan de resolver el problema. Afirma que la partición es un precursor esencial de las nociones de números racionales y permite observar las cualidades multiplicativas y aditivas.

En relación a la enseñanza de los números fraccionarios Vergnaud (1983) menciona que uno de los puntos desafiantes de la educación es usar problemas significativos tanto en aspectos teóricos como prácticos. Establece campos conceptuales y los define como "conjunto de problemas y situaciones para el tratamiento de conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos, pero estrechamente interconectados" (p.141); menciona dos campos conceptuales como principales, estructuras aditivas y multiplicativas, en donde los problemas involucran operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo y multiplicativo. Para este trabajo nos interesa lo que se refiere a las estructuras multiplicativas, donde él identifica tres categorías: isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporción múltiple distinta del producto.

En el momento de introducción de los algoritmos aplicados a las fracciones, en general, y a la multiplicación en particular, Kieren (1988) menciona, que "en las escuelas suelen desarrollar los algoritmos como una extensión de los números enteros", y que "debido a lo anterior, el curriculum y la instrucción enfatizan prematuramente reglas técnico simbólicas de operación, así, los estudiantes aprenden la forma pero no el significado asociado a la operación correspondiente" (p. 87) *en este caso la multiplicación, agregamos nosotros*. Retomamos el planteamiento anterior que el autor hace con respecto a los estudiantes, pero en nuestra investigación lo hacemos extensivo a los profesores, dado que en este estudio son considerados como los actores principales en la enseñanza de las matemáticas, debido a que ellos toman decisiones didácticas con base en lo deben aprender los estudiantes, por ello consideramos que las decisiones didácticas de la profesora Rosa son fundamentales.

De manera particular en este estudio se analizan conocimientos de multiplicación y división de números fraccionarios, en este sentido Ball (1990) destaca que los docentes intentan plantear situaciones de la vida real para mostrar el significado o la aplicación de determinado contenido, sin embargo, hay una comprensión limitada de la división de fracciones y rara vez se enseña conceptualmente en la escuela, se sustenta con el uso de reglas, dejando de lado ideas o relaciones multiplicativas.

En relación con las actividades que se pueden desarrollar en el aula, con las fracciones, Tirosh (2000) menciona que existen situaciones en que los futuros profesores tienden a atribuir propiedades de división de números naturales a la división de fracciones, en este sentido, nos interesa conocer la práctica de la profesora Rosa para verificar si hay alguna relación de lo antes mencionado con su enseñanza y lo que anticipa de acuerdo a su experiencia cuando diseña actividades para su clase, al resolver problemas multiplicativos relacionados con las fracciones.

Por otra parte, en el estudio de las fracciones, Sharp y Welder (2014) mencionan que la división de fracciones es un tema difícil para los estudiantes y que los profesores pueden apoyar a los alumnos en las dificultades que presentan y que anticipan desde el diseño de situaciones de enseñanza. En este sentido consideramos de mucha relevancia la participación de la profesora Rosa, atendiendo los datos que puede aportar desde su amplia experiencia.

A este respecto, Valdemoros, Ramírez y Lamadrid (2015) sugieren la relevancia de identificar en el sujeto del conocimiento la presencia de "núcleos de significación y pensamiento", dado que tales núcleos permiten entender como organiza su discurso dicho sujeto

del conocimiento. Las autoras referidas definen a los "núcleos de significación y pensamiento como aquellas palabras y expresiones matemáticas verbalizadas, así como las representaciones y los modelos de enseñanza plenamente cargados de sentido para quien construye el conocimiento" (p.195). Para este estudio se considera la propuesta de dichas investigadoras para el análisis de lo que aquí se presenta; a lo largo del análisis de cada tarea, se van a identificar los conocimientos matemáticos y didácticos de la profesora Rosa a través de su discurso y de las representaciones que emergen, asimismo, a través de los cuestionamientos que se hagan de las representaciones de la docente se espera documentar de manera escrita las reflexiones que surjan.

Diseño Metodológico

La investigación es de corte cualitativo (Stake, 1999) porque el objetivo es identificar una problemática particular, es decir, consideramos que la práctica docente implica procesos de enseñanza, que a su vez requieren de conocimientos matemáticos y didácticos para el diseño de la clase; para ello nos interesa identificar las estrategias de la profesora Rosa con formación normalista y amplia experiencia en la clase de matemáticas, asimismo, conocer sus reflexiones ante la resolución de tareas que implican problemas multiplicativos relacionados con fracciones.

Con el propósito de explorar los conocimientos matemáticos involucrados al resolver problemas de tipo multiplicativo ligados a las fracciones, en un primer momento, se aplicó un cuestionario con cinco problemas, en un segundo momento, se realizó una entrevista semiestructurada que incluía la resolución de tareas asociadas a problemas multiplicativos de fracciones. La entrevista permitió retroalimentar la exploración de las acciones, los significados, procedimientos, la toma de decisiones y reflexiones de la profesora Rosa al resolver los problemas.

Mediante la aplicación de estos problemas (aplicados en la entrevista) se pretende identificar: a) aspectos relacionados con la formación docente que son inherentes a la práctica, b) conocer los conocimientos matemáticos de las fracciones, como los vincula con el diseño de actividades en su práctica docente; c) decisiones didácticas de acuerdo a la experiencia en el trabajo con números fraccionarios, así como la reflexión de sus ideas.

El caso de la profesora Rosa

La profesora Rosa es egresada de una Escuela Normal para profesores de secundaria con especialidad en matemáticas en la Ciudad de México. La elegimos porque en el cuestionario que aplicamos a tres profesoras de matemáticas de educación secundaria, ella manifestó diferentes procedimientos para resolver las tareas asignadas, Rosa tiene 19 años de trabajo con alumnos de secundaria y esto permite suponer que su experiencia en la enseñanza es basta. Ella manifestó que ha tenido formación continua, es decir, ha participado en cursos que ofrecen las instituciones encargadas de capacitar al magisterio. Para esta información solo se presentan algunos de los resultados del análisis de las actividades realizadas por la profesora. Este reporte se aborda desde la relevancia de los datos que aporta la maestra, en el marco de una investigación más amplia.

Análisis de resultados

En este apartado del escrito presentamos fragmentos de la entrevista que le hicimos a la profesora y que permiten recrear e identificar "los núcleos de significación y pensamiento" que manifiesta en la resolución de problemas multiplicativos referidos a las fracciones, así como las estrategias que utiliza para definir las actividades para la enseñanza de su clase de matemáticas. Nos interesa conocer cuáles son las estrategias que privilegia, si identifica dificultades al

desarrollar estos conocimientos, a qué elementos recurre para resolver dichas situaciones. Se utilizan corchetes *dentro de las tablas* para facilitar la lectura y descripción de los procedimientos desarrollados por la profesora, se numera la secuencia de las representaciones y señalamientos que ella hace.

Problema de división con números fraccionarios

La Figura 1 presenta los procedimientos que la profesora realizó para dar respuesta a la tarea 1.

Beto y Carla hacen competencia de carros, el coche de Beto recorre 1 2/3 metros y el de Carla 2/5 metros. ¿Cuántas veces el coche de Beto recorre la distancia que recorrió el coche de Carla?

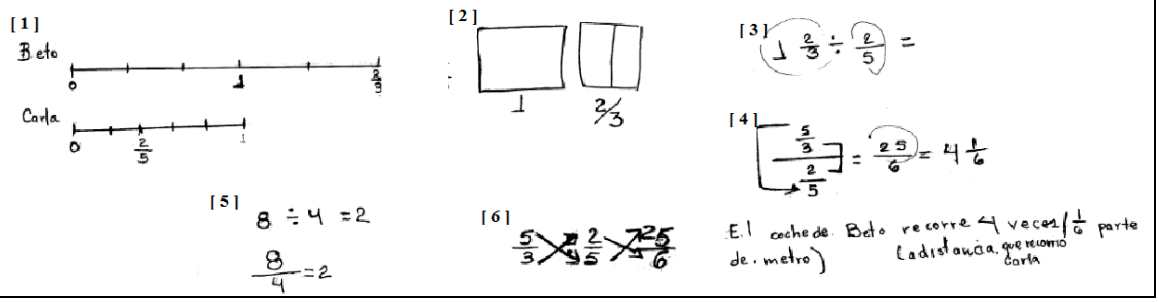


Figura 1. Problema de división de fracciones con modelos lineales y geométricos.

La profesora resolvió el problema y comunicó a las entrevistadoras los procedimientos que realizó con la consigna de considerar que la tarea la estaba realizando en el aula. Ella utilizó una recta numérica para representar los recorridos [1, en la Figura 1], y una representación geométrica [2, en la Figura 1], pero no las vinculó, después señaló la expresión numérica [3, en la Figura 1], y comentó al respecto: "hago una repartición de cuántas veces cabe dos quintas partes en la distancia que ha recorrido el carro de Beto, para esta repartición yo divido 1 2/5 entre 2/5", sin embargo, Rosa resolvió el problema utilizando la representación [4, en la Figura 1].

La entrevistadora, preguntó acerca del procedimiento que utilizó para resolver la división de fracciones y ella apeló a su experiencia "al alumno se le dificulta mucho entender cómo se va a dividir este número mixto con esta fracción propia [3, en la Figura 1], para mi es más sencillo que ellos lo interpreten con este arreglo", y señaló [4, en la Figura 1]; ella utilizó una representación con números naturales que se observa en [5, en la Figura1], con esa acción ella dio sentido a la división de fracciones y justificó el procedimiento que hizo en [4, en la Figura 1] y agregó "lo que hago es utilizar los extremos con los medios, es la forma de hacer la división." Ella mencionó que no utilizó el método de los productos cruzados [6, en la Figura 1] porque los alumnos lo confunden con el algoritmo de la multiplicación de fracciones.

En los núcleos de significación y pensamiento de la profesora Rosa observamos representaciones que permiten identificar los conocimientos que utilizó para resolver la tarea, el supuesto es que ella recurrió a modelos alternativos de solución para los problemas con fracciones, estas decisiones tienen origen en su experiencia de enseñanza, tuvo sentido de la unidad, apoyó la solución del problema con modelos lineales y geométricos para dar significado a la partición, pero no mencionó la equipartición de manera explícita. Ella consideró el modelo geométrico como estrategia para mostrar lo que realizó en el plano de las operaciones, sin embargo, no se observó una vinculación con los modelos de representación y las representaciones numéricas, estas representaciones geométricas no son significativas respecto al problema de división.

Problema del inverso de la multiplicación

La Figura 2 presenta los procedimientos que la profesora realizó para dar respuesta a la tarea 2.

Javier tiene una huerta rectangular que mide 21/6 metros cuadrados de área. En este terreno sembró cebollas y lechugas. Como se avecina el temporal de lluvias con posibilidad de granizo quiere proteger su huerta, así que le colocará una cubierta de plástico. Sabe que el ancho de terreno es de 1 ½ metros.
¿Cuánto debe medir el largo del plástico que necesita para cubrir el área del terreno?
Inspirado en Castañeda (2015) adaptación de las investigadoras.

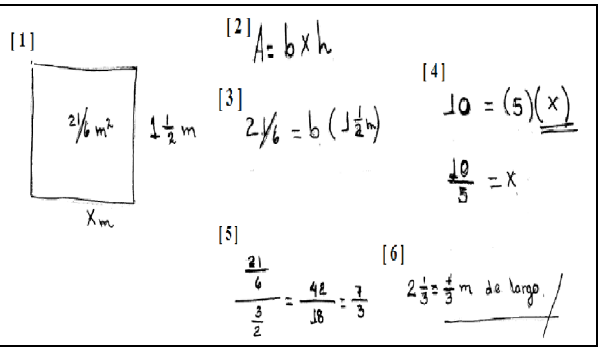


Figura 2. Problema 2, donde la profesora menciona el inverso de la multiplicación.

La profesora resolvió el problema y comunicó a las entrevistadoras las estrategias mostrando sus decisiones didácticas. Ella identificó cómo proporcionaría información a los alumnos en los siguientes términos: "deben conocer las fórmulas geométricas, ¿cómo representarían con algún dibujo este problema?", Rosa anticipó que ellos dibujarían un rectángulo al tiempo que señaló la producción correspondiente a [1, en la Figura 2]; de igual manera ella previó que los estudiantes tendrían interiorizada la fórmula del área y a partir de ello, resolverían el problema. Al respecto, la profesora manifestó como verbalizaría a sus alumnos las instrucciones para hacer uso de la figura, "este lado mide 1 ½ metro, ¿qué es lo que no sabemos?, ¿cuánto mide la base de este rectángulo?", al tiempo que señaló la base del rectángulo como asociándola con la incógnita.

Rosa continuó explicitando cómo asociarían los datos de la figura con la fórmula: "sabemos que el área se obtiene multiplicando la base por la altura", ella escribió la ecuación [3, en la Figura 2], y representó la fórmula del área [2, en la figura 2], continuó diciendo: "el área son 21/6 de metros cuadrados, la base no la conocemos, pero la altura si, la cual es 1 ½ metro", lo indico en [3, en la Figura 2], luego preguntaría a sus estudiantes como resolverían tal situación.

La profesora anticipó la dificultad que podrían tener los alumnos y utilizó una representación algebraica con números naturales [4, en la Figura 2], ella verbalizó tal aspecto: "para hacerlo más sencillo utilizo un ejemplo, podemos conocer ese valor a través de una operación inversa que en este caso es una división", se refiere a la operación inversa de la multiplicación, ella agregó "sirve para despejar, para que ellos conozcan que es un despeje, y nos va a permitir conocer el valor que hace falta", la profesora se refirió a lo que hizo en [4, en la Figura 2], para ella este proceso es suficiente para acceder a la división de fracciones, ya que el procedimiento que utilizó fue el mismo del problema anterior [5, en la Figura 2], así la profesora dio sentido a la división de fracciones "los alumnos ya entendieron que una división va a resolver el problema", resuelto el problema, interpretó la repuesta "que está queriendo decir este 7/3, o 2 1/3, pues que es la medida del largo en metros con respecto a lo que nos pide el problema".

Del análisis de la tarea 2 consideramos que la profesora Rosa utilizó un modelo geométrico para dar sentido al problema, sin embargo, no lo vinculó con la operación de fracciones, utilizó la figura donde representó algebraicamente la situación de manera aislada. Ella no justificó el significado de la operación inversa de la multiplicación, sólo se limitó a despejar la ecuación

recurriendo a un caso particular. Tuvo presente la unidad de referencia porque indicó que el valor encontrado es la base del rectángulo.

Problema de multiplicación de fracciones

En la figura 3 la profesora Rosa resolvió una tarea de multiplicación de fracciones.

Un edificio de planta rectangular hace esquina con dos calles. Uno de sus frentes ocupa un tercio de una calle, y el otro frente ocupa dos quintos de la otra calle. ¿Qué parte de la manzana está ocupada por el edificio?
Tomado de (Jiménez, 2015)

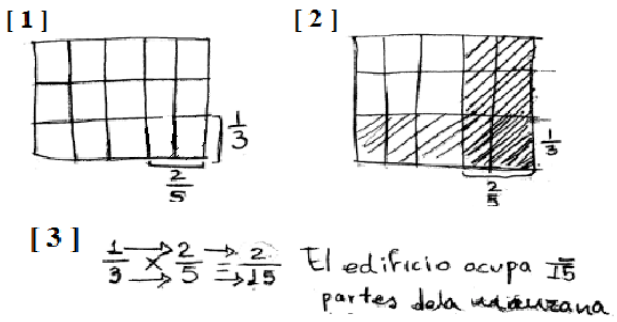


Figura 3. Problema de multiplicación.

La profesora resolvió y comunicó a las entrevistadoras los procedimientos que utilizó para resolver el problema "vamos a dividir este frente en tercios, tomando una tercera parte y el otro lado del arreglo rectangular lo vamos en dividir en quintas partes de las cuales vamos a tomar dos" ella señaló la representación [1, en la Figura 3], y mencionó la necesidad de colorear las regiones y obtener secciones con doble sombreado, así lo indicó en [2, en la Figura 3]. Ella hizo énfasis en que la región con doble sombreado le permitía representar la solución gráfica del problema y mostrar a los estudiantes la multiplicación de fracciones, dijo que lo había aprendido durante los cursos de formación continua y que previo a dicha capacitación solo enseñaba el algoritmo.

Rosa señaló la representación numérica que hizo en [3, en la Figura 3] y refiriéndose a la solución relacionó el denominador con el total de partes en que se dividió la figura, resalto que el numerador y las partes con doble sombreado eran la misma cantidad y con base en ello dio sentido a la multiplicación de fracciones; ella anotó dos flechas para indicar lo que realizó al nivel de la representación numérica para la multiplicación de las fracciones y agregó "al momento de representar una multiplicación se van a dar cuenta de que se realiza multiplicando de forma directa numerador por numerador y denominador con denominador y llegamos a 2/15, así queda más claro qué representan las fracciones o el algoritmo de la multiplicación con fracciones". En la tarea tres observamos que la profesora tenía presente la unidad de referencia, lo manifestó para resaltar la respuesta del problema, es decir, la relación del resultado con el total. Se identificó el papel preponderante del modelo geométrico para justificar lo que realizó de manera operatoria. Se apoyó en lo visual para comunicar el algoritmo de la multiplicación.

Consideraciones finales

Del análisis de los instrumentos aplicados, identificamos que la profesora Rosa recurrió al uso del todo continuo sin establecer de manera concreta la equidivisión, privilegió el uso de la representación geométrica destacando el modelo del área. Es posible suponer que desde su experiencia de enseñanza ella le otorga eficacia a este modelo de representación, ya que utilizó el rectángulo sobre otras figuras, esta situación favoreció el sentido de las fracciones y sus operaciones, ella, sin embargo, estas representaciones no le permitieron ilustrar el caso de la división.

En torno a estas observaciones es posible suponer que las decisiones de la profesora Rosa están definidas por el currículum oficial, por su formación en la Escuela Normal, por los cursos de formación continua y por su experiencia docente. Con relación a los documentos oficiales, desde la década de los setenta se incorporó al Plan y Programas de estudio de educación básica el uso de representaciones en la recta numérica y con figuras geométricas para el estudio de las fracciones, estos recursos siguen estando actualmente vigentes en el Plan y Programas de estudio de educación secundaria.

Con base en lo anterior la profesora Rosa tomó decisiones para el diseño de las actividades que podría llevar a su clase de matemáticas, considerando que las operaciones de números fraccionarios representan dificultades de aprendizaje y cognitivas en los alumnos. Así, en la solución de los problemas surgieron estrategias informales como el caso de la división de fracciones, donde ella implementó ejemplos sencillos con números naturales y trasladó los procedimientos de esos números a las operaciones de números fraccionarios. Durante la solución de los problemas se identificó que ante la ausencia del tratamiento del inverso de la multiplicación se apoyó en el despeje de una ecuación (en el más estricto sentido algebraico), como se ha reportado en otros estudios como Valdemoros et al. (2015), esta situación señala tendencias en profesores en servicios y los futuros profesores. Habrá una continuidad en torno a estos procesos y representaciones en una segunda entrevista, a realizar próximamente.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers´ understanding of division. *Journal for researcher in Mathematics Education, 21, (2), 132-134.*

Ball, D. L. (2000). Brinding practices: Interwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher of Teacher Education*, 51, 241-247.

Castañeda, A. (2015). *Retos matemáticos 1*. México: Ediciones SM.

Jiménez, L. (2015). *Matemáticas 1.* México: Grupo Editorial Patria.

Kieren, T. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical education,* 506-525.

Kieren, T., Nelson, D. & Smith G. (1985) Graphical Algorithms in partitioning Tasks. *The Journal of Mathematics Behavior 4,* 25-36: Edmonton, Alberta, Canadá.

Kieren, T. (1988) Personal Knowledge of rational number: its intiutive and formal development. In J. Hiebert & M. Berh (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sharp, J., & Welder, R. (2014). Reveal limitations through fraction division problem posing. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 19, (9), 490-496.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata

Tirosh, D (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 125-147.

Valdemoros, M., Ramírez, M. & Lamadrid P. (2015). Núcleos de significación y pensamiento en la enseñanza de fracciones. *Comité Interamericano de Educación Matemática. Educación Matemática en las Américas,* 1, 195-204: Formación Inical para Profesores de Primaria. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana. ISBN Volumen: 978-9945-415-98-8 ISNB Obra Completa: 978-9945-415-97-1.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). New York: Academic Press.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Literatura infantil e Matemática: uma ação formativa

Edvonete Souza de **Alencar**
Universidade Federal da Grande Dourados
Brasil
EdvoneteAlencar@ufgd.edu.br

Resumo

Esta comunicação apresenta dados parciais de uma formação continuada. Neste trabalho nosso objetivo foi apresentar como as atividades formativas veem sendo desenvolvidas e mostrar as potencialidades que a Literatura infantil pode ter para o ensino de Matemática. Como referencial teórico utilizamos: Cerquetti e Albernauce; Candido, Diniz e Smole; Zacarias e Moro, entre outros. A metodologia utilizada foi o Design experiments referenciado por Cobb; Confrey; Di Sessa; Lehrer e Schauble , no qual serão registrados e analisados os dados obtidos durante o processo de formação. Apresentamos as respostas das professoras do questionário e identificamos que em sua maioria estas tiveram experiências positivas enquanto estudantes e professoras. Ao demonstrarmos a sequência didática realizada percebemos como o uso da Literatura infantil pode ser benéfico em atividades formativas e em sua utilização no ensino de Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Formação continuada. Literatura infantil. Aprendizagem.

Introdução

Esta investigação surgiu com uma revisão de bibliográfica das pesquisas de Cerquetti e Albernauce (2001), Smole (2000), Zacarias e Moro (2005), Reame, Ranieri, Gomes e Montenegro (2012) e Gasperin (2013) que de modo geral relatam sobre a dificuldade de alguns professores no planejamento de suas atividades para ensinar Matemática e como novas propostas de ensino podem ser benéficas. Essa revisão nos alertou sobre a necessidade de formações que viabilizassem o uso de novas metodologias. Nesses mesmos estudos identificamos a Literatura infantil como um possível caminho para o ensino de Matemática. Realizamos também algumas leituras de dissertações e teses, Campos (2007), Garcia Silva (2007) e Alencar (2012) , que nos

fizeram corroborar os estudos anteriores , pois também relatam sobre as dificuldades dos docentes em ensinar determinados conteúdos, o que alerta para uma necessidade de ações formativas. Assim surgiu o nosso interesse em realizar uma formação continuada fazendo o uso da Literatura infantil por considerarmos que a utilização de diferentes recursos permitem a reflexão e a melhoria nos planejamentos de ensino realizados.

Assim neste trabalho apresentamos as ações formativas que estão sendo realizadas na Universidade Federal da Grande Dourados – Brasil, com um grupo de 10 professoras da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nosso objetivo foi demonstrar como as atividades formativas veem sendo desenvolvidas e apresentar as potencialidades que a Literatura infantil pode ter para o ensino de Matemática em uma formação continuada.

Por tanto, organizamos este trabalho em três partes, na primeira apresentamos a revisão bibliográfica que será nosso referencial teórico para a análise da ação formativa. A segunda será apresentada a metodologia utilizada para o desenvolvimento da investigação. E terceira parte mostraremos um excerto das ações formativas já realizadas.

Referencial teórico: Literatura infantil e Matemática

Realizamos algumas leituras com o intuito de conhecer mais sobre as áreas de Literatura infantil e Matemática e ao mesmo tempo perceber as suas relações para o ensino e aprendizagem. Assim, buscamos alguns autores que pudessem fundamentar nossa investigação e que explanassem sobre a importância do uso de diferentes recursos para o ensino de Matemática , especificamente a Literatura infantil.

Cerquetti e Albernauce (2001) em suas investigações diz que historicamente a Matemática tem sido vista como uma área de difícil compreensão. A autora menciona que o método utilizado e ações de planejamento pode ser um dos motivos dessa problemática. Além disso, nos diz que deve-se ter sempre um estímulo para ensinar e aprender, um dos meios para que isso aconteça, é apresentar o conteúdo de diferentes formas e estas devem estar relacionadas aos gostos e interesses dos estudantes. Por esse motivo consideramos que promover nas formações de professores reflexões sobre novas estratégias de ensino podem ser benéficas.

Em complemento a Cerquetti (2001) , as autoras Candido, Diniz e Smole (2000) trazem reflexões a respeito do papel do professor ao estimular seu aluno para a aprendizagem em Matemática, e menciona que o docente deve promover momentos de aprendizagem que explorem não somente uma variedade numérica, mas incentive a aprendizagem de noções da geometria, de medidas e de estatística. As autoras citam que a curiosidade dos alunos deve ser estimulada para que eles adquiram o gosto em aprender Matemática e acrescentam que a Literatura infantil é um dos recursos que podem ser explorados. Assim, foi por meio deste estudo que consideramos ser importante realizar formações de professores utilizando-se da Literatura infantil.

Reafirmamos assim nossas escolhas por este tipo de formação ao lermos as investigações de Gitirana , Carvalho e Guimarães (2010) que também realizam as mesmas considerações dos autores anteriores e acrescentam que algumas situações para os adultos consideradas sem

significado são para as crianças momentos oportunos de aprendizagem.

> Situações que podem parecer bobas ou sem sentido para o adulto, mas despertam o interesse, a curiosidade e a imaginação da criança. Por isso mesmo, os jogos, os brinquedos, e a literatura infantil são extremamente importantes na contextualização dos conhecimentos matemáticos. Eles exploram o lúdico, a imaginação e o faz de conta. (Gitirana, Carvalho e Guimarães ,2010, p. 72)

Considerando o exposto buscamos outros autores que fundamentassem a importância do uso da Literatura infantil para o ensino de Matemática nas formações de professores como: Zacarias e Moro (2005) que em seus estudos nos diz sobre a possibilidades deste uso e trazem o alerta que apesar da existência de muitos livros infantis pouco evidenciam o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Outros autores como Reame, Ranieri, Gomes e Montenegro (2012) relacionam a língua e a Matemática e acreditam que estas tem a capacidade de desenvolver a interpretação, a análise e a síntese. As autoras demonstram que no uso da Literatura infantil o papel do professor vai muito mais além do que o da leitura , pois este deve estimular a expressão de sentimentos, de ações e no incentivo a participação crítica. Com isso, mencionam como a Literatura infantil pode auxiliar o ensino da Matemática assim como também de outras áreas do conhecimento. E afirmam: "A Literatura infantil pode ser concebida como um importante e significativo recurso para a inserção das crianças nas práticas de leitura e escrita, objetos de conhecimentos construídos socialmente". (Reame, Ranieri, Gomes e Montenegro,2012. p.150).

Nesta mesma vertente Gasparin (2013) nos diz como a Literatura infantil é um recurso metodológico que permite a interdisciplinaridade, além de proporcionar a socialização e a relação com os aspectos do cotidiano do aluno.

Diante do exposto, a realização de formações continuadas que estimulem o uso da Literatura infantil para o ensino de Matemática pode contribuir para as ações de planejamento das docentes cursistas. Além do mais, a divulgação do relato dessas experiências formativas pode estimular que outras ações sejam realizadas em diferentes instituições.

Caminhos formativos: metodologia

Para a realização deste estudo adotamos como metodologia o Design Experiments, que, na perspectiva de Cobb, Confrey, di Sessa, Lehrer e Schauble (2003), consiste na elaboração de uma pequena teoria sobre o processo de ensino e aprendizagem de determinado conteúdo matemático. O desenvolvimento da pequena teoria pretendida refere-se a um modo de se realizar a formação de professores.

O projeto de formação Criação de histórias infantis para o ensino de Matemática é financiado pelo Instituto Serrapilheira e possui registro no comitê de ética sobre o número CAEE 90142518.0.0000.5160. Neste projeto nosso objetivo foi investigar se a criação e o desenvolvimento de histórias de Literatura infantil (e-book animados e livros convencionais) para o ensino de conceitos matemáticos pode influenciar e auxiliar as práticas e/ou conhecimentos profissionais de um grupo de professores da Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Salientamos que neste artigo nosso objetivo é apresentar como as atividades formativas veem sendo desenvolvidas e mostrar as potencialidades que a Literatura infantil pode ter para o ensino de Matemática em uma formação continuada

Destacamos que os elementos que irão compor a ecologia da aprendizagem citadas por

Cobb et. all. serão as diferentes representações, os registros e análises dos professores em cada etapa do estudo formativo. Segundo os autores essa metodologia tem "sistemas interativos em uma coleção de atividades ou uma lista de fatores separados que influenciam aprendizagem" (Cobb et. al., 2003, p.11). Caso haja necessidade haverá a modificação das tarefas , com prévia analise das mesmas e no qual será desenvolvido no mesmo grupo de professores participantes da formação.

Temos consciência que nossas hipóteses inicias podem ser validadas ou refutadas. Assim após realização das tarefas formativas e realização da primeira intervenção, caso nossas hipóteses tenham sido refutadas estas serão reelaboradas e analisadas para um novo desenvolvimento formativo.

As formações foram realizadas, na Universidade proponente do curso quinzenalmente em encontros de 4 horas com um grupo de 10 professores da rede pública da Educação Infantil e Ensino Fundamental

Neste artigo apresentamos duas das etapas realizadas na formação continuada: 1) aplicação do questionário aberto para identificação do perfil dos docentes; 2)Apresentação de uma sequência didática para o ensino de Matemática com Literatura infantil. Além dessas etapas há outras ainda em desenvolvimento que serão apresentadas em futuras comunicações, sendo estas: 3) Criar histórias infantis coletivamente para o desenvolvimento de conceitos matemáticos previamente selecionados pelos cursistas; 4) Discussão e análise das criações coletivas para reescritas e adequações; 5) Criação das ilustrações e suas análises; 6) Diagramação dos livros produzidos.

As ações formativas

As ações formativas aqui descritas serão os questionários e a sequência didática apresentada as docentes sobre o uso da Literatura infantil para o ensino de Matemática.

Ao realizarmos o primeiro dia de encontro, fizemos uma abordagem geral sobre o projeto e suas ações. Formalizamos a participação dos docentes no projeto de pesquisa conforme estabelece o Comitê de ética com a assinaturas dos termos de consentimento de participação. E aplicamos um questionário aberto para que pudéssemos conhecer as experiências do grupo de professores cursistas da formação continuada com a Literatura infantil e Matemática. As perguntas relacionavam-se ao conhecimento e experiências profissionais ou referiam-se as suas vivências como estudante com relação a Literatura infantil para o ensino de Matemática, conforme apresentamos no quadro a seguir:

Quadro 1- Questionário aberto

1- Você já observou, vivenciou ou utilizou uma história de Literatura infantil para o ensino de Matemática? Se positivo relate sua experiência
2- Quais fatores você considera pertinente e/ou não, no uso de histórias de Literatura infantil para o ensino de Matemática?
3- Quais conteúdos matemáticos da Educação Infantil você considera importantes serem abordados em histórias de Literatura infantil? Explique suas considerações
4- Quais conteúdos matemáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental você considera importantes serem abordados em histórias de Literatura infantil? Explique suas considerações

5-	Você já criou ou adaptou alguma história infantil para o ensino de Matemática ou outras disciplinas?

Fonte: Autoria própria

Salientamos que neste artigo, mostraremos breves análises devido a pouca extensão concedida ao texto. De modo geral, as respostas das professoras na questão 1 , demonstraram que a grande maioria (90%) das docentes já tiveram alguma experiência como estudantes ou desenvolvem algumas atividades utilizando a Literatura infantil, destas a grande maioria adapta histórias convencionais como Chapeuzinho Vermelho, O patinho feio e outras. Tal fato, nos leva a inferir a existência de poucas histórias infantis específicas para o ensino de Matemática o que é evidenciado nos estudos de Zacarias e Moro (2005, p.277) que utilizam-se de histórias clássicas infantis que não possuem o objetivo para o ensino de Matemática como as professoras analisadas

Na questão 2 , em sua totalidade (100%) das professoras consideram que o ensino com Literatura infantil pode se tornar mais prazeroso e lúdico, permitindo maior compreensão dos alunos, pois as histórias podem aproximar-se de situações do cotidiano. Essas análises vão ao encontro do que é mencionado por Reame, Ranieri, Gomes e Montenegro (2012) e Gasparin (2013) que consideram o uso da Literatura infantil vai além de sua utilização para a leitura e atividades de alfabetização, mas permitem a expressão dos sentimentos e o estimulo a aprendizagem.

A questão 3 e 4 serviram para que pudéssemos identificar os conteúdos , no qual criaremos as histórias de Literatura infantil, sendo para Educação Infantil a Geometria e para o Ensino Fundamental o Sistema de Numeração Decimal.

A questão 5 mostra o uso que este docente realiza com a Literatura infantil, no qual observamos que 60 % utiliza essa metodologia como recurso para o ensino e 40 % apresenta dificuldades em estabelecer as relações que o livro infantil pode proporcionar. Essas dificuldades são apresentadas por Cerquetti e Albernauce (2001) e Candido, Diniz e Smole (2000) que nos alertam sobre a necessidade de realização de formações continuadas com propostas do uso da Literatura infantil ou outros recursos, para que o docente reflita sobre suas práticas e possa modifica-las.

Ao realizarmos o segundo dia de encontro apresentamos uma sequência didática com o livro “O lobo que virava formas geométricas” de autoria de Edvonete Souza de Alencar e ilustrado por Antt Pereira pela editora Scortecci. Selecionamos esta história pois a questão 3 nos mostrou o interesse das professoras pelos conteúdos da Geometria. A seleção específica do livro foi por que este é uma história que possui como objetivo abordar as figuras planas e suas propriedades para o seu ensino aos alunos da Educação Infantil e primeiros anos do Ensino Fundamental. A sequência didática foi criada a partir do enredo da história pela coordenadora do projeto Criação de histórias infantis para o ensino de Matemática. O objetivo da sequência didática foi apresentar as potencialidades do uso da Literatura infantil para o ensino de Matemática.

Inicialmente para a realização da sequência didática foi realizada a leitura da história utilizando a projeção multimídia. Após a leitura deu-se as professoras papel para que registrassem as características de cada forma plana conforme citado na narrativa. Com este

primeiro registro observamos as dificuldades das docentes em identificar determinadas características das figuras e registra-las no papel. As dificuldades dos professores em determinados conteúdos matemáticos são apontados pelas dissertações e teses Campos (2007), Garcia Silva (2007) e Alencar (2012), que nos fazem inferir sobre as dificuldades dos professores na compreensão dos conteúdos . A investigação de Pavanello (1993) indica a dificuldade dos professores em compreender e ensinar Geometria. A autora menciona que por muitos anos foi um conteúdo pouco abordado nos anos iniciais e demonstra a necessidade de realizar ações formativas que discutam os aspectos do ensino de Geometria.

As características das figuras planas foram discutidas com o grupo para que houvesse uma compreensão sobre o assunto, utilizou-se materiais concretos, como recortes das figuras em papel colorido e as dúvidas foram sanadas, pois as professoras modificaram os seus registros e o modo como realizavam suas explicações oralmente.

O grupo percebeu as possibilidades que o uso da Literatura infantil pode ter para o ensino de Matemática.

Algumas considerações

Ao elaborarmos esta comunicação apresentamos um excerto do projeto "Criação de Histórias da Literatura infantil para o ensino de Matemática" tínhamos como proposta apresentar como as atividades formativas veem sendo desenvolvidas e mostrar as potencialidades de seu uso em atividades de ensino. O excerto apresentado refere-se as duas primeiras etapas do projeto que demonstra as respostas das professoras do questionário e a sequência didática desenvolvida com as docentes cursistas.

Com o questionário notamos que as docentes tiveram em suas experiências o uso da Literatura infantil para o Ensino de Matemática, como estudantes ou como professoras. Este fato, é um dado positivo, pois demonstra que as docentes estão em busca de novas propostas e recursos metodológicos para o ensino. Inferimos também que os conteúdos – Geometria e Sistema de Numeração Decimal - indicados pelas professoras para a realização das histórias são os que provavelmente estas possuem dificuldade para o ensino.

Com o desenvolvimento da sequência didática pudemos comprovar que as docentes possuem dificuldade na identificação das características das figuras planas, quando estas realizam os registros em papel. Percebemos assim que outras formações deverão ser realizadas com os conteúdos indicados, para que ao final sejam criadas boas histórias para o ensino destes conteúdos.

Consideramos que as atividades formativas (aplicação de questionário , leitura de história infantil , registro das características das figuras planas e reflexão das mesmas, recorte das figuras em papel colorido) até aqui desenvolvidas puderam iniciar um trabalho de reflexão para que as docentes começassem a perceber a importância de utilizar diferentes recursos para o ensino de Matemática, sendo um deles a Literatura infantil.

Referências

Alencar, E. S. D. (2012) *Conhecimento Profissional Docente de Professores do 5º ano em uma escola com bom desempenho em Matemática:* o caso de estruturas multiplicativas. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). ed. UNIBAN: São Paulo.

Candido, P T. Diniz, M I S. Smole, K(2000) *Brincadeiras infantis nas aulas de Matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Campos, E. G. J. D. *Dificuldades na aprendizagem da divisão:* análise da produção dos erros dos alunos do ensino fundamental e sua relação com o ensino praticado pelos professores. Dissertação (Mestrado em Educação). ed. Universidade Católica Dom Bosco: Campo Grande, 2007.

Cerquetti, Françoise e Albercane, Catarine Berdonneau.(2001) *O ensino da matemática na Educação Infantil.* Porto Alegre: Artmed.

Cobb, P .; Confrey, J.; Di Sessa, A.; Lehrer, R.; E Schauble, L. (2003)*Experimentos de design em pesquisa educacional*, em: Pesquisador Educacional, V. 32, n. 1, pp. 9-13.http: //www.aera.net/uploadedFiles/Journals_and_Publications/Journals/Educational_Researcher /3201/32 01_Cobb.pdf

Garcia Silva, A. D. F. (2007)*O Desafio do Desenvolvimento Profissional docente Análise da Formação Contínua de um Grupo de Professores da Série Inicial de Ensino Fundamental, tendo como objeto de Discussão o Processo de Ensino e Aprendizado de Frações*. São Paulo: Tese de Doutorado.

Galperin, Cláudio. (2013) *Os desafios da escola pública do Paraná na perspectiva da professora PDE*. Literatura e Inclusão Infantil. 2013. Artigo disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/ 2013_ue np_port_artigo_elizangela_idalgo_regallo_maria.pdf. Acessado em: 8 de fevereiro de 2017.

Gitirana, Verônica; Guimarães, Gilda Lisboa; Carvalho, João Bosco Pitombeira de. *Os livros paradidáticos para o ensino da Matemática.* Brasília, 2010. (Coleção explorando o ensino: Matemática).

Pavanello, R. M. *O abandono do ensino da geometria no Brasil:* causas e conseqüências. *Revista Zetetiké*. Ano I, Nº 1, p.7-17, 1993

Reame, E.Ranieri, A. C.; Gomes, L. Montenegro, P. *Matemática na educação do dia-a-dia das crianças:* rodas, músicas, jogos e histórias. São Paulo: 2 ed. Página 1

Zacarias, E., Moro M. L. F. *A Matemática das Crianças Jovens e Literatura infantil.* Educar Curitiba n25, p.275-299, 2005.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estudio del sistema documental de una profesora de primaria para enseñar estimación y medición de longitudes

Marisol **Santacruz** Rodríguez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México-Colombia
msantacruzr@cinvestav.mx
Ana Isabel **Sacristán** Rock
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
asacrist@cinvestav.mx

Resumen

Presentamos algunos resultados de un investigación reflexiva en la cual se hizo seguimiento al trabajo documental de varios profesores de primaria en Colombia, buscando analizar su selección, apropiación y uso de recursos digitales en su práctica docente. Para ello, desarrollamos un instrumento metodológico: una técnica que promueve la introspección y reflexión por parte de los docentes. En este trabajo nos centramos en el caso de una profesora de grado quinto, enfocándonos en el análisis de la selección que esta docente hace de los recursos para enseñar la estimación y medición de longitudes. A través de la introspección y reflexión de esta profesora en situaciones específicas (utilizando el instrumento arriba mencionado), pudimos definir su sistema documental, analizar sus acciones y conocimientos profesionales al interactuar ella con los recursos digitales, e inferir su esquema de selección de dichos recursos para enseñar magnitudes y medidas en grado quinto.

Palabras clave: sistema documental, investigación reflexiva, enseñanza de las magnitudes y su medida, selección de recursos digitales, educación primaria.

Introducción

El desarrollo de Internet y la pujante digitalización de la sociedad deberían impactar el trabajo de los profesores: por ejemplo, el acceso, relativamente fácil y rápido, a recursos para la enseñanza, nuevas maneras de comunicarse con sus estudiantes y diversas formas de trabajo colaborativo entre colegas (Pepin et al, 2017), ilustran cambios potencialmente sustanciales en la práctica para la enseñanza de las matemáticas de los profesores, así como algunas modificaciones al currículo, la evaluación, el aprendizaje y las prácticas de aula (Remillard, 2005).

Estos cambios deberían requerir la emergencia de nuevos conocimientos profesionales de los profesores sobre los recursos y cómo usarlos en sus clases. En un esfuerzo por analizar estos conocimientos profesionales de los profesores en interacción con los recursos, en nuestra

investigación nos proponemos estudiar los procesos de selección de recursos digitales (y los conocimientos profesionales asociados), que hacen profesores de primaria (en Colombia) para la enseñanza de la geometría. Para esto, realizamos estudios de casos con profesores de diversos grados (en particular, de grado quinto), a partir de entrevistas y observaciones de sus clases. En este artículo, nos centramos en el análisis de los conocimientos profesionales de una profesora de grado quinto (Sonia) cuando seleccionó recursos (digitales) para enseñar la estimación y medición de longitudes.

Marco teórico

El principal referente de nuestro trabajo es la Aproximación Documental de la Didáctica (Trouche, Gueudet & Pepin, 2018), la cual consiste en un enfoque teórico y metodológico que se ocupa primordialmente del estudio del trabajo de los profesores con los recursos y su desarrollo profesional. Su punto de vista parte de considerar los recursos (Adler, 2000) como elementos fundamentales de los sistemas documentales que desarrollan los profesores en su práctica. El sistema documental de un profesor (Gueudet & Trouche, 2009) es donde éste organiza los recursos que usa, e incluye los conocimientos profesionales (esquemas de utilización) que el docente tiene sobre esos recursos durante su trabajo documental (en contextos específicos) a lo largo del tiempo (Gueudet & Trouche, 2008).

El trabajo documental (Gueudet & Trouche, 2009) se refiere al desarrollo del sistema documental del profesor, involucrando las distintas interacciones que tiene éste con los recursos que usa (e.g. libros de texto, dispositivos digitales, representaciones, conceptos matemáticos, discusiones con otros colegas, reflexiones en clase, plataformas educativas, etc.) en distintas situaciones: búsqueda, selección, adaptación, re-diseño y uso de los recursos (en clase o fuera de ella). Estas dinámicas del trabajo documental pueden llegar a redimensionar los conocimientos profesionales de los profesores; por ejemplo, cuando participan en redes sociales (con distintas motivaciones) y desarrollan nuevas formas de organización del conjunto de recursos que usan (e.g. en sus computadoras personales o en plataformas como Google).

Para analizar los conocimientos de los profesores en situaciones profesionales específicas (e.g. la selección de recursos para su clase) tomamos en cuenta la idea de esquema (Vergnaud, 1997); esta idea permite analizar los conocimientos profesionales involucrados en los sistemas documentales de los profesores. Los esquemas corresponden a organizaciones invariantes de la actividad (profesional) del profesor la cual depende de la situación y de la experiencia del profesor. Un esquema consta de: metas y anticipaciones; reglas de acción; invariantes operatorias e inferencias (Vergnaud, 1997).

En nuestro trabajo buscamos identificar los esquemas organizadores que los profesores de primaria desarrollan para seleccionar los recursos (digitales) que usan en sus clases de geometría. En este escrito presentamos el análisis del caso de la profesora Sonia, maestra de grado quinto de una escuela pública, mixta y urbana en Colombia, quien nos permitió acceder a su aula con el propósito de caracterizar su proceso de selección de recursos (digitales) mediante la identificación de su sistema de recursos e inferencia de su esquema de selección de recursos para enseñar estimación y medidas de longitud.

Metodología

Esta investigación se interesa en el estudio de casos de profesores de primaria (en Colombia) que enseñan geometría, integrando recursos digitales. Para ello, tuvimos en cuenta algunos principios

de la investigación reflexiva (Guin & Trouche, 2007), mediante la cual se promueve la mirada retrospectiva de los profesores respecto a su propia práctica (es decir, sus interacciones con diversos recursos: su "trabajo documental"). Los elementos de la investigación reflexiva (Guin & Trouche, 2007) que utilizamos fueron: el seguimiento del trabajo documental de los profesores participantes (dentro y fuera de la clase) durante un tiempo prudente (tres meses en el caso de la maestra Sonia que reportamos abajo); el uso de una bitácora por parte de los profesores; y la elaboración, por parte de cada profesor, de representaciones esquemáticas del conjunto de recursos que usa (mapa de recursos), así como de su ruta de selección de dichos recursos, entre otros aspectos.

Para lo anterior y para recabar datos, además de tomar en cuenta las planeaciones de clases y bitácoras de los profesores, se llevaron a cabo observaciones de clase (*in situ*), con atención particular en los recursos que el profesor usa; así como entrevistas con cada profesor donde se promovía su reflexión y se le ayudaba a elaborar sus representaciones esquemáticas (mediante la aplicación de una "técnica de introspección" que presentamos abajo). Cabe señalar que no hubo ningún tipo de intervención en la práctica en el aula de los profesores participantes, ni tampoco trabajo de formación con ellos, aunque el trabajo reflexivo durante las entrevistas implica un análisis de los profesores de su propia práctica.

Desarrollo de nuestra técnica de introspección

Como se mencionó anteriormente, una de las características de nuestro estudio fue el desarrollo de una técnica de introspección como instrumento metodológico de investigación; dicha técnica fue diseñada para definir lo que llamamos "ruta-recorrida" a través de promover la reflexión de cada profesor. El propósito de esta técnica es recabar información sobre la práctica de cada profesor (además de ayudarnos a organizar y analizar los datos), considerando su contexto, así como su "historia" (Vollstedt, 2015). Para determinar cada "ruta-recorrida", el uso de la técnica consistió en "estimular" la reflexión de cada profesor, durante las entrevistas, a partir de información (textual u audiovisual) tomada de su propia práctica (e.g. videograbaciones de sus clases), que le permitió evocar (*a posteriori*) sus acciones, pensamientos y acciones en un momento o actividad específica.

Particularmente, nosotros estábamos interesados en que cada profesor re-construyera su proceso de selección de recursos, por tanto, le pedíamos que representara esquemáticamente dicho proceso y lo acompañara de sus explicaciones verbales. Los profesores siempre estaban enterados del propósito de la investigación y del funcionamiento de la técnica de introspección; además se les invitaba a que profundizaran en la reflexión sobre su práctica como un ejercicio profesional importante.

Como en nuestro estudio nos enfocamos en el proceso documental de selección de recursos, priorizamos todas las interacciones en las cuales los profesores (participantes en la investigación) aludían directa o indirectamente sobre este tema. Para esto, grabamos las entrevistas, clases y demás interacciones de cada profesor con los investigadores, tomamos fotografías de escenas, recursos usados por el profesor o recolectamos materiales usados (e.g. páginas web, fotocopias, etc.). Los datos fueron clasificados de acuerdo a cuánto aludían a nuestro tema de interés (i.e., la selección de recursos para la clase); posteriormente, las entrevistas y grabaciones fueron transcritas, segmentadas, codificadas y analizadas por los investigadores para elegir los extractos de la información que se presentarían a los profesores para estimular su reflexión (Vollstedt, 2015).

A posteriori (una semana después, generalmente), se llevó a cabo la presentación a cada profesor de los extractos de información elegidos (extractos de videos, de fotos, de las planeaciones de clase, etc.). Esos extractos se relacionaban con nuestro tema de interés: episodios de clase, de la planeación de la clase o alguno de los recursos que seleccionó para su clase. Cuando el profesor interactuaba con esos extractos de información enfocados al tema de nuestra investigación, se le pedía que escribiera, conversara y realizara una representación esquemática (mapa o diagrama) de la ruta que recorrió para seleccionar determinados recursos para su clase. Las producciones de los profesores (e.g. rutas-recorridas, mapas, diagramas, textos, conversaciones), obtenidas mediante su trabajo reflexivo e introspectivo, son de un gran valor metodológico para nosotros ya que constituyen un recuerdo estimulado (Calderhead, 1981) que evoca acciones particulares respecto a nuestro tema de interés. En este artículo ejemplificamos el uso de la técnica de introspección en el caso de la profesora Sonia, así como su proceso documental para seleccionar recursos.

La profesora Sonia y su sistema de recursos para enseñar geometría

Los principales criterios de elección de la profesora Sonia como sujeto de investigación, fueron: su participación voluntaria, su interés en la enseñanza de la geometría y el uso de recursos digitales en sus clases. Al respecto debemos notar que la profesora Sonia es normalista y licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas; tiene una experiencia de 11 años en la docencia, todos en educación primaria, de los cuales, los tres últimos años ha enseñado grado quinto en la escuela en la que trabaja actualmente.

Durante su experiencia, Sonia ha consolidado un sistema de recursos variado, que incluye: un conjunto de textos escolares con sus correspondientes guías del profesor, talleres (fotocopias) para estudiantes que ella misma diseña o adapta, recursos curriculares institucionales, presentaciones de diapositivas (que incluyen imágenes, links o videos). Cada año, dependiendo de las necesidades educativas de sus estudiantes, Sonia gusta de revisar los recursos que tiene disponibles y los va modificando. Una de las características que Sonia resalta, en su sistema de recursos, es la necesidad de digitalizar (en su computador personal) la mayor parte del material que usa; en su opinión, eso le facilita su organización, búsqueda, acceso y adaptación:

> Sonia: *Para mi es importante que los niños y los padres de familia vean un trabajo bien hecho. Si les voy a dar un taller, que no sea cualquier fotocopia sino un material organizado, con los logos de la escuela y bien presentado, hecho en computador… y cambiarlo según lo que necesito. [Luego] le pongo más preguntas o le quito otras, o le meto más indicaciones.* (Fragmento de entrevista).

Para Sonia, la elaboración del mapa o representación esquemática del conjunto de recursos que usa (i.e. su sistema de recursos), resultó ser para ella una actividad importante ya que, en su opinión, resumía la planeación de la clase. Se dio cuenta que poder determinar qué recursos usar, cuándo y cómo, eran algunas de sus objetivos al planear la clase. Las representaciones esquemáticas (mapas) de Sonia sobre su sistema de recursos variaron mucho a lo largo del tiempo, dependiendo de los elementos que ella iba considerando. Por ello categorizamos esas distintas versiones de sus mapas de recursos, en tres niveles: (i) Un nivel meta: compuesto por recursos generales; esos que son fundamentales para la enseñanza (e.g. recursos curriculares, el pizarrón, cuadernos de los estudiantes, etc.); (ii) Un nivel macro: recursos especializados en la enseñanza de la geometría (e.g. regla y compás, geometría dinámica; y (iii) Un nivel micro: recursos muy enfocados a un situación particular, sea un tema específico de enseñanza o una

problemática respecto al aprendizaje (e.g. un *applet*, un video, una hoja de trabajo o taller).

Esta clasificación del sistema de recursos de Sonia corresponde a sus intencionalidades y maneras de organizar la enseñanza, considerando aquellos elementos que ella toma en cuenta para planear su trabajo. La planeación es, para Sonia, una actividad fundamental que le permite prever la temática a trabajar, los recursos a usar y las estrategias de enseñanza. En la representación esquemática, o mapa, que Sonia hizo de su sistema de recursos para enseñar geometría (ver Figura 1) podemos analizar varios elementos: el primero es que, para Sonia, esta representación corresponde a un nivel macro; el segundo, la existencia de ligas entre varios elementos de su sistema, y, el tercero, la explicitación del sentido y usos de algunos de los recursos allí representados.

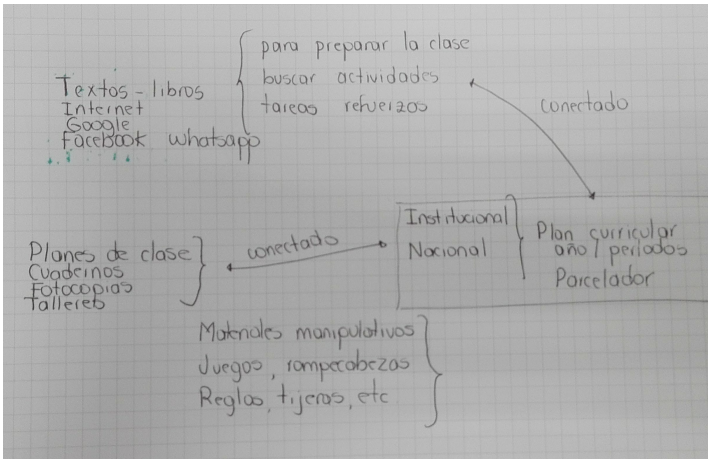


Figura 1. Mapa de recursos de Sonia (nivel macro).

Sonia organiza los recursos que usa en cuatro grandes categorías: (i) recursos para planear (sea la clase o actividades específicas); (ii) recursos curriculares; (iii) materiales manipulativos (e.g., escuadra, compás, etc.); y (iv) recursos para apoyar el aprendizaje de los estudiantes (e.g. hojas de trabajo, talleres, fotocopias). En esta organización de su sistema de recursos es posible analizar la manera como Sonia concibe su trabajo documental.

Al respecto, un aspecto interesante antes mencionado, son las conexiones o ligas que relacionan algunas categorías del sistema. Inicialmente, Sonia no consideraba este tipo de relaciones, pero posteriormente, y a través de su ejercicio de reflexión, pudo darse cuenta de la influencia o correspondencia entre grupos de recursos. Al respecto, Sonia señala, de manera explícita, las relaciones entre recursos curriculares-recursos para planear-recursos dirigidos a los estudiantes; en estas conexiones son evidentes las maneras en que Sonia considera la retroalimentación entre distintos grupos de recursos y sus posibilidades de evolución.

Como parte de nuestro análisis, también tuvimos en cuenta el papel que Sonia le asigna a los recursos digitales en su sistema; aparecen éstos, de manera explícita, en la categoría "recursos para planear"; esto nos permite entrever que la profesora prioriza su interacción con los recursos digitales cuando está pensando en seleccionar y adaptar actividades para sus estudiantes. También es llamativa la aparición de algunas redes sociales en esta misma categoría, como espacios de interacción con colegas y mediante los cuales se puede compartir información y materiales.

El proceso de selección de recursos (digitales), de la profesora Sonia

En nuestro análisis consideramos la re-construcción del proceso de selección de recursos de Sonia, poniendo especial énfasis en los recursos digitales. Analizamos el tipo de recursos que Sonia selecciona para su clase y propone a sus estudiantes respecto a un tema específico: la estimación y medición de longitudes. Sonia escogió este tema gracias a que correspondía a temas del currículo y porque le parecía una excelente oportunidad para el uso de recursos.

En una primera clase, Sonia le propuso a sus estudiantes algunas actividades de estimación de longitudes mediante comparaciones de líneas con igual longitud (aunque distinta forma); posteriormente introdujo el uso de uso de la cinta métrica pidiendo a los niños que agregaran marcas a una tira de papel. Hasta ese momento, Sonia priorizaba el uso de manipulativos; sin embargo, en la siguiente clase Sonia decidió introducir algunas ideas del sistema métrico decimal, momento en el cual consideró usar recursos digitales. En la siguiente clase, Sonia propuso un *applet* en GeoGebra para que los estudiantes experimentaran con la medición de longitudes (https://www.geogebra.org/m/qYHjHDAf) usando una regla graduada.

Consideramos que los principales criterios de Sonia para la selección del *applet* fueron de orden didáctico-cognitivo: la visualización, la aplicación de las equivalencias y la interacción estudiantes-recursos. Sonia realizó la búsqueda de ese *applet* en un portal especializado de recursos de GeoGebra, haciendo una búsqueda concienzuda acerca del tipo que quería encontrar. Para profundizar en la manera en que Sonia seleccionó ese recurso, utilizamos nuestra técnica de introspección (ver Figura 2).

Para la elaboración de su "ruta-recorrida", le propusimos a Sonia representar su proceso de selección del *applet* usado específicamente en su clase. Para nosotros era necesario que la ruta correspondiera a una situación muy particular con el propósito de poder inferir un posible esquema en las acciones de Sonia. Por tanto, le proporcionamos a Sonia el video de la sesión en la cual ella buscó el recurso por Internet, lo seleccionó y lo adaptó para su clase. La Figura 2 muestra la ruta-recorrida que Sonia propuso en esta situación específica.

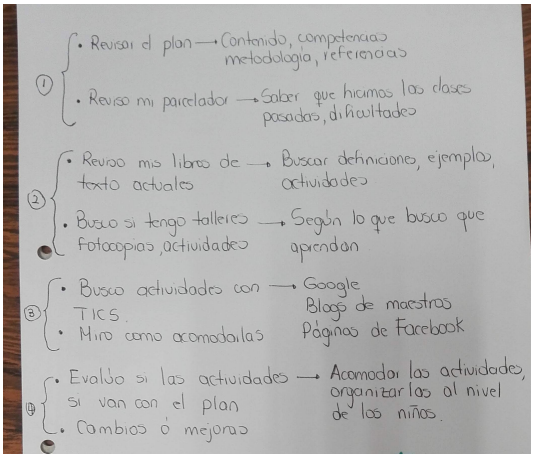


Figura 2. Ruta-recorrida propuesta por Sonia.

Mientras nos explicaba la ruta, Sonia agregaba detalles al mapa, como la numeración y algunas explicaciones. En esta ruta es notorio el interés de Sonia por organizar sus acciones en bloques de actividades consecutivas que parten de considerar los lineamientos que le ofrecen los recursos curriculares que usa habitualmente, su bitácora o seguimiento de clases y los libros de texto. Para

Sonia es importante ubicar su selección de acuerdo a lo que ya ha hecho anteriormente y hacia dónde quiere avanzar con sus estudiantes.

La situación de selección de Sonia es bastante específica: buscó un recurso digital que complementara un trabajo que ya venía realizando en clase y que se articulara con la hoja de trabajo para los estudiantes, ya prevista. Sus criterios de selección fueron bastante específicos en dos aspectos: (i) la demanda cognitiva del recurso digital y (ii) las necesidades educativas de sus estudiantes. De allí que sus anticipaciones se relacionaran con el repositorio en el cual buscó el recurso, en términos de las calidades ergonómica (el diseño del recurso) y didáctica (la situación que el recurso le propone a los estudiantes).

Así pues, las reglas de acción propuestas por Sonia se pueden organizar en dos categorías: tener en cuenta las necesidades educativas de sus estudiantes y la del recurso. Sonia es consciente que probablemente puede encontrar recursos muy interesantes que pueden exceder la capacidad de sus estudiantes y que serían contraproducentes para su aprendizaje; ella buscó un recurso que afianzara lo que los niños ya sabían y que les permitiera avanzar un poco más.

Las invariantes operatorias de Sonia exhiben sus conocimientos curriculares, didácticos y matemáticos. Su insistencia en el papel de la estimación, de la equivalencia, el sentido de las unidades y el uso de geometría dinámica, muestran su interés por focalizar su enseñanza en aspectos que ella considera centrales y que van mucho más allá de aprender fórmulas. Finalmente, Sonia considera que el uso de recursos digitales puede llegar a ser un elemento importante para atender las dificultades de estudiantes con bajo desempeño escolar. Esta inferencia se deriva del interés explícito de Sonia por atender las necesidades educativas de sus estudiantes y su experiencia trabajando con este tipo de recursos.

Conclusiones y comentarios finales

Como se mostró arriba, mediante nuestros instrumentos metodológicos de investigación (los que nos ayudaron a codificar y analizar los datos, así como la técnica de introspección), pudimos analizar el sistema documental de Sonia compuesto por: (i) los recursos que usa para enseñar geometría (su sistema de recursos, categorizado por nosotros en tres niveles), y (ii) sus conocimientos profesionales sobre cómo usar dichos recursos (su esquema de selección del *applet*).

El uso de nuestra técnica de introspección para determinar la "ruta-recorrida" resultó de gran ayuda para comprender las acciones y conocimientos de Sonia (a través de sus producciones verbales y gráficas) e inferir su esquema de selección subyacente. Adicionalmente, pasar por la experiencia introspectiva le permitió a la profesora reflexionar sobre su práctica y los recursos que selecciona y usa. Una de las fortalezas de nuestra técnica de introspección es que nos ayudó a obtener distintos datos (representaciones esquemáticas, verbalizaciones, textos), los cuales nos permitieron lograr un análisis más exhaustivo de las acciones de Sonia. Una posible limitante de nuestra técnica de introspección es que requiere cierto tiempo de "entrenamiento" por parte de cada profesor participante, con el objeto de que se sienta cómodo realizando las producciones que le solicitamos.

Asimismo, el esquema que inferimos de selección de recursos por parte de Sonia, nos permitió estudiar sus conocimientos profesionales en situaciones específicas (e.g., en su planeación de clase), mostrando la intencionalidad, secuencialidad y organización de sus acciones; además de la variedad de conocimientos involucrados (ergonómicos, curriculares, matemáticos y

didácticos). Por otro lado, nuestro análisis del sistema documental de Sonia, nos lleva a plantearnos nuevos cuestionamientos sobre el trabajo documental de los profesores. Por ejemplo, surgen cuestionamientos respecto a qué recursos curriculares usan los profesores en su práctica, y por qué.

Consideramos que este tipo de estudios enfocados en la práctica de los profesores y sus conocimientos profesionales, son necesarios en el análisis de las interacciones de los profesores (y sus conocimientos) con los recursos que usan habitualmente. En nuestro caso, nuestro estudio da cuenta de los criterios de selección de recursos por parte de profesores en ejercicio y, también, de las expectativas que tienen sobre la oferta de recursos que tienen a su alcance. Esto puede ser de utilidad para quienes se dedican a diseñar recursos de enseñanza-aprendizaje, o a los interesados en los procesos de formación de profesores.

Referencias y bibliografía

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 205–224. doi:10.1023/A:1009903206236.

Calderhead, J. (1981). Stimulated recall: a method for research on teaching. *British Journal of Educational Psychology*, 51, 211-217.

Gueudet, G., y Trouche, L. (2009). Towards New Documentation Systems for Teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71, 3, 199-218.

MEN (2007). *Estándades básicos de compentencias. Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Magisterio.

Pepin B, Choppin J, Ruthven K, Sinclair, N. (2017). Digital curriculum resources in mathematics education: foundations for change. *ZDM*, 49, 5, 645–661

Remillard, J. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. Review of Educational Research, 75, 2, 211–246. doi:10.3102/00346543075002211.

Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2018). Documentational approach to didactics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. N.Y.: Springer. doi:10.1007/978-3-319-77487-9_100011-1

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In Nunes, T. & Bryant, P. (Eds.) *Learning and teangching mathematics, an international perspective,* 5−26. Hove: Psychology Press.

Vollstedt, M. (2015). To See the Wood for the Trees: The Development of Theory from Empirical Interview Data Using Grounded Theory. In Bikner-Ahsbahs, A; Knipping, C. & Presmeg, N. (Eds.) *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods.* Dordrecht: Springer.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La transición de profesor a formador de profesores: Aprendiendo a establecer discusiones didáctico-matemáticas con profesores en ejercicio.

Luz **Valoyes-Chávez**
Centro de Investigación Avanzada en Educación – Universidad de Chile
Chile
luz.valoyes@ciae.uchile.cl
Natalia **Ruiz**
Centro de Investigación Avanzada en Educación – Universidad de Chile
Chile
nruiz@dim.uchile.cl

Resumen

La propuesta se enmarca en los esfuerzos por estudiar los procesos de expansión de los programas de desarrollo profesional que buscan transformar la enseñanza de las matemáticas. ***ARPA*** es uno de estos programas; su objetivo es fortalecer las habilidades de los profesores para implementar la resolución de problemas matemáticos en sus clases. En el contexto de los esfuerzos por expandir ***ARPA***, en esta propuesta presentamos resultados preliminares de una investigación que analiza los desafíos que implica formar monitores capaces de reproducir ***ARPA*** en diversas regiones de Chile. Basándonos en los desarrollos teóricos del Aprendizaje Situado, analizamos el proceso de aprendizaje de los monitores para establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas significativas, una característica clave de ***ARPA***. Los resultados indican elementos fundamentales que posibilitan el tránsito de profesor a monitor.

Palabras clave: Desarrollo profesional, resolución de problemas matemáticos, formador de profesores, aprendizaje situado.

Introducción

Diversos estudios (e.g, Even, 2008) han señalado los desafíos que implica expandir programas de desarrollo profesional (PD) para profesores de matemáticas. Una dificultad se relaciona con la formación de monitores capaces de reproducir fielmente y, al mismo tiempo, de manera flexible los aspectos centrales de los PD (Borko, Knoellner & Jacobs, 2014). Poco se sabe acerca del conocimiento y las habilidades necesarias para que los monitores recreen los principios fundamentales de los PD y para que puedan responder plenamente a las necesidades de los profesores de matemáticas en contextos escolares nuevos. Desde diversas perspectivas teóricas,

algunos investigadores (e.g, Jackson et al., 2015) han diseñado e implementado programas de formación para monitores, ilustrando experiencias de aprendizaje que les permiten recrear los principios de los PD así como participar en sus actividades centrales. Aspectos tales como el compromiso colectivo, la reflexión individual y colectiva en relación con la práctica, y las interacciones sistemáticas con monitores expertos parecen contribuir a fortalecer los conocimientos y habilidades de los monitores para expandir los PD. Sin embargo, estos estudios también indican el impacto limitado y efímero de estos programas de formación en el conocimiento y habilidades de los monitores.

En esta propuesta se aborda esta problemática. Presentamos los resultados preliminares de una investigación en curso destinada a comprender los procesos de aprendizaje de monitores en formación. Dicha investigación se realiza en el marco de los esfuerzos por expandir el PD ***Activando la Resolución de Problemas en el Aula***,(***ARPA***) en Chile. En el contexto de la reciente reforma curricular en matemáticas en el país, ***ARPA*** se diseñó con el propósito de fortalecer el conocimiento y las habilidades de los profesores para implementar la resolución de problemas en sus aulas. A medida que la investigación ha mostrado el impacto positivo de ***ARPA*** en las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Cerda et al., 2017) y en sus propias habilidades para resolver problemas matemáticos no rutinarios (Felmer & Perdomo-Díaz, 2016), ha surgido el desafío de expandirlo en todo Chile.

En particular, y con base en los desarrollos de la teoría del Aprendizaje Situado (Lave & Wenger, 1991), analizamos el proceso de aprendizaje de Luis[1], un monitor novato. Un aspecto fundamental de ***ARPA*** se relaciona con la habilidad de los monitores para establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas con los profesores participantes (Elliot et al., 2009). La experiencia muestra las dificultades para llevar a cabo esta actividad en tanto que implica, entre otros aspectos, construir sobre el pensamiento y las experiencias previas de los profesores participantes. La pregunta de investigación que guía este estudio es:

> *¿De qué forma se fortalece el conocimiento y las habilidades para establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas significativas de un monitor novato como resultado de su participación en las experiencias de aprendizaje propuestas en el programa de formación de monitores ARPA?*

Marco Teórico

En este estudio utilizamos la teoría del *Aprendizaje Situado* (Lave & Wenger, 1991) como "un marco conceptual desde el cual se puede derivar un conjunto consistente de principios generales y recomendaciones para comprender y posibilitar el aprendizaje" (Wenger, 2009; p. 201); es decir, abordamos esta perspectiva como una herramienta analítica y teórica para comprender el proceso de aprendizaje de los monitores novatos. En esta perspectiva, el aprendizaje se define como "un aspecto de la participación en prácticas situadas socialmente" (Wenger, 2009; p. 211). Aprender implica participar en las prácticas, construir significado acerca de dichas prácticas y principalmente, *llegar a ser (becoming)*. En consecuencia, asumimos que "aprender a ser monitor ***ARPA***" implica participar gradualmente en las prácticas compartidas de la comunidad de monitores ***ARPA***. Tales prácticas incluyen, entre otros, el diseño e implementación de talleres RPAula, la elaboración de problemas matemáticos no rutinarios, la retroalimentación a los profesores y el enriquecimiento profesional. Lo anterior requiere construir significado para estas

[1] Todos los nombres utilizados son pseudónimos.

prácticas así como *llegar a ser* monitor ***ARPA***. Por lo tanto, ***participación en las prácticas***, ***significado e identidad*** emergen como las nociones claves para comprender inicialmente los procesos de aprendizaje de los monitores novatos.

Al entender el aprendizaje de esta manera, tanto la colaboración profesional como la participación en prácticas colectivas surgen como elementos fundamentales para el desarrollo de los monitores. Basándonos en el modelo de Wenger (2009), introducimos un marco preliminar para comprender y guiar el análisis del proceso de aprendizaje de los monitores novatos, tal y como se ilustra a continuación.

Tabla 1

*Elementos para el Análisis del Aprendizaje de los Monitores **ARPA**.*

Elemento	**Aspecto del Aprendizaje**	**Definición**
Comunidad	Experiencia	Comunidad de monitores ***ARPA*** expertos y novicios. Se reconoce en esta noción el acervo histórico y conceptual que permite reconocer a un individuo como monitor ***ARPA***.
Práctica	Participación	● Diseñar talleres RPAula que respondan a las necesidades de los profesores de acuerdo con los diversos contextos/niveles educativos. ● Planificar individual/colectivamente talleres RPAula ● Retroalimentar el aprendizaje de los profesores participantes. ● Etc.
Significado	Pertenencia	Construcción de significado acerca de las prácticas definidas anteriormente y sobre los roles del monitor ***ARPA***.
Identidad	Llegar a ser	Discursos propios y ajenos sobre "ser Monitor ***ARPA***".

El Programa de Formación de Monitores *ARPA* (PFM-*ARPA*)

ARPA es un PD cuyo principal objetivo es fortalecer el conocimiento y las habilidades de los profesores chilenos para implementar la resolución de problemas en su enseñanza. ***ARPA*** modela la actividad de resolver problemas en cuatro etapas: Entrega, Activación, Consolidación y Discusión (Felmer & Perdomo-Díaz, 2016). En grupos organizados al azar, los estudiantes resuelven problemas matemáticos no rutinarios. El papel principal del profesor es plantear preguntas que les permitan a los estudiantes avanzar en el proceso de resolución. Si un grupo tiene dificultades para resolver el problema, se le propone una simplificación. De lo contrario, el grupo recibe una extensión. La actividad termina con una plenaria en donde los estudiantes discuten acerca del proceso de resolución. Durante ***ARPA***, los profesores participantes tienen múltiples oportunidades de vivenciar el modelo propuesto para implementarlo en sus propias aulas.

El **PFM-*ARPA*** comprende 4 etapas: El taller de formación inicial, práctica guiada, práctica autónoma y desarrollo profesional. La participación activa en las diferentes experiencias de

aprendizaje es el principio básico que fundamenta el programa. Estas experiencias de aprendizaje tienen un fuerte componente práctico y presentan las principales prácticas de la comunidad de monitores ***ARPA***. El **Taller de Formación Inicial para Monitores** consta de 9 sesiones distribuidas en dos meses. Durante esta etapa, los participantes resuelven problemas y realizan actividades claves de los talleres ***ARPA***. El taller inicial tiene un componente experiencial importante en tanto les brinda a los participantes múltiples oportunidades para vivenciar las principales prácticas de la comunidad de monitores ***ARPA***. La reflexión acerca de las prácticas y de su propio rol como monitores son aspectos fundamentales en esta etapa. Al finalizar el taller inicial, los monitores novatos avanzan a la segunda etapa del programa, la **Práctica Guiada**. Durante un año escolar, los monitores novatos implementan sus propios talleres RPAula con la orientación de un monitor experto. Se reúnen una vez al mes para planear, discutir, evaluar y analizar las sesiones de sus talleres RPAula. Como parte del proceso de orientación, los monitores expertos observan las sesiones de los monitores novatos y proporcionan retroalimentación colectiva e individual para fortalecer su proceso de aprendizaje. Esta es una instancia importante del programa en la cual los monitores novatos y expertos constituyen una comunidad que les permite construir conocimiento conjunto acerca de su rol como monitores ***ARPA***. Una vez que termina la etapa de la práctica guiada, los monitores novatos avanzan a la **Práctica Autónoma.** Los monitores novatos y expertos se reúnen dos veces al año. En la primera reunión, establecen metas anuales y planifican el trabajo que realizarán durante el año. En la segunda reunión, los monitores novatos y expertos evalúan la implementación de los talleres. Durante esta etapa, el monitor experto observa las sesiones del taller RPAula de los monitores y proporciona retroalimentación al monitor novato. A medida que los monitores novatos avanzan hacia la experticia, la etapa de **Desarrollo Profesional** les permite participar en seminarios y otras actividades académicas destinadas a fortalecer su conocimiento sobre la resolución de problemas matemáticos y la formación docente.

Metodología

Con el objetivo de expandir ***ARPA*** a una región del sur de Chile, 9 profesores de primaria y secundaria ingresaron al PFM-*ARPA* durante el segundo semestre de 2017. Las 9 sesiones del taller inicial fueron impartidas por Pedro, monitor experto. Utilizando técnicas de la tradición cualitativa, analizamos el proceso de aprendizaje de Luis.

Participante

Luis tiene 8 años de experiencia como profesor de matemáticas. Después de terminar exitosamente el taller inicial, Luis y 4 profesores más fueron seleccionados para continuar en el PFM-***ARPA*** implementando sus propios talleres RPAula durante el año escolar 2018. Seleccionamos a Luis como participante de este estudio en tanto que no tenía experiencia previa con ***ARPA***, a diferencia de otros participantes. Tal característica nos permitiría vincular su proceso de aprendizaje con las experiencias de aprendizaje propuestas en el PFM-***ARPA.***

Recolección de datos y análisis

Los datos para esta propuesta están conformados por las grabaciones de las 9 sesiones del taller inicial, las grabaciones de las sesiones de la práctica guiada, y las sesiones del taller RPAula implementado por Luis. Adicionalmente, hemos realizado dos tipos de entrevistas. El primer tipo es una entrevista semi estructurada aplicada al comienzo del año, antes de iniciar su taller RPAula. El segundo tipo de entrevistas son basadas en episodios de sus talleres en los cuales Luis interactúa con los profesores participantes de su taller.

Para el análisis de las grabaciones utilizamos las técnicas del *Videoanálisis* (Knoblauch & Schnettler, 2012). Este es un enfoque interpretativo de las interacciones sociales registradas en entornos naturales y desde el cual se asume que los significados de tales interacciones se construyen conjuntamente entre participantes y observadores a partir del conocimiento contextual que éstos aportan al análisis (Knoblauch & Schnettler, 2012). Así, el equipo de investigación se reúne periódicamente para observar colectivamente los videos. En primer lugar, nos enfocamos en la participación de Luis en las diferentes experiencias de aprendizaje durante el taller y la práctica guiada. Observamos cada sesión y registramos tanto las experiencias de aprendizaje como las interacciones entre los monitores expertos y novicios. En esta fase del análisis, mantuvimos un contacto cercano con los monitores expertos para obtener su retroalimentación sobre el contexto de los episodios y las interacciones (Knoblauch & Schnettler, 2012). En segundo lugar, nos centramos en las interacciones entre Luis y sus profesores durante el taller RPAula. Seleccionamos episodios en los cuales Luis implementa plenarias, discute con los profesores participantes y responde a sus inquietudes. Para el análisis de las entrevistas utilizamos un enfoque interpretativo con base en las categorías propuestas. Examinamos como Luis redefine su propia comprensión de las discusiones didáctico matemáticas y de su propio rol como monitor ***ARPA***. En este sentido, nuestro análisis se sitúa en la interacción entre los elementos de práctica, significado e identidad del marco teórico.

Resultados Preliminares y Discusión

Aunque los resultados son preliminares, nuestro análisis evidencia la manera como Luis construye sobre experiencias docentes y personales para significar tanto su rol de monitor ***ARPA*** así como la práctica de establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas con los profesores.

Construyendo significado para la práctica de establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas durante el taller inicial.

Durante la segunda sesión del taller inicial, Pedro pide a los monitores novatos diseñar e implementar un ***ARPA***, haciendo énfasis en la discusión plenaria. Inicialmente, Pedro selecciona a Lina para liderar la actividad. Al finalizar, Pedro reune al grupo para reflexionar sobre la experiencia, al tiempo que él mismo modelaba una sesión plenaria. La experiencia de aprendizaje termina con un segundo proceso de reflexión acerca de la actividad de Pedro liderando la plenaria, en el cual los monitores destacan elementos claves para implementar discusiones significativas con los profesores. A través de la participación en la actividad, las experiencias de Luis como profesor surgen tanto en las preguntas que plantea así como en las interpretaciones que realiza. Estas experiencias constituyen aspectos críticos de su identidad como profesor y proporcionan una línea de base para entender su proceso de aprendizaje. Por ejemplo, basándose en su experiencia docente, Luis duda sobre las posibilidades de propiciar discusiones significativas entre los estudiantes debido al tiempo y al número de estudiantes en clase:

> Luis: Tenemos que considerar el contexto. En una clase normal, tenemos 40 estudiantes. Un profesor podría argumentar: "tengo 40 estudiantes, decido hacer 5 u 8 grupos". Digamos que tenemos 10 grupos, 4 estudiantes en cada uno. Así que, *como profesor*, me doy cuenta de que aunque no todos los grupos resolvieron el problema, algunos hicieron un gran progreso. Quiero (idea sin finalizar). Él (señalando a un profesor en el grupo) está motivado para explicar su solución en la pizarra. Y todos los grupos quieren. Planeé un ARPA para que durará 45 minutos. Es imposible.
>
> Pedro: ¿Qué harías tú?

> Luis: No sé. Es imposible. Estoy diciendo esto porque es lo que realmente ocurre en la clase, esa es la experiencia. Cada grupo necesita y pide ayuda, el profesor se mueve alrededor, responde algunas preguntas. Pero no sé qué hacer. Trataría de que cada grupo tuviera la oportunidad de explicar su solución hasta que termine el tiempo de clase. También podría elegir un grupo con la respuesta correcta. Eso.

En este intercambio, Luis se posiciona como un profesor "normal" para expresar un reto importante en los esfuerzos actuales por transformar la enseñanza de las matemáticas. Antes que asumir el rol de monitor, enuncia una preocupación común de los profesores relacionada con el manejo del tiempo en la institución educativa, el cual es un problema crítico en los esfuerzos por implementar las reformas educativas. Es decir, en el sistema educativo chileno, el tiempo de clase es altamente controlado en aras de cubrir el plan de estudio propuesto. Como resultado de esta experiencia, Luis necesita ser convencido de que es posible establecer discusiones significativas en el contexto real de las escuelas chilenas antes de poder asumir esta discusión con otros profesores. Así pues, más allá de la reflexión sobre los aspectos técnicos para facilitar discusiones significativas con los profesores (pedir explicaciones en lugar de buscar y dar respuestas correctas, involucrar a todos, pedir aclaraciones y construir sobre las ideas de los demás), surgen en la discusión una serie de cuestionamientos de naturaleza didáctica (¿Es posible implementar la resolución de problemas con grupos de estudiantes numerosos?) que serán importantes durante la implementación de sus propios talleres RPAula. Aunque la participación en la reflexión colectiva entre monitores con distintos niveles de experticia posibilita la negociación y renegociación de significados sobre la práctica (Lave & Wenger, 1991), el aprendizaje se consolidará a medida que cuestiones del orden didáctico - matemático surjan en otros espacios como el taller RPAula.

Resignificando la práctica de establecer y sostener discusiones didáctico-matemáticas a partir de las experiencias en el taller RPAula.

En la medida en que los monitores novatos se involucran activamente en las prácticas de la comunidad de monitores, su aprendizaje, entendido como participación completa en tales prácticas, es fortalecido (Lave & Wenger, 1991). Este es el caso de Luis durante la implementación por primera vez del taller RPAula. Nuestro análisis preliminar evidencia la forma en la cual al involucrarse activamente en la planificación e implementación del taller, Luis resignifica las prácticas. Este es un proceso constante en el cual Luis transita desde su experiencia como profesor hacia un nuevo campo de representaciones, ideas y significados para su rol de monitor. Este transitar no es unidireccional. Por el contrario, puede pensarse como un ir y venir entre su identidad como profesor y una nueva como monitor. En este sentido, y como veremos, el taller RPAula constituye un espacio fundamental de aprendizaje.

En el episodio que analizamos a continuación Luis se enfrenta al mismo tipo de preguntas que él formulaba durante el taller inicial. Ana, una de las profesoras participantes, señala las restricciones para implementar ***ARPA*** debido al tiempo y al número de estudiantes en su curso:

> Ana: Otra cosa que me costó a mí fue la plenaria, donde son tantos cabros chicos.
> Luis: ¿Y cómo fue eso? ¿Cómo hizo la plenaria? Porque ese era el foco (del ARPA).
> Ana: Como para mí (idea sin terminar); aquí salen todos, yo también saqué a cada uno de todos los grupos, entonces eran 10 cabros chicos adelante. ¡Llena la sala!
> Luis: ¡Ah! Y todos querían contar cómo (idea sin finalizar).

> Ana: (Interrumpiendo a Luis) Si me hubiesen ido a grabar esa clase. ¡Eso es lo que no se debe hacer en un ARPA!
> (Todos los profesores se ríen).
> Ana: No sabían lo que habían hecho ellos, no tenían idea.
> Luis: Por eso uno (idea sin terminar). Es que ese día se fue como (idea sin terminar). Tuve que hacer fuerza (idean sin terminar). Pasó todo lo que pasó. Vimos cómo seleccionar a los grupos. La idea es que fueran de menos a más ¿cierto?, que mostraran las estrategias.
> Ana: Es que yo insisto que la cantidad de alumnos de un curso (idea sin terminar).
> Luis: Siii, 33 es harto.
> Ana: Porque hubo un momento en que todos los grupos me llamaban, entonces no, es verdad que no se puede trabajar. Entonces después darle la posibilidad de que todos los grupos puedan exponer, hay que tener por lo menos media hora de plenaria, y uno cierra la clase en 15 min. La cantidad de alumnos en un ARPA, influye mucho.

Como parte de la técnica aprendida para adelantar las discusiones con los profesores, Luis no responde a la crítica de Ana; por el contrario, le permite expresar su descontento; además involucra a los demás profesores en la discusión. Durante una de las entrevistas, mostramos este episodio a Luis y le solicitamos Luis reflexionar sobre el reclamo de Ana. Primero, le pedimos que interpretara las dificultades planteadas por Ana:

> Luis: Claro. Sí, es complicado, sí, es complicado hacerlo, porque yo vengo de un colegio que son numerosos, hasta con 44. Y es un tema físico, de espacio físico, porque la sala está como para ponerlos de a dos, de a dos, de a dos, de a tres, de tres, de tres, pero si tú modificas (la organización de la sala) te cuesta hasta pasar po. Es un tema físico. Así que yo entiendo esa situación. Hay una profe que ideó poner grupos, cuatro, cuatro, cuatro al medio, apoyar los otros a la pared y los otros acá y ella poder pasar por el medio, pero tampoco puede pasar entre medio, tiene que darse como una vuelta en U. Entonces ideó esa forma. Pero es un problema, es un problema.

La experiencia docente le permite a Luis identificarse con Ana en relación con las dificultades para implementar ***ARPA*** en las actuales condiciones del sistema educativo chileno. En esta experiencia se expresan una serie de conocimientos provenientes de la práctica cotidiana de enseñar, los cuales, en este caso, son usados para crear un ambiente que permita construir nuevas posibilidades, tal y como se evidencia en la narrativa. Sin embargo, también hay un reconocimiento de la existencia de un conocimiento que le permita dar una respuesta "distinta" a Ana, pero que Luis no posee aún. Ante la pregunta por otra respuesta para la dificultad planteada por Ana, Luis responde:

> Luis: Hubiese dado muchas otras respuestas (a Ana), pero que no las tenía en ese momento; pero ahora las tengo porque con el tiempo las he ido aprendiendo. A eso voy con que a veces no sé qué responder, pero con el tiempo me voy informando.

Así pues, es en el contexto mismo de la práctica en el que se reconoce la falta de un conocimiento importante para apoyar el crecimiento de la maestra en términos didáctico-matemáticos, conocimiento que aunque no se posee, se adquiere paulatinamente como resultado de participar en las prácticas de la comunidad. Desarrollar las prácticas relacionadas con el taller RPAula le permite a Luis tanto negociar nuevos significados sobre las discusiones didáctico-matemáticas así como fortalecer sus conocimientos y habilidades. Este proceso es mediado por la experiencia docente de Luis, quien ingresa al programa PFM-***ARPA*** con las mismas necesidades de los profesores con los que eventualmente trabajará en tanto pertenecen a la misma cultura escolar. Llegar a ser "monitor ARPA" significa reconocer, confrontar y reconstruir estas experiencias a través de una mayor participación en las prácticas de la comunidad. En este

sentido vemos que como resultado de dicha participación, Luis se encuentra en un proceso de cambio, de tránsito entre "ser profesor" y "ser monitor". Tal y como afirman Lave y Wenger (1991), "una manera de pensar el aprendizaje es a partir de la producción y transformación histórica de las personas, su cambio" (p. 51). La participación en el PFM-***ARPA,*** a partir de la consolidación de una red de colaboración en la que se benefician monitores novatos y expertos, contribuye al reconocimiento por parte de los monitores novatos de la existencia de ciertos conocimientos específicos que permitan atender a las dificultades de los profesores. Así, la coparticipación en y el compromiso social con las prácticas de la comunidad son aspectos críticos de la formación de monitores ***ARPA***.

Estos resultados preliminares señalan la importancia de considerar las experiencias previas de los participantes que ingresan al programa. Nos invitan a pensar no sólo en un perfil necesario para hacer parte del proceso de formación, sino además, y principalmente, en la forma de atender las necesidades individuales de los participantes. ¿Es posible, por ejemplo, formular un conocimiento general necesario para ser monitor ***ARPA*** tal y como lo sugieren algunos investigadores en el campo? ¿O por el contrario, dicho conocimiento debería ser más "local" e individual siempre en relación con las prácticas que definen a la comunidad de monitores? Son estas las preguntas que actualmente orientan nuestro análisis.

Agradecimiento: El presente estudio se adelanta con recursos del Proyecto FONDEF ID14I20338. Se agradece además financiamiento otorgado por el Proyecto Basal FB0003 del PIA-CONICYT.

Referencias

Borko, H., Koellner, K., & Jacobs, J. (2014). Examining novice teacher leaders' facilitation of mathematics professional development. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 149-167.

Cerda, G., Pérez, C., Giaconi, V., Perdomo-Díaz, J., Reyes, C., & Felmer, P. (2017). The effect of a professional development program workshop about problem solving on mathematics teachers' ideas about the nature of mathematics achievement in mathematics, and learning in mathematics. *Psychology, Society & Education*, *9*(1), 11-26.

Elliot, R., Kazemi, E., Lesseig, K., Mumme, J., Carroll, C., & Kelley-Petersen, M. (2009). Conceptualizing the work of leading mathematical tasks in professional development. *Journal of Teacher Education, 60* (4), 364-379.

Even, R. (2008). Facing the challenge of educating educators to work with practicing mathematics teachers. In B. Jaworski & T. Woods (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: The mathematics teacher educator as a developing professional (Vol. 4)* (pp. 57-74). The Netherlands: Sense Publishers.

Felmer, P., & Perdomo-Díaz, J. (2016). Novice Chilean secondary mathematics teachers as problem solvers. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving problems. Advances and new perspectives* (pp. 287-308). Springer: Switzerland.

Jackson, K., Cobb, P., Wilson, J., Webster, M., Dunlap, C., & Appelgate, M. (2015). Investigating the development of mathematics leaders' capacity to support teachers' learning on a large scale. *ZDM, 47*, 93-104.

Knoblauch, H., & Schnettler, B. (2012). Videography: analyzing video data as a "focused" ethnographic and hermeneutical exercise. *Qualitative Research, 12*(3), 334-356.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning. Legitimate peripheral participation.* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Wenger, E. (2009). A social theory of learning. In K. Illeris (Ed.), *Contemporary theories of learning* (pp. 209-218), New York, NY: Routledge.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Análisis sobre situaciones de enseñanza del Teorema de Pitágoras entre universidad y escuela

Noemí **Pizarro** Contreras
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile
noemi.pizarro@umce.cl
Gabriela **Nuñez** Contardo
Colegio Alemán del Verbo Divino.
Chile
gabrielanunezcontardo@gmail.com
Guillermo **Arancibia** Canales
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile
guillermo.arancibia@umce.cl
Tomas **Cruces**
Escuela Ronda de San Miguel
Tomas.cruces@live.com

Resumen

Mediante una reflexión y acción conjunta entre profesores y formadores de profesores emerge la necesidad de desarrollar conocimiento profesional para la enseñanza del Teorema de Pitágoras, conocimiento desconocido para el equipo, que es tanto objeto y sujeto de investigación. En esta comunicación mostramos un breve análisis de dos episodios vinculados a la primera clase, correspondiente al trabajo con Ternas Pitagóricas. Observamos la débil formación e investigación sobre la enseñanza del Teorema de Pitágoras, el escaso de material didáctico para representar triángulos rectángulos y la importancia de la relación entre el pensamiento matemático y el pensamiento geométrico.

Palabras clave: Conocimiento profesional, práctica, enseñanza, Teorema de Pitágoras.

Introducción

Comúnmente, los formadores de profesores no se relacionan con la escuela, y a la vez, los profesores de escuela, no se relacionan con la academia, situación que conlleva un paralelismo contante entre ambos trabajos que, en la práctica, deberían estar interrelacionados (Zeichner, 2010). A raíz de esto, surge el proyecto "Investigación entre universidad y escuela: Un análisis sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática por medio de reflexión conjunta sobre la práctica", donde se espera que profesores de aula y formadores de profesores investiguen en conjunto sobre problemas en la enseñanza de la matemática.

Dentro de este contexto, un docente que trabaja en el último grado de primaria (13 años) sostiene lo complejo que es para él enseñar el Teorema de Pitágoras, explicando que siempre lo ha enseñado de acuerdo a la secuencia: muestra de la relación de catetos e hipotenusa, demostración, ejercicios y problemas. Estrategia que no ha dado resultados. Desde la academia, sólo se tiene experiencia en su demostración, pero no en cómo tratar el contenido con estudiantes de 13 años.

Para poder realizar las clases indagamos en la literatura en educación matemática y observamos que la mayoría de las propuestas de enseñanza o análisis comparativos sobre ellas, se centran en demostraciones, dejando de lado el pensamiento matemático y el trabajo docente.

Por ello, dicho saber es idóneo observarlo desde la complejidad de la práctica, que ha sido estudiada por múltiples investigadores, quienes coinciden que para la enseñanza es necesario que los profesores posean y empleen una amplia variedad de conocimientos y habilidades que pueden ser perfeccionadas con el tiempo (Darling-Hammond y Bransford, 2005, entre otros).

A raíz de lo anterior nos preguntamos ¿Qué conocimiento debe tener un profesor de matemáticas para enseñar el Teorema de Pitágoras? ¿Qué recursos podrían ser idóneos para el trabajo en aula? ¿Qué dificultades pueden emerger por parte de los estudiantes y del saber? ¿Qué habilidades matemáticas se desarrollan en su tratamiento?

Planteamiento del Problema

El proyecto, que plantea hacer co-docencia entre formadores de profesores y profesores provocó una situación compleja y didácticamente interesante: el problema de cómo enseñar el Teorema de Pitágoras. El docente de aula planteó no tener formación al respecto y de no tener actividades, ni en los libros de texto ni en los programas de estudio que lo orientaran a no reproducir la fórmula y las ternas pitagóricas. Los formadores de profesores, conocíamos diversas demostraciones, pero no nos habíamos planteado cómo llegar a esa demostración haciendo partícipes a los estudiantes.

La primera pregunta que, en conjunto, nos hicimos, fue ¿Por qué y para qué tenemos que enseñar el Teorema de Pitágoras? ¿cómo realizamos una clase que no caiga en el esquema tradicional de definición-ejemplo y ejercicio? Estas fueron las primeras preguntas durante la planificación para la práctica, que encuentran respuesta en el desarrollo del objetivo de investigación: analizar la práctica de enseñanza del Teorema de Pitágoras de acuerdo a una propuesta de trabajo diseñada entre universidad y escuela.

De esta forma, la investigación que se presenta posee espacios de planificación, ejecución y reflexión que posibilitan significar y resignificar los procesos de enseñanza y aprendizaje considerando el conocimiento especializado para la enseñanza de la matemática y su desarrollo.

Fundamentos Teóricos

El Teorema de Pitágoras es la relación más recordada de las épocas escolares (González, 2008). En él, se establece conexiones importantes y naturales entre el álgebra y la geometría. Es espacialmente apropiado para realizar modelamiento matemático y no hay manera de "descubrirlo" sin una clara conducción del profesor (Varas, Cubillos & Jimenez, 2008).

Por lo que observa en los distintos agentes de enseñanza sobre él (Gurrola y Jáuregui, 2008; Barreto, 2009; entre otros), el Teorema de Pitágoras se ha reducido a su muestra,

demostración y aplicación, sin considerar conjeturas y validaciones que propicien un trabajo matemático en el aula para el desarrollo del pensamiento inductivo.

Es necesario mencionar que se han realizado esfuerzos por descubrir el Teorema de Pitágoras, sin embargo, este descubrimiento es sólo el resultado de una "actividad de indagación, sin aclarar que se obtiene apenas una conjetura, que no tiene la validez de un teorema, aumenta la confusión acerca de lo que es un teorema, una demostración y una certeza en matemática; sobre lo que es la matemática, su estructura interna y su racionalidad (Varas et al, 2008, p.126)

A raíz de lo anterior, se considera indispensable desarrollar la argumentación y demostración al tratar el Teorema de Pitágoras en la escuela, dado que su tratamiento debe responder a un trabajo intelectual lejano a la deducción lógica, por ello es un ícono de la Geometría racional en la Escuela Pitagórica y es, además, la base de una multitud de teoremas geométricos (González, 2008)

La práctica docente

Shulman (1986) sostiene la importancia del conocimiento docente para una práctica efectiva, dando un giro en las investigaciones sobre la enseñanza, que se centraban, principalmente en el comportamiento de los estudiantes, los tiempos utilizados en la clase o las planificaciones de las mismas. Por ello, el análisis del proceso de las prácticas de la enseñanza revela el conocimiento docente, porque éste debe ponerse en juego en un escenario complejo e impredecible, dando el paso a la constitución de ejes que permiten realizar reflexiones sobre el quehacer docente en un caso particular.

Desde la década de los 80, varios autores (Schön, 1992; Shulman, 1986, 1987; Darling-Hammond y Bransford, 2005, entre otros) han concluido que reflexión y práctica son conceptos indisolubles, estrechamente relacionados y mutuamente exigidos, de cuya evolución emerge el desarrollo profesional. Por ello, en los últimos años las investigaciones centradas en la práctica de la enseñanza de la matemática han aumentado, transformando a docentes y su quehacer en un elemento fundamental para comprender los procesos de enseñanza para el aprendizaje, lo que ha traído como consecuencia que los profesores y su enseñanza han pasado a ser un elemento central (Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, 2005; Sfard, 2005; English y Kirshner, 2016).

La premisa que guía este estudio considera que el profesorado reflexiona sobre su práctica por medio de un análisis que involucre crítica, redescubrimiento y modificación de los referentes y creencias que la sustentan, así de esta manera desarrolla herramientas para construir su profesionalismo sobre su conocimiento para enseñar, y por lo demás, su propio aprendizaje.

Conocimiento especializado del profesorado de matemática

Para analizar la enseñanza, consideramos como referente al Conocimiento especializado para el profesor de matemática (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, MTSK) propuesto Carrillo, Climent, Contreras, Escudero-Ávila., Flores-Medrano, Montes (2014). Este marco comprende el conocimiento del contenido del profesor desde la contribución de Shulman (1986, 1987) y el Mathematical Knowledge for Teaching desarrollado por Ball y su equipo (2008). En este marco teórico se distinguen dos componentes: una referida al conocimiento de la matemática, MK (Mathematical Knowledge), y otra relativa al conocimiento didáctico para enseñar, el PCK. (Pedagogical Content Knowledge). El MTSK además de ser una propuesta teórica para modelar el conocimiento del profesor de matemática, es una herramienta metodológica, con la cual es posible analizar la práctica.

Las componentes se dividen a la vez en seis dominios, que serán a la vez, las dimensiones de análisis de los datos de este estudio. A continuación, se explica cada uno de los seis dominios del MTSK, los tres primeros son referentes al MK y los tres últimos al PCK (Flores, Escudero y Aguilar, 2001, Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013). En cada uno de ellos nos referiremos al contexto de la enseñanza del Teorema de Pitágoras:

El Conocimiento de los Temas (Knowledge of Topics, KoT): este dominio analiza o modela qué y cómo el profesor de matemáticas conoce los temas que va a enseñar, supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. En este subdominio, por ejemplo, el docente debe ser capaz de comprender la relación entre los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo o diferenciar el Teorema de Pitágoras y su recíproco

Conocimiento de la estructura de la matemática (Knowledge of the Structure of Mathematic, KSM): Es el conocimiento de las relaciones que el profesor realiza entre distintos contenidos. Estos contenidos pueden ser del curso que está tratando o bien de otros cursos y niveles, la idea es que realice conexiones entre temas matemáticos. El desarrollo del Teorema de Pitágoras involucra trabajo geométrico y algebraico, relacionando composiciones de figuras; descomposiciones y composiciones de áreas, resolución de ecuación y cálculo de raíces.

Conocimiento de la práctica matemática (Knowledge of the Practice of Mathematics, KPM): Este dominio considera que es importante el conocimiento de los resultados matemáticos, pero que es fundamental conocer las formas de proceder para llegar a ellos y las características del trabajo matemático. El KPM es quizás la dimensión más compleja en el tratamiento del Teorema de Pitágoras, dado que en el aula se considera por demostración una actividad de indagación.

El Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Features of Learning Mathematics KFLM): Este dominio se enfoca en el contenido matemático como objeto de aprendizaje, por ello se evita mirar al estudiante en sí, dado que la idea es observar las características del proceso de comprensión del estudiante sobre el contenido, que derivan de su interacción con el mismo. En nuestro caso, un conflicto es que los estudiantes no están acostumbrados a desarrollar conjeturas o a trabajar en equipo en miras a la resolución de un problema.

Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (Knowledge of Mathematics Teaching, KMT): el KMT tiene como foco la enseñanza. En este dominio incluye el conocimiento de los recursos, materiales, formas de presentar el contenido, el uso de ejemplos adecuados tanto en el contenido, como en el contexto y la intención. Esta subdimensión es la más importante dentro del estudio. ¿cómo presentamos el Teorema de Pitágoras? Si observamos la historia de la matemática, podríamos partir por el recíproco del Teorema de Pitágoras, dado que diversas culturas lo utilizaron para realizar construcciones. ¿Qué demostración incentivaremos en el aula?

6. Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards, KMLS): se refiere al conocimiento curricular del maestro. Es el conocimiento que el profesor tiene sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueven en determinados momentos educativos.

Por otro lado, el papel de las creencias del docente es central dado que engloba a los seis subdominios anteriores.

Metodología

Como se puede observar, las características del estudio exigen que sea un estudio de caso de corte cualitativo y descriptivo de la investigación-acción docente. Para González- Lloret (2012) lo que distingue a la investigación-acción cualitativa es su claro objetivo de cambiar y mejorar la práctica o la situación que se está estudiando y no solo su descripción o interpretación. Los datos se recogen tanto de las reflexiones individuales y colectivas de los docentes y formadores de docentes, como de las prácticas de aula por medio de video tape, dado que las evidencias de prácticas de aula son indispensables en la formación docente

En la investigación participan cuatro docentes, dos de ellos docentes de aula de escuelas diferentes y dos formadores de profesores, los cuatro son sujetos y objetos de investigación. Se realizan cuatro clases para el último curso de primaria (octavo año, 13 años aproximadamente) de la Escuela Ronda de San Miguel sobre el Teorema de Pitágoras.

Para realizar la investigación, se consideran tres instancias de investigación: sobre la práctica, en la práctica y para la práctica. Killion & Todnem (1991), considerando los primeros trabajos de Shön, distinguen estos tres momentos de reflexión; las dos primeras son de índole reactiva, la reflexión en la práctica se lleva a cabo durante el trabajo de aula; la reflexión sobre la práctica se realiza después de un hecho puntual. La reflexión para la práctica es el resultado de las dos anteriores y a la vez, el antecedente de las dos anteriores, dado que componen un ciclo de investigación y acción.

Análisis de resultados

Durante la actividad, se presentaron diversos episodios de análisis que nos permiten detectar factores que indicen en la enseñanza del Teorema de Pitágoras, lo que conlleva, construcción del conocimiento del profesor de matemática. Por cuestiones de espacio, en esta comunicación sólo presentaremos dos episodios correspondientes a la primera clase. A continuación, se muestran diálogos entre estudiantes (E); profesores (P) y Formadores de Profesores (FP)

Episodio 1:

Durante la reflexión para la práctica, el profesor del curso y dos académicos se reúnen para planificar la primera clase:

1.a Primera reunión

FP1: *Tenemos que pensar en el desarrollo de buenas demostraciones*

P1: *Pero antes de eso hay que hacer un buen inicio, algo que no sea artificial. No quiero hacer lo mismo de siempre, porque los estudiantes no aprenden*.

FP1: *Creo que antes de todo, tenemos que preguntarnos ¿Por qué enseñamos el Teorema de Pitágoras?*

FP: *Es un Teorema importante… fundamental.*

P: *No tendría aún respuesta para ello.*

FP2: *Busquemos información, y posterior a ello, a partir del porqué de la enseñanza, busquemos información*.

1.b Segunda reunión

FP2: *He encontrado cuatro razones por qué enseñar el Teorema.*

- *Es fundamental para comprender, geométricamente, es decir, más allá de la percepción visual cuando dos planos son perpendiculares. Distintas culturas lo han trabajado para ello. En este caso, deberíamos considerar el recíproco del teorema.*
- *Relaciona dos magnitudes: longitud y área de superficie.*
- *Gracias a él, podemos localizar los números irracionales.*

- *Por otro lado, es un Teorema pilar de muchos otros teoremas, sobre todo para tercero medio, miren "es la base de multitud de teoremas geométricos, de los estudios sobre polígonos y poliedros, de la Geometría Analítica y de la Trigonometría –la fórmula $\cos^2 a + \text{sen}^2 a = 1$ es un caso particular del Teorema de Pitágoras y el Teorema del coseno es una generalización del mismo–. La relación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ es la ecuación de la circunferencia y la raíz histórica del Análisis indeterminado de Diofanto y Fermat. El Teorema de Pitágoras también pudo ser el germen de la dramática aparición pitagórica de la inconmensurabilidad de gran trascendencia en la estructuración y sistematización platónico-euclídea de la Geometría griega" (González, 2008, p.103)*

P1: *Otra razón es para observar la diferencia entre la diferencia entre distancia y trayectoria, relacionándolo con la física (relación con Física)*
FP1: *Bueno quizás después encontremos más. ¿Cómo partimos?*
FP2: *Con el contexto histórico.*
P1: *¿Con el recíproco?*
FP2: *No… con el Teorema. Directamente, contextualicemos en paredes perpendiculares. A partir de la perpendicularidad, podrían construir triángulos rectángulos, para que posteriormente, a partir del recíproco, ciertas ternas nos aseguren que las paredes están derechas. El recíproco podría ser parte del cierre de la clase*
FP1: *¿Y pretendes que los chicos descubran las ternas?*
P1: *Claro… es la idea*
FP1: *Imposible… demósle una, el 3-4-5 en el inicio, por lo menos, sino, estaremos toda la clase con el tanteo*.
FP2: *es que no sería tanteo, sería trabajo con material concreto, composición de figuras.*
FP1: *¿Y cómo harías eso?*
FP2: *¡No sé!*
P1: *Busquemos material*
1.c Tercera reunión
PF2*: No sé cómo hacer que los estudiantes construyan triángulos rectángulos (explica en contexto)*
P2: *Tráeme lana, lo haremos como los egipcios. Yo creo que no sería problema que los estudiantes descubran las ternas. Si no lo hacen, ahí vemos que pasa*.
P1: *Yo haría cuerdas con cuentas (pedazos de madera o plástico para separar cuerdas), Yo las hago*
Posteriormente, fue bastante complejo el trabajo con el material. Los espacios entre las cuerdas no eran congruentes y con el pegamento era compleja su movilidad en las cuentas. Costó encontrar material adecuado para poder realizar la actividad. Finalmente se utilizaron palillos y pelotas para poder realizar la actividad.
En este episodio podemos observar que los profesores y los formadores de profesores no tienen una respuesta automática ante la pregunta ¿por qué enseñamos el Teorema de Pitágoras? (KTM) Por otro lado, se observa que uno de los FP no considera posible que los estudiantes logren encontrar las Ternas Pitagóricas (KFLM), sin embargo, para los otros docentes era imprescindible (KPM). Una vez que se pusieron de acuerdo en la construcción de triángulos para encontrar las ternas no fue posible conseguir material didáctico de segmentos separados por una misma distancia.
Episodio 2:
Durante la reflexión en la práctica, se lleva a cabo la construcción planificada en el episodio 1.

El curso se organiza en grupos de 3 o 4 estudiantes, se entrega, por grupo, un envase que contiene palillos y pelotitas con perforaciones, que permite el encaje con los palillos. Previo al diálogo que continua, la FP2 muestra la representación de un cuadrado utilizando el recurso entregado.

PF2: *¿Ustedes creen que podrían armar un triángulo rectángulo con este material?*
Grupo curso: ¡*Síiiii!*
PF2: *Manos a la obra.*
(A los 4 minutos)
E1: *Aquí está armado uno, tiene lados 3 palitos, 4 palitos y 5 palitos*
PF2: *Muy bien. ¿y has armado otro?*
P2: *Sí, es más se ha dado cuenta de algo.*
E1: *Sí, armé otro que es 6-8 y 10. Son los dobles de las medidas anteriores. Yo creo que, si les saco el triple, igual se arma*.
P2: *Yo quiero que lo pruebe*
E2: *Yo creo que dé más da…*

Posteriormente se validan, en forma colectiva, las distintas construcciones, comentando el episodio anteriormente nombrado

E3: *A mí me dio lo mismo, entonces hay muchas ternas para armar triángulos.*
FP2: *¿podrías representar una que no hayamos realizado?*
E3: *No… para qué, si con la multiplicación del 3, 4 y 5 ya estamos listos.*
FP2: *¿Y eso cómo lo puedes asegurar?*
E3: *porque es una regularidad…*
Varios estudiantes: *Claro, es más que seguro que da*
E4: *¿Guardamos el material entonces?*

En este episodio podemos observar, que, a los cuatro minutos, varios grupos de estudiantes ya habían encontrado la terna 3-4-5 (KPM) por otro lado, la regularidad algebraica fue para ellos tan convincente como el material concreto.

Conclusiones

Antes de conocer al Profesor 1 (P1) ninguno de los otros tres participantes del estudio se había cuestionado sobre cómo enseñar el Teorema de Pitágoras a un grupo de estudiantes de 13 años. Fue interesante observar que, desde nuestras distintas experiencias y formaciones, a pesar que formamos profesores (FP1 y FP2) y coordinamos grupos de profesores (P2), no teníamos una respuesta ante la pregunta ¿Por qué debemos enseñar el Teorema de Pitágoras? Hemos observado que este desconocimiento, es un lugar común, porque hemos preguntado en congresos, reuniones docentes y situaciones informales, y los profesores de matemática tienden a responder que el Teorema se enseña sólo para comprobar perpendicularidades o diferenciar distancias de trayectorias.

A raíz de lo anterior, nos parece necesario que en la formación docente se considere la pregunta ¿Por qué enseñar cierto contenido? (KPM) Gracias a este estudio, ahora podemos formar profesores que sí se realicen esta pregunta y planifiquen clases considerando aquellos porqués como objetivos. Podemos destacar la importancia que universidad y escuela hagan un trabajo conjunto de desarrollo bidireccional, donde el docente de escuela tenga experiencias de investigación como un par, no sólo como un objeto de investigación y que el formador de profesores comprenda los problemas de enseñanza a los que serán enfrentados los futuros profesores que forma.

Por otro lado, observamos que hay pocos recursos de enseñanza para trabajar el Teorema de Pitágoras. Dado que es un contenido que curricularmente (KMLS, KPM, KMLS) está en la frontera de la enseñanza primaria con la secundaria, en los libros para profesores, de primaria o secundaria, si se llega a mencionar, es bastante superfluo, por lo tanto, es indispensable revertir la situación, con actividades como las mencionadas en esta comunicación.

A pesar que uno de nosotros (PF1) se resistía a que los estudiantes encontraran las ternas por sí mismos, gratamente pudimos observar que los estudiantes, a pesar de estar en una clase de matemática a las cinco de la tarde, trabajaron concentrados y entusiastas. A los cuatro minutos ya tenían la terna 3-4-5 y gracias a un pensamiento algebraico, rápidamente lograron obtener más ternas. En variadas ocasiones tendemos a subestimar a los estudiantes, es necesario que comencemos a revertir nuestras prácticas. Sin embargo, es complejo revertirlas sin en el mercado no hay material didáctico de apoyo (KTM) ni en los libros de textos o directrices curriculares actividades para los docentes. Por ello, mientras las editoriales avanzan, es indispensable que la formación de profesores se haga cargo del conocimiento profesional de los docentes con investigaciones como esta.

Bibliografía

Adler, J., Ball, D., Krainer, K, Lin F.L., y Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 359-381.

Barreto, J. (2009). Otras deducciones o extensiones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas 70*, 35-51.

Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, M. Montes (2014), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas,* el MTSK. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva

Darling-Hammond, L., & Bransford, J. (2005). *Preparing Teachers for a changing world. What teachers should learn and be able to do.* San Francisco: Jossey Bass.

English, L. D., & Kirshner, D. (2016). Changing agendas in international research in mathematics education. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (Third, pp. 3–18). New York: Routledge.

Flores, E., Escudero, D. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepay N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275- 282). Bilbao, España: SEIEM.

González, P. *(2008). Un* teorema llamado de Pitágoras*. Sigma Revista de Matemáticas, 32(*8*), 103-130.*

González-Lloret, M. (2012). *Investigación acción (II): la investigación cuantitativa.* Recuperado el 24 de enero de 2017, de: http://cvc.cervantes.es/aula/didactired/anteriores/diciembre_12/17122012. html

Killion, J. &Todnem, G. (1991) A process for personal theory building. *Educational Leadership, 48* (6), pp. 14-16.

Montes, M. A., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. In *Proceedings of the CERME* (Vol. 8).

Schön, D. A. (1992). *La Formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Barcelona: Paidós.

Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relation between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *58(3*), 393–413.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.

Varas, M. L., Cubillos, L. F., & Jiménez, D. (2009). Análisis de la calidad de clases de matemática: teorema de Pitágoras y razonamiento. *Chile, Ministerio de Educación, Departamento de Estudios y Desarrollo (Ed.), Selección de investigaciones primer concurso FONIDE: evidencias para políticas públicas en educación*, 123-153.

Zeichner K (2010) Rethinking the connections between campus courses and field experiences in college- and university-based teacher education. *J. TeacherEduc. 61:* 89-99.



Álgebra y Pensamiento Algebraico. Una experiencia de reconceptualización

Leslie Mariel **Torres** Burgos
Facultad de Matemática, Universidad Autónoma de Yucatán
México
leslie.torres@correo.uady.mx
Karla Margarita Gómez Osalde
Facultad de Matemática, Universidad Autónoma de Yucatán
México
karla.gomez@correo.uady.mx

Resumen

El aspecto central de la discusión en el taller será una propuesta didáctica del álgebra en donde la matemática constituye un medio; es decir, se mira una matemática centrada en el desarrollo de formas de pensamiento, específicamente, que favorezca el pensamiento algebraico. Esto con el propósito de promover un conocimiento algebraico que de sentido y significado a los pensamientos y acciones ante la resolución de cierto tipo de problemas matemáticos. Para ello se recurrirá al diálogo reflexivo respecto a los alcances y limitaciones didácticas de una propuesta centrada en favorecer experiencias de aprendizaje, como guía para desarrollar el pensamiento algebraico en jóvenes de bachillerato.

Palabras clave: propuesta didáctica, pensamiento algebraico, álgebra escolar.

Introducción

En Aparicio, Sosa y Gómez, 2016 se menciona que, en la actualidad, para hablar del aprendizaje de las matemáticas se debe tomar en consideración que los estudiantes aprenden o no a partir de una confrontación de realidades. Por un lado, se vive una realidad social permeada de exigencias del dominio de herramientas matemáticas para el desarrollo de la ciudadanía plena, donde el aprendizaje debe ir más allá de los rudimentos aritméticos inflexibles que son base de los currículos escolares (Callejo et al., 2010). Esta realidad social, destaca la función de cada persona como ciudadano en sociedad, por lo que en un enfoque por competencias el énfasis recaerá en las herramientas necesarias para que un ciudadano se desenvuelva fuera de la escuela, es decir, que pueda emplear la matemática en su realidad y generar nuevo conocimiento dentro del ámbito donde se desarrolle.

Por otro lado, también se vive una realidad educativa que responde a necesidades curriculares específicas en función de un discurso Matemático Escolar, el cual, debido a la naturaleza que lo constituye, provoca diversas problemáticas relacionadas con el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Cordero, Gómez, Silva y Soto, 2015). Este discurso, se rige por un paradigma inflexible y abstracto que se centra en formas de razonamiento a partir de algoritmos sin contextos ni experiencias asociadas a su conceptualización. De alguna manera, esta realidad educativa se encuentra deshumanizada y concretizada en aspectos científicos sin considerar la construcción social del conocimiento matemático. Un individuo construye saberes matemáticos propios a partir del uso de su conocimiento en situaciones que exigen de un pensamiento matemático asociado a la especificidad de las prácticas que conforman su quehacer como parte de la comunidad. (Aparicio, Sosa y Gómez, 2016)

Ante estas dos realidades, se puede afirmar que el álgebra en la escuela vive una realidad escolar; es decir, está alejada de la realidad social, por lo que esta matemática no tiene un uso y sentido social, se queda limitada a operaciones, símbolos, algoritmos, que responden a situaciones de la misma matemática, pero que difícilmente se pueden extrapolar a situaciones reales en las que la matemática adquiere sentido y significado. De esta forma, la investigación en Matemática Educativa señala que el estudio del álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante, de las situaciones numéricas más concretas a la búsqueda de generalidades para representar y comprender relaciones cuantitativas entre cantidades variantes e invariantes (Kieran y Filoy, 1989), constituyendo así una herramienta matemática que permite comprender, estudiar y modelar diferentes sucesos que se presentan en el mundo.

Ante esta realidad del álgebra escolar, surge la necesidad de generar nuevas propuestas didácticas que promuevan un aprendizaje funcional y con sentido social de los saberes propios de la disciplina, de manera que más allá de la centración en objetos matemáticos, se promueva el desarrollo de una forma algebraica de pensar; esto implica un cambio de mirada respecto a la matemática, de ser un fin; es decir, aprender matemáticas como base de nuevo conocimiento matemático, a entenderla como medio; esto es, aprender matemáticas como herramienta que permite responder y tomar decisiones en diversas situaciones.

De esta forma, en el taller se presenta una propuesta didáctica del álgebra para su conceptualización como una forma de pensamiento matemático; dicha propuesta se compone de experiencias de aprendizaje por medio de las cuales el estudiante conceptualiza el álgebra escolar, al tiempo que desarrolla su pensamiento algebraico y reconoce el sentido social de dicho saber.

Fundamentación Teórica-Metodológica

Como se discute en el apartado anterior, en el taller se pretende reflexionar sobre una propuesta didáctica del álgebra centrada en promover el desarrollo del pensamiento algebraico; dicha propuesta atiende a la necesidad de referentes didácticos que favorezcan un álgebra funcional con sentido social, debido a que se ha reportado que las costumbres didácticas del profesor y la difusión escolar de las matemáticas en la escuela, han sido en las últimas décadas, regidas por una lógica axiomática deductiva de la disciplina, aun cuando el aprendizaje matemático requiere de experiencias y aprehensiones conceptuales, procedimentales y estructurales, inherentes a todo saber matemático (Aparicio y Sosa, 2017). Esto se identifica por ejemplo, en la transición de los jóvenes estudiantes de la aritmética al álgebra; puesto que el

tránsito entre ambas áreas de la matemática provoca rupturas cognitivas, de manera que lo útil y funcional en la aritmética no necesariamente se extrapola al álgebra; por lo que esa visión lógica axiomática deductiva de la matemática, será un obstáculo para el desarrollo de una nueva forma de pensar; debido a que concebir a la matemática de esa manera opaca su significado y sentido social, es decir, promueve una matemática propia de la escuela, en la que el aspecto conceptual de cada conocimiento matemático es minimizado respecto a lo procedimental, lo cual no favorece su uso fuera del escenario escolar. Ante esto, diversas investigaciones como Demonty, Vlassis y Fagnant (2018), Radford (2012), proponen el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas; es decir, identificar y desarrollar en los estudiantes aquellas actividades propias de una forma de pensar algebraica, de manera que el álgebra tenga sentido más allá de situaciones del contexto escolar.

Así, el significado usualmente asociado al Álgebra escolar como generalización "conceptual y operativa" de la aritmética; en el que poco se reconoce la importancia de las filiaciones y rupturas cognitivas y en general, epistémicas de los saberes algebraicos y el pensamiento asociado, requiere repensarse. Este enfoque clásico de enseñanza, otorgado a los saberes algebraicos, obstaculiza su sentido, entendimiento y uso como herramientas matemáticas para generalizar, modelar o trabajar con estructuras algebraicas. En ese sentido, no se favorecen los procesos cognitivos que permiten desarrollar el pensamiento algebraico tales como el pensamiento relacional, el sentido estructural, la generalización, simbolización, entre otros.

Demonty, Vlassis y Fagnant (2018), Kaput & Blanton (2001), entre otros autores, proponen que los estudiantes deben enfrentarse a situaciones, que promuevan la búsqueda de regularidades, generalizaciones, justificaciones, reconocimiento de variaciones y formalizaciones para el desarrollo de un pensamiento algebraico. Otras investigaciones, (Kaput, 2000; Vega-Castro, Molina, & Castro, 2012; Velásquez, 2014; Molina; 2007) han concluido que, para desarrollar este tipo de pensamiento matemático, es necesario enriquecer la actividad algebraica a partir de promover diversos procesos cognitivos en los estudiantes. De manera que se favorezca una concepción del álgebra que englobe la verbalización, la simbolización, el sentido estructural, el pensamiento relacional, la representación, la modelación, la generalización y la abstracción.

Para lo anterior, la propuesta didáctica del álgebra que se realiza se enmarca en la concepción sobre la conceptualización matemática de Aparicio, Sosa y Gómez (2016):

"Consiste en la posibilidad de reconocer, enunciar y usar un objeto matemático más allá del escenario en el que originalmente fue presentado/tratado. Conceptualizar entonces está asociado al tipo de experiencias que las personas puedan entablar con un mismo objeto matemático en más de una forma o registro de representación semiótica".

De tal forma que la conceptualización del álgebra, no debe reducirse a la memorización de definiciones y propiedades o a entender los conceptos como definiciones, sino que, debe favorecerse su construcción desde las tres dimensiones que los conforman (*lo conceptual, lo procedimental y lo estructural*) permitiendo la adherencia a un objeto matemático aun cuando éste sea de naturaleza abstracta.

Los significados de los conocimientos matemáticos son parte del concepto matemático y depende de las formas en las que se utilizan o emplean. Enfatizan sobre la relación del saber qué y el saber cómo, durante su conceptualización. Sin embargo, Aparicio, Sosa y Gómez (2016) reconocen que todo conocimiento matemático es parte de una estructura matemática más amplia

en la que los conocimientos se relacionan por medio de significados y usos. Con ello, la conceptualización matemática propicia una adherencia al objeto matemático desde sus significados, procedimientos y estructuras (Gutierrez, 2017).

En este sentido, la propuesta didáctica del álgebra desarrollada, se compone de Diseños de Experiencias de Aprendizaje (DEA), puesto que asume que el aprendizaje es resultado de experiencias de los individuos que aprenden. Este constructo considera al saber desde su naturaleza epistémica (*lo conceptual, operacional y estructural*), es decir, la complejidad de su construcción, así como su naturaleza didáctica (Aparicio y Sosa, 2013) por lo que se consideran un escenario propicio para la construcción de conocimiento matemático, al incorporar también aspectos propios del individuo, como su cognición.

Así, un DEA que favorezca el pensamiento algebraico, parte de la interpretación de la funcionalidad y el sentido social de los saberes matemáticos algebraicos y a partir de ello se generan argumentos, explicaciones e interpretaciones, mismos que permiten procesos de generalización, simbolización y modelación, característicos en álgebra. De modo que las caracterizaciones, definiciones y ejemplos ahora complementan la estructura conceptual y procedimental de los saberes puestos en juego.

Método

En el estado de Yucatán, México, se ha llevado a cabo un programa de acompañamiento docente con profesores de nivel medio superior (bachillerato) cuyo objetivo se centra en favorecer el desarrollo de formas de pensamiento matemático en los estudiantes. Para ello y como medio de diálogo entre el profesor, estudiante y saber, se ha elaborado e implementado, particularmente para la asignatura de álgebra, una propuesta didáctica compuesta de experiencias de aprendizaje que busca promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

La metodología desarrollada para el diseño de esta propuesta didáctica, se basa en la propuesta por Aparicio y Sosa, 2013 para la conceptualización de saberes matemáticos en educación básica. Se describen los momentos seguidos para su desarrollo:

Momento 1. Establecimiento de la Relación Sistemica (RS). Esta primera etapa consiste en identificar el Aprendizaje Esperado (A.E.), el Saber específico y determinar una posible relación en forma sistémica (integral) con los procesos que favorecen el pensamiento algebraico.

Momento 2. Problematización del Saber Matemático (PSM). Esta etapa consiste en reconocer la naturaleza epistémica y didáctica del saber matemático, es decir plantearse y responder preguntas de índole:

- Epistemológica: relativa a los procesos de construcción de conocimiento matemático;
- Cognitiva: relativa a procesos y representaciones mentales de las personas;
- Didáctica: relativa a las formas de organización y difusión escolar de los saberes.

Etapa 3. Trabajo de Ingeniería Didáctica y elaboración de diseños. En esta tercera etapa se desarrolla un trabajo de ingeniería didáctica con el que esencialmente debe determinarse un conjunto de análisis sobre el aprendizaje matemático a obtenerse como producto del plan de acción.

Con base en lo anterior se realiza el diseño de las tareas de aprendizaje, las cuales se

elaboran siguiendo las fases de la teoría de situaciones didácticas. Esto es, una tarea para la acción, una para la formulación y una de validación, juntas integran un diseño didáctico para el aprendizaje.

En la imagen 1 se muestra un esquema para la elaboración de DEA's:

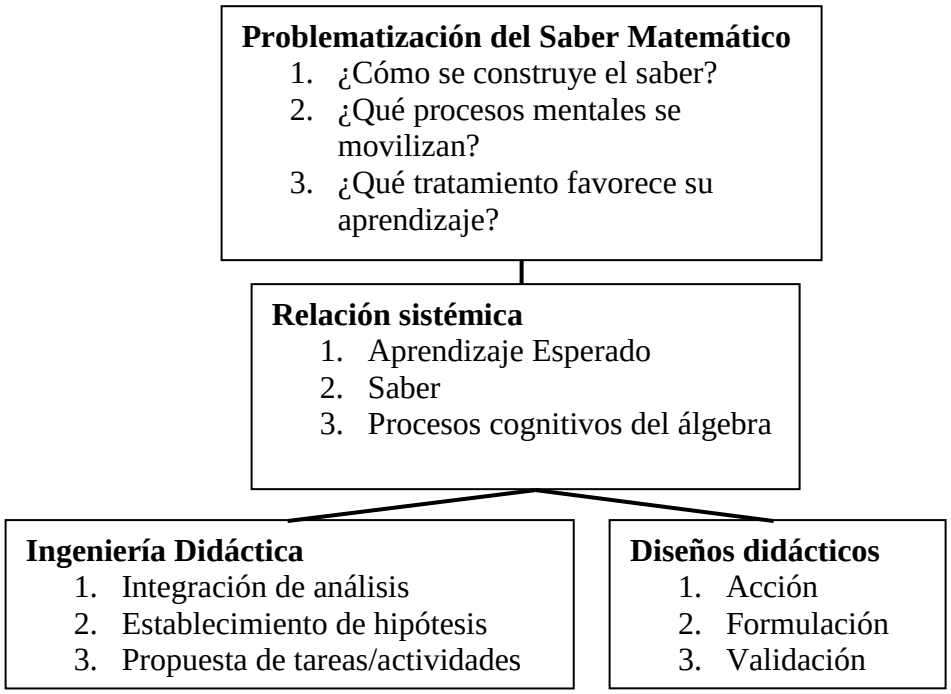


Imagen 1: Esquema de articulación didáctica para la elaboración de DEA's, (Aparicio y Sosa, 2013)

Particularmente, la propuesta didáctica para la conceptualización del álgebra como una forma de pensamiento algebraico, se puede analizar en el libro Álgebra y Pensamiento Algebraico (Aparicio, Sosa y Gómez, 2016). La cual se organiza en tres bloques principales, lenguaje algebraico, operaciones algebraicas fundamentales y modelación con ecuaciones lineales y cuadráticas. En cada uno de los diseños de experiencias de aprendizaje, se presentan situaciones cotidianas en las que se hace uso del saber algebraico en desarrollo, de manera que se mire su sentido social a la par que se construye el conocimiento.

Con base en lo anterior, se propone desarrollar el taller en dos momentos o etapas, de manera que se discuta y reflexione respecto al álgebra escolar y al pensamiento algebraico, desde la práctica docente; para posteriormente presentar una propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico; de manera que se propondrá una visión general de lo que significa desarrollar una forma didáctica de pensar y practicar el álgebra en situación escolar.

Las estrategias a considerar en cada uno de los momentos en los que se divide el taller, se describen en la Tabla I siguiente:

Tabla I

Momentos del taller.

Momento	Estrategias
1. Álgebra escolar y Pensamiento algebraico	Discusión sobre las problemáticas asociadas a procesos de enseñanza aprendizaje del álgebra escolar, a partir de ejemplos específicos.
2. Propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento algebraico.	Reconocimiento de los elementos considerados en algunos Diseños de Experiencias de Aprendizaje (DEA).

Los DEA que se analizarán durante el taller forman parte del libro Álgebra y Pensamiento Algebraico (Aparicio, Sosa y Gómez, 2016).

Conclusiones

La experiencia desarrollada en un programa de acompañamiento docente con profesores de nivel medio superior en el estado de Yucatán, respecto a la implementación de los DEA, ha puesto de manifiesto cierto grado de modificación en la organización de las prácticas en las aulas, percibiéndose mayor interés, participación y disposición por parte de los estudiantes hacia el estudio, mediante la realización de actividades centradas en su aprendizaje y en una visión funcional de los saberes matemáticos.

Se ha evidenciado que la conceptualización de la noción de variable es fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico y la posterior conceptualización de otros saberes propios del álgebra escolar.

De igual forma, se evidenció la necesidad de conceptualizar la propuesta didáctica generada con los docentes; es decir, es necesario que el docente viva experiencias de reconceptualización tanto matemática como didáctica de manera que se desarrollen elementos en esas dos direcciones, puesto que el entender el álgebra como una forma de pensamiento provoca que los estudiantes desarrollen nuevos argumentos, razonamientos y explicaciones, que generan una respuesta no única en las actividades.

En ese sentido, se espera que los participantes al taller profundicen y amplíen su visión del álgebra, reconociendo dos perspectivas didácticas distintas para su enseñanza aprendizaje; es decir, que se reconozca que el álgebra, no es una combinación de símbolos, letras y números, o una forma general de la aritmética o únicamente un lenguaje de las matemáticas; porque si bien el álgebra es todo lo anterior, el énfasis de esta área de las matemáticas se encuentra en una forma de establecer relaciones entre magnitudes variables. Es decir, el reconocimiento de elementos variantes y constantes y la generación de relaciones matemáticas es fundamental para el desarrollo de un pensamiento algebraico.

De igual forma con el estudio del concepto ecuación, se espera que se reconozca la relación entre la modelación matemática elemental y el pensamiento algebraico ante el análisis y resolución de situaciones que demandan del uso de la variable.

Finalmente, se espera socializar una propuesta de tratamiento didáctico del álgebra escolar en bachillerato, discutida y reflexionada con profesores del estado de Yucatán, México; y con base en ello, señalar alcances y limitaciones de dicha propuesta.

Referencias y bibliografía

Aparicio, E., Sosa, L., Torres, L. y Gómez, K. (2018). *Reconceptualización del saber matemático en educación básica.* Mérida, Yucatán, México.

Aparicio, E. y Sosa, L. (2017). Profesionalización docente en matemáticas. Reflexiones desde una forma de pensar didácticamente. Artículo presentado en el 1er Congreso Internacional de Investigación Educativa y Formación Docente. Guerrero, México.

Aparicio, E., Sosa, L. y Gómez, M. (2016). Álgebra y Pensamiento Algebraico. Experiencias de aprendizaje en bachillerato. Mérida, Yucatán: Ediciones de la Universidad Autónoma de Yucatán. (no publicado)

Aparicio, E., Sosa, L. y Gómez, K. (2016). Lo matemático como argumentación en el aprendizaje Escolar. Una reflexión desde la investigación para la Educación. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa. 1(1).* 427-435.

Aparicio, E. y Sosa, L. (2013). Contenidos matemáticos en secundaria. Una propuesta para su tratamiento escolar. En Sosa, L., Hernández, J. y Aparicio, E. (Eds.). *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 154 - 159). México: Red Cimates.

Callejo, M., Goñi, J., Alsina, C., Civil, M., Giménez, J., Gómez-Chacón, I.., Venegas, Y. (2010). Educación matemática y ciudadanía. Barcelona, España: Graó.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci y Soto, D. (2015) El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad. Barcelona, España: Editorial Gedisa.

Demonty, I. Vlassis, J. y Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Springer.*

Gutiérrez, A. (2017). Hacia una epistemología para la conceptualización escolar del método de L'hospital a partir de un enfoque geométrico-variacional. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Matemáticas. Mérida, México.

Kaput J. J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. En: National Research Council (ed.) The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a National Symposium. National Academy Press, Washington, DC.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Tasks Structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), The Future of the Teaching and Learning of Algebra (Proceedings of the 12th ICMI Study, Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne: University of Melbourne.

Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. PNA, 6(4), 117-133.

Vega-Castro, D, Molina, M, & Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(2), 233-258.

Velásquez, E. (2014). Unidad didáctica para el proceso de generalización y solución de ecuaciones, utilizando métodos informales, como apoyo para el sexto grado. Tesis de Maestría no publicada., Universidad Nacional de Colombia.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desenvolvimento profissional do professor de matemática: reflexões sobre currículo e competências

Nielce Meneguelo **Lobo da Costa**
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN
Brasil
nielce.lobo@gmail.com
Rosangela de Souza Jorge **Ando**
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN
Brasil
rosangela.ando@gmail.com

Resumo

Este artigo refere-se a uma pesquisa de doutoramento empreendida em um processo de formação continuada sobre avaliação, com foco em funções, cujo objetivo foi identificar características para impulsionar o desenvolvimento profissional docente. O aporte teórico quanto à formação e desenvolvimento profissional veio de Ponte e Thurler. A metodologia foi do tipo co-generativa, segundo Greenwood e Levin. A coleta de dados foi por questionário, observações, gravações audiovisuais e recolha de materiais produzidos/adaptados pelos oito professores de Matemática do Ensino Médio participantes do estudo. A análise foi interpretativa e pelo método de análise de vídeo por eventos críticos dos períodos evolutivos do grupo. O artigo foca um episódio do Período Preparatório. As reflexões compartilhadas permitiram rever e recontextualizar os conceitos de currículo e competências. As trocas de ideias foram frutíferas e evidenciaram a relevância das parcerias universidade-escola, na qual cada elemento contribui de forma distinta de modo que a co-aprendizagem ocorra.

Palavras chave: Formação de professores, Ensino de funções, Avaliação educacional, Avaliação da aprendizagem

Introdução

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutoramento, na linha de formação docente. Nela partimos do pressuposto que um processo de formação continuada – no qual se discuta a avaliação, as questões curriculares nela envolvidas e as competências a se desenvolver nos alunos, promovendo reflexões sobre a prática pedagógica – é um contexto significativo para o compartilhamento de ideias entre professores de Matemática. Esse contexto significativo é o que impulsiona a ampliação do conhecimento profissional e, em última análise, auxilia o desenvolvimento profissional docente.

A investigação que subsidia este artigo se propôs a responder à questão de pesquisa: Quais

são as contribuições da participação em um processo de formação continuada sobre avaliação (questões que versaram sobre o conteúdo de funções) para o desenvolvimento profissional docente? Assim sendo, teve como objetivo geral: Identificar como a participação de professores de Matemática em um processo de formação continuada sobre avaliação, auxilia a impulsionar o desenvolvimento profissional. Para tanto, analisou um grupo de professores de Matemática atuantes no Ensino Médio que se reuniram com duas pesquisadoras da Universidade semanalmente, por um ano, para estudar processos avaliativos que envolvem funções, em uma escola pública estadual da cidade de São Paulo.

A pesquisa se inseriu em um projeto maior, intitulado "Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica", nº.19366/2012, do Programa Observatório da Educação da CAPES.

A seguir discorremos sobre a fundamentação teórica que embasa este artigo.

Fundamentação Teórica

A fundamentação teórica para este recorte baseia-se nos estudos de Ponte e de Thurler (2002) quanto ao Desenvolvimento Profissional Docente (DPD) e de Murphy & Lick, além de Gimenez & Penteado quanto aos processos formativos que envolvem grupos.

Segundo Ponte (1997), o professor deve ser o protagonista da sua formação continuada, por decidir o que quer fazer e do que pretende participar. Para o autor, faz parte do DPD a gestão das práticas letivas e não letivas, assim como das questões educacionais mais amplas com as quais o professor deve lidar ao longo da carreira. Ponte (1998) enfatiza o favorecimento do DPD a partir de contextos colaborativos nas escolas, por propiciar interações com seus parceiros, a troca de experiências e o apoio dos gestores.

O autor elenca vários aspectos fundamentais para o DPD, enfatizando que ele "torna os professores mais aptos a conduzir um ensino de Matemática adaptado às necessidades e interesses de cada aluno e a contribuir para melhorar as instituições educativas, realizando-se pessoal e profissionalmente".(p.32) Ele é entendido como uma evolução docente, que se inicia na formação inicial do professor e continua ao longo da vida profissional e que envolve desenvolvimento pessoal, profissionalização e socialização docente.

A pesquisadora suíça Thurler (2002) investigou processos formativos docentes promovidos por políticas públicas, especialmente as atreladas a mudanças curriculares e implementações de reformas educacionais diversas. Ela inventariou as modalidades possíveis em formações continuadas – entendidas na perspectiva da aprendizagem ao longo da vida – para impulsionar o DPD. São elas: 1) Sensibilização para os objetivos educacionais e desafios das reformas; 2) Desenvolvimento de competências didáticas e pedagógicas; 3) Exploração Colaborativa; 4) Cooperação contínua em uma organização aprendiz.

Os estudos de Thurler (2002) sobre DPD apontam modalidades que subsidiaram as análises desta pesquisa, no entanto, este recorte foi subsidiado pela modalidade 4- Cooperação contínua em uma organização aprendiz, a qual indica que nas implementações de mudanças curriculares é fundamental para os professores formações, que devem ser feitas em seus horários de trabalho, ou períodos de trabalho coletivo. A cooperação pode contribuir para impulsionar o desenvolvimento profissional.

Murphy & Lick (1998), que pesquisaram grupos de estudos, enfatizam que eles podem ser propícios ao crescimento pessoal e profissional, possibilitando o aprendizado, o

compartilhamento de ideias e opiniões, a ajuda mútua, a participação efetiva nas questões próprias ao grupo, entre outras; trazendo resultados positivos para prática pedagógica e impulsionando o desenvolvimento profissional. Entretanto, esses autores alertam para que os participantes dos grupos tenham metas e objetivos em comum necessários para que ocorra um trabalho de cooperação e participação autêntica.

Já Gimenes & Penteado (2008) indicam outros dois aspectos proporcionado pelos estudos em grupos de professores: a possibilidade de o docente pensar como as práticas pedagógicas são realizadas e a oportunidade para discutir, refletir e partilhar com seus pares problemas vivenciados no cotidiano escolar.

Isto nos conduziu a pressupor que estudos conjuntos de um grupo de professores da Educação Básica e de pesquisadores da Universidade constitui-se em um tipo de processo formativo propício a impulsionar o desenvolvimento profissional dos participantes.

Concluindo, o DPD é entendido neste texto como sendo um processo evolutivo do docente que envolve aprendizagem ao longo de toda a sua vida profissional. Trata-se de um desenvolvimento global do indivíduo nos aspectos cognitivos, atitudinais e relacionais ligados à docência, à gestão da carreira e à instrução propriamente dita. O conhecimento profissional, objeto da próxima seção, faz parte do DPD, assim como o desenvolvimento pessoal e identitário.

Na próxima seção descrevemos a metodologia da pesquisa.

Metodologia da Pesquisa

A pesquisa caracterizou-se como qualitativa do tipo investigação – ação, de caráter co-generativo, segundo Greenwood & Levin (2000), os quais consideram que a investigação-ação se dá através da colaboração entre pesquisadores e pesquisados de modo que as duas partes aprendam e gerem conhecimentos em contexto. No caso, foi envolvido um grupo que empreendeu estudos e, a partir desses, desenvolveu ações pedagógicas ligadas à avaliação da aprendizagem seguidas de reflexões que conduziram à construção de significados práticos. A pesquisa esteve centrada no contexto de atuação dos envolvidos, procurando resolver, em contexto, aspectos da prática pedagógica ligados à avaliação da aprendizagem.

A pesquisa foi desenvolvida em duas etapas: documental e de campo. A documental envolveu estudos sobre Processos Avaliativos; análise das macro avaliações, tais como Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA e o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, a identificação das características de cada sistema; análise das Orientações curriculares nacionais; estudos sobre o ensino de funções no Ensino Médio; análise de resultados de pesquisas em Educação Matemática envolvendo avaliação, funções e seu ensino.

A pesquisa em campo foi desenvolvida com um grupo formado de oito professores, que lecionavam no Ensino Médio, de escolas públicas estaduais na capital de São Paulo e duas pesquisadoras da Universidade. O ponto central dos estudos foi processos avaliativos educacionais e neles, particularmente o de funções. Os professores participantes foram identificados por pseudônimos de modo a garantir o anonimato. São eles: Alfenas, Barbacena, Botumirim, Olivedos, Paraty, Penedo, Simões, Votorantim.

A coleta de dados da fase em campo se deu por questionário, observações, gravações audiovisuais e recolha de materiais produzidos/adaptados pelos professores do grupo.

O grupo teve encontros semanais em uma escola estadual da região Norte da cidade de São

Paulo, durante um ano, totalizando 28 encontros de três horas de duração. Neste período, esses professores elaboraram uma avaliação diagnóstica, aplicaram aos alunos, corrigiram, tabularam e analisaram seu resultado. Paralelamente, empreenderam estudos sobre avaliação interna, externa (ENEM e PISA) e sobre modalidades de avaliação. Além disso, estudaram sobre ensino de funções na Educação Básica. Estes professores analisaram as provas do ENEM no período de 2009 a 2015, selecionando questões que envolviam o conteúdo de funções, resolvendo e classificando-as segundo a matriz do ENEM e segundo a classificação do PISA. Uma avaliação formativa foi elaborada por eles com uma seleção de tais questões e aplicadas aos seus alunos. Os erros apresentados pelos estudantes foram categorizados e cada professor fez uma intervenção em suas turmas, que foi posteriormente discutida no grande grupo.

A análise foi interpretativa, o que significa que visou a compreensão dos fenômenos a partir dos dados coletados, que foram analisados a partir do alicerce teórico, com significados atribuídos pelo pesquisador, levando em conta variáveis, tais como regras institucionais, valores pessoais e sociais (Hernández, et al., 2000). A análise dos encontros se estruturou em cinco períodos evolutivos do grupo, estabelecidos à posteriori, quais sejam: Período Preparatório; Período de Consolidação de Estudos sobre Avaliação e sobre Funções; Período Analítico; Período Prático e Período Conclusivo.

O Período Preparatório englobou os oito primeiros encontros e se caracterizou por ser o dos primeiros contatos com o tema, o início de estudos sobre o que é avaliação, matriz de referência e demais particularidades. Envolveu ainda a construção, aplicação e correção de uma avaliação diagnóstica sobre funções, com a utilização da experiência docente dos participantes, o período finalizou por estudos teóricos sobre as questões curriculares ligadas à avaliação e o tema currículo e competências.

Foi utilizado o método proposto por Powell, Francisco & Maher (2004) para análise dos vídeos e demais dados coletados, em cada período foram identificados eventos críticos. Os autores denominam eventos críticos à ocorrências significativas e relevantes, momentos nos quais se percebe que houve alguma desestabilização, mudança, ruptura, assimilação de novas informações. Por exemplo, pode ser um momento de aprendizado e de recontextualização ou ressignificação dos conhecimentos.

Na próxima seção descreveremos e analisaremos um dos eventos críticos, referente a estudos preparatórios e seu contributo para reflexões entre os participantes do grupo sobre currículo e competências.

Evento Crítico: - Descrição e Análise

No último encontro do que denominamos “Período preparatório” foi proposta a leitura e discussão de artigo de Mello (2012), intitulado “Competências como referência do currículo”, e a elaboração de um resumo para auxiliar as reflexões conjuntas sobre o texto. Nesse artigo o autor descreve a tendência de organização do currículo por competências nas propostas de reformas educacionais, que surgiram no Brasil, nas Américas, na Europa, na Ásia e na África nas últimas décadas. Essas competências são entendidas como organizadoras dos conteúdos curriculares e surgiram em resposta à crise da escola na segunda metade do século XX provocada pelo início da revolução tecnológica e pela heterogeneidade dos alunos, devido ao acesso à escola. Segundo o texto “As competências são introduzidas como um conjunto de operações mentais que são resultados a serem alcançados nos aspectos mais gerais do desenvolvimento do aluno”. (Mello, 2012, p. 9)

Na primeira parte da discussão, os professores Botumirim, Simões, Alfenas e Paraty apresentaram como um pequeno "resumo" do texto de Guiomar Namo de Mello, evidenciando o que entenderam e trazendo as dúvidas para discussão. A seguir, a professora Alfenas disse:

> A autora explica que o currículo por competências é adotado no Brasil, nas Américas, Europa, Ásia e África e essas competências são entendidas como organizadoras dos conteúdos curriculares que surgiram em resposta à crise da escola na segunda metade do século XX provocada pela incipiente revolução tecnológica e pela heterogeneidade das clientelas escolares. No texto, escreve que as competências é um conjunto de operações mentais que são resultados a serem alcançados nos aspectos mais gerais do desenvolvimento do aluno, ou seja, a generalidade e transversalidade e não relacionadas com nenhum conteúdo escolar específico, mas entendidas como necessárias para a construção de qualquer conhecimento. Assim a autora, define a competência como um conjunto de elementos que o sujeito pode mobilizar para resolver uma situação com êxito e mostra o significado das palavras elementos, mobilizar, situação e êxito para esclarecer a definição dada.

Em relação ao conceito de competência e de currículo por competência, Alfenas disse:

> A autora ressalta que a competência refere-se sempre a mobilização de recursos internos do sujeito. Escreve que do ponto de vista pedagógico as competências são importantes, pois mostram que os processos internos do aluno podem ser aprendidos e o currículo por competência se expressa, se manifesta, se valida pelas aprendizagens que propiciou e que o aluno coloca em ação de determinada maneira em determinada situação. Para a autora, o que valida o currículo são os processos que se constituíram no aluno e se expressam pela competência de saber, de saber fazer e de saber por que sabe. As competências como referência do currículo devem ser o objetivo de aprendizagem de todas as áreas ou disciplinas, por que são necessárias para aprender qualquer conteúdo curricular e se expressam em expectativas de aprendizagem, pois as competências valorizam os conteúdos curriculares e se articulam, mas o currículo é muito mais do que as competências por que inclui tudo aquilo que faz parte do processo de aprender e ensinar. A autora finaliza o texto falando que o conceito de currículo inclui um modelo curricular até as atividades desenvolvidas por professores e alunos em situações de aprendizagem em que se organizam conteúdos curriculares ordenados no tempo e no espaço escolar.

Na discussão no grande grupo, que se seguiu, foi apontado que no Brasil não temos um currículo nacional, apenas Diretrizes Curriculares Nacionais – DCN (Brasil, 2013) e os Parâmetros Curriculares Nacionais -PCN (Brasil, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática, 1998).[1]

No diálogo que se seguiu, o professor Simões expôs que não concorda com propostas de currículos nacionais ou mesmo estaduais. Para ele

> Cada escola, cada comunidade é singular e o currículo é plural... isso eu me baseei pelo próprio concurso que teve, esse último que a gente prestou... que era uma questão dessa que dizia que a escola é singular e ela tem que aplicar as metodologias conforme a necessidade, mas o currículo não diz isso, né? Na hora que chega a apostila não tem como você aplicar na escola... é uma outra realidade... A diferença do noturno pro diurno... você não consegue dar a apostila pro noturno, tem que ser diferenciada...

Observamos pelo excerto que o professor Simões acredita num currículo "vivo" e adaptado a cada classe, respeitando a realidade local. No caso, a apostila a qual ele se refere é o Caderno do Aluno (São Paulo, 2014).[2]

Para Simões

[1] Vale ressaltar que, na ocasião dos encontros do grupo, estava em elaboração uma Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2016)

[2] O Caderno do Aluno é um material didático de apoio disponibilizado pela Secretaria da Educação de São Paulo.

> As competências dos alunos devem ser avaliadas como uma generalização, transversalidade e uma aquisição do aluno sem nenhum conteúdo curricular específico... trabalhar com as competências possibilita resolver quaisquer problemas com as várias definições e mobilizar sua capacidade de raciocínio, no sentido de não... procurar saber a resposta correta do aluno, mas como ele chegou na resposta, dessa forma você consegue avaliar.

Notamos que o professor Simões não se limitou a fazer uma súmula do texto, mas acrescentou sua opinião. Isso permitiu que fosse extrapolado o estudo teórico, envolvendo reflexões sobre a docência.

No decorrer da discussão, surgiu uma dúvida sobre a diferença entre competência e habilidade. Os professores participantes deram exemplos sobre tal diferença, evidenciando que não tinham clareza sobre o que a literatura considera competência e o que se trata como habilidade. Por exemplo, o professor Penedo entendia que

> Considere andar de bicicleta, eu tenho competência para andar de bicicleta, mas não tenho nenhuma habilidade... eu não sei andar

O professor Paraty acrescentou

> Sem a habilidade você não tem a competência.

No diálogo as discussões teóricas foram avançando e promovendo reflexões sobre o currículo e as competências a desenvolver nos estudantes.

Na discussão sobre competências, os professores mostraram que tinham interesse em desfazer dúvidas sobre competência e habilidade, partilhando conhecimentos sobre este tema. (Gimenes & Penteado, 2008)

O professor Botumirim, contribuiu, acrescentando:

> Aqui, está um conjunto de operações mentais, ele [o aluno] está ali mentalmente envolvido... aí ele chegou ao resultado, então ele usou as competências dele.

Uma das pesquisadoras complementou: “Habilidades”.

O professor Botumirim questionou:

> Mas não é mental?

A pesquisadora auxiliou, dizendo:

> No texto você leu o que são operações mentais... as operações mentais estão envolvidas nas habilidades... por exemplo, ele está resolvendo o problema, você me disse que ele está ali escrevendo, anotando, apagando... então ele tem a habilidade de escrever, de apagar, escrever, uma série de habilidades que estão em jogo e que ele está mobilizando as habilidades fazem parte da competência

O professor Botumirim completou

> Então elas fazem parte da competência. Ele está usando as habilidades.

A professora Alfenas acrescentou:

> Aqui no texto ela define tudo isso... aqui: conjunto de elementos que o sujeito pode mobilizar para resolver uma situação com êxito... e ela fala “o que são elementos? São recurso do conhecimento que a gente tem”... e ela fala “ o que é mobilizar? Colocar em ação, esquemas em operação”, e depois “o que é situação?” porque todas essas palavras ela usou pra explicar o que é competência... ela fala “situação: atividade complexa ou como um problema e sua solução e a representação dessa solução é feita pelo sujeito” e depois o êxito “exercício adequado de um papel, função ou atividade, como realizar de maneira eficaz”... aqui logo na página 9 ela dá essa definição

A pesquisadora, continuou

> E ela termina "apesar das diferenças a competência refere-se sempre à mobilização dos recursos do sujeito".

A professora Barbacena acrescentou

> a competência ela [Mello] coloca ai [no texto] quando a pessoa é capaz de resolver determinado problema, ... porque o aluno pode até desenvolver um caminho mas não ser competente de chegar ao produto final, então ela não vai considerar ai uma competência... se ele não conseguiu, ele pode ter algumas habilidades, ter colocado em prática mas não foi o suficiente para resolver aquele assunto.

A professora Alfenas associou a discussão sobre competências e habilidades às atividades desenvolvidas nos encontros:

> Então a gente pode usar como exemplo, ensinamos função para os alunos... a atividade, analisando as provas, demos função para os alunos, o que aconteceu, a primeira [questão], a maioria fez, mas a outra, a aplicação era igual, mas tinha um contexto... ele não teve a competência, mas as habilidades eles tinham.

Uma das formadoras acrescentou que "essas habilidades não foram suficientes para que ele tivesse a competência de resolver... {} faltou habilidade". Nessa discussão percebemos que os professores construíram conhecimentos sobre competência e sobre habilidades, que compõem o conhecimento profissional docente para o ensino. Aqui notamos que o conhecimento profissional envolveu muitos domínios: o do currículo, o da instrução, e o da aprendizagem (Ponte, 1998), o que pode auxiliar o DPD dos envolvidos.

Vale ressaltar que esta formação ocorria na escola e, como Thurler (2002) afirma, as formações contínuas no *locus* escolar contribuem com atividades que impulsionam o desenvolvimento profissional no que ela caracteriza como "Cooperação contínua em uma organização aprendiz".

Notamos também que esta discussão oportunizou o compartilhamento de ideias e opiniões para chegar a um senso comum, auxiliando o desenvolvimento do senso de pertencimento de cada professor ao grupo, todos aprendendo em conjunto. (Murphy & Lick, 1998).

Conclusões

Concluímos, pela análise do encontro relatado, que as reflexões surgidas ao longo das discussões relativas ao texto permitiram aos envolvidos rever os conceitos de currículo e competências. As trocas de ideias foram frutíferas e evidenciaram a relevância de promover na escola oportunidades de discussão sobre aspectos teóricos, especialmente quando essas trocas ocorrem em grupos formados por parcerias universidade-escola, na qual cada elemento contribui de forma distinta de modo que a co-aprendizagem ocorra.

Ressaltamos que estudos conjuntos entre pesquisadores da Universidade e professores da Educação Básica têm estado cada vez mais presentes na Educação Matemática, produzindo resultados tanto no campo da Educação Continuada quanto na pesquisa acadêmica sobre processos formativos.

Ressaltamos que a análise empreendida se refere a uma pequena amostra de professores, sem ter a intenção de generalizar, no entanto acreditamos que estas formações continuadas empreendidas no *locus* escolar contribuam para impulsionar o desenvolvimento profissional docente.

Agradecimento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de

Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

Brasil. (1998). *Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2013). *Ministério da Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação.* Brasília: MEC.

Brasil. (2016). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Acesso em 19 de novembro de 2016, disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/BNCC-APRESENTACAO.pdf

Gimenes, J., & Penteado, M. G. (2008). Aprender Matemática em grupo de estudos: uma experiência com professoras das séries iniciais. *Zetetiké, 16*.

Greenwood, D. J., & Levin, M. (2000). Reconstructing the relationships between universities and society through action research. Em N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (2ª ed., pp. 85-106). Thousand Oaks, California: Sage Publications Inc.

Hernández, F., Sancho, J., Carbonell, J., Tort, A., Simó, N., & Sánchez-Cortês, E. (2000). *Aprendendo com as inovações nas escolas.* Artmed.

Mello, G. N. (2012). Competências como referência do currículo. *Revista da Avaliação*, 9-11.

Murphy, C., & Lick, D. (1998). *Whole faculty study groups: A powerful way to change schools and enhance learning.* Califórnia: Corwin.

Ponte, J. P. (1997). *O conhecimento profissional dos professores de matemática.* Lisboa: DEFCUL.

Ponte, J. P. (1998). Da Formação ao desenvolvimento profissional. *Actas do ProfMat 98*, pp. 27-44. Acesso em maio de 2015, disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm

Powell, A. B., Francisco, J., & Maher, C. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes. *BOLEMA Boletim de Educação Matemática, 17*, 81-140.

São Paulo. (2014). *(Estado) Secretaria da Educação. Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: caderno do professor; matemática, ensino médio, 1ª série* (Nova edição 2014-2017 ed., Vol. 1). (coordenação geral, Maria Inês Fini, Ed.) São Paulo: SE.

Thurler, M. G. (2002). O Desenvolvimento Profissional do Professor: Novos Paradigmas, Novas Práticas. Em P. Perrenoud, M. G. Thurler, L. Macedo, N. Machado, & C. D. Alessandrini, *As Competências para Ensinar no Século XXI* (C. Schilling, & F. Murad, Trads., pp. 89-111). Porto Alegre, Brasil: Artmed Editora.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O trabalho colaborativo na formação continuada de professores de Matemática: uma aproximação entre Universidade e Escola Básica

Marcos Antônio **Petrucci** de Assis
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Brasil
petrucci@ifpb.edu.br
Roger Ruben Huaman **Huanca**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
roger@uepb.edu.br

Resumo

A presente comunicação trata de uma pesquisa de cunho qualitativo, desenvolvida na cidade de Cajazeiras, situada na região Nordeste do Brasil. Teve por objetivo pôr em prática a aproximação entre a Universidade e a escola básica em busca de construir uma proposta de formação continuada que, partindo da voz dos professores de Matemática, contemplasse seus saberes experienciais para trazer para análise, discussão e posterior reflexão suas necessidades. Trabalhou-se o ensino da Geometria apoiado em uma metodologia de ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. A análise dos dados sugere que os discursos dos sujeitos foram balizados por suas necessidades e dificuldades na atualização dos conhecimentos para o ambiente de ensino. Os resultados obtidos evidenciaram o surgimento de um espaço de discussão e reflexão que respeitou o contexto dos professores, resgatando o seu protagonismo frente ao processo de formação como uma das etapas de seu desenvolvimento profissional.

Palavras chave: Formação continuada, Resolução de Problemas, Grupo de Estudos, Educação Matemática, Geometria.

Introdução

O século XXI traz uma complexidade para o cenário social que exige das pessoas que se (re)construam em termos de comportamento e ação para enfrentar os desafios da nova realidade que a quebra de barreiras geográficas proporcionada pela globalização trouxe. Podemos citar o aumento do números de alunos com acesso à escola, a adequação do currículo, diferentes nuances socioculturais e a crescente busca por melhoria na escolarização como fatores que

afetam diretamente a profissão docente.

A formação do professor não passa imune a estas mudanças e necessita ser repensada em suas modalidades inicial e continuada. Entendemos que associada a formação continuada está a necessidade de proporcionar um fortalecimento no conhecimento matemático para um ensino motivante, inspirador e que fomente o fazer matemática em sala de aula

O trabalho cooperativo/colaborativo se posiciona como um forte aliado para a construção de uma formação contínua que busque romper com o modelo positivista de treinamento do professor, em busca de uma abordagem que estimule o desenvolvimento profissional e o coloque com protagonista deste processo.

Formação Continuada: aproximando Universidade e Escola Básica

Não podemos negar que as mudanças nos contextos sociais e educacionais que alicerçam todo ato social tenham ação direta sobre a formação do professor, trazendo como consequências diretas a falta de delimitação clara do seu espaço de atuação e um aumento de exigência frente a diversidade das novas demandas.

Para Imbernón (2010), não vamos conseguir vencer essa situação se continuarmos a tratar a formação continuada como um conjunto de lições-modelo, de cursos padronizados ministrados por especialistas onde os professores são meros espectadores e consumidores de uma solução genérica, que desconsidera as especificidades da sala de aula.

Este autor destaca, também, que cometemos um engano ao tratar, de forma separada, a formação e o contexto de trabalho, pois estamos pressupondo que as soluções apresentadas se aplicam a todas as realidade de modo linear. Ao contrário, o contexto condiciona as ações de formação e a sua repercussão no fazer docente.

No tocante ao impacto da formação continuada dos professores na qualidade do ensino, Imbernón (2016) nos adverte que, mesmo após progressos nas políticas e nas práticas de formação, esta ainda é um ponto fundamental na profissão. É chegada a hora de uma pausa para uma reflexão que permita identificar, diante da quantidade e da diversidade de atividades voltadas à formação, aquelas que possam dar impulso às habilidades interpessoais, relacionais e comunicativas do professor.

Apesar dos esforços envidados em promover melhoria e adequações na formação do professor observamos, nas discussões das quais participamos em nosso grupo de pesquisa, uma incipiente aproximação com o desenvolvimento profissional, pois as ações formativas são apenas uma das variáveis deste cenário, ao lado de fatores como baixos salários, carga horária de trabalho e fortalecimento da identidade docente, dentre tantos outros.

Além disso, é fundamental que os professores possam protagonizar experiências de superação de concepções errôneas que porventura tenham persistido após a formação inicial (Onuchic e Huanca, 2013). A formação continuada pode sediar estas vivências permitindo a construção de conhecimentos matemáticos consistentes e de mecanismos para perceber e ajudar na superação de ideias inconsistentes em seus alunos.

Em busca de colocar o professor como protagonista de sua formação, a colaboração tem papel determinante, e pode ser fomentada por meio da participação em um grupo de estudos. Murphy e Lick (2005) destacam que uma das bases para o funcionamento de um grupo de estudos é a crença em que todos os membros tenham algo importante a trazer para contribuição

no grupo. O foco dos trabalhos deve estar sobre as ações e não sobre as características individuais, bem como às questões diretamente associadas ao fazer dos professores e alunos em sala de aula, facilitando a sinergia.

Nesse novo olhar para a formação continuada, duas coisas merecem ser evidenciadas: enxergamos um processo contínuo de reflexão motivado fortemente pelo trabalho cooperativo/colaborativo e a promoção da parceria entre a universidade e a escola em busca da melhoria dos resultados, aproximando os conhecimentos da academia à prática pedagógica das escolas.

Resolução visual de problemas e geometria: primeiros passos

A Geometria no Ensino Fundamental vem se firmando no currículo e na sala de aula nos últimos anos. Para Walle (2009) uma compreensão rica deste assunto tem implicações diretas em outros tópicos curriculares, permitindo aos alunos fazerem conexão com medidas, raciocínio proporcional e álgebra.

Brasil (2017) ressalta que acrescentar a Resolução de Problemas ao ensino de Geometria se mostra uma alternativa válida para aumentar o interesse dos alunos e, possivelmente, influenciar na formação do professor com o objetivo de lançar luz sobre a percepção das dificuldades de seus alunos em sala de aula. Obviamente que isso não remove todos os óbices e as dificuldades não se atém apenas ao ato de ensinar, embora se configure um passo significativo na busca por melhores dias para a Geometria no ensino fundamental.

Reforçando o entendimento da importância da Resolução de Problemas na formação do professor de Matemática, Huanca (2014) levanta a seguinte questão: Por que se faz necessário conhecer e dominar essa metodologia, especificamente no ensino de matemática em sala de aula? Uma possível resposta aponta que:

> A resolução de problemas tem um papel fundamental, na formação do professor, por oferecer estratégias teóricas e práticas para o desenvolvimento profissional da ação pedagógica do professor em uma sala de aula. Vemos, também, que a Resolução Problemas, para os cursos de formação de professores é importante e necessário para que eles sejam multiplicadores nas escolas. (Huanca, 2014, p. 168)

Vale (2017) nos alerta para a necessidade dos alunos conseguirem resolver problemas sob diversas abordagens na realidade atual, dada a necessidade de termos alunos motivados e inspirados para entrarem num ciclo de querer aprender, conferir significado ao aprendido e prosseguirem aprendendo sempre mais. Nas palavras de Vale, apesar de pouco presentes ou pouco valorizados nas aulas de matemática,

> há um conjunto de problemas, geralmente de natureza visual, que permitem abordagens diversificadas, facilitando o desenvolvimento da criatividade dos alunos nas várias componentes que lhe estão associadas, como a fluência, a flexibilidade e a originalidade. Essa criatividade pode ser desenvolvida nos alunos, uma vez que pode ser promovida pelas práticas de ensino. (Vale, 2017, p. 132)

Esta autora prossegue tratando das potencialidades das resoluções visuais aplicada aos problemas matemáticos, ao destacar que

> uma característica dos alunos matematicamente competentes é serem capazes de empenhar-se em procurar uma solução clara, simples, curta e, portanto, elegante, para um problema. Acreditamos que a visualização pode ser uma mais valia nesta procura, mas para isso os

> professores devem possuir um conjunto de tarefas que permitam ajudá-los na sua prática (Vale, 2017, p. 144).

Assim, observamos que oportunizar aos professores em serviço o contato com problemas que possam explorar esse potencial pode enriquecer as possibilidades do seu trabalho em sala de aula com a Geometria. Afinal, o ensino de Geometria é um tópico que tem se apresentado como um ponto de conflito tanto nas ações da formação inicial quanto continuada.

Caminhar metodológico

O trabalho apresenta um recorte da dissertação[1] de mestrado do primeiro autor no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Na ocasião conseguimos alinhar a nossa pesquisa de campo em parceria com a Secretaria Municipal de Educação da cidade de Cajazeiras/PB, localizada no Nordeste do Brasil, já que os professores estavam em um programa de formação continuada. Objetivo da pesquisa foi levantar as possíveis contribuições que um grupo de estudos pode trazer para professores de matemática do Ensino Básico que pretendem ensinar matemática apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A pesquisa foi desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa, que é caracterizada como tendo o ambiente natural como fonte de dados; como sendo descritiva; como estando mais interessada no processo do que nos resultados finais; por realizar análise indutiva dos dados; e por dar importância vital aos significados dados aos fatos (Bogdan e Biklen, 1994). Esse entendimento mostrou-se coerente como o objetivo da pesquisa que deu origem os dados aqui discutidos, que visava analisar os estudos cooperativos/colaborativo entre os professores.

Em consonância com as vozes dos vinte professores participantes e da equipe pedagógica criamos um grupo de estudos e construímos a proposta para a Formação Continuada dos professores de Matemática do Ensino Básico da Rede Municipal da cidade de Cajazeiras, no ano de 2017 (março a novembro). Fomentamos a formação com base na colaboração em busca de minimizar o isolamento docente e por acreditarmos que, "pesquisadores e docentes podem se aliar no processo de construção de saberes, proporcionando a interconexão entre esses mundos" (Ibiapina, 2016, p. 36).

Dentre os diversos temas trazidos pelos professores, a busca por alternativa para o ensino de Geometria se destacou. Para a condução das ações no âmbito do grupo de estudos nos alinhamos com a visão de Murphy e Lick (1998, 2005).

Para isso, ocorreram dez sessões com periodicidade quinzenal, duração média de três horas, estruturadas em dois momentos: iniciando pela leitura e discussão de temas associados à formação de professores e ao ensino de Matemática e um segundo momento onde trabalhamos com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (Onuchic e Allevato, 2011).

Para esta comunicação, trazemos um recorte que trata de um dos encontros, no qual optamos por iniciar com a apresentação de um resumo escrito acerca do ensino de Geometria para discussão em sala. Assim, deixamos para cada participante realizar uma leitura posterior do

[1] Resolução de Problemas e Grupo de Estudos: possíveis contribuições na formação continuada de professores de matemática do ensino básico.

texto intitulado: O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas de autoria das pesquisadoras Marlene Aparecida do Prado e Norma Suely Gomes Allevato.

Dando continuidade, na segunda parte do encontro, entregamos a cada participante um problema (figura 1), cujo objetivo era estudar formas geométricas, áreas; trabalhar com números racionais sob a relação parte/todo; desenvolver habilidade de expressão em linguagem matemática e resolução visual. Visando, para tanto, à construção de diversos tópicos matemáticos, de livre escolha dos participantes, através de sua resolução.

Um projetista está demarcando um novo loteamento que ocupa uma área de 250.000 m^2.
Ao considerar que a demarcação dos quarteirões continuará a seguir o padrão iniciado pela área em destaque na imagem ao lado, quanto esta representa em relação à área total?

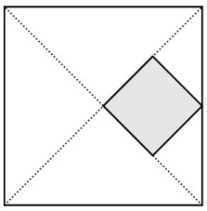


Figura 1. Problema matemático.

Breve discussão acerca do realizado

O encontro em discussão nesta comunicação foi o quinto dentre dez realizados. Até este momento os participantes vinham dando prioridade a uma abordagem algébrica para traçarem as estratégias de resolução dos problemas apresentados.

Neste encontro, apenas um grupo adotou a linguagem matemática por meio de utilização de cálculos matemáticos para exprimir a relação entres as áreas solicitada no problema. Tomaram por base o lado *l* do quadrado maior e colocaram as demais medidas em função desta informação, prosseguindo em busca da solução. Já os outros dois usaram abordagens concretas e analíticas.

Depois do tempo estipulado para a resolução, desfizemos os grupos e passamos a realizar uma exposição da solução de cada grupo para a apreciação de todos os participantes, em um momento que denominamos plenária.

Durante a exposição do primeiro grupo que adotou abordagem concreta, o $Participante_8$ apresentou as partes que separou, por corte, e através do rearranjar das partes chegou a solução procurada. Este ainda destacou que:

> Nos pareceu tão simples quando trocamos ideias, embora nenhum de nós tenha, de forma isolada, pensado em começar um conteúdo de Geometria dessa forma em sala de aula. Penso que, foi motivante e nos envolveu apesar da nossa vivência com os conteúdos matemáticos, muito mais instigante será para nossos alunos. Afinal, este procedimento pode naturalmente surgir na sala de aula, ao aplicarmos o problema antes do conteúdo matemático necessário ser trabalhado ($Participante_8$, Notas do encontro).

Outro momento rico foi a socialização para os demais participantes, da estratégia adotada pelo grupo do $Participante_{12}$, que chegou a solução por meio da análise da figura, referenciando a área destacada e a comparando em tamanho e forma com as demais, sinalizando para o uso de uma solução visual para o problema, embora não tenha

explorado outras arranjos visuais além do descrito, conforme palavras do próprio participante:

> Acompanhem comigo na figura: metade desta área destacada corresponde a esse triângulo acima dela e a outra metade corresponde ao triângulo da parte inferior. Assim, se rebatermos esse quadrado no sentido anti-horário, estamos prolongando os riscos e aí é só contar quantas partes temos e obter a relação entre a parte destacada e o total de partes com a mesma forma, ou seja, temos quatro quadrados cheios mais outros quatro formados pelos outros triângulos. Assim, chegamos a 1/8 (Participante$_{12}$, Notas do encontro).

Como podemos observar na figura 2, além da solução construída com base na fala do participante e representada por meio da primeira imagem, apresentamos duas outras abordagens visuais que levam a razões equivalentes à da solução traçada pelo Participante$_{12}$.

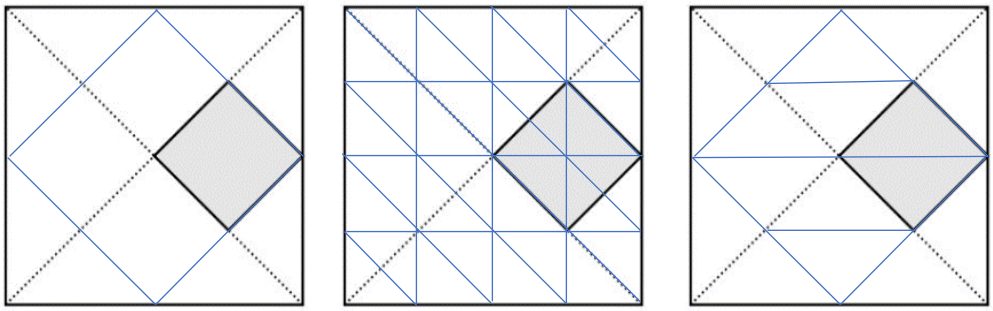
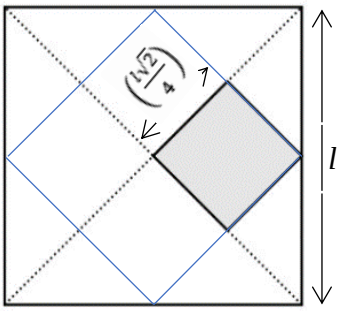


Figura 2. Solução do grupo do participante$_{12}$ e outras duas possibilidades.

Após o trabalho com as representações pictóricas e por meio da linguagem vernácula, retomamos a resolução do grupo que havia optado por uma estratégia puramente algébrica para guiar a busca pelo resultado e seus integrantes construíram e apresentaram o que se pode observar na figura 3.



Considerando l o comprimento do lado do quadrado maior e fazendo uso do teorema de Pitágoras, obtemos o lado do quadrado menor. Em seguida calculamos a razão procurada.

$$\frac{Área\ do\ quadrado\ menor}{Área\ do\ quadrado\ maior} = \frac{\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right)^2}{l^2} = \frac{2l^2}{16l^2} = \frac{1}{8}$$

Figura 3. Resolução utilizando a linguagem matemática

No decorrer deste quinto encontro, os participantes conseguiram se desvencilhar da fórmulas matemáticas e deram espaço a duas abordagens muito interessantes, uma concreta e outra analítica, nas duas puderam pensar, montar uma estratégia sem uso da linguagem matemática formal, com foco na compreensão da razão procurada por meio da relação parte-todo. Pensaram e agiram em sintonia com os documentos norteadores para o Ensino Fundamental que preconizam que o "ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes

linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio". (Brasil, 1998, p. 57).

Em nosso grupo de estudos 70% dos participantes exerciam a profissão de professor em mais de uma escola e com aulas os três turnos, quatro dias por semana. Desta forma a busca pela dignidade e de manter a família se coloca em oposição aos processos de formação e do desenvolvimento profissional, transformando os encontros do grupo de estudos no único espaço para estudos, discussões e um caminhar em direção ao fortalecimento da identidade docente.

Buscando mitigar essa condição, procuramos criar espaços nos encontros para o compartilhamento de saberes e situações advindas da sala de aula de Matemática, com o objetivo de gerar um ambiente onde o isolamento profissional a que o professor se encontra submetido seja minimizado, propiciando a partilha de experiências com seus pares para subsidiar uma posterior reflexão que terá alcance no seu fazer pedagógico e na sua condição de ser humano.

Conclusão

Destacando um dos encontros da pesquisa que teve foco na formação continuada do professor de Matemática no contexto da Educação Matemática, ficou evidente que ao trabalharmos sob a atmosfera de um grupo de estudos, podemos experimentar uma formação focada no protagonismo do professor de Matemática, estimulando a pensarem antes, visualmente e só depois, numericamente, pondo em prática habilidades como realizar escolhas; comunicar-se e colaborar entre si; pensamento crítico através da Resolução de Problemas e criatividade. Para Boaler (2016), estas são habilidades essenciais ao desenvolvimento do ser humano, no mundo atual, que podem impactar positivamente a sala de aula, apesar de exigir um redesenho dos papéis do docente e do estudante, levando aos alunos um ensino motivante e inspirador.

Destacamos que, considerando os demais encontros do grupo de estudos, foi positivo termos conseguido construir conceitos matemáticos, como Probabilidade Geométrica e o Teorema de Menelau, ambos desconhecidos pelos professores participantes da formação. No decorrer da formação, fomos percebendo que um grupo de estudos pode contribuir, não somente em relação ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, mas tem outros aspectos: reflexão sobre a prática da sala de aula, dificuldades em lidar com a sala de aula no contexto atual, valorização do conhecimento matemático em evolução durante os encontros, além do compartilhamento de experiências, onde os membros se sintam em harmonia e igualdade. Porém, como limitante percebemos que o trabalho cooperativo se fez mais frequente, enquanto o trabalho colaborativo se fortaleceu nos últimos encontros, tendendo a se consolidar com a continuidade das ações do grupo de estudos.

Por fim, a aproximação entre os docentes e pesquisadores da universidade e da escola básica fomentou um processo de compartilhamento de saberes experienciais advindos da prática dos participantes oriundos da Educação Básica que realimentou as pesquisas. A universidade trouxe conhecimentos construídos na academia que puderam auxiliar no fazer docente na escola. Acreditamos que esta proposta, se mantida e fortalecida, pode se configurar em fundamento para uma formação continuada que resgate o protagonismo do professor,

Bibliografia e referências

Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets*: Unleashing Students' Potential Through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching. (1st ed.). San Francisco, CA: John Wiley and Sons Inc.

Bogdan, R.C., Biklen, S.K. (1994). *Investigação qualitativa em educação - uma introdução à teorias e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF.

Brasil, T. C. (2017). *O ensino da geometria através de resolução de problemas*: explorando possibilidades na formação inicial de professores de matemática. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

Huanca, R. R. H. (2014). *A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação*: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática. 2014. 315 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Ibiapina I. M. L. M. (2016). Reflexões sobre a produção do campo teórico-metodológico das pesquisas colaborativas: gênese e expansão. In: Ibiapina, I. M. L. M; Bandeira, H. M. B.; Araujo, F. A. M. *Pesquisa Colaborativa: multirreferenciais e práticas convergentes*. EDUFPI.

Imbernón, F. (2010). *Formação Continuada de Professores*. Porto Alegre: Artmed.

Imbernón, F. (2016). *Qualidade do ensino e formação do professorado*: uma mudança necessária. São Paulo: Cortez.

Murphy, C. U., Lick, D. W. (1995). *Whole-Faculty Study Groups*: a powerful way to change schools and enhance learning. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Murphy, C. U., Lick, D. W. (2005). *Whole-Faculty Study Groups*: creating professional learning communities that target student learning. (3. Ed.). Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Onuchic, L. R., Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática*, vol. 25, num 41.

Onuchic, L. R., Huanca, R. R. H. (2013). A licenciatura em matemática: o desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In. Frota, M. C. R., Carvalho, A. M. F. T., Bianchini, B. L. (orgs.). *Marcas da educação matemática no ensino superior*. Campinas, SP: Papirus.

Vale, I. (2017). Resolução de Problema um tema em contínua discussão: vantagens das resoluções visuais. In. Onuchic, L. R., Júnior, L. C. L., Pironel, M. (org). Perspectivas para a Resolução de Problemas. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Walle, J. A. V. (2009). *Matemática no ensino fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Gestão da Aprendizagem Escolar II (GESTAR II) e o Curso de Formação Docente (CFD): un análisis de dos programas de formación continua de profesores que enseñan matemática

Emerson **Rolkouski**
Sector de Ciencias Exactas, Universidad Federal de Paraná (UFPR).
Brasil
rolkouski@uol.com.br
Jeser C. **Candray**
Instituto de Ciencia, Tecnología e Innovación – Universidad Francisco Gavidia (ICTI-UFG).
El Salvador
jcandray@ufg.edu.sv / jccandray@gmail.com

Resumen

Este documento tiene como objetivo presentar y comunicar los resultados de una investigación que analizó las concepciones de Educación Matemática y de formación de profesores presentes en dos políticas públicas de formación continua de profesores que enseñan matemáticas: el programa *Gestão da Aprendizagem Escolar* (GESTAR II) de Brasil y el Curso de Formación Docente (CFD) de El Salvador. Los datos fueron constituidos a partir de documentos oficiales y de la realización de entrevistas con responsables de la elaboración de la propuesta pedagógica de ambos proyectos. Para ello, se utilizaron aportes metodológicos del área de Educación Comparada y de la Historia Oral. Los resultados indican diferentes concepciones de Educación Matemática y semejanzas entre las concepciones de formación de profesores. Tales resultados, ayudan a ampliar la comprensión sobre esta faceta de la formación de profesores, que se da en el ámbito de políticas públicas de formación continuada a gran escala, lo que puede contribuir para la (re)elaboración de tales acciones.

Palabras clave: Educación Matemática, formación continua de profesores, políticas educacionales, GESTAR II, CFD, Historia Oral.

Introducción

Este artículo presenta los resultados de una investigación relacionada a dos políticas públicas de formación continua de profesores que enseñan matemática el programa *Gestão da Aprendizagem Escolar* (GESTAR II) de Brasil y el Curso de Formación Docente (CFD) de El Salvador. A continuación se presenta una breve descripción de los programas, la metodología utilizada y los principales hallazgos de la investigación.

Sobre los programas de formación

La descripción que se realizará en los siguientes párrafos está basada en los documentos oficiales *Programa Gestão da Aprendizagem Escolar II: Guia Geral* (BRASIL, 2010) y Plan Nacional de Formación de Docentes en servicio en el sector público (EL SALVADOR, 2014) emitidos por los Ministerios de Educación de Brasil (MEC) y de El Salvador (MINED) respectivamente.

El programa de *Gestão da Aprendizagem Escolar II* (GESTAR II)

El programa de *Gestão da Aprendizagem Escolar II* (GESTAR II) es un programa federal de educación continua para los profesores de matemática y de portugués realizadas por la Secretaría de Educación Básica del Ministerio de Educación de Brasil (MEC) y tiene como objetivo actualizar los saberes profesionales de los maestros que actúan desde el sexto al noveno año de Educación Básica (once a catorce años de edad) de las redes públicas de Educación: distrital, municipal y estatal.

El GESTAR II está compuesto por dos cursos: Curso de Formación de Profesores Formadores/Tutores y Curso de Formación de Profesores para cada una de las áreas. Los dos cursos se desarrollan de manera semipresencial coordinado por profesores de Instituciones Educativas Superiores (IES). El Curso de Formación de Profesores Formadores/Tutores (CT) está dirigido a los profesores efectivos de la red pública de Educación y es impartido por docentes vinculados a las Universidades Públicas participantes. La carga horaria total es de 300 horas, así distribuidas: 104 horas presenciales con 40 horas de formación inicial; dos seminarios de seguimiento de 24 horas cada uno; un seminario de evaluación, y; 196 horas de actividades que involucran monitoreo a los cursistas, estudios y actividades a distancia, para cada área temática. El Curso de Formación de Profesores (CP) es dirigido a los profesores del sector público en ejercicio que enseñan matemáticas y el idioma portugués entre el sexto y noveno año de Educación Básica siendo impartido por los profesores Formadores/Tutores. La carga horaria total es de 300 horas, así distribuidas: 120 horas presenciales con 80 horas de talleres; 40 horas para la elaboración del proyecto y seguimiento pedagógico, y; 180 horas de actividades que involucran su participación en el papel de orientadores, trabajos y estudios a distancia para cada temática.

El Curso de Formación Docente en El Salvador (CFD)

El Curso de Formación Docente en El Salvador (CFD) es un proyecto del Ministerio de Educación (MINED) que tiene por objetivo la "construcción de un Sistema Nacional de Desarrollo Profesional Docente" que permita superar el "retraso académico y científico del cuadro docente nacional". El CFD consiste en dos cursos de formación continuada dirigidos a los docentes del sector público de las distintas disciplinas que se ofrecen en el sistema escolar. El CFD se ejecuta en tres etapas: "constitución de los núcleos de expertos", "curso de formación de los docentes especialistas" y el "curso de formación de los profesores del sector público".

La primera etapa, la constitución de los núcleos de expertos, es hecha por el MINED y consiste en la elección de "expertos disciplinares formadores". Estos expertos son un grupo de profesionales destacados en su especialidad que son los encargados de diseñar los planes de estudios para los cursos de formación y materiales de trabajo, y desarrollar el "Programa de Formación de los Docentes Especialistas".

El "Programa de Formación de los Docentes Especialistas" (PFE) es la segunda etapa del Plan y es dirigido a un grupo de profesores del sector público. El curso tiene una duración de dos años,

con ocho módulos específicos. Cada módulo tiene una duración de 120 horas, desarrolladas de manera intensiva durante ocho semanas distribuidas de la siguiente manera: Fase presencial de 64 horas durante ocho sábados consecutivos; Fase no presencial de 24 horas de tutoría virtual por el experto disciplinar e interacción con otros recursos, y; 32 horas de práctica en el aula donde implementará los procesos y estrategias desarrolladas en los módulos. El docente especialista deberá llevar un registro en una cartera de evidencias.

El objetivo principal del PFE es el de constituir el grupo de expertos que desarrollaron la tercera etapa del Curso, que pretende llegar a todo el cuadro docente del país a través del "Programa de la Formación de los Profesores del sector público" (PFP). El PFP se dirige a todos los profesores que trabajan en el sector público en los centros educativos. El PFP también tiene una duración de dos años, con ocho módulos específicos. Cada módulo tiene una duración de 120 horas, desarrolladas de manera intensiva durante ocho semanas así distribuidas: Jornadas presenciales: ocho sábados y ocho horas por sesión, haciendo un total de 64 horas; Jornadas no presenciales: tiene una duración de 56 horas, y; 24 de ellas serán ejecutadas en la sala virtual por el especialista y 32 horas de práctica en su propia aula.

Metodología

Se decidió realizar una investigación de tipo cualitativa con apoyo de los documentos oficiales de los programas y de entrevistas. En el caso de las entrevistas se entrevistó personas que hayan tenido una participación importante en la construcción, diseño, implementación y seguimiento de los cursos en cada país; es así que se elige para el caso del GESTAR II al Dr. Cristiano Muniz, coordinador general del curso en Matemática así como formador y autor de libros de formación, para el caso del CFD se eligió al ing. Carlos Canjura quien fue autor de muchos libros y que impulsó el programa desde el Ministerio de Educación que dirigió en el período 2014-2019. Además, se consideraron para esta investigación los aportes metodológicos de la Educación Comparada y la Historia Oral. Los alcances de estas metodologías en esta investigación se desarrollan a continuación.

La comparación, según Bonitatibus (1989), es examinar dos o más cosas al mismo tiempo y buscar elementos de semejanza y diferencia entre ellas. Trojan y Sánchez (2009, p. 2), por su parte, dicen que comparar es “confrontar, establecer relaciones entre dos o más objetos con la finalidad de emitir juicios de valor”. El uso inicial de la comparación, según Gonçalves (2013), era la herramienta que tenían los Estados para recopilar información sobre políticas “correctas” y “equivocadas” que eran desarrolladas por otros, así mismo en el plano pedagógico, los estudios comparados tenían como objetivo enriquecer los conocimientos pedagógicos sobre distintos políticas educativas a modo de medir su impacto y para evitar errores que otras naciones cometen al abordarlos (TROJAN y SÁNCHEZ, 2009, p. 4). Sin embargo, en esta afirmación de Trojan y Sánchez se fundamentan muchas críticas a los estudios comparados en la educación ya que en muchas ocasiones estos son frecuentemente utilizados por los organismos internacionales como una forma de jerarquizar sistemas educacionales, programas de formación e incluso países. Es por ello que, ante la carga conceptual que conlleva el término “comparar” y la casi inevitable jerarquización que puede surgir, es que se expone que este estudio no buscó jerarquizar en términos de eficiencia o eficacia de los programas, sino que se buscará con esta metodología una mayor comprensión sobre estas políticas de formación docente y como el contexto incide en su construcción.

Ante la intención de dar un nivel mayor de profundidad de los cursos en cuestión que permitieran mirar los programas desde otras aristas, desde otras perspectivas es que se decidió realizar entrevistas con los impulsores de ambos programas de formación. Es así que surge la incursión de esta investigación en la Historia Oral como herramienta metodológica.

Para Garnica (2013, p. 88) hablar de "Historia Oral" ya es una expresión simplificada y "sería mejor decir 'la constitución de fuentes de estudio a partir de la oralidad' o, 'la elaboración de fuentes, a partir de la oralidad, que pueden disparar un ejercicio historiográfico'.

En lo referente al método Garnica (2013, p. 102) expone que un trabajo de Historia Oral tiene dos momentos y que podrían "ser marcados en dos niveles: uno relativo a la recolección de los testimonios y el otro, subsecuente, relativo al tratamiento de las informaciones recolectadas". El primer momento hace referencia a los preparativos previos antes y durante la entrevista, entre estos preparativos está la elección de los declarantes, el número de entrevistas, de las preguntas o frases de las entrevista, el lugar de la entrevista. En un segundo momento el investigador decidirá el tratamiento, uso y análisis de los testimonios. Para el tratamiento de las entrevistas existen dos fases: la *transcripción*, en la cual se registra por escrito el material grabado y la *textualización* que busca retirar las "marcas y los vicios propios de la oralidad".

Con esto en mente, se decidió realizar dos entrevistas con los responsables de los programas, uno para cada país. Para el caso del GESTAR II se entrevistó al Dr. Cristiano Muniz, coordinador del área de Matemática, autor de materiales del GESTAR II y profesor y supervisor del mismo. En el caso del CFD salvadoreño se entrevistó al Ing. Carlos Canjura, autor de varios materiales de formación, formador en el programa y propulsor del CFD desde su papel como Ministro de Educación de El Salvador.

Principales hallazgos

En esta sección se traen algunas observaciones acerca de ambos programas que permitirán ampliar la comprensión acerca de las concepciones de políticas públicas de formación de profesores a gran escala y de la Educación Matemática presente en cada uno de los programas. Se observa que, anclados en los aportes metodológicos de la Educación Comparada, es fundamental que tal comprensión no sea desvinculada de consideraciones sobre el contexto de cada uno de los países.

El Salvador y Brasil tienen contextos históricos, geográficos y políticos administrativos bastante distintos, sin embargo, el modelo utilizado de formación es bastante similar, es decir, la construcción de una red, en la que un formador/experto es responsable de la formación de los tutores/especialistas y éstos son responsables de la formación de un grupo de profesores. Esta formación se moviliza por medio de materiales didácticos y en cursos de larga duración.

Es importante observar que tal diseño trae ventajas y desventajas, dependiendo mucho más de la forma de ejecución del programa que del propio diseño. De dicho modelo se puede verificar que si es vinculado a una concepción constructivista de formación (FIORENTINI, 2008), es posible alcanzar a una gran cantidad de personas de forma presencial, formando una red de formadores/expertos y tutores/especialistas con gran potencial de dar continuidad a grupos de estudios en sus lugares de trabajo.

En los documentos de ambos programas se enfatiza la reflexión en el contexto que se opera indicando la necesidad que parte de la formación continuada se dé en el aula. Por otro lado, la adopción de materiales previamente estructurados disminuye la participación docente en su

proceso formativo, ampliando la característica indeseable *top-down*. El profesor Cristiano Muniz, en su entrevista, reconoce que, tal modelo podría ser superado:

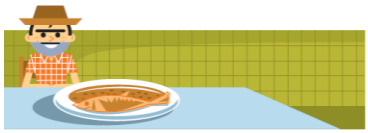
> E outro desafio que nós temos, se você me pergunta: "*Cristiano, se você hoje for chamado para fazer uma continuidade do GESTAR, como é que você faria?*" Eu chamaria os professores da escola para criar novas unidades, novos CTP´s. [...] Ele ser o autor [...].

Podemos caracterizar los programas como intentos de promover una reflexión a gran escala con todos los profesores, basados en sus contextos. Ambos programas permiten e indican esa necesidad en su estructura. Sin embargo, cabrá a los formadores que actúan junto a los profesores dar movimiento a la reflexión, invitando y estimulando a los profesores a discutir sus propias prácticas. Los materiales estructurados dan pistas en la dirección de comprender que la Educación Matemática está presente en tales programas. En el caso de GESTAR II la definición de los contenidos del currículo del curso de matemáticas tiene como base los Parámetros Curriculares Nacionales (PCN) de los años finales de la enseñanza fundamental. En el caso del CFD, los materiales están construido según lo decidió el grupo de expertos quienes decidieron no tomar como referencia el currículo nacional. Con el fin de ilustrar cómo los contenidos matemáticos se articulan en los cuadernos de formación se presenta a continuación un resumen del desarrollo del tema "ecuaciones lineales" en cada uno de los programas.

En el caso del GESTAR II, la temática "sistemas de ecuaciones lineales" está desarrollada en la unidad 23 y gira en torno al tema "alimentación y salud". En las primeras páginas se presenta el tema haciendo algunas consideraciones teóricas. La unidad está dividida en tres secciones: en la primera sección "muestra cómo las situaciones de la vida real generan problemas que pueden ser resueltos por un sistema de dos ecuaciones de grado uno con dos incógnitas", la segunda sección "trata de la resolución de estos sistemas" y la "tercera" muestra cómo estas cuestiones pueden abordarse en el aula "(BRASIL, 2008, p. 112).

La sección 1, "Resolución de situación-problema", comienza con un texto sobre la importancia de la alimentación adecuada a las necesidades y las actividades diarias, en ella hay una discusión sobre aspectos tales como: ¿qué son las calorías y para qué sirven?, el uso de calorías en los humanos y distintos animales y el índice de masa corporal. La sección termina presentando una situación-problema tal como aparece en la figura 1:

Rui gosta de feijão e de peixe e tem facilidade para obter esses alimentos. Ele procura ingerir 1880 calorias por dia, tomando como base os dois alimentos. Olhando em uma tabela, verificou que: 100 g de feijão fornecem 330 calorias; 100 g de peixe fornecem 70 calorias. Ele concluiu que: 1 grama de feijão fornece 3,3 calorias; 1 grama de peixe fornece 0,7 calorias.



Para ter o total de 1880 calorias, o que Rui pode fazer?

Figura 1. Construyendo sistemas lineales a partir da Realidad. Matemática e nutrición
Fuente: MEC, 2008, Cuaderno TP6, p. 115.

Después de la presentación de esta situación problema, la sección 2, "Construcción del conocimiento matemático en acción", retoma la situación anterior, en la cual se describe cómo Rui pensó para responder utilizando una ecuación de dos variables:

Rui pensou em comer: x gramas de feijão, que lhe dariam x.3,3 calorias (ou 3,3x); y gramas de peixe, que lhe dariam y.0,7 calorias (ou 0,7y)
O total deveria ser 1880, portanto 3,3x + 0,7y – 1880.
Rui tentou resolver esta equação, mas descobriu que haveria muitas soluções para ela. Conforme comesse um tanto de feijão, ele teria que comer determinada quantidade de peixe para completar as calorias. Rui não gostou daquilo: todo dia anotar quanto tinha comido de feijão e calcular para ver quanto faltava comer de peixe. Queria uma solução mais prática.
Figura 2. Orientando la solución de la Situación-Problema.
Fuente: (Ibid, p. 116-117).

La autora finaliza esa situación-problema invitando al lector a buscar otra solución del problema del Rui. Esta parte finaliza aportando algunos datos de tipo teórico sobre lo que son los sistemas de ecuaciones lineales. La sección aún contempla los tres métodos algebraicos para resolver estos sistemas de ecuaciones: sustitución, comparación y adición, la representación gráfica, discusión de sistemas y el uso de la metáfora de la balanza como recurso didáctico.
En el caso del CFD, la unidad comienza describiendo el concepto de ecuación y las distintas expresiones algebraicas que pueden representar una ecuación. Se discute sobre la importancia de la idea de la noción de ecuación y la muestra como un factor que, si no es comprendido, dificulta su resolución, además de presentar la visualización de las ecuaciones en el plano (EL SALVADOR, 2015: 47). La sección invita entonces a los profesores a demostrar algunas propiedades haciendo uso de las propiedades de la igualdad y de los axiomas de campo del conjunto de los números y utilizarlos para luego solicitar a los profesores las debidas justificaciones (Figura 3).

Paso	Justificación
$5x - 7 = x + 1$	
$(5x - 7) + 7 = (x + 1) + 7$	
$5x = x + 8$	
$5x - x = x + 8 - x$	
$4x = 8$	
$(4x) \cdot \frac{1}{4} = 8 \cdot \frac{1}{4}$	
$x = 2$	

Figura 3. Módulo I - Álgebra dos Números Reais e Complexos.
Fuente: EL SALVADOR, MINED (2015), CFD-M, M1 Especialistas, p. 47.

Para cerrar esta sección se presenta, a manera de ejemplo, el siguiente problema: "En un corral hay gallinas y conejos. Hay 35 animales en total. Entre ellos hay 108 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay? Para la resolución de este problema el autor llama "x" al número de gallinas, y, consecuentemente, el número de conejos de "35 - x"; finalizando con la resolución del problema, en estos términos. (ibid., página 48). A partir de la ecuación de la situación, el autor solicita al profesor justificar los pasos que seguirá para llegar a la respuesta del problema. Esta sección termina desarrollando otro problema parecido al anterior. La sección aún contempla inequidades y ecuaciones cuadráticas, el método de la eliminación de Gauss y la discusión de sistemas.
Se observa en la conducción de las actividades concepciones diferentes de Educación Matemática. En el caso de GESTAR II hay una preocupación en lo que se refiere a cuestiones didácticas, que se nota en la introducción a partir de un problema no usual, en la discusión de diferentes resoluciones, en la utilización de diferentes representaciones, teniendo en vista que

hay mención a la representación gráfica y en la discusión de metáforas como recurso didáctico. En el caso del CFD, se observa que existe una preocupación por el rigor matemático, teniendo en vista que el capítulo comienza con la discusión sobre propiedades y su justificación matemática, habiendo aún, una mayor profundización con la presentación del método de la eliminación de Gauss, debido al hecho de que el CFD también apunta a alcanzar profesores de educación media. La concepción de Educación Matemática en el GESTAR II es así descrita por el profesor Cristiano:

> O referencial teórico que a gente tem são, primeiro, a teoria do currículo em rede, [...] Ou seja, que o conhecimento se dá numa visão mais complexa e não linear e que você pode ter diferentes entradas [...]. Segundo, nós trabalhamos com a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. [...]A gente busca também, busca bastante dentro da perspectiva do Brousseu, a Teorias das Situações [...] E outro elemento importante que o Brousseau traz e o Chevallard também traz é a ideia da institucionalização [...]
> E nós temos ali um pouco de Duval, [...] a questão de representação e que de repente tudo o que a gente fala de aprendizagem estão baseados nos objetos matemáticos e os objetos não são exteriores aos sujeitos, os objetos matemáticos são conceitos, são representações mentais.

Se observa entonces, una presencia de la Didáctica Francesa en el programa GESTAR II, característica bastante presente en la Educación Matemática brasileña, teniendo en vista su histórico de constitución, que presenta varios profesores que tuvieron su formación en Francia, entre ellos el propio profesor Cristiano Muniz.
El CFD, presenta un carácter en el que predomina el contenido matemático en detrimento de cuestiones metodológicas, como se puede observar en la lectura de los materiales de formación. No hay explícitamente una vertiente teórica, lo que es reafirmado por el Ing. Carlos Canjura, cuando afirma:

> […] todas las teorías que hasta ahora tenemos son teorías importantes, todas, [...] hasta la conductista; hay momentos, en los que sí es importante. Claro, pero una componente chiquita, pero si tiene y está presente por ahí. Usted no puede decir jamás que no le interesa que el cipote[1] memorice, usted no puede tampoco decir que nunca va en el aula a buscar una forma de construir un concepto, a usar toda la línea de constructivista de conocimiento pero, yo creo que todo debiera estar referido […] lo que le estoy queriendo decir es que nosotros debemos hacer uso de todas estas teorías para efecto de conseguir lo que llamo lo fundamental: construcción del ciudadano (golpes a la mesa) con capacidades productivas y capacidades ciudadanas. Hay quienes lo hacen con ciertas teorías, hay quienes que lo hacen con otras [...] Entonces, yo creo que aferrarse a un modelo nunca es bueno, [...] creo que sí se tienen referencias, (eso es) lo más importante.

Se observa en el discurso del Ing. Carlos Canjura y en el del profesor Cristiano Muniz un distanciamiento entre las concepciones de Educación Matemática presentes en los programas estudiados. Ciertamente, el histórico de la constitución del área de Educación Matemática en los

[1] Cipote: término coloquial utilizado en El Salvador para referirse a los niños.

dos países y la cantidad de recursos humanos, se refleja en la construcción de tales políticas desde el punto de vista pedagógico y debe ser tenido en cuenta para un análisis más profundo.

Conclusiones

Esta comunicación tuvo como finalidad presentar y discutir los resultados de la investigación que analizó las concepciones de Educación Matemática y de formación de profesores presentes en dos políticas públicas de formación continua de profesores que enseñan matemáticas: el programa *Gestão da Aprendizagem Escolar* (GESTAR II) de Brasil y el Curso de Formación Docente (GESTAR II) (CFD) de El Salvador. Se destaca que desde el punto de vista operacional, tales programas se asemejan en el intento de constituir una red de formación, con cursos de larga duración, articulados en torno a materiales de formación estructurados. Entre las actividades de estos cursos, se destacan las realizadas en el aula, potenciadoras de reflexiones sobre la relación entre teoría y práctica. Entendemos que esta configuración puede servir de ~~una~~ tendencia a perseguir en países que necesitan movilizar la formación continua de profesores a gran escala. Sin embargo, la concepción de Educación Matemática presente en ambos programas se distancia. El programa brasileño está marcado por la Didáctica Francesa, mientras que el programa salvadoreño no presenta marcas claras de una u otra tendencia internacional. Es posible que tal distanciamiento se deba al histórico de construcción del área de Educación Matemática en ambos países y por la especificidad de los recursos humanos.

En la búsqueda de ampliación de la comprensión de los límites y potencialidades de tales programas se indica la necesidad de incrementar las investigaciones relacionadas a las políticas públicas de formación de profesores a larga escala, desde el punto de vista operacional, hasta el punto de vista pedagógico. La investigación aquí relatada es un esfuerzo en ese sentido que apunta, además de la comprensión, la ampliación del diálogo entre países que poseen históricos de constitución del área de Educación Matemática distintos, sin que ello signifique la importación de modelos, sino la reflexión conjunta, respeto al contexto, con miras a la cooperación entre investigadores, formadores, profesores y gestores.

Referencias y bibliografía

Brasil. (2008). *Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II: Matemática, caderno de teoria e prática 6.* Brasília.

Brasil. (2010). *Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II: Guía GERAL*. Brasilia.

El Salvador. (2014). Plan Nacional de Formación de Docentes en servicio en el sector público. San Salvador.

El Salvador. (2015).Especialización docente tercer ciclo y media: Matemática, módulo 1. San Salvador.

Bonitatitus, Suely Grant.(1989). Educação Comparada: conceito, evolução, métodos. São Paulo.

Fiorentini, D. A. (2008). *Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil*. Bolema, ano 21, n° 29, p. 43-70.

Garnica, Antonio Vicente (2013). *História Oral e Educação Matemática*. In: Borba, M.C.; Araújo, J.L.; Fiorentini, D.; Garnica, A.V.M.; Bicudo, M.A.V. *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*, 87-109.

Gonçalves Carvalho, E. J. (2013). Reflexões sobre a importância dos estudos de educação comparada na atualidade. HISTEDBR On-line, Campinas, nº 52, p. 416-435, SET 2013.

Trojan, R. M; Sánchez, M. M. (2009). *EDUCAÇÃO COMPARADA: considerações teórico-metodológicas no contexto da globalização. Brasil*.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA



A formação continuada em matemática no pacto nacional pela alfabetização na idade certa

Rute Cristina Domingos da **Palma**
Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil
rutecristinad@gmail.com
Daniela Maria Almeida de **Lima**
Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil
danielafelau@hotmail..com
Suelene **Rezende**
Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil
suhrezend@gmail.com

Resumo

O Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) foi instituído pelo governo Federal no Brasil, através da Lei 12.801/2013, com o objetivo de alfabetizar as crianças até 8 anos de idade, ao final do primeiro ciclo do Ensino Fundamental, e tem como eixo principal a Formação Continuada dos Professores. Esta pesquisa objetiva compreender o que narra um grupo de professoras sobre o processo formativo e as influências nas práticas pedagógicas que desenvolvem nos anos iniciais. Para este estudo qualitativo, utilizou-se, para a produção de dados, um questionário de caracterização e uma entrevista semiestruturada. A partir da análise dos dados, as professoras indicam pontos que dificultam um melhor aproveitamento da formação e destacam como aspectos positivos a aprendizagem da sequência didática e de jogos matemáticos. Considerando os dados analisados entende-se que a proposta de Formação Continuada precisa estar centrada na escola e inserida num movimento de investigação e reflexão.

Palavras chave: Formação Continuada, professores, matemática, PNAIC, narrativas.

É consenso, entre os pesquisadores da educação, que a formação do professor é contínua ao longo da vida e se relaciona com as práticas pedagógicas e institucionais, com as políticas públicas de ensino e com a busca de soluções para as adversidades encontradas na profissão.

Dessa forma, no exercício da docência, muitas são as experiências de Formação Continuada que os professores vivenciam. Interessa-nos aqui discutir a percepção de um grupo de professoras sobre um projeto de Formação Continuada desencadeada pelo Ministério da

Educação, o Pacto Nacional para Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), que visava alcançar professores que atuavam na Educação Básica, especificamente, professores alfabetizadores.

Cabe destacar que a proposta de formação desencadeada pelo PNAIC apresentava uma formatação que, segundo Gatti e Barreto (2009), caracteriza-se como "um modelo 'em cascata', no qual o primeiro grupo de profissionais é capacitado e transforma-se em capacitador de um novo grupo que por sua vez capacita um grupo seguinte" (p. 202).

Neste texto apresentamos a percepção das professoras sobre o processo de formação do PNAIC e suas contribuições para a prática pedagógica.

Formação continuada

O professor, ao longo da carreira docente, nas diversas fases da vida profissional, "o início da carreira, o processo de desenvolvimento e os tempos mais avançados em que o professor consolida sua experiência profissional", tem a necessidade de investigar e encontrar soluções constantemente, em "um movimento orientado a responder diversos desafios" (Gatti & Barreto, 2009, p. 203), enfrentados na atividade docente.

Concernente a isso, no que tange ao exercício da atividade docente,

> Saber por que se ensina, para que se ensina, para quem e como se ensina é essencial ao fazer em sala de aula. O professor precisa estar em constante formação e processo de reflexão sobre seus objetivos e sobre a consequência de seu ensino durante a formação, na qual ele é o protagonista, assumindo a responsabilidade por seu próprio desenvolvimento profissional. (Paiva, 2013, p. 92)

Nesse sentido, observamos a necessidade de os processos formativos possibilitarem aos professores a ampliação e a ressignificação das teorias e da reflexão sobre a prática educativa "em um contexto em que a participação, a interação, o diálogo, a colaboração, a troca de conhecimentos e experiências sejam privilegiados" (Palma, 2013, p. 47).

Contudo, sem dúvida, um dos muitos desafios da formação consiste em promover uma abordagem que privilegie as dimensões coletiva, contextual e organizacional. Sobre isso, Garcia (1999) sinaliza que essa abordagem "deve ser orientada para a mudança" (p. 137) e apresentar-se numa perspectiva de "implicação e de resolução de problemas escolares a partir de uma perspectiva que supera o caráter tradicionalmente individualista das actividades de aperfeiçoamento dos professores" (p. 137).

Compreendemos, assim, que importa propor e desenvolver uma Formação Continuada, tomando como princípio o contexto em que ela se realiza, nas suas múltiplas dimensões (administrativas, pedagógicas, políticas, etc.), como uma de suas mudanças mobilizadas por ações coletivas.

Ainda, neste viés, e considerando especificamente as formações voltadas para a área da matemática, "as pesquisas vêm evidenciando a necessidade de que, em programas de formação, os conteúdos matemáticos sejam visitados e revisitados, mas é necessário pensar sob que olhar isso deveria acontecer" (Nacarato & Paiva, 2013, p. 14). É fundamental que esse processo possibilite, dentre outras ações, o aprofundamento teórico, a reflexão sobre as práticas pedagógicas e a elaboração de propostas inovadoras.

Dessa forma, acreditamos que a Formação Continuada, no que se refere à matemática,

precisa configurar-se em espaços de discussão que potencializem a organização das práticas pedagógicas dos professores participantes e, consequentemente, promovam o aprendizado dos alunos ao longo do processo de escolarização.

O pacto nacional pela alfabetização na idade certa

O Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) é um programa do Ministério da Educação (MEC) que conta com a participação articulada entre o Governo Federal, os Governos Estaduais e Municipais e o Distrito Federal, objetivando alfabetizar plenamente todas as crianças até 8 anos de idade, apresentando como referência o Decreto nº 6.094, de 24 de abril de 2007 e a Meta 5 do PNE.

O PNAIC ofereceu Formação Continuada em grande escala, sendo considerado o maior programa de formação de professores já desenvolvido pelo MEC, tanto pela abrangência da maioria dos municípios brasileiros, como pelo número de professores participantes. O pacto foi implantado em 2013, em todos os municípios e estados do Brasil, com discussões sobre a Alfabetização e, no ano seguinte, sobre a Alfabetização Matemática.

No caderno de Matemática do Pacto (Brasil, 2012a), a contribuição para o aperfeiçoamento profissional dos professores alfabetizadores foi constituída por um conjunto integrado de ações, materiais e referências curriculares e pedagógicas disponibilizado pelo MEC, tendo como eixo principal a Formação Continuada de professores alfabetizadores.

As ações do Pacto apoiaram-se em quatro eixos de atuação, segundo o documento oficial (Brasil, 2012a, p. 8): 1. Formação Continuada presencial; 2. Materiais didáticos, obras literárias, obras de apoio pedagógicos, jogos e tecnologias educacionais; 3. Avaliações sistemáticas; e 4. Gestão, controle social e mobilização.

Para o desenvolvimento da formação em matemática, foram elaborados os cadernos de Formação em Alfabetização Matemática, denominados: Organização do trabalho pedagógico (8 horas); Quantificação, registros e agrupamentos (8 horas); Construção do sistema de numeração decimal (12 horas); Operações na resolução de problemas (12 horas); Geometria (12 horas); Grandezas e medidas (12 horas); Educação estatística (8 horas); Saberes matemáticos e outros campos dos saberes (8 horas); Educação matemática no campo (8 horas); Educação Matemática inclusiva (8 horas); Jogos na alfabetização Matemática (8 horas).

A formação foi operacionalizada em encontros mensais entre os Professores Formadores (PF), selecionados pelas universidades públicas brasileiras, e professores Orientadores de Estudos (OE), selecionados pelos municípios, a partir de critérios estabelecidos pelo MEC. Do processo de formação participaram os professores alfabetizadores que estavam atuando nos três primeiros anos do ensino fundamental, em escolas públicas das diversas regiões do País. O curso de Alfabetização Matemática foi organizado em 8 unidades, totalizando 80 horas, distribuídas em encontros semanais ou quinzenais. Ao final da formação ocorreu o Seminário de Encerramento, desenvolvido em 8 horas.

O processo formativo objetivava promover o estudo e a reflexão dos professores alfabetizadores em torno dos cinco Direitos Básicos de Aprendizagem em Matemática recomendados pelo PNAIC da Alfabetização Matemática para Ciclo de Alfabetização (1.º, 2.º e 3.º anos) do Ensino Fundamental, quais sejam: I. Utilizar caminhos próprios na construção do conhecimento matemático, como ciência e cultura construída pelo homem, através dos tempos, em resposta a necessidades concretas e a desafios próprios dessa construção; II. Reconhecer

regularidades em diversas situações, de diversas naturezas, compará-las e estabelecer relações entre elas e as regularidades já conhecidas; III. Perceber a importância da utilização de uma linguagem simbólica universal na representação e na modelagem de situações matemáticas como forma de comunicação; IV. Desenvolver o espírito investigativo, crítico e criativo, no contexto de situações-problema, produzindo registros próprios e buscando diferentes estratégias de solução; V. Fazer uso do cálculo mental, exato, aproximado e de estimativas. Utilizar as Tecnologias da Informação e Comunicação, potencializando sua aplicação em diferentes situações.

No que diz respeito ao professor alfabetizador, a orientação é que ele fosse tratado como um profissional em formação em todas as áreas do ciclo de alfabetização. A formação continuada deveria ser norteada pelos princípios orientadores: a prática da reflexividade, a constituição da identidade profissional, a socialização, o engajamento e a colaboração.

Percurso metodológico

A pesquisa caracteriza-se como uma pesquisa de abordagem qualitativa, do tipo estudo exploratório, tendo como contexto de investigação duas escolas da rede pública de educação do município de Cuiabá - Mato Grosso – Brasil que atendem o primeiro ciclo do ensino fundamental.

O cenário da pesquisa foi composto por cinco professoras efetivas, que aceitaram colaborar com esta investigação, caracterizadas na Tabela 1:

Tabela 1

Caracterização das professoras participantes da pesquisa

	Professora 1	Professora 2	Professora 3	Professora 4	Professora 5
Idade	44 anos	33 anos	51 anos	31 anos	46 anos
Ano que leciona	1.º ano	3.º ano	3.º ano	2.º ano	2.º ano
Tempo de atuação	23 anos	12 anos	34 anos	13 anos	25 anos
Formação	Pedagogia	Pedagogia	Magistério Pedagogia	Pedagogia	Pedagogia
Especialização	Psicopedagogia	Psicopedagogia	Psicologia	-	Supervisão e Currículo Escolar

Notas. Dados produzidos através do questionário de caracterização.

Com intuito de compreender o processo de Formação Continuada desenvolvido pelo PNAIC e sua influência nas práticas pedagógicas dessas professoras, no período de maio a agosto de 2017, realizamos, com essas colaboradoras, entrevistas semiestruturadas, que foram transcritas e posteriormente disponibilizadas para que analisassem e fizessem indicações para excluir ou acrescentar alguma informação, se necessário. Contudo, elas não sugeriram modificação alguma. Da leitura das entrevistas, emergiram dados correspondentes a dois eixos temáticos: a formação e as práticas pedagógicas.

Apresentação e análise dos dados

Observamos, nas falas das professoras entrevistadas, a recorrência de alguns aspectos relacionados à formação, especificamente, entre eles, a obrigatoriedade do curso, a sobrecarga de trabalho e o desencontro de informações. Concomitantemente, as professoras destacaram as contribuições que a formação promoveu para a ampliação de suas práticas.

Iniciamos nossa discussão abordando questões referentes à formação proposta no PNAIC, tendo em vista os aspectos evidenciados durante seu desenvolvimento. À princípio emergiram das entrevistas indícios de insatisfação com relação ao formato obrigatório proposto. Ao ser questionada sobre suas primeiras impressões sobre o curso, por exemplo, a Professora 2 (comunicação pessoal, 19 de maio de 2017) relata: "Recebemos a informação que quem não frequentasse o curso não poderia atribuir aula no 1 ciclo. Fomos quase obrigados a fazer o curso", conforme determina o documento: "que o professor alfabetizador que tenha concluído a formação em 2014 permaneça atuando nas turmas do Ciclo de Alfabetização em 2015" (Brasil, 2015, p. 44).

Portanto, ficou claro que as professoras que não participassem do PNAIC não poderiam receber aulas no 1.º ciclo no ano seguinte. Dessa forma, todos que quisessem manter-se atuando nas respectivas classes, obrigatoriamente deveriam estar vinculados à formação, conforme as Orientações para o processo de atribuição de aulas e/ou classes do 1.º Ciclo/PNAIC: "NÃO poderão atribuir aula no 1º Ciclo, os professores que: a) Assinaram o Termo de Compromisso do PNAIC/2013, 2014 e 2015 e depois se recusaram a participar da formação oferecida pela SME/MEC".

A dinâmica do curso incluía estudos teóricos, prática em sala de aula e o compartilhamento dos resultados das ações propostas pelo PNAIC, conforme relata a Professora 2 (comunicação pessoal, 19 de maio de 2017): "Seguíamos uma dinâmica, leitura do texto, apresentação em grupo, preparação das sequência didáticas, exposição das sequências didáticas para o grupo. Retomada do que foi aplicado".

Algumas professoras apontaram, em suas narrativas, aspectos relativos ao tempo que precisavam destinar à formação para seu aproveitamento efetivo. A Professora 2 (comunicação pessoal, 19 de maio de 2017), nessa perspectiva, sinaliza que "para dar certo uma formação assim, o professor precisa de tempo para estudar e se dedicar".

Concomitante a isso, evidencia-se, em algumas falas, um sentimento de sobrecarga, associando às práticas já presentes no processo de atuação pedagógica nas Unidades Escolares, as práticas de estudo, ação e reflexão propostas pelo curso do PNAIC. A Professora 5 (comunicação pessoal, 17 de agosto de 2017), nesse aspecto, aponta que "o difícil do PNAIC é a questão de sobrecarregar o professor. São muitas coisas diferentes em que estamos envolvidos. Até nos propomos a fazer, mais por uma cobrança externa, do que por necessidade de melhorar a aprendizagem das crianças".

Ainda percebemos uma preocupação das professoras com a falta de apoio e orientação nas unidades escolares. A Professora 1 (comunicação pessoal, 12 de maio de 2017) afirma: "Não tínhamos orientação em como proceder na escola. A coordenação não participava das formações, as colegas não socializavam as experiências, era tudo muito confuso". Falas como essa demonstram uma desarticulação entre a escola e o processo formativo, o que possivelmente impactou negativamente na proposta de continuidade prevista pelo curso do PNAIC. Consideramos essa orientação absolutamente necessária para desenvolver com qualidade o processo de formação.

Nesse tocante, compreendemos que a Formação Continuada deve ser pensada e organizada "de maneira a envolver todos os profissionais, centrada nos trabalhos em conjunto com a equipe gestora, professores e funcionários, buscando as soluções para as diversas situações problemáticas vivenciadas na escola" (Schavaren, 2018, p. 58).

Entretanto, apesar dessas afirmações referentes às divergências com relação à obrigatoriedade do curso e à sobrecarga de ações a serem desenvolvidas pelos professores nesse ínterim, aspectos positivos também foram apontados. A Professora 4 (comunicação pessoal, 21 de julho de 2017) afirma que "o PNAIC veio não só para contribuir, mas para trazer uma mudança de atitude por parte dos professores"

Nesse tocante, as contribuições que se destacam nas falas das professoras estão principalmente relacionadas ao desenvolvimento da sequência didática e à inserção ou à releitura do jogo como metodologia de ensino. Como afirma a Professora 2 (comunicação pessoal, 19 de maio de 2017): "No Pacto nós aprendemos a construir jogos de Matemática. Tenho utilizado em sala e os resultados são positivos. As crianças se divertem e aprendem".

Dando continuidade à discussão, elencamos aspectos eminentes do segundo eixo, no que se refere às contribuições da formação do PNAIC para ampliação das práticas pedagógicas das professoras participantes da pesquisa. Nesta perspectiva, algumas narrativas foram significativas, reafirmando a importância da formação como potencializadora no desenvolvimento de práticas inovadoras, como aponta a Professora 1 (comunicação pessoal, 12 de maio de 2017), ao afirmar que *"a* partir do PNAIC passei a fazer a Sequência Didática. Antes ouvia falar sobre, mas foi na formação que eu aprendi a executar mesmo. A socialização foi muito válida também*"*. Ou quando menciona: "Passei a ter outra visão do jogo também. A importância do jogo, por que propor, quando, com qual finalidade". Nesse sentido, a Professora 4 (comunicação pessoal, 21 de julho de 2017) reitera:

> Você não precisa nem ter caderno e nem papel, para você ensinar vários conteúdos de matemática de uma forma prazerosa, brincando, jogando, ou seja, dentro das fases do desenvolvimento da criança, que a gente trabalha com a fase do operatório concreto, que a criança ela precisa sentir, pegar, ela precisa não só visualizar, mas ela usa a questão do tato o tempo todo.

Essas falas indicam que o curso mobilizou aprendizagens para as professoras com relação à prática do planejamento e da avaliação do desenvolvimento desse planejamento, bem como do processo de aprendizagem. No entanto, indica também a necessidade de aprofundamento teórico, metodológico e do conteúdo matemático.

Entendemos, assim, que o processo de Formação Continuada, neste caso, o PNAIC, possibilita ao professor:

> Experiências de aprendizagem através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que lhes permite interferir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem. (Garcia, 1999, p. 26)

Preocupa-nos, no entanto, o fato de que, quando a Professora 3 (comunicação pessoal, 15 de junho de 2017) é questionada com relação as suas impressões sobre os impactos da formação na aprendizagem efetiva dos alunos, ela relata que, ao chegarem ao 3.º ano, turma em que

leciona, eles ainda apresentam lacunas, no que diz respeito à aprendizagem da matemática, pois ela "percebe que não houve aquele trabalho de inclusão numérica, sem aquele trabalho de conservação numérica, tem crianças que não conserva quantidade, sempre ela tem voltar. E isso é muito ruim, essas coisas são básicas".

Desse modo, ainda que as professoras sinalizem em suas falas aproveitamento do curso, no que diz respeito à ampliação de repertório metodológico, aspectos divergentes se evidenciam, como a questão da obrigatoriedade, da organização do tempo e da articulação entre formação e escola/gestão. As professoras indicam um sentimento de sobrecarga e de desamparo quanto ao apoio da Escola no processo. Além disso, explicitam o fato de os dados indicarem que a formação não tem impactado na ampliação do repertório dos conhecimentos específicos dos conteúdos matemáticos que as professoras precisam saber para ensinar e nem diretamente na aprendizagem dos alunos, o que, certamente, é o objetivo principal das políticas de Formação Continuada para professoras.

Tendo em vista essas considerações e entendendo que as ações do PNAIC previam como princípios de formação: práticas da reflexividade, constituição da identidade profissional, socialização, engajamento e a colaboração (Brasil, 2012 a ou b?), concebemos que parte dos objetivos estabelecidos não foi devidamente alcançada e que avanços ainda precisam ser propostos.

Considerações finais

A Formação Continuada de professores que atuam no primeiro ciclo, ou seja, professores alfabetizadores, ainda é um desafio no Brasil. O desenvolvimento do PNAIC foi influenciado por muitos aspectos: a formação em "cascata", o perfil do formador, o envolvimento das secretarias de Educação, o envolvimento da equipe gestora da escola, a falta de tempo dos professores para o estudo, dentre tantos outros aspectos.

Consideramos que os professores conseguirão organizar o ensino da matemática e acompanhar a aprendizagem das crianças quando dominarem os conhecimentos matemáticos que precisam ensinar e entenderem como elas aprendem matemática e quais as alternativas metodológicas para ensiná-la. Nesse sentido, os professores precisam ser inseridos num movimento reflexivo que lhes permita a tomada de consciência de quais são os problemas que precisam enfrentar quanto à própria formação, à formação de seus alunos, aos currículos propostos, às políticas públicas de ensino.

Em nossa perspectiva, a Formação Continuada deve estar centrada na escola de maneira que os professores e a equipe gestora possam planejar, desenvolver e avaliar propostas pedagógicas para o ensino da matemática, investigar problemas de aprendizagem dos alunos e de 'ensinagem' dos professores, visando a uma ação contínua de reflexão sobre os processos de ensino e aprendizagem da matemática. Essas ações podem ser desencadeadas de diferentes maneiras, dentre elas, com a colaboração entre os profissionais da escola e os grupos de pesquisadores, configurando uma rede de apoio, estudo e pesquisa.

Referências y bibliografia

Brasil. (2012a). *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: formação do professor alfabetizador. Caderno de apresentação*. Brasília: MEC, SEB/DAGE.

_____. (2015). Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. Interdisciplinaridade no ciclo de alfabetização. Caderno de Apresentação*. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB.

_____. (2007). Presidência da República. *Decreto n° 6.094, de 24 de abril de 2007.* Dispõe sobre a implementação do Plano de Metas Compromisso Todos pela Educação. Brasília.

Decreto n. 6.094. (2007, 24 de abril). Dispõe sobre a implementação do Plano de Metas Compromisso Todos pela Educação, pela União Federal, em regime de colaboração com Municípios, Distrito Federal e Estados, e a participação das famílias e da comunidade, mediante programas e ações de assistência técnica e financeira, visando a mobilização social pela melhoria da qualidade da educação básica. Brasília, DF: Presidência da República.

Garcia, C. M. (1999). *Formação de professores - para uma mudança educativa.* Porto: Porto Editora.

Gatti, B. A., & Barreto, E. S. S. (2009). *Professores do Brasil: impasses e desafios*. Brasília: UNESCO.

Paiva, M. A. V. (2013). O professor de matemática e sua formação: a busca da identidade profissional. In A. M. Nacarato, & M. A. V. Paiva, (Orgs.), *A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas* [1](pp.). Belo Horizonte: Autêntica.

Palma, R. C. D. (2013). *Estratégias formativas no curso de especialização em Educação Infantil: em discussão as potencialidades e os obstáculos do trabalho com projetos*. Cuiabá: EdUFMT.

Schavaren, M. B. B. (2018). *O projeto de estudos e intervenção pedagógica (PEIP): o que dizem professores de matemática do Ensino Médio de uma escola estadual de Mato Grosso*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Dificultades para razonar inductivamente en profesores de secundaria al resolver un problema de generalización

Landy **Sosa** Moguel
Universidad Autónoma de Guerrero
México
landy.sosa@gmail.com
Guadalupe **Cabañas** Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
gcabanas@uagro.mx
Eddie **Aparicio** Landa
Universidad Autónoma de Guerrero
México
eeddie16@gmail.com

Resumen

En este estudio se examinó el razonamiento inductivo en profesores de matemáticas de secundaria, con el objeto de identificar las dificultades que enfrentan al resolver un problema de generalización. Dicho problema consistió en inducir una regla general correspondiente a un patrón de comportamiento cuadrático, y se aplicó a 19 profesores quienes lo resolvieron por escrito de forma individual. Las dificultades halladas radican principalmente en el proceso para establecer el patrón y están asociadas a la observación de una regularidad global entre los datos, al establecimiento de relaciones entre variables y a la abstracción de lo general.

Palabras clave: dificultades, profesores, razonamiento inductivo, resolución de problemas, generalización.

1. Introducción

El razonamiento inductivo es un proceso esencial para generalizar en matemáticas (Castro, Cañadas & Molina, 2010; Pólya, 1966). En el aprendizaje de las matemáticas, es fundamental en la resolución de problemas de generalización, ya que apoya el reconocimiento de regularidades, el establecimiento de patrones, la abstracción y formulación de reglas generales (Haverty, Koedinger, Klahr & Alibali, 2000; Murawska & Zollman, 2015; Mousa, 2017).

En educación secundaria, es necesario que los estudiantes usen razonamiento inductivo para

buscar relaciones matemáticas y generalizar distintas clases de patrones (NCTM, 2000). Es por ello que, para entender como favorecer dicho razonamiento en niños y jóvenes, varios estudios han analizado el razonamiento inductivo en la resolución de problemas, y se han enfocado en describir los procesos cognitivos que usan (Christou & Papageorgiou, 2007), la forma en que reconocen patrones en relaciones funcionales numéricas (Haverty, et al., 2000) y las estrategias inductivas que emplean en problemas sobre sucesiones (Cañadas, Castro y Castro, 2008).

No obstante, aun cuando el profesor es el principal actor en promover esta y otras formas de razonamiento en los estudiantes, escasos estudios se han centrado en analizar el razonamiento inductivo en profesores de matemáticas en servicio (Sosa y Cabañas, 2017). Con el interés de contribuir en este tema de investigación, se examinó el uso de dicho razonamiento por profesores de secundaria en la resolución de un problema matemático. El objetivo consistió en identificar las dificultades que ellos enfrentan al resolver el problema, el cual demanda razonar inductivamente para generalizar. La detección de tales dificultades proporciona información que puede orientar a la configuración de programas de desarrollo profesional.

2. Razonamiento inductivo

Filosófica e históricamente, el razonamiento inductivo ha sido una vía de estudio para descubrir principios universales o leyes de fenómenos, los cuales son abstraídos de la observación empírica de hechos particulares (e.g. Pineda, 2009; Poincaré, 1948). Es un tipo de razonamiento que posibilita el paso de los hechos singulares a las proposiciones generales (Frolov, 1984).

Cognitivamente, el razonamiento inductivo es un proceso que involucra inferir conclusiones generales de una totalidad de elementos a partir de un subconjunto de esos elementos (Sriraman & Adrian, 2004). En la literatura sobre el tema, una manera de analizar este razonamiento ha sido elucidando los procesos o fases que permiten pasar de la observación de un conjunto finito de casos particulares a la inferencia de una regla general (e.g. Cañadas y Castro, 2007; Christou & Papageorgiou, 2007; Haverty et al. 2000; Klauer, 1996). Estos estudios han coincidido en señalar que el razonamiento empieza con el trabajo con casos particulares dirigido a la observación de regularidades y se cristaliza en la generalización, como producto del proceso inductivo. Sin embargo, también han reportado que no todos los sujetos alcanzan tal generalización, esto es, extender el patrón a todos los casos de una clase o categoría general.

Es así que, en este estudio la atención estuvo en indagar cómo profesores de secundaria pasan de la observación de una regularidad a la formulación de una generalización, con el objeto de identificar las dificultades en su razonamiento inductivo para efectuar este tránsito.

3. Método

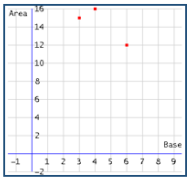
El estudio realizado fue empírico de tipo descriptivo, basado en la comparación y contraste de datos. Estos se obtuvieron por medio de la aplicación y resolución de un problema de razonamiento inductivo que involucraba generalizar una relación entre variables continuas.

3.1. Diseño del instrumento

El problema se diseñó con base en la propiedad genérica de las tareas del razonamiento inductivo: “requerir que el individuo induzca una regla que gobierna un conjunto de elementos” (Glaser & Pellegrino, 1982, p. 200). En éste la regla correspondía a la expresión de una relación funcional que representa la generalización de un patrón de comportamiento cuadrático, esto significa que la variación entre las variables es lineal (Villa, 2008).

El problema consistió en inducir una regla general para determinar la medida del área de cualquier rectángulo de una familia de estos (Figura 1). Para ello, se proporcionó información de tres rectángulos mediante tres puntos en una gráfica cartesiana, cuyas coordenadas representaban las medidas de su base (b) y área (A). La regla general podía inducirse a partir de reconocer el siguiente patrón asociado a las medidas de la base y la altura de los rectángulos: la suma de las medidas de la base y la altura (el semiperímetro) de la familia de rectángulos mide 8 unidades. La expresión algebraica de la regla es de la forma: $A = b(8 - b)$, con $0 < b < 8$.

Problema. En la gráfica se representan las medidas de la base y el área de tres rectángulos de una familia de estos.



A partir de dicha información, genere una expresión algebraica para calcular la medida del área de cualquier rectángulo de esa familia.

Figura 1. Problema planteado para generalizar usando razonamiento inductivo.

3.2. Participantes

El estudio fue conducido con un grupo de 19 profesores de matemáticas en educación básica (secundaria), en escuelas públicas en México. Ellos contaban con conocimientos matemáticos básicos sobre sucesiones y funciones lineales y cuadráticas, debido a su formación profesional en Escuelas Normales o en alguna ingeniería. Asimismo, enseñan esos contenidos como parte del currículo matemático de secundaria.

3.3. Recolección y análisis de datos

El problema fue planteado a los profesores por escrito y lo resolvieron de manera individual con una duración aproximada de 20 a 30 minutos. Las soluciones de los profesores fueron analizadas primeramente, para reconocer a aquellos que alcanzaron a formular una generalización y expresarla de manera verbal o escrita, y se clasificaron formando dos grupos de profesores, según si lograron generalizar (Grupo 1) o no lo lograron (Grupo 2). Para preservar el anonimato de los profesores, en los resultados se hará referencia a ellos con las letras del alfabeto castellano. Posteriormente, se compararon y contrastaron los procesos de solución de estos dos grupos, a fin de identificar las acciones del razonamiento inductivo que estuvieron ausentes en los profesores del Grupo 2, en relación con las del Grupo 1. Esto permitió identificar dificultades en su razonamiento inductivo para generalizar, las cuales se exponen a continuación.

4. Dificultades para generalizar razonando inductivamente

Todos los profesores iniciaron el proceso de razonamiento para la solución del problema mediante la obtención y organización de casos particulares. Esto se realizó interpretando las coordenadas de los puntos en la gráfica cartesiana dada. Así, los profesores obtuvieron los valores 3, 4 y 6 unidades, como medida de la base (b) de tres rectángulos y los valores 15, 16 y 12 unidades cuadradas, respectivamente, como medida de su área (A). Después, determinaron los valores de las alturas (h), utilizando la fórmula para calcular la medida del área de rectángulos: $A = b \times h$. Dichos valores constituyeron los casos particulares observados, y se

organizaron en tablas o en columnas de datos. Sin embargo, solamente el 16% de los profesores (3/19) pasaron del trabajo con casos particulares a la obtención de una regla general.

Las dificultades para razonar inductivamente en quienes no alcanzaron generalizar se situaron en el paso de la observación de una regularidad a la formulación de una generalización, especialmente en el establecimiento de un patrón. Se identificaron las dificultades siguientes:

a. Dificultad para reconocer numéricamente una regularidad global

La búsqueda de regularidades para establecer un patrón se centró en el trabajo aritmético entre cantidades y el uso de una estrategia recursiva de cálculo de diferencias, pero se presentaron dificultades para observar una regularidad que englobe varios casos particulares.

Los profesores que reconocieron un patrón y generalizaron adecuadamente, se basaron en la observación de regularidades numéricas de manera global. Ellos establecieron una relación aditiva entre los pares de valores (medidas de la base y la altura) obtenidos de la gráfica y compararon los resultados de la adición de esas medidas globalmente. Así observaron que la suma es igual al valor 8 en todos los casos, independientemente de la variación en los valores de b y h, como puede verse en la solución del profesor A (Figura 2).

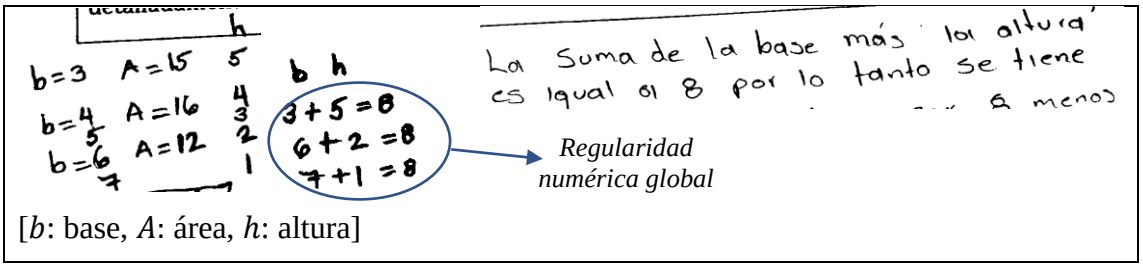


Figura 2. Regularidad global observada por el profesor A (Grupo 1).

Por el contrario, los profesores que solamente observan una regularidad localmente, no logran transitar hacia una generalización correcta, pues su razonamiento no trasciende a la observación de una regularidad global, es decir, que relacione y agrupe los casos particulares. Por ejemplo, el profesor D identifica una regularidad geométrica y numérica en los casos particulares. Geométricamente, la regularidad observada es que los puntos de la gráfica son simétricos respecto a un eje vertical. Considera que los puntos corresponden a la gráfica de una parábola vertical y determina puntos simétricos, $(5,3)$ a $(3,5)$ y $(2,6)$ a $(6,2)$, respecto al eje focal de la parábola (Figura 3). Numéricamente, observa que los valores de la base y la altura de algunos rectángulos son los mismos, pero intercambiados, y así obtiene otros casos particulares tales como: $(7,1)$ y $(1,7)$.

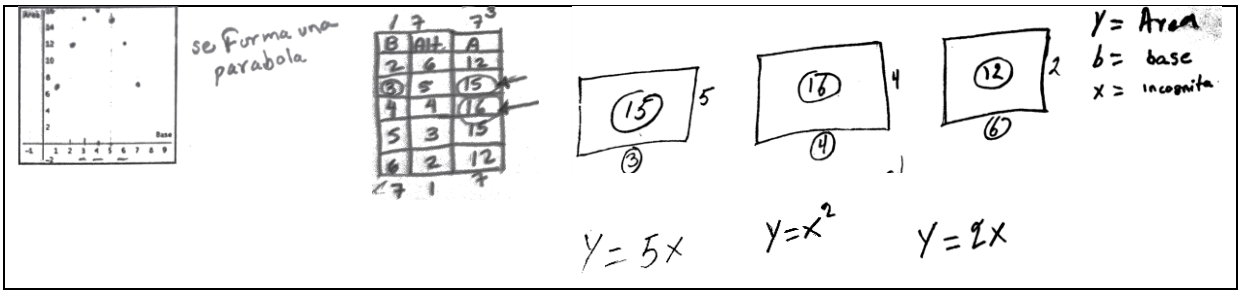


Figura 3. Solución del profesor D (Grupo 2).

No obstante, el razonamiento del profesor se caracterizó por un análisis puntual de los casos

particulares, sin mostrar un análisis de qué y cómo se relacionan los pares de valores entre cada caso. Si bien determinó expresiones para la medida del área, éstas eran distintas y no correspondían a la familia de rectángulos en general, sino a cada uno en específico, tal como la ecuación $y = 5x$ para el rectángulo que mide 3 unidades de base y 15 unidades cuadradas de área. Esta dificultad para observar una regularidad global que relacione distintos casos particulares obstaculiza poder establecer un patrón para generalizar inductivamente.

b. Dificultad para asociar una regularidad observada con una estructura matemática

Los profesores que llegan a establecer un patrón son quienes logran asociar una estructura matemática a las regularidades observadas. La dificultad en este proceso consistió en determinar alguna relación matemática entre las variables del problema.

En el caso de los profesores que sí establecieron un patrón, lo hicieron a partir de asociar y representar con una relación aditiva a la regularidad numérica observada entre las medidas de la base y la altura de los rectángulos, y establecer una relación de igualdad entre lo variable (base y altura) y lo constante (el semiperímetro de la familia de rectángulos). Por ejemplo, el profesor A expresó el patrón verbalmente como sigue: "*la suma de la base más la altura es igual a 8*" (Figura 2), mientras que el profesor B (Grupo 1) lo expresó tanto verbal como simbólicamente (Figura 4).

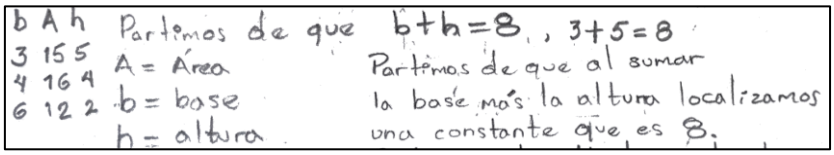


Figura 4. Expresión del patrón mediante una relación aditiva por el profesor B (Grupo 1).

Sin embargo, quienes no logran reconocer una relación matemática que conecte los casos particulares, no alcanzan a establecer el patrón. Esto es porque no identifican una relación que asocie lo variable con lo constante en la situación del problema. Tal fue el caso del profesor F (Grupo 2), por citar un ejemplo. Él trabajó con las medidas de la base (b) y el área de cada rectángulo por separado (Figura 5). Su atención estuvo en la forma de calcular la medida de la altura de los rectángulos, estableciendo una expresión lineal ($y = mx$) para la medida del área de cada uno, pero no identificó alguna relación entre las medidas de los distintos rectángulos para generar una fórmula general con la cual determinar el área de todos los rectángulos de la familia. En otras palabras, no mostró un análisis sistemático que le permitiera relacionar e interconectar las variables del problema en los distintos casos particulares por él considerados.

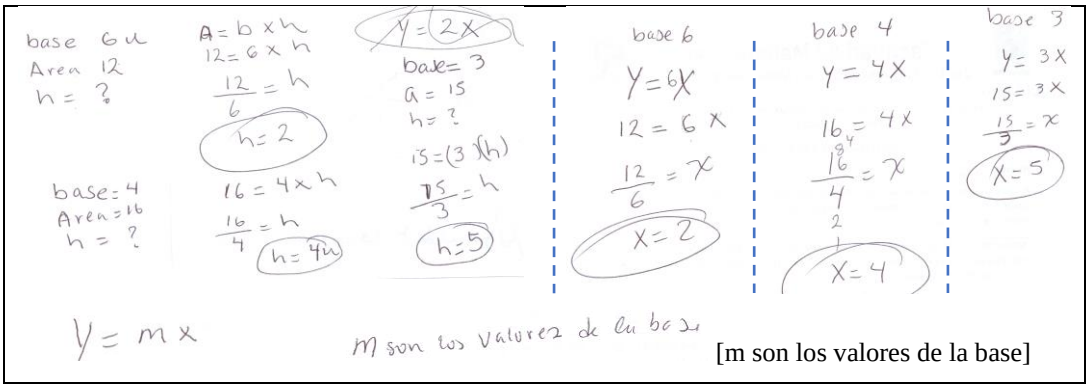


Figura 5. Solución del profesor F (Grupo 2).

Asimismo, se detectó que si la relación establecida entre las variables del problema queda imprecisa, entonces tampoco se llega a establecer el patrón adecuado. Por ejemplo, el profesor E plantea una relación entre los valores de *b* y *h* que expresa como sigue "*La b y h varían inversamente. Si la b aumenta una unidad, la h disminuye una unidad*" (Figura 6), pero resulta ambigua debido a que no establece con precisión la relación de dependencia entre tales variables.

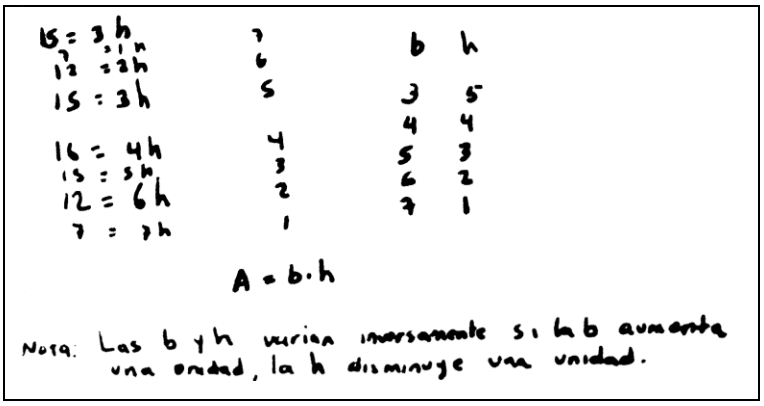


Figura 6. Relación entre los valores de *b* y *h* establecida por el profesor E (Grupo 2).

El razonamiento de quienes dieron una solución incompleta o no formularon una regla general para determinar la medida del área de los rectángulos, se caracterizó por no lograr establecer un patrón en los datos. La dificultad para establecerlo se atribuye a la imposibilidad de reconocer relaciones funcionales entre las variables implicadas en el problema. Adicionalmente, se plantea hipotéticamente que tal dificultad también podría ser relativa a la naturaleza covariacional de esas variables. Esto es, a la existencia de una dificultad específica en los profesores para determinar relaciones entre variables continuas que varían simultáneamente.

c. Dificultad para abstraer lo general en lo particular

Una dificultad en los profesores para culminar su proceso inductivo fue abstraer lo general en lo particular. Es decir, descontextualizar o aislar el patrón de la particularidad de los casos analizados y extenderlo a un conjunto que englobe una totalidad de casos, incluso no conocidos.

Los profesores que pasaron del establecimiento de un patrón a la formulación de una generalización evidenciaron la abstracción de relaciones invariantes en las tareas. Por ejemplo, abstrajeron que al variar las medidas de la base y la altura de los rectángulos, la medida de su semiperímetro permanece constante (Figura 7). Asimismo, infirieron que para calcular la medida de la altura de cualquier rectángulo, debían restar 8 unidades a la medida correspondiente a su base. De este modo generaron una regla general para determinar la medida del área de la familia de rectángulos, la cual expresaron como: $A = b(8 - b)$.

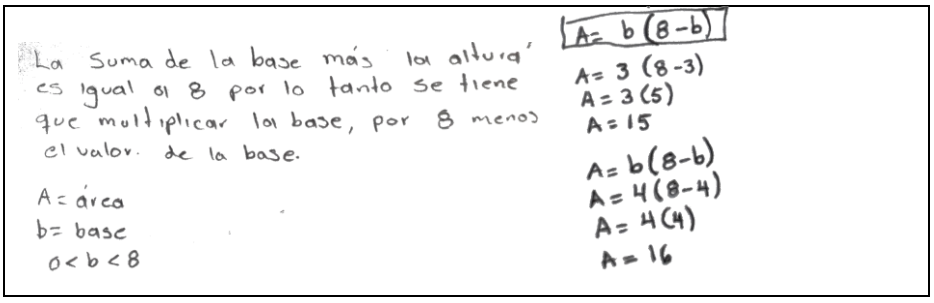


Figura 7. Expresión de la generalización en la solución del profesor A (Grupo 1)

La dificultad para abstraer una relación matemática que relacione y englobe los casos en una clase general, fue centrarse en la particularidad de cada caso de forma separada, tal como puede notarse en la solución del profesor D (Figura 3). Si bien relacionó uno a uno cada par de medidas de la base y el área de los tres rectángulos con su área y, por ensayo y error, le asoció una expresión algebraica, ésta fue distinta para cada rectángulo. No consiguió abstraer las relaciones invariantes entre los datos ni una forma general para determinar la medida del área de cualquier rectángulo de la familia.

Se infiere en este estudio que, ambas dificultades referidas en los apartados anteriores imposibilitan la formulación de una generalización, ya que dificultan abstraer lo general en lo particular.

5. Conclusiones

Una de las tareas importantes de los profesores de educación secundaria es promover el razonamiento inductivo en sus estudiantes. Sin embargo, el diseño y la conducción de actividades para llevar a cabo con éxito esta tarea, puede verse obstaculizada si los profesores carecen de competencias para resolver problemas mediante procesos inductivos. Bajo este supuesto, el propósito de este estudio fue identificar aquellas dificultades ligadas a la producción de generalizaciones de manera inductiva por parte de profesores de secundaria en servicio.

Los resultados muestran que la mayoría de los profesores no logró pasar de la observación de regularidades a la formulación de una regla general, y esto se debió a un conjunto de dificultades que radican esencialmente en el proceso de establecer un patrón de comportamiento cuadrático, particularmente de variables continuas. Si bien se había detectado mayor dificultad en generalizar comportamientos cuadráticos que lineales en estudiantes (Ebersbach & Wilkening, 2007) y profesores en formación (Manfreda et al. 2012), en este estudio se concluye que dichas dificultades en los profesores se hallan por un lado, en la falta de asociación de las regularidades observadas en casos particulares de una situación, con una relación matemática que las describa; y por otro, en la complejidad para abstraer lo general en lo particular, debido a que no se logra reconocer la característica invariante en todos los casos analizados y aquello que norma su comportamiento.

La observación puntual o aislada de lo que se repite en un conjunto de casos particulares resultó insuficiente para que los profesores pudieran establecer el patrón, pues este proceso inductivo requiere del establecimiento de relaciones numéricas entre datos que varían por medio de estructuras matemáticas. Por tanto, se hace necesario que los profesores dispongan de conocimientos para interpretar y representar relaciones entre variables; en especial, para construir la expresión de relaciones funcionales cuadráticas con base en datos numéricos. Esto sugiere que, en experiencias de aprendizaje profesional docente, se favorezca el desarrollo de procesos inductivos para pasar de lo particular a lo general, así como conocimientos basados en el estudio de relaciones matemáticas.

Referencias y bibliografía

Cañadas, M., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137–151.

Canadas, M. C., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67–78. https://doi.org/10.1227/01.NEU.0000032542.40308.65

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2010). El Razonamiento Inductivo como Generador de Conocimiento Matemático. *UNO, 54*, 55–67. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction, 17*(1), 55–66. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.11.009

Ebersbach, M., & Wilkening, F. (2007). Children's intuitive mathematics: The development of knowledge about nonlinear growth. *Child Development, 78*(1), 296-308.

Frolov, I. (1984). *Diccionario de filosofía.* Moscú: Editorial Progreso.

Glaser, R. & Pellegrino, J. (1982). Improving the skills of learning. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *How and how much can intelligence be increased* (pp. 197-212). Norwood, NJ: Ablex

Haverty, L., Koedinger, K., Klahr, D., & Alibali, M. (2000). Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. *Cognitive Science*, *24*(2), 249–298.

Klauer, K. (1996). Teaching inductive reasoning: some theory and three experimental studies. *Learning and Instruction*, *6*(1), 37–57. https://doi.org/10.1016/0959-4752(95)00015-1

Manfreda, V., Slapar, M. & Hodnik, T. (2012). Comparison of competences in inductive reasoning between primary teachers students and mathematics teacher students. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels.* Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego

Mousa, M. (2017). The influence of inductive reasoning thinking skill on enhancing performance. *International Humanities Studies, 4*(3), 37-48.

Murawska, J. M., & Zollman, A. (2015). Taking it to the next level: Students using inductive reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *20*(7), 416–422.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Pineda, O. (2009). Inducción y deducción como origen de la ciencia. *Konvergencias: Filosofía y culturas en diálogo, 21*, 122-133.

Poincaré, H. (1948). *Science and Method*. New York: Dover Publications.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Sosa, L. y Cabañas, M. G. (2017). Analytical framework to study inductive reasoning in mathematical teachers while solving task. En Galindo, E. and Newton, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1415-1418). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Sriraman, B., & Adrian, H. (2004). The Pedagogical Value and the Interdisciplinary Nature of Inductive Processes in Forming Generalizations: Reflections from the Classroom The University of Montana. *Interchange*, *35*(4), 407–422

Villa, A. (2008). El concepto de función: Una mirada desde las matemáticas escolares. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21*, 245-254. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C.



Uso de algunos constructos del modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemático para el estudio de informes de práctica de futuros profesores de matemáticas.

Vicenç **Font-Moll**
Universitat de Barcelona
España
vfont@ub.edu

Yuri **Morales-López**
Universidad Nacional
Costa Rica
ymorales@una.ac.cr

Marianela **Alpízar-Vargas**
Universidad Nacional
Costa Rica
marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr

Resumen

El Modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemático ha permitido el abordaje de problemas de la didáctica de las matemáticas y en particular, el análisis didáctico. El objetivo de este taller es utilizar algunos elementos teóricos y constructos del modelo para el estudio de las narrativas de tal manera que se identifiquen o se logre encontrar evidencia de los conocimientos y competencias en los futuros profesores de matemáticas. El trabajo será desarrollado de tal manera que 1. Se expone la narrativa y pautas para análisis, 2. Se tratan de contestar preguntas vinculadas a las competencias y conocimientos evidenciados, y, 3. en una actividad grupal, se comparten las percepciones de los distintos participantes.

Palabras clave: Modelo CCDM; Competencias; conocimientos; futuro profesor; matemáticas.

Use of some constructs of the model of Didactic-Mathematical Competences and Knowledge for the study of practice reports of future mathematics teachers.

Abstract

The Model of Didactic-Mathematical Competences and Knowledge has allowed the approach of problems of the didactics of mathematics and, mainly, the didactic analysis. The objective of this workshop is to use some theoretical elements and constructs of the model for the study of narratives, in such a way that evidence of knowledge and skills can be identified in future mathematics teachers. The work will be developed in the following sequence: 1. the narrative and guidelines for analysis are presented, 2. the participants try to answer questions linked to the skills and knowledge evidenced, and, 3. in a group activity, the perceptions of the different participants are shared.

Keywords: DMKC model; Competences; Knowledge, prospective teacher; mathematics.

Trabajo por desarrollar

El Enfoque Ontosemiótico y el modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemático

Varias de las tendencias actuales en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas apuntan al desarrollo de la competencia para el análisis y reflexión de las situaciones que ocurren en el aula. Existen muchas situaciones que merecen interés, por ejemplo, solo en el campo de la formación se pueden mencionar la capacidad de análisis de los profesionales en situaciones video grabadas, la reflexión del planeamiento y el diseño de tareas, el estudio de las reflexiones en portafolios, entre muchos otros.

En este taller se desarrolla una serie de actividades que fomentan el estudio de competencias y conocimientos presentes en los informes de práctica de los estudiantes en formación inicial y las evidencias que justifican la aparición o ausencia de estas competencias o conocimientos.

Para tal fin, se ha decidido utilizar el modelo de competencias y conocimientos didáctico-matemático del profesor (CCDM) (Godino, Batanero, Font y Giacomene, 2016; Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017) el cual proporciona una herramienta teórica para la interpretación de las competencias y los conocimientos del profesor de matemática. Este modelo está sustentado en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

Respecto a esta forma de usar el EOS, Godino (2009), señala que en sí mismo el EOS "es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje" (p.20). Inclusive, "las nociones teóricas del EOS deben ser vistas como herramientas de análisis y reflexión sobre los procesos de

enseñanza y aprendizaje y pueden ser utilizadas por los propios profesores para indagar sobre su propia práctica" (Godino, 2009, p. 20).

En particular, se aborda en este taller constructos de la competencia general de *diseño e intervención didáctica* y las cinco subcompetencias que la componen. En el cuadro 1, se muestran las facetas y componentes que forman parte del modelo de conocimiento matemático.

Cuadro 1

Modelo de conocimiento matemático, las facetas y componentes del CCDM.

Faceta	Interpretación
Epistémica	es el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial. Sería equivalente a lo que Ball, Lubienski y Mewborn (2002) denominan conocimiento especializado del contenido matemático, aunque en nuestro caso el EOS aporta un desglose analítico de sus elementos constituyentes.
Cognitiva	implica el conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje.
Afectiva	incluye los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
Instruccional	conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, e interacciones que se puede establecer en el aula.
Mediacional	conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.
Ecológica	implica las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática.

Fuente: Extraído de Godino, Batanero, Font & Giacomone (2016, pp. 288 – 289).

Respecto a las subcompetencias vinculadas a la competencia general de *diseño e intervención didáctica*, se mencionan a manera de ejemplo, algunas de las preguntas que persiguen cada una de ellas en el cuadro 2.

Cuadro 2

Subcompetencias de la competencia general de diseño e intervención didáctica del CCDM y preguntas orientadoras.

Subcompetencias	Preguntas orientadoras
Competencia de análisis de significados globales	– ¿Cuáles son los significados del objeto matemático (por ejemplo, cuáles son los diferentes significados de la probabilidad)? –¿Cómo se articulan entre sí?
Competencia de análisis Ontosemiótico de prácticas matemáticas	– ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en la resolución que son característicos de los diversos significados de los contenidos pretendidos? (configuraciones epistémicas). – ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los alumnos en la resolución de los citados problemas? (configuraciones cognitivas).
Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas	– ¿Qué tipos de interacciones entre personas y recursos se implementan en los procesos instruccionales y cuáles son sus consecuencias sobre el aprendizaje? – ¿Cómo gestionar las interacciones para optimizar el aprendizaje?
Competencia de análisis normativo	– ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales? – ¿Quién, cómo y cuándo se establecen las normas? – ¿Cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático?
Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica	– ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza – aprendizaje implementado sobre las ecuaciones de segundo grado? – ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica en un próximo ciclo de experimentación?

Fuente: Extraído de Godino, Batanero, Font & Giacomone (2016, pp. 290 – 292).

Protocolo y preguntas generadoras para el taller

En este taller se abordan dos momentos de trabajo: el trabajo en subgrupos basados en un análisis de las narrativas y otra referente en la puesta en común y discusión sobre algunos hallazgos. Así, las etapas se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Se expone la narrativa y pautas para análisis.
2. Se tratan de contestar preguntas vinculadas a las competencias y conocimientos evidenciados,
3. En una actividad grupal, se comparten las percepciones de los distintos participantes

De esta manera, se pretende que, mediante algunos constructos del CCDM, los participantes ofrezcan posibles respuestas para las siguientes preguntas: ¿Qué competencias (y con qué grado

de desarrollo) se pueden inferir a partir de la narrativa? ¿Qué tipo de conocimientos (y cuáles) se pueden inferir a partir de la narrativa? ¿Qué aspectos de la pauta utilizada para la observación se podrían mejorar para poder responder mejor las dos primeras preguntas?

Algunos referentes para este taller

Muchos trabajos, tanto de corte teórico como práctico, han sido desarrollados en el marco del EOS y del modelo CCDM. Para este taller se ha tomado como referencia directa los trabajos de Breda y Lima (2016), Breda, Font y Lima (2015), Breda, Font y Pino-Fan (2018), Breda, Font, Lima y Pereira (2018), Breda, Pino-Fan, y Font (2017), Font (2015), Morales y Font (2017a; 2017b), Morales, Araya y Font (2017a, 2017b), Font (2018), Pino-Fan, Godino y Font (2018) y Seckel (2016), Morales y Poveda (2013), Morales y Poveda (2015), Morales, García y Fonseca (2014), Morales-López (2015), Morales-López (2017), Morales-López y Font (2019), Morales (2019).

Reconocimiento

La investigación realizada es parte del proyecto EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE), el proyecto REDICE18-2000 y del proyecto 0082-16 de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, Costa Rica, y el Convenio Internacional entre la Universidad Nacional, Costa Rica, y la Universitat de Barcelona, España (Cod 018133).

Referencias y bibliografía

Breda, A., & Lima, V. M. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT, 5*(1), 74-103.

Breda, A., Font, V. & Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. & Pereira, M. V. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162 -176

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal Of Mathematics Science And Technology Education*, *13*(6), 1893-1918.

Font, V. (2015). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática* [Guideline for the analysis and assessment of the didactical suitability of the mathematics teaching and learning processes]. Unpublished manuscript. Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática, Universitat de Barcelona.

Font, V. (2018). Los criterios de idoneidad didáctica en la formación de profesores. En *Memorias del Cuarto Encuentro Internacional de Investigación en Educación Matemática*. Colombia: Universidad del Atentico.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: El modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/8859/1/Batanero2016Articulando.pdf

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Morales, Y. y Poveda, R. (2013). *Plataforma Educativa Nacional para la Formación Continua de Docentes de Matemáticas en Costa Rica*. En E. Rodríguez, Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática CIBEM 7, 7030-7037. Montevideo, Uruguay. Descargado de http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/53.pdf

Morales, Y. y Poveda, R. (2015). Capacitación de docentes con apoyo de tecnologías en la reforma de la educación matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10(13), 79-97. Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19146/

Morales, Y., & Font, V. (2017a). Elementos de idoneidad didáctica que los futuros profesores de matemática muestran durante su práctica docente. En J. Martínez (Ed.). *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 23-31). Madrid: CIBEM. Recuperado de http://cibem.org/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_CB1-100.pdf

Morales, Y., & Font, V. (2017b). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Revista ACTA SCIENTIAE, 19*(1), 122-137. Recuperado de http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2975/2280

Morales, Y., García, M. y Fonseca, J. (2014). Perfil académico-profesional del docente de matemáticas bajo el enfoque por competencias. *Revista Unión*, 38 (1), 85 – 101. Disponible en http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/38/archivo9.pdf

Morales-López, Y. & Font, V. (2019). Evaluation by a teacher of the suitability of her mathematics class. *Educação e Pesquisa, 45*, 1-19. e189468. doi: 10.1590/S1678-4634201945189468

Morales-López, Y. (2015). Uso de tecnología en la educación: las habilidades básicas del maestro de primaria en la clase de matemática. *Revista Tecnología en Marcha*, 28(4), pág. 108-121. doi: http://dx.doi.org/10.18845/tm.v28i4.2448

Morales-López, Y. (2017). *Costa Rica: The Preparation of Mathematics Teachers*. In A. Ruiz (Ed.), Mathematics Teacher Preparation in Central America and the Caribbean: The Cases of Colombia, Costa Rica, the Dominican Republic and Venezuela (pp. 39–56). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44177-1_3

Morales-López, Y. (2019). Knowledge evidenced by prospective mathematics teachers when performing a task involving geometry, teaching and the use of technology. *ACTA SCIENTIAE, 21*(2), 75-92. doi https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5081

Morales-López, Y., Araya, D., y Font, V. (2017a). El uso de la noción de idoneidad didáctica como herramienta para la reflexión sobre lo que ocurre en episodios videograbados de

clase. En Angel, R. Memorias: *II Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe*. Colombia. Disponible en http://ciaem-redumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/view/469

Morales-López, Y.; Araya, D. y Font, V. (2017b). La noción de idoneidad didáctica como herramienta para la reflexión de la clase de matemática. En Y. Morales-López, M. Picado, R. Gamboa, C. Martínez, M. Castillo y R. Hidalgo (Eds.). *Memorias del VI Encuentro Provincial de Educación Matemática, Costa Rica, 2017* (pp. 49-51). Heredia: Universidad Nacional. DOI: http://dx.doi.org/10.15359/epem.6.13

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(1), 63-94.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática.*Tesis de doctorado no publicada. Barcelona, España: Universitat de Barcelona.



Los *estudios de caso:* una posibilidad para movilizar el sentido personal de profesores que enseñan matemáticas en programas de administración

Diego Alejandro **Pérez** Galeano

Institución Universitaria CEIPA

Colombia

diego.perez@ceipa.edu.co

Diana Victoria **Jaramillo** Quiceno

Universidad de Antioquia

Colombia

diana.jaramillo@udea.edu.co

Resumen

Fundamentados en la perspectiva histórico-cultural de la educación y en la Teoría de la Actividad, presentamos un proyecto a nivel doctoral cuyo objetivo es analizar la movilización del sentido personal de tres profesores que enseñan matemáticas en programas de administración, a partir de la metodología de clase llamada *estudios de caso*. En este sentido, al reconocer la alienación como un fenómeno social y cultural que causa, entre otras cosas, un desencuentro entre el significado cultural y el sentido personal de los profesores, proponemos un proceso formativo fundamentado en la reflexión sobre la propia práctica al interior de un colectivo de formación y la escritura de *estudios de caso*, como posibilidad para que estos profesores le atribuyan otro sentido a su propia actividad. La investigación narrativa posibilitará una aproximación a dicha movilización de modo que los profesores, permeados por las experiencias de sus compañeros y sus historias de vida, le atribuyan otro sentido personal a su actividad de enseñanza.

Palabras-clave: formación continuada de profesores, alienación, Teoría de la Actividad, colectivo de formación, investigación narrativa, perspectiva histórico-cultural, docencia universitaria.

Planteamiento del problema

La investigación sobre la formación inicial y continuada de maestros que enseñan matemáticas centradas en procesos de reflexión e investigación se ha desarrollado en dos contextos específicos: en primer lugar, trabajos como los de Jaramillo (2003) y Cedro (2008, 2016), que han analizado los procesos de formación en las licenciaturas; y las investigaciones de Polettini (2000), Araujo (2003), Asbahr (2005), Moretti (2007), Moretti y Moura (2010), Migueis (2010), González (2014), Pérez (2016) y Cadavid (2017) analizaron los procesos de formación de profesores que enseñan matemáticas en un contexto escolar. Sin embargo, autores como Almeida (2012) advierten que una proporción menor de investigaciones se ha enfocado en el contexto universitario.

Así, pensando ese último contexto, presentamos un proyecto de nivel doctoral cuyo objetivo es analizar la movilización del sentido personal de tres profesores que enseñan matemáticas en programas de administración, a partir de la metodología de clase llamada *estudios de caso.* A continuación, comentaremos sobre el contexto en el cual se desarrolla esta investigación, así como el problema que fundamenta la misma.

La universidad en la cual trabajan los tres profesores protagonistas de esta investigación tiene una escuela de administración en la que se forman profesionales en los programas de administración de empresas, administración financiera, administración de mercadeo, administración de negocios internacionales, administración de gestión humana y contaduría pública en las modalidades presencial (diurno y nocturno) y virtual. Una de las principales características de la escuela de administración es su modelo pedagógico; en él se destaca la organización curricular de sus cursos, llamados núcleos problémicos. En la estructura curricular de todos los programas de pregrado aparecen tres núcleos que conforman el área académica de ciencias básicas. Los núcleos que componen esta área académica son: matemáticas, estadística y métodos cuantitativos para los negocios. A lo largo de cada uno de estos núcleos, los problemas y las temáticas subyacentes a ellos están organizados en una subestructura de los núcleos llamada objetos de aprendizaje.

Cada uno de los objetos de aprendizaje tiene una situación problematizadora la cual, por lo general, es una historia de un gerente o un administrador, creada por un profesor experto en administración, que requiere solucionar un problema de su empresa. Esta historia contiene implícita o explícitamente una necesidad de aplicar conceptos matemáticos que el estudiante debe reconocer a partir de la primera lectura. Además, a través de una serie de tareas (debates, trabajos escritos y evaluaciones, entre otras modalidades) se espera que el estudiante se aproxime a una solución, la cual se discute al final del objeto de aprendizaje. En la figura 1 mostramos la estructura general de los programas de administración.

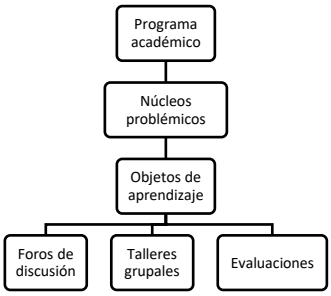


Figura 1. Estructura básica de los programas académicos de la escuela de administración.

En este sentido, comprender la realidad de las empresas para dar solución a sus problemáticas ha generado en la universidad la necesidad de establecer unas metodologías para la enseñanza de los núcleos en la institución. Así, la escuela de administración ha buscado estrategias que les posibilite a profesores y a estudiantes atribuirle sentido a la teoría a través de la práctica, y al análisis de los eventos que ocurren en las empresas. Es por esto por lo que la mayoría de los profesores son profesionales que no solo realizan actividades de docencia sino también consultorías, investigaciones aplicadas a empresas y acompañamiento a procesos de prácticas empresariales, lo cual les posibilita escribir *estudios de caso*, exponer sus prácticas a través de charlas y aportar a la reflexión en las clases centrados en sus experiencias.

Sin embargo, estas metodologías aún no han sido apropiadas por los tres profesores del área de ciencias básicas, protagonistas de esta investigación, ya que las actividades de consultorías o de apoyo a las empresas no corresponden al perfil que, según la universidad, tienen estos profesores. Ante esta situación, las metodologías que tienen a su disposición estos profesores, se caracterizan por estar poco relacionadas con los contextos reales de las empresas, ocasionando, desde el punto de vista de los profesores, que las discusiones en términos matemáticos estén alejadas de los contextos donde se desempeñarán laboralmente los estudiantes que ellos atienden. Esta situación ha venido ocasionado un desencuentro entre el significado que la universidad ha construido en torno a la enseñanza de las matemáticas en la escuela de administración, y el sentido personal que el profesor le atribuye a su actividad de enseñanza. Dicho desencuentro lo entendemos como una forma de *alienación*. Según Marx (1980), la relación objetiva-subjetiva del trabajo y su objeto se entiende alienada cuando tanto el objeto de su trabajo, como el proceso y la cultura son ajenos o no totalmente interiorizados por los trabajadores. Según el autor:

> El objeto del trabajo que el trabajador produce, su producto, se enfrenta a él como un *ser extraño*, como un *poder independiente* del productor. El producto del trabajo es el trabajo que se ha fijado en un objeto, que se ha hecho otra cosa; el producto es la objetivación del trabajo. La realización del trabajo es su objetivación. Esta realización del trabajo aparece en el estadio de la Economía Política como *desrealización* del trabajador, la objetivación como *pérdida* del *objeto* y servidumbre a él, la apropiación como *extrañamiento*, como *enajenación.* (p. 106, énfasis del autor)

En otras palabras, entendemos a la alienación como un fenómeno cultural de las formas de trabajo que ocasiona *(des)encuentros* entre el sentido personal que el trabajador le atribuye a su trabajo y el significado que la cultura le ha dado a dicha actividad. Utilizamos la expresión (des)encuentros para mostrar que en algunas ocasiones el sentido personal y el significado cultural convergen, mientras que en otras ocasiones se distancian. Además, comprendemos que el sentido personal y los significados culturales se constituyen dialécticamente, y que es en esta dialéctica donde habita la alienación, como algo que moviliza tanto al sujeto y al sentido personal que este les atribuye a sus actividades, como a la sociedad y al significado cultural que se ha determinado, para dichas actividades.

Frente a estos (des)encuentros entre el sentido personal que el profesor le atribuye a su actividad de enseñanza y el significado cultural que se le ha dado a la escuela de administración en la formación de los administradores, buscamos con esta investigación una aproximación a la movilización del sentido personal que supere dichos (des)encuentros, por medio de un proceso permeado por reflexiones sobre la metodología de enseñanza llamada *estudios de caso* en un colectivo de formación constituido por los tres profesores protagonistas del estudio. Comprendemos al colectivo de formación en el sentido de Moura (2000), como un grupo de sujetos que comparten una necesidad, la cual llama a estos sujetos a planear colaborativamente las actividades que llevarán al alcance de los objetivos comunes.

Así, a través de esta investigación pretendemos responder a la pregunta ¿Cómo se moviliza el sentido personal de profesores que enseñan matemáticas en programas de administración, a partir de la metodología de clase *estudios de caso*? Y, en coherencia con dicha pregunta, nuestro objetivo es analizar la movilización del sentido personal de profesores que enseñan matemáticas en programas de administración, a partir de la metodología de clase *estudios de caso*.

Marco teórico

La fundamentación teórica de esta investigación se centra en dos aspectos: primero, la formación de profesores en la perspectiva histórico-cultural de la educación, y, segundo, los *estudios de caso* como apuesta metodológica para la enseñanza de las matemáticas.

La formación de profesores en la perspectiva histórico-cultural de la educación.

Sobre la formación de profesores que enseñan matemáticas en la perspectiva histórico-cultural de la educación, compartimos las posturas de autores como Moura (2000), Fontana (2000), Jaramillo (2003), Asbahr (2005), Moretti (2007), Cedro (2008) y Cadavid (2017) quienes apuntan que la formación de los profesores no puede ser comprendida como un proceso lineal (en un modelo que atienda a la racionalidad causa-efecto); donde un investigador (quien parece detentor del conocimiento y, a veces, es ajeno a la práctica pedagógica) dice y el profesor ejecuta lo dicho. Nuestra comprensión sobre la formación de profesores se fundamenta en la posibilidad de movilizar las subjetividades, sentidos y actividades a través del compartir con los otros. A propósito, apunta Fontana (2000) que:

> Solamente en relación con otro individuo nos volvemos capaces de percibir nuestras características, de delinear nuestras peculiaridades personales y nuestras peculiaridades como profesionales, de diferenciar nuestros intereses de las metas ajenas y de formular juicios sobre nosotros mismos y sobre nuestro hacer.. (p. 62)

En este sentido, manifestamos a continuación algunas de nuestras comprensiones epistemológicas, gnoseológicas y ontológicas respecto a la formación de profesores. En primer lugar, comprendemos que la formación de profesores no es un proceso lineal que obedezca a razonamientos como este: “si un profesor recibe una buena formación, entonces será un buen profesor y, por tanto, sus estudiantes aprenderán más”. Contrario a esta perspectiva, comprendemos la formación de profesores como un proceso dialéctico, que posibilita el encuentro de voces, de tensiones y de contradicciones que movilizan las actividades en los profesores y el sentido personal que estos le atribuyen a dichas actividades (Jaramillo, 2003).

En segundo lugar, comprendemos que la formación de profesores no consiste en procesos de transmision de conocimientos por alguien que “ostenta” el conocimiento, sino que, antes bien, entendemos dicha formación como un trabajo colaborativo para/con/por los profesores que aporta elementos de formación para ellos, ya que a partir de la voz del otro se constituyen los sujetos.

Y, en tercer lugar, en cuanto a la formación de profesores que enseñan en contextos universitarios, coincidimos con autores como Cunha (2003, 2013), Morosini (2000), Isaia (2000) para quienes esta formación debe caracterizarse por aspectos como la colaboración, el trabajo en comunidades de práctica, la mediación entre la producción académica y la investigación sobre la propia práctica y, de manera particular, la reflexión sobre los procesos de formulación de metodologías que aporten a la construcción de conocimientos en los estudiantes.

Los *estudios de caso* como metodología de clase

En el proceso de formación propuesto para/con/por los profesores es importante identificar un aspecto de su actividad de enseñanza sobre el cual ellos no solo reflexionen en términos de su pertinencia, sino que también muestren otros caminos para la enseñanza de las matemáticas en un contexto particular como lo es la escuela de administración. Es así como en esta investigación centraremos nuestra atención en la movilización del sentido personal de los profesores de ciencias básicas, a partir de la reflexión y escritura de *estudios de caso* al interior de un colectivo de formación. A continuación, comentaremos algunas comprensiones en cuanto a esta metodología de clase.

Los *estudios de caso*, como metodología de clase, fueron utilizados por primera vez en programas de derecho y medicina en la Universidad de Harvard en la segunda década del siglo XX, como respuesta a las metodologías centradas en las lecturas de contextos ajenos a los estudiantes, y como posibilidad de recrear situaciones reales sobre las cuales se puedan analizar escenarios y tomar decisiones (Bayona y Castañeda, 2017). En este sentido y en el contexto de esta investigación, entendemos los *estudios de caso* como narraciones (reales o ficticias) de realidades empresariales en las cuales los estudiantes y los profesores analizan la situación, se cuestionan y debaten sobre las posibles causas, proponen soluciones y elaboran conclusiones sobre la aplicación de estas soluciones a las problemáticas inicialmente analizadas.

Otro aspecto que es importante resaltar es el hecho de que la discusión en torno a los *estudios de caso* no determina una única solución; en efecto, de acuerdo con Puchol (2005)

> La metodología de *estudios de caso* no pretende que los formandos encuentren la solución ideal preestablecida, pues con frecuencia esa solución ideal no existe, o, alternativamente, se puede llegar a los mismos resultados por distintos caminos. La metodología *estudios de caso* huye así de las soluciones y opiniones dogmáticas, y pretende más bien el aprendizaje de los formandos en actitudes favorables a la resolución de problemas en equipo, favoreciendo la percepción de la realidad, la reflexión personal, la capacidad de análisis/síntesis y la asunción de riesgos. (p. 2)

Para lograr dichos procesos de análisis y síntesis, retomamos los elementos que deben tener los *estudios de caso*. Wassermann (1994) enumera los principales elementos que estos deben tener: en primer lugar, debe existir obviamente un caso. Dicho caso, como se mencionó anteriormente, es una narración creada por el profesor (o recuperada en repositorios) en la cual resultan algunas preguntas abiertas frente a una problemática (en este caso de las empresas) y que requiere, entre otras cosas, un análisis que use los conceptos que el profesor propone que los estudiantes utilicen (como parte de la planeación de las clases).

En segundo lugar, los *estudios de caso* se caracterizan por presentar preguntas críticas, las cuales implican que los estudiantes realicen reflexiones sobre los problemas y no solamente el recuento de informaciones aisladas previamente aprendidas. En tercer lugar, los *estudios de caso* implican el trabajo en equipos pequeños, ya que las reflexiones suscitadas por las preguntas críticas deben ser debatidas con el fin de establecer acuerdos respecto a las posibles soluciones para las problemáticas planteadas. En cuarto lugar, los *estudios de caso* proponen una discusión general luego del trabajo en equipo, de modo que se llegue a un consenso sobre las causas del problema, las posibles soluciones y el impacto que tendrían dichas soluciones. Finalmente, el profesor debe cerrar el *estudio de caso* por medio de una conclusión, lo cual puede dejar abierto el debate sobre la solución utilizada frente al problema.

Método de Investigación

Este estudio se está desarrollando bajo un paradigma cualitativo de la investigación. Este paradigma se caracteriza por analizar al ser humano en varias de sus dimensiones y reconoce, a partir de su

subjetividad, sus aspectos sociales, políticos, culturales, entre otros (Taylor y Bogdan, 1996; Cohen, Manion y Morrison, 2007; Denzin y Lincoln, 2012).

Asumimos además en esta investigación un enfoque metodológico crítico-dialéctico (Sánchez, 1998) tanto para planear el trabajo de campo como para realizar el análisis. Consideramos este enfoque pertinente para analizar el sentido personal, pues en sus presupuestos epistemológicos guarda la intencionalidad de aportar a la transformación de los sujetos y no la simple observación y descripción de un fenómeno particular. En nuestro caso, creemos en la posible transformación de los maestros del colectivo de formación frente al sentido personal sque le atribuyen a sus actividades de organización de la enseñanza.Así mismo, en este proyecto asumimos como método la investigación narrativa (Conelly y Clandinin, 1995, 2000; Jaramillo, 2003; Cadavid, 2017), la cual se caracteriza por

- Tener como fundamentación a la experiencia compartida entre el investigador y los protagonistas de la investigación.
- Contar con una negociación de entrada y salida del campo.
- Disponer de instrumentos de producción de registros y datos como ideogramas, autobiografías, cartas, diarios de campo (del investigador y los protagonistas), textos biográficos, planes de clase, entrevistas semi-estructuradas, entre otras formas de narración, en las cuales los sujetos exponen sus experiencias a través de relatos.
- Destacar el papel del investigador como alguien que, lejos de ser pasivo, tiene una voz importante dentro de la comunidad de colaboración.
- Tener un relato final como producto no solo de las observaciones del investigador, sino como consecuencia de la lectura constante de los datos y los análisis con los protagonistas.

Como lo mencionamos en el planteamiento del problema, los protagonistas de la investigación son los tres profesores del área de ciencias básicas de una universidad del municipio de Sabaneta (Colombia). A partir de la motivación de estos maestros para la creación de *estudios de caso* para la enseñanza de las ciencias básicas en la escuela de administración desde el año 2017, y la socialización de los objetivos de la presente investigación doctoral, se constituyó con ellos un colectivo de formación, con una agenda consistente en encuentros quincenales en los cuales se realizan actividades acordadas de manera colaborativa. Así, para la producción de registros y datos se están utilizando técnicas e instrumentos, los cuales comentamos a continuación.

En primer lugar, los ideogramas han posibilitado reflexionar respecto a preguntas como ¿Quién soy como maestro de matemáticas? En este sentido, en las socializaciones de estos ideogramas los profesores han evocado sus historias de vida, para contar sus caminos de formación como maestros que enseñan matemáticas en programas de administración. En segundo lugar, los mapas conceptuales creados colaborativamente han dado cuenta de las comprensiones que los maestros tienen en torno a la actividad de enseñanza y a la importancia de las necesidades de los estudiantes para la búsqueda y apropiación de metodologías. En tercer lugar, se ha propuesto a los maestros una serie de entrevistas semi-estructuradas, las cuales se han constituido en espacios de diálogo que muestran constantemente el sentido personal que ellos le han atribuido a sus propias actividades y cómo el trabajo colaborativo ha apuntado a otros caminos para la apropiación y (co)creación de *estudios de caso.*

Finalmente, en los registros y datos son clave los *estudios de caso*; estos están siendo escritos de manera colaborativa. La unidad de análisis son los enunciados (Bajtín, 2009) como manifestación de las acciones propias de las actividades realizadas por los profesores. Al momento del envío de este

documento, el proyecto se encuentra en la etapa del trabajo de campo; así, el análisis se realizará durante el año 2019.

Referencias bibliográficas

Almeida, M. M. (2012). Desenvolvimento profissional dos docentes do ensino superior. Contributos para a compreensão do desenvolvimento profissional dos docentes que atuam na formação inicial de professores (Tesis doctoral inédita, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal).

Araujo, E. (2003). *Da formação e do formar-se. A atividade de aprendizagem docente em uma escola pública.* (Tesis doctoral inédita, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil).

Asbahr, F. (2005). *Sentido pessoal e Projeto político pedagógico: análise da atividade pedagógica a partir da psicologia histórico-cultural.* Recuperado de http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/47/47131/tde.../DissertFlavia1.pdf

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. México D.F., Estados Unidos Mexicanos: Publimex.

Bayona, J. y Castañeda, I. (2017). Case Method Effectiveness: Role of Individual Characteristics in a Sample of Colombian Students. *Management education & development, 15*, 409–428.

Cadavid, L. (2017). Constitución de la subjetividad del sujeto maestro que enseña matemáticas, desde y para la actividad pedagógica. (Tesis doctoral inédita, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia).

Cedro, W. (2008). O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de matemática: uma perspectiva histórico-cultural. (Tesis doctoral inédita, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil).

Cedro, W. (2016). Changing teachers' mathematical knowledge during their teaching activity. *RIPEM, 6*(2), 89-110.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6° Ed.). New York, NY: Routledge.

Connelly, M., y Clandinin, J. (1995). Relatos de experiencia e investigación narrativa. En Larrosa, J. et al. (Eds.), *Déjame que te cuente: ensayos sobre narrativa y educación* (pp. 11–59). Barcelona, España: Laertes.

Cunha, M. I. (2000). Ensino como mediação da formação do professor universitário. En M. Morosini (Ed.), *Professor de ensino superior. Identidade, docência e formação* (pp. 45–51). Brasilia, Brasil: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2012). Introducción general. La investigación cualitativa como disciplina y como práctica. En N. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), *Manual de investigación cualitativa* (1ª Ed.) (pp. 43–108). Barcelona, España: Graó.

Ellet, W. (2007). The case study handbook. How to read, discuss, and write persusively about cases. Boston, Estados Unidos: Harvard Business Press.

Fontana, R. (2000). *Como nos tornamos professoras?* Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

González, D. (2014). *Constitución de la identidad del profesor que enseña estadística.* (Tesis doctoral inédita, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia).

Grillo, M. (2000). O lugar da reflexão na construção do conhecimento profissional. En M. Morosini (Ed.), *Professor de ensino superior. Identidade, docência e formação* (pp. 75–80). Brasília, Brasil: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Jaramillo, D. (2003). (Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica. (Tesis doctoral inédita, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil).

Kazemi, F. y Ghoraishi, M. (2012). Comparison of Problem-based Learning Approach and traditional teaching on attitude, misconceptions and mathematics performance of University Students. *Procedia social and behavioral sciences*, *46*, 3852–3856.

Leontiev, A. N. (1984). *Actividad, consciencia y personalidad.* México D.F., Estados Unidos Mexicanos: Cartago.

Marx, K. (1980). *Manuscritos: economía y filosofía* (9ª Ed.). Madrid: Alianza Editorial.

Migueis, M. (2010). *A formação como actividade de aprendizagem docente.* (Tesis doctoral inédita, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal).

Moretti, V. (2007). *Professores de matemática em atividade de ensino. Uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente*. (Tesis doctoral inédita, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil). Recuperado el 01 de 04 de 2012, de http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05102007-153534/pt-br.php.

Moretti, V. D. y Moura, M. O. (julio- diciembre, 2010). O sentido em movimento na formação de professores de matemática. *Zetetiké, 18*(34), 155-180.

Moura, M. O. (2000). *O educador matemático na coletividade de formação: uma experiência com a escola pública*. (Tesis de Libre docencia en Metodologia de Enseñanza de las Matemáticas, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil).

Pérez, D. (2016). *El profesor de matemáticas y su sentido personal hacia la enseñanza.* Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

Polettini, A. (2000). Mathematics teaching life histories in the study of teachers' perceptions of change. Teaching and Teacher Education, 16, 765-783.

Puchol, L. (2005). Nuevos casos en dirección y gestión de recursos humanos 25 casos de recursos humanos acompañados de las soluciones propuestas por sus autores. Madrid: Díaz de Santos

Rave, E. y Franco, J. (2011). Casos empresariales colombianos. Decisiones gerenciales ante momentos de crisis. Sabaneta, Colombia: Ceipa Business School.

Sánchez, S. (1998). Fundamentos para la investigación educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Taylor, S. J. y Bogdan, R. (1996). Introducción a los métodos cualitativo de investigación. La búsqueda de significados. Barcelona, España: Paidós.

Wassermann, S. (1994). *El estudio de casos como método de enseñanza*. Buenos Aires, Argentina: Amorrortu editores.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desarrollo de la modelación por medio de una gestión argumentativa en el aula de matemáticas

Horacio Solar Bezmalinovic
Facultad de Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile
Chile
hsolar@uc.cl
María Aravena Díaz
Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule
Chile
maravena@ucm.cl
Manuel Goizueta
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
manuel.goizueta@pucv.cl
Rodrigo Ulloa Sánchez
Facultad de Educación, Universidad Católica de la Santísima Concepción
rulloa@ucsc.cl

Resumen

Si bien existe una línea extensa y nutrida de investigaciones en modelación y argumentación el desarrollo de ambas líneas ha sido de manera independiente. El propósito de esta comunicación es describir una propuesta didáctica para la formación continua de profesores en modelación mediante una gestión argumentativa. El enfoque de la investigación es de corte cualitativo, mediante estudio de casos múltiples, para lo cual se seleccionó un grupo de docentes que realizan clases de matemática en educación primaria y que tenían experiencia en argumentación. Se diseñó una propuesta de formación de profesores basada en la modelación y la argumentación que actualmente está en fase de implementación. Los resultados preliminares muestran que más allá de las dificultades y errores que pueden tener los docentes de primaria para resolver problemas de modelación, los diferentes ciclos de modelación que se aprecian en las producciones son oportunidades para la gestión argumentativa

Palabras clave: competencias matemáticas, argumentación, modelación, desarrollo profesional

Modelación por medio de una gestión argumentativa

Los resultados de los estudiantes en las pruebas estandarizadas internacionales PISA 2012 (OECD, 2013) muestran que los desempeños a nivel sudamericano están muy por debajo del estándar. Tal es el caso de matemática en Chile, donde los estudiantes se encuentran en el

ranking 51, 71 puntos bajo el promedio de la OECD (Agencia de Calidad de la Educación, 2014). Estos resultados indican que un 52% de los estudiantes chilenos de 15 años no tiene las competencias básicas que le permiten usar su conocimiento y habilidades para resolver problemas, así como desarrollar tareas contextualizadas en la vida cotidiana, participando positivamente en la sociedad (Agencia de la Calidad de Educación, 2014). Para enfrentar este tipo de dificultades en matemáticas, varios países han incorporado en sus marcos curriculares una visión desde la alfabetización matemática, entendida como la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos (OECD, 2015). En varios países se ha incorporado el enfoque por competencias en el currículo. En el caso de Chile se han considerado cuatro habilidades matemáticas: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar, y representar (MINEDUC, 2013).

Si bien la perspectiva de competencia matemática considera varios procesos matemáticos (Niss & Højgaard, 2011), creemos que en especial las competencias de argumentación y modelación se relacionan con aspectos esenciales de la actividad matemática de los estudiantes. Respecto a la modelación, algunos autores la sitúan como la base de la actividad matemática, debido a que en las tareas de modelación de situaciones se da más importancia a los procesos cognitivos que a los modelos obtenidos (Blomhøj, 2004). Ello se puede ver en el marco teórico de PISA 2015 (OECD, 2016), donde se describen siete competencias matemáticas según el ciclo de modelación (Borromeo-Ferri, 2006; Maaß, 2006).

Desde el punto de vista de la argumentación, uno de los estándares académicos fundamentales en matemáticas en EEUU (*Common Core Math Practices*) hace referencia a la construcción de argumentos viables y a la evaluación del razonamiento de otros[1]; además, las orientaciones curriculares del National Council of Teachers of Mathematics señalan que una de las prácticas de enseñanza eficaz es el diálogo entre los estudiantes, pues les permite construir una comprensión compartida de las ideas matemáticas a través del análisis y comparación de sus enfoques y argumentos (NCTM, 2014). En efecto, la discusión en el aula de matemáticas permite a los estudiantes compartir ideas, clarificar su comprensión y construir argumentos convincentes respecto del cómo y el por qué las cosas funcionan (NCTM, 2000).

Si bien se puede esperar que promover las competencias de argumentación y modelación en el aula siente bases para superar las dificultades de los estudiantes en matemáticas, es necesario tener profesores formados para ello. Según el consenso a nivel internacional, se destaca como esencial preparar a los profesores en la formulación de problemas que involucren procesos de modelación, la utilización del lenguaje matemático, la comunicación y argumentación matemática y la capacidad de analizar y construir modelos matemáticos en diferentes contextos (Niss & Højgaard, 2011). Sin embargo, Blomhoj y Carreira (2009) señalan que la formación de profesores para promover la modelación en el aula de matemáticas sigue siendo una cuestión pendiente, tanto para la educación primaria como para secundaria.

En relación con la investigación, aunque existen líneas extensas y nutridas de investigaciones en modelación (Blomhøj 2004; Blum & Borromeo-Ferri, 2009; Maaß, 2006) y en argumentación (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014; Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson, 2007; Krummheuer, 1995, 2007; Rasmussen, Stephan, & Allen, 2004, Solar & Deulofeu, 2016), el desarrollo de ambas líneas ha sido de manera independiente. Es decir, existen escasos estudios que busquen relacionar las competencias de argumentación y modelación (e.g., Dede, 2018), y estos se han realizado en contextos de formación inicial de

[1]http://www.corestandards.org/Math/Practice/#CCSS.Math.Practice.MP3

profesores. No hemos encontrado investigaciones asociadas a la formación continua de profesores con un foco en el desarrollo articulado de la modelación y la argumentación en el aula de matemáticas.

Esta tensión entre desarrollo de competencias y formación de profesores es señalada por Kauertz, Newmann y Hearting (2012), quienes indican que la relación entre el desarrollo de las competencias y la enseñanza es todavía vaga. Según los autores, las evaluaciones no proporcionan información del proceso de desarrollo de las competencias, sino que señalan las metas que deberían haberse logrado, proporcionando información que es útil para el diseño de políticas públicas en educación, pero no para orientar procesos de enseñanza. Para revertir esta situación se requiere de más estudios en profundidad relacionados con el desarrollo de competencias matemáticas, en particular, con el desarrollo de la argumentación y la modelación. El propósito de esta comunicación es describir el diseño de una propuesta de formación continua de profesores que se encuentra actualmente en fase de implementación. En lo que sigue, describimos los principios que están en la base tanto del diseño de la propuesta formativa como de su implementación, y analizamos algunas producciones de profesores participantes para ilustrar algunos de los logros y desafíos de la propuesta.

Metodología

La propuesta de formación que se ha diseñado, la cual exponemos y discutimos en este texto, se inscribe en el contexto de un proyecto de investigación más amplio, que pretende dar cuenta de los aprendizajes de estudiantes en el aula de matemáticas cuando se promueven conjuntamente la argumentacón y la modelación Así, la instancia de desarrollo profesional se diseña e implementa con el fin de que el grupo de docentes participantes en el estudio tenga una base de conocimientos común en el desarrollo de la modelación y argumentación para las clases de matemáticas que serán observadas.

Los participantes del proceso de formación realizan clase de matemáticas en educación primaria (6 a 14 años) y tienen experiencia previa en el desarrollo y/o análisis de la argumentación en el aula de matemáticas, debido a su participación en instancias formativas anteriores. Participan un total de 22 docentes, 13 en Santiago y 9 de Concepción (Chile) y se seleccionó este grupo de manera intencionada, puesto que era conveniente que tuvieran formación previa en relación con procesos argumentativos para así enfrentar los procesos de modelación matemática.

Al momento de enviar esta comunicación, ya se habían realizado 6 sesiones del proceso de formación. En lo que sigue, reportaremos las etapas que se han ejecutado: (1) diseño de una propuesta de trabajo para formación de profesores basada en la modelación y la argumentación; (2) implementación de la propuesta formativa; (3) análisis de resultados preliminares de la implementación. A continuación, se explica en detalle cada una de estas tres etapas

Diseño de la propuesta de formación basada en modelación y argumentación

Para el diseño de la propuesta se realizó un estudio bibliográfico de las componentes teóricas y didácticas para promover las competencias de modelación y argumentación. Se consideraron el ciclo de modelación (Borromeo-Ferri, 2006; Maaß, 2006) y la argumentación colectiva (Conner et al., 2014; Krummheuer, 1995). La propuesta incorpora, además, el modelo Mejoramiento de la Experiencia Docente (MED) (Solar, Ortiz, & Ulloa, 2016), centrado en el análisis de la práctica de formación para el desarrollo profesional de profesores. Este modelo de formación considera cuatro etapas:

La primera etapa hace referencia ***al análisis de la práctica de otros***. Los docentes realizan un análisis didáctico y matemático de la modelación. El análisis didáctico se hace a través de episodios de clases en los que se analiza el desarrollo de la modelación, mientras el análisis matemático se realiza por medio de tareas matemáticas de modelación.

La segunda etapa considera el ***análisis de la propia práctica.*** Los docentes realizan análisis didáctico de la modelación y la argumentación. Analizan la propia práctica mediante ciclos de modelación con el propósito de apropiarse de estrategias adecuadas para promover modelación por medio de la gestión argumentativa en el aula de matemáticas.

En la tercera etapa se aborda ***el diseño e implementación*** de clases. Los docentes adaptan tareas de modelación a fin de abordar clases para desarrollar la modelación mediante una gestión argumentativa. Estas clases son implementadas y observadas por el equipo de formadores para su posterior análisis y evaluación.

En la cuarta etapa se considera la ***reflexión sobre la práctica***. Se evalúa el proceso de estudio y desarrollo de la modelación mediante la gestión argumentativa, valorando tanto el desempeño como la reflexión docente sobre el modelación y argumentación en el aula de matemáticas

En la figura 1 se presenta un esquema que resume el modelo MED, mediante el cual se ha~~n~~ trabajado con los docentes las primeras dos etapas.

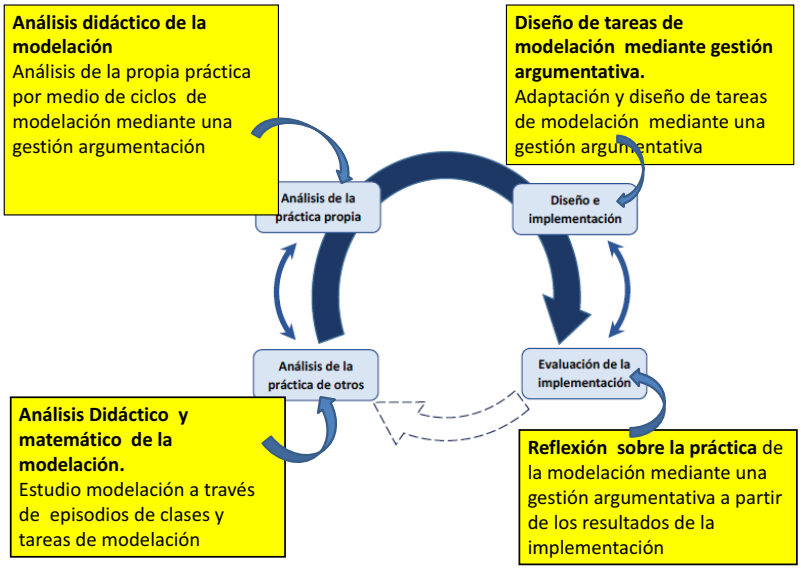


*Figura 1***.** Elaboración propia basada en el Modelo de formación MED

El equipo de investigadores elaboró una secuencia de tareas basada en situaciones de modelación para ser estudiadas con los docentes. El propósito es que reflexionen, mediados por el equipo de investigadores, sobre dichas situaciones para valorar las estrategias y habilidades matemáticas que colocan a prueba en ciclos de modelación (Etapa 1 y 2 del modelo MED) y el conocimiento base para elaborar su propia propuesta didáctica de aula, de acuerdo a su contexto, nivel y objetivos de aprendizaje, para posteriormente gestionar en el aula de matemática dicha secuencia de tareas (Etapa 3 y 4, modelo MED), con sus alumnos de enseñanza primaria. Esto permitirá que, posteriormente, reflexionen sobre la implementación por medio de la evaluación de la gestión argumentativa de la modelación a partir de los resultados de dicha implementación (Etapa 4 Modelo MED).

A modo de ejemplo, en la figura 2 se muestra la secuencia metodológica de la formación de los docentes, con la primera etapa que se ha trabajado, las actividades que dan respuesta a las etapas del modelo y las estrategias metodológicas.

Etapas modelo MED	Actividad	Estrategia Metodológica
I. Primera etapa. **Práctica de otros a través de casos.** **Análisis didáctico-matemático.** Análisis de situaciones de modelación e identificación de los procesos argumentativos que colocan a prueba.	**Análisis matemático y didáctico de los ciclos de modelación.** **(1) Análisis de casos**. Discusión de problemas para identificar procesos de modelación matemática. (1) Análisis didáctico y matemático del proceso de modelación • Contrate del proceso seguido con propuestas teóricas de la idea de modelo. (2) Analizar los procesos argumentativos que utilizan los docentes en cada uno de los ciclos de modelación matemática.	Se presenta un video de una clase con un caso para reconocer si es un problema de modelación. Argumentación colectiva. **Discusión grupal.** Oportunidades de aprendizaje sobre procesos matemáticos que son esenciales en la actividad matemática. Gestión argumentativa para los procesos de modelación matemática en el aula.

*Figura 2***.** Elaboración propia Secuencia metodológica de la formación docente

Implementación de la propuesta.

El curso de formación (12 sesiones de 3 horas) comenzó a implementarse en agosto de 2018. En esta primera parte se ha trabajado la primera etapa del modelo de formación MED. Durante el resto del año (octubre-diciembre de 2018) se implementará~~n~~ el resto de las etapas que se ha descrito (figura 1). Durante el 2019, se seleccionarán entre 7 y 9 docentes de Santiago y Concepción para hacer un seguimiento en sus aulas, el que permitirá analizar cómo aprenden los estudiantes cuando se promueve la argumentación y la modelización de manera articulada. A continuación, se describen las sesiones 1 a 4 correspondientes a la primera etapa.

La metodología de trabajo de las sesiones 1 y 2 consistió en que los docentes, tomando como base su propia experiencia, analizaran de qué manera se desarrollaba la modelación en episodios de clase de distintos cursos de Educación Primaria, para luego contrastar sus análisis por medio de apuntes con criterios sobre modelación en el aula de matemáticas. Ello busca que la apropiación de los temas sea por medio de conflictos cognitivos que evidencian los profesores a raíz del contraste entre sus concepciones y la teoría. En la sesión 3 y 4, en cambio, el foco estuvo en el desarrollo de tareas de modelación realizadas por los docentes para identificar cómo se enfrentan a los procesos de modelado a partir de sus intuiciones, concepciones, conocimientos matemáticos, estrategias para su resolución y etapas del ciclo de modelado que identifican para dar respuesta al problema, tanto en términos matemáticos como en términos de la situación real. A partir de la solución del problema, contrastan sus producciones con el ciclo de modelado de Maaß (2006). Se muestra en la figura 3 una situación trabajada en la etapa II.

Cuidemos el medio ambiente

En 1896 el científico sueco Svante Arrhenius fue el primero en predecir el efecto invernadero como resultado de las emisiones de dióxido de carbono en el aire por parte de los países industrializados. La quema de combustibles fósiles continúa produciendo 5,4 mil millones de toneladas de carbono al año, las cuales son absorbidas por la atmósfera y por los océanos. En 1990 el Grupo Internacional sobre el Cambio de Clima (GICC) pronosticó que, de continuar la tendencia actual, aumentará la temperatura promedio global de la Tierra.

La Tabla 1 muestra los datos del aumento de la temperatura global pronosticada, en grados Celsius.

1980	2000	2020	2040	2060	2080
0,0	0.42	0.84	1.26	1.68	2.10

A partir de la información:

1) Determina un modelo de manera que concuerde con los datos.
2) Explica el significado de los coeficientes de tu modelo
3) Predice la variación de temperatura estimada para los años: 2030 y 2085, respecto a 1980.

*Figura 3***.** Situación de modelado trabajadas por los docentes en Etapa, extraído de (Aravena y Caamaño, 2007)

Resultados preliminares de la implementación.

Para mostrar el proceso de apropiación de los docentes en la etapa I del proceso de formación, de las producciones de los docentes en las tareas de modelación se analiza el ciclo de modelación (Maaß, 2006), que incorpora las siguientes etapas: simplificación del problema real para obtener una primera aproximación el modelo, matematización para obtener el modelo matemático, trabajo matemático con el modelo para obtener una solución, interpretación de la solución, justificación de la validez del modelo, y, finalmente, el análisis y proyección del modelo, que requiere ser analizado en todo proceso de modelación matemática (Aravena, 2016).

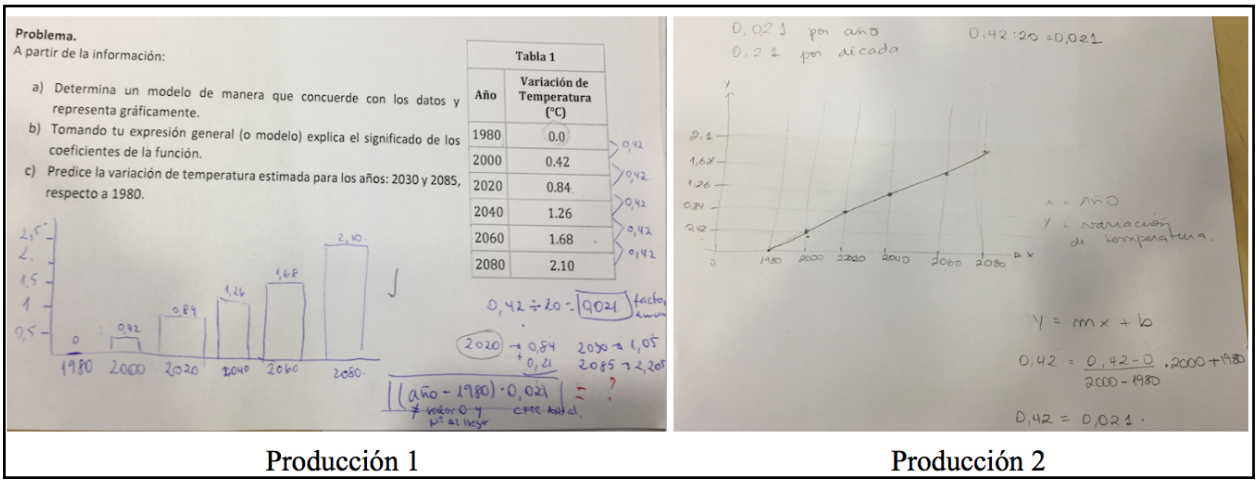


Figura 4: Producciones de docentes en la tarea de modelación "Cuidemos el medio ambiente", Etapa *1*

Para la tarea "Cuidemos el medio ambiente" en la figura 4 se muestran dos producciones de docentes. En la producción 1 se ha simplificado el problema mediante un gráfico de barras. En cambio, en la producción 2 se ha simplificado mediante un gráfico de líneas. Esto representa dos simplificaciones al modelo, uno discreto (producción 1) y el otro continuo (producción 2) de los datos del problema. En la fase de matematización, en la producción 1 se obtiene una expresión numérica $(año - 1980) \cdot 0{,}021$, usando "año" como variable y el valor 0.021 como un factor multiplicativo; mientras que en la producción 2 se muestra la ecuación $y = mx + b$, donde 'x' es el año, 'y' es la variación de temperatura, y el valor 0.021 representa la pendiente de

la recta; aunque en la producción 2 no se aprecia la ecuación $y = 0.021x$. En ambos casos, el trabajo matemático se centró en obtener la solución al problema de encontrar una expresión matemática de la forma *T(t)=0.021t* en que *t* es el tiempo y *T(t)* es la variación de temperatura. En relación con la validación de los modelos, en la producción 1 el gráfico de barras representa un modelo discreto al problema, en cambio, en la producción 2, si bien el gráfico lineal permite hacer predicciones, no se considerado el año 1980 como tiempo cero, lo que impide que se llegue a la formulación del modelo. En ninguna de las producciones se analiza la proyección de los modelos matemáticos.

Más allá de las dificultades y errores que pueden tener los docentes de primaria para desarrollar problemas de modelación, los diferentes ciclos de modelación que se aprecian en las producciones son oportunidades para la gestión argumentativa. Por ejemplo, en la fase de simplificación del problema se pueden contrastar el gráfico de barras y lineal; y en la fase de validez se puede contrastar las expresiones algebraicas según las condiciones del problema. Este trabajo es promovido por los formadores con los profesores, con el propósito que los docentes pueden experimentar lo que espera que ellos mismos promuevan en clase con sus estudiantes.

Conclusiones

Se ha presentado una propuesta didáctica para la formación continua de profesores de primaria para fomentar procesos de modelación. Los resultados preliminares se centran en la etapa I del modelo de formación, en la que los docentes se ven enfrentados a tareas de modelación. En las etapas siguientes del modelo de formación, los docentes incorporarán estrategias argumentativas, que ya conocen, para gestionar la modelación en el aula de matemáticas, adaptando y diseñando tareas de modelación para ser implementadas.

Si bien esta comunicación se enmarca en un proyecto más amplio que tiene como propósito caracterizar los aprendizajes de los estudiantes al promover de manera articulada las competencias de argumentación y modelación en el aula de matemáticas, hemos diseñado una propuesta de formación de profesores, ya que para el desarrollo de la modelación mediante una gestión argumentativa no basta con una propuesta didáctica enfocada directamente al aula, sino que se requiere de una propuesta de mayor envergadura, que implica un desarrollo profesional de profesores para luego diseñar una propuesta didáctica conjunta entre profesores e investigadores.

Referencias y bibliografía

Agencia de Calidad de Educación (2014). *Informe Nacional Resultados Chile PISA 2012*, Agencia de Calidad de Educación, Chile: Autor.

Aravena, M. (2016). Modelización Matemática en Chile. En: J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp.195-234). México. Barcelona: Gedisa.

Aravena D, María, & Caamaño E, Carlos. (2007). Modelizacion matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *33*(2), 7-25. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052007000200001

Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling—a theory for practice. En B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-160). Göteborg University: National center for mathematics education

Blomhøj, M., & Carreira, S. (2009). Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. En *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 6-13).

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (1), 45-58.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86, 95.

Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401–429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Dede, A. T. (2018). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Kauertz, A., Neumann, K., & Haerting, H. (2012). Competence in science education. (B.Fraser, K. Tobin, & C. Mc Robbie, Edits.) Second International Handbook of Science Education, 711-721

Krummheuer. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Ed.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60–82.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies?*ZDM*, 38(2), 113-142.

MINEDUC. (2013). *Bases curriculares chilenas 7º básico a 2º medio*. Santiago: Autor.

NCTM. (2000): *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va: autor.

NCTM. (2014): *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* Reston, Va: autor.

Niss, M. & Højgaard, T. (2011). (eds.) *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.*(English edition). IMFUFA tekst n. 485/2011. Roskilde: Roskilde University.

OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem* Solving *and Financial Literacy*. OECD Publishing. Recuperado el 05 de febrero de 2016 desde http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

OECD. (2015). *PISA 2015 Integrated Design*. OECD Publishing: Paris.

OECD. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. OECD Publishing: Paris.

Rasmussen, C., Stephan, M., & Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*(3), 301–323.

Solar, H. & Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema*, *30*(56), 1092–1112

Solar, H., Ortiz, A., & Ulloa, R. (2016). MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. *Estudios Pedagogicos*, *42*(4), 281–298. https://doi.org/10.4067/S0718-07052016000500016

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Nociones didácticas en la investigación en Educación Matemática: comparación del simposio de la SEIEM y la RELME

Paola **Castro**
Universidad de los Andes
Colombia
dp.castro116@uniandes.edu.co
Pedro **Gómez**
Universidad de los Andes
Colombia
argeifontes@gmail.com
María C. **Cañadas**
Universidad de Granada
España
mconsu@ugr.es

Resumen

Identificamos los atributos de caracterización de dos comunidades de Educación Matemática en relación con la medida en la que abordan nociones didácticas de la disciplina en sus trabajos de investigación y realizamos comparaciones entre ellas. Analizamos la documentación de las comunidades que convergen en el simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME). Tomamos como fuente de información los avances y resultados de investigación que fueron publicados en las actas del simposio de la SEIEM y de la RELME entre 2014 y 2017. A partir de una taxonomía de términos clave específica de la Educación Matemática, realizamos una aproximación semántica a su contenido. Establecemos la importancia de las nociones didácticas en las dos comunidades y sus atributos de distinción. Encontramos diferencias significativas entre las comunidades en las nociones enseñanza, análisis de contenido, currículo y profesor.

Palabras clave: educación, matemática, didáctica, investigación, comunidad.

Introducción

La Educación Matemática se ha consolidado como una disciplina en el sentido de que hay un conjunto de personas que converge en un repertorio compartido, con un foco de interés, un lenguaje y un propósito común (Ernest, 1998). La producción de conocimiento en esta disciplina en Iberoamérica y su difusión ámbitos locales y regionales ha aumentado, y se percibe diversidad en ella (Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas y Hidalgo-Ariza,

2011). Por tanto, resulta importante caracterizar el conocimiento que es transmitido por la comunidad de investigadores y educadores matemáticos en eventos de relevancia. De este modo, es significativo estudiar la documentación de investigación que es producida por las comunidades en Educación Matemática que concurren en el simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), dada la relevancia e impacto de estos eventos en la disciplina en el ámbito iberoamericano. La RELME se constituye como un encuentro para consolidar redes de investigadores en América Latina (CLAME, 2018). El simposio de la SEIEM es representativo de la actividad investigadora en España (Maz-Machado et al., 2011). En Educación Matemática, es trascendental caracterizar las comunidades que emergen en ella de modo que se reconozcan, entre otros elementos, sus intereses de investigación (Rico, 2012).

En esta comunicación, proporcionamos resultados que permiten que la comunidad de investigadores y educadores matemáticos de Iberoamérica identifique los focos de interés en la investigación en relación con las nociones didácticas que aborda. Nos basamos en la documentación publicada por dos eventos de gran importancia en América Latina y España. El trabajo que presentamos se enmarca en un proyecto más amplio en el que pretendemos caracterizar la comunidad de Educación Matemática de habla hispana en términos de los patrones de producción de la documentación que produce.

Marco conceptual

La caracterización de una comunidad implica determinar sus atributos peculiares de modo que claramente se distinga de otras (Real Academia Española, 2018). En Educación Matemática, se emplean diversos medios de divulgación del conocimiento que es producido en ella (Waldegg, 1998). Además de la difusión en artículos y libros, en esta disciplina se produce documentación que surge de eventos académicos en los que se reúnen investigadores y educadores matemáticos. Los trabajos que son compartidos incluyen tanto resultados como avances de las investigaciones que se adelantan.

Con el propósito de hacer un análisis sistemático y objetivo de la ciencia, la bibliometría se centra en el estudio de las fuentes bibliográficas, con el propósito de identificar sus tendencias (Spinak, 2001). Los estudios bibliométricos consideran los elementos representativos de la documentación —título de la publicación, tipo de documento, idioma, resumen y palabras claves o descriptores— (Solano, Castellanos, López y Hernández, 2009). La organización y manejo de los datos permiten obtener datos numéricos —indicadores bibliométricos— que dan cuenta de los fenómenos sociales de la actividad científica de la disciplina (López Piñero y Terrada Ferrandis, 1992). Además de emplear indicadores de visibilidad e impacto y colaboración para establecer características de la documentación, hay una oportunidad de estudiar el desarrollo de una disciplina con indicadores de producción (Callon, Courtial y Penan, 1995) como la especialización temática. Para esto, el estudio del contenido de los documentos, desde una aproximación semántica, posibilita la identificación de los fenómenos o problemas concretos que se tratan en un documento (Abela, 2002). Es posible realizar el estudio de los documentos desde unas categorías relativas a clasificaciones de descriptores propios de la disciplina para determinar sus atributos respecto a su especialización temática.

Gómez y Cañadas (2013) presentan una taxonomía de la Educación Matemática que parte de una teoría curricular específica a la Educación Matemática. Esta taxonomía proporciona una clasificación y jerarquización de descriptores propios de la disciplina. Los autores diferencian los términos relacionados con la Educación Matemática de aquellos que abordan los contenidos matemáticos. En lo que respecta a la especificidad de descriptores en la Educación Matemática,

adoptaron la teoría curricular (Rico, 1997). A partir de ella, Gómez y Cañadas (2013) organizan los descriptores en nueve categorías: (a) sistema educativo, (b) centro educativo, (c) aula, (d) alumno, (e) profesor, (f) aprendizaje, (g) enseñanza, (h) evaluación e (i) currículo. En cada categoría, los autores proponen valores más concretos. Por ejemplo, dentro de la categoría profesor, se pueden identificar valores como desarrollo del profesor, formación de profesores y relaciones entre profesores. Adicional a las mencionadas, los autores incluyen una categoría que se refiere a otras nociones de Educación Matemática, que incluye los siguientes valores: enfoques de las matemáticas escolares, evolución histórica de conceptos, fenomenología didáctica, fines, resolución de problemas y sistemas de representación. Tomamos como base la propuesta de (Gómez y Cañadas, 2013) para definir las variables de nuestro estudio.

Objetivos de investigación

El propósito del estudio que presentamos es identificar los atributos de caracterización de dos comunidades de Educación Matemática en relación con la medida en la que abordan nociones didácticas de la disciplina en sus trabajos de investigación. Los siguientes son los objetivos específicos.

- Establecer en qué medida se tratan las nociones didácticas en la investigación de las comunidades que convergen en el simposio de la SEIEM y en la RELME.
- Determinar las nociones didácticas en las que difieren los intereses de investigación de las dos comunidades.

Método

El estudio que realizamos es documental de tipo descriptivo. Las fuentes de información son las actas del simposio de la SEIEM y las actas de la RELME —que corresponden a trabajos de investigación— que fueron publicadas entre 2014 y 2017. Tomamos 344 documentos de las contribuciones realizadas en las versiones XVIII a XXI del simposio de la SEIEM (Fernández, Molina y Planas, 2015; González, Codes, Arnau y Ortega, 2014; Macías, Jiménez, González, Sánchez, Hernández, Fernández *et al.*, 2016; Muñoz, Arnal-Bailera, Beltrán-Pellicer, Callejo y Carrillo, 2017) y 515 documentos publicados en los volúmenes 27 a 30 del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Flores, 2015; Lestón, 2014; Mariscal, 2016; Serna Martínez, 2017).

Variables

De acuerdo con las categorías de temas específicos a Educación Matemática de la taxonomía de Gómez y Cañadas (2013), definimos las variables del estudio. Estas son: sistema educativo, centro educativo, aula, alumno, profesor, aprendizaje, enseñanza, evaluación, gestión curricular, análisis de contenido (historia de los contenidos, sistemas de representación y fenomenología) y resolución de problemas. Las variables son dicotómicas (valor 1, si el documento cumple con la condición de la variable y 0, si no).

Procedimientos

Realizamos una aproximación semántica a los documentos para codificarlos en términos de las variables dicotómicas de nuestro estudio, con el detalle necesario que nos permitiera identificar los fenómenos y problemas concretos que abordan. Organizamos los resultados de la codificación en bases de datos. Un documento podía estar codificado en una o más variables, porque trata una o más nociones didácticas (p. ej., aula y evaluación). Determinamos que hay un éxito si el documento está codificado en una variable (valor 1) y hay un fracaso, si no lo está (valor 0). Una vez realizada la codificación por un equipo de codificadores, un revisor de las

codificaciones verificó la validez y precisión de la información que fue registrada para cada documento y verificó que las variables asociadas a cada documento daban cuenta de los fenómenos que este abordaba. Un último revisor supervisó el trabajo realizado por el revisor de la codificación.

Con procedimientos de estadística descriptiva, obtuvimos las proporciones de documentos de cada comunidad que trata cada variable. De esta forma, establecimos la importancia relativa de las nociones didácticas en el simposio de la SEIEM y en la RELME. Identificamos la medida en la que estas nociones son tratadas por cada comunidad. De esta manera, determinamos los focos de interés en la investigación de las comunidades en relación con la especialización temática.

Para establecer las nociones didácticas en las que se diferencian las comunidades, determinamos las variables en las que hay diferencias estadísticamente significativas. Para esto, tuvimos en cuenta las proporciones de documentos que cada comunidad tiene en cada variable. Realizamos pruebas de hipótesis de comparación de proporciones.

Resultados

En la figura 1, presentamos la importancia relativa de las nociones didácticas en las dos comunidades. También, incluimos el P-valor obtenido en las pruebas de hipótesis sobre la igualdad de proporciones en cada variable.

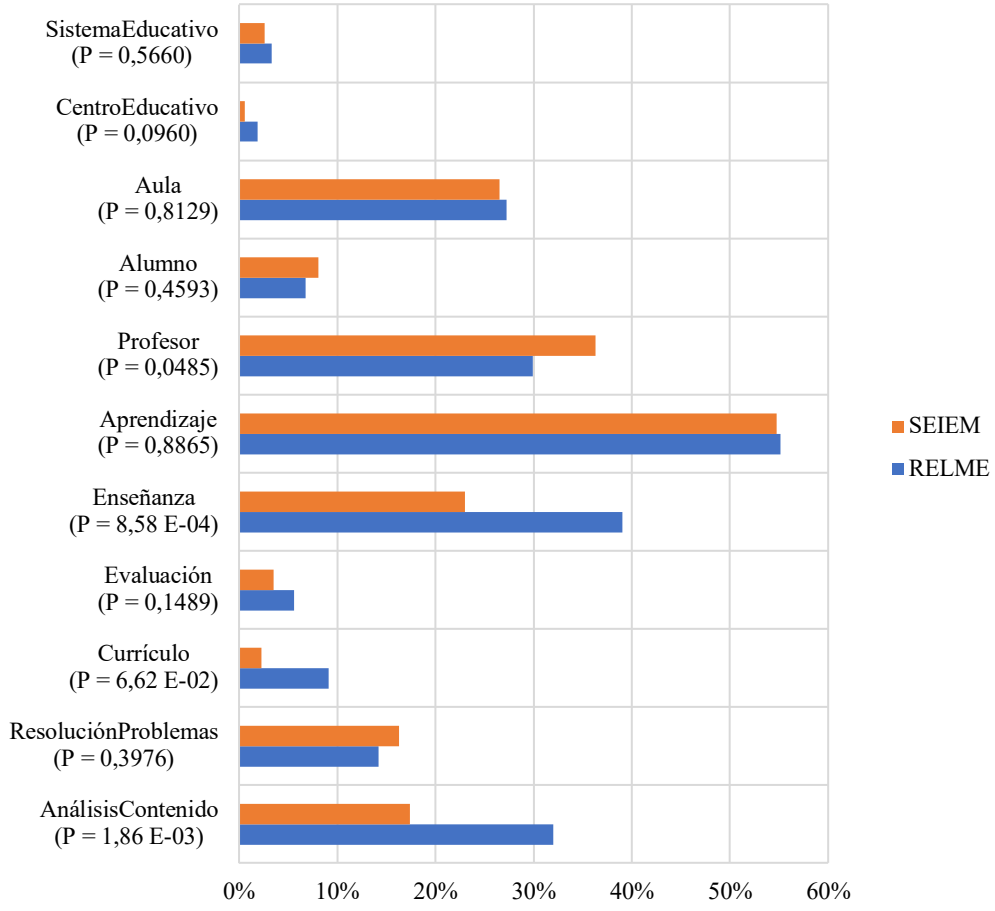


Figura 1. Importancia relativa de las nociones didácticas en las comunidades

Como se observa en la figura 1, aprendizaje es la noción que se trata de manera más importante en la comunidad que participa en el simposio de la SEIEM. Le sigue la noción de profesor. Aula y enseñanza se abordan, en promedio, en un 24,7%. Las nociones evaluación y currículo tienen una importancia mínima en esta comunidad, además de sistema y centro educativo. En contraste, se evidencia un interés importante por tratar elementos de análisis de contenido y resolución de problemas.

Encontramos que en la RELME se destaca interés por la noción curricular aprendizaje. Le siguen enseñanza y análisis de contenido. Esta variable está por encima de nociones como currículo, alumno y evaluación. Profesor y aula tienen una importancia relativa media de 28,5%, cada una. En menor medida, se tratan aspectos relacionados con sistema y centro educativo.

Podemos ver en la figura 1 que la noción didáctica que más se aborda en los dos eventos es aprendizaje. También, se evidencia la importancia reducida que currículo, evaluación, sistema y centro educativo tienen en las comunidades que convergen en ambos eventos. Aunque en ambas comunidades es importante el estudio del contenido matemático, es claro que en la RELME su relevancia supera la de las nociones profesor y aula. En comparación con la RELME, la comunidad que converge en el simposio de la SEIEM estudia en mayor medida aspectos relacionados con alumno, profesor y resolución de problemas.

Evaluamos la relación entre las proporciones en las que las comunidades tratan las nociones didácticas. Identificamos diferencias estadísticamente significativas en las variables profesor, enseñanza, currículo y análisis de contenido. Encontramos que el simposio de la SEIEM se distingue de la RELME por la importancia que tiene la variable profesor en su documentación. Las variables en las que la RELME se destaca por tener mayor proporción de documentos son enseñanza, análisis de contenido y currículo.

Debido a la relevancia que tiene la noción aprendizaje en la investigación de ambas comunidades, decidimos indagar por aspectos específicos dentro de esta noción en los que las comunidades podrían tener diferencias. Entonces, establecimos tres subvariables dentro de la variable aprendizaje de acuerdo con la taxonomía de Gómez y Cañadas (2013): aspectos afectivos —actitud, ansiedad, creencias, motivación—, cognición —conocimiento, dificultades, errores, rendimiento— y procesos cognitivos —abstracción, aplicación, comprensión, cálculo mental, formulación de conjeturas, generalización, modelización, pensamiento matemático, procesos de justificación, razonamiento—. Determinamos la proporción de documentos de cada comunidad en estas subvariables y obtuvimos los resultados que presentamos en la figura 2.

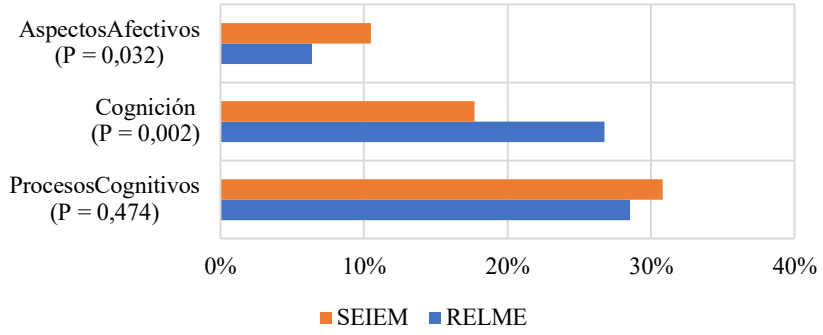


Figura 2. Importancia relativa de las subvariables de aprendizaje en las comunidades

Con un nivel de significancia de 0,05, identificamos diferencias estadísticamente significativas entre las comunidades que concurren en el simposio de la SEIEM y en la RELME

en la medida en la que tratan aspectos afectivos y cognición. En el simposio de la SEIEM se trata con mayor relevancia lo concerniente a afectividad, mientras que en la RELME hay más preocupación por la cognición.

En el caso de la variable aula, la diferencia entre las proporciones de documentos del simposio de la SEIEM y de la RELME es mínima. Por tanto, determinamos tres subvariables que nos permitieran identificar distinciones entre las comunidades. Estas subvariables son: relaciones interpersonales, recursos didácticos y gestión de aula (Gómez y Cañadas, 2013). Como se observa en la figura 3, hay una diferencia estadísticamente significativa en la medida en la que las comunidades aborda la gestión de aula. La comunidad que concurre en la RELME da mayor importancia a este aspecto en comparación con el simposio de la SEIEM.

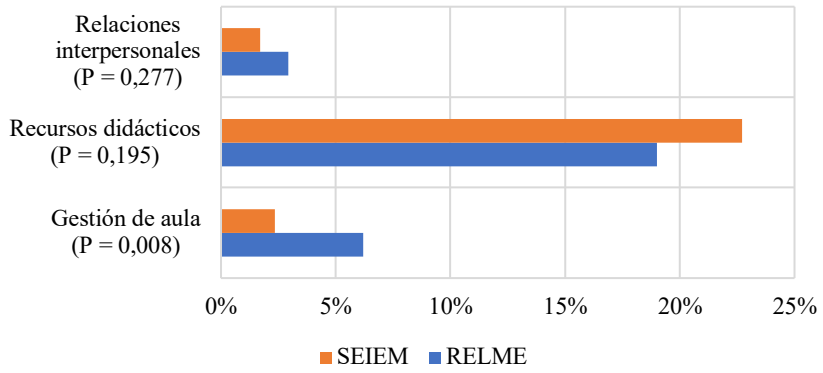


Figura 3. Importancia relativa de las subvariables de aula en las comunidades

Conclusiones

El propósito de este estudio estaba en identificar atributos de caracterización de las comunidades que concurren en el simposio de la SEIEM y en la RELME en relación con su investigación en nociones didácticas de la Educación Matemática. Para ello, realizamos una aproximación semántica al contenido de los documentos publicados entre 2014 y 2017 por ambos eventos. Utilizamos una taxonomía de términos clave que es específica a la disciplina para establecer los descriptores de los documentos en relación con las variables sistema educativo, centro educativo, aula, alumno, profesor, aprendizaje, enseñanza, evaluación, gestión curricular, análisis de contenido y resolución de problemas. Calculamos la proporción de documentos de las dos comunidades en cada variable para establecer en qué medida tratan las nociones didácticas. Posteriormente, identificamos en cuáles de estas nociones las comunidades tienen diferencias estadísticamente significativas.

En ambos eventos, identificamos la importancia reducida que tienen las nociones currículo, evaluación, sistema y centro educativo. Encontramos que las dos comunidades tienen un gran interés por tratar cuestiones relacionadas con el aprendizaje; sin embargo, difieren en que los aspectos afectivos son abordados en mayor medida en el simposio de la SEIEM y la cognición en la RELME. En comparación con la RELME, la comunidad que converge en el simposio de la SEIEM estudia en mayor medida la noción profesor. En la RELME, la relevancia está en las nociones enseñanza, análisis de contenido y currículo. También observamos que, en la variable aula, la RELME se distingue de la SEIEM por su interés por la gestión de aula.

En este trabajo, realizamos una aproximación al proceso de caracterización de comunidades en Educación Matemática a partir del conocimiento que producen y difunden en eventos académicos. Consideramos que conocer los atributos de caracterización de dos

comunidades que son relevantes en España y en América Latina genera nuevas oportunidades de investigación. A partir de la identificación de los intereses de estas comunidades, se podrían concretar nuevas subvariables de las variables asociadas a las nociones didácticas, como lo hicimos en el caso del aprendizaje. Además de hacer referencia al estado actual de la investigación en estas nociones, sería interesante establecer el comportamiento de las variables en el tiempo. Para continuar el trabajo realizado por otros investigadores en Educación Matemática (por ejemplo, Jiménez-Fanjul, Maz-Machado y Bracho-López, 2013; Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas, Jiménez-Fanjul y Adamuz-Povedano, 2012), sería posible identificar redes de colaboración científica en cada comunidad y entre ellas.

Referencias y bibliografía

Abela, J. A. (2002). Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada. España: Fundación Centro de Estudios Andaluces.

Callon, M., Courtial, J. P. y Penan, H. C. (1995). *Cienciometría. El estudio cuantitativo de la actividad científica: de la bibliometría a la vigilancia tecnológica*. Gijón, España: Ediciones TREA.

CLAME. (2018). RELME. Descargado el 18/10/2018, de https://clame.org.mx/relme/

Ernest, P. (1998). A postmodern perspective on research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 71-85). Dordrecht: Springer.

Fernández, C., Molina, M. y Planas, N. (Eds.). (2015). *Investigación en Educación Matemática XIX* (Vol. XIX). Alicante, España: SEIEM.

Flores, R. (Ed.). (2015). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 28). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2013). Development of a taxonomy for key terms in mathematics education and its use in a digital repository. *Library Philosophy and Practice (e-journal)*.

González, M. T., Codes, M., Arnau, D. y Ortega, T. (Eds.). (2014). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (Vol. XVIII). Salamanca, España: SEIEM.

Jiménez-Fanjul, N., Maz-Machado, A. y Bracho-López, R. (2013). Quiénes son y qué citan los autores españoles de educación matemática en el Social Science Citation Index. *Epsilon, 30*(3), 55-68.

Lestón, P. (Ed.). (2014). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 27). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

López Piñero, J. M. y Terrada Ferrandis, M. (1992). Los indicadores bibliométricos y la evaluación de la actividad médico-científica: los indicadores de producción, circulación y dispersión, consumo de la información y repercusión. *Medicina clínica, 98*(4), 142-148.

Macías, J. A., Jiménez, A., González, J. L., Sánchez, M. T., Hernández, P., Fernández, C., et al. (Eds.). (2016). *Investigación en Educación Matemática XX* (Vol. XX). Málaga, España: SEIEM.

Mariscal, E. (Ed.). (2016). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 29). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas, M.-P. y Hidalgo-Ariza, M.-D. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: los simposios de la SEIEM. *PNA, 5*(4), 163-185.

Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas, M. P., Jiménez-Fanjul, N. y Adamuz-Povedano, N. (2012). Redes académicas generadas por las tesis doctorales de educación matemática en EspaÃ±a. *Revista de Investigación Educativa, 30*(2), 271-286.

Muñoz, J. M., Arnal-Bailera, A., Beltrán-Pellicer, P., Callejo, M. L. y Carrillo, J. (Eds.). (2017). *Investigación en Educación Matemática XXI* (Vol. XXI). Zaragoza, España: SEIEM.

Real Academia Española. (2018). Diccionarios de la lengua española. Descargado el 18/10/2018, de http://www.rae.es/

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*(1), 39-63.

Rico, L. (Ed.). (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid, España: Síntesis.

Serna Martínez, L. A. (Ed.). (2017). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 30). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Solano, E., Castellanos, S., López, M. y Hernández, J. (2009). La bibliometría: una herramienta eficaz para evaluar la actividad científica postgraduada. *MediSur. Revista electrónica, 7*(4), 59-62.

Spinak, E. (2001). Indicadores cienciométricos. *ACIMED, 9*(4), 16-18.

Waldegg, G. (1998). La educación matemática ¿una disciplina científica? *Colección Pedagógica Universitaria*(29), 13-44.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Análisis de las respuestas de escolares de 7 años al resolver problemas de comparación e igualación

Dra. Carmen Paz **Oval Soto**
Universidad de Magallanes
Chile
carmen.oval@umag.cl
Dra. Paola **Donoso Riquelme**
Universidad de Magallanes
Chile
paola.donoso@umag.cl

Resumen

El siguiente texto tiene por objetivo identificar los errores y procedimientos que realizan los escolares de 7 años al enfrentarse a problemas de comparación e igualación. Para el logro de este objetivo, nos hemos basado en dos de las cuatro categorías de Carpenter y Moser (1983): comparación e igualación. El análisis de las producciones escritas de los estudiantes de 2do año de primaria permitió identificar los errores y los procedimientos más utilizados por ellos. Tal y como se esperaba, el problema de igualación es respondido de manera incorrecta por el 61% de los estudiantes mientras que el problema de comparación es respondido de manera incorrecta por el 62% de los estudiantes.

Palabras clave: resolución de problemas, matemática, errores, procedimientos.

Introducción

La resolución de problemas implica el desarrollo de habilidades, actitudes y valores que entrega la oportunidad a que los estudiantes puedan desarrollar el pensamiento crítico, la argumentación de sus ideas, entre otras competencias. Poirier-Proulx (1999) subraya que la resolución de problemas pone en juego tanto habilidades intelectuales como habilidades metacognitivas. La autora afirma que resolver problemas requiere también la utilización de conocimientos y de ciertas habilidades que el estudiante debe poseer para poder reconocer los aspectos que van a permitirle resolver la situación propuesta. La resolución de problemas crea un ambiente espléndido para poder desarrollar la comunicación dentro del grupo curso, puesto que, el estudiante a través de esta forma da a conocer los métodos empleados, se crea un espacio de discusión entre los estudiantes en el que el profesor es un mediador. Finalmente, la resolución de problemas ocupa un lugar importante tanto en el aprendizaje de las matemáticas como en otras

disciplinas.

Marco teórico

Las investigaciones realizadas en didáctica de la matemática, sobretodo en educación básica, se han centrado en diferentes aspectos de la resolución de problemas. Entre estas investigaciones, algunas han abordado la resolución de problemas según su estructura (Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Carpenter y Moser, 1984; Riley, Greeno y Heller, 1983), la utilización del simbolismo matemático (Vergnaud, 1990) y la influencia de las variables didácticas (DeBlois, 2011; Weisser, 1999). Por otro lado, algunas investigaciones se han centrado en las dificultades de los estudiantes en resolver problemas en matemáticas debido a la comprensión de las relaciones y de los algoritmos (Baffrey Dumont, 1996; Bermejo y Rodríguez 1987; Carpenter y Moser, 1984; Fayol, 1990; Nantais, 1991; Vergnaud, 1990; Weisser, 1999).

Estas diferentes investigaciones se detuvieron en la resolución de problemas matemáticos por parte de los estudiantes desde el punto de vista de las estrategias de resolución privilegiadas así como también en la utilización del simbolismo matemático pasando por las cuatro operaciones elementales (adición, sustracción, multiplicación y división). Un análisis de los trabajos de investigación sobre resolución de problemas pone en evidencia el interés de estos autores sobre el desarrollo de conocimiento matemáticos de los estudiantes.

Categorización de problemas de Carpenter & Moser (1983)

Desde los años 1980, la resolución de problemas de estructuras aditivas ha sido un objeto de estudio importante en diferentes universidades de los Estados Unidos y Europa. Varios estudios realizados en esa época se volvieron clásicos en el área de la resolución de problemas en matemática. (Carpenter et al, 1981; Carpenter y Moser, 1983; Riley et al, 1983; Riley y Greeno, 1988; Vergnaud y Durand, 1976; Vergnaud, 1982)

La investigación realizada por Carpenter y Moser (1983: 16) identificó cuatro clases diferentes de problemas que usan operaciones de suma y resta: cambio, combinación, comparación e igualación. Estas categorías nos permiten tener problemas verbales con las características semánticas que implican operaciones de suma, resta o ambas. Por su parte, Riley et al. (1983, p.160), en un proyecto de investigación que se centró en el desarrollo de habilidades de resolución de problemas aritméticos estudiantiles, identificó tres clases diferentes de problemas: los problemas de cambio, comparación y combinación. También consideraron tres dimensiones importantes en la resolución de problemas de las estructuras aditivas: las relaciones semánticas, la operación involucrada y la identidad del elemento desconocido. Es sobre esta base que se han creado los diferentes tipos de problemas.

Problemas de Cambio

Los problemas de cambio se caracterizan por el hecho de que tienen una cantidad inicial y una acción directa o implícita que causa un cambio en esta cantidad inicial. Este tipo de problema implica al menos una transformación temporal aplicada a un estado inicial y que da como resultado un estado final. Riley et al. (1983) señalan que, en este tipo de problema, la transformación puede ser aditiva o sustractiva, como en el siguiente ejemplo: "Jean tiene 5 canicas. José le da tres más. ¿Cuántas bolas tiene John ahora?”.

Problemas de Combinación

Este tipo de problema presenta una relación estática que involucra dos cantidades distintas que son parte de un todo. No hay transformaciones y lo desconocido puede afectar al total o a una de las partes. Este tipo de problema se presenta en los siguientes problemas: "*John tiene 4 caramelos. Anne tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen juntos?*" o *"Algunos niños van a patinar sobre hielo. Hay 3 niñas y 9 niños. ¿Cuántos niños van a patinar sobre hielo?"*

Problemas de comparación

En algunos casos, para Carpenter et al. (1981), los problemas implican la comparación de dos cantidades distintas. Los autores explican que en este tipo de problema, es necesario encontrar la diferencia entre las dos cantidades dadas. En otras palabras, el estudiante hace una comparación de los conjuntos para encontrar la diferencia, que puede relacionarse con uno de los dos conjuntos, como por ejemplo: "Marc ganó 4 premios en el festival. Su hermana Connie ganó 8 premios en el mismo festival. ¿Cuántos premios ha ganado Connie más que su hermano Marc?". En este tipo de problema, Riley et al. (1983) identificaron tres tipos diferentes de problemas que implican la comparación: la diferencia, el conjunto comparado y el conjunto de referencia y la categoría no posee subdivisión.

Problemas de igualación

Este tipo de problema tiene las mismas características que los problemas de cambio y comparación. La diferencia es que aquí se comparan dos conjuntos de datos, y para responder a la pregunta del problema, una de las dos cantidades debe ser igualada. Este es el caso en el siguiente problema: "Pierre tiene 12 canicas. Betty tiene 7. ¿Qué debería hacer Betty para tener tantos mármoles como Peter? y está presente solo en Carpenter et al. (1981).

Vergnaud (1982) explica que los problemas de comparación, combinación y de cambio permiten al niño comprender las dos ideas principales del concepto primitivo del número: la cardinalidad y la adición. El autor señala que las situaciones de tipo aditivo son de disímil dificultad porque ellos están construidos a partir de diferentes variables didácticas como las clases de problemas, los tipos de números y los cálculos a realizar, el orden de presentación de datos y el contenido de los problemas. El autor señala que desde que los niños están en la edad escolar, se enfrentan a situaciones en las que ellos deben apropiarse de los conocimientos diversos sobre el número.

Dificultades en la resolución de problemas

Si bien la resolución de problemas es un espacio privilegiado para el desarrollo de aprendizaje en matemática, diversos estudios realizados en el área de la didáctica de la matemática, sobretodo en la resolución de problemas de estructura aditiva, han mostrado la presencia de dificultades en la resolución por parte de los estudiantes. Las investigaciones llevadas a cabo por Riley et al (1983), Vergnaud (1982) así como también por Bermejo y Rodríguez (1987) han mostrado que ciertas variables didácticas, tales como el largo del enunciado del problema, la complejidad gramatical, el ámbito numérico en juego en la situación y el orden de los datos de un problema, tienen efectos significativos sobre la resolución de problemas en el estudiante. Estas variables pueden ser controladas por el profesor cuando crea los problemas que entregará a los estudiantes. De hecho, las investigaciones llevadas a cabo por Bermejo y Rodríguez (1987) y Fayol (1990) han mostrado que les problemas representados por frases donde la incógnita está en primer o en segundo lugar son más difíciles para los estudiantes que los problemas representados por ecuaciones donde el resultado es desconocido. Estas

mismas investigaciones han establecido también que la formulación verbal del problema aumenta el nivel de dificultad para los niños que deben resolver este tipo de problema propuesto por el profesor. Además, de estas variables se desprenden cuatro grandes conjuntos: cambio, reunión y complemento de conjuntos, comparación e igualación.

Los estudios que se ocupan de la resolución de problemas con la estructura de aditivo (Baffrey Dumont, 1996; DeBlois, 1997) muestran que los estudiantes asocian el término utilizado en la operación aritmética sin necesidad de entender la relación en juego, por ejemplo, DeBlois (1997) presentó la siguiente situación a los estudiantes: Tienes 54 autos en tu caja de juguetes. Tu vecino tiene 42 autos menos que tú. ¿Cuánto tiene tu vecino con autos en su caja de juguetes? Para responder a esta situación, uno de los estudiantes que participó en el estudio restaba, pero le costaba entender que el resultado coincidía con el conjunto en comparación. En este caso, la comprensión de la situación, desde el punto de vista del niño, es rudimentaria. Otro aspecto importante observado en esta investigación es la diversidad de enunciados. Los niños tienden a reconstruir los problemas de diferentes maneras. En otras palabras, el estudiante cambia el significado de los datos del enunciado del problema para que coincida con la estrategia de resolución que conoce o porque la declaración es demasiado compleja para él.

Los cambios en los problemas involucran diferentes variables didácticas tales como la estructura del problema, el tamaño de los números y la familiaridad con el contenido matemático del enunciado. Estas variables didácticas pueden modificar las estrategias utilizadas por los estudiantes. Un estudio realizado por Weisser (1999) mostró que la variable "orden de presentación de los datos" no tiene una influencia significativa en la elección de las estrategias de los alumnos. La variable "tipo de números" parece tener una influencia significativa en la elección de la estrategia adoptada por el estudiante al resolver la situación propuesta, además de resaltar una cierta autonomía en el desarrollo de ciertas habilidades.

DeBlois (2011) informa que la enseñanza de algoritmos en niños de primer año podría ser perjudicial para el desarrollo del razonamiento matemático de los niños cuando resuelven problemas con una estructura aditiva. La autora explica que las estrategias de resolución de los niños evolucionan, es decir, los niños comienzan a pensar o actuar mentalmente para obtener una respuesta. Una vez que los niños han explorado este paso, pueden representar (o externalizar) este conocimiento ya sea por sus propias palabras o por símbolos personales hasta el uso de símbolos formales.

Se han realizado varias investigaciones para resolver problemas matemáticos en los estudiantes desde el punto de vista de las dificultades encontradas para resolver problemas en matemáticas. Estas dificultades están relacionadas, para algunos autores, con la comprensión del enunciado y la comprensión de los algoritmos de cálculo.

Comprender las relaciones

Diversas investigaciones han demostrado que cuando los estudiantes resuelven problemas tienen dificultades para comprenderlo, tanto sobre la posición de la incógnita como en la cuestión en el enunciado (Baffrey- Dumont, 1996; Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; DeBlois, 1997; Fayol, 1990; Oval, Oliveira y López, 2017; Weisser, 1999). Por ejemplo, la investigación realizada por Bermejo y Rodríguez (1987) muestra que la estructura semántica del problema a resolver influye en la elección del estudiante de las estrategias de resolución. En otras palabras, los problemas en que la incógnita está en el operando (a + b = ;? + A = b) se considera más difícil que aquellos en los que la incógnita está en

el resultado (a + b =?)

Comprender los algoritmos

Varios autores han identificado los errores que los estudiantes hacen al resolver algoritmos de suma y resta (Bermejo et al., 2004, Carpenter y Moser 1984, Nantais 1991). Carpenter y Moser (1984) mencionan que el aprendizaje del algoritmo supone una comprensión de muchos elementos tales como la comprensión de la numeración posicional, la operación aritmética a realizar, los símbolos utilizados y las reglas o propiedades relacionadas con la operación. Bermejo et al. (2004) explican que incluso si el alumno resuelve un algoritmo paso a paso, eso no significa que haya entendido lo que hizo. De hecho, para comprender el algoritmo formal y su uso, el estudiante debe relacionar cada elemento (números y operaciones).

Por otro lado, Nantais (1991) explica que los errores ocurren por varias razones, pero que podrían estar relacionados con el conocimiento del sistema numérico o la enseñanza recibida del estudiante, es decir, diga las generalizaciones que puede hacer cuando el maestro le dice, por ejemplo, "que no puede restar un número pequeño de un número grande" (p.5). Como hemos visto anteriormente, los estudios presentados muestran que la estructura del problema y las diferentes variables consideradas en el problema tienen una influencia directa en la elección de las estrategias movilizadas por los alumnos y en las dificultades que pueden aparecer.

Así, como objetivo para esta comunicación nos hemos trazado el identificar los errores y procedimientos que realizan los escolares de 7 años al enfrentarse a problemas de comparación e igualación.

Metodología y Análisis de resultados

En este texto nos abocaremos a identificar los errores y procedimientos de resolución escolares de 7 años y que cursan 2do año de primaria. Los problemas fueron presentados de manera aleatoria e individual y creados a partir de las categorías de Carpenter y Moser (1983). En ambos casos los problemas fueron resueltos por 90 estudiantes. Los análisis realizados a los procedimientos de los escolares nos permitirán identificar los errores que cometen estos al momento de enfrentarse a problemas de comparación e igualación.

Resultados

De manera general, los resultados obtenidos muestran que al plantear problemas de igualación y comparación los estudiantes comenten más errores que en otro tipo de problemas. Ante el problema de igualación *"Sara tiene 13 libros. Si Francisca compra 5 libros, ella tendrá tantos libros como Sara. ¿Cuántos libros tiene Francisca?,* cuyo procedimiento correcto consiste en realizar un procedimiento sustractivo, restando 13 menos 5, para llegar a la respuesta que es *Francisca tiene 8 libros,* los análisis de las respuestas dadas por los 90 escolares que lo resolvieron, se observa que del total de estudiantes que respondieron el problema de igualación 32% lo respondieron de forma correcta, 61% de manera incorrecta, y 7% no lo respondieron. En cuanto a los procedimientos que utilizaron los estudiantes, la tabla 1 sintetiza las diferentes formas de registrar el resultado y procedimiento que realizaron los escolares, para dar respuesta al problema de igualación. Destaca que el algoritmo de sustracción permite resolver el problema, sin embargo, dos escolares plantearon el algoritmo de sustracción, pero obtuvieron un resultado incorrecto, lo que manifiesta la comprensión del enunciado, por tanto la dificultad radica en la resolución del algoritmo.

Tabla 1.
Registro de respuestas dadas al problema de Igualación

Respuestas	Algoritmo de Sustracción	Algoritmo de Adición	Palotes	Palabras	Número	N° de Escolares
Correctas	26	0	3	0	0	29
Incorrectas	2	45	0	7	1	55
No responden	--	--	--	--	--	6
Total	28	45	3	7	1	90

Ante el problema de comparación *Susana tiene 28 chalecos. Ella tiene 9 chalecos menos que Cecilia. ¿Cuántos chalecos tiene Cecilia?"*, cuyo procedimiento correcto consiste en realizar una adición, sumando 28 más 9, para llegar a la respuesta que es *Cecilia tiene 37 chalecos*, los análisis de las respuestas dadas por los 90 escolares que lo resolvieron, se observa que 30% de ellos respondieron de forma correcta, 62% lo resolvieron de manera incorrecta y 8% no respondieron. En cuanto a los procedimientos que utilizados, la tabla 2 sintetiza las diferentes formas de registrar el resultado y procedimiento que realizaron los escolares, para dar respuesta al problema de comparación. Destaca que el algoritmo de adición permite resolver el problema, sin embargo, nueve escolares plantearon el algoritmo de adición, pero obtuvieron un resultado incorrecto.

Tabla 2
Registro de respuestas dadas al problema de Comparación

Respuestas	Algoritmo de Adición	Algoritmo de Adición y palotes	Algoritmo de Sustracción	Algoritmo de Sustracción y palotes	Palabras y palotes	Palotes	Palabras	Números	N° de Escolares
Correctas	21	3	0	0	1	0	2	0	27
Incorrectas	9	1	38	2	0	1	4	1	56
No Responden	--	--	--	--	--	--	--	---	7
Total	30	4	38	2	1	1	6	1	90

Conclusión

Los análisis realizados en torno a la resolución de problemas de comparación e igualación nos han permitido identificar los errores y procedimientos que realizan los escolares de 7 años al momento de resolver los problemas planteados. El análisis en torno a los procedimientos como tal, muestran la utilización del algoritmo tradicional con las dificultades que esto conlleva. En relación a las respuestas otorgadas por los estudiantes al problema de igualación, el análisis de las respuestas correctas permite identificar 2 categorías de respuesta: una de ellas es la realización del algoritmo de sustracción y la segunda es el registro gráfico correspondiente a dibujar la cantidad total de "palote" y tachar aquellos que hay que sustraer. Respecto al registro de las respuestas incorrectas, se identifican 4 tipos de registros: error de resolución del algoritmo de sustracción, la realización del algoritmo de adición lo que evidencia la incomprensión del enunciado, repetición de la información del problema sin necesariamente llegar a resolverlo y finalmente, escribe una respuesta numérica sin dejar rastro del procedimiento que utilizó para la resolución.

Si nos enfocamos en las respuestas correcta del problema de comparación, el análisis de las respuestas de los estudiantes permite identificar 4 tipos de registro: algoritmo de adición, algoritmo de adición y "palotes", palabras y "palotes" y solo palabras. Respecto a esto último,

los estudiantes no registran de manera gráfica su respuesta y sólo escriben el resultado sin dejar rastro del procedimiento realizado. En relación a las respuestas incorrectas, se identifican 7 tipos de registro: algoritmo de adición, algoritmo de adición y "palotes", algoritmo de sustracción, algoritmo de sustracción y "palotes", "palotes", palabras y números. En las producciones escritas de estudiantes que resolvieron con algoritmo de adición pero su respuesta es incorrecta, se debe a una dificultad en la comprensión de la relación entre los sumandos o en el valor posicional al momento de realizar la adición.

Las dificultades evidenciadas por este grupo de estudiantes permitirán al profesor tomar decisiones en beneficio del desarrollo de la habilidad de resolución de problemas y a los estudiantes superar aquellos errores que manifiestan en su actividad matemática.

Referencias y bibliografía

Baffrey-Dumont, V. (1996). Résolution de problèmes arithmétiques par des enfants de huit ans. Revue des sciences de l'éducation, 22(2), 321–343. Retrieved from http://www.erudit.org/revue/RSE/1996/v22/n2/031883ar.pdf

Bermejo, V., & Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. Infancia y aprendizaje, 39-40, 71–81.

Carpenter, T., Hiebert, J., & Moser, J. (1981). Problem Structure and First-Grade Children's Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12(1), 27–39. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/748656. doi:10.2307/748656

Carpenter, T., & Moser, J. (1983). The acquisition of addition and substraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. Academic Press.

Carpenter, T., & Moser, J. (1984). The acquisition of addition and substraction concepts in grades one through three. Journal for Research en Mathematics Education, 15(3), 179–202.

De Corte, É., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. Journal for Research en Mathematics Education, 18(5), 363–381.

De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. Journal of Educational Psychology, 77(4), 460–470. doi:10.1037//0022-0663.77.4.460

Deblois, L. (1997). Quand additionner ou soustraire implique comparer. Éducation et francophonie, XXV(1). Retrieved from http://www.acelf.ca/c/revue/revuehtml/25-1/rxxv1-08.html

DeBlois, L. (2011). Enseigner les mathématiques: des intentions à preciser pour planifier, guider et interpréter (p. 223). Québec, Canada: Presses de l'Université Laval (PUL).

Fayol, Michel. (1990). La résolution de problèmes et sa génèse. In Michel Fayol (Ed.), L'enfant et le nombre: du comptage à la résolution de problèmes (pp. 149–184). Neuchâtel, Suisse: Éditions Delachaux & Nestlé.

Nantais, N. (1991). L'analyse d'erreurs appliquées aux algorithmes arithmétiques. Instantanés Mathématiques, 27(5), 6–11.

Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. Educational Studies in Mathematics, (13), 373–394.

Oval, C., Oliveira, I, López, C (2017) Resolución de Problemas en Matemáticas: Procedimientos de

Resolución em estudiantes de 7 años. Libro de Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Madrid.

Poirier, L., & Bednarz, N. (1997). Comprendre le sens du symbolisme mathématique… Une question d'autobus. La revue de l'ADOQ, 9(2), 9–10.

Poirier-Proulx, L. (1999). La résolution de problèmes: une stratégie de pensée. In L. Poirier Proulx (Ed.), La résolution de problèmes en enseignement. Perspectives en Éducation. Bruxelles, Bélgique: DeBoeck.

Riley, M. S., & Greeno, J. G. (1988). Developmental Analysis of Understanding Language About Quantities and of Solving Problems. Cognition & Instruction, 5(1), 49. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=aph&AN=7383489&site=ehost-live

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic. In H. Ginsburg (Ed.), The Development of Mathematical Thinking (pp. 153–196). New York, USA: Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). Théorie des Champs Conceptuels. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10(2.3), 133–170.

Vergnaud, G., & Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogenetique. Revue française de pédagogie, (36), 28–43.

Weisser, M. (1999). Les problèmes d'arithmétique : traits de surface , modes de résolution et taux de réussite. Revue des Sciences de l'Éducation, 25(2), 375–399.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desarrollo del sentido de la medida en educación primaria

Marianela **Alpízar** Vargas
Universidad Nacional
Costa Rica
marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr

Resumen

Los retos del sistema educativo son muy grandes y los docentes son un pilar importante en dicho sistema por lo que recae en ellos gran parte de esta responsabilidad. Durante este taller se pretende analizar diversas tareas no tradicionales del área de Medidas que permitan desarrollar diferentes habilidades cognitivas en estudiantes de educación primaria, donde se potencien diversos procesos de pensamiento. Un estudiante de educación primaria debe comprender los atributos medibles de un objeto y las unidades de medida básicas, además de utilizar instrumentos apropiados según la medición por efectuar y resolver actividades de índole cotidiano, donde el uso de diversas magnitudes es común; por otra parte el docente es el encargado de crear el entorno adecuado para potenciar el aprendizaje en sus estudiantes, por lo que debe dominar aspectos teóricos de la disciplina así como didácticos.

Palabras clave: educación primaria, matemáticas, medidas, formación docente, didáctica.

Introducción

La sociedad se encuentra en constantes cambios y con ella la educación en todos los niveles, año tras año se hacen diversas investigaciones que tratan de entender la manera de pensar de las personas, como aprenden y que necesitan para adquirir nuevos conocimientos, dentro de esta realidad se encuentra inmersa la Matemática Educativa, dentro de esta línea se trabaja la formación docente, el currículo escolar, las estrategias de aprendizaje y enseñanza, las dificultades y errores que muestra el estudiantado y las oportunidades que se tienen para avanzar.

Diversos países han apostado por hacer un cambio en el currículo no solo en el contenido por abarcar sino también en la metodología a seguir. Un ejemplo de ello es Costa Rica, en 2012 se aprobaron nuevos Programas de Estudio en el área de las Matemáticas del Ministerio de Educación Pública (MEP), desde el primer año de educación primaria hasta el último año de educación secundaria. Esta etapa de la educación costarricense se divide en cuatro ciclos, los tres primeros corresponden a la Educación General Básica, la población oscila entre 6 y 15 años, para finalizar con el ciclo diversificado, donde la edad de los estudiantes oscila entre 16 y 18 años.

Aunque ya van más de cinco años del cambio aún hay aspectos por mejorar entre ellos la preparación de los docentes, los materiales bibliográficos que se utilizan en las clases entre otros; además hace falta más investigación acerca de lo que está ocurriendo en el aula.

Lo estipulado en dicho programa es abarcado en todas las instituciones públicas del país, con él se pretende un cambio con miras a mejorar la formación básica de los ciudadanos costarricenses, con una matemática que los prepare para la vida; donde la resolución de problemas y las situaciones contextualizadas toman un papel trascendental (Alfaro, Alpízar, Morales, Salas y Ramírez, 2013). Se establecen cinco áreas de conocimiento para desarrollarse a través de la formación básica (primaria y secundaria) del estudiante; a saber: Números, Medidas Relaciones y Álgebra, Geometría, Probabilidades y Estadística (MEP, 2012).

Cada área tiene distinta representatividad según el ciclo escolar, en particular el tema de Medidas solamente es abarcado como contenido en I y II Ciclos, en el III y IV se considera como un tema transversal. En este taller se abordarán tópicos referentes al tema de Medidas en educación primaria, considerando las habilidades generales y específicas que establece el programa de estudios del MEP (2012) y los lineamientos curriculares que emanan de este, de manera específica para II Ciclo.

El área de Medidas, en ocasiones es considerado de fácil manejo para los estudiantes de educación primaria; sin embargo, el sentido de la medida no se desarrolla con procedimientos mecanizados que se trasfieren en el aula sin relación con la cotidianidad, ni con conversión memorísticas, sino que lo aprendido en el aula debe ser de utilidad para las actividades cotidianas de los estudiantes y es ahí donde existe evidencia que el sentido de la medida no se ha desarrollado de la mejor manera, un ejemplo de ello podría ser cuando un vendedor en una tienda de comestibles no puede entregarle al cliente el cambio de dinero correspondiente, de igual forma en una construcción de una casa de habitación donde sobra gran cantidad de material (cemento, varillas, etc.) porque se compró de más o por el contrario hay faltante del mismo, entre otros (Alpízar, 2014).

Por otra parte en la validación que realizaron Pincheira y Vásquez (2018) de un cuestionario de medición de Conocimiento Didáctico Matemático para la Enseñanza de la matemática elemental en futuros profesores de educación básica, encontraron que el eje de medición fue el que presentó más debilidades en cuanto al conocimiento especializado del contenido, además los docentes en formación que llenaron el cuestionario no relacionaron el concepto de estimación como un concepto que se requiere para adquirir otros más avanzados del currículo escolar. Por lo anterior, se justifica la preocupación por atender el tema de Medidas.

Según el MEP (2012) la enseñanza de los conocimientos relacionados con Medidas debe tener una orientación adecuada, que evolucione según las características de los niños y las habilidades adquiridas, en el primer ciclo deben abordarse en asociación, en mayor parte, con el área de Números, debido a la importancia de las estimaciones, comparaciones y uso de instrumentos no convencionales. En el segundo ciclo debe relacionarse con Geometría y Estadística y Probabilidades, en este nivel se le debe dar énfasis al Sistema Métrico Decimal y al análisis de las diversas medidas en contextos reales, donde es indispensable que las tareas que se propongan abarquen distintos tipos de medidas.

Elementos conceptuales y metodológicos sobre Medidas

Según Moreno, Gil y Montoro (2015) la medida es un área importante dentro del campo de la Educación Matemática y cada vez toma más relevancia en los currículos escolares debido a su utilidad en contextos cotidianos, por ejemplo al organizar las actividades en un horario específico, realizar proyectos de construcción y manuales, administrar dosis de medicamentos, realizar recetas de cocina, entre otras.

Las medidas están directamente vinculadas con el sentido numérico, por lo que se debe aprovechar esta relación para establecer conexiones con las otras áreas matemáticas del currículo así como con otras disciplinas como ciencias, historia, geografía (MEP, 2012; Hurrell, 2015), es decir se deben plantear actividades donde el contexto pertenezca a distintas áreas, no solo a las matemáticas.

Según el MEP (2012) la medida es una característica de algunos objetos físicos (o matemáticos); donde es claro que no todo atributo es medible cuantitativamente, los objetos que admiten medición permiten establecer un "sentido de aproximación". Esto cobra importancia en el análisis de las mediciones pues ellas constituyen una aproximación en sí misma, en tanto que los instrumentos de medición están sujetos a un margen de error. Una misma característica (medida) es común para varios objetos lo que permite que se puedan comparar dichos objetos.

Según el NCTM (2000) los conceptos básicos sobre la medida y el uso de instrumentos y técnicas de medida, deberían establecerse a partir de tareas de comparación de objetos, conteo de unidades y uso de conexiones entre conceptos espaciales y el número. Así los estudiantes pueden visualizar que una misma característica que es común a varios objetos permite la comparación de mediciones, y de este modo, se pueden determinar u observar semejanzas y diferencias entre esos objetos y así crear clasificaciones.

El uso de las medidas y el lenguaje asociado se adecua al contexto donde se estén desarrollando, para Godino, Batanero y Roa (2002) existen tres contextos relacionados con medidas:

a) En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales se habla de magnitudes para propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos, por ejemplo peso, velocidad, longitud.
b) En las ciencias humanas y sociales las "cantidades" vienen a ser las distintas modalidades o valores que puede tomar el rasgo o característica del objeto o fenómeno en cuestión.
c) En la matemática, con la palabra magnitud se designa un conjunto de objetos abstractos (cantidades) dotado de una cierta estructura algebraica, y medida es un isomorfismo entre dicha estructura y un subconjunto apropiado de números reales (p. 615)

El docente debe conocer acerca del significado de medición según el nivel de estudiantes que atiende, en el caso de educación primaria se desarrolla el primero de los contextos citados por Godino, Batanero y Roa (2002). Según el NCTM (2000) las tareas relacionadas con mediciones desarrollan habilidades de diversas áreas de las matemáticas y conceptos de medida que serán formalizados y ampliados en otros niveles de su educación.

Al iniciar la educación formal la medición que interesa es la relacionada con aspectos cotidianos con valores numéricos y que exista interacción con diversos instrumentos de medición. El docente debe ir guiando a los estudiantes para que estos descubran la necesidad que tienen los seres humanos de medir la longitud, la capacidad, el peso, entre otros, y hacer comparaciones entre diversas mediciones; además deben guiar esos procesos de medición y estar atentos para que los recursos que permitirán la experimentación se encuentren accesibles para el estudiantado.

Antes de abordar el uso de instrumentos estandarizados el estudiante debe manipular distintas herramientas que le ayuden a estimar, se recomienda que el estudio del Sistema Internacional de Unidades sea abordado después de haber trabajado de manera exhaustiva con

medidas arbitrarias, el trabajo con unidades debe darse de manera manipulativa (cuando el tamaño lo permita) para que el estudiante se familiarice con el orden de la magnitud, requisito para las estimaciones en medida (Chamorro, 2003).

No se aprende a medir sin hacer trabajo de campo, los estudiantes deben enfrentarse, en sus primeros años de formación, a esa experimentación de realizar mediciones con instrumentos no convencionales como las partes de su cuerpo, herramientas fáciles de encontrar como lápices de color, lapiceros, etc., hasta llegar a utilizar de manera correcta los instrumentos convencionales. Desarrollar habilidades en el área de Medidas requiere acción, socialización y reflexión, tal como lo indica Hurrell (2015) una lección donde se aborda un tema relacionado con medidas no puede ser una lección pasiva.

Tal como se describió anteriormente, el área de Medidas en Costa Rica, se abarca como conocimiento en I y II Ciclo, el propósito de dicha área en el I Ciclo de la Educación General Básica "es dar inicio a la comprensión del concepto de medida y que se calcule, estime, compare y aplique algunas de ellas" (MEP, 2012, p. 123). Para ello deben manipular instrumentos tradicionales y no tradicionales para efectuar diversas mediciones, considerar errores y discutir acerca de las diferencias que existen según el instrumento de medición a utilizar.

Las habilidades generales que deberán ser adquiridas, al finalizar el I ciclo, son:

- Construir la noción de medición (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad).
- Utilizar instrumentos de medición.
- Realizar mediciones (longitud, moneda, peso, tiempo).
- Estimar medidas (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad).
- Aplicar la medición en diversos contextos. (p. 123).

De lo anterior es posible determinar que diversos autores y entes encargados de la formación de niños en edades de 6 a 9 años consideran que el sentido de la medición debe iniciarse con ideas intuitivas acerca de cada tipo de característica medible, además que la importancia del tema de medidas radica en su uso en las actividades cotidianas.

Al continuar el proceso de instrucción se debe profundizar en el análisis de las mediciones, su importancia en la resolución de problemas del contexto, especialmente en medidas de longitud, moneda, peso, tiempo y capacidad. También se amplía el tipo de problemas que pueden ser resueltos mediante mediciones o estimaciones: medidas de superficie, volumen y temperatura, y se profundiza en el análisis del sistema métrico decimal.

Según la NCTM (2000) el proceso en el área de medidas debe continuar con los estudiantes profundizando y ampliando la comprensión de las medidas y en especial las de su entorno, en este nivel se incluyen otras medidas como ángulos y área y se presta mayor atención a la precisión al emplear instrumentos de medida y se introduce el uso de las fórmulas para determinar la medida de algunos de los atributos.

Por su parte para el sistema educativo costarricense, el propósito general para la enseñanza de las medidas en este II ciclo "es ampliar el conocimiento que traen las y los estudiantes en esta área y prepararlo en la comprensión y la aplicación del Sistema Métrico Decimal, sin dejar de lado el uso de diversos materiales e instrumentos de medición" (MEP 2012, p. 223).

Las habilidades generales que deben promoverse durante este ciclo son:

- Realizar mediciones (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, superficie, volumen, temperatura).
- Estimar medidas (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, superficie, volumen, temperatura).
- Aplicar el sistema métrico decimal.
- Aplicar la medición en diversos contextos. (MEP 2012, p. 223)

Es decir se pretende que al finalizar este ciclo de enseñanza (estudiantes que oscilan entre 10 y 12 años) el estudiantado tenga una comprensión adecuada del concepto de medición y pueda realizar, estimar y comparar mediciones con mayor precisión que en el ciclo anterior, domine el uso de instrumentos convencionales y pueda resolver problemas de su entorno donde es evidente la mezcla de diversas mediciones en un mismo contexto.

Hasta aquí se presentó un panorama acerca de las orientaciones que debe tener el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conocimientos relacionados con el área de Medidas, a continuación se presenta un apartado donde se dan algunas nociones del conocimiento docente.

Conocimiento del docente

Ruiz (2014) expresa que el reto más importante que tiene el país (Costa Rica), después del cambio en sus planes de estudio es mejorar la preparación de los docentes; debe prestarse atención tanto a la capacitación de docentes en servicio, como a la formación universitaria de los mismos.

Un docente, sin importar el nivel, que imparte Matemáticas, debe estar en la capacidad de proponer actividades para sus estudiantes de acuerdo con el nivel que estos tengan, considerando los conocimientos previos de los mismos, y esas actividades deben estar en estrecha relación con el contenido que se quiere enseñar y que es propuesto en el currículo correspondiente; además debe tener un conocimiento especializado en cuanto al contenido por enseñar (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016).

Existen diversas posiciones acerca de lo que debe dominar un docente para impartir clases de matemáticas en educación primaria, uno de ellos es conocido como Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical knowledge for teaching, MKT) de Ball, Thames y Phelps, 2008. En este modelo se divide el conocimiento que tienen que tener el docente en dos categorías Conocimiento del Contenido que enfatiza en los conceptos matemáticos y Conocimiento Pedagógico del Contenido referido al proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. A su vez el Conocimiento del Contenido se divide en Conocimiento Común del Contenido (conocimiento de los contenidos que el docente tiene en común con otros profesionales que utilizan las matemáticas), Conocimiento en el Horizonte Matemático (conocimiento de la relación existente entre los conocimientos de matemáticas con otras áreas del currículo) y el Conocimiento Especializado del Contenido (conocimiento que el docente requiere para enseñar). Mientras que el Conocimiento Pedagógico del Contenido se subdivide en Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (conocimiento que permite a los docentes interpretar el pensamiento de sus estudiantes respecto de las tareas y contenidos matemáticos), Conocimiento del Currículo (conocimiento acerca de la propuesta curricular) y Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (conocimiento que mezcla el saber sobre la enseñanza y sobre las matemáticas) (Ball, Thames, Phelps, 2008).

Como se evidencia en el modelo anterior el conocimiento que el docente tenga acerca de la temática por enseñar es indispensable, las bases en los conceptos disciplinares deben ser fuertes, en este caso particular del conocimiento acerca de las nociones básicas de Medidas debe adecuarse al nivel donde va ha impartir las lecciones, así como al uso que se le da a estos conocimientos fuera del aula; por otra parte el dominio que este tenga de aspectos didácticos puede facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje, otro de los elementos a dominar por parte del docente es el currículo vigente, en Costa Rica el planteamiento de las actividades que guiarán el proceso de enseñanza y aprendizaje en las escuelas públicas debe apegarse a los lineamientos curriculares que se establecen en los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP vigente, por tanto se incluye en este documento un resumen de algunos de esos elementos con el fin de determinar las características que se deben tomar en cuenta para la actividades que se desarrollarán en el taller.

Los Programas de Estudio se sustenta en un conjunto de habilidades, procesos, ejes disciplinares, actitudes y creencias (MEP, 2012). Las habilidades se clasifican en específicas y generales, las primeras se relacionan con las capacidades que posee un estudiante para comprender un conocimiento, concepto o procedimiento desarrollables a corto plazo y las segundas corresponden a la generalización o combinación de las habilidades específicas, las generales se citaron en el apartado anterior.

En cuanto a los procesos matemáticos, son aquellas actividades que realizan las personas en las distintas áreas de las Matemáticas, y se dividen en cinco categorías básicas; a saber: *razonar y argumentar* se relaciona con actividades mentales como: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos; p*lantear y resolver problemas* planteamiento de problemas (principalmente en contextos reales) y el diseño de estrategias para resolverlos; *comunicar* capacidad para expresar de manera adecuada tanto oral, visual o escrita las ideas, resultados y argumentos matemáticos al resto de los compañeros de clase o al docente; *conectar* establecer relaciones entre las diferentes áreas Matemática y con otras ciencias, y *Representar* es capaz de reconocer, interpretar y manipular diversas representaciones sobre un mismo objeto (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares) (MEP, 2012).

Otro elemento de los Programas de Estudio corresponden a los ejes disciplinares, con los cuales se busca responder a las debilidades existentes y posicionar la Educación Matemática que se desarrolla en el país con estándares internacionales. El MEP (2012), define cinco ejes disciplinares, los cuales son: la resolución de problemas como estrategia metodológica principal, la contextualización activa como un componente pedagógico especial, el uso inteligente y visionario de tecnologías digitales, la potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a la Matemática y el uso de la Historia de la Matemática (p. 17).

Hasta aquí se dio un panorama general acerca de la las características que debe contemplar el proceso de enseñanza y aprendizaje para el área de Medidas y algunas nociones acerca de las responsabilidades docentes en este proceso.

Aspectos metodológicos del taller

Tal como lo expresan Ball, Thames, Phelps (2008) el docente debe dominar conocimiento relativos al contenido como a aspectos pedagógicos o didácticos, por lo que la intensión de este taller es realizar diversas actividades que relacionan estos dos aspectos, ya que se expondrán tareas relacionadas con los conocimientos básicos de Medidas, las cuales pueden plantearse a

estudiantes de educación primaria, estas se analizarán bajo dos perspectivas, la primera relacionada con los conocimientos disciplinares que deben tener los estudiantes para poder resolverlas y por ende los conceptos que deben dominar los docentes que imparten las lecciones y la segunda los elementos didácticos que deben considerarse al plantear actividades de este tipo en un aula.

Las actividades por presentar son situaciones problema que se identifiquen con las siguientes habilidades: Realizar mediciones (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, superficie, volumen, temperatura), estimar medidas (longitud, moneda, peso, tiempo, capacidad, superficie, volumen, temperatura) y aplicar el sistema métrico decimal.

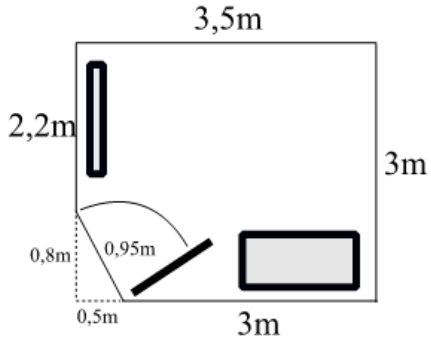
Para cada actividad se completará un instrumento de manera grupal, donde se analizarán aspectos como: el conocimiento matemático que se debe tener previo para realizar la actividad, la(s) habilidad(es) que se estarían desarrollando, los procesos matemáticos que se pueden activar con dicha actividad, el nivel y momento específico donde se desarrollaría (introducir, desarrollar o evaluar una temática), dificultades que pueden tener los estudiantes al efectuar las actividades y los errores que pueden cometer y el papel que debe tener un docente dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje del tema en cuestión y al utilizar las actividades planteadas.

Cabe destacar que la encargada del taller adjuntará a cada grupo de trabajo los documentos necesarios para poder completar la tabla, esos sería: listado de conocimientos, habilidades y procesos que se pretenden trabajar con las actividades.

Las actividades por presentar son problemas no tradicionales planteados con base en los lineamientos curriculares del MEP de Costa Rica presente en los Programas de Estudio, donde se busca en la medida de lo posible trabajar contextos reales. Se adjunta una de estas actividades como ejemplo.

Decorando el espacio

La sala de la casa de María tiene la forma y las longitudes que se presentan en la figura adjunta, lo único que tiene dicho espacio es un televisor en el lado izquierdo y un estante para libros en el frente, la abertura de la puerta es de 95cm de ancho.



La familia de María requiere compran, al menos, un sillón principal y para ello asisten a la tienda respectiva.

Al ir a la tienda encuentran las siguientes opciones para el sillón principal:

I. Un sillón de 220cm de ancho, por 90cm de fondo y 85cm de alto.
II. Un sillón de 195cm de ancho, por 100cm de fondo y 105cm de alto.

¿Cuál opción debe elegir la familia de María? Justifique su respuesta.

Figura 1. Ejemplo de las actividades por presentar en el taller.

Con este taller se pretende validar algunas de las actividades propuestas por quien imparte el taller para ser desarrolladas en las aulas de educación primaria, de manera específica en II Ciclo de la Educación General Básica en el área de Medidas. Se espera que al compartir con docentes e investigadores de otras latitudes se puedan analizar los distintos elementos que se requieren para que las actividades sean de provecho para las clases del nivel citado; además de discutir las condiciones necesarias para que una actividad se pueda considerar como adecuada.

Por otro lado se espera que parte del público que asista al taller sea docente en ejercicio de educación primaria por lo que las actividades que se discutirán les podrán servir en sus clases de Matemáticas, porque, aunque dichas actividades están relacionadas con lo estipulado en los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP de Costa Rica hay muchas similitudes con los currículos de otros países.

Reconocimientos

Trabajo elaborado en el marco del proyecto de investigación Formación docente en II Ciclo de la Educación General Básica en cuanto al tema de las Matemáticas de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, bajo el código SIA 0082-16.

Referencias y bibliografía

Alfaro, A.L., Alpízar, M., Morales, Y., Ramírez, M., y Salas, O. (2013). La formación inicial y continua de docentes de Matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(8), 131-179. Recuperado de http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/12225/11496

Alpízar, M. (2014). Área de Medidas en el I Ciclo de la Educación General Básica, algunas consideraciones para su abordaje en el aula. Ponencia presentada en II Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa (II ECAME). Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. doi http://dx.doi.org/10.1177/0022487108324554

Chamorro, M.C (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En Didáctica de las Matemáticas, Ed M.C Chamorro. Editorial Pearson. España.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM. Recuperado de http://www.seiem.es/docs/actas/20/ActasXXSEIEM.pdf

Godino, J. Batanero, C., y Roa, R. (2002). Medida de magnitud y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Mestros, Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

Hurrell, D. (2015). Measurement: Five considerations to add even more impact to your program. Australian Primary Mathematics Classroom 20 (4), 14-18.

Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudio en Matemáticas para la Educación general Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.

Moreno, M.F., Gil, F., y Montoro, A.B. (2015). Sentido de la medida. En Flores, P. y Rico, L. (Coords). Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria. Ediciones Pirámide. España.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics. Reston: NCTM, Inc.

Pincheira, N. y Vásquez, C. (2018). Conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la Matemática Elemental en futuros profesores de educación básica: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Estudios Pedagógicos* 44, 1. 25-48. Recuperado de http://revistas.uach.cl/index.php/estped/article/view/3597

Ruiz, A. (2014). La implementación de los programas oficiales de Matemática. *Informe Estado de la Educación.* San José: PEN. Recuperado de http://www.estadonacion.or.cr/files/biblioteca_virtual/educacion/005/Angel_Ruiz_La_implementacion_programas_matemt.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas en ingeniería: un primer acercamiento

Rafael Antonio **Arana-Pedraza**
Universitat de Barcelona
España
rafael.arana.pedraza@gmail.com
Silvia Elena **Ibarra** Olmos
Universidad de Sonora
México
silvia.ibarra@unison.mx
Vicenç **Font** Moll
Universitat de Barcelona
España
vfont@ub.edu

Resumen

El presente trabajo es parte de una investigación en curso que pretende responder qué conocimientos y competencias didáctico-matemáticas necesita el profesor de matemáticas que labora en las escuelas de ingeniería, tomando como referencia el estudio de los Sistemas de Ecuaciones Lineales. Específicamente se reporta la información generada en la primera fase del proyecto, con referencia al análisis ontosemiótico de los documentos curriculares y el libro de texto propuestos por una institución de educación superior. La identificación y articulación de los objetos matemáticos primarios presentes en dichos documentos permiten definir la práctica matemática que se promueve.

Palabras clave: configuración ontosemiótica, formación de profesores, enfoque ontosemiótico, sistemas de ecuaciones lineales, educación superior.

Antecedentes

Aproximadamente dos décadas después de su creación, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (por sus siglas en inglés, UNESCO) en conjunto con la Organización Internacional del Trabajo (OIT) emite en 1966 la Recomendación relativa a la situación del personal docente, la cual toma en consideración numerosos aspectos del ámbito profesional del profesor entre ellos la capacitación inicial y continua. En términos de la presente investigación, es de vital importancia retomar dos de ellos, el profesionalismo y la capacitación del personal docente.

En cuanto al primero, la recomendación menciona que la enseñanza debería considerarse como una profesión cuyos miembros prestan un servicio público, por lo tanto, debería de exigir del docente una preparación mantenida mediante estudios rigurosos y continuos que lo ayuden a tener un conocimiento profundo y una competencia especial, además de un sentido de las responsabilidades que se adquieren en la profesión. En cuanto a la capacitación del personal docente, menciona que aquellos individuos encargados de esta labor (formador de formadores) deberían de estar capacitados para dar una formación equiparable al de la enseñanza en nivel superior y quienes proporcionan la formación pedagógica deberían contar además con la experiencia en la enseñanza escolar, renovando esta experiencia de manera periódica mediante la práctica de la docencia. Aunque esta disposición se dirige a profesores de los niveles desde preprimaria hasta secundaria, brinda pautas que han permeado en la formación de los profesores.

Es hasta 1997 cuando la UNESCO emite la Recomendación relativa al personal docente de la enseñanza superior, la cual es complementaria a la emitida en 1966 pero se dirige a todo el personal docente e investigador de la educación superior. De forma similar, se abordan diferentes aspectos referentes al profesor, de los cuales retoman el profesionalismo o profesionalidad definiendo nuevamente la profesión como un servicio público que requiere conocimientos profundos, pero agregan a diferencia de la recomendación de 1966 la necesidad de un saber especializado. En términos de la capacitación, en el rubro de condiciones de empleo menciona que el personal docente de la enseñanza superior debería gozar de un sistema abierto y equitativo de desarrollo profesional. Actualmente, la formación del profesorado es aspecto sujeto a observación por la UNESCO, como se contempla en la Estrategia a plazo medio 2014-2021 aprobada en su 37ª. Conferencia General.

La formación del profesorado en Educación Matemática

Dentro del campo de la Educación Matemática, la formación del profesor de igual manera ha sido un aspecto analizado e investigado desde diferentes perspectivas teóricas y en los diferentes niveles educativos. De acuerdo con Ball (2017), un problema fundamental ha sido el identificar cuál es el conocimiento que el profesor de matemáticas necesita para una buena enseñanza de las matemáticas, ya que, si bien ha existido un consenso en que el profesor debe saber matemáticas para enseñarlas no sucede lo mismo con la idea de *cuántas* matemáticas debería saber, incluso diversos estudios han fallado al tratar de demostrar la relación entre la cantidad de matemáticas que el profesor conocer con la predicción del aprendizaje de los estudiantes.

En la investigación referente a la formación del profesor se han desarrollado diferentes modelos teóricos que describen los tipos de conocimientos puestos en práctica por el profesor para el aprendizaje de los alumnos (Pino-Fan & Godino, 2015). A pesar de que estos modelos generaron una base sobre los conocimientos que el profesor debería poner en juego en el proceso de enseñanza, Godino (2009) puntualizaba que éstos consideran categorías muy generales siendo útil el desarrollo de un modelo que permita realizar un análisis más pormenorizado de cada uno de los tipos de conocimiento.

Tomando en cuenta lo anterior, se desarrolló un modelo teórico que contemplara lo desarrollado por las investigaciones anteriores, pero que permitiera ampliar el nivel de análisis y que brindara una forma sistemática para la investigación de este tema, denominado modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor (Pino-Fan & Godino, 2015; Godino, 2009) y que en investigaciones posteriores se desarrolla e incorpora la noción de competencia del

profesor de matemáticas generando así el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM) (Godino et al., 2016; Godino et al., 2017). El modelo propuesto tiene su base en los constructos teóricos desarrollados en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero, & Font, 2007).

Contexto de la investigación

El presente trabajo se enmarca en una investigación que se lleva a cabo en una institución del nivel superior ubicada en el noroeste de la República Mexicana, la cual brinda formación tecnológica a nivel licenciatura a jóvenes en edades entre los 18 y 22 años. Se estudian profesores de matemáticas que imparten clases a los programas educativos (PE) de ingeniería, centrando la atención en la noción de Sistemas de Ecuaciones lineales (SEL), específicamente en la asignatura de Álgebra Lineal.

Tomando en cuenta las aportaciones en el desarrollo del modelo CCDM y la naturaleza de los sujetos de estudio surge la siguiente interrogante que motiva esta investigación: ¿qué conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, con respecto a la noción de los SEL, necesita el profesor de matemáticas en ingeniería?

En los siguientes apartados, se desarrolla el sustento teórico que nos brinda soporte para responder a esta pregunta que guía, así como las consideraciones y acciones metodológicas que llevan a buen término la investigación.

Consideraciones teóricas

Como se menciona anteriormente, para el desarrollo de la investigación se toman como base los constructos teóricos desarrollados en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática y del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM).

Según Godino, Batanero y Font (2007), una práctica matemática es toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. Sin embargo, más que estudiar una práctica en particular, resulta de mayor interés estudiar el sistema de prácticas (operativas y discursivas) puestas en manifiesto al abordar algún tipo de situación problemática. Los sistemas de prácticas se clasifican en aquellos que realiza una persona (personales), o las que se realizan en el seno de una institución (institucionales).

En el EOS se considera que los objetos matemáticos emergen de un sistema de prácticas donde se ponen en juego diferentes elementos para resolver cierta situación que se presenta. Godino, Batanero y Font (2007) identifican estos elementos que se ponen en juego en seis objetos primarios: (1) Situaciones, (2) Lenguajes, (3) Conceptos, (4) Proposiciones, (5) Procedimientos y (6) Argumentos. El análisis de los seis objetos primarios y sus relaciones permiten establecer una Configuración Epistémica, en otras palabras, como interactúan los objetos puestos en juego.

El modelo CCDM, se compone de tres dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática; a su vez dentro de la dimensión didáctica se encuentran seis facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica; además se considera que las dos competencias clave son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Esta última se considera una competencia general del profesor de matemáticas, caracterizada mediante cinco sub-competencias: a) Competencia de análisis de

significados globales, b) Competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas, c) Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas, d) Competencia de análisis normativo, y e) Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica (Godino et al., 2016; Pino-Fan & Godino, 2015; Godino, 2009).

Consideraciones metodológicas

Para responder la interrogante central de la investigación, se ha establecido como objetivo general "Caracterizar la competencia general de análisis e intervención didáctica para el profesor de matemáticas en ingeniería". A su vez, el objetivo general se desglosa en seis objetivos específicos con las preguntas de investigación que deberán de ser respondidas, los cuales han sido planteados en término de las cinco sub-competencias planteadas en el modelo CCDM. Con respecto al proyecto de investigación se definen cuatro fases de trabajo: (1) análisis documental, (2) investigación de campo siguiendo el método del estudio de casos, (3) integración de la información generada y, (4) establecimientos de pautas para un programa de desarrollo profesional docente. Para los términos de lo que se reportan, se centra la atención en la primera de las fases.

El análisis documental consistió en la revisión y análisis de documentos oficiales que establecen los conocimientos y las competencias básicas declarados por uno de los organismos nacionales encargados de la acreditación de los PE de ingenierías, específicamente el Consejo de Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería (CACEI) que, en el caso de la institución en que se realiza la investigación, es el responsable de la evaluación de los PE de ingeniería. Asimismo, el análisis de los programas y planes de estudio en ingeniería que propone la institución, donde se pone especial énfasis en el currículo matemático. Finalmente, se revisaron los libros de texto propuestos por la citada institución en los documentos curriculares. Tanto la información presentada en el programa del curso, como lo que presenta el libro sugerido en la bibliografía básica, se analizan utilizando herramientas teórico-metodológicas propuestas por el EOS como lo son los sistemas de prácticas y la articulación de las redes de objetos primarios intervinientes y emergentes en configuraciones epistémicas.

Considerando lo anterior, se resumen las siguientes acciones metodológicas:

a) Análisis de los mapas curriculares de los PE de ingeniería para determinar las asignaturas del bloque de Ciencias Básicas.
b) Selección de las asignaturas del bloque de Ciencias Básicas por analizar, las cuales en una primera instancia son las del área de matemáticas.
c) Identificación y articulación mediante configuraciones ontosemióticas de los objetos primarios presentes en el programa de curso de la asignatura de Álgebra Lineal.
d) Identificación y articulación mediante configuraciones ontosemióticas de los objetos primarios presentes en el libro de texto propuesto por el programa del curso.

Análisis de resultados

La organización de los PE se plantea en términos de lo que establece CACEI. Esta distribución se refleja en los mapas curriculares de los PE de cada institución, donde por lo general, se forman grandes bloques donde coexisten asignaturas las cuales tienen objetivos afines como lo son Ciencias Básicas, Ciencias de la Ingeniería e Ingeniería Aplicada y Diseño en Ingeniería.

Analizando el mapa curricular de los PE, se observa la agrupación de las asignaturas en dos grandes bloques: Formación Básica y Especialización. Asimismo, dentro del bloque de Formación Básica se encuentra, entre otros, el programa de Ciencias Básicas que se constituye de asignaturas referentes a Matemáticas, Física y Química; es en este bloque donde se sitúa la asignatura de Álgebra Lineal, con una duración de 45 horas al semestre. En ella se contempla como competencia específica el aplicar los principios, leyes y modelos de las ciencias básicas en la resolución de problemas relacionados con procesos y sucesos en fenómenos que se presenten en su quehacer o desempeño profesional. La competencia específica señalada se disgrega en cuatro unidades de competencia, ubicando el estudio de los SEL en la tercera, la cual propone "solucionar problemas con base en diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales".

Con la información que se presenta en el programa del curso, se llevó a cabo un análisis ontosemiótico, que se ejemplifica a continuación. Se identificaron el tipo de práctica matemática que se promueve en la unidad de competencia, así como, los objetos matemáticos primarios intervinientes y emergentes de estas prácticas matemáticas; lo anterior se puede observar en la Tabla 1.

Tabla 1
Prácticas matemáticas y objetos matemáticos identificados en el programa del curso

Práctica Matemática	**Tipo de Objeto**	**Intervinientes**	**Emergentes**
Identificación de los tipos de sistemas de ecuaciones lineales con base en sus características	Situaciones	• Problemas de contexto intra-matemático	
	Lenguaje	• Natural • Algebraico	• Natural • Algebraico
	Conceptos	• Rango de una matriz • Determinante de una matriz	• Sistemas consistentes determinados • Sistemas consistentes indeterminados • Sistemas inconsistentes • Sistemas homogéneos
Resolución sistemas de ecuaciones lineales utilizando diferentes métodos algebraicos	Situaciones	• Problemas de contexto intra-matemático • Problemas de contexto extra-matemático (modelación de problemas)	
	Lenguaje	• Natural • algebraico	• Natural • Algebraico
	Conceptos	• Sistemas consistentes determinados • Sistemas consistentes indeterminados • Sistemas inconsistentes • Matriz inversa • Determinante de una matriz	• Ecuación matricial • Solución trivial
	Procedimientos	• Calcular el determinante de una matriz • Realizar operaciones	• Solucionar SEL: - Por medio de la Matriz inversa - Utilizando la regla de Cramer

	elementales con renglones y columnas	- Por medio de eliminación Gaussiana - Por medio de eliminación de Gauss-Jordan

Notas. Elaboración a partir del Programa de Curso de Álgebra Lineal

De manera inicial, en lo que se plantea en términos de la práctica matemática que se promueve y los objetos matemáticos que intervienen y emergen de lo declarado en el programa del curso, parece existir una tendencia a privilegiar el desarrollo de la resolución de situaciones problemas carentes de un contexto extra-matemático que propicien el desarrollo de la competencia de modelación en los futuros ingenieros. En cuanto a los procedimientos y conceptos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas, se observaron aquellos relacionados con el álgebra de matrices.

De manera análoga a lo que se realizó para el programa del curso, se analiza para el libro de texto el tipo de práctica matemática que se promueve, así como los objetos matemáticos primarios intervinientes y emergentes que aparecen. Como bibliografía básica del curso se propone el libro *Álgebra lineal fundamentos y aplicaciones* (Kolman, & Hill, 2013). Para este caso, se dividió el texto en unidades de análisis más pequeñas que permitieran analizar de manera pormenorizada los objetos matemáticos que intervienen y emergen en la práctica que se promueve, las cuales a su vez de presentan de manera sintética en la Tabla 2.

Tabla 2

Prácticas matemáticas y objetos matemáticos identificados en el libro de texto

Práctica Matemática	**Tipo de Objeto**	**Intervinientes**	**Emergentes**
Presentación conceptual de las características de los SEL	Situaciones	• Problemas de contexto intra-matemático sobre la verificación si valores particulares de las incógnitas satisfacen una ecuación lineal.	
	Lenguaje	• Natural • Algebraico	• Natural • Algebraico
	Conceptos	• Lineal • Ecuación lineal • Variable • Incógnitas • Solución	• Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas (sistema lineal) • Solución de un sistema lineal
Identificación de los tipos de sistemas de ecuaciones lineales con base en sus características	Situaciones	• Problemas de contexto intra-matemático sobre SEL con $m = n$, $m > n$ y $m < n$ • Problemas de contexto extra-matemático sobre SEL con $m = n$ y $m < n$	
	Lenguaje	• Natural • Algebraico	• Natural • Algebraico • Gráfico
	Conceptos	• Incógnita • Recta • Ecuación • Punto • Conjunto vacío • plano	• SEL con única solución • SEL con infinitas soluciones • SEL sin solución

	Procedimientos	• Sistema lineal • Solucionar SEL por el método de eliminación. • Intercambiar dos ecuaciones • Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero • Sumar un múltiplo de una ecuación a otra.	
Resolución sistemas de ecuaciones lineales utilizando diferentes métodos algebraicos	Situaciones	• Problemas de contexto intra-matemático • Problemas de contexto extra-matemático (modelación de problemas)	
	Lenguaje	• Natural • algebraico	• Natural • Algebraico
	Conceptos	• Matriz aumentada • Filas • Columnas • Matriz de $m \times n$ • Matriz inversa • Determinante de una matriz • Matriz singular	• Forma escalonada reducida por filas • Columna pivote • Fila pivote • Sistemas consistentes indeterminados • Sistemas inconsistentes • Sistemas homogéneos • Solución trivial • Solución no trivial
	Procedimientos	• Calcular el determinante de una matriz • Realizar operaciones elementales con renglones y columnas	• Solucionar SEL: - Por medio de la Matriz inversa - Utilizando la regla de Cramer - Por medio de eliminación de Gauss - Por medio de eliminación de Gauss-Jordan

Notas. Elaboración a partir del libro *Álgebra lineal fundamentos y aplicaciones* (Kolman, & Hill, 2013).

Las situaciones que se aborda en el libro son tanto de contexto intra-matemático como extra-matemático. En el caso de los problemas en contexto extra-matemáticos, se presentan situaciones de cálculo del rendimiento de fondos de inversión, planeación de la producción, además de aplicaciones relacionadas con el área de ingeniería eléctrica y electrónica como son los circuitos eléctricos.

De manera general las prácticas matemáticas que se identifican en el programa del curso se corresponden con las que propicia el libro, por ejemplo, para la identificación los tipos de SEL recurre a un abordaje gráfico para identificar cual es el tipo de solución. Sin embargo, para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando diferentes métodos algebraicos, a diferencia de lo que se establece en el programa del curso, inicia utilizando como procedimiento de solución el método de eliminación, para continuar posteriormente con los que se indican en el programa del curso referentes al álgebra de matrices.

Conclusiones

Resulta interesante el hecho que desde la definición de la competencia a la que abona el curso se mencionen la solución de situaciones que se presenten en el quehacer profesional de un ingeniero. Sin embargo, en el programa del curso la modelación de problemas en el contexto del quehacer del ingeniero se pudiera considerar que no juega un papel preponderante en los sistemas de prácticas que se promueven, al ser relegado hasta considerarse como un requerimiento de información y no la parte medular de la competencia que desarrolla. Si bien, pudiera ser una cuestión que se refleja sólo en los documentos curriculares, será de especial interés el observar qué papel juega la modelación de situaciones problema en contextos extra-matemáticos en la práctica docente de los sujetos de estudio. En estos términos, es también de importancia considerar lo establecido por estudios como el desarrollado por Ruiz, Dávila, Etxeberria y Sarasua (2013), quienes mencionan que diversas investigaciones muestran que más del 95% de los profesores utilizan el libro de texto como su principal recurso didáctico. Lo anterior, lleva a considerar el impacto del libro de texto en la práctica del profesor de matemáticas.

Referencias y bibliografía

Ball, D. L. (2017). Uncovering the Special Mathematical Work of Teaching. In G. Kaiser (Ed.), Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education (pp. 11–34). Hamburg: Springer.

CACEI. (2017). Marco de Referencia 2018 del CACEI en el Contexto Internacional (Ingenierías). Recuperado a partir de http://cacei.org.mx/docs/marco_ing_2018.pdf

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (20), 13–31.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1), 127–135. doi:10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. In J. A. Macias, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 288–297). Málaga.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, 31(57), pp. 90–113.

Kolman, B., & Hill, D. R. (2013). Álgebra Lineal. Fundamentos y aplicaciones (1ra ed.). Colombia: Pearson.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87–109.

Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberria, J., & Sarasua, J. (2013). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(2), 245–276.

UNESCO. (1998). Declaración mundial sobre la educación superior en el siglo XXI: visión y acción. Recuperado de http://www.unesco.org/education/educprog/wche/declaration_spa.htm

UNESCO. (2008). Recomendación conjunta de la OIT y la UNESCO relativa a la Situación del Personal Docente (1966) y Recomendación de la UNESCO relativa a la Condición del Personal Docente de Enseñanza Superior (1997) con la guía del usuario. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0016/001604/160495s.pdf

UNESCO. (2015). Incheon Declaration and SDG4 – Education 2030 Framework for Action. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002456/245656E.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conocimiento Matemático de Probabilidad que ponen en acción Profesores de Bachillerato

José Miguel León Banguero
Universidad Autónoma de Zacatecas
México
josemigleon@gmail.com
Leticia Sosa Guerrero
Universidad Autónoma de Zacatecas
México
lsosa@uaz.edu.mx
Diego Díaz
Universidad del Valle
Colombia
diegoden09@yahoo.com

Resumen

Resulta interesante plantearse la cuestión acerca del conocimiento que debe de poseer un profesor para enseñar probabilidad, dado que el desarrollo del pensamiento aleatorio en estudiantes contribuye a la toma de decisiones en eventos aleatorios. Para abordar dicha cuestión se considera pertinente identificar el estado actual de *Conocimiento de los Temas* (KoT) para la enseñanza de la probabilidad en bachillerato en Colombia; para ello se propone, a partir del modelo MTSK, el diseño de un cuestionario de preguntas abiertas para la evaluación de conocimientos de ocho profesores en ejercicio. El análisis de los resultados de la aplicación de la prueba permitió reconocer que los profesores estudiados poseen desempeños bajos en los temas de probabilidad; también la investigación arrojó la identificación de elementos importantes para la enseñanza de la probabilidad con respecto al KoT.

Palabras clave: conocimiento, probabilidad, didáctica, profesores, formación.

Introducción

En la actualidad, uno de los principales interrogantes de investigación en la disciplina de la Matemática Educativa es acerca del conocimiento que debe de poseer un profesor de matemáticas para llevar a cabo un proceso de enseñanza eficaz y propiciar el aprendizaje en sus alumnos. Sin embargo, responder dicha cuestión no es tarea fácil, dado que conlleva a hacer un análisis más profundo del conocimiento del profesorado que toma en consideración la naturaleza, las características, el grado de conocimiento actual y necesario, las formas de enseñanza y demás elementos que juegan un papel fundamental en la formación del profesor.

Fruto de diversas reflexiones sobre el desarrollo profesional del profesor, surgen perspectivas sobre las cuales se pueden estudiar y modelar los conocimientos del profesor para la

enseñanza de las matemáticas, entre las cuales se destaca el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), propuesto por el grupo Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva, España. Este modelo dual se considera, por un lado, como una herramienta metodológica que brinda al investigador diferentes maneras de analizar las prácticas del profesor mediante la delimitación de categorías de conocimiento; por otro lado, como una propuesta teórica que modela el conocimiento matemático y didáctico del profesor (Medrano, Escudero, Montes, Águilar y Carrillo; 2014).

En las últimas décadas, distintas reflexiones manifiestan la importancia de delimitar elementos para la enseñanza de contenidos de estadística y probabilidad en distintos niveles educativos (Mohamed, Ortiz y Serrano, 2007; Ortiz, Batanero y Contreras, 2012); dado que el aprendizaje de contenidos estocásticos promueve el razonamiento crítico de fenómenos aleatorios y contribuyen a la elaboración de juicios razonables a través de datos cuantitativos y conceptos elementales para tomar decisiones en fenómenos permeados por el azar y la aleatoriedad (Batanero, Gómez, Contreras y Díaz., 2015). Por esta razón, resulta relevante y significativo para la delimitación del conocimiento núcleo del profesor de matemáticas realizar investigaciones que estén dirigidas a caracterizar y establecer el conocimiento del profesor en la enseñanza de contenidos de estadística y probabilidad (Guerrero, 2015).

En este sentido, se plantea el objetivo general de la investigación el cual es identificar el estado actual de *Conocimiento de los Temas* (KoT) a profesores que estén impartiendo probabilidad en el nivel bachillerato en Colombia. Es importante resaltar que para esta investigación toma en consideración el modelo del MTSK, con el fin de identificar elementos en uno de sus subdominios de conocimiento, sin embargo, se reconoce a partir de resultados de otras investigaciones, la posibilidad de que aparezcan elementos pertenecientes otros subdominios, dado que estos poseen distintas relaciones entre sí y están en forma de amalgama.

Fundamentos Teóricos

En los últimos años, el grupo de investigación SIDM de la Universidad de Huelva, España, ha desarrollado un modelo que comprende aquellos conocimientos específicos del profesor que están relacionados directamente con la enseñanza de las matemáticas. Este modelo, basado en la idea de especializar el conocimiento del profesor, provee una mirada crítica y reflexiva del quehacer docente, dado que considera las creencias y concepciones de los profesores con respecto a la matemática y su enseñanza (Rojas et al., 2015).

Es importante resaltar, que el modelo MTSK surge a partir de algunas modificaciones y precisiones del modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), propuesto Ball et al. (2008). Esto se debe a que el MKT ha sido objeto de discusión por problemas de delimitación del Conocimiento Común del Contenido y del Conocimiento del Horizonte Matemático, como acciones del profesor (Montes et al., 2013; Jakobsen, Thames y Ribeiro, 2013). En este sentido, el MTSK, en respuesta a dichos problemas de delimitación, propone caracterizar, desde la especificidad, la enseñanza de los contenidos específicos por parte del profesor a partir de una nueva propuesta de organización, la cual está compuesta por dos categorías Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK); a su vez, cada una de esos dominios comprende tres subdominios, los cuales han sido divididos de manera intrínseca y van a ser explicitados en este documento más adelante.

De manera breve y sucinta se presentan a continuación los distintos subdominios del MK y PCK, los cuales son de gran interés en el foco de esta investigación, dado que ayudarán a esclarecer y evidenciar algunos elementos del conocimiento especializado del profesor a través

de instrumentos de recolección de datos.

El MK es considerado como uno de los conocimientos articuladores del MTSK dado que retoma factores fundamentales del conocimiento del profesor como la materia, los conceptos y sus relaciones, los procesos de resolución de problemas, los conocimientos implícitos de los procedimientos, etc. (Rojas et al., 2015). A partir de la delimitación de este dominio, se establecen tres subdominio esenciales los cuales son:

- Conocimiento de los Temas (KoT): Este abarca los conocimientos que posee un profesor de matemáticas con respecto a los contenidos matemáticos y su significado. Este subdominio comprende todo lo que se refiere en saber definiciones, procedimientos, ejemplos específicos, fenomenologías asociados al concepto, propiedades y sus caracterizaciones (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2016).
- Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM): Este subdominio encierra una perspectiva conjuntista y global de la estructura matemática (Rojas et al., 2015); dado que abarca todas las conexiones interconceptuales entre los contenidos, las cuales comprenden los vínculos que hay entre las ideas con las representaciones del mismo concepto. Este tipo de conocimiento también reconoce las conexiones temporales que existen de un mismo concepto, es decir, aquellos enlaces entre los conocimientos previos y posteriores del mismo con respecto a diferentes cursos y niveles educativos.
- Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): Se considera como el conocimiento que posee el profesor sobre los modos de proceder y sintaxis en matemáticas. Este conocimiento consiste en saber cómo hacer, descubrir y crear matemáticas.

Por otro lado, en el MTSK se propone la consideración del PCK dado que retoma los aspectos de conocimiento particular del profesor relacionados con la enseñanza y aprendizaje de un contenido, las consideraciones curriculares, el conocimiento que se deriva de la indagación bibliográfica de la literatura en investigación (Rojas et al., 2015). A partir de la delimitación de este dominio, se establecen tres subdominios esenciales los cuales son:

- Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): Es el conocimiento que le provee al profesor herramientas para la elección de recursos (materiales o tecnológicos) que utiliza para enseñar. En este sentido, este tipo de subdominio incluye los conocimientos acerca de la elección de libros de texto, tipos de representación, ejemplos, tipos de tareas, entre otras, usadas para los procesos de instrucción; la elección de este tipo de recursos didácticos se hace con el fin de adquirir, reforzar, potenciar o ejercitar los contenidos (Rojas et al., 2015).
- Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): Este engloba los conocimientos que tiene el profesor de matemáticas con respecto a las características de aprendizaje (formas de razonamiento, dificultades, errores, sesgos, conexiones intraconceptuales, entre otras.) que poseen los estudiantes en la interacción inherente con el contenido matemático.
- Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): En este se considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de los estándares, aprendizajes esperados por niveles, competencias, contenidos, orientaciones de enseñanza, materiales curriculares, entre otros., propuestos por las organizaciones oficiales o asociaciones de investigadores expertos (PISA, NCTM, OCDE, UNESCO).

Para esta investigación, se toma como referencia el modelo MTSK propuesto por Carrillo, et al. (2013), con el fin de explorar el conocimiento actual del profesor de matemáticas en el currículo de matemáticas en Colombia; específicamente se pretende identificar el conocimiento

de los temas de probabilidad, de profesores estudiantes de primer año de bachillerato. Es importante resaltar, que para esta investigación tomando en consideración los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en Colombia en el 1998, 2003 y 2013, respectivamente.

En adición a lo anterior, es importante mencionar que las vertientes teóricas sobre contenido probabilístico en las aulas de bachillerato son limitadas, a pesar de ello no se ha dejado de hacer investigación y se han adaptado modelos de conocimiento profesoral como el MTSK, MTK y Modelo de Conocimiento Didáctico Matemático, en la investigación sobre el contenido conocimiento profesoral para la enseñanza de la probabilidad. En ese sentido, para esta investigación se destacan referentes teóricos y metodológicos como Batanero et al. (2015), Vásquez y Alsina (2015) y Mohamed (2012); quienes en sus investigación del conocimiento profesoral para la enseñanza de la probabilidad en los temas (KoT) hacen aportes significativos a el estado actual del conocimiento, permitiendo delimitar elementos fundamentales como: fenomenología, historia, conocimientos previos y esperados, definiciones, entre otros.

Metodología

En este estudio se propone el diseño de un instrumento de investigación con preguntas tipo abiertas, las cuales estarán encaminadas a identificar elementos del Conocimiento de los Temas (KoT), subdominio perteneciente al modelo MTSK.

El diseño del instrumento se hace a partir de la contextualización al sistema educativo en Colombia y se retoman actividades propuestas de instrumentos elaborados por Vásquez y Alsina (2014), Batanero et al., (2015) y Mohamed (2012). En los instrumentos retomados, se realizan pruebas de conocimiento con el objetivo de medir el conocimiento de contenido y didáctico del profesor de matemáticas en la enseñanza de probabilidad, desde el modelo del MKT. Sin embargo, el rediseño que se propone pasó por un proceso de validación, el cual consta de dos momentos: en el primero, cada ítem planteado fue sometido a una validez de contenido, lo cual permite reconocer a priori si cada uno de estos mide el conocimiento de los contenidos y sus interconexiones para la enseñanza de la probabilidad; esta prueba de validez de contenido está soportada a partir de un análisis previo sobre las recomendaciones de currículos internacionales como Escuela Secundaria Obligatoria, National Council of Teachers of Mathematics y Proyecto Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Educations (GAISE). En un segundo momento, se coteja si cada ítem elaborado es capaz de medir el conocimiento para la enseñanza de la probabilidad, en los subdominios del Conocimiento de los Temas (KoT) y el Conocimiento de las Características de Aprendizaje (KFLM), para lo cual se consideró un juicio de expertos quienes permiten hacer una evaluación cualitativa para identificar el grado de correspondencia, formulación y pertinencia de cada uno de los ítems propuestos.

Es importante resaltar que hasta el momento se ha implementado este instrumento para identificar el conocimiento actual a siete profesores de matemáticas de secundaria, bachillerato y preparatoria que están cursando la Maestría en Matemática Educativa en la Universidad del Valle, Colombia. Los participantes del estudio son profesores de instituciones educativas públicas y cuentan con más de cinco años de experiencia profesoral, de los cuales, al menos, han impartido dos años matemáticas a niveles educativos que en sus contenidos posee probabilidad. La aplicación de la prueba fue en el marco del curso Concepción Teórica, el cual se brinda a estudiantes de primer semestre.

La forma en cómo se analizarán los resultados del instrumento aplicado es a través de un

análisis cuantitativo y cualitativo. Con respecto al análisis cuantitativo se hace una clasificación de las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas; es importante resaltar que el objetivo de la investigación no es evaluar el estado actual del conocimiento de los profesores estudiados, sin embargo, se considera pertinente hacer mención a este resultado dado que permite dimensionar el estado actual de conocimiento profesoral del dominio MK, dado que según Batanero et al. (2015), existe una intrínseca relación entre los conocimiento matemáticos y didácticos a la hora de enseñar un contenido en particular. En un segundo momento, haciendo un análisis desde un punto de vista cualitativo de las respuestas, se reconocen algunos elementos propios del Conocimiento de los Temas (KoT).

Instrumento

El cuestionario de investigación está propuesto en dos momentos. En el primero se pide resolver tres problemas sobre probabilidad, los cuales son adaptaciones de problemas validados y utilizados en investigaciones de maestría y doctorado (Batanero et al., 2015; Mohamed, 2012 y Vasquez y Alsina, 2015) ; esto con el fin de identificar el estado actual del conocimiento matemático de probabilidad en profesores de bachillerato. En un segundo momento, se identifican los conocimientos didácticos y estructurales del profesor en la enseñanza de la probabilidad, en ese sentido se realizan tres ítems adicionales, en los cuales se busca que el participante seleccione la respuesta o respuestas correctas y justifique ampliamente cada una de las respuestas incorrectas de los estudiantes, en este sentido se busca que reconozca errores y dificultades que presenta el alumno ficticio. A continuación se presenta a manera de ejemplo una de las situaciones del instrumento.

Situación 3: Alejandra y Amparo son estudiantes muy curiosas. Cansadas de jugar siempre lo mismo, han decidido poner en uso su imaginación para inventar un juego que consiste en lanzar dos dados. Para jugar deben de tener en cuenta las siguientes reglas:

- Calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
- Si el resultado es 0, 1 ó 2, entonces Alejandra le cobra a Amparo $1.000
- En cambio, si el resultado es 3, 4 ó 5, Amparo es quien le cobra a Alejandra $1.000.

Parte 1: A partir de la situación anterior responde:

- Desde su opinión ¿el juego inventado por Alejandra y Amparo es justo? Justifica tu respuesta.
- En caso de que su respuesta anterior sea negativa, ¿cuál sería la manera de modificar el juego para volverlo justo?
- Si usted decidiera jugar con las condiciones iniciales de Alejandra y Amparo, luego de n-partidas ¿cuánto se esperaría que ganara o perdiera cada una de las participantes?

Parte 2: A partir de las respuestas de los alumnos responde las siguientes preguntas:

- Indica el contenido matemático deben usar los alumnos para dar la respuesta correcta
- Señala las respuestas correctas e incorrectas
- Para cada una de las respuestas incorrectas explica cuáles son las posibles intuiciones o estrategias que han llevado a los participantes a dar una respuesta errónea

Respuestas de alumnos ficticios al ítem 1

- El juego es justo, dado que todos los resultados son igualmente probables.
- Es justo. Sin embargo como es un juego de azar, no se puede predecir.

- Es injusto, porque es más difícil obtener los resultados 3, 4 o 5.
- El juego es injusto, dado que si se analiza cada uno de los casos y se calcula la probabilidad se puede dar cuenta que Amparo tiene mayor probabilidad de ganar.
- El juego es justo, sin embargo si se juega varias veces es posible que Amparo gane.

Resultados

Posterior a la aplicación del instrumento, se realiza una recolección y análisis de los resultados. Entre los hallazgos que deja la prueba se pueden reconocer algunos elementos importantes a tomar en consideración durante la enseñanza de la probabilidad en nivel de bachillerato, los cuales algunos de éstos han sido reportados en investigaciones como Batanero et al. (2015); Guerrero (2015) y Mohamed (2012).

Con respecto a las respuestas de la Parte 1 de cada una de las situaciones del instrumento, el desempeño de los profesores con respecto al conocimiento del contenido matemático fue bajo. Esto puede inferirse a partir de la clasificación de las respuestas Incorrectas (I), Parcialmente Correctas (PC) y Correctas (C), lo cual pueden ver en la Tabla 1.

Tabla 1:
Resultados de las respuestas por parte de los siete profesores (estudiantes de la maestría) a la Parte 1 de las situaciones.

	Situación 1			**Situación 2**			**Situación 3**		
	I	PC	C	I	P	C	I	P	C
A	5	1	1	3	2	2	2	2	3
B	7	0	0	3	1	3	3	2	2
C							6	0	1

Fuente: Elaboración propia

Haciendo un análisis cualitativo de las respuestas, los resultados permiten inferir que los profesores identifican tres tipos de conceptos y elementos, los cuales guardan relación a los identificados por Batanero et al. (2015): conceptos relacionados con el azar (azar, probabilidad, posibilidades, juego equitativo, proporción, etc.), relacionados con las propiedades (carácter aleatorio, sucesos con mayor o menor probabilidad); y procedimientos (combinatorios para enumerar probabilidades, asignación de probabilidades, comparación de casos, regla de tres.)

El análisis de las respuestas permite encontrar elementos que son importantes tomar en consideración para la enseñanza de la probabilidad. En este sentido, se hace mención, con evidencias, de algunos de los elementos que deberían estar presentes en el Conocimiento de los Temas (KoT), desde un punto de vista del MTSK, para la enseñanza de la probabilidad.

- Hacer mención a la definición de equiprobabilidad y los factores que condicionan un evento aleatorio (Ver Figura 2).

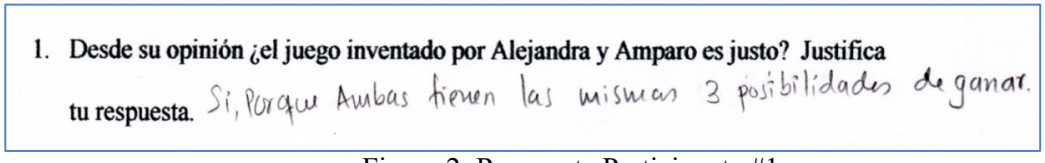


Figura 2: Respuesta Participante #1

En la Figura 2 se puede inferir que uno de los participantes presenta errores con respecto a la noción de equiprobabilidad.

- Se establece la importancia de que el profesor determine objetos y conceptos

probabilísticos como espacios muéstrales, dependencia o no de eventos y cálculo de las probabilidades a cada uno de los eventos de la situación (Ver Figura 3).

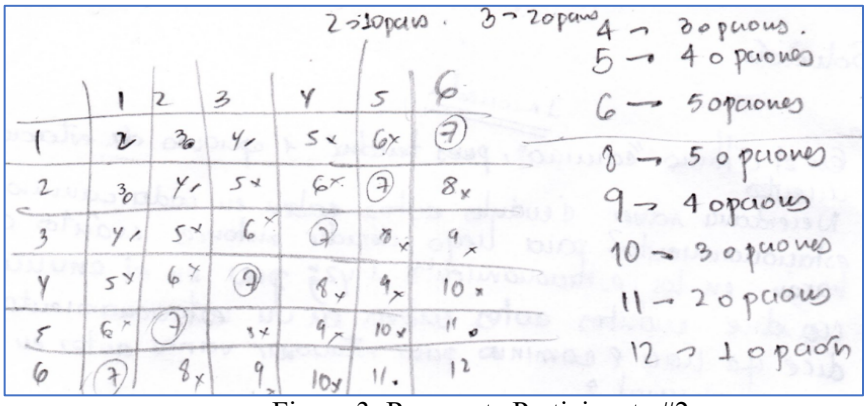


Figura 3: Respuesta Participante #2

En la Figura 3 se puede inferir que la respuesta de uno de los participantes de la prueba en su procedimiento de respuesta calcula todas las probabilidades asociadas a cada evento de la situación. De igual forma hace uso de una representación tabular para mostrar todas las posibles combinaciones que se puede dar en el lanzamiento de dos dados.

- Se reconoce la importancia de elementos para la enseñanza de la probabilidad, específicamente ellos que guardan relación con la comparación de probabilidades y noción de juego equitativo (Ver Figura 4).

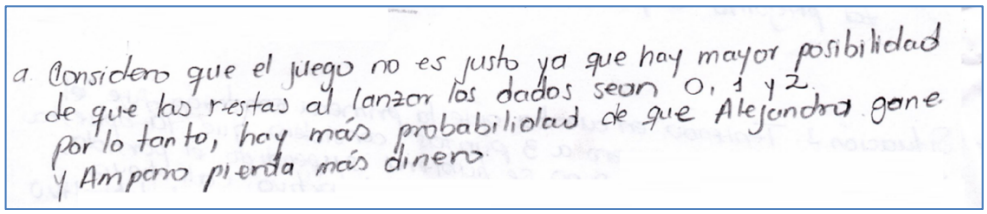


Figura 4: Respuesta Participante #3

En la Figura 4 se puede inferir que uno de los participantes en sus respuestas trae a colación propiedades de conceptos, en este caso de juegos equitativos, dado que manifiesta la necesidad de una proporcionalidad en términos de probabilidades eventos y respectivas recompensas.

Conclusiones

El diseño, aplicación y análisis del instrumento de investigación para la evaluación del KoT ha permitido reconocer la importancia latente del conocimiento de los temas por parte del profesor en la labor de enseñanza. El análisis cuantitativo de las respuestas permite afirmar que los conocimientos sobre los temas para la enseñanza de la probabilidad son limitados, lo cual se complementa lo encontrado por Batanero et al., (2015). Se considera pertinente y significativo para fortalecer el estado actual del arte, rediseñar y replicar el instrumento propuesto, esto con el fin de establecer conclusiones generales los profesores en la enseñanza de la probabilidad.

Otro aspecto relevante que se concluye a raíz del diseño del instrumento es la importancia de los aspectos fenomenológicos de los conceptos probabilísticos; en este sentido se reconoce el papel fundamental que tienen los juegos de azar para el aprendizaje, comprensión y significación de la probabilidad. Se hace la recomendación, para fortalecer dicho aspecto, diseñar secuencias didácticas o propuestas de aula que integren los juegos de azar en el diseño de las situaciones.

El análisis cualitativo de los resultados de la prueba permite inferir distintos elementos que pertenecen a la subcategoría del Conocimiento de los Temas, en este sentido se reconocen diversos elementos como objetos y conceptos fundamentales para la enseñanza de la probabilidad. Se considera importante que para futuras investigaciones, analice una muestra mayor de profesores, esto con el fin de rescatar elementos del KoT y elaborar indicadores para la evaluación de este conocimiento.

Referencias Bibliográficas

Ball D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Batanero, C. Ortíz, J. Serrano, L. (2007). *Investigación en Didáctica de la Probabilidad*. Departamento de Didáctica de la Matemática. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, 7-16.

Batanero, C., Contreras, J., Cañadas, C., y Gea, M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades educativas*, 261, 78-84.

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J., & Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratorio. *Práxis Educativa*, 10 (1).

Carrillo, J. Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). "Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching". En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Ankara, Turquía.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores Medrano (Eds.), Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (pp. 57-72). Huelva, España. Universidad de Huelva Publicaciones.

Guerrero, H. (2015). *Evaluación de Conocimientos sobre Esperanza Matemática y juegos equitativos en alumnos de Bachillerato*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Jakobsen, A., Thames, M. H. y Ribeiro, C. M. (2012). Delineating Issues related to Horizon Content Knowledge for Mathematic Teaching. En B. Ubuz , C. Haser C, MA Mariotti (Eds.), Actas del 8.o congreso del *CERME (*pp. 3125–3134). Antalya, Turquía.

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del Conocimiento de los Futuros Profesores De Educación Primaria Sobre Probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Montes, M., Contreras, L., y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 403-410). Huelva, España.

Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Boletim de Educação Matemática*, 29 (51), 143-166.

Vásquez, C. & Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números*, 85, 5- 23.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Repensando os caminhos de uma formação continuada para professores dos anos iniciais

Marli Teresinha **Quartieri**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
mtquartieri@univates.br
Ieda Maria **Giongo**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
igiongo@univates.br
Márcia Jussara Hepp **Rehfeldt**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
mrehfeld@univates.br
Thuliê Nunes dos **Santos**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
thulie.santos@universo.univates.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo socializar dados decorrentes de um questionário aplicado a um grupo de professores dos Anos Iniciais que participaram de formação continuada, com o intuito de analisar reações e percepções. A formação explorou e problematizou o uso de atividades investigativas com foco em conteúdos de pré-álgebra. Os resultados mostram, por um lado, que um grupo considerou as atividades exploradas complexas para serem efetivadas nos Anos Iniciais; e, por outro, um grupo destacou a importância de tais atividades para estimular o interesse e a motivação dos alunos. Alguns participantes foram enfáticos em comentar que não pretendem participar de formações devido à falta de tempo e as atividades extras nas escolas. Assim, as próximas ações dos pesquisadores consistem em operar com referenciais do campo do "estudo de las classes" e o acompanhamento sistemático e contínuo de um grupo de professores para o desenvolvimento das atividades investigativas.

Palavras chave: Anos Iniciais, formação continuada, pré-álgebra, investigação matemática, acompanhamento sistemático.

Introdução

Estudos têm analisado problematizações, inquietações, avanços e discussões em relação à

formação continuada de docentes, em função das novas configurações sociais, políticas e econômicas da contemporaneidade. Tais configurações necessitam que esses profissionais, continuamente, (re) pensem suas práticas pedagógicas. Nesta perspectiva, Nóvoa (2009, p. 27) explicita que "o trabalho do professor consiste na construção de práticas docentes que conduzam os alunos à aprendizagem" e de acordo com o próprio autor a formação continuada pode proporcionar momentos de reflexão e de construção de práticas pedagógicas produtivas. Aliado a isso, Paiva (2008) destaca a importância da participação ativa dos docentes tanto nos processos de formação inicial como continuada, pois assim eles poderão manifestar seus pensamentos e questionamentos, agindo na sua própria formação.

Diante deste contexto este grupo de pesquisadores está desenvolvendo desde 2017 a pesquisa intitulada "Ensino-aprendizagem-avaliação em Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: atividades exploratório–investigativas e formação docente" que foi aprovada e conta com apoio financeiro pelo edital Chamada MCTI/CNPq Nº 01/2016 UNIVERSAL. Esta pesquisa tem como objetivo geral "problematizar estratégias de estudantes na resolução de atividades exploratório-investigativas de matemática elaboradas em estudos conjuntos com grupos de professores dos Anos Iniciais a fim de examinar quais aprendizagens teórico-metodológicas são desencadeadas por esses professores considerando a relação ensino-aprendizagem-avaliação a partir de suas próprias experiências". Um dos objetivos específicos deste projeto é "planejar, desenvolver e avaliar com os docentes, atividades exploratório investigativas, com ênfase na Geometria e Álgebra, para posterior exploração com os estudantes".

Assim, uma das primeiras ações foi proporcionar cursos de formação continuada aos professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental com foco em problematizar atividades usando a Investigação Matemática e conceitos relacionados a pré-álgebra. A referida formação ocorreu com todos os professores dos Anos Iniciais da rede municipal de um determinado município do interior do Rio Grande do Sul. Portanto, o intuito deste trabalho é socializar os dados decorrentes de um questionário aplicado aos professores dos Anos Iniciais que participaram da formação continuada no decorrer de 2017. O objetivo do instrumento foi analisar as reações e percepções dos docentes em relação a formação continuada proposta pelos pesquisadores.

Referencial teórico

Um dos entraves no ensino de Matemática da Educação Básica consiste em como e o que ensinar em relação a álgebra. Aliado a isso, observa-se que as práticas de ensino podem favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de situações "que criem oportunidade de as crianças generalizarem padrões aritméticos, estabelecerem relação entre duas grandezas e resolverem problemas com os diferentes termos desconhecidos das operações" (Luna, Santos, 2013, p. 829). Os autores comentam a importância de se oportunizarem situações de aprendizagem utilizando conhecimentos algébricos desde os Anos Iniciais, "até então denominados de pré-álgebra, ampliando-os paulatinamente no decorrer da escolaridade, para uma compreensão algébrica mais estrutural" (Ibidem, p. 832).

Salienta-se que a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) brasileira expressa que "é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental" (Brasil, 2017, p. 266). Ademais, nesse documento está enfatizado que nos Anos Iniciais se deve proporcionar atividades para "generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam" (Brasil, 2017, p. 266).

Corroborando, Groenwald (2014, p. 2) expressa sobre a importância da álgebra desde os Anos Iniciais, "embora, nos primeiros anos de escolarização não seja de modo formalizado". A autora destaca que "quando o aluno aprende a calcular o valor desconhecido, em problemas de Matemática, mesmo sem atribuir a esse um valor ou símbolo que o represente, já está sendo introduzido o pensamento algébrico" (Ibidem).

Estudos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) também já destacavam a relevância de se trabalhar conteúdos algébricos sob diferentes perspectivas, como atividades investigativas, análises de gráficos, situações problemas, desde os primeiros anos de escolaridade. Neste contexto, a Investigação Matemática pode ser uma metodologia potente para o professor dos Anos Iniciais iniciar o desenvolvimento de conceitos pré-algébricos. Para os autores a Investigação está associada à ideia de pesquisar, questionar e buscar conhecimento, por meio de situações abertas, em que o aluno é convidado a elaborar hipóteses e conjecturas para a resolução de problemas abertos, bem como a socializar diferentes estratégias de resolução. Em síntese, "o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização das provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e professor" (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009, p. 23).

Entretanto, destaca-se que os professores dos Anos Iniciais além de dificuldades em relação ao ensino de conceitos de pré-álgebra também possuem pouco conhecimento em relação a metodologia da Investigação Matemática. Neste sentido para auxiliar os professores, acredita-se que encontros de formação continuada podem ser produtivos para diminuir tais dificuldades. Costa (2015) problematiza sobre a formação que por vezes ocorre distante da realidade vivida pelos professores em formação e destaca a importância de estudos a partir das práticas, pois,

Não proporcionar espaço e tempo ao diálogo e à reflexão sobre a própria prática é ignorar uma dimensão da formação, pois ao ouvir o outro o sujeito pensa sobre si, sobre suas ações, pode, ao conhecer distintas experiências, encontrar e/ou tornar-se inspiração ao compartilhar também, as suas (Costa, 2015, p. 58)

Nessa mesma linha argumentativa, Albuquerque e Gontijo (2013, p. 85) expressam que é durante a formação continuada que o professor "constrói e reconstrói conhecimentos que, articulados com sua prática cotidiana, produzirá saberes que lhes serão indispensáveis" para que ocorra a aprendizagem de seus alunos. Para Galindo e Vital (2011, p. 11) o professor necessita "aprender a aprender" e questionam "quando será o momento de "aprender" alguma coisa?". Ao responder a essa questão as autoras comentam que é necessário

práticas de formação que sejam úteis na aquisição de conhecimentos e técnicas e práticas de formação que contribuam para a emancipação profissional e para a consolidação de uma profissão que é autônoma na produção de seus saberes e valores. É preciso "aprender a aprender" e aprender conteúdos específicos também. (Galindo, Vital, 2011, p. 11)

Assim, proporcionar momentos de trocas de experiências e de reflexão, palestras, grupos de estudo na escola ou fora dela, oficinas, dentre outros, são formas de fomentar a participação dos docentes em atividades de formação continuada. Aliado a isso, é importante à participação ativa durante os processos de formação continuada do professor, de forma a permitir que esse possa manifestar seus pensamentos e questionamentos, fazendo-o agir na sua própria formação. Para atender as necessidades dos docentes, Fiorentini (2009) sugere parcerias entre escolas e universidades e propõem a constituição de grupos de trabalho dentro das escolas.

Metodologia

A pesquisa, de cunho qualitativo, teve como objetivo analisar as reações e percepções dos professores dos Anos Iniciais envolvidos em curso de formação sobre o uso da metodologia da Investigação Matemática com foco em conceitos algébricos. Utilizar pesquisa qualitativa permite analisar um universo de significados e ações subjetivas que interferem nos fenômenos estudados. Godoy (1995, p. 21) destaca que o uso de uma abordagem qualitativa em pesquisas "não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada", permitindo assim "que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques".

Partindo do intuito de explorar atividades investigativas nos encontros de formação continuada, inicialmente o grupo, reuniu-se semanalmente para elaborar e explorar atividades alicerçadas na Investigação Matemática para o ensino de Álgebra. As atividades desenvolvidas nos encontros de formação são fruto de planejamentos e estudos coletivos sendo que, anterior à pratica com os docentes na formação continuada, todas foram testadas pelos participantes do grupo de pesquisa. Assim, doze delas foram planejadas para esses encontros, por meio de discussões e estudos dos pesquisadores envolvidos, compartilhando experiências.

Posteriormente, as atividades foram exploradas e problematizadas com um grupo de quarenta e cinco professores dos Anos Iniciais. Aconteceram quatro encontros de formação continuada, no decorrer de 2017, em escolas diferentes pertencentes à rede municipal (parceira do projeto). Durante a realização das atividades a coleta de dados ocorreu por meio do uso de gravadores, com o intuito de analisar as falas dos participantes desde as conjecturas até as generalizações e houve o recolhimento das resoluções das atividades nos grupos. Nas atividades primava-se pelo uso de material concreto para resolução. Como exemplo, cita-se a Figura 1:

Sequência de tampinhas

Observar a sequência de tampinhas abaixo:



Utilizar o material disponibilizado (no caso tampinhas) para representar essas figuras.

a) Representar com as tampinhas a terceira figura, observando um padrão de sequência.

b) Quantas tampinhas você utilizou nessa terceira figura? Como você pensou?

c) Representar com as tampinhas a quarta figura, observando um padrão de sequência.

d) Quantas tampinhas você utilizou nesta quarta figura? Como você pensou?

Figura 1. Exemplo de atividade explorada com os professores da formação continuada

As doze atividades foram exploradas, sendo que o grupo de pesquisadores deixou os pesquisados resolverem cada situação, sem interferir. Assim, tinham a oportunidade de discutir, conjecturar e propor ideias em seus grupos. Os formadores, no entanto, instigaram os participantes em relação às conjecturas e estratégias, com o intuito de que os mesmos expressassem com mais

detalhes a resolução proposta. Destaca-se que a metodologia utilizada sempre foi a mesma, ou seja, os professores, em grupo, resolviam as atividades propostas, depois eram discutidas as respostas e as estratégias de resolução, bem como a viabilidade e a necessidade de transformações e adequações para os referidos níveis de escolaridade.

No mês de abril de 2018, os pesquisadores retornaram às escolas para aplicar um questionário aos participantes da formação de 2017, com o intuito de analisar as implicações do referido curso de formação na prática pedagógica dos participantes. O referido instrumento continha questões de dados gerais (idade, tempo de atuação no magistério, titulação); perguntas quanto ao desenvolvimento das atividades, tais como: i) Você já explorou as tarefas desenvolvidas nos encontros de formação ocorridos em 2017? Em caso afirmativo, responda: a) quais; b) qual a reação dos alunos? c) quais as dificuldades enquanto docente? d) quais potencialidades das tarefas que você desenvolveu? Em caso negativo, justifique os motivos; ii) como você avalia os encontros realizados em 2017 (quanto à metodologia, atividades, tempo disponível); iii) você gostaria de seguir a sistemática das discussões em companhia dos pesquisadores? Justifique. As respostas foram digitadas, sintetizadas e analisadas. Na próxima seção apresentam-se os dados coletados com os trinta e cinco professores que responderam ao instrumento.

Resultados decorrentes

Inicialmente destaca-se que se obteve apenas resposta de trinta e cinco dos quarenta e cinco professores que participaram da formação em 2017. Isto ocorreu porque alguns professores saíram da referida rede municipal indo trabalhar em outro município, outros se aposentaram e ainda alguns não estavam na escola no dia em que ocorreu a aplicação do questionário.

A idade dos 35 respondentes variava entre 25 e 57 anos e o tempo de atuação nos Anos Iniciais, de 1 a 30. Apenas um professor não tem curso de graduação em Pedagogia, mas tem curso de Magistério. Nenhum respondente tem Mestrado e apenas 15% têm especialização.

Em relação às atividades desenvolvidas em 2017, 60% dos professores respondentes do questionário destacou que não tinha explorado nenhuma das atividades propostas na formação continuada. Estes citam como motivos que as atividades são difíceis para o nível de alunos que tinham em sala, como segue: “achei as práticas muito difíceis para o nível dos alunos”; “achei as atividades mais indicadas/direcionadas para séries mais adiantadas (6º ano em diante)”; “no momento as atividades não condizem com minha turmas”. Em relação à questão: como você avalia os encontros realizados em 2017? Novamente alguns professores citaram que as atividades eram difíceis para os Anos Iniciais, mesmo que a metodologia era interessante, como segue:

Penso que as metodologias eram positivas, porém na minha opinião para aplicar com os alunos dos primeiros anos é complicado então a princípio não trabalhei. (P2)

Considero tudo muito bem planejado, criativo e desafiador, porém, como já exposto antes mais indicado para as séries após o 5º ano. (P8)

Atividades bem dinâmicas e práticas que foram aplicadas com os professores. Porém algumas atividades um pouco difíceis para aplicar com alunos de 1º, 2º ano. (P18)

Acho que deveriam ser direcionadas as turmas das séries iniciais. Mais fáceis as atividades. (P19)

Percebe-se nos depoimentos dos professores respondentes que eles acharam as atividades interessantes, entretanto complicadas para os Anos Iniciais. Nesse sentido ficam alguns

questionamentos: será que as atividades exploradas eram difíceis? Ou os professores não têm segurança em relação aos conteúdos relacionados a pré-álgebra que devem ser ensinados neste nível de escolaridade? Por que a resistência de incluir tais conceitos nos Anos Iniciais? Essa constatação pode ser inferida pela resposta de uma professora quando ela comenta "tive bastante dificuldade, pois eu não tenho firmeza no assunto". Outra professora comentou ainda que ela precisa "entender um pouco mais sobre álgebra" e por isso não tinha desenvolvido as atividades.

As atividades propostas na formação estavam vinculadas às diretrizes propostas na BNCC e neste ano de 2018, o grupo de pesquisadores está indo para algumas escolas e explorando as atividades desenvolvidas no decorrer da formação. Os alunos estão realizando as atividades e respondendo com diferentes conjecturas e estratégias. E, os professores destes alunos (que antes não tinham aplicado, pois as achavam difíceis) estão encantados com a reação dos alunos e as resoluções propostas. Assim, o grupo está refletindo sobre a questão de que o não uso das atividades está ligada à insegurança do professor em relação ao conteúdo.

Os professores que desenvolveram alguma das atividades foram unânimes em comentar que o uso do material concreto foi fundamental para a resolução das atividades. Destacaram que houve interesse dos alunos, motivação e se sentiram desafiados, conforme alguns depoimentos: "gostaram e se sentiram desafiados"; "eles sempre gostam quando usamos matérias concreto"; "muito boa, compreenderam, exploraram, criaram"; "gostaram bastante, alguns tiveram bastante dificuldades outros não". De acordo com o grupo dos professores que explorou as atividades pode-se inferir que os alunos conseguiram realizar as atividades.

Outra questão que chamou atenção foi a resposta em relação a questão "você gostaria de seguir a sistemática das discussões em companhia dos pesquisadores? Justifique". Dos respondentes, 50% disse que não tinham interesse, alegando os seguintes motivos: sobrecarga de atividades na escola; falta de tempo; existência de muitos projetos nas escolas; outras formações nas escolas; atividades difíceis para os Anos Iniciais. Percebe-se que estes professores sobrecarregados e todas as atividades que precisam realizar acabam suprindo o tempo do professor e ele direciona suas atividades para as questões que são mais emergentes no contexto escolar. Assim, ficam os questionamentos: porque tantos projetos devem ser desenvolvidos nas escolas? Qual a função da escola frente às questões da contemporaneidade? E como fica o professor diante de tantas demandas? O que ele deve escolher e desenvolver na sua prática pedagógica? O que e como ensinar nos Anos Iniciais? Que tipo de formação continuada é produtiva para auxiliar os professores a diminuir seus anseios em relação a estas questões e dúvidas?

Cabe aqui referir que a importância da formação de grupo de estudos que reúna professores da Escola Básica reside no fato de que, como bem apontam Knijnik et al (2012, p. 85) professores se sentem muitas vezes pressionados para cumprir programas preestabelecidos, resistindo a novas perspectivas teórico-metodológicas "não porque avaliem que seu trabalho docente usual esteja produzindo tão bons resultados, mas porque temem se aventurar por caminhos outros que não aqueles nos quais realizaram seus estudos e sua formação profissional". Assim, entende-se que, para além de cursos de formação continuada em larga escala e não sistemáticos, os docentes da Escola Básica poderão, por meio de grupos de estudos, se aventurar ao novo; neste caso, o ensino de álgebra por meio da Investigação Matemática.

Alguns participantes comentaram que a formação ofertada foi diferente de outras que já haviam participado, pois houve maior interatividade, participação de todos durante os encontros e construção coletiva. Isto pode ser confirmado pelo depoimento da seguinte professora: "a formação

não foi somente uma fala, os professores agiam, participavam, foram desafiados a pensar". Nesta linha argumentativa, Chimentão (2009, p. 3) destaca que "Fica mais difícil de o professor mudar seu modo de pensar o fazer pedagógico se ele não tiver a oportunidade de vivenciar novas experiências, novas pesquisas, novas formas de ver e pensar a escola".

Reflexões e conclusões

Após a análise dos resultados parece não ser mais admissível pensar em investigações na escola ocupando-se apenas em mostrar fragilidades e a potencialidade de outros modos de ensinar e aprender em tempos pós-modernos. Há que se pensar em investigações em que a Universidade e a Escola Básica sejam parceiras e assim pesquisar "com a escola" em detrimento da ideia de pesquisar "na escola e "sobre a escola".

Salienta-se que o grupo de pesquisa após a análise das respostas dos professores também ficou se questionando em relação a formação continuada e (re)planejou suas ações da pesquisa. Uma das ações, como já mencionado antes, é os pesquisadores estão indo nas escolas explorando as atividades em conjunto com os professores. Após o desenvolvimento de tais atividades os pesquisadores se reúnem com os professores para discutir percepções e reações dos alunos frente ao uso de atividades investigativas e conceitos de pré-algebra, bem como para planejar atividades a serem realizadas com os alunos.

Esta ação está sendo muito produtiva, pois o grupo sendo constituído por quatro professores da escola básica, pesquisadores e bolsistas de iniciação científica está tendo complexidade em relação aos estudos, discussões e problematizações. Os professores dos Anos Iniciais estão se sentindo co-partícipes das pesquisa e no decorrer dos encontros trocam experiências e se sentem com coragem para tirar suas dúvidas tanto em relação à metodologia quanto ao conteúdo. Os professores comentam que o estar junto dos pesquisadores, no momento do desenvolvimento das atividades, é muito bom, pois "aprendem" em como fazer com os alunos. Assim, está se observando que os docentes estão começando a ter maior segurança tanto na metodologia da Investigação Matemática como em relação ao que se pode ensinar de álgebra desde os Anos Iniciais. Portanto, o grupo de pesquisadores está apostando na formação continuada em pequenos grupos, mas com maior interatividade, colaboração e cumplicidade.

Outra ação em andamento consiste no uso da metodologia "estudo de las classes" na perspectiva de Blanco-Álvarez e Castellanos (2017). De acordo com os autores a metodologia de estudo de classes é produtiva para o adensamento teórico-metodológico de docentes. Para eles,

Esta metodología busca por parte de los maestros una cualificación permanente, un trabajo reflexivo y crítico sobre su práctica. El estudio de clase permite abrir el aula de clase a la mirada crítica de los colegas, lo que permite un enriquecimiento mutuo con las experiencias y especialidades de cada uno. Esta metodología debe mirarse siempre como un proceso de mejoramiento y no de evaluación descalificadora (Blanco- Álvarez e Castellanos, 2017, p. 9).

Os autores propõem quatro etapas. Na primeira, ocorre o planejamento conjunto das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula. Nesta etapa ocorre também a observação mais acurada da turma em questão, bem como a discussão dos objetivos da atividade. Finda esta etapa, a seguir as atividades elaboradas são efetivadas em sala de aula com a presença do professor e de um observador (que pode ser um colega professor ou um investigador). As observações ocorrem desde o modo como os estudantes resolvem as questões, a pedagogia do docente e as dificuldades apresentadas pelos discentes. A terceira etapa consiste em avaliar, no grupo de professores, as

atividades desenvolvidas. Por fim, na última etapa, considerado o "redesenho" das atividades a partir das considerações efetuadas na etapa anterior. Neste contexto, esta experiência está sendo efetivada em uma escola com duas professoras (uma do quarto ano e outra do quinto ano) as quais se dispuseram a participar desta experiência. Assim, os professores da Escola Básica, bolsistas e mestrandos estão efetivando as práticas pedagógicas com estas duas turmas, sendo que, em tais ocasiões, há um docente e um observador, que filma as aulas e observa o desenvolvimento das atividades no que concerne à atuação do docente e os modos de resolução que emergem dos estudantes no decorrer das atividades investigativas.

Por fim, cabe destacar que este estudo explicitou a produtividade de apostar em modelos de formação que valorizam, sobretudo, a efetiva participação dos docentes envolvidos, em detrimento de apenas ser consumidor de ideias e pesquisas geradas nas instituições. Acredita-se que os docentes, em conjunto com os pesquisadores, podem estudar referenciais teóricos, discutir sua produtividade, elaborar práticas pedagógicas e examinar seus resultados.

Referências y bibliografia

Albuquerque, l. c. de; Gontijo, C. H. (2013). A complexidade da formação do professor de matemática e suas implicações para a prática docente. Espaço Pedagógico. Passo Fundo, 20 (1): 76-87.

Blanco- Álvarez, H.; Castellanos, M. T. (2017) La formación de maestros reflexivos sobre su propia práctica y el estudio de clase. In: Observatório da Educação III: práticas pedagógicas na educação básica. Porto Alegre: Evangraf, p.7-18.

Brasil. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. (2017). 3° edição. Brasília: Secretaria de Educação Básica.

Costa, L. Vivências autoformativas no ensino de matemática: vida e formação em escolas ribeirinhas. (2015) Tese. Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA Belém PA.

Chimetão, L. K. (2009). O significado da formação continuada docente. Congresso Norte paranaense de Educação Física Escolar. Recuperado http://www.uel.br/eventos/conpef/conpef4/trabalhos/comunic.

Fiorentini, D. (2009). Quando Acadêmicos da Universidade e Professores da Escola Básica Constituem uma Comunidade de Prática Reflexiva e Investigativa. In: Fiorentini, D.; Grando, R. C.; Miskulin, R. G. S. Práticas de Formação e Pesquisas de Professores que Ensinam Matemática. Campinas: Mercado das Letras, p. 223-256.

Galindo, M. A.; Vital, M. L. (2011) Formação continuada de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental: o ensino de Física como duplo desafio. In Anais do XI Encontro de Pesquisa em Ensino de Física. Curitiba.

Godoy, A. S. (1995). Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. Revista de Administração de Empresas. São Paulo: v.35, n.3, p.20-29. Maio-junho.

Groenwald, C.L.O. (2014). Pensamento aritmético e pensamento algébrico no ensino fundamental. In: IV EIEMAT – Encontro Nacional Pibid Matemática.

Knijnik, G. et al. (2012). Etnomatemática em movimento. Belo Horizonte: Autêntica.

Luna, A. V. de; Souza, C. C. C. F. (2013). Discussões sobre o ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, 15 (1): 817-835.

Nóvoa, A. (2009). Professores: imagens do futuro presente. Portugal, Lisboa: Educa.

Paiva, V. P.(2008). Educação popular e educação de jovens e adultos. Rio de Janeiro: Edições Loyola.

Ponte, J. P.; Brocardo, J.; Oliveira, H. (2009). Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conhecimentos matemáticos: investigação com tarefas de aprendizagem profissional

Lilian Cristina de Souza Barboza
Universidade Federal do ABC
Brasil
lilicrissb@gmail.com

O estudo apresenta uma pesquisa em andamento, que trata da formação continuada do professor que ensina matemática nos anos iniciais (Ball, Thames & Phelps, 2008; Silver et al., 2007) e do pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2008; Kieran et al., 2016), nomeadamente o trabalho com os diferentes significados do sinal de igualdade (Trivilin & Ribeiro, 2015). É uma pesquisa de intervenção, em contexto de formação continuada, com o propósito de provocar mudanças e possibilitar aprendizagem profissional (Ball & Cohen, 1999), com o uso de tarefas de aprendizagem profissional (TAP).

O estudo está alicerçado em três grandes eixos:

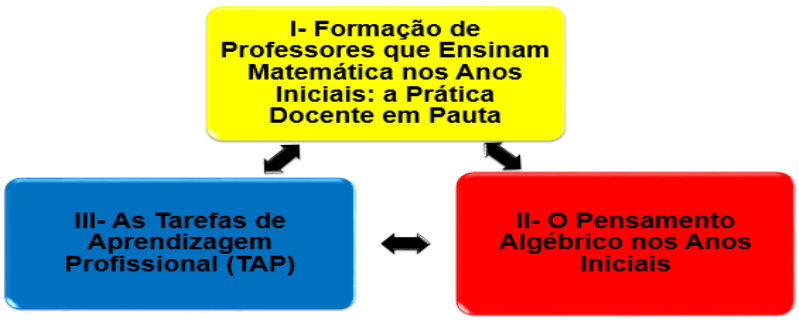


Figura 1. Eixos da Pesquisa.

Diante dos eixos estabelecidos, o objetivo geral é investigar se e como tarefas de aprendizagem profissional possibilitam a mobilização e a construção de conhecimentos para ensinar matemática nos anos iniciais. Este objetivo geral desdobra-se em dois objetivos específicos: (I) identificar se tarefas de aprendizagem profissional fundamentadas na prática letiva contribuem para a mobilização do pensamento algébrico; e (II) compreender e explicar como ocorre a construção do conhecimento matemático e didático de professores dos anos iniciais em um processo formativo, sobre os diferentes significados do sinal de igualdade.

Esta pesquisa insere-se em uma metodologia de cunho qualitativo, perspectiva teórica pautada no interpretativismo e perspectiva epistemológica construcionista.

A pesquisa de campo foi estruturada em 14 encontros de trabalho presenciais, com professoras dos anos iniciais, de uma escola pública do município de São Paulo, em contexto de

formação continuada. Três instrumentos possibilitadores à produção e recolha de dados alicerçam a pesquisa: (I) o questionário, mobilizando conhecimentos prévios das professoras; (II) as TAP, com diferentes enfoques para possibilitar uma variedade de discussões e abordagens relativas ao conhecimento específico, conhecimento dos estudantes e dos processos de ensino e conhecimento do currículo; e as (III) gravações em áudio e vídeo realizadas em alguns dos encontros.

As TAP foram estruturadas tomando por base: (I) o que os professores precisam saber sobre matemática para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade; (II) quais práticas letivas irão oportunizar a interação e construção de conhecimentos aos alunos e alunas; (III) quais tipos de tarefas e abordagens são potenciais ao ensino do sinal de igualdade. Parte de uma das TAP, desenvolvida junto às professoras, pode ser apreciada na *Figura 2*:

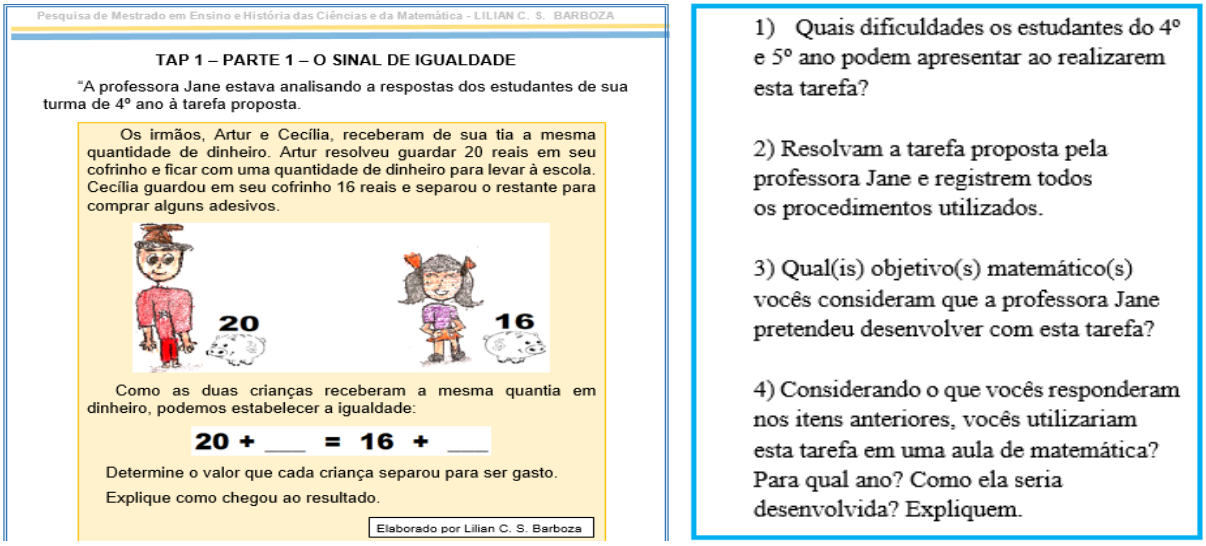


Figura 2. Parte da TAP 1 – O Sinal de Igualdade.

Principais Referências

Ball, D. L. & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: toward a practice-based theory of professional education. In: Sykes, G & Darlinghammond, L. (Ed.). *Teaching as the learning profession*: handbook of policy and practice. São Francisco: Jossey-Bass, p.3-32.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, Thousand Oaks, v. 59, p. 389-407.

Blanton, M. & Kaput, J. (2008). Building disctrict capacity for teacher development in algebraic reasoning. In: Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (Org.) Algebra in the Early Grades. Nova Iorque: Lawrence Erlbaum Associates, p. 133-160.

Kieran, C. et al. (2016). *Early Algebra*. ICME-13 Topical Surveys, [s.l.]. Springer International Publishing.

Silver, E. A. et al. (2007). Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal Of Mathematics Teacher Education*, Springer Netherlands, v. 10, n. 4, p.261-277.

Trivilin, L. R. & Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento matemático para o ensino de diferentes significados do sinal de igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Bolema*, v. 29, n. 51, p.38-59.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Curso de Formação para Professores de Matemática: Aula Investigativa no Ensino de Probabilidade

Albano Dias **Pereira Filho**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins
Brasil
albano filho@ifto.edu.br
Nielce Meneguelo **Lobo da Costa**
Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil
nielce.lobo@anhanguera.com

Resumo

Neste artigo discute-se um experimento de ensino sobre Probabilidade realizado com doze professores de matemática inseridos em um processo formativo. A pesquisa objetivou analisar a construção de conhecimentos profissionais dos participantes sobre Probabilidade, que vivenciaram uma proposta de aula investigativa e criaram atividades para levar os alunos construírem os conceitos de espaço amostral, aleatoriedade, definição de probabilidade, distribuição de frequências e Lei dos Grandes Números. No texto aborda-se a atividade intitulada "jogo com dois dados". A metodologia da pesquisa foi à qualitativa do tipo *Design-Based Research*, na concepção de Brown e de Collins. Analisaram-se as contribuições da formação continuada para o conhecimento profissional docente dos participantes**.** Como resultado, constatamos indícios de ampliação do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Palavras – chave: Jogo de dados, investigação, probabilidade, formação.

Aulas Investigativas: Apoio teórico

A ideia do ensino por investigação como metodologia foi proposta por John Dewey no início do século XX nos Estados Unidos. Dewey apontou que era necessário que as escolas acompanhassem as mudanças ocorridas no contexto da época integrando métodos científicos à Educação, possibilitando aos estudantes realizarem experiências práticas.

As ideias de Dewey só foram difundidas e incorporadas na Educação na metade do século XX quando o educador Joseph Schwab recomendou o professor propusesse problemas com base em investigações fazendo o uso de experiências para conduzir as aulas. Isso deveria ser uma fase a cumprir, antes de introduzir a teoria, conceitos e princípios das ciências (Sá, 2009).

No Brasil as aulas investigativas começaram a surgir nas décadas de 50 e 60. Nessa época prevalecia o modelo de ensino como uma sequência fixa de comportamentos que iniciavam na identificação de problemas, passavam para elaboração de hipóteses e verificação experimental e por fim conclusão das hipóteses. Assim sendo as ideias de aulas investigativas pouco difundidas.

De acordo com Vieira (2012), somente no fim da década de 80 e início da década de 90 do século passado, a proposta de ensino por meio de aulas investigativas foi retomada no Brasil, criando assim expectativas quanto à promoção de um ensino mais científico e dinâmico. Contudo, somente a partir de 2000 surgiram pesquisas pretendendo definir o conceito de aula investigativa. Nesse aspecto muito embasado nas pesquisas portuguesas, tais como as de Ponte (2003, 2009).

O ensino por meio de aulas investigativas possibilita a construção de conceitos e conhecimentos possibilitando ao educando intuir presumir, experimentar, provar, avaliar e apresentar os resultados encontrados. A ação de investigar significa compreender e procurar soluções para os problemas propostos e assim buscar relações, procurando sempre justificá-las. O uso de aula investigativa no ensino gera um chamado desequilíbrio que é necessário para instigar o raciocínio do aluno, esse desequilíbrio ocorre quando o aluno é retirado da passividade das aulas clássicas da sala de aula e passa a fazer parte da ação sobre o meio, sobre os objetos, sobre as ideias com os colegas, e ainda a experimentação, criação e solução de problemas, observações, testes e pesquisas (Bona & Souza, 2015).

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006) as aulas investigativas são aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. Os autores afirmam que, dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática. Ou seja, postura do professor, pode ajudar a trazer para sala de aula um aluno participativo, uma vez que ele é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões, conjecturas e nas realizações de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e nas discussões e argumentações com os seus colegas e com o professor.

Segundo Ponte, Brocado, & Oliveira (2009) a realização de investigação na sala de aula pode ajudar a estabelecer um ambiente em que os alunos participam ativamente. Facilita a compreensão dos processos e ideias matemáticas e da atividade matemática. Desta forma, tarefas de natureza investigativa podem assumir relevância, pois os alunos viverão experiências com características semelhantes à dos matemáticos profissionais.

Ponte (2003) propõe o uso de metodologias investigativas na sala de aula e discute como a investigação pode contribuir para aprendizagem dos alunos. Além disso, aponta as competências necessárias aos professores para promover a investigação na sala de aula. Aborda também o que ainda precisa melhorar para que essa prática se torne integrada á gestão escolar, a investigação deve ser contínua e não momentânea. A investigação não pode ocorrer apenas em uma aula e na aula seguinte voltar à aula com repetições de fórmulas e tradicionalismo.

O autor afirma que, investigar não significa fundamentalmente trabalhar com problemas de grande dificuldade. Mas sim, refletir a partir de questões que nos interessam e que apresentam primeiramente obscuras, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado. Nesse sentido, investigar corresponde a realizar descobertas, recorrendo a processos metodologicamente válidos, como formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e construir argumentos e demonstrações. Segundo o autor, em uma investigação matemática o aluno parte de uma questão geral pouco estruturada e tenta formular uma questão mais específica e sobre ela produzir várias conjecturas que devem ser testadas para que em caso de refutações as questões sejam revistas ou novas questões sejam avaliadas até ganharem credibilidade.

A opção de trazer João Pedro da Ponte como luz do referencial teórico do trabalho investigativo, se deve ao fato do autor considerar a investigação como sendo o ato de descobrir relações, padrões, procurando identificar e comprovar as propriedades levantadas pelo investigador. Ele destaca a importância dessa atividade por contribuir para a construção do conhecimento, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar, e apresentar o(s) resultado (s) encontrado reforçando atitudes de autonomia cooperação e capacidade de comunicação oral e escrita (em se tratando do trabalho em grupo). Essas definições do autor vão todas ao encontro aos nossos objetivos do trabalho, que busca trabalhar o ensino de probabilidade através de aulas investigativas.

Método

A pesquisa maior que subsidia este artigo, foi desenvolvida com metodologia qualitativa do tipo *Design Based Research*, segundo Cobb et al (2003). Essa metodologia caracteriza-se pela flexibilidade, por permitir modificações ao longo do percurso de pesquisa, baseadas nos feedbacks recebidos a cada experimento de ensino desenvolvido, são os re-designs, os quais permitem corrigir rumos ao longo da formação continuada e da pesquisa. Nela foram analisadas as contribuições de uma formação continuada para o conhecimento profissional docente. A formação focou o ensino de probabilidades por aulas investigativas. Os procedimentos metodológicos de coleta de dados durante a formação continuada foram por observações, recolha dos materiais produzidos/ adaptados pelos professores para suas classes, gravações de áudio e vídeos do processo formativo e da sala de aula. Os dados coletados foram analisados pelo método de análise de conteúdo, segundo Bardin (1979), considerando as etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Além disso, foram analisados os vídeos dos encontros.

A atividade: Jogo de Dois Dados

Neste texto discutimos um episódio da formação continuada e os resultados parciais das análises. Entendemos que trabalhar com investigações matemáticas na sala de aula pode proporcionar ao professor um espaço de reflexão sobre suas práticas de ensino. Segundo Ponte, Brocado, & Oliveira (2009) estudos em Educação têm mostrado que este tipo de trabalho constitui uma poderosa forma para auxiliar o aluno a construir conhecimentos. Sob a ótica de ensinar por atividades investigativas, professores de matemática participantes do processo formativo, refletiram nos encontros sobre essa metodologia e criaram uma atividade para levar os alunos a tomar contato de forma investigativa com conceitos de espaço amostral, aleatoriedade, definição de probabilidade, distribuição de frequências e Lei dos Grandes Números. Tal atividade foi intitulada “jogo com dois dados”.

A seguir, apresentamos um relato do episódio com os professores no qual a atividade foi discutida.

Inicialmente dividimos os professores participantes em grupos de cinco em cada mesa e propusemos que se engajassem em um jogo. Um dos professores de cada grupo ficou responsável de jogar os dados e conferir as somas, paralelamente, os outros quatros professores formaram duas duplas, sendo uma equipe contra a outra.

Figura 1- Algumas das cédulas fictícias e dados da atividade

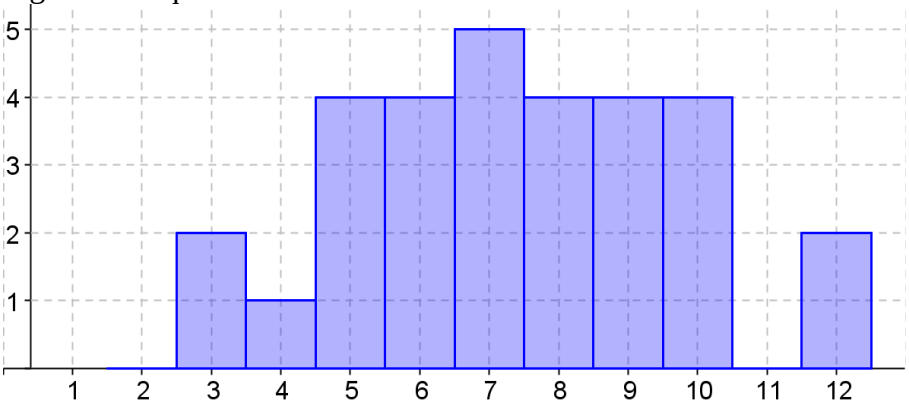


Fonte: Dados da pesquisa.

Entregamos para cada equipe, dois dados enumerados de 1 a 6 e várias cédulas de uma moeda fictícia (relas), conforme o modelo da figura 1, com notas de 2 até 18. Explicamos que cada equipe poderia escolher números pertencentes aos conjuntos A ou ao B, formados pelos números $A = \{2, 4, 5, 8, 10, 11\}, B = \{3, 6, 7, 9, 12\}$. Desta forma, em cada rodada do jogo, a equipe seria considerada vencedora se a soma dos dados fosse igual a algum dos números do seu respectivo conjunto. A equipe que ganha na rodada, guarda em seu banco a cédula com o valor correspondente. Por exemplo: Caso eu opte pelo conjunto A e em determinada rodada, saia em um dado o número 3 e no outro o número 5, sua soma é 8, assim eu guardaria no banco uma cédula de 8 relas.

Apresentamos na figura 2 os resultados das somas que ocorreram de fato na primeira roda do jogo.

Figura-2 Frequência das somas dos valores nos dados na Rodada 1



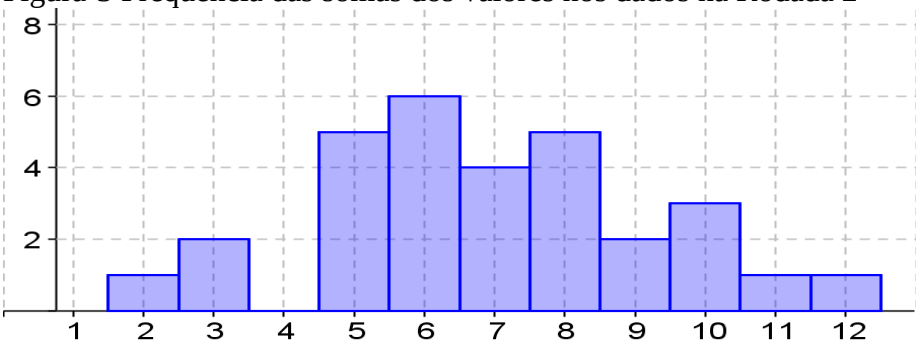
Fonte: Dados da Pesquisa.

Destacamos que a soma 7 obteve uma frequência de cinco, enquanto a soma 2 e onze não apareceram nenhuma vez.

Combinamos com os professores participantes que após as 30 rodadas, iriamos jogar novamente mais 30, sendo que os conjuntos da primeira rodada seriam invertidos.

A figura 3 apresenta os resultados da segunda rodada

Figura-3 Frequência das somas dos valores nos dados na Rodada 2

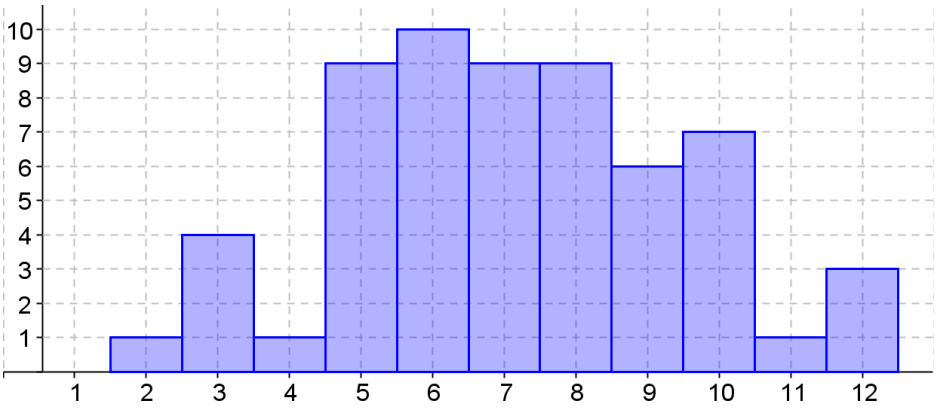


Fonte: Dados da Pesquisa.

Observamos que a soma 4 não apareceu e que as somas 5 e 8 empataram com frequência absoluta de cinco, a soma 7 apareceu quatros vezes e a soma 6 obteve a maior frequência, sendo seis a sua frequência absoluta.

Após as duas rodadas de trinta jogadas, construímos o histograma de frequência absoluta com as sessenta jogadas, que pode ser observado na figura 4 abaixo.

Figura-4 Frequência das somas dos valores incluindo as duas Rodadas



Fonte: Dados da Pesquisa.

Destacamos que as frequências 5 a 8 se mantiveram quase iguais, a soma 6 com uma frequência um pouco maior.

Ao final do encontro observamos que cada par de professores participantes o sagrou-se vencedor do jogo uma vez. Propusemos então que fosse feita uma análise do ocorrido. Feita a análise, percebemos também que ao final das duas partidas, houve um empate entre as somas, 5,7 e 8. Não houve a supremacia da soma 7, como imaginávamos. Os professores sugeriram que analisássemos as frequências de cada face dos dados separadamente. Desta forma, conferimos com um dos professores a contagem das frequências absolutas e relativas de cada face nas duas rodas e depois das 60 jogadas os resultados foram estocados em uma planilha eletrônica no software Excel.

O fato da soma 7 não ter obtido a maior frequência, como era esperado pelos professores participantes, foi uma boa oportunidade para discutirmos o conceito de aleatoriedade e, também, a lei dos grandes números.

Depois de experimentarem o jogo dos dois dados, os professores iniciaram o processo de criação de uma aula com teor investigativo para aplicar a seus alunos. Assim, adaptaram o jogo a novas situações para investigação. Um dos participantes da formação, o Professor T sugeriu a construção de um dado viciado; de um dado com duas ou três cores e também de um dado com cores e números diferentes. Outra ideia sugerida pelo grupo foi na aplicação do jogo com alunos, considerar o conjunto $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ e por uma disputa inicial no par ou ímpar, o grupo vencedor escolheria o primeiro número dentre os doze do conjunto X, após o primeiro escolhido, seriam então as escolhas alternadas pelas equipes de alunos. Foi enfatizado que, apenas após os alunos terem investigado e jogado é que os conceitos relativos á Teoria da Probabilidade, envolvidos seriam discutidos pelo professor na sala de aula.

Resultado e discussão

Neste episódio, através da vivência da atividade investigativa do jogo de dois dados, os professores participantes do processo formativo tiveram a oportunidade de desenvolver uma experimentação que provocou uma situação de desequilíbrio quanto à expectativa de resultados.

Consideramos que a atividade proposta proporcionou a produção de significados sobre atividades investigativas, promoveu reflexões sobre aspectos inerentes ao trabalho em equipe, também sobre a importância de uma formação continuada, bem como sobre metodologia para

ensino de probabilidade. As reflexões foram centradas na importância de que o ensino seja voltado para a participação dos alunos, como agentes ativos na construção dos conceitos e na apropriação das definições.

A composição do grupo de professores participantes foi relevante para as discussões, uma vez que tínhamos no grupo professores de matemática, que tinham formação em ciências da computação, economia, química, biologia, ciências e agronomia, de modo que os conhecimentos em outras áreas foram significativos para as demais atividades desenvolvidas no curso de formação continuada.

Ao final dos encontros, ficou evidente que a participação na formação pôde ampliar o conhecimento profissional docente (específico, curricular e pedagógico), oferecendo aos professores subsídios para reflexões sobre suas práticas em classe, oportunizando inserir as aulas investigativas para abordar os conceitos de probabilidade.

Referências Bibliográficas

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo* (7ª ed). Lisboa: Edições 70.

Bona, A. S., & Souza, M. T. (2015). Aulas investigativas e a construção de conceitos de matemática: um estudo a partir da teoria de Piaget. *Psicologia USP*.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehre, R. R. y Schauble, L. (2003). *Design experiments in education*. Educational Researcher, 32(1), 9-13.

Fiorentini, D. Lorenzato, S. A. (2006). *Investigação em educação matemática**:** percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

Ponte, J.P. (2003) Investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em educação*, 2, 93-169.

Ponte, J. P., Brocado, J. y Oliveira, H. (2009). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Sá, E.F. (2009) *Discursos de professores sobre ensino de ciências por investigação.* Tese, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.

Vieira, F. A. (2012). *Ensino por Investigação e Aprendizagem Significativa Crítica: análise fenomenológica do potencial de uma proposta de ensino. Ensino por Investigação e Aprendizagem Significativa Crítica: análise fenomenológica do potencial de uma proposta de ensino*. Tese . Bauru, São Paulo, Brasil.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La enseñanza de la multiplicación: una propuesta a partir de la medida de longitudes

Liliana **Quintero** López
Universidad de Antioquia
Colombia
liliql22@gmail.com

Francisco José Brabo **Bezerra**
Universidade Federal do ABC
Brasil
francisco.bezerra@ufabc.edu.br

Resumen

El trabajo que a continuación se presenta relaciona algunos de los resultados y reflexiones del proceso de investigación asociado a la formación como magister. El objetivo de esta comunicación es presentar una posibilidad para organizar la enseñanza de la multiplicación a partir de la medida de longitudes, esta propuesta se tejió comprendiendo la multiplicación como isomorfismo de medida y estableciendo relación con los nexos conceptuales de la medida. El trabajo de campo se hizo en un curso de extensión con maestros de primaria de una escuela estadual, en este se buscó construir actividades orientadoras de enseñanza, para esto se compartieron situaciones desencadenadoras que movilizaron el aprendizaje de los maestros y la organización de la enseñanza. El resultado final fue la evidencia de un modo general de acción en las actividades de enseñanza que les permitió a los maestros movilizar la enseñanza de la multiplicación.

Palabras clave: multiplicación, medida, actividad orientadora de enseñanza, longitud, educación básica.

Introducción

Este trabajo presenta los resultados de una de las construcciones realizadas en el marco del desarrollo de la disertación de maestría titulada: "a medida como instrumento mediador para o ensino da multiplicaçao no ensino fundamental" finalizada en Brasil en el año 2016 en la Universidade Federal do ABC. Esta investigación tuvo como objetivo la organización de la

enseñanza de la multiplicación a partir del concepto de medida para los años iniciales de la educación básica, y como pregunta norteadora: ¿Cómo el profesor puede organizar la enseñanza de la multiplicación para los años iniciales de la educación básica, teniendo el concepto de medida como instrumento mediador? La multiplicación se comprendió en este estudio como isomorfismo de medida, porque transciende el modelo tradicional al reconocerla como una relación cuaternaria a la cual están asociados otros conceptos matemáticos. Esta mirada de la multiplicación facilitó el estudio de las relaciones del concepto de multiplicación con las medidas y posibilitó la construcción de situaciones desencadenadoras de aprendizaje en las que las medidas fueron protagonistas y el pensar multiplicativamente el objetivo a ser alcanzado. Una de ellas fue: ¿cómo ardilla, coyote o canguro? que será presentada en esta comunicación.

El trabajo de campo fue realizado en un curso de extensión con profesores de educación básica de la misma institución, donde buscamos formar a los maestros y movilizarlos para que organizaran la enseñanza de la multiplicación para los diferentes grados considerando sus experiencias, el conocimiento de los grupos y el contexto.

La hipótesis con la que iniciamos este estudio y que hizo parte de nuestro camino fue que llevar a los estudiantes por el camino de los nexos conceptuales del medir posibilita el entendimiento de las etapas del pensar multiplicativamente. Concluimos que las situaciones desencadenadoras de aprendizaje desarrolladas con y para los profesores posibilitaron la re-significación de la enseñanza de la multiplicación, y presentaron un modo general de acción para organizar la enseñanza de la multiplicación a partir de las medidas.

A seguir, se presenta el horizonte teórico que sustenta este trabajo, mostrando las comprensiones desde la teoría de la actividad, entendiendo la enseñanza como la actividad principal de los maestros y finalmente presentando la actividad orientadora como posibilidad para organizar la enseñanza-aprendizaje. También se esbozan algunas ideas relativas a la comprensión de multiplicación y medida. Seguidamente está el camino metodológico que se siguió para cumplir el objetivo, donde se presentan los actores y las acciones de la investigación. Luego se presenta la situación desencadenadora ¿cómo ardilla, coyote o canguro? desde su construcción, orientación y las acciones derivadas que posibilitaron la construcción de la AOE. Por último, se comparten algunas consideraciones finales derivadas de este estudio.

Horizonte teórico

A continuación se presentan las reflexiones teóricas centrales que hicieron parte de este estudio, transitando desde la comprensión de actividad, enseñanza como actividad principal del maestro, actividad orientadora de enseñanza (AOE), multiplicación y medidas.

Actividad y Actividad Orientadora de Enseñanza (AOE)

Nuestras voces se movilizaron desde la Teoría de la Actividad propuesta por Leontiev, quien dio continuidad a los presupuestos histórico-culturales desarrollados por Vigotsky. Este autor estudió el concepto de actividad vinculado al concepto de trabajo propuesto por Marx, que tiene un papel central en la constitución del hombre, pues es quien humaniza y posibilita el desarrollo de la cultura. Este concepto tiene completo carácter social, y guarda relación con los procesos de mediación.

Leontiev (1978) explicita como el hombre es movido por necesidades que deben ser

suplidas por medio de actividades ejecutadas, que deben responder a un motivo con significado social. Este mismo autor explica que en un primer momento, la actividad responde al instinto de sobrevivencia, el ser humano necesita dar solución a sus necesidades básicas, y solo después en el transcurrir de la vida se constituye como hombre por su actividad.

Leontiev presenta el concepto de actividad como una estructura que tiene dos características centrales: orientación (necesidades, motivos y tareas) y ejecución (acciones y sus operaciones), se refiere entonces al conjunto de acciones y operaciones organizadas y orientadas para alcanzar un objetivo, que responde a un motivo y a una necesidad humana (del sujeto).

Observando con este lente al maestro y su práctica, encontramos que según Moura (2012):

> El hecho de ser profesor dice que tenemos una característica común con otros sujetos que tienen como practica principal enseñar algo a alguien, esto es, para ser profesor es necesaria una acción que busque transformarse al transformar a otra persona, cambiar su modo de ser y de actuar. (p. 144)

De acuerdo con el mismo autor y otros (2010), la principal actividad del maestro es la enseñanza, una actividad que busca la transformación del otro (sus estudiantes) y la propia, en un proceso dialectico. Él debe organizar situaciones que busquen esta transformación de los sujetos de manera intencional. Siendo la enseñanza la actividad principal del profesor, hace parte de su actividad mediar la relación de los estudiantes con el objeto de conocimiento, ósea, el profesor tiene la gran tarea de orientar y organizar la enseñanza. En palabras de Moura y otros (2010)

> La búsqueda de la organización de la enseñanza, recurriendo a la articulación entre la teoría y la práctica, es que constituye la actividad del profesor, más específicamente la actividad de enseñanza. Esa actividad se constituirá como praxis pedagógica si permite transformación de la realidad escolar por medio de la transformación de los sujetos, profesores y estudiantes. (p. 89)

Es por esto que el autor en mención adoptó el concepto de actividad de la teoría de la actividad de Leontiev y lo pensó en la enseñanza, generando reflexiones en torno del modo de organizar la enseñanza, presentando así, una posibilidad para realizar la actividad educativa: las AOE.

La necesidad que moviliza la AOE es la apropiación de la cultura, esta se materializa en la apropiación del conocimiento históricamente acumulado, comprendiendo ser este el motivo real de la actividad. Mirando más específicamente los sujetos envueltos en la AOE, el objetivo específico que moviliza al profesor y a los estudiantes, es el de enseñar en el caso del primero y el de aprender en el caso del segundo.

La AOE según Moura

> (…) se constituye en un modo general de organización de enseñanza, en que su contenido principal es el conocimiento teórico del individuo en el movimiento de apropiación del conocimiento. Así, el profesor al organizar las acciones que objetivan el enseñar, también cualifica sus conocimientos, y es ese proceso que caracteriza la AOE como unidad de formación del profesor y del estudiante. (2002, p.150)

Con base en la propuesta de Moura, se concluye que la AOE busca la organización de la enseñanza, siendo elemento de mediación entre la actividad de enseñanza y actividad de aprendizaje, y promueve un modo general de apropiación de la cultura humana.

Multiplicación y medida

Investigadores como Starepravo (2010), Obando (2014), Torres (2013), Madera (2012) y Crestani (2013) han centrado sus investigaciones en la enseñanza de la multiplicación presentando como resultados de sus estudios diferentes posibilidades para organizar su enseñanza. En ellos encontramos coincidencias en las maneras de describir la realidad frente a la enseñanza de la multiplicación tanto en las escuelas brasileras como colombianas, resaltando el uso del algoritmo, entendiéndola como suma de sumandos iguales y dando prioridad a la memorización de las tablas de multiplicar.

Fue a partir de la voz de estos autores que reconstruimos la comprensión de lo que significa pensar multiplicativamente, que reconocimos la existencia de la correlación entre una colección de conjuntos con igual cantidad de elementos, la relación biunívoca y las relaciones de proporcionalidad entre las cantidades representadas en las colecciones de conjuntos.

Desde nuestros modos de hacer guiados por el interés de constituir actividades orientadoras de enseñanza, también fue importante el rastreo histórico de los conceptos, referente a la multiplicación encontramos que en la historia de la humanidad los primeros registros aparecen en la constitución de los sistemas numéricos como herramienta para optimizar el conteo y la escritura. Este rastreo se hizo consultando autores como Boyer (1996), Eves (2004) e Ifrah (1985), allí encontramos episodios que confirman el interés principal de nuestros antepasados frente a la organización de los sistemas numéricos y el perfeccionamiento de los métodos de cálculo, hechos que tienen correspondencia con la realidad encontrada en las aulas mencionada antes.

Reconocemos que para desarrollar el pensamiento multiplicativo no es suficiente la memoria y el uso del algoritmo, se deben considerar los conceptos asociados como razón, proporción y proporcionalidad. En la interacción con estos autores comprendimos que a los problemas multiplicativos se les asocian cantidades y no solo números, que sus representaciones en la mayoría de los casos giran en torno de las medidas y que las cantidades asociadas no son de la misma naturaleza, esto hace que se reconozcan dos sistemas de cantidades y dos procesos de variación, uno en cada sistema de cantidades.

Según Vergnaud (2009), la relación de multiplicación constituye una relación cuaternaria, que comprende tres clases de estructuras diferentes: isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporción múltiple. De acuerdo con el mismo autor, el isomorfismo de medidas considera que en todo problema multiplicativo existen cuatro cantidades relacionadas, dos que pertenecen a un espacio de medidas y las otras dos a otro.

Obando (2014) y Torres (2013) sobre estos presupuestos, hicieron una síntesis en la que definen tres etapas que indican cuando se está pensando multiplicativamente, son ellas: identificar los dos sistemas de cantidades, establecer relaciones entre las cantidades de los dos sistemas e identificar las razones y proporciones que permiten correlacionar las cantidades entre los dos sistemas. Este fue nuestro punto de llegada.

Frente a la medida, Caraça (1975), apunta que medir consiste en comparar dos magnitudes de la misma especie, necesidad que surgió en el contexto del trueque y posteriormente en la división de tierras y el cobro de impuestos en el antiguo Egipto. Siguiendo el camino lógico – histórico, el grupo de estudio OBEDUC de la USP, organizó las relaciones esenciales (nexos

conceptuales): el primero es el reconocimiento de la magnitud, el segundo es la comparación entre dos o más objetos que poseen la misma magnitud y el tercero es la medida de la magnitud a partir de una unidad de medida. De esta manera es posible transitar el camino del desarrollo histórico y lógico del concepto. Este fue nuestro punto de partida.

Camino metodológico

La situación desencadenadora que se comparte en esta comunicación fue pensada desde la medida, transitando los nexos conceptuales antes presentados y buscando el desarrollo del pensamiento multiplicativo. Como ya se mencionó, la producción de los datos se dio en un curso de extensión en el que participaron 37 maestros pertenecientes a la misma escuela, 34 que acompañan grupos de primero a quinto de primaria y tres directivos docentes. El trabajo se organizó en tres momentos: planeación, desarrollo del curso y producción, y finalmente análisis de los datos. Para la producción de los datos se usaron instrumentos como las grabaciones de audio, tareas diagnósticas, diario de campo, discusiones en subgrupos y generales.

En el desarrollo del curso se tenía primero un momento de formación que buscaba movilizar a los profesores para que organizaran la enseñanza de la multiplicación a partir de las medidas, luego ellos hacían su trabajo con los estudiantes y después se daba un momento de discusión y reflexión con dos objetivos: el primero, constituir actividades de enseñanza a partir de los relatos de experiencia de los profesores con relación a la Actividad de Enseñanza y a la Actividad de Aprendizaje, y el segundo, reflexionar sobre cómo el concepto de medida puede ser un instrumento mediador para la enseñanza de la multiplicación.

Se propusieron pequeñas tareas con la intención de garantizar el reconocimiento y la apropiación de cada nexo conceptual de las medidas. Buscando movilizar en los profesores la reflexión acerca de la organización de la enseñanza de la multiplicación a partir del concepto de medida y la actividad de aprendizaje de los estudiantes.

Se entiende que, a partir de las experiencias, observaciones, planeaciones y sugerencias los profesores contribuyen con la organización de la enseñanza. Es importante explicitar las acciones de enseñanza organizadas por ellos, y las acciones de aprendizaje desarrolladas por los alumnos para dar solución a las tareas propuestas. A partir de los relatos de los profesores, fue posible describir cómo organizar la enseñanza de la multiplicación teniendo el concepto de medida como instrumento mediador.

Para explicitar los análisis, fueron construidos episodios con las acciones más significativas desde el punto de vista del objetivo de la investigación. Para Moura, un episodio se refiere a:

> (…) Frases escritas o habladas, gestos y acciones que constituyen escenas que pueden revelar interdependencia entre los elementos de una acción formadora. Así, los episodios no son definidos a partir de un conjunto de acciones lineales. Puede ser que una afirmación de un participante en una actividad no tenga impacto inmediato sobre los otros sujetos del colectivo. Ese impacto podría revelarse en otro momento en el que al sujeto se le pida utilizar algún conocimiento para participar de una acción en el colectivo. (2004, p.276)

No se trata entonces de transcripciones completas de lo expresado por los profesores, se refiere, como indica Moura, a una composición que resulta de la junción de partes de lo dicho o escrito que convergen en una misma categoría de análisis.

¿Cómo ardilla, coyote o canguro?

La pregunta desencadenadora fue ¿cuánto usted puede saltar?, ¿Cómo la ardilla, el coyote o el canguro? Fue presentada una guía con las orientaciones y reglas del juego junto con tiras de colores de diferentes tamaños, a cada tira se asociaron un número determinado de puntos. Los maestros debían saltar, medir la distancia alcanzada usando alguna de las tiras y registrar los puntos logrados según correspondía. Después los profesores debieron establecer relaciones entre las tiras y la medida de longitud estándar para responder a la pregunta por el salto según el tipo de animal que podían ser, porque esta información fue presentada en metros. También fueron presentadas tareas en las que los maestros debían llenar tablas con algunas situaciones que relacionaban saltos, cintas y número de puntos.

En el espacio de reflexión colectivo los profesores proyectaron acciones posibles para el trabajo con sus estudiantes y recordaron clases pasadas identificando el uso de instrumentos y unidades de medida patrón en su enseñanza, que relacionaron con uno de los nexos conceptuales estudiados.

Los profesores de educación física compartieron con los colegas que ellos han realizado ejercicios parecidos al planteado en el curso, pero lamentaron no conocer lo que ahora saben porque reconocen que podrían haber aportado a la comprensión de lo que es medir. Se resalta el poder de la reflexión docente y el proceso de formación doble, en el que el profesor termina orientando la situación sin planearlo en la que se forma en cuanto forma a sus estudiantes.

Aunque los profesores no tenían formación específica en matemáticas, en el desarrollo del curso de extensión comprendieron la importancia de los nexos conceptuales del medir, y se apropiaron de ellos para reflexionar sobre sus acciones en clases pasadas. Evidenciadas en la experiencia contada por los profesores de educación física cuando compararon la diferencia entre el salto triple de los estudiantes, del profesor y de los atletas. También cuando los estudiantes afirmaban que quien es más alto salta más y quien es más bajo salta menos.

Por su parte, las profesoras de primer grado movilizadas por las reflexiones en el curso de extensión, organizaron algunas clases a partir de esta situación desencadenadora, presentando las siguientes acciones de enseñanza: en conjunto con los profesores de educación física se orientó y acompañó el espacio para que los estudiantes saltaran y midieran sus saltos usando las cintas de colores construidas para este estudio, los estudiantes debían registrar gráficamente la medida de cada salto en un formato propuesto por las profesoras. Luego en el salón de clase se trabajó a partir de los dibujos de los estudiantes y se buscó que calcular los puntajes. Una de las profesoras resalto expresiones de los niños como: “yo perdí el juego porque solo tengo una cinta y tú tienes un montón” lo que nos muestra como para algunos solo existe un espacio de medida y la posibilidad de ganar el juego por acumulación de cintas sin pensar en los puntos que se relacionan. Pero en el desarrollo de la clase el estudiante reconoce el otro espacio de medida y comprende porque con solo una cinta él le ganó a su compañero.

Este trabajo se hizo paso a paso, recorriendo una y otra vez cada nexo conceptual, logrando que los niños vivieran lo que es medir y avanzaran en el pensar multiplicativamente. Las maestras también usaron cuentos infantiles que invitaban a medir, hicieron gráficos de barras con los datos de los puntos obtenidos por los estudiantes y usaron las preguntas como orientadoras en cada momento. Este trabajo reveló que es posible que los niños de primer grado se apropien de

los conocimientos teóricos que envuelven las medidas y la multiplicación tal como se entienden en este estudio.

Consideraciones finales

A la composición entre situaciones desencadenadoras de aprendizaje y acciones de enseñanza reconocidas en la voz de los profesores desde sus recomendaciones y relatos de experiencia es lo que consideramos una AOE. Las acciones que permiten organizar esta enseñanza se originan a partir de la reflexión del maestro, quien primero aprende en interacción con las situaciones desencadenadoras de aprendizaje fortaleciendo su saber teórico, y después piensa en su grupo específico para proponer las variaciones necesarias que garanticen el movimiento de la actividad de aprendizaje en sus clases.

Concluimos que los maestros entraron en actividad de estudio acogiendo como motivo propio la enseñanza de la multiplicación consiguiendo su organización a partir de las medidas. Resaltamos en este proceso cómo ellos se movilizaron y reflexionaron sobre sus planeaciones de clase, logrando intercambios y colaboraciones importantes con sus colegas valorando la experiencia de cada uno.

Referencias y bibliografía

Asbahr, F. (2011). "Por Que Aprender Isso, Professora?" Sentido Pessoal e Atividade de Estudo na Psicologia Histórico-Cultural. (Tesis de doctorado, Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo).

Boyer, C. (1996). História da Matemática. São Paulo, SP: Edgard Blücher.

Caraça, B. (1975). Conceitos fundamentais da Matemática. Lisboa: Tipografia Matemática Ltda.

Crestani, S. (2013). Análise conceitual das proposições de Davydovi e seus colaboradores para o ensino do conceito de divisão. (Especialização em educação, Faculdade de Educação, Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma).

Eves, H. (2004). Introdução à história da matemática. Campinas, SP: UNICAMP.

Ifrah, G. (1996). Os números: história de uma grande invenção. (Tradução Stella Maria de Freitas Senra): São Paulo: Globo.

Leontiev, A. (1978) Actividad, consciencia y personalidad. Havana: Editorial pueblo y educación.

Madeira, S. (2012). “Prática”: uma leitura histórico-crítica e proposições Davydovianas para o conceito de Multiplicação. (Disertación de maestria, Faculdade de Educação, Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma).

Moretti, V. (2007). Professores de Matemática em Atividade de Ensino. Uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente. (Tesis de doctorado en educación, Universidade de São Paulo, São Paulo).

Moura, O. (1996). A atividade de ensino como unidade formadora. Bolema, 12 (2), 29-43.

Moura, O. (2012). A atividade de ensino como ação formadora. En: Domingues, A y Pessoa, A. Ensinar a ensinar. São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda, 143-162.

Moura, O. (2010). Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. Revista Diálogo Educacional, 205-229.

Moura, O. (2010). A atividade pedagógica na Teoria Histórico-Cultural. Brasilia: Liber Livro Editora Ltda.

Obando, G. (2014). Sistema de Prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica. (Tesis de doctorado en educación, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali).

Starepravo, A. (2010). Multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino. (Tesis de doctorado en educación, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo).

Torres, M. (2013). Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en terminos del análisis relacional. (disertación de maestria em educación, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín).

Vergnaud, G. (2009). A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: UFPR.

Vigotsgy, L. (2007). Formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La Didáctica de Matemáticas y Ecología de Saberes

Abdón Pari Condori
Universidad Nacional de Educación
Ecuador
abdon.pari@unae.edu.ec

Resumen

Esta comunicación tiene como propósito presentar el análisis de una experiencia educativa de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque de diversidad epistémica e intercultural que desarrolla la Universidad Nacional de Educación en la Amazonía ecuatoriana. Se ha considerado como parte de un curso de *Ecología de Saberes* que tiene como objetivo, compatibilizar los distintos enfoques de estudio de la matemática, su enseñanza y aprendizaje para relacionarla con otras asignaturas como lenguaje, medio natural y sociales, la investigación atraviesa de manera transversal todas las asignaturas del ciclo. Todas las asignaturas giran alrededor de un núcleo problémico y un eje integrador fundamentado en el concepto de "ecología de saberes" y el Modelo Pedagógico de la UNAE. El estudio es de corte cualitativo e interpretativo donde la narración se convierte en un espacio transformador para presentar la reflexión de los efectos del curso sobre su propia práctica.

Palabras clave: didáctica de matemáticas, ecología de saberes, formación docente.

Introducción

La Universidad Nacional de Educación (UNAE) de Ecuador es una universidad estratégica que genera una dinámica singular. Según Freddy Álvarez, Rector de la UNAE: "crear una universidad nueva requiere nuevas mentalidades" (Álvarez, 2016, p.15). Esto conlleva uno de los mayores retos institucionales de la UNAE, porque crear una nueva universidad con personas que vienen de diferentes universidades, diversos países y culturas con experiencias y formaciones variadas. Esto es una riqueza institucional, pero no fácil de lograr la convergencia con los principios educativos y normativos de la política educativa ecuatoriana y los principios pedagógicos y curriculares del Modelo Pedagógico de la Universidad. La UNAE, es una universidad de formación de maestros que apuesta por la transformación de la educación ecuatoriana en relación de los desafíos de la educación mundial.

La UNAE, al ser una universidad de alcance nacional ha constituido algunos Centros de Apoyo o Sedes institucionales. El primer Centro de Apoyo se encuentra en la ciudad de Nueva Loja, cantón Lago Agrio, provincia de Sucumbíos denominada UNAE Amazonia, por estar

ubicado en la Región de Amazonía, y el segundo está ciudad de San Vicente, provincia Manabí, que corresponde la a Región de Costa. Contunua las proyecciones de creación de otros Centros de Apoyo para otras reiones. En la UNAE Amazonía, se oferta por ahora las carreras de Educación Básica (EB) y Educación Intercultural Bilingüe (EIB) para profesores en servicio que no cuentan con el título de tercer nivel (Licenciado). También se desarrollan los cursos de Formación Continua para docentes y directivos de la región. Además, de las anteriores, se realizan Seminario/Talleres bajo el rótulo de "Ecología de Saberes" como parte de la vinculación con la colectividad del Centro. Estos seminarios/talleres buscan dar respuesta a las demandas y necesidades de formación de docentes y directivos. Estos cursos son desarrollados por un equipo multidisciplinar de la UNAE y dirigidos también a un público diverso y variado. En estos espacios de reflexión se crean debates y diálogo de saberes. En la que participan profesores de distintas especialidades, diferentes niveles y distintas formaciones.

El perfil del docente UNAE se basa en el desarrollo de competencias básicas y profesionales que configuran el desarrollo del pensamiento docente práctico. El Modelo Pedagógico está fundamentado en la epistemología constructivista (Pérez, 2017), en la que representación y acción constituyen ámbitos fundamentales de los procesos de construcción del conocimiento. Desde este enfoque pedagógico el conocimiento se construye a partir del desarrollo de competencias docentes, entendidas como un complejo constructo de pensamiento y acción, que implica un tetrágono de saber: saber pensar, saber decir, saber hacer y saber convivir.

Además, el desarrollo del pensamiento práctico y creativo constituye uno los principios del modelo curricular. Las competencias profesionales del docente de la cibersociedad son entendidas como sistemas de comprensión y actuación profesional capaz de responder a las exigencias de un ciudadano crítico, creativo, responsable y comprometido con su contexto.

La formación docente se basa en los principios pedagógicos: aprender haciendo, esencializando el currículo, en ambientes de colaboración y conectividad, fomentando la meta cognición, la formación formativa y el rol tutorial del docente, es decir todo está orientado a desarrollar el pensamiento práctico que le permita experimentar la teoría y a teorizar la práctica.

En esa perspectiva, busca desarrollar una formación dinámica que permite a las instituciones tener una presencia efectiva en contextos en los que el acceso a procesos académicos relacionados con estudios superiores es difícil. Particularmente, en el caso de la Amazonia ecuatoriana. Por eso se ofertan los siguientes cursos y carreras:

1. Carreras de Educación Básica (EB) y Educación Intercultural Bilingüe (EIB).
2. Cursos para docentes: *Enseñanza y Aprendizaje para la Investigación y la Innovación Retos del docente contemporáneo hacia una educación del buen viv*ir.
3. Curso para directivos docentes: *Gestión educativa y Liderazgo pedagógico para la Investigación y la Innovación*
4. Ecología de Saberes. *Seminarios UNAE sobre didácticas en Educación.*

Aunque las matemáticas se imparte tanto en las carreras EB y EIB y los seminarios UNAE de "Ecología de Saberes". En ambos programas son consideradas las matemáticas desde un enfoque de la diversidad epistémica e intercultural con énfasis en el pensamiento práctico y la experimentación en el aula.

En este trabajo mostraremos la experiencia de impartir la Didáctica de la Matemática en el marco de "Ecología de Saberes" Seminario UNAE sobre didácticas de la matemática desde una

perspectiva interdisciplinar, intercultural respetando el ritmo de aprendizaje de los estudiantes. . La población objetivo fue 75 maestros de una unidad educativa de los diferentes niveles de Primario y secundario. De los cuales 12 son profesores de matemáticas en los diferentes niveles. El seminario taller "Ecología de Saberes" tuvo una acogida muy importante tanto de parte de los profesores como de los directivos. Incluso algunos profesores que son parte de las carreras de EB y EIB también participan de forma activa y creativa.

Posteriormente presentamos algunas autonarraciones reflexivas de los participantes del seminario taller desde su experiencia con las matemáticas como estudiante y docente. Haremos especial énfasis en la compatibilización de los diferentes saberes o conocimientos ante la polarización o hegemonía unilateral del conocimiento científico.

El objetivo es generar procesos de reflexión sobre las prácticas educativas y de investigación, para fortalecer e incentivar la gestión social de los conocimientos en contextos plurales de formación continua y permanente; iniciar las actividades para el fortalecimiento de los procesos de formación de la Red Académica de Docentes Investigadores en la Amazonia; promover nodos de relación interinstitucional e interdisciplinaria entre la comunidad académica de Sucumbíos, y establecer acuerdos para la realización de procesos de investigación singular y colectiva sobre educación y pedagogía en contextos plurales de formación.

Marco teórico

La ecología de saberes se fundamenta en la idea de que el conocimiento es interconocimiento, intersubjetivo e intercultural. Lo contrario de lo que se planteaba desde la hegemonía propugnada por la Civilización Occidental considerando que su conocimiento es científico y los otros no son científicos. Por ejemplo, el ambateño Marcos Guerrero Ureña platea de la siguiente manera:

> La historia de la ciencia se ha elaborado bajo la premisa de que la configuración básica del saber científico es un proceso acaecido dentro de las fronteras de la Civilización Occidental. Si bien hoy se tiende a admitir que los importantes y copiosos desarrollos intelectuales de las antiguas culturas egipcia, babilónica, o de la hindú y china, son progenitores de ese saber, no se les reconoce, en cambio, como productos científicos propiamente dichos. El argumento esgrimido es bastante convincente y recoge el hecho de que ninguno de los antecedentes de la matemática griega alcanzó a sistematizarse como una geometría –al modo de los Elementos de Euclides, con cuya aparición pudo cimentarse el escenario para la fluida realización del pensar y el conocer. (2004, p. 2).

Sin embargo, a lo largo de la historia de las matemáticas se han dado descubrimientos paralelos sin que se conozcan los autores o no compartan sus conocimientos. Por ejemplo, la disputa de la paternidad del cálculo de las derivadas y las integrales, que después de casi tres siglos y medio aproximadamente desde su invención, aún continúan controversias y comentarios sobre quién fue mejor matemático y científico: Isaac Newton (1641-1727) o Gottfried Leibniz (1646-1716), por mencionar alguno.

En la misma línea Guerrero (2004), plantea: *Los dos Máximos Sistemas del Mundo: las matemáticas del Viejo y del Nuevo mundo.* El autor se pregunta: ¿hubo en alguna otra parte de nuestro planeta, una invención equivalente, un desarrollo paralelo de un sistema de referencia igual apropiado para la expresión de las ideas? Y añade, de ser cierta esta posibilidad: ¿Cuál es la otra ciencia, dónde y cómo se originó? Para responder a estas inquietudes y a otras el autor

presenta el sistema matemático desarrollado por el hombre precolombino, en el marco de los Espacios de Representación. Estas exóticas matemáticas contemplaban la Geometría Analítica Fractal que presenta una Geometría Arborescente o p-ádica totalmente desconocida y no consta en los Anales de Matemáticas (Guerrero, 2004).

Si bien es cierto, que hubo importantes y copiosos desarrollos intelectuales en Europa y en el Oriente, todo esto muestra que las matemáticas son un conocimiento construido sobre la interconectividad de los conocimientos e interculturales. Incluso, el sistema de numeración que hoy utilizamos es intercultural, porque es "Indo arábigo". Asimismo, no se puede negar los saberes matemáticos en América, como la cultura Maya, Inca, Tiwanacu, entro otros, conocido como ABYA-YALA.

Por ejemplo, recién en la década de los 70, el matemático francés Benoit Mandelbrot acuña el término fractal derivándola del adjetivo latín *fractus*. Sin embargo, la existencia de los fractales se conoce desde mucho antes. En la matemática andina ya estaba en la Chacana (ver Guerrero, 2004). Mientras que en el Occidente, recién en el siglo XIX eran considerados, simplemente como curiosidades matemáticas, porque su verdadera identidad no fue plenamente expresada hasta las décadas de entre 1960 y 1970, gracias a los importantes estudios de Mandelbrot y otros científicos.

El propósito del curso que desarrollamos desde la UNAE, no es polarizar entre los dos Sistemas Máximos del Mundo: Las Matemáticas del Viejo y Nuevo Mundo (Guerrero, 2004), impulsando en lugar de la hegemonía unilateral, sino más bien compatibilizar entre ambos sistemas y posibles otros. Como la etnomatemática acuñado por el profesor e investigador brasileño Ubiratan D'Ambrosio ha contribuido a la concepción de la matemática como una construcción social y actividad humana (D'Ambrosio, 2001).

En esa perspectiva se toma el concepto de "Ecología de Saberes" del sociólogo Boaventura de Sousa Santos (2012) como una metodología de investigación que favorece la interactividad sobre la unilateralidad y a su vez propone un intercambio entre quienes poseen el conocimiento científico y aquellos sectores de la población que poseen otros tipos de conocimientos.

Método

El presente estudio forma parte del Proyecto Ecología de Saberes. *Seminarios UNAE sobre didácticas en educación.* Específicamente el caso de matemáticas. En la que han participado 12 profesores de diferentes niveles perteneciente a una unidad educativa de la provincia de Sucumbíos.

El estudio llevado a cabo por el equipo académico de la Universidad Nacional de Educación en la Amazonía, se ha desarrollado de un modo secuencial mediante la observación participante de tres procesos: (1) un seminario taller de "ecología de saberes" para el profesorado en general, (2) un seminario taller de didáctica de las matemáticas y (3) un diálogo de saberes entre los profesores de matemáticas, lenguaje, medio natural y ciencias sociales.

La población involucrada en el estudio de caso abarca 75 profesores de la Unidad Educativa Pacífico Cembranos de Lago Agrio. De los cuales 12 son profesores de matemáticas de diferentes niveles de primario y secundarios.

Se han utilizado clases presenciales para generar espacios de reflexión y diálogo sobre la diversidad epistémica, la interculturalidad y la interdisciplinaridad que busca compatibilizar los diferentes saberes y conocimientos como un potencial del ser humano. En esa perspectiva la

matemática es concebida como una construcción del hombre, por lo tanto es una actividad humana (Freudenthal, 1981). Mientras que en el aprendizaje autónomo de los profesores se contempla las lecturas de artículos seleccionado por los facilitadores y la reflexión desde sus experiencias frente a esas teorías o posturas paradigmáticas. Estas reflexiones eran presentadas en forma narrativa. En la fase de aprendizaje colaborativo se han realizado guiones para la grabación de un video de máximo de cinco minutos.

En cuanto al diseño del estudio de caso, este se ha enmarcado en un modelo de investigación cualitativa, que nos ha permitido acercarnos y comprender el objeto de estudio desde una perspectiva comprensiva y de exploración abierta y compleja (Diez y Díaz, 2018).

Resultados

Es posible encontrar a la matemática en cualquier actividad humana, desde el quehacer científico, hasta las manifestaciones culturales y artísticas. Por eso es importante desarrollar en los ciudadanos los aspectos básicos de la matemática que permitirán desempeñarse de manera adecuada y satisfactoriamente tanto en contextos académicos y científicos como en sociales, culturales y laborales. En esa perspectiva, la didáctica de matemática en la formación de profesores de matemáticas necesita ser un proceso continuo, sistémico, organizado y permanente en la transformación personal y profesional. Independiente de cómo vean las matemáticas, les guste o no, si siente que podría explicar qué es la matemática o no, la mayoría de las personas estarían de acuerdo que las matemáticas son una forma de comunicar información. Esta forma puede parecer bastante diferente a la información que se comunica oralmente o por escrito, sin embargo sigue siendo información de algún tipo. Como una forma de comunicación están sujetas a influencias y variaciones en la interpretación tanto a nivel social, cultural e incluso individual. En este curso, la ecología de saberes se fundamenta en que el conocimiento o saber matemático es interconocimiento. Por esa razón, se trabajó las diferentes formas de aprender, conocer, estudiar etc. Sin caer en la polarización, ni la unilateralidad de los conocimientos de ciertas culturas. Más bien busca la compatibilización de los diferentes saberes que son diferentes.

Los participantes de ecología de saberes han trabajado desde las diferentes formas de entender y hacer matemáticas y han realizado narraciones reflexivas desde sus experiencias y vivencias personales (Pari, 2017), como estudiantes y profesores de matemáticas. Estos aspectos permiten un movimiento de construcción y reconstrucción de conocimientos y competencias profesionales que posibilita una mejor comprensión y perfeccionamiento de los procedimientos y una mejora en el desempeño y en el resultado del trabajo de mediación en el aula.

A continuación presentamos algunas narraciones de los profesores participantes del curso Ecología de Saberes:

> *La enseñanza de las matemáticas cuando yo estudiaba en la escuela, era muy tradicional, teníamos que aprender de memoria las tablas de sumar, restar y multiplicar, para luego realizar las operaciones. El estudiante que no sabía de memoria las tablas recibía castigo, como hincarse en granos de maíz o en piedras, recibir reglazos o latigazos, jalón de orejas, dentro otros castigos. En esa época poco o nada enseñaban a razonar (...) Yo recuerdo que para el nivel de bachillerato, también había que memorizarse, pero ya empezaban con problemas de razonamientos lógicos para prepararnos para la evaluación de las pruebas de Ser Bachiller. (Informante n° 1).*

Sin embargo, esta forma de enseñanza tradicional la matemática todavía continúa en la amazonia ecuatoriana. Por ejemplo, muchos docentes siguen enseñando como ellos aprendieron. El libro más utilizado en la enseñanza de la matemática en el nivel secundario sigue siendo libro

de Álgebra de A. Baldor. A pesar de que le Ministerio de Educación elabora y distribuye los textos escolares para el sistema educativo del país. Pero para ellos es más cómo resolver un ejercicio modelo y hacer que los estudiantes sigan la receta para realizar las actividades propuestas en forma memorística, mecánica con poco o nada de resolución de problemas.

> *Aprendí matemáticas por medio de la numeración, para mí era muy complicado, porque tenía maestros muy enojones. Yo les pedía que me expliquen de nuevo y se molestaban muchísimo. Por eso a mí me daba mucho miedo preguntar al profesor y pensaba que mi deber estaba mal hecho. Para mí fue muy duro porque en mí en esa época no existía quien me ayude a resolver los problemas de matemáticas. Me tocó aprender a base de mis propios esfuerzo y dedicación. Cuando los ejercicios no estaban bien hechos el maestro nos castigaba. Varias veces yo me quedaba sin salir al recreo y mis compañeros se burlaban de mí. En mi época era muy duro los estudios en todas las asignaturas, porque el maestro en lugar de ser un amigo era un enemigo. (Informante n° 2).*

Experiencias vividas en las aulas han dejado en los estudiantes huellas marcadas, en quienes ahora son profesores con mucha inseguridad y miedo de participar en las clases o los seminarios. Además, se ha observado que sólo algunos profesores participan de forma voluntaria y algunos sólo participan si el facilitador pregunta.

> *Soy un docente con nueve años de experiencia en el área de matemáticas e imparto clases a grados de básica superior donde cada año para mí ha sido muy lindo y de mucho esfuerzo, porque en cada grado va quedando una historia. Pero no me siento un docente bien formado todavía me faltó mucho por aprender por eso estoy muy contento y agradecido a la UNAE por los seminarios de Ecología de Saberes (Informante n° 3).*

Los espacios generados para los diálogos han sido muy importantes para compartir sus percepciones y creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Además, todos manifestaron el deseo de cambiar y transformar su forma de enseñar desde la diversidad epistémica. A su vez, algunos docentes manifestaron, que nunca se imaginaron antes ser docente, y peor ser profesor de matemáticas.

> *Jamás imaginé ser maestra y peor de matemáticas. Sin embargo estoy dando o mejor de mi parte para mis estudiantes. Desde pequeña me gustaba jugar a las profesiones. Abogada, médico secretaría e incluso niñera, pero nunca docente. Pensaba que mi carácter no daba para esa profesión. Además, los comentarios de los docentes en ese tiempo era: ser maestro es muy fácil y no pagan bien. A medida que yo iba creciendo en edad y estatura, mi interés se fue hacia las computadoras. En aquellos años eran muy pocos los que podían comprar una computadora de mesa y no existían las portátiles. Mi papá con un poco de esfuerzo pudo comparar una computadora. Así yo podía estudiar informática y me matriculé en la carrera de informática y me gradué. Yo podía pasar horas frente a la computadora haciendo ejercicios de programación e incluso me gustaba ayudar a mis compañeras en la materia de programación y ellas me ayudaban en matemáticas. (...) Ahora comprendo por qué yo era buena en lógica y programación, pero pésima en matemáticas. Por el miedo que me infundieron mis maestros. Mis docentes tienen mucho que ver. Uno no podía preguntar en ese tiempo, porque el docente se molestaba y los compañeros se burlaban. Mi sueño era ser Ingeniera de Sistemas, pero terminé siendo maestra de matemáticas por causa del amor. (Informante n° 4).*

También es importante señalar, que para algunos profesores participantes del curso, las matemáticas siempre fueron sus asignaturas favoritas. Pero por motivos del contexto de la amazonia que fue abandonado por los por las autoridades nacionales y en consecuencia existe una dificultad de acceso a la educación superior en la región. Esta situación, es una limitante para

realizar los estudios y la formación formación anhelan y desea. Por ejemplo, uno de los participantes señala:

> *Las matemáticas siempre me han gustado. En la escuela no he tenido problemas con la matemática, porque me gustaba mucho. Hoy en día estoy enseñando matemáticas a mis estudiantes. Lo que he recibido en el colegio domino muy bien, pero hay temas nuevos que nunca lo recibí, estos temas son complicados en la enseñanza. (Informante n° 5).*

Las narraciones presentadas de los profesores participantes del curso de Ecología de Saberes, muestra la necesidad de formación y capacitación que tienen los docentes de la amazonía ecuatoriana. Además, ellos muestran un gran interés por curso de actualización y profundización en los conocimientos matemáticos, pedagógicos y tecnológicos.

Los particiapnte, después de haber realizado las reflexiones durante las clases presenciales y las lecturas de los artículos sobre la diversidad de concepciones y el díalogo de estos saberes, se siente motivados y conscientes de que también existen objetos y conceptos matemáticos en sus comunidades y su entorno que muchas veces no lo han visto o no lo han considerado como un saber matemático. Una de las actividades que ha generado un mayor interés en el asistentes, es la posiblidad de relacionar los conocimientos matemáticos con otras áreas del saber.

Al final del curso, han presentado algunos videos de sus experiencias en el aula, con sus estudiantes y se ha podido observar un interés y motivación porseguir buscando nuevas experiencias en su práctica pedagógica a través de la enseñanza y parendizaje de la matemática. La integración del contexto y la recuperación de los objetos y conceptos matemáticos de su comunidad.

Ellos son consciente del impacto que un maestro tiene en los estudiantes, y desean formarse y preparase para que puedan cambios profundos en las actitudes de sus estudiantes y la comunidad.

¿Qué hace grande a un maestro? La respuesta no es nítida ni se mide fácilmente con pruebas. Pero todos conocemos a un gran maestro cuando vemos uno. Los mejores maestros tienen una cosa que los diferencia de los demás. Es aparentemente intangible y no enseñable, ya que a menudo se dice que, "Algunas personas nacen para ser maestros".

Por lo tanto, la preparación del maestro eficiente y eficaz se basa en estándares para asegurar que todos los candidatos a maestros conozcan el contenido y tengan las habilidades necesarias para convertirse en buenos maestros. Las voces de maestros y sus reflexiones como estudiantes nos ayudan a desarrollar el lenguaje, construir un mapeo y las herramientas para examinar las experiencias pedagógicas en el contexto de la amazonía.

Además, nos permite visualizar el conocimiento práctico y pedagógico de los docentes desde sus prácticas prácticas pedagógicas y las motivaciones que que ellos tienen a pesar de las dificultades, están dispuestos trabajar en forma creativa y responsable y comprometida con su comunidad.

Podríamos analizar y sistematizar muchas prácticas exitosas de profesores que trabajan en la Amazonia, a pesar de las dificultades que presenta el contexto. Especialmente, los profesores que laboran en el sistema de educación denominado multigrado. Por ejemplo, una maestra relata, que después del curso de Ecología de Saberes. Ella había realizado la enseñanza de fracciones desde las matas de rosas. Los estudiantes contaron todas las matas de rosas y por colores, luego calcularon las proporciones por colores y estudiantes se motivaron con esta estrategia y muchos

querían seguir haciendo más matemática. Ella lamenta no haber grabado para mostrar las evidencias. Pero, la próxima vez la documentará para compartir con sus colegas.

Conclusiones

Lo interesante del curso Ecología de Saberes, fue la generación de espacios y tiempos para reflexionar sobre la educación, los conceptos sobre la escuela, sus prácticas y demás experiencias que hacen parte de las vidas de los docentes y los estudiantes de lo que compondría las diferentes comunidades de formación con las que se relaciona y forma parte el docente. En didáctica de la matemática se dedicó a las reflexiones de los profesores sobre su propia práctica en su contexto y las reflexiones sobre diferentes teorías o enfoques de la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Originalmente, fue propuesto como un Programa de Vinculación con la Colectividad y los Territorios de UNAE en la Amazonia. Sin embargo, a raíz de la experiencia vivida y la motivación al cambio de actitud en los participantes, se espera continuar y expandir a otras unidades educativas.

La didáctica de la matemática en la Ecología de Saberes se comprende como la dimensión en la que se construyen relaciones entre diferentes saberes matemáticos, con la intención de fortalecer la comprensión de la producción de conocimiento a partir de la relación entre enseñanza-aprendizaje-formación. Como ecología constituye un ambiente educativo en el que los saberes se promueven, desde la descripción, la explicación, la implicación, la complejidad, conformando un ecosistema educativo, que en este caso se propone desde la relación entre saberes y prácticas de enseñanza que constituyen los diferentes procesos de formación.

Referencias y bibliografía

Álvarez, F. (2016). Logros y desafíos de la UNAE. En *Educamos para el Buen Vivir*. Azogues: UNAE-EP

Bolívar, A. Domingo, J. y Fernández, M. (2001). *La investigación biográfica-narrativa en educación enfoque y metodología*. Aula Abierta. Madrid, España: La Muralla.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomathematics*. Netherlands: Sense Publishers.

D'Ambrosio, U. (2015). Traversing the Path of Mathematics Education in the Southern Americas. En H. Rosario, P. Scott y B Vogeli (Eds.), *Mathematics and Its Teaching in the Southern Americas*. Singapore: world Scientic Publishing.

Diez, E. y Díaz, J. M. (2018). Ecología de aprendizaje ubicuo para la ciberciudadanía crítica. *Revista científica de Educomunicación*, N° 52, Vol. 26, pp. 49-58. Disponible en www.revistacomunicar.com

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. Educational Studies in Mathematics, vol. 12 (2), pp. 133-150.

Guerrero, M. (2004). *Los dos Máximos Sistemas del Mundo. Las Matemáticas del Viejo y Nuevo Mundo*. Quito, Ecuador: Ediciones ABYA-YALA.

Pari, A. (2018). Una experiencia educativa de ducho en la Amazonia. En A. Sales y N Martins (orgs.), *Trabalho Didáctico: Trajectórias de Pesquisas*. Campo Grande, Brasil: Life Editora

Pérez, A. (2017). Modelo Pedagógico de la UNAE. *Illari: Revista de estudiantes que serán maestros.* No. 4, pp. 90-99.

Santos, B. (2012). De las dualidades a las ecologías. *Cuaderno de Trabajo N° 8*. La Paz, Bolivia: Red Boliviana de Mujeres Transformando la Economía.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Percepciones del profesorado sobre las TIC (GeoGebra) como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica

Abdón Pari Condori
Universidad Nacional de Educación
Ecuador
abdon.pari@unae.edu.ec
Roxana Auccahuallpa Fernández
Universidad Nacional de Educación
Ecuador
roxana.auccahuallpa@unae.edu.ec

Resumen

Esta comunicación es parte de una investigación en curso sobre la integración de GeoGebra como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica en el Ecuador. Se desarrolla a través de un curso piloto en la Amazonía, en particular en las zonas más vulnerables del país. El enfoque metodológico es mixto y los instrumentos son: cuestionario, entrevistas y actividades didácticas de manera virtual. La muestra está compuesta de 70 profesores (31 mujeres y 39 varones). Los resultados señalan que la edad promedio es de 48 años, el 75 % no han utilizado software antes del curso, pero destaca el interés generalizado por el uso de GeoGebra como recurso didáctico. No obstante, los participantes consideran que GeoGebra es un programa que puede ayudar a los estudiantes a comprender los objetos y conceptos matemáticos y permite al docente potenciar la productividad de conocimientos matemáticos.

Palabras clave: GeoGebra, enseñanza de matemática, formación docente y TIC.

Introducción

Los seminarios, cursos y eventos internacionales sobre el uso de TIC y GeoGebra constituyen una línea de investigación activa en el campo de la educación matemática, a pesar de que existen estudios sobre el uso de GeoGebra en el nivel secundario y superior, aún es escaso los estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para la Educación Básica. Los cursos de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica pretenden profundizar en el dominio tecnológico de GeoGebra de manera que sus participantes adquieran competencias en el empleo del programa a nivel avanzado. Actualicen sus conocimientos matemáticos con nuevas utilidades y potencialidades que el software libre de GeoGebra permite, así como la fundamentación didáctica, pedagógica y metodológica a través

del estudio y la investigación de la práctica en el aula con el uso del software.

Esta investigación sobre la integración de GeoGebra como recurso didáctico se desarrolla como parte del Grupo de Investigación Institucional EUREKA 4i y en conexión con el proyecto docente de innovación 2018/2019 desde el constructo del área de matemáticas de la carrera de Educación Básica de la Universidad Nacional de Educación de Ecuador. Además, el proyecto en curso realizado en la Amazonia con el apoyo del Ministerio de Educación y la Universidad Nacional de Educación tiene como objetivo aplicar la experiencia piloto para la capacitación de los docentes de matemáticas de todo el país.

Marco teórico

El uso de tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se configura como una línea actual de investigación. Este estudio planteamos desde la Génesis instrumental (Rabardel, 2001 y Artigue, 2002), como el proceso de transformación de un artefacto (GeoGebra) en un instrumento, es decir, la conjunción del artefacto y habilidades cognitivas para construirlo. En este sentido, la instrumentalización de GeoGebra ocurre cuando se le dota de potencialidades (actividades didácticas) y se le transforma para aplicaciones específicas como un recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este proceso el estudiante construye esquemas mentales, asimilando esquemas existentes o produciendo nuevos esquemas para llevar a cabo la actividad existente. Además, se distingue lo que es la instrumentalización e instrumentación:

Instrumentalización, son las características del Software que influye en las estrategias de resolución como en las concepciones del estudiante.
Instrumentalización, es el proceso en que cada estudiante de acuerdo con sus concepciones, formas de trabajar, conocimientos puestos en juego y actividades o problemas internaliza en el uso del artefacto.
Sin embargo, en la literatura disponible evidenciamos que existen diversos softwares de geometría dinámica, como por ejemplo Cabrí Géometre II (www.Cabri.com) y Cinderella (www.cinderella.de.) que facilitan la experimentación con Geometría Sintética (Irnzo y Fortuny, 2009). No obstante, para esta investigación escogemos trabajar con GeoGebra (www.geogebra.org) porque es un software de código abierto que integra de forma dinámica la representación gráfica con la expresión algebraica de los objetos gráficos (Hohenwarter y Preiner, 2007). Además, es fácil de aprender a manejar, es intuitivo y no requiere estrategias de uso avanzado para utilizarlo en la enseñanza de las matemáticas.

Por otro lado, para Area (2018), distintos estudios a nivel internacional han puesto en evidencia que uno de los factores clave y vitales del proceso de integración pedagógica y su uso educativo de las tecnologías digitales está vinculado con las creencias y perspectivas que tengan los profesores sobre dicho proceso (Area et al, 2018, p. 230). En esa perspectiva, las políticas educativas de inversión económica en la adquisición y dotación de infraestructuras y recursos tecnológicos a las unidades educativas son necesarias, pero insuficientes. Dado que, si esto no va acompañado paralelamente de una adecuada formación y capacitación que incida en un cambio de concepciones, opiniones y prácticas del profesorado, directivos y demás agentes de apoyo con relación al potencial de cambio e innovación educativa que conlleva la utilización de GeoGebra (Area, et al, 2018, Pari et al, 2018, Colás, De Pablos y Ballesta, 2018).

A pesar de que las investigaciones sobre las concepciones y creencias del profesorado sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje emergen a fines de los 80 e inicios de 90 del siglo pasado con los trabajos semilleros de Thompson (1992). Sin embargo, se requieren de mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ciencia que ha creado problemáticas en los aprendices a nivel educativo. Sin embargo, los estudios sobre las precepciones, creencias, opiniones, valoraciones y expectativas sobre las tecnologías y su integración en la enseñanza de las matemáticas son incipientes. Por ello, es una línea de vital importancia en el campo de la educación matemática desarrollar estrategias educativas en el uso de GeoGebra.

En este sentido, existe un consenso entre los investigadores de que la tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Hohenwarter y Lavicza, 2009, Area, 2018), porque los estudiantes pueden beneficiarse de diversas formas de integración de la tecnología, así como, en los entornos tecnológicos se proporciona nuevas oportunidades de aprendizaje que provee a los estudiantes de diferentes habilidades matemáticas y niveles de entendimiento y comprensión con base en la visualización y exploración de objetos y conceptos matemáticos en entornos de multimedia. Por ello, las tecnologías son herramientas que permiten a los docentes revolucionar los modelos pedagógicos e incursionar en nuevos paradigmas que propicien la anhelada formación de calidad y calidez.

En esa perspectiva, el Modelo Pedagógico de la Universidad Nacional de Educación se enmarca en el paradigma del Buen Vivir, que plantea un perfil de egreso del bachillerato justo, innovador y solidario. En este modelo el rol del profesor, debe ser un guía que motiva el uso eficiente y efectivo de las tecnologías, entre otras, asegurando y democratizando el acceso a la información de calidad que es compartida a través de diferentes medios.

Por otro lado, según Trouche (2002) la aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas, supone un problema de carácter didáctico acerca de transformar los artefactos en verdaderos instrumentos de actividad matemática y no como "recursos que resuelven y solucionan" problemas en el aprendizaje (Silva y Flores, 2017, p. 72).
En la misma línea, Barrera, Barahona y Vaca (2015) señalan que, las tecnologías son herramientas que permiten a los maestros revolucionar los modelos pedagógicos e incursionar en nuevos paradigmas que generen la anhelada formación de calidad. Este paradigma cambia el rol del profesor, motiva el uso eficiente de las tecnologías (Silva y Flores, 2017, p. 71)

Método

La investigación utiliza un enfoque mixto, es decir, el cuantitativo y cualitativo de manera complementario. Para el cuantitativo, de naturaleza descriptiva se ha empleado un cuestionario en línea de 27 ítems sobre las percepciones y el uso de las TIC y GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje, de los que se analizan 8 ítems para fines de esta comunicación. Para el cualitativo de naturaleza interpretativo se utilizó la observación y la entrevista y las preguntas abiertas del cuestionario que complementan a la parte cuantitativa.

Población y muestra

Según el observatorio de la Universidad Nacional de Educación en el Ecuador hay 163 999 docentes en el sector público, de los cuales 10000 son profesores de matemáticas. Sin embargo, el estudio considera los 90 profesores de matemáticas de la Amazonia (Quinindé y Esmeraldas)

convocados y seleccionados por el Ministerio de Educación que participan del curso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica. La muestra no es probabilística porque corresponde a los 70 profesores que respondieron al cuestionario en línea (31 mujeres y 39 varones).

Análisis de información

La información obtenida, fue procesada estadísticamente, con una estadística descriptiva de tendencia central y cuadros cruzados, conocidos como frecuencia y porcentajes, así como su representación gráfica, acompañados de sus análisis e interpretación.

Se presentan los resultados obtenidos sobre las percepciones, opiniones, valoraciones y expectativas sobre el uso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas de los profesores participantes del curso y que respondieron el cuestionario.

Resultados

El Ministerio de Educación de Ecuador para la selección de los profesores ha considerado como uno de los requisitos el nombramiento definitivo en el sistema educativo público con el propósito de asegurar la continuidad de los docentes en el proceso de enseñanza. Posiblemente, por esta condición varios docentes han quedado al margen de la convocatoria, especialmente aquellos que cuentan solo con el contrato temporal. En ese marco, la distribución de la edad de los profesores, presenta la edad promedio de 41 años con una desviación típica de 8.13 años. El rango de la distribución es 32, cuya edad mínima es de 24 y máxima de 56 años. La moda de la distribución es de 48 años y la mediana de 43. A continuación resumimos los estadísticos en la tabla 1.

Tabla 1

Distribución de la edad de los profesores participantes al curso de GeoGebra

Estadísticos	Valores
Mínimo	24
Cuartil1	25
Mediana	43
Cuartil 3	48
Máximo	56

Fuente propia: Encuesta privada, 2018.

Además, los resultados obtenidos se pueden presentar de forma visualizados a través del diagrama de caja y bigotes o Box-plot. Como se muestra en la figura siguiente:

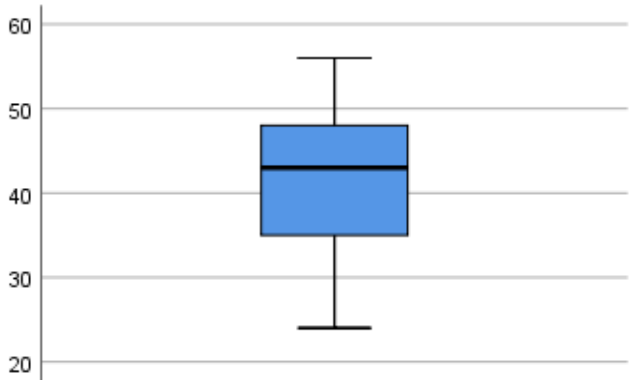


Figura 1: Diagrama de cajas de la edad de los profesores asistentes

A pesar de que GeoGebra cuenta con más de quince años desde que fue creado por Markus Hohenwarter en 2002 como parte de su tesis de maestría en Educación Matemática, esta ha ido creciendo de una manera muy acelerada tanto en su potencial, la incorporación y la adopción de usuarios en Europa, Estados Unidos y recientemente en América Latina. En cuanto al Ecuador, hace un año se creó el Instituto Ecuatoriano de GeoGebra con sede en la Universidad Nacional de Educación el 6 de febrero de 2018. Sin embargo, algunos profesores han estado utilizando de forma independiente y aislada, tal vez, hasta de forma un poco tímida y limitada. La información obtenida al respecto se ha resumido en la tabla 2.

Tabla 2

Distribución de profesores por sexo y su experiencia de uso de GeoGebra en el aula.

Sexo	**Ha utilizado GeoGebra en el aula antes del curso**					
	No		Si		Total	
	N°	%	N°	%	N°	%
Mujer	24	34.29	7	10.00	31	44.29
Hombre	28	40.00	11	15.71	39	55.71
Total	**52**	**74.29**	**18**	**25.71**	**70**	**100**

Fuente propia: Encuesta privada, 2018.

Aproximadamente, el 75% de los profesores participantes no habían utilizado GeoGebra antes de este curso y solo el 25% conocían o utilizaban GeoGebra para enseñar y aprender matemáticas. Incluso, a través de las observaciones de algunas presentaciones y visitas a instituciones se ha podido observar que algunos profesores utilizaban GeoGebra simplemente como una pizarra en la pantalla, no se aprovechaba las combinaciones dinámicas y creativas del software. En cuanto al género, el uso de TIC (GeoGebra) en ambos es escaso en la Amazonia del Ecuador. Y con respecto a los años de servicio en el magisterio se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 3

Distribución de profesores por años de experiencia y uso de GeoGebra en el aula

Años de Experiencia	Ha utilizado GeoGebra en el aula antes del curso					
	No		Si		Total	
	N°	%	N°	%	N°	%
Menor a 5 años	10	14.28	2	2.86	12	17.14
Entre 5 a 10 años	12	17.14	6	8.57	18	25.71
Entre 10 a 15 años	11	15.71	2	2.86	13	18.57
Mayores a 15 años	19	27.14	8	11.44	27	38.58
Total	52	74.27	18	25.73	70	100

Fuente propia: Encuesta privada, 2018.

Según los datos obtenidos del cuestionario en línea, los profesores con más años de experiencia también han incorporado el uso de GeoGebra y/o se han interesado en el curso de GeoGebra como recurso didáctico. Lo que contradice que los adultos mayores son más resistentes hacia las tecnologías de la información y la comunicación. Así, todos los participantes están desarrollando las actividades propuestas en el curso a través de retos de cada tema que provee el curso.

Por otra parte, las entrevistas a los participantes muestran que varios de ellos creen que GeoGebra les permite enseñar desde un enfoque constructivista y resolver problemas desde diferentes formas de representación. No cabe duda, si el estudiante comprende que existen diferentes formas de presentar un mismo objeto matemático y se le capacita a conectar o a transformar de una representación a otra, conseguirá un aprendizaje significativo.

Otra de las opiniones sobre el curso de GeoGebra destaca la forma de desempeño de los facilitadores: “los docentes que impartieron el taller muy dinámicos, ese es la manera de enseñar” (Anónimo, 2018). Mientras que, a otros, le impactó la parte dinámica de GeoGebra y el sin número de posibilidades del software y para otros la forma de proponer las actividades dinámicas de los docentes.

Sin embargo, en los trabajos presentados en la parte virtual se ha podido evidenciar que existe carencia de formación disciplinar rigurosa en algunos docentes de matemáticas. Algunos no logran distinguir entre una construcción que mantenga las condiciones y permita visualizar o inducir invariantes y el dibujo que realizar para hacer los objetos matemáticos. Así, por ejemplo, en una actividad que consistía en la construcción de un triángulo rectángulo, muchos profesores usaron la ventana gráfica de GeoGebra con la cuadrícula y dibujaron un triángulo rectángulo como se muestra en la figura 2.

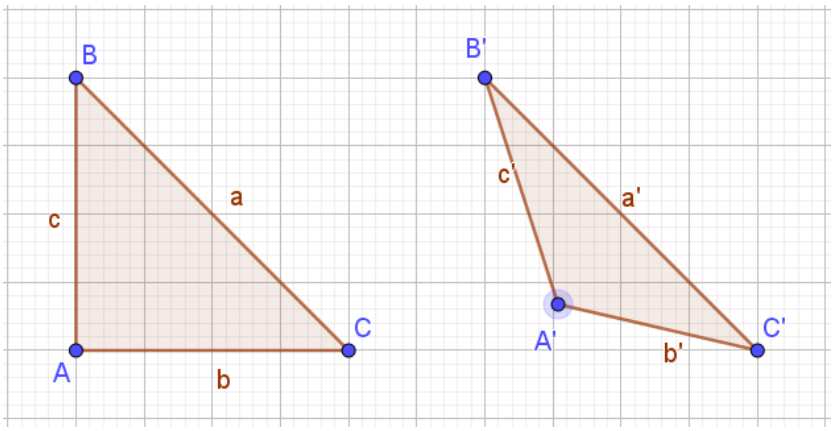


Figura 2. El triángulo rectángulo dibujado y no construido

El triángulo de la izquierda está dibujado como triángulo rectángulo, pero al mover el punto A se transforma en A' y deja de ser triángulo rectángulo. Varios docentes han cometido este tipo de errores en las actividades propuestas.

Otro de los errores más comunes, ha sido el trabajo con la circunferencia inscrita en un triángulo. Muchos, trazaron la circunferencia con centro en la intersección de las bisectrices (incentro) y han tomado como otro punto de la circunferencia el punto de intersección de una bisectriz con el lado opuesto del triángulo al vértice. Como se muestra en la figura 3.

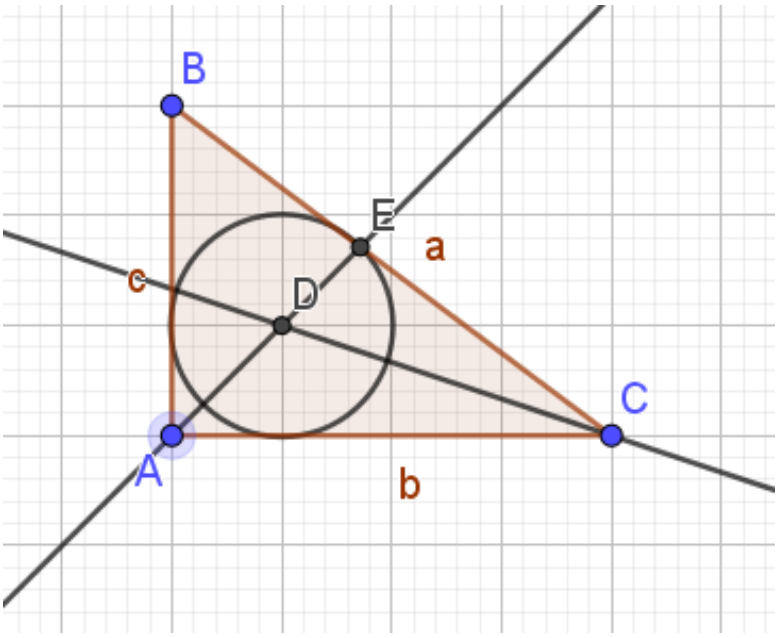


Figura 3. Construcción de la circunferencia inscrita

Según la gráfica parece estar inscrita la circunferencia, pero al mover uno de los vértices se observa que ya no está inscrita, como se observa en la figura 4.

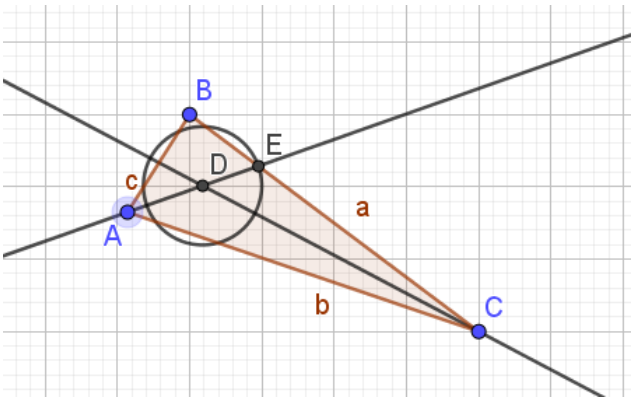


Figura 4. Circunferencia no inscrita

No cabe duda, de que una construcción fija como se hace en la pizarra que no tiene la parte del dinamismo de GeoGebra se suele cometer este tipo de errores. Esto fue uno de los errores más frecuentes reflejados en las construcciones de las actividades. Evidentemente, este hecho y otros en los docentes de la Amazonía han despertado el interés de aprender el uso tecnológico y didáctico de GeoGebra, para poder incorporar en su práctica docente. Además, ellos solicitan más actividades y encuentro de docentes y expertos en GeoGebra para conformar una comunidad de aprendizaje que antes no se vinculaba con zonas vulnerables y de escasos recursos tecnológicos.

Conclusiones

Como la investigación está en proceso de desarrollo lo que hemos presentado es una primera reflexión sobre cómo se realiza la incorporación de las TIC (GeoGebra) en el profesorado de la Amazonia que participa del curso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en Educación Básica. El grupo está compuesto de profesores de las Zona 1 y 2 de las 9 zonas educativas del país. Al comienzo del curso los profesores mostraban cierto temor y resistencia al uso de las TIC y en particular al uso de GeoGebra en el aula. Varios manifestaron que las unidades educativas donde laboran cuentan con laboratorios de informática y un profesor de computación. Además, el 75% de los asistentes no habían conocido o utilizado GeoGebra antes del curso. Sin embargo, los docentes muestran un interés generalizado en su formación continua y tienen la percepción o creencia de que las TIC en general y GeoGebra en particular es una herramienta poderosa para la innovación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Al finalizar el curso los participantes muestran una opinión positiva sobre el uso de las TIC, incluso varios solicitan continuar con más cursos sobre el uso de GeoGebra. Además, varios profesores han presentado como una actividad final la realización de un video de la clase donde se utiliza el software como un instrumento de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Estos datos e informaciones serán analizados y presentados por el grupo de investigación.

Referencias y bibliografía

Álvarez, F. (2016). Logros y desafíos de la UNAE. En *Educamos para el Buen Vivir*. Azogues: UNAE-EP

Area, M., Cepeda, O., y Feliciano, L. (2018). El uso Escolar de las TIC desde la visión del alumnado de Educación Primaria, ESO y Bachillerato. *Educación Siglo XXI, 36, 2*, 229-276

Area, M. y Sanabria, A. L. (2014). Opiniones, expectativas y valoración del profesorado participante en el Programa Escuela 2.0 en España. *Revista Educar, 50, 1*, 15-39. Doi: http://dx.doi.org/10.5565/rev/educar.64

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS enrironment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning, 7*, 245-274.

Colás, P., De Pablos, J. y Ballesta, J. (2018). Incidencia de las TIC en la enseñanza en el sistema educativo español: una revisión de investigación. RED. *Revista de Educación a Distancia, 56*, enero 2018. Disponible en http://www.um.es/ead/red/56/colas_et_al.pdf

De Pablos, J. (Coord.) (2015). *Los centros educativos ante el desafíos de las tecnologías digitales*. Madrid: La Muralla.

Domínguez, R., Chica, E. y Hernández; A. (2015). Valoración del uso de las tecnologías para el aprendizaje por alumnos de secundaria. Investigar con y para la sociedad, Actas del XVII Congreso Internacional AIDIPE, *3*, 1571-1580. Disponible en http://avanza.esaidipe2015/libro/volumen3.pdf

Hohenwarter, M. y Lavicza, Z. (2009). Introducing Dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of GeoGebra, of Computers in Mathematics.

Iranzo, N. y Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Enseñanza de Ciencias 27(3), 433-446. Disponible en https://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/142075/332857

Pérez, A. (2017). Modelo Pedagógico de la UNAE. *Illari: Revista de estudiantes que serán maestros.* No. 4, pp. 90-99.

Rabardel, P. y Bourmaud, G. (2003). From computer toinstrument system: A developmental perspective. *Interacting with Computers*, 15(5), 665-691.

Silva, M. y Flores, J. V. (2017). Génesis instrumental del circuncentro con el uso de GeoGebra. *Rev. Prod. Disc. Educ. Matem.*, Sao Paulo, 6(1), 70-84.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. 127-146.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico

Sandra Milena **Zapata**
Universidad de Antioquia
Colombia
sandra.zapata@udea.edu.co
Zaida Margot **Santa** Ramírez
Tecnológico de Antioquia
Colombia
zaida.santa@tdea.edu.co
Carlos Mario **Jaramillo** López
Universidad de Antioquia
Colombia
carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Resumen

El trabajo doctoral presenta elementos prácticos y teóricos que ponen de manifiesto la necesidad de fundamentar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la educación primaria, para que vincule-el pensamiento algebraico en su-práctica. En este escenario, la investigación pretende analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del álgebra temprana. El horizonte metodológico se enmarca en algunas concepciones del conocimiento profesional del profesor y su incidencia en las decisiones sobre la práctica para promover el pensamiento algebraico. El horizonte metodológico es de corte cualitativo y a través de la teoría fundamentada se busca proponer una postura explicativa para analizar la transformación del conocimiento del profesor. Mediante de tareas de formación se han logrado dilucidar algunos procesos que permiten un acercamiento a la formulación de dicha postura.

Palabras clave: álgebra temprana, conocimiento profesional, pensamiento algebraico, profesor de primaria, transformación del conocimiento.

Planteamiento del problema

El estudio doctoral se lleva a cabo a partir de un referente experiencial y uno teórico. El experiencial está asociado con el conocimiento de la enseñanza de una comunidad de profesores de primaria, en relación a sus posibilidades para desarrollar tareas de formación de carácter

algebraico y vincularlas en sus prácticas. El teórico está determinado, en primer lugar, por los problemas reportados en la literatura, que señalan la necesidad de algunos profesores de fundamentar su conocimiento profesional para promover el pensamiento algebraico de los estudiantes en la educación básica primaria; en segundo lugar, por la justificación y pertinencia de vincular la enseñanza del álgebra en niveles iniciales de escolaridad, proceso que es reconocido como álgebra temprana, y la inquietud acerca de cómo hacerlo. Es así como, diferentes investigaciones (Cai y Knuth, 2011) reconocen la importancia del trabajo algebraico en la educación básica primaria y la necesidad de identificar cómo se vincula con el pensamiento aritmético.

La experiencia profesional como generadora de objetos de investigación

Los trabajos realizados como investigadora y formadora de profesores, a través de programas de formación inicial, continuada, desarrollo profesional, diplomados y cursos de actualización, tanto en el municipio de Medellín como en regiones de Antioquia, me han permitido observar, reconocer y reflexionar respecto a inquietudes y necesidades asociadas con el conocimiento profesional de los profesores (Ponte, 2012); este se constituye en un objeto de análisis emergente en mi labor derivada de la interacción con los docentes, pues en el campo de la educación matemática es recurrente encontrar que los objetos de investigación se originan en la propia práctica profesional del investigador (Borba y Araújo, 2008).

En esta línea, las reflexiones logradas con los profesores dan cuenta de una preocupación que puede asociarse con el conocimiento de la enseñanza, referenciado por Ponte (2012) como conocimiento profesional del profesor. Este se enmarca en cuatro dimensiones, el conocimiento de las matemáticas, del currículo, de los estudiantes y de los procesos de trabajo en el aula. La manifestación de este conocimiento, en lo referido al pensamiento algebraico, me ha permitido reconocer que en los niveles de la educación básica primaria se develan inquietudes asociadas con la estructura de dicho pensamiento, su incursión en el currículo y las posibilidades para promoverlo en grados iniciales de escolaridad.

Dichas inquietudes, permiten que los profesores de la educación básica primaria con los que he interaccionado, reconozcan impedimentos frente al pensamiento algebraico; así, es una responsabilidad manifestada por ellos, la promoción del pensamiento algebraico. Al respecto, Vergel (2016) manifiesta que "una introducción progresiva al álgebra en la escuela primaria puede facilitar más adelante el acceso de los estudiantes a los conceptos algebraicos más avanzados" (p. 15). Es precisamente en el marco de la idea de enseñar tópicos de álgebra a los estudiantes de la educación básica primaria, que se propone el "Álgebra Temprana" ("Early Algebra") como una posibilidad de "integrar el pensamiento algebraico en todas las asignaturas de las matemáticas escolares" (Vergel, 2016, p. 12).

Acercamiento teórico a una interpretación de la naturaleza del problema

Con la intención de interpretar, a la luz de la teoría, los objetos de reflexión en mi práctica profesional, y que han suscitado mayores inquietudes en los profesores, inicié el estudio de algunas investigaciones (Kieran, 2004; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schlieman, 2007; Derry, Wilsman y Hackbarth, 2007), las cuales me permitieron comprender que el fenómeno estudiado tiene matices que pueden interpretarse en el marco del conocimiento profesional del profesor , asociado con el conocimiento de las matemáticas, el currículo, los estudiantes y los procesos de trabajo en el aula (Ponte, 2012).

En esta línea, autores como Koellner, Jacobs, Borko, Roberts y Schneider (2011) aluden a que mejorar el conocimiento profesional de los maestros sobre el álgebra y la enseñanza de la misma, es considerado un componente clave para apoyar el pensamiento algebraico de los estudiantes. En este sentido, Ponte (2014) percibe en esta `mejora` un desafío propio de los profesores e investigadores, en tanto que ellos deben fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación básica primaria.

Es así como, en términos de lo que el profesor sabe y cómo enseña lo que sabe, Ponte (2014) estima que la articulación entre el contenido matemático y el conocimiento pedagógico contribuye al desarrollo del conocimiento profesional y, para el caso del álgebra, este aspecto es particularmente importante debido a que su incursión implica cambios curriculares y en la práctica docente.

En la perspectiva anterior, Ball, Thames y Phelps (2008) argumentan la importancia y necesidad de que los profesores conozcan el tema que enseñan; es decir:

> […] no puede haber nada más fundamental para la competencia del maestro. La razón es simple: los maestros que no conocen bien un contenido no tienen probabilidades de tener el conocimiento que necesitan para ayudar a los estudiantes a aprender este contenido. (p. 404)

De lo anterior, se infiere que es necesario refinar el conocimiento matemático, referido al pensamiento algebraico de los profesores de primaria; de hecho, este refinamiento puede permitir reconocer formas de pensar y propiciar mejoras en la enseñanza.

Como se mencionó anteriormente, ha sido necesario buscar algunos referentes teóricos que posibiliten interpretar y fundamentar el problema dilucidado, puesto que las investigaciones referenciadas precisan la necesidad de lograr cambios en el conocimiento profesional de los profesores de primaria, con miras a que se vincule la enseñanza del álgebra en estos grados. Por lo tanto, el estudio procura responder la pregunta ¿cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del álgebra temprana? y tiene como objetivo analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del álgebra temprana.

Horizonte teórico

Para llevar a cabo la investigación, el horizonte teórico considera aquellos estudios enfocados en asuntos asociados con el conocimiento profesional, en relación a la incursión del álgebra temprana, los cuales permiten un acercamiento a la comprensión de la naturaleza del problema, en cuanto al tipo de conocimiento que debe exhibir un profesor para lograr promover el pensamiento algebraico entre sus estudiantes y lo que significa pensar algebraicamente.

Acercamiento a una postura teórica

El conocimiento profesional no es sinónimo de dominio de contenidos disciplinares, ni didácticos (Martínez, Rodríguez y Gómez, 2017); se trata más bien de un "conjunto de informaciones, habilidades y valores que los profesores poseen procedentes, tanto de su participación en procesos de formación (inicial y en ejercicio), cuanto del análisis de su experiencia práctica" (Montero, 2001, p. 202). Pero este conjunto de saberes debe ser rico y flexible, para fomentar la comprensión de los estudiantes y permitir al profesor comprender la naturaleza de la disciplina y la construcción de nuevos conocimientos, permeados por la experiencia, las interacciones con los pares y la práctica misma.

El conocimiento profesional no se vincula solamente con la capacidad para aprender de la participación en procesos formativos con objetivos y finalidades enmarcadas en la disciplina, la pedagogía o la didáctica (Prieto y Contreras, 2008), también podría ser un constructo susceptible de transformación a través de la investigación. Es por esto que, es reconocido como un campo complejo, en permanente construcción, en el que están presentes procesos progresivos y regresivos (Hernández y Pérez, 2017), flexibles y dinámicos, expuesto a los cambios de los contextos, de la cultura, de la sociedad, de la identidad del profesor, de la experiencia, de las prácticas mismas, de la reflexión y de la investigación, como elementos que a su vez podrían ser constitutivos del mismo conocimiento.

Referirse al conocimiento profesional del profesor, implica para muchos investigadores, clasificar los conocimientos que se circunscriben en la labor profesional y lograr una postura crítica e interpretativa sobre las prácticas de enseñanza; lo anterior permite "una mirada profesional" (Llinares, 2013) sobre las decisiones que se deben tomar frente a lo que los profesores saben y necesitan aprender en las distintas dimensiones de su conocimiento profesional.

Ponte (2012) manifiesta que el conocimiento se compone de cuatro dimensiones, las cuales, para la presente investigación, ofrecen la posibilidad de determinar una postura teórica frente al conocimiento profesional del profesor, gracias a las características que se explicitan a continuación. Para Ponte (2012), la primera dimensión está asociada con la disciplina y trasciende los conceptos y procedimientos fundamentales hasta las formas de representación; la segunda está determinada por el conocimiento de los estudiantes y de sus procesos de aprendizaje; la tercera se relaciona con el conocimiento del currículo e implica el reconocimiento de las finalidades y objetivos de la enseñanza de las matemáticas y la toma de decisiones para orientarla. Finalmente, la dimensión relativa a la práctica educativa, constituye un núcleo fundamental que incluye "planificaciones a largo o medio plazo, tales como el plan pensado para cada sesión de clase, la elaboración de las tareas a realizar, y todas aquellas cuestiones relativas a la conducción de la actividad en el aula de matemáticas" (p. 6).

A la luz de lo anterior, es posible inferir de la postura de Ponte (2012), algunos objetos de análisis, fundamentales para la investigación. Además, Las anteriores dimensiones son analizadas y descritas en detalle en el estudio, como categorías que se ponen de manifiesto con el conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Horizonte metodológico

La metodología propuesta tiene un enfoque cualitativo; en esta, a través de la teoría fundamentada, se busca elaborar una postura explicativa acerca del proceso de transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria, en el contexto del álgebra temprana; es por ello que se ponen en consideración el desarrollo de tareas de formación, las cuales constituyen una posibilidad para poner de manifiesto las distintas dimensiones del conocimiento profesional y propiciar datos que serán analizados e interpretados con miras a definir una perspectiva teórica sobre cómo este se transforma.

Enfoque de la investigación

La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, en el cual, tanto la indagación por las cualidades del objeto de estudio, como el análisis detallado de sus características y de las relaciones entre ellas, posibilitan la construcción de conocimiento. Para Hernández, Fernández y

Baptista (2014), "la acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien "circular" en el que la secuencia no siempre es la misma, pues varía con cada estudio" (p. 7); además, requiere un acercamiento a la particularidad de la realidad objeto de interpretación.

Diseño de la investigación

La elección del diseño de la investigación está determinada por las características del problema planteado. Si consideramos que este se enfoca en la transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria, entonces la teoría fundamentada ofrece posibilidades para elaborar una perspectiva teórica que permita explicar cómo ocurre este proceso; dicha explicación, según Hernández et al. (2014), está dotada de riqueza interpretativa y aporta nuevas visiones al fenómeno estudiado.

Teoría fundamentada. La teoría fundamentada fue definida por sus autores Barney Glaser y Anselm Strauss (1967, 2017) como una de las tradiciones de investigación cualitativa que permite formular una teoría subyacente en los datos obtenidos de la realidad investigada. Para Strauss y Corbin (1990):

> La teoría fundamentada es una teoría derivada inductivamente del estudio del fenómeno que representa. Es descubierta, desarrollada y provisoriamente verificada a través de la recolección y análisis sistemáticos de datos pertenecientes al fenómeno. Por lo tanto, la recolección de datos, el análisis y la teoría se hallan en una relación recíproca. Uno no comienza con una teoría y luego la prueba. Más bien se comienza con un área de estudio y se permite que emerja lo que es relevante para esa área. (p. 23)

Consecuentemente, la teoría fundamentada consiste en una codificación dada por el investigador a los sucesos, incidentes u ocurrencias expresados por entrevistados o situaciones observadas, para ser posteriormente agrupadas en categorías, conceptos o constructos. De este modo, utiliza procedimientos que, por inducción, generan explicaciones teóricas a un fenómeno estudiado; este proceso, para Vasilachis et al. (2006), permite en forma inductiva, "generar conceptos e interrelacionarlos, siguiendo un conjunto de rígidas y detalladas reglas formuladas por los autores" (p. 81).

Participantes

Para el desarrollo del trabajo de campo, se cuenta con la participación de tres profesores pertenecientes a instituciones educativas del departamento de Antioquia, quienes han decidido participar de manera activa y voluntaria en el desarrollo del estudio; por lo tanto, de manera conjunta, se ha convenido realizar reuniones periódicas quincenales, en las que se consolidarán espacios académicos a través del desarrollo de tareas de formación, definidas en la perspectiva de Ponte et al. (2009) como tareas profesionales.

Métodos de recolección y análisis de la información

El diseño de la teoría fundamentada sugiere el análisis y la interpretación de los datos desde el inicio de la recolección de los mismos. Para Vasilachis et al. (2006):

> […] recolección, grabado, transcripción, lectura, codificación –abierta, axial y selectiva–, memos, matrices y creación de la teoría incipiente, se darán en una secuencia ininterrumpida y recurrente, como un "zig-zag" (Creswell, 1998) desde los datos a las primeras reflexiones teóricas, hasta que finalice el trabajo de campo". (p. 89)

En consecuencia, es necesario destacar que el proceso de recolección y análisis ocurren prácticamente de manera paralela. De este modo, los episodios asociados con el conocimiento profesional, que se presenten en el desarrollo de las tareas de formación en el aula de clase y en los ambientes cotidianos de los profesores, ofrecen datos que generan categorías, los cuales deben ser analizados permanentemente en busca del establecimiento de relaciones y la selección de conceptos, que permitan fundamentar una postura teórica frente a la transformación de dicho conocimiento. La recolección de datos se realiza a través de herramientas como: observaciones, bitácoras de campo, entrevistas individuales y grupales, anotaciones de episodios registros en videos y audios.

Tareas de formación en el trabajo de campo. Las tareas de formación, que bien podrían referenciarse como tareas de aprendizaje profesional, "son tareas complejas que crean oportunidades para que los maestros reflexionen sobre los problemas pedagógicos y sus posibles soluciones a través de procesos de reflexión, intercambio de conocimientos y construcción de conocimiento" (Ponte et al., 2009, p. 193). En el estudio doctoral constituyen el motivo central de los encuentros con los profesores, dado que "estas tareas están en el centro de la formación de maestros de matemáticas y determinan lo que los maestros están aprendiendo, junto con varias formas de trabajo, dinámicas y contextos" (Ponte et al., 2009, p. 185).

A continuación, se presenta la estructura de una de las tareas de formación y posteriormente un análisis preliminar del desarrollo de la misma.

Tabla 4

Estructura de la tarea de formación titulada: reconocimiento de operaciones no convencionales y su incidencia en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Momento de la tarea	**Procesos**	**Componentes**
Exploración de operaciones no convencionales en conjuntos finitos	Abstracción Codificación Decodificación	Operaciones abstractas en conjuntos finitos. El sentido del signo igual (=). Operaciones referidas a acciones. Operaciones binarias. El sentido de la propiedad clausurativa en los conjuntos finitos.
Conceptualización a través de la representación de estructuras algebraicas finitas	Representación Abstracción Visualización Modelación Generalización	Representaciones de estructuras finitas en tablas. El sentido de la existencia de un elemento neutro en una estructura. El sentido de la existencia de un elemento inverso, para todo elemento de una estructura. Secuencias y patrones
Reflexión sobre la práctica: elaboración de propuestas para el aula	Representación Abstracción Visualización Modelación	Estructuras finitas para trabajar en el aula. Conjeturas sobre resultados en secuencias y patrones numéricos. Exploración del signo igual. Exploración de referentes curriculares.
Reflexiones del encuentro	Síntesis	Registro de reflexiones en instrumentos. Conversatorio. Elaboración de la bitácora reflexiva.

Fuente: elaboración propia. 2018.

La tarea se asocia con procesos de representación, abstracción y reconocimiento de una

estructura y sus propiedades. “La representación, está vinculada con otros procesos como simbolizar, codificar, decodificar, visualizar, modelar, y no se presenta de manera aislada, sino que habitualmente aparece junto con los procesos de abstraer, clasificar, sintetizar, conjeturar y generalizar” (Luque, Jiménez y Ángel, 2009). A partir de esta, se busca comprender la estructura mediante la abstracción de las propiedades que la caracterizan, con miras a lograr que los profesores piensen en relaciones y estructuras, que doten de sentido las propiedades que cumplen las operaciones y que no solo enfaticen en el componente algorítmico de estas.

Resultados preliminares

Las tareas de formación diseñadas se desarrollan en diferentes momentos, cabe mencionar que a partir de estas se ha logrado identificar un ´estado inicial´ del conocimiento profesional de los profesores, develado a través de sus reflexiones y el registro en diferentes instrumentos. Dado que el trabajo está en curso, se presentan unas familias de códigos preliminares que han sido objeto de análisis y que permiten puntualizar algunos resultados parciales.

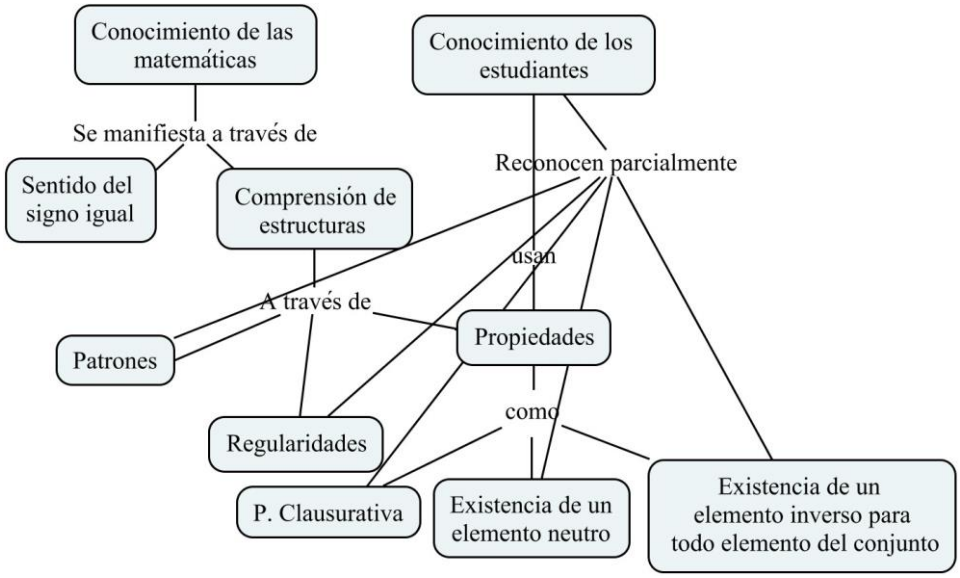


Figura 1. Familia de códigos emergentes a partir de la tarea de formación.

El análisis de algunas familias de códigos emergentes, posibilita precisar resultados parciales que dan cuenta de que los profesores empiezan a evidenciar cambios, a reconocer que la abstracción de regularidades, patrones y propiedades en una operación binaria permite comprender una estructura y dotar de sentido sus propiedades. Este reconocimiento pone de manifiesto indicios de una transformación en su conocimiento de las matemáticas. En consecuencia, el estudio pretende registrar y analizar episodios que lleven a un proceso de codificación, que inicialmente es abierto, pero facilita el establecimiento de relaciones para la elaboración de una codificación axial y selectiva (Strauss y Corbin, 2002), que permita, además, mediante un proceso analítico, la definición de una postura teórica que busca dar respuesta a la pregunta de investigación. Por lo pronto, es posible afirmar que una tarea de formación en la que emergen reflexiones, tanto de carácter metodológico, didáctico y pedagógico como de la disciplina y la práctica, puede constituir un elemento fundamental a la luz del marco de la transformación del conocimiento del profesor.

Referencias y bibliografía

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, 389-407.

Borba, M., y Araújo, J. (2008). Construyendo investigaciones colectivamente en educación matemática. En M. Borba, J. Araújo, D. Fiorentini, A. Marafioti, y M. Viggiani, *Investigación cualitativa en educación matemática* (p. 110). México: Limusa.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives.* Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Carraher, D., y Schlieman, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. L. Jr., *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, págs. 669-706). NCTM, NC. Recuperado el Abril de 2017, de https://goo.gl/cf1G4u

Derry, S., Wilsman, M., y Hackbarth, A. (2007). Using contrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 305-329.

Glaser, B., y Strauss, A. (1967). *Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research.* New York: Aldine de Gruyter.

Glaser, B., y Strauss, A. (2017). *Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research.* New York: Routledge.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 26*(42B), 483-511.

Hernández, B., y Pérez, L. (2017). Conocimiento profesional de profesores en ejercicio al abordar cuestiones sociocientíficas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación.* México: McGraw Hill.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Koellner, K., Jacobs, J., Borko, H., Roberts, S., y Schneider, C. (2011). Professional development to support students' algebraic reasoning: An example from the Problem-Solving Cycle Model. En *Early Algebraization* (pp. 429-452).

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista,* (50), 117–133. https://doi.org/10.1590/S0104-40602013000400009

Luque, C., Jiménez, H., y Ángel, J. (2009). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: representar estructuras algebraicas finitas y enumerables.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Martínez, M., Rodríguez, I., y Gómez, P. (2017). La resolución de problemas profesionales como referente para la formación inicial del profesorado de física y química. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 14*(1).

Montero, L. (2001). *La construcción del conocimiento profesional docente.* Rosario (Argentina): Homo Sapiens.

Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas, *Crítica y Práctica de la Educación Matemática* (págs. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. (2014). Articulação entre pedagogia e conteúdo na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência em Álgebra. En N. Branco, y J. Ponte, *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (p. 377).

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., y Chapman, O. (2009). Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in. (R. Even, y D. Ball , Edits.) *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, 185 - 209. doi:10.1007/978-0-387-09601-8 17

Prieto, M., y Contreras, G. (2008). Las concepciones que orientan las prácticas evaluativas de los profesores: un problema a develar. *Estudios pedagógicos (Valdivia), 34*(2), 245-262.

Strauss, A., y Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: grounded theory - procedures and techniques.* California: Sage Publication.

Strauss, A., y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* (2da Edición ed.). Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Vasilachis de Gialdino, I., Ameigeiras, A., Chernobilsky, L., Giménez, V., Mallimaci, F., Mendizábal, N., . . . Soneira, A. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa.* Barcelona: Gedisa.

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A formação de professores de Matemática da Educação Superior em Comunidades de Prática Online e a construção do TPACK: Algumas Reflexões

Andriceli **Richit**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
andricelirichit@gmail.com
Rosana Giaretta Sguerra **Miskulin**
Universidade Estadual Paulista – *Campus* Rio Claro
Brasil
misk@rc.unesp.br

Resumo

O presente artigo, recorte de uma pesquisa de doutorado, discute alguns aspectos subjacentes à Formação de Professores de Matemática da Educação Superior no que tange a construção do TPACK *(*Mishra; Koehler, 2006) em uma comunidade de prática online (Wenger, 2001). Seguindo uma abordagem qualitativa de pesquisa engajamos professores de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria e Álgebra Linear, em um Curso de Extensão Online (Plataforma Moodle) que articulou as referidas disciplinas a questões de cunho pedagógico e tecnológico (software GeoGebra). A análise segue alguns elementos da Análise de Conteúdo (Bardin, 1977). Os resultados denotam a constituição e consolidação de uma comunidade de prática online ancorada na colaboração e indicam que os docentes vêem sua participação neste processo impulsionada pela troca e compartilhamento sendo este um fator relevante para a construção do TPACK de modo a integrar as Tecnologias Digitais em suas práticas pedagógicas.

Palavras Chave: formação de professores, matemática, educação superior, comunidades de prática, TPACK

Introdução

Apresentamos, neste artigo, uma discussão voltada à Formação do Professor de Matemática da Educação Superior no que diz respeito ao conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo – TPACK *(*Mishra; Koehler, 2006). As compreensões aqui apresentadas estão ancoradas em perspectivas da formação do docente universitário discutidas por Zabalza (2004) e Almeida (2012) e de comunidades de prática (Wenger, 2001). Para tanto, o presente

texto, assim está estruturado: primeiramente, apresentamos algumas características da pesquisa. Em um segundo momento, discutimos a formação do professor da Educação Superior. Na sequência, apresentamos a processualidade metodológica e encerrando o texto, apresentamos algumas compreensões acerca do estudo desenvolvido.

A construção do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo em comunidades de prática: possibilidades para à formação do professor de Matemática da Educação Superior

A docência na Educação Superior se inscreve em um cenário, cuja tessitura evidencia possibilidades e necessidades advindas do movimento de inserção das Tecnologias Digitais. Embora existam investimentos em aparatos tecnológicos, a aquisição e incorporação de tecnologias não se articulou às mudanças estruturais relacionadas aos processos de ensino, propostas curriculares e, tampouco, na formação dos professores universitários.

Nessa perspectiva, ao olharmos para a formação de professores de Matemática da Educação Superior, um processo formativo particular, corroboramos a Almeida (2012) que este requer a "[…] mobilização das compreensões e dos saberes teóricos e práticos capazes de propiciar o desenvolvimento das bases para que os professores compreendam e investiguem sua própria atividade e, a partir dela, constituam os seus saberes, num processo contínuo (p. 75)". Ademais, contextualizar a formação do professor da Educação Superior é de extrema importância no sentido de que a formação deva estar relacionada às situações reais que este enfrenta no âmbito da sala de aula, requer conhecimentos e habilidades bastante específicos e "[...] fortalece-os como sujeitos capazes de discutir, analisar e reconfigurar a própria prática (Almeida, 2012, p. 75-76)". No que tange a formação, acrescentamos ainda, fundamentadas em Zabalza (2004) que as universidades devem propor formação que seja interessante por si mesmas e que simultaneamente tragam vantagens aos docentes e que os cursos "[…] nos permitam melhorar como docentes e estar em condições mais favoráveis para ajudar os alunos" (p. 151). Além disso, no bojo dessa formação deve estar presente a compreensão de como os alunos aprendem, de modo a facilitar, orientar e melhorar, os processos de aprendizagem.

Pautadas em Almeida (2012), acreditamos em uma formação que tenha a prática pedagógica, a ação de ensinar e as perspectivas teóricas como objeto de análise, trazendo aos docentes elementos que possibilitem modificar suas atuações no campo específico e a desenvolver a atitude de pesquisar também no movimento de aprender, com as tecnologias.

Neto, Pêssoa e Mendes (2014) enfatizam que a integração das tecnologias digitais na Educação Superior constituem um processo de inovação tecnológica, possibilitando flexibilizar tempos e espaços de sala de aula presencial de forma integrada, bem como criar "[...] espaços de interação e comunicação que fomentam a partilha de experiências, o pensamento crítico, o trabalho colaborativo e a criatividade (p. 35)". Ademais, uma forma coerente de pensar a articulação entre tecnologia e ensino produz uma transformação na prática pedagógica dos professores e em seus processos de formação.

Nesse sentido, pensar o ensino de Matemática em nível universitário caracteriza-se como um processo complexo que demanda vários tipos de conhecimento. Assim, atuar neste nível de ensino requer muito mais do que saber Matemática (Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Álgebra Linear, etc.). A este respeito, Carlos, Pombo e Loureiro (2014) ressaltam que "as relações entre o conteúdo (o assunto atual que deve ser aprendido e ensinado), pedagogia (o processo e a prática ou métodos de ensino e aprendizagem) e tecnologia (ambos comuns, como quadro negros, e avançadas, tais como computadores digitais) são complexas (p. 1025)". Sobre

isso, acrescentam ainda que "[...] a qualidade do ensino requer o desenvolvimento de uma compreensão diferenciada das complexas relações entre tecnologia, conteúdo e pedagogia, no sentido de se desenvolverem estratégias específicas para um certo contexto de ensino (p. 95)".

Considerando então, os conhecimentos pedagógicos, de conteúdo e tecnológico, Mishra e Koehler (2006) propuseram um referencial teórico ao qual denominaram de conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo – TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge). Este referencial teórico representa, entre outros fatores, o que os professores necessitam saber sobre a tecnologia para ensinar pedagogicamente os conteúdos. Assim, em um contexto atual, a tecnologia constitui um dos conhecimentos relativos à formação do professor. Transcendendo a proposição de Shulman (1986) que considerava inicialmente o conhecimento do conteúdo como salutar para a formação do professor, e recentemente passou a considerar também as práticas de sala de aula – conhecimento pedagógico, Mishra e Koehler (2006) reconhecem uma terceira dimensão, o conhecimento tecnológico, sendo os três conhecimentos articulados e inter-relacionados.

Mishra e Koehler (2006) pontuam que os conhecimentos integrantes do TPACK podem ser vistos separadamente: conhecimento pedagógico (PK), conhecimento tecnológico (TK), conhecimento de conteúdo (CK) e ainda observá-los em pares: conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK), conhecimento tecnológico do conteúdo (TCK), conhecimento pedagógico da tecnologia (TPK), e para os três tomados em conjunto: conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo (TPACK), semelhante ao movimento feito por Shulman, quando analisou a relação entre pedagogia e conteúdo e rotulou conhecimento pedagógico do conteúdo - CPK.

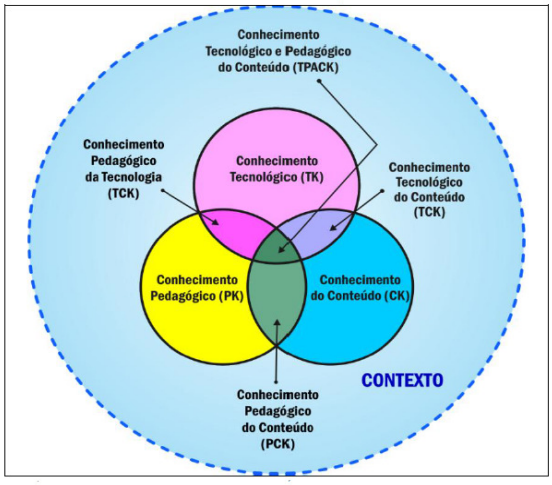


Figura 1. Quadro TPACK.

O TPACK relaciona-se a um conhecimento que vai além dos três componentes (conteúdo, pedagogia e tecnologia). Ele envolve a compreensão das inter-relações dos três e caminha para o entendimento da complexidade que envolve as relações entre estudantes, docentes, conteúdos, práticas e tecnologias. Pensar a conexão da tecnologia ao currículo requer necessariamente que se valorize o TPACK no âmbito da formação do professor. Nesse sentido, o desenvolvimento do TPACK possibilita aos docentes conforme Coutinho (2011) "[...] uma compreensão das técnicas pedagógicas que possibilitam que as tecnologias sejam usadas para a construção do saber por parte do aluno e não apenas como um apoio para ensinar (p. 4)".

Ademais, integrar de fato as tecnologias no âmbito educacional suscita a constituição de comunidades de professores que incentivam o (re) pensar, re (criar), comunicar, interagir e intervir em distintas situações práticas e que partilhem e compartilhem informações e experiências pedagógicas, de conteúdo e tecnológicas (Wilson, 2008). Para Wilson (2008), embora os professores aprendem com sua prática, dificilmente integrarão em seu fazer pedagógico as tecnologias digitais sem uma comunidade profissional que o apoie. A referência Baldini (2014) ancorada em Coutinho (2011) diz que pouco se sabe sobre os conhecimentos que um professor necessita para inserir as tecnologias na sala de aula. Para Baldini (2014, p. 52) "[...] a importância de pesquisas que evidenciem tais conhecimentos, que organizem e/ou descrevam modelos de formação em TDIC capazes de desenvolver atitudes positivas e competências de utilização das tecnologias como ferramentas cognitivas nos processos didáticos".

Considerando o exposto, nosso argumento principal está assente na ideia de que a formação do professor da Educação Superior configura-se num elemento emergente das práticas em que estão imersos e das quais participam e que reunidos em um grupo partilhando experiências sobre a prática pedagógica e interagindo possam desenvolver o TPACK.

Assim como preconizam Lave e Wenger (1991), assumimos a perspectiva de que as aprendizagens são elementos integrantes das práticas sociais, ou seja, a aprendizagem pode resultar da participação em comunidades de prática. Portanto, com o intuito de investigar e compreender dimensões do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo de professores de Matemática da Educação Superior, constituímos um espaço, via plataforma online configurando uma Comunidade de Prática Online. De acordo com Wenger (2009) comunidade de prática é "[...] um grupo de pessoas que compartilham uma preocupação ou uma paixão por algo que elas fazem, e aprendem como fazê-lo melhor conforme elas interagem regularmente" (p. 02). Reconhecemos o potencial das comunidades de prática para a Formação do Professor de Matemática da Educação Superior, pois conforme preconizam Carlos, Pombo e Loureiro (2014, p.582) estas "[...] contribuem para diminuir o isolamento, aumentar o compromisso com a missão e os objetivos da escola, contribuir para um melhor acesso a informação, bem como para a renovação profissional, facilitando uma mudança significativa nas suas práticas no sentido da inovação nas estratégias de ensino e aprendizagem".

Características metodológicas da investigação

O recorte de pesquisa apresentado segue os pressupostos da pesquisa qualitativa. O contexto prático-investigativo foi um Curso de Extensão *Online* que abrangeu 16 encontros e foi viabilizado pela Plataforma Moodle. Compreendeu três módulos: Articulação das Tecnologias Digitais aos Processos de Ensino-Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria e Álgebra Linear e fomentou a discussão em torno da inserção, apropriação e utilização das Tecnologias Digitais no contexto das práticas pedagógicas dos professores da Educação Superior bem como trouxe subsídios relacionados a manipulação do software GeoGebra através da discussão e elaboração de roteiros de atividades de alguns conceitos pilares destas disciplinas.

Os dados constituídos ao longo do Curso de Extensão, compõem o que chamamos de *corpus* da pesquisa e representa "Uma coleção finita de materiais (textos, imagens ou sons) determinada de antemão pelo analista, com inevitável arbitrariedade, e com a qual se irá trabalhar (p. 44)" conforme as perspectivas de Bauer e Aarts (2002). Assim, na Figura 2 apresentamos os elementos constituintes do *corpus* da pesquisa:



Figura 2. Corpus da Pesquisa

Buscando compreender *elementos do conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo em um processo formativo de professores de Matemática da Educação Superior no contexto de uma comunidade de prática online*, tomamos alguns elementos da Análise de Conteúdo de acordo com Bardin (1977), para orientar a análise dos dados. Entretanto, apresentamos aqui apenas algumas reflexões parciais.

Análise dos dados: algumas considerações

Em sua gênese, o Curso de Extensão *Online* com vistas à Formação do Professor de Matemática da Educação Superior, foi planejado e desenvolvido na busca de promover a atualização de práticas pedagógicas e metodológicas dos docentes e mobilizá-los a integrar as tecnologias digitais nos processos de ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria e Álgebra Linear. Da análise do *corpus* da pesquisa, muitos elementos foram evidenciados. Entretanto, devido ao pequeno espaço, aqui apresentamos apenas alguns deles. As falas dos professores trouxeram muitas evidências. Uma delas diz respeito à *relação de experiências em sala de aula com leituras realizadas* no âmbito do Curso. Sobre isto, os docentes destacam que:

Acredito que encontrei e compartilhei histórias que são comuns e desafiadoras em sala de aula. Os fóruns de discussão após as leituras foram muito proveitosos, além do mais discutimos com pessoas que pensam constantemente na realidade da sala de aula que encontramos no Brasil. A leitura de ótimos textos permitiu ampliar minha visão sobre o assunto envolvendo as tecnologias para o ensino de assuntos ligados à matemática (Professor RS – Ficha de Avaliação).

Esse estudo chega em momento oportuno, estou repensando minha prática pedagógica no ensino de Geometria Analítica a distância (UAB/UNEMAT-Física) e efetuando estudo particular em Álgebra Linear, disciplina que ministro (Professor ES – Resenha Encontro 13).

Por outro lado, a literatura usada, especialmente a tese da Karrer foi muito instrutiva para mim sobre as dificuldades que podem surgir no ensino das transformações lineares quando estamos a usar um software dinâmico. Foi instrutiva também na qualidade da informação produzida, as interpretações que os alunos foram dando à medida que iam resolvendo as questões. A Álgebra linear é uma disciplina desafiadora e que foi tema de estudo no terceiro módulo no curso. As leituras realizadas nessa etapa do curso conduziram reflexões importantes sobre o tema. Os autores

estudados refletem que muitas vezes os alunos executam algoritmos sem compreender os conceitos envolvidos no processo. […] (Professor PM – Memorial Reflexivo).

A partir dos excertos, inferimos que os professores do Curso de Extensão estavam construindo conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo ao engajaram-se nas discussões por meio de relacionamentos e interações, sendo este engajamento fundamental para a aprendizagem segundo Wenger (1998). Ademais, compreendemos que o contato dos professores com perspectivas teóricas propiciou a construção da TPACK, uma vez que repensaram suas salas de aula pela perspectiva das tecnologias. Um outro elemento ficou evidente durante o Curso – *a colaboração.*

Tenho lido várias pesquisas [...]. Acredito que este tipo de pesquisa poderá contribuir muito com a formação dos formadores de professores. Andrade (2010) afirma que a maioria dos livros prioriza o tratamento de um mesmo registro, apenas algébrico, e subutilizam atividades de conversão entre eles. Neste sentido, foi muito interessante entrar em contato com o livro de Lay, sugerido por um dos colegas durante o chat. Se for ministrar essa disciplina, certamente será um material de estudos para mim, que buscarei trabalhar nesta perspectiva da conversão entre registros, a qual, acredito, é essencial para a compreensão do aluno. A leitura despertou meu interesse por materiais e propostas assim, no ensino superior, e, durante o ENEM, em Curitiba, me vi mais uma vez buscando um minicurso que focava justamente o uso das tecnologias e da visualização no ensino de conteúdos do nível superior. Fui fazer o minicurso do professor, João Bosco Laudares (Minicurso: -1140- - **"TRABALHANDO COM PLANOS, CILINDROS E QUÁDRICAS NO WINPLOT").** (Professora EM – Resenha Encontro13).

Os comentários sublinhados evidenciam que a docente encontra-se em um movimento de construção do TPACK, ao refletir sobre modos de se trabalhar conteúdos de Matemática da Educação Superior, transpondo o nível apenas do conhecimento do conteúdo (CK) ou do conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK), considerando a colaboração entre os participantes do Curso de Extensão. Ademais, a participação da docente no Curso *Online*, engajada num processo de diálogo, permitiu que a aprendizagem acontecesse com a troca de experiência (Wenger, 2001). Outro aspecto identificado diz da *Criação de representações adequadas para os conceitos.* As falas apresentadas na sequência evidenciam o exposto:

Por exemplo, com relação à atividade sobre vetores, relativas ao 15º encontro, apesar de saber que um mesmo vetor possui diversas representações, o significado geométrico disso não era tão claro para mim. Ao lidar com a soma de vetores no GeoGebra e verificar que o vetor resultante aparecia na origem, não era óbvio, para mim, como interpretar geometricamente esse resultado. Senti-me instigada a transportar os vetores que havia construído, formando o paralelogramo para verificar que aquele vetor resultante tinha algo a ver com a ideia que eu havia construído intuitivamente. Isso me fez pensar em qual seria a reação do aluno que não soubesse a regra do paralelogramo e a descobrisse fazendo tentativas. Realmente, mesmo com as limitações da visualização, poder explorar ideias geométricas relacionadas aos vetores, dá muito mais sentido ao estudo da AL. (Professora EM – Memorial Reflexivo)

17:52 AS: Vivenciei algo semelhante ontem...: em uma atividade do Excel pedi aos alunos que calculassem pares ordenados de uma função dada e, ao final traçassem o gráfico da função e houve unanimidade em produzir os gráficos sem se preocuparem como eles realmente são. Aí fui a lousa mostrei como seria o comportamento do gráfico....
17:53 Pesquisadora: Como assim AS?
17:53 AS: Ficaram surpresos e eu disse se a função é assim o gráfico se comporta assim...
17:54 Pesquisadora: Mas então eles fizeram o gráfico errado?
17:54 Pesquisadora: Foi isso?
17:54 EM: Mas da forma como você conduziu a atividade eles não conseguiriam perceber por si só?
17:54 AS: se eles fizerem (3,7) (-1,3) (2,6) o Excel não irá produzir o gráfico de dispersão (x,y) da reta y=x+4
17:55 AS: exatamente EM... ou seja, a ideia de gráfico de funções não está formalizada para eles... (Chat 13 - 26/06/2013)

Observa-se, que as discussões dos professores no *Chat* e em outras fontes de registro, mostram o repensar de suas práticas, considerando as potencialidades das tecnologias digitais para a *criação de representações adequadas para os conceitos.* Também, evidenciaram que trabalhar na perspectiva de atividades exploratório-investigativas com tecnologias leva os alunos a compreensão de ideias matemáticas e os mobilizam a utilizar distintos procedimentos que não são tão usuais e comuns no âmbito das salas de aula, visto que o importante na atual conjuntura, é o modo como os conceitos são apreendidos e entendidos, e "organizados e integrados em um conjunto significativo de conhecimentos e habilidades novas (Zabalza, 2004, p. 157)".

Considerações Finais

No decorrer deste artigo, discutimos o processo de Formação de Professores da Educação Superior, dizendo da necessidade de espaços formativos que tomem recursos da Internet para sua viabilização bem como da incorporação de recursos tecnológicos no âmbito das salas de aula da Educação Superior, por meio do desenvolvimento do TPACK dos professores. As considerações apresentadas, não tem a pretensão de imediatizar respostas, mas de gerar reflexões e questionamentos outros no tocante a processos formativos de professores de Matemática da Educação Superior, em especial, professores de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria e Álgebra Linear. Assim, considerando problemas e perspectivas da própria prática pedagógica de docentes desta área da Matemática, podemos desconstruir e reconstruir dialogicamente práticas pedagógicas, saberes específicos e ações próprias de situações de sala de aula, na perspectiva de uma necessidade formativa deste docente, por meio das *comunidades de prática online*.

Ademais, vemos nas *comunidades de prática* potencialidades que permitem compartilhar experiências e conhecimentos e discutir modos de motivar os alunos, ensinar-lhes a trabalhar em grupo ou ampliar a dinâmica das aulas. Estes espaços compartilhados caracterizam-se como formativos os quais tem sido potencializados pela *Internet*. Igualmente, a emergência de formas *online* de comunicação "incentivam discussões desinibidas" de acordo com Castells (2006) e reúnem pessoas ao redor de valores e interesses comuns culminando na geração da virtualidade, a qual pode ser entendida como um espaço formativo. E, assim surgem as comunidades de prática *online*, comunidades propícias e necessárias quando se fala de formação de professores da Educação Superior, os quais encontram-se distantes de centros urbanos e, consequentemente, distantes de universidades que oferecem formação.

Referências

Almeida, M.I. (2012). Formação do Professor do Ensino Superior: desafios e políticas institucionais. São Paulo: Cortez.

Baldini, L. A. (2014). Elementos de uma Comunidade de Prática que permitem o Desenvolvimento Profissional de Professores e Futuros Professores de Matemática na utilização do Software GeoGebra. Doutoramento em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Paraná, Brasil.

Bardin, L. (1977). Análise de Conteúdo. Lisboa: Edições 70.

Bauer, M. W. & Aarts, B. (2002). A construção do corpus: um princípio para a coleta de dados qualitativos. In: Bauer, M. & Gaskell, G. (org.). Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som. Petrópolis: Vozes.

Carlos, V. & Pombo, L & Loureiro, M. J. (2014). Desenvolvimento Profissional Docente e comunidades online: Conceção de uma Oficina de Formação no EduLab do AEGN (projeto AGIRE). In: Miranda, G. L, Monteiro, M. E. & Brás. P. (Orgs.), *Atas do III Congresso Internacional das TIC na Educação* (pp. 578-589). Lisboa. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Castells, M. (2006). A Sociedade em Rede. São Paulo, SP: Paz e Terra.

Coutinho, C. P. (2011). TPACK: Em Busca de um Referencial Teórico para a Formação de Professores em Tecnologia Educativa. Revista Paidéi@. UNIMES VIRTUAL, 2 (4). Disponível em: <http://revistapaideia.unimesvirtual.com.br>. Acesso em 12/02/2015.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation. Cambridge: Cambridge University Press.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. Teachers College Record, 108(6), 1017-1054.

Neto, J. & Pessôa, T. & Mendes, A. J. (2014). Sala de professores Online. Reflexões em torno de uma estratégia de formação de professores universitários. In Flores, M. A. & Coutinho, C. (Orgs). Formação e Trabalho Docente: Diversidade e Convergências (pp. 61-72).Portugal. De Facto Editores.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15 (2), 4-14.

Wenger, E. (1998). Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad. Barcelona:
Paidós.

Wenger, E. (2001). Comunidades de Prática: Aprendizaje, significado e identidad – cognición e desarrollo humano. Barcelona: Paidós.

Wenger, E. (2009). Communities of Practice: a few frequently asked questions. Disponível em: < http://www.ewenger.com/theory>. Acesso em 12/02/2015.

Wilson, P. S. (2008). Teacher Education: a conduct to the classroom. In: Heid, M. Kathleen e Blume, Glendon W. (orgs). Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: cases, and Perspectives. 2. Pennsylvania State University.

Zabalza, M.A.A. (2004). O ensino universitário: seu cenário e seus protagonistas. Porto Alegre: Artmed.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Produção do Conhecimento em Pesquisas sobre a Formação de Professores; Publicadas no VI SIPEM

Sibeli Mallmann **Pacheco**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel
Brasil
sibelimallmann@hotmail.com

Gabriele de Sousa Lins **Mutti**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel
Brasil
gabi_mutti@hotmail.com

Tiago Emanuel **Klüber**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel
Brasil
tiagokluber@gmail.com

Resumo

A pesquisa sobre a formação do professor é uma das vertentes que mais vem sendo discutida no campo da Educação Matemática. Visando lançar um olhar sobre a produção do conhecimento nas pesquisas sobre a formação de professores publicada no VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM (2015) interrogamos: O que se mostra da produção do conhecimento em pesquisas sobre a formação de professores publicadas no VI SIPEM? estabelecendo uma abordagem qualitativa, segundo uma perspectiva fenomenológica. Foram considerados no estudo 15 trabalhos apresentados no Grupo de Trabalho de Formação de Professores e os resultados revelaram ser que essa é uma área múltipla, pode-se solicitar diferentes modos de se interrogar e de produzir pesquisa.

Palavras- chave: Formação de Profesores, Produção do Conhecimento, Educação Matemática, Pesquisa Qualitativa, Fenomenologia.

Introdução

Ao longo da história da Filosofia e da Ciência diferentes estudiosos empenharam-se em buscar compreender filosófica e epistemologicamente como se dá a produção do conhecimento científico; Hessen (1980) foi um deles. Referindo-se a origem do conhecimento Hessen (1980, p. 31) menciona que ela "pode ter tanto um sentido *psicológico* como um sentido *lógico*" uma vez que aquele que concebe o pensamento humano como pautado na razão admite o pensamento como psicologicamente independente diferente daquele que o concebe como pautado na

experiência.

Dizer da produção do conhecimento, entretanto, implica, inicialmente, dizer do conhecimento. França (1994, p. 140) diz que a atividade de conhecer "ultrapassa o mero 'dar-se conta de', e significa a apreensão, a interpretação. Conhecer supõe […] o uso de instrumentos de apreensão; um trabalho de debruçar-se sobre […] O conhecimento produz, assim, modelos de apreensão - que por sua vez vão instruir conhecimentos futuros".

A produção do conhecimento emerge da relação estabelecida entre sujeito e objeto. Hessen (1980, p. 26) diz que "a função do sujeito consiste em apreender o objeto, a do objeto em ser apreendido pelo sujeito". No entanto, há diferentes respostas para o modo como essa relação se estabelece, sendo assim, é necessário explicitar distintas compreensões sobre aquilo se entende a essência do conhecimento[1].

Referindo-se à produção do conhecimento no contexto educacional Lima, Faria e Toschi (2014, p. 386) são taxativos ao dizer "todo esse processo histórico da produção do conhecimento, contextualizando com a história da pesquisa educacional reflete no processo e nas formas de se fazer ciência e, consequentemente, na produção do conhecimento científico em Educação".

Alinhado a eles Monteiro (2000, p. 12, inserção nossa) diz que "[acha] difícil sustentar a ideia (sic) de que a constituição do modo de ser docente, a pesquisa e a produção do conhecimento sejam conceitos que operem separadamente um do outro".

Levando em consideração o que foi dito por Lima, Faria e Toschi (1994) e Monteiro (2000) e a nossa atuação como docentes da Educação Básica e membros de um grupo de Formação Continuada[2], voltamos nossa atenção para a Formação de Professores, tomada como objeto de estudo de inúmeras pesquisas no contexto da Educação Matemática (Fiorentini, 2012); (Nacarato, Oliveira e Fernandes, 2017) e campo ao qual temos nos dedicado a estudar desde o ingresso no mestrado.

Voltamo-nos especificamente para os trabalhos apresentados no grupo de trabalho sobre a formação de professores do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), interrogando: *O que se mostra da produção do conhecimento das pesquisas sobre a formação de professores publicadas no VI SIPEM?* procurando mapear o *que* e *como* estão sendo elaboradas as pesquisas e *quais caminhos* os pesquisadores estão buscando para compreender esse processo da produção do conhecimento.

Sendo assim, este trabalho traz uma abordagem buscando compreender o processo da produção do conhecimento. Apresenta a trajetória da investigação e os trabalhos analisados. Na sequência descreve as categorias que foram analisadas e interpretadas faz uma síntese compreensiva e desenvolve considerações sobre as análises apresentadas.

Visando esclarecer ao leitor o caminho que percorremos durante a realização dessa investigação, explicitaremos, no próximo subtítulo, a trajetória de pesquisa que foi orientada pela interrogação supracitada.

Trajetória investigação percorrida

[1] Para Hessen (1980, p. 87) a *essência do conhecimento* "é o resultado da relação entre o sujeito e o objeto. A questão relativa ao conhecimento pode ter uma resposta pré-metafísica e metafísica".

[2] A Formação Continuada de professores em Modelagem Matemática na Educação Matemática está vinculada a Universidade Estadual do Oeste do Paraná e ocorre, no município de Foz do Iguaçu, Brasil.

Na investigação científica é pertinente que sejam expostos os procedimentos de pesquisa delineados de modo a buscar conferir-lhe graus de confiança, Bicudo (2011). Alinhados a esse entendimento damos o primeiro passo em direção a essa explicitação esclarecendo que adotamos a pesquisa como qualitativa segundo a perspectiva fenomenológica.

Adotar a perspectiva fenomenológica significa não deixar-se conduzir por referenciais teóricos prévios e tampouco estabelecer hipóteses a priori e sim "[...] trabalhar com sentidos e significados que não se dão em si, [mas que] vão se constituindo e se mostrando em diferentes modos, [...] olhar na temporalidade histórica, de suas durações e respectivas expressões mediadas pelas linguagem e por ela transportadas" (Bicudo, 2011, p. 41).

Assumindo essa postura de investigação e compreendendo que a assumir implica em ser orientado por uma interrogação, a saber: *o que se mostra da produção do conhecimento em pesquisas sobre a formação de professores publicadas no VI SIPEM?* dirigimos nossa atenção para os artigos sobre formação de professores publicados no sétimo grupo de trabalho (GT7), do VI SIPEM.

O nosso interesse em nos voltarmo-nos especificamente para a formação de professores advém do fato de atuarmos como professores da Educação Básica, por estarmos inseridos no contexto de um grupo de pesquisa em cujas discussões e investigações têm tomado a formação de professores como foco e, notadamente, por concordarmos com Oliveira, D' Ambrósio e Grando (2015) quando destacam a relevância do desenvolvimento de pesquisas sobre a formação de professores no campo da Educação Matemática.

Para além disso, a escolha pelo Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) em sua última edição, se deve ao fato de esse evento se "mostrar como uma das atividades mais importantes da SBEM ao possibilitar que a produção brasileira seja mais conhecida [...] por promover o intercâmbio entre os grupos que, em diferentes países, se dedicam às pesquisas na área da Educação Matemática" (Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018, p.1).

Buscando compreender o que se mostra da produção do conhecimento em pesquisas sobre formação de professores publicadas no VI SIPEM fizemos o levantamento dos artigos do GT7. Desse levantamento emergiu um quantitativo de 15 artigos[3], os quais apresentamos no tabela 1:

Tabela 1

Artigos do GT7 publicados no VI SIPEM

Cód.	Título do artigo	Autores
A1	A formação de professores dos anos iniciais em um curso de pedagogia: Contribuições das disciplinas de matemática	Reginaldo F. Carneiro
A2	A Pesquisa com e pelas Professoras que Ensinam Matemática	Adair M. Nacarato, Regina C. Grando
A3	Aprendizagens a Respeito do Raciocínio Proporcional em uma Comunidade de Prática de Professores Matemática	Laís M. C. P. Oliveira, Márcia C. T. Cyrino
A4	Conhecimentos Matemáticos dos Professores e o	Alessandro J. Ribeiro, Felipe A.

[3] Consideramos para essa pesquisa apenas os artigos que estavam disponíveis no sítio do VI SIPEM. Ressaltamos, entretanto, que alguns dos trabalhos do G7 não estavam disponíveis para *download*.

	Ensino de Equações: Uma Investigação Acerca do Planejamento de Aulas para a Educação Básica	P. V. S. Vasconcelos
A5	Das Negatividades Usuais da Formação às Práticas Diferenciadas: Análise de Narrativas de Professoras que Ensinam Matemática	Viviane C. da Silva
A6	Desenvolvimento da Identidade Profissional de Professores em Comunidades de Prática: Elementos da Prática	Márcia C. C. T. Cyrino
A7	Efeitos que Induzem e Produzem uma Ferramenta Pedagógica na Formação de uma Professora e de seus Alunos	Deise M. X. B. Souza, Marcio A. da Silva, Dilza Côco, Sandra A. F. da Silva
A8	Estágio Supervisionado e Aprendizagem da Docência: Ações e Reflexões de Licenciandos de	Dilza Côco, Sandra
A9	Formação Continuada e Professores da Escola Básica: Movimentos de Parceria Universidade-Escola	Ieda M. Giongo, Marcia J. H. Rehfeldt, Teresinha Quartieri, Maria M. da Silva, Wellington L.
A10	Formação de Professores que Ensinam Matemática: O Estágio Supervisionado como um dos Espaços de Constituição da Práxis Docente	Cedro
A11	Formação Inicial/Continuada de Professores dos Anos Iniciais: Tecnologias Informáticas e Matemática	Cármen L. B. Passos, Ana Paula G. de Souza
A12	História do Conceito culturalmente significada e a Organização da Atividade de Ensino de Matemática	Vanessa D. M., Luis Radford
A13	Interações Entre os Integrantes da Universidade-Escola em um Projeto Colaborativo	Juliana F. S. Pardim, Patrícia S. Pereira
A14	Matemática Elementar e Investigação De Conceito: Estabelecendo Relações	Victor Girald, Letícia Rangel, Wellerson Q., Diego Matos
A15	Desafio a ser vencido: o desencanto dos egressos com a profissão e a escassez de Professores de Matemática	Lélia de Oliveira Cruz, Arno Bayer

Fonte: Os autores

Orientados por nossa interrogação de pesquisa buscamos ler na íntegra um por um dos artigos levantados. Fizemos isso, vez após vez, com o auxílio do *software*[4] Atlas.ti, que é uma ferramenta que agiliza o trabalho realizado pelo pesquisador (Klüber, 2014).

Essa leitura atenta permitiu que destacássemos dos artigos trechos que se mostravam convergentes a nossa interrogação. Esses trechos foram expressos por nós visando o estabelecimento de unidades de significado. As unidades de significado são: "uma primeira redução, *epoché* efetuada sobre os significados que emergiram do diálogo entre a questão estabelecida e os textos interrogados" (Klüber, 2014, p. 13). As unidades de significado estabelecidas foram então exaustivamente consideradas e essa consideração permitiu que encontrássemos convergências entre elas levando ao estabelecimento das seguintes categorias: *1) Sobre os focos, objetivos e sujeitos das pesquisas; 2) Sobre o tipo de pesquisa e 3) Sobre a Produção e Análise dos dados*.

As categorias constituídas foram descritas na perspectiva fenomenológica de investigação

[4] Possuímos a licença para a utilização do *software*.

que visa apenas expressar, sem inferências ou extrapolações, aquilo que emerge do sentido que entrelaça as unidades de significado que constituem as categorias, portanto, sem empreender sobre elas interpretações ou preenchimentos "[...] confluências que poderiam ser estabelecidas entre as asserções presentes" (Mutti, 2016, p. 50) intencionando construir "grandes categorias ou Núcleos de Ideias" (Bicudo & Klüber, 2011, p. 5).

O passo seguinte envolveu a busca pela explicitação dos sentidos do que se mostrou do fenômeno "produção do conhecimento nas pesquisas sobre formação de professores". Para tanto, envolvemo-nos no movimento hermenêutico de compreensão, no qual as compreensões primeiras articuladas vão dando origem a novas compreensões e interpretações (Bicudo, 2011).

As compreensões que se explicitaram desse movimento evidenciaremos no próximo subtítulo.

Categorias constituídas: descrição e compreensões

Nesse subtítulo apresentaremos o que se mostrou das categorias constituídas nessa investigação, bem como as compreensões que se explicitaram do movimento fenomenológico hermenêutico de interpretação que empreendemos.

A categoria C1 intitulada *Sobre os focos, objetivos e sujeitos das pesquisas*, é constituída de 45 unidades de significado que estão associadas aos documentos primários, que são os arquivos que contêm o texto, imagem, áudio, mapas e / ou vídeo a ser analisado. A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15. No que diz respeito aos focos das pesquisas, as unidades mostram que eles incidem sobre a formação inicial e continuada de professores e os próprios professores, suas experiências e o modo como ensinam. Sobre os objetivos as unidades explicitam: 1) busca pela compreensão dos recursos tecnológicos para aprender e ensinar a matemática; 2) a investigação na própria prática; 3) conhecer os modelos de formação; 4) busca de metodologias novas para motivação e que valorizem o conhecimento proveniente da relação entre professores e alunos; 5) a filogênese e a ontogênese na organização do ensino. Já no que concerne aos sujeitos às unidades mostram ser os professores dos anos iniciais, geralmente licenciados de pedagogia, mas também licenciando de matemática e alunos do ciclo de alfabetização.

A categoria C2 intitulada *Sobre o tipo de pesquisa*, é constituída de 7 unidades de significado que estão associadas aos documentos primários A1, A4, A6, A8, A13. As unidades de significado pertencentes a essa categoria mencionam que as pesquisas consideradas como sendo qualitativas, cujos métodos escolhidos são a abordagem de investigação documental, a pesquisa com intervenção e análises de narrativas escritas, numa perspectiva teórico interpretativa baseada em pressupostos de pesquisa colaborativa.

A categoria C3 intitulada *Sobre a Produção e analise dos dados* é constituída de 47 unidades de significado que estão associadas aos documentos primários A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15. As unidades de significado pertencentes a essa categoria relatam que a produção dos dados da pesquisa ocorreu de diversas maneiras: 1) leitura de atas de colação de grau e questionários respondidos pelos alunos egressos; 2) gravações em áudio e vídeo dos encontros dos grupos pesquisados e 3) entrevistas narrativas dos sujeitos, demonstrando os dados empíricos através da experiência em sala de aula e registros reflexivos. As unidades mostram também pesquisas teórico-metodológicas que possibilitaram um modo singular de produzir e constituir pesquisa na contemporaneidade, articulando metodologias de

pesquisas pós-modernas, teóricos da avaliação e análise do discurso.

Quanto à análise dos dados os autores se voltaram para os escritos dos licenciandos dos cursos de pedagogia e de matemática, identificando aprendizagens dos participantes. Os dados são analisados através de narrativas dos estudantes, outros indicam vivências dialógicas, alguns utilizaram legenda para facilitar a interpretação dos dados, foram analisados também dados empíricos e vindos da natureza.

Síntese Compreensiva

Ao analisarmos o que se mostra das unidades que dizem sobre os *focos, objetivos e sujeitos* da pesquisa nos trabalhos sobre formação de professores, publicados no VI SIPEM vemos que, predominantemente, os focos e objetivos da pesquisa acabam se voltando para à formação de professores e aos próprios professores e as relações que constituem com outros professores e com seus alunos. Há um cuidado de compreender como ocorre o processo de aprendizagem da matemática e de buscar por instrumentos que possam aprimorá-lo.

Quando consideramos esses aspectos vemos que diferentemente do modo como o Movimento da Matemática Moderna "pretendia solucionar os problemas do ensino e da aprendizagem da Matemática por meio de uma visão internalista" (Klüber & Burak, 2008, p. 1), vinculada "a um projeto maior [...] *racionalista*, [...] [fundamentado] numa concepção estrutural - formalista com supremacia nas estruturas algébricas e na linguagem formal da Matemática" (Flores, 2007, p.52) que, como tal modo, entendia que "um conhecimento só merece na realidade este nome quando é logicamente necessário e universalmente válido" (Hessen, 1980, p.60) as categorias indicam uma preocupação que parece ir além das questões estritamente matemáticas, lançando olhares para *o professor, o aluno e modo como se dá a aprendizagem da Matemática*.

Parece haver, portanto, uma preocupação alinhada àquela instaurada pelo Movimento da Educação Matemática, no sentido de "considerar outros aspectos envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, aspectos como, por exemplo, a capacidade cognitiva do sujeito que aprende, a sua cultura, os fatores sociais e econômicos, a língua materna e outros" (Burak & Klüber, 2008, p. 2).

Para, além disso, quando as categorias mostram *os focos e objetivos* das pesquisas vinculados aos *professores, alunos*, ao modo *como ensinam e aprendem* e *as relações que estabelecem nesse processo*, elas explicitam uma compreensão do sujeito como aquele que "coloca-se simultaneamente em relação com o outro, com o contexto e consigo mesmo, em um processo que favorece a compreensão dos eventos vividos e a construção de conhecimentos e significados acerca de suas experiências" (Araújo, Oliveira & Rossato, 2018, p. 4). Vê-se que parece haver, do ponto de vista da pesquisa, um distanciamento da perspectiva positivista do *sujeito cartesiano*[5] e o reconhecimento dele como ser "complexo, concebido como múltiplo, descentrado e em desenvolvimento dialógico" (Araújo, Oliveira & Rossato, 2018, p. 4), evidenciando, de certo modo, a iniciativa de superar uma concepção idealista do sujeito, como aquele que determina o objeto e valorizando uma compreensão do conhecimento como resultado da relação dialógica estabelecida entre professores e alunos.

Ao analisarmos o que se mostra das unidades que dizem sobre *o tipo de pesquisa* nos trabalhos considerados, vemos que eles explicitam em *sua totalidade*, a opção pela *pesquisa qualitativa*, que segundo Bicudo (2012, p.17) "[...] busca é pela qualidade, tomada como já dada

[5] Sujeito entendido como fonte absoluta de conhecimento e verdade (Descartes, 1993).

e pertinente ao objeto. É como se a qualidade fosse do objeto e se mostrasse passível de ser observada". Seguindo a ideia a mesma autora, Bicudo (2011, p. 14) diz que "o qualitativo da pesquisa informa que se está buscando trabalhar com qualidade dos dados à espera de análise". Isso expressa que não se tem por objetivo apenas o quantitativo, os números, a razão. Já é uma compreensão de conhecimento na pesquisa que diferente de alguns autores que, conforme Hessen (1980, p. 60), entendiam como o "[...] verdadeiro conhecimento, [...] o racionalismo". Em suma, há uma visão historicista em Bombassaro (1992) do conhecimento permeando as investigações sobre formação de professores.

Ao analisarmos o que se mostra das unidades que dizem da *produção e análise dos dados* nos trabalhos sobre formação de professores, publicados no VI SIPEM um dos aspectos que se destacam é a valorização de instrumentos de produção de dados *empíricos*. Isso pode revelar, dentre outras coisas, indicativos do modo como os autores dos trabalhos analisados entendem que se dá produção do conhecimento. Parece haver uma compreensão de que a produção do conhecimento está predominantemente, pautada na *experiência*. Sobre a compreensão *empirista* da origem do conhecimento Hessen (1980, p. 68) menciona que o "[...] espírito humano está por natureza vazio; é uma tábua rasa, [...] todos os nossos conceitos, incluindo os mais gerais e abstratos, procedem da experiência".

Embora o tema de fundo dessas pesquisas seja a "*Formação de professores*" as unidades mostram que existe um leque de opções quanto ao modo como esses autores estão constituindo a pesquisa. Não se produz pesquisa sobre formação de professores, a partir desses textos, de modo hegemônico. Severino (2007, p. 9) diz que "pesquisas na área das ciências humanas, [...] e da educação em particular, envolvem-se necessariamente com essas perspectivas epistemológicas, vinculando-se a diferentes paradigmas".Isso certifica o desafio de se fazer pesquisa na área de educação, por não ser uma área dura e sim uma área múltipla, talvez justifique o fato das unidades de significado evidenciarem uma variedade de tipos de pesquisa. Por tratar-se de uma área múltipla, as pesquisas educacionais podem solicitar diferentes modos de interrogar, constituir e analisar dados. Severino (2007) diz que o conhecimento e sua área não podem ser tratados como produto, como algo acabado.

Sobre *a análise dos dados*, explicitamos que são baseados em *referencial teórico prévio* e para analisar os dados coletados e eles foram analisados através de repertórios compartilhados e discussões de práticas. Como na produção dos dados, explicitamos que os dados são empíricos e condizem provenientes da experiência. Segundo Hessen (1980, p. 68) "não há qualquer patrimônio *a priori* da razão. [...] A qual o espírito humano está por natureza vazio; uma tábua rasa [...] onde a experiência escreve". Parece haver uma tradição no contexto das pesquisas, notadamente, as educacionais, no sentido de tomar a adoção de referenciais teóricos prévios como um critério que atesta a seriedade e validade da pesquisa.

Considerações

Ao interrogarmos: O que se mostra da produção do conhecimento em pesquisas sobre a formação de professores publicadas no VI SIPEM? vimos as pesquisas acabam voltando-se para conhecer a formação de professores, o próprio professor e a relação entre professores, alunos e a Matemática. Há um cuidado de compreender como ocorre o processo da aprendizagem, da assimilação dos conteúdos da matemática e a busca por instrumentos que possam aprimorá-lo. Elas tomam o sujeito não como fonte absoluta de verdade. Valorizam, por outro lado, a compreensão de que a produção do conhecimento se dá de forma dialógica, situada e histórica.

A opção, unânime, nos trabalhos pela pesquisa qualitativa parece mostrar indicativos de um *distanciamento* do entendimento de que a origem do conhecimento se dá exclusivamente na razão destacando a valorização de aspectos que extrapolam aquilo que pode ser expresso em uma análise quantitativa como o sujeito (o professor) e sua subjetividade. Por fim, os indicativos do modo como os autores dos trabalhos analisados entendem que se dá produção do conhecimento e acaba por mostrar que por ser essa área múltipla, pode-se solicitar diferentes modos de se interrogar e de produzir pesquisa.

Referências

Araújo, C. M. de, Oliveira, M. C. S. L. de, & Rossato, M. (2016.) O *Sujeito na Pesquisa Qualitativa: Desafios da Investigação dos Processos de Desenvolvimento*. Psic.: Teor. e Pesq., Brasília, Vol. 33, 1-7.

Bombassaro, L. C. (1992) *As Fronterias da Epistemologia: uma introdução ao problema da racionalidade e da historicidade do conhecimento*. Petrópolis, RJ: Vozes.

Bicudo, M. A. V.(2011) Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica. São Paulo: Cortez.

Bicudo, M. A. V. (2012) A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. R. B. E. C. T., vol 5, núm. 2, mai-ago.

Bicudo, M. A. V & Klüber, T. E. (2011) *Pesquisa em modelagem matemática no Brasil: a caminho de uma metacompreensão*. Cadernos de Pesquisa, v. 41, n. 144, 904-927.

Burak, D. & Klüber, T. E. (2008) *Educação Matemática: contribuições para a compreensão da sua natureza*. Acta Scientiae Canoas v. 10 2. 93-106 jul./dez.

Cruz, L. de O. (2016.) *Professor de Matemática: Expectativas do Licenciando e o Processo de Formação*. XII ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática. - São Paulo.

Fiorentini, D. (2012) A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. Revista de Educação PUC-Campinas, n. 18.

França, V. R. V. (1994). *Teoria(s) da comunicação: busca de identidade e de caminhos*. Rev. Esc. Biblioteconomia UFMG, Belo Horizonte, v. 23, n. 2: 138-152.

Hessen, J. (1980) *A Origem do Conhecimen*to. In: HESSEN, J. Teoria do Conhecimento. 7 ed. Coimbra/ Portugual; Armênio Amado. Cap. I. 37-57.

Klüber, T. E. (2014*) Atlas.ti como instrumento de análise me pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica*. ETD- Educação Temática Digital, Campinas - SP, v. 16, n.1, 5-23, jan.

Monteiro, S.B.(2000) Pesquisa e produção de conhecimento na formação de professores. Revista de Educação Pública, Cuiabá: EdUFMT, v. 9, n. 15, 71-86,.

Mutti, G. S. L.(2016) Práticas Pedagógicas da Educação Básica num Contexto de Formação Continuada em Modelagem Matemática na Educação Matemática. 2016. 236f. Dissertação– Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu..

Nacarato, A. M.; Oliveira, A. M. P. & Fernandes, D. N. (2017) Histórias da formação e de professores que ensinam Matemática: possíveis aproximações teórico-metodológicas. Zetetike, v. 25, n. 1, p. 46-74.

Severino, A. J. (2007) *A pesquisa na pós-graduação em educação*. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v.1, no. 1, 31-49, set.

Sociedade Brasileira De Educação Matemática (Brasília) (2018) (Org.). Histórico SIPEM. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/grupo-de-trabalho/historico-sipem>.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Reconceptualización de la geometría escolar como medio para la profesionalización docente en matemáticas de educación básica

Karla **Gómez** Osalde
Facultad de Matemática, Universidad Autónoma de Yucatán
México
karla.gomez@correo.uady.mx
Leslie **Torres** Burgos
Facultad de Matemática, Universidad Autónoma de Yucatán
México
leslie.torres@correo.uady.mx

Resumen

Se plantea una propuesta para la profesionalización docente en matemáticas (PDM), particularmente en educación básica (12-16 años de edad). La propuesta consiste en favorecer espacios de reconceptualización de saberes escolares y las prácticas educativas como medio para el cuestionamiento y reconstrucción colectiva de los conocimientos y significados de saberes escolares y disciplinares. En particular, se estudia el papel de los procesos de reconceptualización geométrica y su relación con el grado de conciencia del docente sobre los alcances y limitaciones de su práctica para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial en sus estudiantes. Las experiencias obtenidas hasta el momento, indican que la reconceptualización didáctica de saberes geométricos favorecen aspectos de la práctica docente como la ampliación de los conocimientos geométricos, el reconocimiento de formas didácticas alternativas orientadas al desarrollo del pensamiento geométrico, como referente para diseñar actividades en dicha dirección, así como en el incremento de la autonomía respecto a su práctica.

Palabras clave: reconceptualización de las matemáticas, profesionalización docente en matemáticas, pensamiento geométrico espacial.

Introducción

En las últimas décadas, las crecientes demandas hacia la docencia en matemáticas para favorecer la mejora educativa en el área en los distintos niveles educativos, ha orillado a posicionar la actividad docente en el ámbito de la profesionalización. Ejemplo de ello se

evidencia en el desarrollo del trabajo investigativo sobre el tema en el seno de la Matemática Educativa, el cual ha transitado de un plano individual sobre el docente de matemáticas y derivó hacia un plano colectivo, enfocándose en la docencia en matemáticas como campo profesional.

Ciertamente, en la década de los años ochenta prevalecía el interés por el estudio de la práctica educativa a partir de las caracterizaciones y relaciones entre las creencias, concepciones y representaciones de los docentes, tanto respecto a su conocimiento matemático y didáctico, así como sobre la manera en que éstos determinan su comportamiento, conocimiento, habilidades y decisiones del aula (Thompson, 1992; Pajares, 1992; Contreras, 1998). En un sentido estricto, esta perspectiva obvia el papel del saber matemático y las relaciones complejas que surgen al relacionarse con los actores didácticos en un aula de clase.

En consecuencia, el estudio de los procesos de formación y desarrollo profesional docente en matemáticas se posiciona en el tipo de conocimientos del profesor de matemáticas, en palabras más específicas, se precisa sobre el tipo de conocimiento pedagógico del contenido en la formación de profesores y el conocimiento del contenido matemático para su enseñanza (Shulman y Shulman, 2007), así también los conocimientos sobre los pensamientos de los estudiantes, de los métodos o recursos didácticos y del currículo que el profesor logre asumir (Ponte y Chapman, 2008). Por medio de esta perspectiva se retoma fuertemente el papel de la matemática, sin embargo, se soslayan aspectos de carácter sociocultural y contextual que enmarcan la práctica docente como característica fundamental.

Más recientemente, el tema de la profesionalización docente en matemáticas (PDM) se centra en aspectos más amplios, múltiples y sistémicos que incorporan lo cognitivo y epistemológico del saber con aspectos relacionados a lo didáctico y sociocultural para proveer explicaciones de las interacciones entre los componentes del sistema didáctico (profesor-alumno-saber) que permitan entender con mayor profundidad y precisión los fenómenos que ocurren tanto en los procesos de enseñanza y aprendizaje como en los procesos formativos de profesores de matemáticas. En este sentido, adquiere un papel relevante los contextos de profesionalización, las cuestiones relacionadas con las prácticas comunicativas en el aula, la cultura del aprendizaje, así como el papel del trabajo en comunidad (Lewis, Perry y Murata, 2006; Lee, 2008; Parada, 2011; Reyes-Gasperini, 2016; Sosa, Aparicio, Jarero y Tuyub, 2014).

Con base en los planteamientos previos, se considera que el estudio y desarrollo de la PDM va más allá de un enfoque individual y cognitivo sobre la actividad docente en matemáticas, pues sitúa a ésta en el terreno de la ejecución de ciertas prácticas y por ende, al saber matemático escolar un carácter estático y modificable sólo en términos de forma, más inalterable en términos conceptuales. Contrariamente, se requiere situar a la docencia en matemáticas como una actividad social y holística que sea capaz de generar mecanismos de construcción y consenso de sus saberes disciplinares. Lo anterior, implica un cuestionamiento y reconstrucción de los entendimientos y significados de los saberes matemáticos escolares, su sentido social, así como su organización y difusión en ámbitos escolares.

Con la idea de contribuir en esta última dirección, se presenta una propuesta orientada hacia el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas en educación básica (secundaria), como una forma de coadyuvar en las problemáticas de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, en particular para la enseñanza aprendizaje del pensamiento geométrico espacial, y a su vez, para la construcción de los saberes disciplinares.

Por tanto, esta propuesta se basa en situar la PDM en contextos de reconceptualización tanto del saber disciplinar como de la práctica didáctica como mecanismo para la reorganización de las prácticas educativas que integren a la matemática desde su perspectiva conceptual, procedimental y estructural, con su especificidad didáctica y sociocultural.

Marco Conceptual

Profesionalización docente y reconceptualización de saberes matemáticos

Como se mencionó previamente, la comunidad de matemáticos educativos se ha preocupado por atender la PDM desde enfoques que atienden tanto los aspectos cognitivos, contextuales y formativos, mismos que posicionan a la docencia en matemáticas como un campo profesional. Precisamente, esta propuesta se sitúa en el entendido de desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como un proceso continuo asociado a los mecanismos de construcción y difusión social de saberes profesionales que se construyen tanto en ámbitos escolares como fuera de ellos, esto es, profesionalizar implica más que propiciar o ampliar conocimientos, demanda otorgar a la actividad o práctica del profesor de matemáticas, referentes teóricos-metodológicos propios de un campo disciplinar que no segregue, por el contrario, que integre lo matemático en dicha actividad con su especificidad didáctica y los aspectos socioculturales que le son inherentes (Sosa, Aparicio, Jarero y Tuyub, 2014, p. 37).

En este entendido, el asunto de la formación de profesores y el desarrollo profesional conviene enmarcarlo en escenarios que propicien la ampliación y consenso de conocimientos tanto a nivel personal como profesional. Así, se reconoce a la reconceptualización de saberes como un proceso de construcción de significados matemáticos más amplios o ampliados por la toma de conciencia durante una experiencia de aprendizaje (Aparicio, Sosa, Torres y Gómez, 2018). En otras palabras, la reconceptualización es una transformación de lo que se conoce, el cómo y el por qué se conoce de un objeto matemático. Tal proceso de reconceptualización no podría devenir en lo individual, sino en lo colectivo, en donde se precisa reconocer que el pensamiento del profesor está asociado a un conjunto de vivencias desde y en su realidad (Sosa y Aparicio, 2017, p. 804)

Así y en relación con lo anterior, se plantean los procesos de la reconceptualización como una forma o medio para favorecer procesos de profesionalización docente. Por una parte, se busca situar a los docentes en la posibilidad de desarrollar y compartir continuamente experiencias colectivas de su profesión y de su saber disciplinar (Aparico y Sosa, 2013). Por otra parte, promover una variedad de experiencias de aprendizaje docente relacionadas con la autorreflexión y reorganización de los saberes propios e inherentes de la profesión, en el sentido que señalan Parada y Pluvinage (2014). De manera particular, interesan los conocimientos y explicaciones de los profesores respecto a la naturaleza y función social de los saberes matemáticos, así como en la lógica de organización de sus prácticas al interior del aula de clases.

Reconceptualización de la geometría escolar

Con base en los planteamientos previos, el proceso de reconceptualización de saberes busca promover en los profesores el reconocer, argumentar y reorganizar dichos saberes con base en su naturaleza epistémica (conceptual, procedimental y estructural) y su función social que aporten sentido y funcionalidad tanto a los saberes escolares como a las prácticas de enseñanza-aprendizaje. A continuación, se plantearán aspectos a considerar para la reconceptualización de

la geometría escolar, en específico para la educación básica.

Se reconoce que, actualmente la geometría escolar se ha centrado en el estudio de las figuras y objetos geométricos, sus propiedades, clasificaciones y medidas, aun cuando el desarrollar un pensamiento geométrico requiere de experiencias de uso y transformación del espacio. Lo anterior, obstaculiza que los procesos de comunicación en el aula proporcionen sentido a la geometría como una herramienta para visualizar y modelar el espacio (Aparicio et. al., 2018).

Prueba de ello es que distintas investigaciones señalan dificultades, tanto cognitivas como didácticas, para una adecuada conceptualización de los contenidos geométricos por parte de los niños y jóvenes en educación básica. Por un lado, destacan dificultades para apropiarse de ideas geométricas que involucran más de una dimensión, por ejemplo la noción de superficie. Y más aún si se pone en juego la relación entre forma y medida esto es, se ha puesto en evidencia cómo al presentar situaciones que involucran la variación en cuanto a la forma, los estudiantes tienden a no aceptar la posible inmutabilidad de la medida de superficie (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960).

Por otro lado, trabajos como el de D'Amore y Fandiño (2007) exponen el papel de las convicciones y elecciones de profesores, y cómo éstas pueden convertirse en obstáculos de naturaleza didáctica para la adecuada construcción de conocimiento geométrico, en particular, de las relaciones entre perímetro y área de una figura plana. Por ejemplo, la concepción recurrente en cuanto al concepto de área en relación con el empleo de las fórmulas para calcularla, más que en un concepto de dicho saber.

De lo anterior, se desprende la necesidad de favorecer procesos de reconceptualización de los saberes geométricos con el fin de enfatizar aspectos como la percepción y visualización de las formas espaciales, primordiales para el desarrollo del pensamiento geométrico. Por tanto, conviene un acercamiento donde lo empírico y la observación sean medios para el desarrollo de la perspectiva espacial (Alsina, 1997). Siendo así primordial, el favorecimiento de ideas relacionadas con el espacio, su forma, generación y medición; así como procesos del pensamiento como la generalización geométrica a partir del desarrollo de habilidades para establecer relaciones geométricas, analizar patrones de figuras y abstraer generalizaciones (Aparicio et. al., 2018).

Así, favorecer la reconceptualización de saberes geométricos escolares consiste en confrontar entendimientos y establecer interrelaciones en tres direcciones: en torno a los significados asociados a los objetos geométricos, incluso más allá del escenario en el que originalmente fueron presentados o tratados, la naturaleza operativa de dichos objetos, es decir, los procesos, métodos o algoritmos asociados y finalmente, las estructuras generales y abstractas como las fórmulas para el cálculo de medidas espaciales. De esta manera se generan mecanismos de análisis sistémicos que posibiliten construir referentes tanto teóricos como prácticos para la reorganización de las prácticas docentes en las aulas de matemáticas incorporando una perspectiva geométrica espacial dinámica y funcional.

Metodología del taller

La dinámica de actividades del presente taller consta de cuatro momentos, mismos que se describen a continuación:

- Momento 1. Discusión colectiva sobre el proceso de reconceptualización de saberes, en particular de la geometría escolar.

  Estrategia: Reflexión guiada sobre qué se entiende y porqué se propone la reconceptualización de saberes geométricos como medio para el desarrollo profesional docente. Ejemplificación.

- Momento 2. Análisis de actividades que permitan una confrontación entre tratamientos didácticos sobre el estudio de la medida y su papel en la construcción de formas geométricas en educación básica.

  Estrategia: discusión guiada sobre los tratamientos didácticos que se favorecen en la geometría escolar, así como sus implicaciones respecto al desarrollo del pensamiento geométrico espacial de forma transversal en la educación básica (nivel secundaria).

- Momento 3. Resolución y análisis colectivo de algunos diseños de experiencias de aprendizaje para el favorecimiento del pensamiento geométrico espacial.

  Estrategia: Con base en el análisis de las tareas propuestas en los diseños de las experiencias de aprendizaje, se reconocerán las consideraciones didácticas asociadas, así como consideraciones sobre adaptaciones de la práctica docente que se consideran para su implementación.

- Momento 4. Reflexiones sobre el tránsito o modificación de las prácticas educativas a partir de contextos de reconceptualización escolar.

  Estrategia: Ejemplificación del tipo de reflexión y argumentos por parte de los profesores de educación básica, para evidenciar el grado de sensibilización sobre su saber disciplinar y con ello concluir respecto al desarrollo y alcance del programa en cuanto a la profesionalización docente en matemáticas.

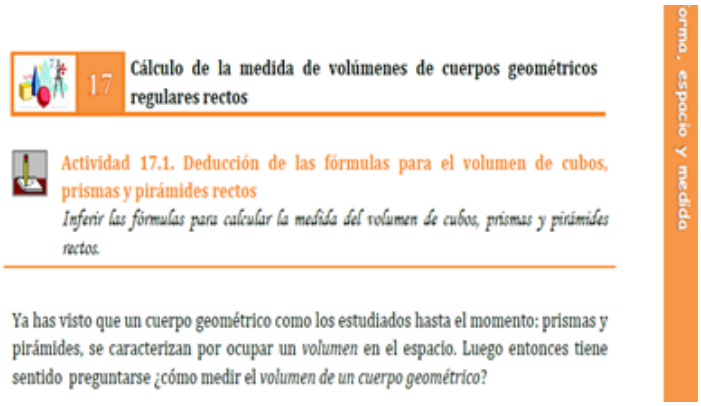
Cabe señalar que los diseños de experiencias de aprendizajes que se emplearán forman parte del material para la Educación Matemática en Secundaria "Actividades de aprendizaje para el aula. Primer, segundo y tercer grado", (Aparicio, Sosa y Jarero; 2014 y 2015; Aparicio, Sosa y Gómez; 2016).

Ejemplo de un diseño de experiencia de aprendizaje en la geometría espacial

Para ganar en contextualización, se plantea un ejemplo de tareas (Figuras 1 a 3) que conforman un diseño de experiencia de aprendizaje para la educación secundaria y se acompañan con las consideraciones prácticas propias del tratamiento didáctico.

Título del diseño: Deducción de las fórmulas para el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos.

Aprendizaje esperado: Inferir las fórmulas para calcular la medida del volumen de cubos, primas y pirámides rectos.


17 Cálculo de la medida de volúmenes de cuerpos geométricos regulares rectos

Actividad 17.1. Deducción de las fórmulas para el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos

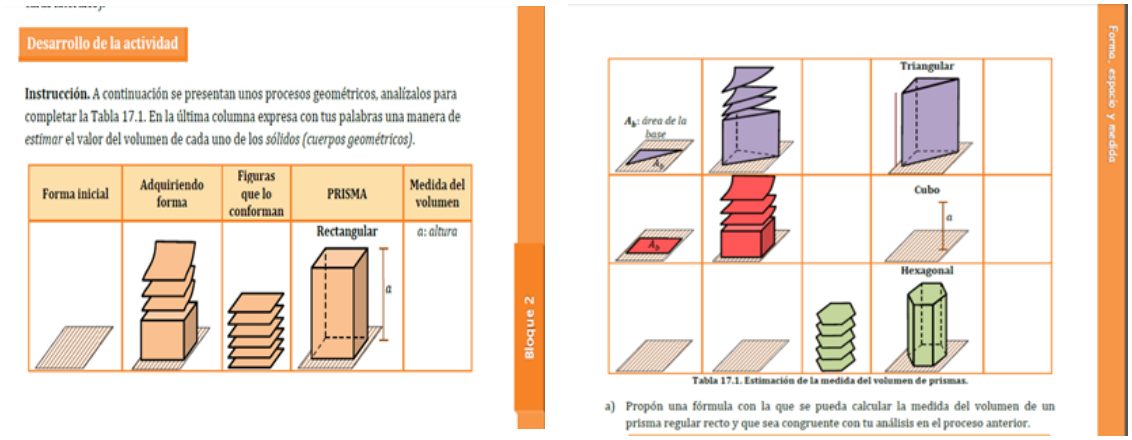
Inferir las fórmulas para calcular la medida del volumen de cubos, prismas y pirámides rectos.

Ya has visto que un cuerpo geométrico como los estudiados hasta el momento: prismas y pirámides, se caracterizan por ocupar un *volumen* en el espacio. Luego entonces tiene sentido preguntarse ¿cómo medir el *volumen de un cuerpo geométrico*?

Forma, espacio y medida

Figura 1. Introducción de la experiencia de aprendizaje.

Consideraciones didácticas: Se establece la relación entre el saber (S), aprendizaje esperado (AE) y forma de pensamiento geométrico (PM), en este caso: medición del volumen (S), inferir la fórmula para calcular su medida (AE) y la visualización de un patrón (PM). De esta manera se precisa sobre la naturaleza procedimental del saber matemático a tratar y se hace corresponder con el proceso de pensamiento geométrico que el estudiante requiere desarrollar, todo ello con la finalidad de apoyar su aprendizaje.


Desarrollo de la actividad

Instrucción. A continuación se presentan unos procesos geométricos, analízalos para completar la Tabla 17.1. En la última columna expresa con tus palabras una manera de *estimar* el valor del volumen de cada uno de los *sólidos (cuerpos geométricos)*.

Forma inicial	Adquiriendo forma	Figuras que lo conforman	PRISMA	Medida del volumen
			Rectangular	*a: altura*

Bloque 2

Triangular

Cubo

Hexagonal

Tabla 17.1. Estimación de la medida del volumen de prismas.

a) Propón una fórmula con la que se pueda calcular la medida del volumen de un prisma regular recto y que sea congruente con tu análisis en el proceso anterior.

Forma, espacio y medida

Figura 2. Desarrollo de la experiencia de aprendizaje.

Consideraciones didácticas: En el desarrollo se busca propiciar que el estudiante sea partícipe de la construcción de relaciones entre los elementos que constituyen a un prisma, el espacio que ocupa y la medida de su volumen, al establecer un patrón de comportamiento geométrico a través de observar los elementos invariantes de las formas geométricas presentadas. Además, se favorece la relación entre dimensiones, es decir, se parte de lo bidimensional hacia lo tridimensional. Lo anterior pretende contribuir hacia la conceptualización de las unidades de medida asociadas, pues en situaciones contextualizadas que involucran volumen, área o perímetro, en su mayoría, los alumnos centran su atención a la cantidad numérica, y se obvia la naturaleza geométrica de las unidades de medida según la dimensión del objeto geométrico (D'Amore y Fandiño, 2007).

Otro aspecto se asocia al proceso cognitivo de visualización (análisis de características, observación, comparación y abstracción), ya que se propone como recurso para construir la relación matemática que permite medir el volumen de un cuerpo geométrico.

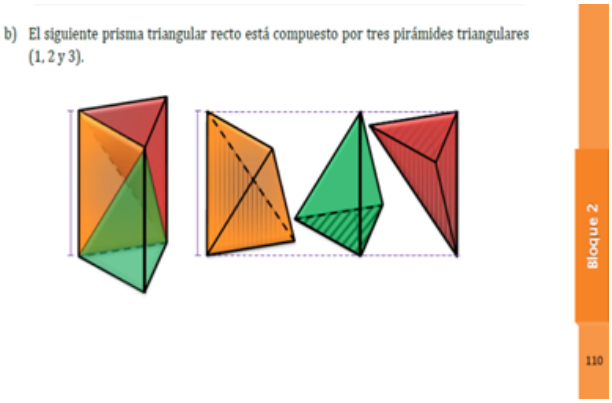


Figura 3. Cierre de la experiencia de aprendizaje

Consideraciones didácticas: Finalmente, se requiere retomar lo previamente construido en las tareas anteriores para emplearlos en la situación propuesta. En particular, se emplea como referente el entendimiento conceptual del prisma y el proceso para medir su volumen con la finalidad de conceptualizar la relación matemática que expresa el proceso para medir el volumen de las pirámides.

Reflexiones finales

La propuesta de PDM previamente expuesta se ha llevado a cabo con distintos colectivos docentes en matemáticas de educación básica (6-16 años) en Yucatán, México. A partir de dicha experiencia, se reconoce que la reconceptualización didáctica de saberes matemáticos ha favorecido en algunos aspectos que contribuyen a la profesionalización docente, en específico destacan los siguientes:

Por un lado, la reconceptualización posibilita la ampliación de los conocimientos matemáticos y didácticos que el profesor posee sobre los saberes matemáticos escolares, así como de las explicaciones sobre sus formas de comunicarlos en el aula. Particularmente, se ha destacado mayor conocimiento sobre una perspectiva de la geometría en relación con el espacio.

Por otra parte, se reconoce el aporte hacia el reconocimiento de formas didácticas-pedagógicas alternativas para incorporar a su práctica de aula orientadas hacia el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, en particular del pensamiento geométrico.

También, destaca el papel de la reconceptualización como un referente para diseñar actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Lo anterior, a partir del proceso de análisis y reflexión colectiva sobre los saberes, así como de las intencionalidades didácticas que involucran las actividades.

Por último, se logra percibir mayor grado de autonomía del docente para reorganizar su práctica e incluso, adaptar las actividades matemáticas para favorecer experiencias de aprendizaje acordes con las demandas cognitivas, educativas y socioculturales propias de su región e institución.

Referencias y bibliografía

Alsina, C., Brugués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría.* España: Síntesis.

Aparicio, E., Sosa, L., Torres, L. y Gómez, K. (2018). *Reconceptualización del saber matemático en educación básica.* Mérida, Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán. ISBN: 978-607-8527-55-7.

Aparicio, E. y Sosa, L. (2013). Contenidos matemáticos en secundaria. Una propuesta para su tratamiento escolar. En Sosa, L., Hernández, J. y Aparicio, E. (Eds.). *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* (154 - 159). México: Red Cimates.

Aparicio, E., Sosa, L. y Jarero, M. (Eds.) (2014). *Educación matemática en secundaria. Actividades de aprendizaje para el aula. Primer grado*. Yucatán, México: UADY-SEGEY.

Aparicio, E., Sosa, L. y Jarero, M. (Eds.) (2015). *Educación matemática en secundaria. Actividades de aprendizaje para el aula. Segundo grado.* Yucatán, México: UADY-SEGEY.

Aparicio, E., Sosa, L. y Gómez, K. (Eds.) (2016). *Educación matemática en secundaria. Actividades de aprendizaje para el aula. Tercer grado.* Yucatán, México: UADY-SEGEY.

Contreras, L. (1998). Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula. Tesis doctoral. España, Universidad de Huelva.

D'Amore, B. y Fandiño, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10*(1), 39-68.

Lee, J. (2008). A Hong Kong Case of Lesson Study –Benefits and Concerns. *Teaching and Teacher Education, 24*(5), 1115-1124.

Lewis, C., Perry, R. y Murata, A. (2006). How Should Research Contribute to Instructional Improvement? The Case of Lesson Study. *Educational Researcher, 35*(3), 3-14.

Pajares, M.F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research. 62*(3), 307-332.

Parada, S. & Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 83 – 113.

Parada, S. (2011). *Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *Child's conception of geometry*. Routledge. ISBN 0415-20999-4

Ponte, P. y Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teachers' knowledge and development. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2da ed., 225-263). Nueva York: Routledge.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Shulman, L. y Shulman, J. (2007). How and what teachers learn: A shifting perspective. *Journal of Curriculum Studies 36*(2), 257-271.

Sosa, L. y Aparicio, E. (2017). Profesionalización docente en matemáticas. Reflexiones desde una forma

de pensar didácticamente. *Primer Congreso Internacional de Investigación Educativa y Formación Docente.* Guerrero, México.

Sosa, L., Aparicio, E., Jarero, M. y Tuyub, I. (2014). Matemática Educativa y Profesionalización Docente en Matemáticas. El caso de Yucatán. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (Eds), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 31 – 47), México: Díaz de Santos. ISBN: 978.84.9969.664.5.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). Nueva York: MacMillan.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Reconceptualización de la transformación geométrica en profesores de matemáticas

Eddie **Aparicio** Landa
Universidad Autónoma de Guerrero
México
eeddie16@gmail.com
Guadalupe **Cabañas** Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
gcabanas.sanchez@gmail.com
Landy **Sosa** Moguel
Universidad Autónoma de Guerrero
México
landy.sosa@gmail.com

Resumen

Este trabajo consistió analizar la conceptualización que tienen profesores de matemáticas sobre el concepto de transformación geométrica. Para ello, se implementó un cuestionario de forma individual y a partir de las respuestas dadas, se inició una conversación reflexiva centrada en sus respuestas. Se pudo observar que los profesores poseen una débil conceptualización de la transformación así como de las razones de su enseñanza. Se concluye la necesidad de situar a los profesores en un proceso de reconceptualización tanto de sus saberes matemáticos como didácticos.

Palabras clave: reconceptualización, transformación geométrica, profesores

1. Presentación

Diversas han sido las investigaciones que han dado cuenta de la importancia e implicaciones favorables que tiene para el aprendizaje matemático de los estudiantes el que los profesores posean un conocimiento profundo de las matemáticas (Hill, Rowan & Ball, 2005; Darling-Hammond, 2000; Ma, 1999; Grossman, Hammerness & McDonald, 2009; Silverman & Thompson, 2008; Tirosh, 2000), pues se ha observado que el conocimiento matemático de ellos, particularmente en educación básica, es más de tipo operativo y con poca profundidad conceptual, mermando con ello un adecuado aprendizaje en los estudiantes (Hill, Rowan, & Ball, 2005; Ernest, 1989; Tzur & Timmerman, 1997), cabe decir que esto no es exclusivo de los profesores en ejercicio, sino también de profesores en formación, pues como se reporta en Thaqi, Giménez, & Rosich (2011), los estudiantes para profesores en secundaria, muestran un bajo nivel

de aprendizaje sobre las transformaciones.

En sus estudios, Silverman, (2004); Silverman & Thompson, (2008), observaron que las comprensiones abstractas no son suficientes para que los profesores tengan la capacidad de presentar a los estudiantes oportunidades que los coloquen en una comprensión similar y consistente. Asimismo, puntualizan que la mayoría de los profesores que logran cambiar sus prácticas docentes, lo hacen de manera superficial (Stigler y Hiebert, 1999), y concluyen que los cambios en la práctica de enseñanza resultan de las conceptualizaciones pedagógicas de las matemáticas, tanto en el sentido de las matemáticas como de la conciencia de su desarrollo conceptual.

Bajo el entendido anterior, consideramos se precisa indagar sobre cómo lograr que un profesor de matemáticas se sitúe en forma reflexiva y autocrítica, en relación con su quehacer profesional, y en ello, suponemos que lo personal y lo colectivo tienen un papel fundamental en la producción de una forma específica de reconceptualizar, pensar y enseñar la matemática en el contexto escolar.

2. Reconceptualización y pensamiento didáctico

En este trabajo ubicamos el estudio de la reconceptualización y desarrollo de una forma didáctica de pensar la matemática desde un enfoque sociocultural, pues reconocemos que el aprendizaje y el desarrollo de los profesores no solo se apoyan en lo colectivo, sino que se ve fortalecido en la medida que ellos participan y colaboran en un intercambio de conocimientos, contextos y experiencias (Campbell & Stohl, 2017; Lave & Wenger, 1991, Kolb & Kolb, 2017). Por ejemplo, Preciado-Babb, et al, (2015) mencionan que la comunicación en un espacio de diálogo e interacción entre profesores, fortalece sus hábitos de trabajo matemático y su idea de comunidad, además, dicen que en esas condiciones, el mostrar un trabajo y el compartir ideas, se valora no solo por su propio beneficio, sino también por su papel en la profundización de la comprensión matemática de los profesores. Ketelaar, et al, (2014), por su parte, señalan que los profesores expresan sentimientos de propiedad al participar en experiencias de aprendizaje, principalmente a través del intercambio de éstas y cuando dichas experiencias se ajustaban a la forma en que ellos conocen y aprenden.

Dicho así, a diferencia de algunos investigadores que caracterizan al pensamiento didáctico del profesor (de matemáticas), como "el conjunto de ideas, creencias, concepciones, opiniones, principios y teorías implícitas de vida y profesional que posee el docente sobre su quehacer didáctico durante la práctica pedagógica" (Figueroa & Páez, 2008), o ese pensamiento que está en relación con las creencias y conocimientos acerca de la enseñanza de las matemáticas, la planeación de clase, las expectativas del grupo, y de su propia eficacia docente (García-Cabrero, Loredo & Carranza, 2008), más bien lo caracterizamos en los términos que plantean Parada & Pluvinage (2014), quienes lo refieren como ese pensamiento que está en relación con el conocimiento de la matemática con el fin de enseñarla y a éste, en combinación con la aplicación de la didáctica, pero añadimos la idea de que dicho pensamiento se va desarrollando y conformando a partir de un continuo proceso reflexivo de las experiencias.

Con base en los planteamientos expuestos sobre la importancia e implicaciones que representan la noción de colectividad (reflexiva), experiencias profesionales (y de aprendizaje), y la conceptualización y reconceptualización de saberes matemáticos para el desarrollo de una forma didáctica (profesional) en los profesores de matemáticas, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo contribuye el intercambio de experiencias profesionales en un

espacio de conversación reflexiva, al desarrollo de una forma didáctica de pensar las matemáticas?, en particular, relativo al concepto de transformación geométrica.

3. Marco teórico

Para desarrollar y enmarcar el objeto de estudio en esta investigación, se ha recurrido a la Teoría del Aprendizaje Experiencial (ELT, por sus siglas en inglés), teoría mayormente empleada en estudios relacionados con la educación de personas adultas. En esta, el aprendizaje es entendido como un proceso mediante el cual se construye conocimiento a partir de la transformación continua de la experiencia. Por experiencia se entiende "lo que es debido a una transacción que tiene lugar entre el individuo y lo que en ese momento constituye el medio ambiente" (Dewey, 1938, p.43).

De este modo y como se ilustra en la figura 1, el aprendizaje resulta ser un proceso dialéctico y holístico de adaptación al mundo en el que se dan transacciones entre la persona y el entorno. Así, advertimos que las experiencias de los docentes tendrían un papel determinante no solo en su propio aprendizaje y desarrollo, sino también en sus pensamientos.



Figura 1. Ciclo de aprendizaje experiencial (Kolb y Kolb, 2017, p.32).

Las experiencias inmediatas o concretas (EC) son la base de las observaciones y reflexiones (OR). Estas reflexiones se asimilan y destilan en conceptos abstractos (CA), a partir de los cuales se pueden extraer nuevas implicaciones para la acción. Estas implicaciones pueden ser activamente probadas (EA) y servir como guías para crear nuevas experiencias (Kolb & Kolb, 2009, p. 298 – 299). La EC tiene que ver con lo experimentado (el hacer) en el momento, con una especie de experimentación sensorial (aprender experimentando/sintiendo), la OR tiene que ver con la observación y reflexión sobre lo realizado/experimentado en la EC (aprender procesando), la CA tiene que ver con teorizar o generalizar la experiencia a partir de la OR (aprender generalizando), y EA, tiene que ver con aplicar o probar una teoría para una próxima experiencia (aprender haciendo).

En el sentido anterior, es posible reconocer un espacio de conversación reflexiva (figura 2), como un espacio de aprendizaje de modo que, al escuchar, la persona experimenta al otro y reflexiona sobre lo que dice. De igual manera, al hablar, la persona piensa y formula intenciones sobre cómo responder y actuar para expresarlas. Es decir, que cuando una persona está

"leyendo", recibiendo comentarios (EC) y formulando percepciones (OR), la otra persona está flexionando, creando intenciones basadas en esas percepciones (CA) y actuando sobre ellas (EA). A medida que el intercambio continúa, ambas partes alternan sus roles en la conversación (Kolb & Kolb, 2017).

Visto así, un espacio de conversación reflexiva ofrece la posibilidad de organizar experiencias y es en ese proceso de organización en donde pueden suscitarse aprendizajes a partir de la significación de dichas experiencias. Por tanto, representa un espacio para indagar y coadyuvar a los profesores a comprender y desarrollar su propio pensamiento, su propia práctica y la relación entre estas, pues la experiencia es primariamente un asunto activo-pasivo; no es primariamente cognoscitiva, comprende conocimiento en el grado en que se acumula o se suma a algo que tiene sentido, cuyos generales son: "el sentido de un problema; la observación de las condiciones; la formación y la elaboración racional de una conclusión sugerida y la comprobación experimental activa" (Dewey, 1998. pp. 133 - 134).

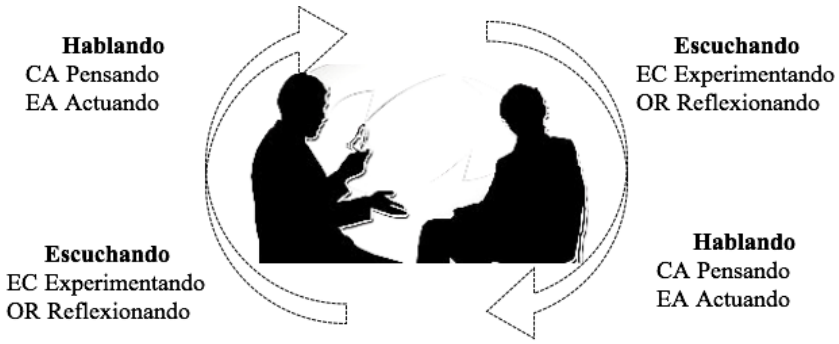


Figura 2. Ciclo de aprendizaje conversacional (Kolb & Kolb, 2017, p. 191).

4. Método y resultados de estudio

Como parte del espacio de conversación reflexiva se usó la "Entrevista grupal fenomenológica" que se caracteriza por suscitar un intercambio de experiencias en relación con un tema propuesto por el entrevistador (investigador), apoyando el crecimiento del conocimiento de los participantes a través de la reflexión colectiva sobre la experiencia (Gellert, 2008). Las características del tema o fenómeno quedan determinadas por las personas que lo "viven" y no por el investigador, son ellas quienes sacan dicho fenómeno de su conciencia y le dan expresión (Guerrero-Castañeda et al, 2017).

4.1. Participantes

En el estudio participaron cuatro profesores (dos hombres y dos mujeres) de matemáticas de educación básica en México, quienes dijeron no desconocer el concepto de transformación geométrica.

4.2. Instrumento

Para que inicie un proceso de reconceptualización, debe haber una confrontación entre el concepto que se tiene y el que se producirá como parte de una experiencia de aprendizaje. Así, se consideró emplear un instrumento el cuál tuviera tres preguntas relacionadas con el concepto de transformación geométrica, tal cual se muestra a continuación.

1. Indique, ¿Qué es transformación geométrica? Si le es posible, ofrezca un ejemplo de ello.

2. Indique si identifica algún tipo de relación geométrica entre el triángulo I y los etiquetados con los números II, III, IV, V y VI. Si fuera el caso, explíquela(s).

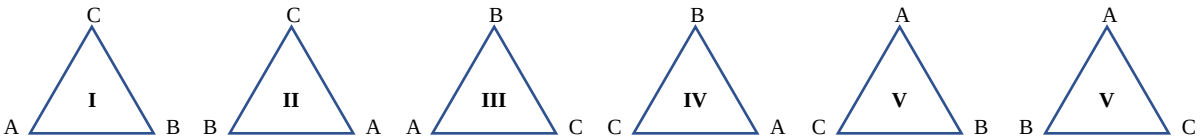


Figura 3. Segunda pregunta del instrumento planteada a los profesores.

3. Explique si es posible establecer algún tipo de relación geométrica de los puntos A, B y C con los puntos A_1, B_1 y C_1 en el plano cartesiano x, y.

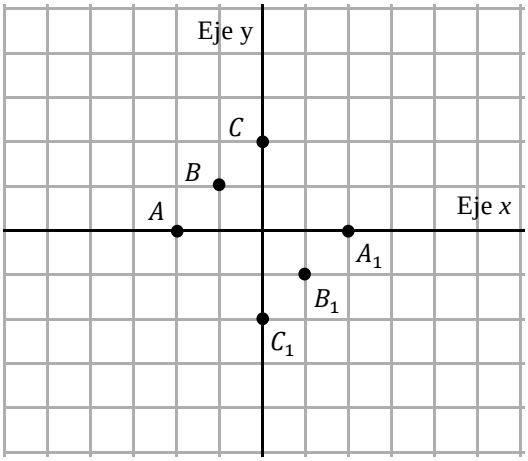


Figura 4. Tercera pregunta del instrumento planteada a los profesores.

4.3. Recolección y análisis de datos

La implementación del instrumento estuvo organizada de la manera siguiente: Primeramente, se solicitó atenderlo en su totalidad de manera individual, anotando sus respuestas en hojas. Segundamente, se les pidió reunirse en binas mixtas (hombre y mujer), para analizar sus respuestas y en su caso, generar una tercera en cada caso. Finalmente, el entrevistador realizó un cuestionamiento colectivo respecto a lo respondido individual y colectivamente.

Para la presentación de los datos obtenidos se hace uso de los siguientes códigos: PM1, PM2: para referir a las respuestas de las dos profesoras y PH1, PH2: para aludir a las respuestas de los dos profesores.

Las respuestas dadas por los profesores de manera individual a la primera pregunta fueron:

PM1: Es un proceso que se realiza para cambiar de posición cierta figura.

PM2: Es una operación que se le aplica a una figura para obtener otra, de tal forma que los puntos de la figura inicial correspondan con los de la figura final u obtenida.

PH1: Cuando tenemos una figura geométrica y tenemos rotar, trasladar, invertir o variar las proporciones de sus lados manteniendo sus ángulos correspondientes iguales, hablamos de una transformación geométrica.

PH2: Las transformaciones geométricas son aquellas que de una figura dada, obtenemos otra. Puede ser traslación, rotación, simetría y homotecia.

Las respuestas dadas de manera individual a la segunda pregunta fueron:

PM1: Todos giran ciertos grados y cambian de posición. Del I al IV se rotó 60 grados. Del IV al VI se rotó 60 grados, del I al VI se rotó 120 grados y del VI al I se rotó 60 grados.

PM2: II es simétrico del I respecto a una recta vertical. III se obtiene rotando II. V es simétrico del VI. VI es una rotación del I. IV es una rotación del VI.

PH1: I fue rotado 180 grados, dando como resultado II. VI resulta de girar 90 grados el I.

PH2: El IV es rotación del I en el punto B. V es rotación del II en el punto A. VI es rotación del III en el punto C. II es simétrico de I con el punto B o A. IV es simétrico de III en el punto C o A.

Las respuestas dadas de manera individual a la tercera pregunta del instrumento fueron:

PM1: Los puntos A, B y C, unidos forman un segmento paralelo al segmento $\overline{C_1A_1}$, además, el punto C con el punto C_1, son simétricos respecto al origen, así como también los otros puntos. Además, son simétricos respecto a la gráfica $y = x$.

PM2: Los puntos A_1, B_1 y C_1 se obtienen mediante una rotación de los puntos A, B y C, respectivamente con centro en $(0,0)$ y ángulo de 180 grados.

PH1: Es posible establecer la relación de A con A_1, B con B_1 y C con C_1, al intercambiar las coordenadas x y y del punto $A(x, y)$ con sus simétricos al punto $A_1(x_1, y_1)$.

PH2: Son opuestos por el vértice u origen. Simétricos con respecto al origen.

Como puede verse, en las respuestas individuales dadas por los profesores a la primera pregunta, no se hace alusión al concepto de relación funcional o aplicación del plano al plano mismo, para decir qué es una transformación geométrica. Además, se deja ver que su conceptualización de la transformación es un sentido "manipulativo". Es decir, la posibilidad de "manipular físicamente" una figura para modificarla o cambiarla en algo. Esta idea queda más evidenciada en sus respuestas dadas a las siguientes dos preguntas del instrumento.

De las respuestas dadas a la segunda pregunta, se identifica que los profesores si bien reconocen las transformaciones isométricas (reflexión y rotación), el sentido dado a ellas es igualmente manipulativo, pues no se hace referencia a los triángulos del II al VI, como "triángulos imágenes" del I.

Finalmente, se ve por las respuestas dadas a la tercera pregunta, que se sigue haciendo alusión a la simetría y rotación en un sentido de "operaciones geométricas", más que de relaciones, a pesar de que el plano cartesiano pudiera sugerir evocar la idea de relación funcional, como se puede notar en PM1 y PH1.

Al solicitarles a los profesores analizaran en binas sus respuestas y en su caso, generan una tercera o indicaran si no harían ajustes a las mismas, las dos binas indicaron que sus respuestas eran equivalentes.

Para el tercer momento de trabajo colectivo (profesores y entrevistador), se solicitó a los profesores que reflexionaran e indicaran si al quitar etiquetas de número y vértices, a todos los triángulos, ellos dirían que son seis triángulos (equiláteros) o es un mismo triángulo (equilátero). Todos respondieron que se trata de seis triángulos, porque eso es lo que ven. Pero dando un espacio de silencio, luego dos de ellos dijeron que podría ser un solo triángulo, pero en diferentes

posiciones. Es decir, un triángulo trasladado.

Posterior a su reflexión, se les pidió que observaran dos hojas del mismo tamaño, forma y color, en el escritorio. Una puesta verticalmente y la otra horizontalmente. Y que reflexionaran respecto a que uno de sus estudiantes les dijera: Yo veo que son dos hojas diferentes, aunque tengan la misma forma, tamaño y color. ¿Le dirían está en lo correcto? Todos dijeron que sí. Al dar su respuesta se les preguntó ¿por qué? A lo que respondieron que por en efecto son dos hojas. Por tanto, se aprovechó esta afirmación para discutir sobre qué pasa si ahora se deja una sola hoja y primeramente se muestra dispuesta verticalmente y luego horizontalmente, como era el caso cuando se tenían las dos hojas. Se les cuestionó sobre ¿Si la hoja horizontal es la misma que la vertical, solo que rotada y traslada? En este caso, todos entraron en duda de qué decir, e incluso algunos decían que el sentido físico y manipulativo de las hojas, podían causar problemas de entendimiento a los estudiantes sobre el concepto de transformación geométrica.

Respecto de la reflexión anterior realizada por los profesores, se les cuestionó si ellos considerarían que sería mejor el aprendizaje de la transformación tratarla desde un punto de vista de relación funcional, es decir, como una función que aplica puntos del plano al plano mismo, en lugar de uno manipulativo y operativo, a lo que ellos dijeron que sí, pero solo para estudiantes bachillerato, porque en primaria y secundaria, los estudiantes no lograrían entender. Ante ello, se les interrogó sobre la dificultad que tendría un estudiante de primaria o secundaria para entender que por ejemplo, una simetría o reflexión y una rotación, son formas de relacionar geométricamente dos figuras. Respondieron que en eso no veían que hubiera mucho problema o dificultad, ¡pues es muy claro!

5. Conclusiones

Se ha descrito una forma de situar a profesores en un proceso de reconceptualización individual y colectiva del concepto de transformación geométrica, con especial énfasis en las transformaciones isométricas de rotación y simetría, vistas como casos particulares del concepto de función biyectiva. La lógica detrás de esta propuesta consiste en considerar a la conceptualización presente en los docentes, para de ahí ampliar sus experiencias respecto a dicha conceptualización y finalmente, generar conciencia didáctica sobre las implicaciones de su conceptualización para una mejor práctica de enseñanza y aprendizaje asociada a las isometrías.

Ciertamente, llevar a una reconceptualización adecuada y conducida por los mismos profesores, detectamos, resulta complicado con solo un primer acercamiento a la problematización de los saberes, sin embargo, con una adecuada planeación, ejecución y continuo trabajo en espacios de conversación reflexiva, se podría lograr una ampliación de sus experiencias y conocimientos que les provea de una mayor autonomía para desarrollar una forma didáctica de pensar las matemáticas, más cercana a las demandas y retos que plantea una educación matemática de calidad. Esto se deriva de las valoraciones que los mismos profesores realizaron y expresaron tanto por escrito como verbalmente, sobre la necesidad de que ellos deben vivir más experiencias en donde sus conocimientos y prácticas docentes, entren en conflicto.

Referencias y bibliografía

Campbell, M. & Stohl, H. (2017). Examining Secondary Mathematics Teachers' Opportunities to Develop Mathematically in Professional Learning Communities. *School Science and Mathematics, 117* (3 – 4), 115 – 126.

Darling-Hammond, L. (2000). Teacher Quality and Student Achievement: A Review of State Policy Evidence. *Education Policy Analysis Archives, 8*(1), 1 – 44.

Dewey, J. (1938). *Education and Experience*. New York, NY: Horace Liveright.

Dewey, J. (1998). Democracia y Educación. Una introducción a la filosofía de la educación. Madrid: Ediciones Morata, S. L.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics Teaching: the state of the art.* Recuperado de: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/impact.htm

Figueroa, N. & Páez, H. (2008). Pensamiento didáctico del docente universitario. Una perspectiva desde la reflexión sobre su práctica pedagógica. *Fundamentos en humanidades, 2,* 111 – 136.

García-Cabrero, B., Loredo, J. & Carranza, G. (2008). Análisis de la práctica educativa de los docentes: pensamiento, interacción y reflexión. *Revista electrónica de Investigación Educativa, Especial,* consultado el 15 de marzo de 2017 en http://redie.uabc.mx/redie/article/view/200/345

Gellert, U. (2008). Routines and collective orientations in mathematics teachers' professional development. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 93 – 110.

Grossman, P., Hammernness, K. & McDonald, M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education, *Teachers and Teaching: theory and practice, 15*(2), 273 – 289.

Guerrero-Castañeda, RF., Menezes, TMO., & Ojeda-Vargas, MG. (2017). Características de la entrevista fenomenológica en investigación en enfermería. *Revista Gaúcha de Enfermagen, 38*(2), 1 – 5.

Hill, H., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal,* 42(2), 371- 406.

Ketelaar, E., Koopman, M., Den Brok, P., Beijaard, D., & Boshuizen, H. (2014). Teachers' learning experiences in relation to their ownership, sense-making and agency. *Teachers and Teaching, 20*(3), 314 – 337.

Kolb, A. & Kolb, D. (2017). The Experiential Educator. Principles and Practices of Experiential Learning. San Bernardino, CA.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Nueva York: Cambridge University Press

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Parada, S. & Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 83 – 113.

Preciado Babb, A., Metz, M., & Marcotte, C. (2015). Awareness as an enactivist framework for the learning of teachers, mentors and institutions. *ZDM Mathematics Education*, *47*, 257 – 268.

Silverman, J. (2004). *Comparing aspects of constructivist research methodologies in mathematics education: Modeling, Intersubjectivity, and Tool Use*. Escrito presentado en el annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 499 – 511.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: Free Press.

Thaqi, X., Gimenez, J., & Rosich, N. (2011). Geometrical transformation as viewed by prospective

teahers. In Pytlak, M., Rowland, T., & Swoboda, E. (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 578-587). Rszeszów, Poland: ERME.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knoledge of children's conceptions: the case of división of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5 – 25.

Tzur, R., & Timmerman, M. (1997). Why do we invert and multiply? Elementary teachers' struggle to conceptualize division of fractions. En J. A. Dossey, J. O. Swafford, M. Parmantie & A. E. Dossey (eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 553 - 559). Bloomington-Normal, IL: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Apropiación de la metodología de la indagación en la práctica docente de matemáticas

Vivian Libeth **Uzuriaga** López
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
vuzuriaga@utp.edu.co
Héctor Gerardo **Sánchez** Bedoya
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
hgsanche@utp.edu.co

Resumen

Se presentan resultados de una investigación realizada con ocho docentes de la Maestría en Educación de la Universidad Tecnológica de Pereira, becados por el Ministerio de Educación Nacional Colombiano, integrantes del macroproyecto "La metodología de la indagación en la enseñanza y aprendizaje de la matemática". Estudio cualitativo en marco del objetivo "interpretar la apropiación de la metodología de la indagación en la práctica docente mediada por la planeación e implementación de una unidad didáctica para la enseñanza de un objeto matemático". Con un diseño desde la teoría fundamentada, apoyado en la auto observación con registro videográfico de las sesiones de clase intervenidas, con una planeación previa de una unidad didáctica estructurada desde la metodología de la indagación y las situaciones didácticas de Brousseau. Se finalizó con la descripción de la práctica de los maestrantes investigados en la apropiación de dicha metodología, desde tres categorías: secuencia didáctica, competencia científica e interactividad.

Palabras clave: enseñanza matemática, metodología de la indagación, práctica docente, situaciones didácticas, unidad didáctica.

Introducción

Los bajos desempeños encontrados en las pruebas internacionales como en el Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (PISA), la Evaluación Internacional de Conocimientos de Matemáticas y Ciencias (TIMSS), y en las pruebas SABER para el caso colombiano en el área de matemática, han generado constantes debates que focalizan su atención en los conocimientos, competencias, actitudes y capacidades de los estudiantes; y en las formas de enseñar de los maestros.

Conclusiones que son ratificadas por el MEN (2013), cuando afirma que las evaluaciones realizadas a maestros muestran falencias importantes tanto en el conocimiento disciplinar como en el conocimiento didáctico inherente a la propia disciplina, lo cual explica parte de las dificultades que tienen los estudiantes; ante lo cual Rico (2007) expresa que "los docentes no disponen de herramientas conceptuales adecuadas y suficientes desarrolladas, a partir de las cuales realizar una buena planificación" (p.53).

La discusión de Rico (2007) lleva a preguntar por las estrategias de los docentes al enseñar una disciplina del currículo, ante lo cual Gil y Vilches (2001. Citados en González-Weil, et al., 2012), manifiestan que si bien es cierto la enseñanza de las ciencias desde una postura crítica y participativa del estudiante debiera abordarse en todos los niveles educativos, la educación básica y media es "la etapa fundamental para plantear la alfabetización científica de los futuros ciudadanos y ciudadanas" (p.86), y razón de ello se requieren estrategias de aula que permitan que el sistema colombiano esté a la altura de este desafío, y la metodología de la indagación es una opción.

La problemática anterior llevó a la necesidad de reflexionar sobre la práctica docente, de los profesores participantes de la investigación, quienes fueron becados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia en el marco del programa "Becas para la excelencia docente", surgiendo como pregunta de investigación: ¿cómo contribuye la metodología de la indagación en la práctica docente, al implementar una unidad didáctica para la enseñanza de un objeto matemático? Los objetos matemáticos asumidos para las investigaciones fueron: concepto de fracción en grado séptimo (Muriel, 2016) y (Jaramillo, 2016), sistema de numeración decimal en grado segundo (López, 2016), construcción del número en grado primero (Cuartas, 2016) y (Serna, 2016), estructura multiplicativa en grado tercero (Flórez, 2016), figuras geométricas en grado segundo (Ardila, 2016) y construcción y clasificación de los poliedros en grado octavo (Mosquera, 2016).

Pregunta que permitió a los maestros investigados a reflexionar sobre sus actuaciones en el aula de clase, la planeación de la misma, llevando a caracterizar su práctica docente antes de su formación posgradual y durante la maestría, al volver al aula una vez diseñada y planeada una unidad didáctica fundamentada en la metodología de la indagación y las situaciones didácticas de Brousseau.

Por lo anterior, se hace necesario pensar la *práctica docente* desde la intencionalidad de la secuencia de actividades, la cotidianidad en el aula y sus relaciones con el saber (González-Weil, et al., 2012); reflexión que los investigadores se plantearon al interpretar su *práctica docente* mediada por una unidad didáctica fundamentada en la metodología de la indagación desde las categorías secuencia didáctica, competencia científica e interactividad.

Práctica docente que es concebida como "todas aquellas actuaciones que el docente realiza en el aula con el propósito de enseñar" De Lella (1999, p.13), la manera como él trabaja, se expresa, actúa y se relaciona. Es decir, la caracterización de sus hábitos, acciones y estilos en el contexto educativo; y que es interpretada desde las categorías: *secuencia didáctica*, la cual está relacionada con las actividades que se realizaron en el aula de clase y cómo se estructuraron. *Competencia científica,* entendida desde (González-Weil, et al., 2012) como un conjunto de conocimientos, capacidades y actitudes científicas del docente que permiten generar en el aula un conjunto de saberes, capacidades y disposiciones. Es decir, corresponde con la formación docente tanto desde la epistemología del objeto matemático, como desde su didáctica; y la

interactividad, definida como "la articulación de las actuaciones del profesor y los estudiantes en torno a una tarea o contenido de aprendizaje determinado" (Coll, Colomina, Onrubia & Rochera, 1992, p.204).

La metodología de la indagación entendida desde la reflexión que hace el docente, en donde se mira así mismo como aprendiz permanente, capacitado para mejorar su quehacer en aula (González-Weil, 2012, p. 87).

La unidad didáctica definida como una unidad de trabajo para enseñanza y aprendizaje, que tiene duración, objetivos, contenidos, actividades de aprendizaje y evaluación (Coll, 1991).

Metodología

La investigación fue cualitativa, de corte descriptivo e interpretativo (Yin, 1994. Citado por Castro, 2010. p. 39), que permitió caracterizar la práctica de los docentes. El diseño se enmarcó en la Teoría Fundamentada (Strauss & Corbin, 2002). Este diseño consideró tres momentos: El primero, la visión retrospectiva, considerado como un antecedente primario, y correspondió a la caracterización de la práctica de los docentes investigados antes de iniciar su proceso de formación tanto teórica como de intervención intencionada desde la metodología de la indagación. El segundo momento, posterior a la revisión documental y en paralelo al desarrollo de los seminarios de la maestría, se diseñaron y planearon siete unidades didácticas, fundamentadas en la metodología de la indagación y las situaciones didácticas de Brousseau,, como estrategia pedagógica para regresar al aula. El tercer momento, fue la observación y sistematización de la práctica de cada uno de los docentes participantes de la investigación durante la implementación de las unidades didácticas; las cuales se hicieron teniendo en cuenta los instrumentos diseñados para tal fin, la rejilla de observación y la matriz de análisis y que permitieron describir la apropiación que cada uno hizo de la metodología de la indagación.

Hallazgos y resultados

De los hallazgos y el análisis de las transcripciones realizadas por los ocho maestrantes en sus investigaciones individuales, se resalta que las acciones de aula fueron clasificadas de la siguiente manera: El 36% de las acciones de los docentes se enmarcaron en los ítems de la categoría *secuencia didáctica*, el 43% en la *competencia científica del docente*, y para las acciones asociadas con la *interactividad,* fue el 21%. Lo que muestra que los docentes, a pesar que su formación de base no es en matemáticas, fortalecieron sus conocimientos matemáticos, epistemológicos y didácticos, por lo menos del objeto matemático seleccionado para su enseñanza desde la planeación e implementación de la unidad didáctica.

Secuencia didáctica

Al observar, sistematizar e interpretar la apropiación de la metodología de la indagación en la práctica docente desde la categoría *secuencia didáctica*, la cual está relacionada con la pregunta ¿qué actividades se realizan en el salón de clase y cómo se estructura? se pudo encontrar que, en la subcategoría actividad medular el 12.5%, fue el ítem más representativo y mostró que "*el docente utiliza variados recursos para la construcción del conocimiento*", construcción que se hizo para cada uno de los objetos matemáticos de las unidades didácticas; lo que indicó que los ocho docentes usaron los recursos como mediadores cognitivos, lo que

demandó de los maestrantes un alto componente creativo, para aprovechar lo disponible en el medio; y no fueron usados los recursos para jugar o "entretener" a los estudiantes, como se observó en la visión retrospectiva.

Por otro lado, el ítem con menor registro fue "*desarrolla las temáticas a través de situaciones problemas basados en contextos reales*", con el 4.29%. Aunque la situación de acción motivó el inicio de la temática desde una situación problema, situaciones cercanas al contexto de interés de los estudiantes, la misma no se desarrolló durante todas las sesiones de clase observadas. Es decir, no se evidenció que esta conexión con el contexto fuera recurrente durante la clase.

Con respecto a la subcategoría *momentos de clase flexible* se pudieron encontró que las acciones más recurrentes de los docentes participantes de la investigación estuvieron en el ítem "*el docente acompaña los estudiantes en los procesos que se realizan en la construcción de nuevos conocimientos*", con 16.62%, característica que resalta la importancia del rol del profesor como guía del proceso involucrando a los estudiantes con su aprendizaje, fortaleciendo competencias de aprender a aprender, argumentar, validar. El más bajo estuvo en "e*l docente flexibiliza su estrategia de acuerdo con las necesidades de aprendizaje de sus estudiantes*", con el 8.58%.

Competencia científica

En esta categoría se ubicaron las acciones de aula relacionadas con la pregunta "¿qué ámbitos de competencia científica aborda el docente en su clase?" (González-Weil, et al., 2012). Se encontró que el 57.11% de acciones de los docentes correspondieron a los ítems de la subcategoría *promoción de conocimientos y actitudes*; entre tanto el 42.89% estuvieron asociadas a la *enseñanza de las competencias disciplinares*.

Frente a la *subcategoría promoción de conocimientos, capacidades y actitudes*, se encontró que el 9.75% de las intervenciones correspondieron al ítem "*el docente responde a las inquietudes de los estudiantes con preguntas orientadoras y retadoras*", implicó reconocer en los docentes su preocupación por no formular preguntas cerradas, fácticas o de respuesta inmediata, sino preguntas centradas en la "forma" ya que estas incidente positivamente en el pensamiento lógico, matemático y abstracto del estudiante.

Con respecto a la observación, sistematización e interpretación de la práctica docente desde la subcategoría *enseñanza de las competencias disciplinares* se encontró que el 10.23% correspondió con el ítem "*el docente promueve en los estudiantes el interés por la clase, la atención y la participación, a través de la formulación de preguntas*", aspecto que reafirma el principio de la metodología de la indagación de darle la mayor participación posible en el aprendizaje como factor motivacional que contribuirá a sostener el interés por aprender.

A partir de las transcripciones se pudo observar que el docente promovió en los estudiantes el interés por la clase, la atención y la participación, no solamente a través de la formulación de preguntas, sino también a través de las expresiones positivas, de reconocimiento a lo que hicieron, al darle participación en la evaluación y desde la confrontación entre pares.

Interactividad

Frente a la interactividad las acciones en el aula estuvieron relacionadas con la pregunta ¿qué características tiene la interacción profesor-alumno y de qué manera apoya el aprendizaje?,

se encontró que el 56.10% estuvieron enmarcadas en la subcategoría *proceso de negociación y construcción*, entre tanto el 43.90% estuvieron identificadas como el *andamiaje* brindado por el docente o los propios compañeros de curso.

Una de las características de la metodología de la indagación que mostró mayor apropiación por parte de los maestrantes estuvo representada en el ítem *"el docente favorece el trabajo colaborativo a través de las actividades que propone en el aula"* con un 20.21%, lo que permitió inferir que existió gran interés por realizar estrategias en las cuales el estudiante junto con sus pares aprendieran conjuntamente, reconociendo la acción dialógica como herramienta mediante la cual se construyen de manera conjunta los nuevos conocimientos, conceptuándose de esta manera el aprendizaje como producto de las interacciones entre el estudiante y el entorno social (Vygotsky, 1978. Citado en Sadovsky, 2005).

Conclusiones

La metodología de la indagación permeó la práctica de los docentes, desde la planeación de la clase hasta el desarrollo de la misma, lo que permitió observar que promovieron en los estudiantes el interés por la clase, la atención y la participación, haciendo de estos sujetos activos de su proceso de aprendizaje.

Asimismo, la planeación, diseño e implementación de unidades didácticas construidas desde las bases teóricas de la metodología de la indagación y las situaciones didácticas de Brousseau para la enseñanza de objetos matemáticos, permitió a los docentes participantes de la investigación apropiar en su rol características de dicha metodología que les permitió de manera gradual pasar la responsabilidad del aprendizaje a los estudiantes, convirtiéndose en guías del proceso, lo que los llevó a cambiar la concepción de enseñanza que tenían como una transmisión de conocimientos, como poseedores del mismo, en espacios de diálogo y construcción compartida de significados.

Referencias y bibliografía

Ardila Ortiz, L. M. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

Castro Monge, E. (2010). El estudio de casos como metodología de investigación y su importancia en la dirección y administración de empresas. *Revista Nacional de Administración*. Recuperado el 18 julio de 2017. http://biblioteca.icap.ac.cr/BLIVI/COLECCION_UNPAN/BOL_MARZO_2013_60/UNED/2010/estudio_casos.pdf

Cerda Gutiérrez, H. (1.991). *Los elementos de la investigación,* capítulo 7. Medios, instrumentos, técnicas y métodos en la recolección de datos e información. Recuperado de https://drive.google.com/file/d/0ByJKdYF9NkPwaDhXb1ZRYmpSakE/view.

Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J. & Rochera, M. J. (1992, p.204). *Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de los mecanismos de influencia educativa.* Madrid: Infancia y aprendizaje, 189-232.

Cuartas Palacio, L. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

De Lella, C. (1999). I Seminario Taller sobre Perfil del Docente y Estrategias de Formación. *Modelos y tendencias de la Formación Docente*. Lima, Perú: Organización de estados iberoamericanos.

Flórez Correa, S. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

González-Weil, C., Cortéz, M., Bravo, P., Ibaceta, Y., Cuevas, K., Quiñones, P., Maturana, Y & Abarca, A. (2012). *La Indagación científica con enfoque pedagógico: estudio sobre las prácticas innovadoras de docentes de ciencias en EM*. Estudios Pedagógicos XXXVIII, 86-102.

González-Weil, C., Martínez, M., Galax, C., Cuevas, K. & Muñoz, L. (2009). La educación científica como apoyo a la movilidad social: desafíos en torno al rol del profesor secundario en la implementación de la indagación científica como enfoque pedagógico. (Valdivia, Ed.) Estudios

Jaramillo Valbuena, G. P. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

López Zuluaga, S. M. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

MEN. (2013). Sistema colombiano de formación de educadores y lineamientos de política. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Muriel Henao, N. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

Mosquera Arango, S. P. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. PNA, 47-66.

Ruíz, A., Chavarría, J. y Alpízar, M. (2006). *La escuela francesa de didáctica de las matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica*. Cuadernos de investigación y formación en educación, 1-17.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Reflexiones teóricas para la educación matemática, 5, 2-4.

Serna Calderon, A. P. (2016). Transcripción de la práctica docente durante la implementación de la unidad didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. Maestría en Educación. Pereira.

Strauss, A. & Corbin, J. (2002). Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Medellín: Universidad de Antioquia.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Extensión del modelo MTSK al dominio estadístico

Pedro **Vidal-Szabó**
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
pedro.vidal@pucv.cl
Soledad **Estrella**
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
soledad.estrella@pucv.cl

Resumen

¿Qué conocimiento especializado ha de tener un profesor de matemática que enseña estadística en el contexto escolar? Las evidencias investigativas sobre la enseñanza de la estadística muestran que persiste un énfasis en el conocimiento procedimental en desmedro del conocimiento conceptual de las ideas fundamentales de la estadística. Con base en una revisión teórica en el área de la *Didáctica-de-la-Estadística* y algunos antecedentes empíricos en escuelas de la V región de Chile, se vinculan las ideas del análisis exploratorio de datos y del ciclo investigativo PPDAC (problema, plan, datos, análisis y conclusiones) para proponer una extensión del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) a uno que se ajuste a la enseñanza y al aprendizaje de la estadística escolar; con el fin de contribuir a la exploración analítica del conocimiento del profesor de matemática que enseña estadística.

Palabras claves: educación estadística, formación de profesores en estadística escolar.

Introducción

La estadística como disciplina ha ganado un espacio en los currículos escolares (Cf., Ben-Zvi & Garfield, 2004; Cobb & Moore, 1997; del Pino & Estrella, 2012; Moore, 1997), asimismo, la didáctica de la estadística ha desarrollado autonomía e independencia (Cf., Zieffler, Garfield & Fry, 2018) con las que ha obtenido resultados investigativos útiles para la formación de profesores. Al respecto nos preguntamos ¿qué conocimiento estadístico y qué conocimiento didáctico del contenido estadístico podrían desarrollarse en la formación del profesor de matemática? A partir del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo et al., 2013; Carrillo, Contreras & Flores, 2013), pretendemos levantar una propuesta que entregue directrices

sobre ¿qué conocimiento especializado podría considerarse para la formación del profesorado de matemática que enseña estadística en el contexto de la educación primaria?

Aunque algunas comunidades de investigación acrecientan y progresan en el conocimiento especializado referido a la enseñanza para el aprendizaje de la estadística (Cf., Petocz, Reid & Gal, 2018), aún faltan modelos referenciales para la formación de profesores de matemática que enseñan tempranamente la estadística, en cuanto al conocimiento especializado requerido para abarcar la alfabetización estadística y promover el razonamiento estadístico en aprendices que inician su formación escolar. Algunas propuestas de enseñanza y estudios en el área, permiten identificar algunos elementos requeridos en la formación docente; a nivel internacional (e.g., English, 2010, 2012), a nivel nacional y como antecedentes empíricos, se reconocen algunas implementaciones de diseños de enseñanza estadística en algunas escuelas chilenas (e.g., Estrella, 2017, 2018; Estrella, Olfos, Morales y Vidal-Szabó, 2018; Estrella & Vidal-Szabó, 2017; Estrella, Zakaryan, Olfos, Espinoza, 2019).

El modelo MTSK

El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge)*, en adelante MTSK, ha sido ideado en concordancia teórica y práctica a una especificidad del conocimiento que manifiesta el profesor de matemática en su desempeño docente, ver Figura 1, (Carrillo et al., 2013; Carrillo, Contreras & Flores, 2013).

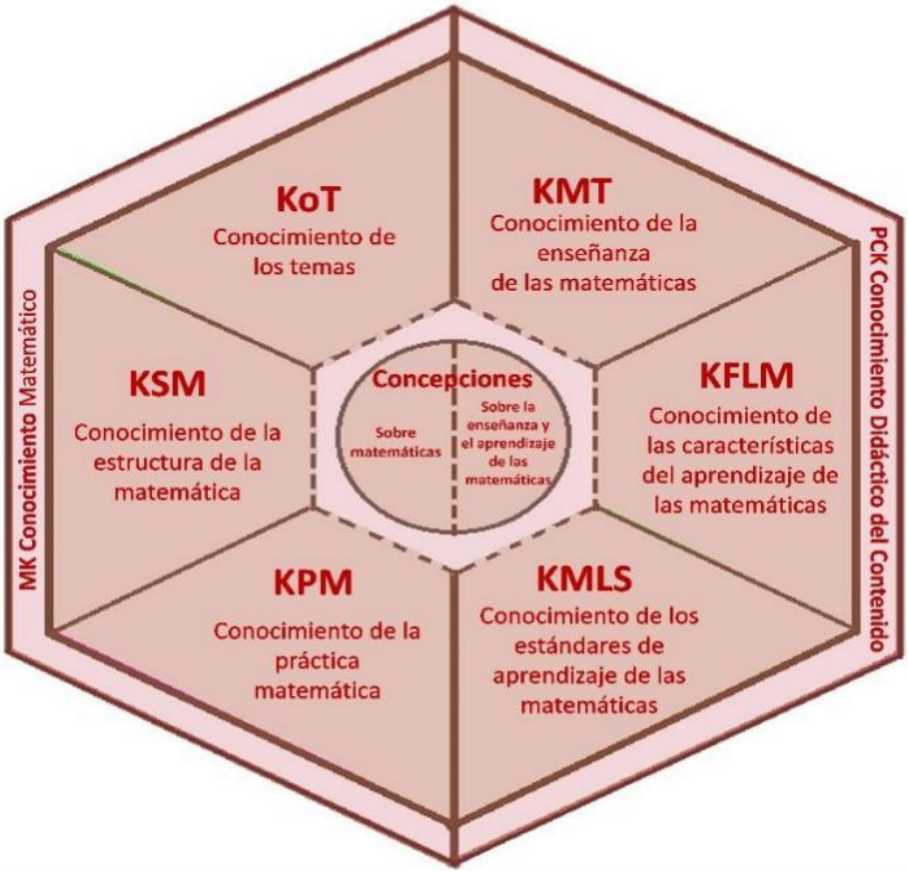


Figura 1. Modelo MTSK (Carrillo et al., 2013).

Se distinguen dos dominios, el dominio MK (conocimiento matemático) y PCK (conocimiento didáctico del contenido), los cuales contienen seis subdominios, tres del dominio

MK —el KoT (conocimiento de los temas), el KSM (conocimiento de la estructura matemática) y el KPM (conocimiento de la práctica de la matemática)— y otros tres del dominio PCK —el KFLM (conocimiento de las características de aprendizaje de matemáticas), el KMT (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas) y el KMLS (conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas)—. El modelo MTSK incluye las concepciones (creencias, originalmente), tanto de la matemática como de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

El análisis exploratorio de datos y el ciclo investigativo PPDAC

El análisis exploratorio de datos (EDA) permite explorar el comportamiento de los datos, esto es, pensar, conjeturar y aprender desde los datos, impulsando un análisis inicial, cuya principal característica es ser exploratorio, lo que supone un tratamiento más flexible y un uso más amplio de distintas representaciones. El EDA promueve la búsqueda de regularidades interesantes a través de la exploración de los datos sin restricciones, cuyo análisis resultante está basado únicamente en lo que se ve en los datos y sólo aplica a los individuos y circunstancias para los cuales fueron recolectados, por lo que las conclusiones son informales, sin todavía hacer inferencias formales sobre alguna población (Cf., Tukey, 1977, 1980). Por su parte, Ben-Zvi (2016) propone tres paradigmas en la disciplina estadística, uno de los cuales es EDA.

El ciclo investigativo PPDAC (i.e., *problema*, *plan*, *datos*, *análisis* y *conclusiones*) es un proceso estadístico y como metodología de enseñanza permite estructurar una clase estadística (e.g., Estrella, 2017, 2018; Estrella & Vidal-Szabó, 2017; Franklin et al., 2015; Makar & Fielding-Wells, 2011). El PPDAC contempla un *problema* que requiere un *plan* que permita obtener los *datos* reales para ser respondido, dando inicio al EDA, mediante la elaboración de representaciones y/o la obtención de distintas medidas de resumen, lo que permite *analizar* los datos, se consiguen las *conclusiones* dando respuesta al problema inicial, e incluso, pueden generarse nuevas interrogantes (ver Figura 2).

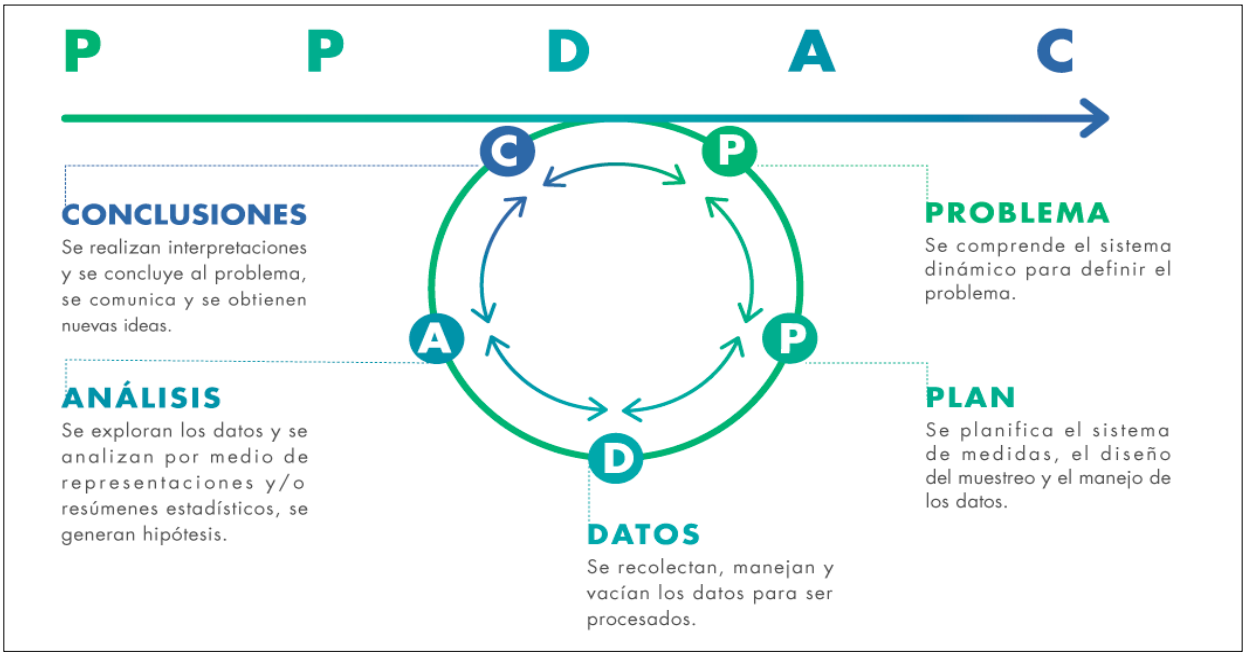


Figura 2. Ciclo PPDAC.

Razonar con datos es complejo y requiere de la imaginación de los sujetos para producir una red de conexiones entre el conocimiento contextual y el estadístico (Pfannkuch & Rubick,

2002). Así, el EDA en diálogo con el ciclo PPDAC permite contrastar las ideas iniciales del estudiante sobre el problema de interés (en un rol de investigador) y el comportamiento real de los datos, lo cual provoca un progreso en la comprensión inicial, e incluso, puede cambiar la forma de cómo se entendían los datos, acentuando algunos atributos y generando nuevas preguntas en concordancia al problema inicial.

Enfoque metodológico

Mediante una revisión de la literatura referida a la *Didáctica-de-la-Estadística*, hemos recabado información para ajustar el modelo MTSK al dominio de la estadística. A continuación, presentamos la propuesta preliminar levantada.

Propuesta de extensión del modelo MTSK al dominio estadístico

Desde el modelo MTSK, consideramos los dominios SK (conocimiento estadístico) y PCK (conocimiento didáctico del contenido). El dominio SK contiene los subdominios KoT estadístico (conocimiento de los temas estadísticos), el KSS (conocimiento de la estructura estadística) y el KPS (conocimiento de la práctica de la estadística). En tanto, el dominio PCK abarca los subdominios: KST (conocimiento de la enseñanza de la estadística), KFLS (conocimiento de las características de aprendizaje de la estadística) y KSLS (conocimiento de los estándares de aprendizaje de la estadística). A continuación, caracterizamos cada uno de los subdominios:

KoT estadístico. El conocimiento de los temas estadísticos considera aspectos fenomenológicos, significados de conceptos o ejemplos específicos que caracterizan a un tema estadístico en particular. La variabilidad, la incertidumbre y el contexto de los datos han de ser considerados transversales a cualquier tema estadístico. Wild, Utts y Horton (2018) indican que la estadística es esencialmente interdisciplinaria, pues los estadísticos o los usuarios de la estadística requieren pensar de forma estadística, matemática y computacional.

KSS. El conocimiento de la estructura estadística abarca la conexión conceptual, en el que han de considerarse las distintas medidas (centro, dispersión, forma, entre otras) y las distintas representaciones de datos con las respectivas conexiones, bajo un cierto contexto específico. Activar este tipo de conocimiento, requiere de un razonamiento estadístico, el cual permite que un sujeto pueda conectar un concepto a otro (e.g., ideas de centro con la dispersión de los datos), o puede combinar ideas acerca de los datos y el azar, también comprender y ser capaz de explicar e interpretar cabalmente los procesos y los resultados estadísticos, según Ben-Zvi y Garfield (2004).

KPS. El conocimiento de la práctica de la estadística precisa sobre el quehacer estadístico, el cual puede reflejarse en el ciclo PPDAC para una investigación empírica con datos. Por ejemplo, Pfannkuch y Wild (2000) realizan una investigación en el que reportan sobre el quehacer estadístico de distintos sujetos (profesionales o usuarios de la estadística), y precisan al ciclo PPDAC como una dimensión del modelo 4-dimensional del pensamiento estadístico.

KST. El conocimiento de la enseñanza de la estadística ha de tener en cuenta los paradigmas EDA, estadística inferencial informal y modelación con sus relaciones (Cf., Ben-Zvi, 2016), también las sugerencias del informe GAISE (Franklin et al., 2007; Aliaga et al., 2012). Este tipo de conocimiento puede tomar al ciclo PPDAC como un referente de diseño de enseñanza para distintos propósitos formativos, en que el trabajo sea con datos reales.

KFLS. El conocimiento de las características de aprendizaje de la estadística refiere al proceso de comprensión de los estudiantes de los distintos contenidos, los errores, dificultades y obstáculos asociados a cada concepto y/o el lenguaje que habitualmente es usado por los estudiantes para expresar ideas estadísticas. Por ejemplo, Ben-Zvi y Garfield (2004) reportan que

los estudiantes vinculan la estadística con la matemática y se enfocan en números, cálculos, fórmulas y una única respuesta correcta (i.e., énfasis en el conocimiento procedimental), por lo que se sienten incómodos con el desorden de los datos, las diferentes interpretaciones posibles en función de diferentes supuestos, y el uso de escritura y habilidades de comunicación.

KSLS. El conocimiento de los estándares de aprendizaje de la estadística busca prolongar el conocimiento de los objetivos y estándares de aprendizaje de lo local a lo global, dando acceso a la mejora de la práctica del profesor de matemática que enseña estadística. Así por ejemplo, consultar Franklin et al. (2007, 2015) y Aliaga et al. (2012), entre otros, da la oportunidad de revisar algunas recomendaciones útiles a la hora de crear un diseño de enseñanza estadístico que responda a las necesidades propias de los aprendizajes locales.

Reflexiones finales

Dar respuesta a la pregunta inicial —¿qué conocimiento especializado podría considerarse para la formación del profesorado de matemática que enseña estadística en el contexto de la educación primaria?— requiere considerar los dominios referidos al conocimiento estadístico y al conocimiento didáctico del contenido estadístico, los cuales desglosados en subdominios permiten operacionalizar y especificar cada dominio, pudiendo permitir, por ejemplo, una interconexión entre tales subdominios al diseñar una propuesta de enseñanza para el profesorado en formación, y realizar una exploración del conocimiento del profesor que enseña estadística.

La propuesta de modelo que extiende el modelo MTSK al dominio estadístico, permite precisar los conocimientos que requiere el profesorado que enseña estadística a nivel escolar en primaria —lo cual podría actuar como un referente para el formador de profesores— y contribuir a la enseñanza de la estadística, diferenciándola de la enseñanza de la matemática, permitiendo mayores oportunidades de aprendizaje estadístico.

Proyectamos que la extensión del modelo MTSK al dominio estadístico podría considerar las concepciones que posee el profesorado, respecto a la estadística, a su enseñanza y su aprendizaje en el ámbito de la educación primaria, pues esto permitiría progresar en el conocimiento especializado del profesorado en el área de la estadística escolar en tanto se aborden ciertas dificultades de índole epistemológica, cognitiva o didáctica.

Referencias y bibliografía

Aliaga, M., Cobb, G., Cuff, C., Garfield, J., Gould, R., Lock, R., ..., Velleman, P. (2012). *Guidelines for assesment and instruction in statistics education (GAISE) college report*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Recuperado de http://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/2005GaiseCollege_Full.pdf#page=4

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. En Autores (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3–15). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985–2994). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Carrillo, J., Contreras, L.C., y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigacion*

en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (pp. 193–200). Granada: Editorial Comares.

Cobb, G., & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly, 104*(9), 801–823.

English, L. (2010). Young children's early modelling with data. Mathematics Education Research Journal, *22*(2), 24–47. doi: 10.1007/BF03217564

English, L. (2012). Data modeling with first-grade students. Educational Studies in Mathematics, *81*(1), 15–30. doi: 10.1007/s10649-011-9377-3

Estrella S. (2018) Data Representations in Early Statistics: Data Sense, Meta-Representational Competence and Transnumeration. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris & E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education. Early Mathematics Learning and Development* (pp. 239–256). Singapore: Springer. doi: 10.1007/978-981-13-1044-7_14

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.), Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI (pp. 173–194). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

Estrella, S., y Vidal-Szabó, P. (2017). Alfabetización estadística a través del Estudio de Clase: representaciones de datos en primaria. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *78*, 12–17.

Estrella, S, Olfos, R., Morales, S., y Vidal-Szabó, P. (2018). ETM en el dominio de la estadística temprana: dos casos de estudiantes de grado 2 y sus representaciones de datos. MENON: Journal of Educational Research, 4, 93–109. Recuperada de http://www.edu.uowm.gr/site/content/menon-journal-educational-research-4th-thematic-issue-november-2018

Estrella, S., Zakaryan, D., Olfos, R., & Espinoza, G. (2019). How teachers learn to maintain the cognitive demand of tasks through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Recuperado de https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-018-09423-y

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assesment and instruction in statistics education (GAISE) report: a preK-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Recuperado de http://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEPreK-12_Full.pdf#page=5

Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R., & Spangler, D. (2015). *The statistical education of teachers*. Alexandria, VA: The American Statistical Association.

Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content. The case of statistics. *International Statistical Review*, *65*(2), 123–165. Recuperado de https://iase-web.org/documents/intstatreview/97.Moore.pdf

Petocz, P., Reid, A., & Gal, I. (2018). Statistics Education Research. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 71–99). doi:10.1007/978-3-319-66195-7

Pfannkuch, M., & Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal*, *1*(2), 4–21. Recuperado de https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ1(2).pdf#page=6

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2000). Statistical thinking and statistical practice: Themes gleaned from professional statisticians. *Statistical science*, *15*(2), 132–152. doi:10.1214/ss/10092 12754

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Co.

Tukey, J. (1980). We Need Both Exploratory and Confirmatory. *The American Statistician, 34*(1), 23–25. doi: 10.2307/2682991

Wild, C., Utts, J., & Horton, N. (2018). What Is Statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5–36). doi:10.1007/978-3-319-66195-7

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223–248. Recuperado de http://www.mty.itesm.mx/dtie/deptos/m/ma00-835/Articulos-otros/Wild-y-Pfannkuch-1999-Stadistical-Thinking.pdf#page=2

Zieffler, A., Garfield, J., & Fry, E. (2018). What Is Statistics Education? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 37–70). doi:10.1007/978-3-319-66195-7.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Mapas conceituais como ferramenta para reflexão do professor de matemática

Mapas conceptuales como herramienta para la reflexión del profesor de matemáticas

Claudete **Cargnin**
Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
cargnin@utfpr.edu.br

Adriele Carolini **Waideman**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (PPGMAT)
Brasil
adrielecarolini@hotmail.com

Silvia Teresinha Frizzarini
Universidade do Estado de Santa Catarina
Brasil
stfrizzarini@hotmail.com

Resumo

Esse artigo tem por objetivo apresentar reflexões de professores ao elaborarem um mapa conceitual durante o preparo de uma aula, visando divulgar a importância de o docente refletir para a ação, na ação e sobre a ação pedagógica, ou seja, ter uma prática reflexiva. Essa atividade foi um desafio proposto a alunos, professores em exercício, da disciplina Introdução à Didática da Matemática do Programa de Mestrado Profissional em ensino de Matemática, no primeiro semestre de 2017, cujas reflexões e análises compuseram um relatório entregue no final do curso. Nesse contexto, o mapa conceitual foi utilizado como ferramenta de avaliação da prática. Os professores assinalaram a necessidade de maior reflexão sobre o assunto para a construção do mapa, além de maior análise sobre as ligações entre os conteúdos abordados, acarretando aulas com maior qualidade e profundidade, deixando de ser uma cópia fiel do livro texto utilizado em sala de aula.

Palabras clave: formação continuada de professores; mapa conceitual; matemática; didática; prática reflexiva.

Introdução

Em dicionários da língua portuguesa, a palavra "formação" se refere ao ato ou efeito de formar, de constituir. Ao ajuntarmos a palavra "continuada" nos referimos ao ato de formar-se continuamente. No magistério, assim como em outras profissões, a formação continuada é imprescindível, seja para aprender a lidar com os discentes que a cada dia chegam com novos conhecimentos e habilidades, seja para atualizar-se em relação às ferramentas metodológicas e didáticas para utilização em sala de aula.

Apesar dessa importância, no Brasil, ainda há muito a ser feito, principalmente pensando que essa formação deve trazer benefícios para a sala de aula, em prol da qualidade da educação. Segundo Ribas (2000), são poucos os efeitos surtidos pela formação continuada oferecida pelos órgãos do Estado aos professores da rede pública; apesar de algumas mudanças positivas, existe a descontinuidade das propostas implementadas pelos governos, sem atender às necessidades da escola e dos professores, pois falta uma política séria de capacitação. No entanto, o ato do professor ter que refletir sobre suas ações em sala de aula, na ação, para a ação e sobre a ação, contribui para o seu desenvolvimento profissional e pessoal. Sendo assim, este artigo tem por objetivo apresentar reflexões sobre as mudanças comportamentais de professores, em sala de aula, a partir da utilização de mapas conceituais no processo de elaboração e organização dessas aulas.

Os dados utilizados nesse artigo foram obtidos no ano letivo de 2017, com uma turma de 15 alunos de um programa de pós-graduação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, destinado a professores que efetivamente atuam em sala, na disciplina de Introdução à Didática da Matemática. Foi usada a seguinte questão norteadora: quais as percepções de um professor sobre sua prática profissional ao se defrontar com a elaboração de um mapa conceitual?

Divulgar as reflexões de tais professores, mesmo com recortes, pode fazer com que outros docentes se sintam impelidos a trilhar por novos caminhos, em prol da qualidade na educação matemática, pois, como afirmam Oliveira e Serrazina (2002, p. 32):

Quando se pensa em ensino da Matemática, a reflexão pode partir de diversos aspectos, uns relativos à organização e gestão da sala de aula, outros relativos à compreensão matemática, isto é, à medida que se 'conversa reflexivamente com a situação' vai-se sendo capaz de tornar explícito o seu conhecimento matemático—falar sobre os procedimentos e não apenas descrevê-los (OLIVEIRA & SERRAZINA, 2002, p.32).

Durante a disciplina, como o grupo participante não conhecia os mapas conceituais, um mapa foi elaborado e discutido coletivamente, após isso, para cada teoria estudada (a saber: Teoria de Situações Didáticas, Teoria de Registro de Representação Semiótica e Teoria dos Campos Conceituais) os professores-cursistas estudavam-na previamente e apresentavam sua síntese em um mapa conceitual no dia da aula. Em paralelo, os cursistas foram convidados a utilizarem os mapas conceituais para preparar as aulas que ministravam e compartilhar suas percepções e reflexões num texto coletivo, elaborado na ferramenta wiki do MOODLE (acrônimo de "Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment", software livre executado em ambiente virtual). São os mapas apresentados neste texto que são retratados nesse artigo.

A utilização de mapas conceituais na Educação Matemática

Os mapas conceituais (MC) são ferramentas bidimensionais cuja finalidade é organizar e representar o conhecimento que está sendo construído por um indivíduo em um dado momento. Isso é feito por meio da apresentação de conceitos-chave e relações entre tais conceitos, escritos em proposições chamadas de frases de ligação, as quais unem dois conceitos quaisquer do mapa (CARGNIN, 2013).

A utilização dessa ferramenta em Educação Matemática ainda está em um processo de desenvolvimento, entretanto, pesquisas como as de Waideman e Cargnin (2018), Cargnin e Dias (2017), Pivatto e Silva (2014), Cargnin (2013), Cargnin e Barros (2013), Souza e Burovitch (2010), entre outros, indicam sua potencialidade para acompanhamento da construção do conhecimento discente, bem como para avaliação. Em áreas como Física e Química a utilização de mapas conceituais como uma ferramenta tanto de ensino quanto de aprendizagem parece estar mais avançada.

Um mapa conceitual tem como característica a hierarquização, na qual os conceitos mais gerais ficam dispostos no topo, seguido por desdobramentos, indicando uma diferenciação progressiva. È interessante notar que o MC elaborado por um indivíduo é único, pois retrata a forma e ligações que esse indivíduo faz em relação a um determinado tema. Contudo, as ligações cruzadas e a reconciliação integrativa que se apresentam, ou não, em um MC, desvelam o modo de apropriação do conhecimento pelo sujeito que o elabora. Nesse sentido, o MC pode agir como uma ferramenta de aprendizagem, ou de acompanhamento de uma conceitualização, ou ainda, como auxiliar na elaboração de uma aula.

Na diferenciação progressiva "um determinado conceito é desdobrado em outros conceitos que estão contidos (em parte ou integralmente) em si" (TAVARES, 2007, p.73), enquanto que na reconciliação integrativa

um determinado conceito é relacionado a outro aparentemente díspar. Um mapa conceitual hierárquico se ramifica em diversos ramos de uma raiz central. Na reconciliação integrativa um conceito de um ramo da raiz é relacionado a um outro conceito de outro ramo da raiz, propiciando uma reconciliação, uma conexão entre conceitos que não era claramente perceptível (TAVARES, 2007, p.74).

O ponto de vista dos professores investigados

Para o presente artigo, apresentamos algumas reflexões motivadas pela utilização de mapas conceituais para a preparação de uma aula, bem como nas implicações positivas que a análise de um mapa conceitual feita por uma colega de curso pode trazer. Para manter o anonimato, os autores serão nomeados simplesmente por P com um índice para diferenciar cada professor.

O mapa da Figura 1, por exemplo, foi feito pela professora P_1 tendo como base o livro didático adotado em sua escola.

A própria autora do mapa, quando foi analisar sua construção, disse "[…]percebi que fiquei muito presa no livro ao construir o mapa e isso fez com que meu mapa ficasse pequeno e com poucas informações. Após concluir, pensei que poderia buscar conceitos e informações em outros lugares, pois assim, construiria um mapa mais completo […], a maior dificuldade foi nas frases de ligação".

Perceba que nesse processo construtivo, a professora sentiu necessidade de aprofundar seus

conhecimentos sobre o tema, e mesmo tendo formação em matemática, relatou dificuldades em escrever as frases de ligação entre os conceitos, indicando que a construção de um mapa conceitual por professores pode sim se tornar uma ferramenta útil para reflexão e formação continuada. Nesse momento, entram em cena a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa ajudando o docente a refletir sobre o conteúdo que ensina. O depoimento de P_1 corrobora Oliveira e Serrazina (2002, p.29) quando as autoras afirmam que: "O conceito de **prática reflexiva** surge como um modo possível dos professores interrogarem as suas práticas de ensino. A reflexão fornece oportunidades para **voltar atrás e rever** acontecimentos e práticas" (grifo nosso). Defendemos que o uso de mapas conceituais proporciona a reflexão sobre a prática, como pode ser observado no depoimento de P_1.

Em relação à questão do livro didático, esse depoimento vai de encontro às conclusões da pesquisa de Frison et al (2009) sobre a relação que o professor tem com ele: "A pesquisa mostra que o livro didático é utilizado pela maioria dos professores como instrumento principal que orienta os conteúdos que devem ser desenvolvidos, a seqüência desses conteúdos, as atividades de aprendizagem e a avaliação para o ensino" (FRISON et al, 2009, s/p). Com isso, cabe a pergunta: será que em uma década a relação dos professores com o livro mudou e P_1 é um caso isolado? Talvez não. Nesse contexto, o fato de o professor ter que pensar para fazer um mapa conceitual sobre um assunto/conteúdo favorece confrontos de ideias e uma maior reflexão sobre as relações envolvidas, consequentemente proporcionando uma aprendizagem mais efetiva, pois como afirma Carabetta Junior (2-13, p.442):

que a aprendizagem de conceitos seja efetiva, é necessária a conscientização do professor de que ele é o elemento responsável por conduzir o aluno na estruturação do conhecimento. E que, para isto, deve dispor de uma prática pedagógica que torne significativos os conteúdos trabalhados e que realize a interação entre o que vai ser aprendido com a estrutura cognitiva do indivíduo por um processo de assimilação entre antigos e novos significados, visando possibilitar a diferenciação cognitiva.

Na disciplina em que o desafio de criar mapas ao planejar uma aula foi proposto, com autorização dos participantes do curso, os mapas construídos foram disponibilizados[1] para avaliação dos demais colegas de turma, visando incentivar o desenvolvimento do senso crítico e reflexões mais aprofundadas sobre os temas. Sobre o mapa da Figura 1, a professora P_2 analisou "*poderíamos propor algumas mudanças [...] acrescentar os símbolos que os representam como: N, Z, Q, I [...] fazer um conectivo ligando o conjunto dos números naturais, inteiro, racional e irracional ao único conceito "conjunto reais" para os alunos entender que todos esses conjuntos formam o único conjunto dos números Reais"*.

Por meio desse confronto de ideias e reflexões, os professores, acreditamos, estavam efetiva e continuamente em formação. O fato de analisar a produção do outro fez com que cada participante refletisse os conteúdos em tela e sobre a maneira pela qual o abordavam em sala, ou seja, estavam refletindo para a ação ao mesmo tempo em que refletiam sobre a ação. Segundo Oliveira e Serrazina (2002, p.31), "É ao reflectir sobre a acção que se consciencializa o conhecimento tácito, se procuram crenças erróneas e se reformula o pensamento".

[1] Os arquivos foram disponibilizados a todos os cursistas por meio da ferramenta Wiki, do MOODLE institucional.

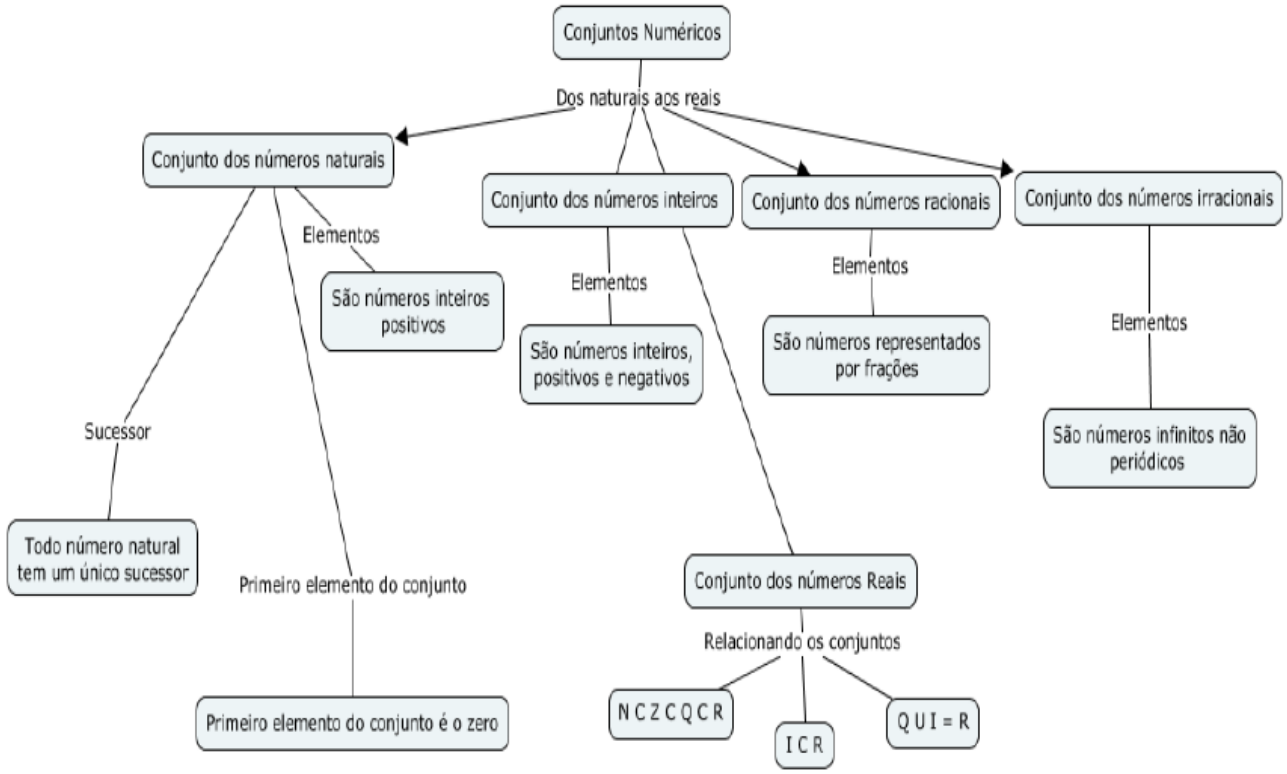


Figura 1. mapa conceitual sobre conjuntos numéricos da professora P_1.

A professora P2 relatou que a construção de um mapa conceitual permite "*conhecer a fundo tal conteúdo*", o que acarreta em questionamentos como "*quais conceitos estão interligados? Como estão ligados?*". Relata ainda que desenvolveu um mapa sobre formas geométricas, porém teve dificuldades quanto aos conectivos e em relação a alguns conceitos propriamente. Note que a partir desse movimento de construção do mapa ao preparar uma aula, a professora manifestou reflexões para a ação, o que, provavelmente, promoverá um tratamento teórico mais consistente em sala de aula.

Nesse mesmo sentido, comenta a professora P_3: "Essa experiência, sendo o meu primeiro mapa conceitual sozinha, foi estranha, escolhi um conteúdo que eu iria dar aula, derivadas de funções de duas variáveis, e embora conceitos estivessem claro na minha cabeça, ao realizar o mapa, percebi que talvez não estivesse tanto assim, sabendo mais o processo mecânico, mas não o real significado, ou até mesmo, as ligações entre os conceitos. Portanto o meu MC[mapa conceitual] ficou mais um esquema, sem entrelaçamentos entre os conceitos".

Esses depoimentos apresentados, a nosso ver, ressaltam que, por melhor que tenha sido a graduação do professor, ele sempre está em formação e precisa buscar novos conhecimentos ou compreensões, e a elaboração de um mapa conceitual favorece essa revisão por, justamente, incitar reflexões que nem sempre são realizadas durante a prática efetiva.

A Figura 2 retrata a apresentação final de um mapa conceitual sobre potenciação, elaborado por P_4, após discussão coletiva sobre como os expoentes positivos e negativos relacionavam-se com as propriedades de multiplicação e divisão.

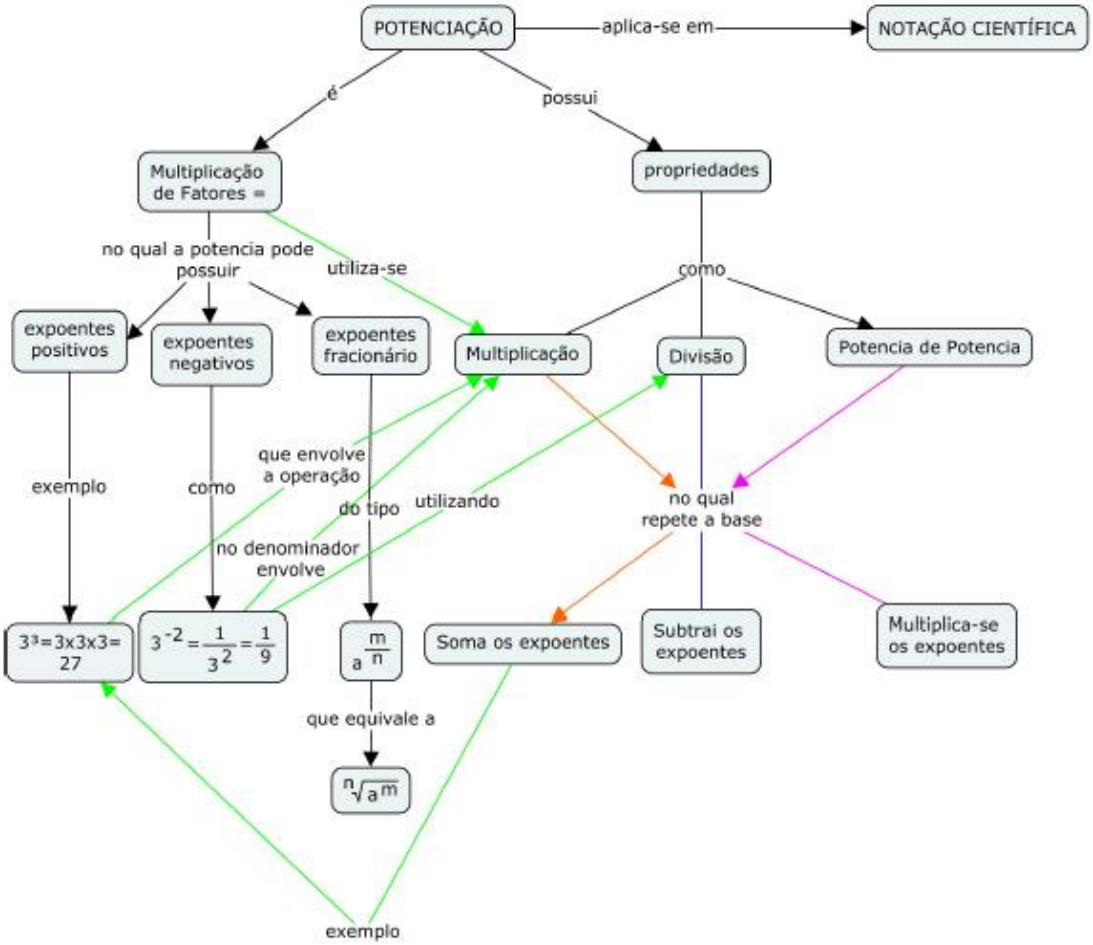


Figura 2. Versão final do Mapa sobre potenciação elaborado por P_4

Sobre a contribuição dos mapas, o professor P_5 afirmou: "O mapa conceitual e uma maneira eficaz de verificar se a aprendizagem ocorreu de maneira efetiva. É um instrumento didático rico que aborda conceitos, relações entre conceitos e contribui para a organização dos conteúdos". P_6 complementa: "Na elaboração de um mapa conceitual, o mesmo leva a pesquisar além do que foi abordado, sendo que para relacionar um conceito ao outro o aluno sempre deve ter atenção ao conectivo (palavra que serve de elo entre um conceito e outro) aumentando ainda mais o conhecimento adquirido pelo aluno". P_7 e P_8 corroboram P_6 quando comentam que tiveram que pesquisar muito para montarem um mapa sobre figuras planas, já que o livro didático usado como base apresentava o conteúdo de forma muito sucinta.

A professora P_9 relatou a utilização de mapas conceituais com um aluno sobre as equações polinomiais, destacando o aumento do interesse discente em compreender como os conceitos se relacionavam. Segundo a professora, trabalhar com os mapas facilitou explorar aspectos que ainda não estavam suficientemente claros para o estudante e observar quais novas ligações entre os conceitos poderiam ser efetuadas.

Em relatório conjunto produzido pelas professoras P_9, P_{10} e P_{11}, elas afirmam: "Ao construir o mapa conceitual na aula, foi possível verificar claramente seu caráter epistemológico uma vez que obtém-se maior clareza do conteúdo trabalhado, percebemos que as ideias se organizam e isto fica muito claro visualmente. Construir em colaboração também enriqueceu o

trabalho uma vez que as visões se confrontaram e passamos a perceber o outro, como ele pensou o assunto". Mais adiante no relatório, as autoras reforçam: "construir mapas coletivamente ou em duplas pode se tornar uma atividade enriquecedora uma vez que proporciona trocas enriquecedoras entre os participantes, instigando o aprofundamento de conceitos".

Por fim, concordamos com Carabetta Junior (2013, p.443) quando ele diz que o mapa conceitual "constitui uma estratégia pedagógica de grande relevância no ensino para a construção de conceitos científicos pelos alunos, ajudando-os a integrar e relacionar informações, atribuindo, assim, significado ao que estão estudando".

Considerações Finais

Esse artigo teve por objetivo apresentar reflexões de professores acerca das atitudes em sala de aula a partir da construção de um mapa conceitual sobre um determinado conteúdo (escolhido pelo professor), antes de ministrá-lo.

Percebeu-se, pelos relatos docentes, que a necessidade de criação de um mapa conceitual favoreceu a prática reflexiva, já que, a partir disso, alguns professores mencionaram consultar outras fontes antes de ministrar uma aula. Além disso, algumas perguntas essenciais como "como esses conceitos se relacionam?" foram feitas, talvez pela primeira vez. Alguns dos professores investigados nessa pesquisa indicaram surpresa ao não conseguirem fazer o mapa rapidamente. Foi nesse processo de construção que perceberam que muitos "detalhes" importantes dos conteúdos estavam sendo deixados de lado (isso foi mencionado especialmente por docentes que há muito tempo trabalhavam a mesma disciplina).

Os professores indicaram dúvidas e dificuldades ao elaborarem as frases de ligação entre dois conceitos no mapa conceitual, entretanto, é salutar afirmar que esse pode ter sido um movimento inicial de repensar as aulas e o conteúdo que a envolve. Ao final do curso, diversos professores afirmaram já terem mudado seu modo de "enxergar" os conteúdos matemáticos e que já estavam utilizando estratégias diferentes para trabalhá-los, porque começaram a perceber relações diferentes entre os conceitos presentes em cada conteúdo. De modo geral, os professores que fizeram essa disciplina atestaram aumento na qualidade das suas aulas, a partir do momento que começaram a usar mapas conceituais para sua elaboração e preparação.

Finalizamos reconhecendo os atuais desafios docentes para a sala de aula, entretanto, ressaltamos a importância de reflexão sobre a prática, de uma prática docente reflexiva, a que a elaboração de um mapa conceitual pode proporcionar.

No curso citado neste artigo, muitos professores terminaram dizendo que as aulas não seriam mais as mesmas, que o próprio agir frente às dificuldades dos alunos recebeu um outro olhar e que puderam perceber suas limitações, inclusive em relação aos conteúdos que ensinavam. Esperamos que essa ferramenta chamada "mapa conceitual" possa ser útil a outros professores, e, a partir dela, muitos outros estudantes tenham acesso a uma educação matemática de maior qualidade.

Referências

Carabetta Junior, V. (2013) A utilização de mapas conceituais como recurso didático para a construção e inter-relação de conceitos. *Revista Brasileira de Educação Médica, 37(3), 441-447.*

Cargnin, C. (2013). *Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real*:

possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas. 2013. 416 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

Cargnin, C., & Barros, R.M.O. (2013). O uso de mapas conceituais em aulas de Cálculo. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia.*, 6,1,117-128.

Cargnin, C., & Dias, B.C. (2017). Reflexões sobre o ensino de matemática numa cidade do interior do Estado do Paraná – Brasil. *Interacções, 46, 131-145.* Disponível em http://www.eses.pt/interaccoes.

Frison, M.D. et al. (2009). Livro didático como instrumento de apoio para construção de propostas de ensino de ciências naturais. *Anais do VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*, Florianópolis, Brasil. Disponível em http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viienpec/pdfs/425.pdf Acesso em 24 out. 2018.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). *A reflexão e o professor como investigador*. Disponível em http://apm.pt/files/127552_gti2002_art_pp29-42_49c770d5d8245.pdf Acesso em 28 out. 2018.

Pivatto, W. & Silva, S.C.R. (2014). Mapas conceituais: estratégias pedagógicas para a construção de conceitos históricos na disciplina de matemática. *Zetetiké*, 22, 1, 115-141.

Ribas, M.H. (2000). *Construindo a competência*: processo de formação de professores. São Paulo: Olho d'água.

Souza, N.A., & Boruchovitch, E. (2010). Mapas Conceituais: estratégias de ensino/ aprendizagem e ferramenta avaliativa. *Educação em Revista*, 26,3, 195-218.

Tavares, R. Construindo Mapas Conceituais. (2007). *Ciência & Cognição*, 12, 72-85.

Waideman, A. C. & Trevisan, A. L., & Cargnin, C. *Reflexões sobre o uso de Mapas Conceituais no Ensino de Derivadas nas Aulas de Cálculo Diferencial e Integral*. 2018. (No Prelo).

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Reflexões sobre a formação de professores na perspectiva do ensino de matemática para uma aluna com Síndrome de Jacobsen

Ana Paula de Souza **Colling**
Universidade Feevale
Brasil
apcolling1@gmail.com
Marlise **Geller**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
marlise.geller@gmail.com

Resumo

Este artigo é um recorte de uma tese de Doutorado com o objetivo de investigar o processo de aprendizagem de uma aluna diagnosticada com Síndrome de Jacobsen na perspectiva da educação matemática e mediado por diferentes sujeitos. A pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso, tem como participante central a aluna que, entre as limitações decorrentes da síndrome, apresenta comprometimentos cognitivos que dificultam a aprendizagem de conceitos matemáticos. Neste recorte trazemos a discussão sobre o ensino de matemática para alunos com deficiência, buscando sua inclusão escolar, de modo que os resultados apontam para a importância de professores preparados, com formação adequada e contínua, que contribuam na construção de uma escola que respeite as diferenças e busque o desenvolvimento das potencialidades de todos.
Palavras chave: ensino de matemática, formação de professores, síndrome de jacobsen, inclusão escolar, educação matemática inclusiva, estudo de caso.

Introdução

Todos têm direito à educação e, deste modo, a inclusão escolar possibilita o desenvolvimento dos alunos, por meio de atividades que busquem enfatizar as potencialidades, respeitando as dificuldades e limitações, estas observadas de maneira individual, com o objetivo de propor práticas pedagógicas que oportunizem a aprendizagem de todos.

O recorte da investigação origina-se da tese de Doutorado "Olhares da inclusão: estudo sobre o processo de aprendizagem matemática de uma aluna com Síndrome de Jacobsen", com foco na formação de professores para o trabalho com classes inclusivas, em especial os professores de matemática, buscando a construção de conceitos matemáticos e as habilidades necessárias para sua aprendizagem, visando identificar as limitações nos processos de formação

voltados para o ensino para alunos com deficiência.

A inclusão escolar, de acordo com Machado (2008), vem romper com o paradigma educacional que privilegia o conhecimento científico e classifica os alunos em níveis de desenvolvimento, propondo maneiras de pensar a escola a partir de novas formas de concepção do conhecimento escolar, das avaliações e dos alunos. Desse modo, a inclusão escolar pode ser vista como um desafio, principalmente para os professores, sendo uma tarefa que exige dedicação, planejamento diferenciado, pesquisa, entre outros fatores que trazem a importância de estudos sobre a temática, que sirvam como ferramenta de apoio aos professores e comunidade escolar para o cotidiano nas escolas. No Brasil, as mudanças relacionadas a educação inclusiva geraram a busca por métodos de ensino que auxiliem na aprendizagem dos alunos, com modelos eficazes, renovados e flexíveis, abertos as necessidade educativas de todos.

Contudo, neste trabalho, trazemos considerações sobre a necessidade de professores com formação adequada, que estejam preparados para os desafios das salas de aulas inclusivas, a partir das análises realizadas com os professores que trabalham com a aluna, diagnosticada com uma síndrome rara, buscando uma escola que assuma a diversidade e reconheça o direito à diferença como enriquecimento a comunidade escolar.

Os desafios da escola inclusiva brasileira

A Política Nacional de Educação, na perspectiva da Educação Inclusiva, trouxe consigo um novo cenário para as escolas brasileiras, criando novos espaços que impulsionaram as práticas inclusivas nas escolas públicas e propondo novos programas de formação continuada para professores da Educação Básica.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Brasil (1996), traz que os sistemas de ensino devem assegurar aos alunos com deficiência currículos, métodos, técnicas, recursos educativos e organização específica que atendam suas necessidades. Entende-se por inclusão a garantia de acesso contínuo ao espaço comum da vida em sociedade, por todos, sendo esta orientada por relações de acolhimento à diversidade humana e aceitação das diferenças entre os indivíduos, sendo a inclusão escolar e a garantia de acesso aos conteúdos básicos que a escolarização deve proporcionar a todos, parte integrante deste processo.

A escola inclusiva, consciente de sua função, deve se colocar a disposição do aluno, tornando-se um espaço que permita que os alunos com deficiência atinjam os objetivos da educação geral. Assim, são necessárias melhorias contínuas na estrutura e funcionamento dos sistemas de ensino, com qualificação crescente do processo pedagógico para educação na diversidade. Entre as ações necessárias está a formação de professores para o trabalho em salas de aulas inclusivas, sendo que estes devem ser capazes de lidar com a diferença, sabendo trabalhar em equipe e estando em constante busca por métodos diferenciados de ensino.

Machado (2008) traz que a escola privilegia o conhecimento científico e, de acordo com a autora, a escola inclusiva rompe com esse paradigma educacional, apontando outras maneiras de pensar dentro da escola, observando novas formas de concepção do conhecimento escolar, das avaliações e, principalmente, dos alunos. Todo aluno é capaz de aprender, com diferentes tempos e caminhos, desse modo, exigindo dos professores a reflexão quanto as suas práticas e fazendo com que estes acreditem nas possibilidades de aprendizagem de todos os alunos, proporcionando melhores práticas e considerando a liberdade de aprender de cada indivíduo, fazendo emergir a complexidade nas escolas e trazendo novas e diferentes formas de manifestação da aprendizagem.

Dentre os desafios da inclusão escolar está a nova postura que se deve assumir dentro dos

sistemas de ensino, com currículos, avaliações, métodos e estratégias que promovam a inclusão de todos em suas salas de aula e comunidade escolar, valorizando a diferença, de modo a oferecer uma educação de qualidade para todos, percebendo que o ensino aos alunos com deficiência deva ser concebido como um conjunto de recursos e ações que a escola deve dispor para atender a todos, contrastando com a visão anterior de um sistema de ensino paralelo e segredado (GLAT; FERNANDES, 2005).

A inclusão escolar não tem se mostrado um processo fácil e muitos alunos com deficiência permanecem nas escolas sem que sejam oferecidas condições de aprendizagem iguais a todos e, desse modo, há a necessidade de mudanças que vão além das escolas e salas de aula, redefinido práticas pedagógicas e educacionais que sejam compatíveis com a inclusão escolar, entre elas está a formação de professores para o trabalho em classes inclusivas, com reconstrução das práticas e reestruturação curricular, repensando esta prática a cada momento, encontrando meios de promover um ensino de qualidade para todos.

A formação de professores de matemática no contexto da escola inclusiva

Os alunos aprendem de formas diferentes e os professores devem estar preparados para o desafio da diversidade em sala de aula promovendo a adequada adaptação das atividades e avaliações, respeitando o tempo e o limite de cala aluno, oferecendo condições para que todos atinjam os objetivos traçados. Nas classes inclusivas os professores tem papel fundamental, sendo necessário que estes aceitem o aluno com deficiência, enxergando suas limitações e promovendo a efetiva inclusão na sua turma.

Canepa (2012) traz que o medo do desconhecido, daquilo que não fomos preparados para enfrentar, torna a inclusão um desafio para todos e, no caso dos professores, estes são levados a repensar sua prática e vivenciar uma realidade diferente daquelas conhecidas, enfrentando seus medos, buscando novas formas de ensinar e aprender com seus alunos e enxergar a todos, procurando desenvolver capacidades individuais.

A formação de professores de Matemática no Brasil, de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2001), trazem que os cursos de licenciatura têm como objetivo principal formar professores para a Educação Básica, assim, espera-se que o egresso destes cursos tenha visão quanto ao seu papel social de educador, sendo capaz de se inserir em qualquer realidade e contribuindo para a aprendizagem da Matemática, oferecendo aos seus alunos, além de formação para o exercício da cidadania, oportunidades de conhecimento acessível à todos, com consciência do seu papel frente a superação dos preconceitos relacionados ao ensino-aprendizagem da disciplina.

A formação de professores de Matemática deve contemplar uma parte comum, com conteúdos presentes na Educação Básica, tais como Álgebra, Geometria e Análise, além de conteúdos afins à Matemática, como Ciências da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática. Ainda, devem ser incluídos conteúdos profissionais, com estudos de diretrizes nacionais para a educação e formação de professores, com incentivo ao uso de tecnologias que contribuam para o ensino, sendo os conteúdos relacionados a educação inclusiva estudados dentro da parte comum, nos conteúdos considerados profissionais.

Ramos (2010) afirma que é fundamental que os professores que trabalham em classes inclusivas sejam especialistas em Educação Especial, de modo que estes estejam cientes de seu papel em oferecer planejamentos ricos em recursos didáticos, promovendo trocas com a equipe pedagógica e estudando sobre o tema da inclusão.

O professor tem papel fundamental no contexto inclusivo das escolas; porém, observamos

que a formação deve ser contínua e, de acordo com a LDBEN (BRASIL, 1996), são considerados dois perfis de professores para o trabalho em classes inclusivas: professor de classe comum capacitado, que comprove que em sua formação, de nível médio ou superior, foram incluídos conteúdos ou disciplinas sobre educação especial, e professor especializado em educação especial, que desenvolveu competências para identificar as necessidades educacionais dos alunos com deficiência, seja por formação em licenciatura em educação especial ou complementação de estudos ou pó-graduação em áreas específicas da educação especial.

Por fim, levando em consideração os desafios dos professores de Matemática em relação à inclusão na escola regular, bem como aspectos relacionados a formação deste professor, destacamos que devem ser oferecidas oportunidades de formação continuada, inclusive em nível de especialização, pelas instancias educacionais da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, sendo que o sucesso da inclusão escolar depende, de acordo com Veltrone e Mendes (2007), em grande parte do professor de classe comum capacitado, o qual deve estar capacitado para responder as diferentes necessidades de seus alunos, sendo capaz de propor situações de ensino-aprendizagem que favoreçam à todos.

Metodologia

A investigação consiste em uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso, visto que, de acordo com Yin (2010), permite investigar a realidade preservando suas características a partir do conhecimento de eventos da vida real sem, contudo, manipulá-los.

A metodologia do estudo de caso nos permitirá desvelar e intervir na realidade escolar da aluna, visto que esta é uma metodologia em educação que, de acordo com Carvalho (2012), é adequada para se examinar criticamente o estado da arte de aspectos relacionados a inclusão escolar, permitindo retratar uma determinada realidade e contextualizando-a.

A pesquisa teve seu início em uma escola inclusiva e, devido a troca de escolas pela aluna, participante central, no decorrer da mesma, a fim de investigação, foram consideradas outras duas escolas. A aluna em 2014, no início da pesquisa, estava matriculada no 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola regular inclusiva.

As etapas da pesquisa envolveram autorizações, sondagem, estudos sobre a síndrome, observações e intervenções, visitas, entrevistas, análise de material e análise de dados , estes observando-se além da participante central, outros participantes, como pais, professores em diferentes contextos, auxiliar e psicóloga.

No presente artigo apresentamos um recorte da tese, por meio dos dados obtidos com a análise quanto à formação dos professores envolvidos na investigação, destacando aqueles que trabalharam na disciplina de Matemática com a aluna na sala de aula inclusiva, no 5º ano do Ensino Fundamental.

Análise de dados

Apresentamos nessa seção a análise descritiva dos dados obtidos na investigação, começando pela caracterização de nosso sujeito principal da pesquisa.

Nosso sujeito principal da pesquisa nasceu em novembro de 2002 e, em janeiro de 2003, após encaminhamento do pediatra para um geneticista, obteve o diagnóstico de deleção no braço longo do cromossomo 11 na região q24, que caracteriza a deleção cromossômica denominada Síndrome de Jacobsen. Desde então possui acompanhamentos constantes de cardiologista,

pediatra, neurologista, oftalmologista, pneumologista, entre outros e, as avaliações neurológicas realizadas, destacaram atraso no desenvolvimento neuropsicomotor.

A Síndrome de Jacobsen é uma síndrome rara que apresenta anomalias congênitas múltiplas e atraso mental, sendo as características clínicas mais comuns o atraso no crescimento pré e pós-natal e atraso no desenvolvimento neuropsicomotor, com diagnóstico baseado em achados clínicos e confirmado por análise citogenética (GROSSFELD; MATTINA; PEROTTA, 2009).

O *Genetic and Rare Diseases Information Center*[1] (GARD) traz que os sintomas variam entre os indivíduos, apontando para o desenvolvimento atrasado de habilidades motoras e de fala e deficiência cognitiva, que gera dificuldades de aprendizagem acompanhadas por comportamentos compulsivos e diagnósticos de transtorno de déficit de atenção e hiperatividade (TDAH). Grossfeld, Mattina e Perotta (2009) relatam cerca de 200 casos na literatura referentes a Síndrome de Jacobsen, sendo que os tratamentos concentram-se nos sinais e sintomas específicos de cada indivíduo, exigindo deste modo, esforço de vários especialistas. No Brasil, de acordo com Colling e Geller (2018), há relatos de dezenove famílias com diagnóstico da síndrome, sendo a aluna considerada na investigação a segunda mais velha entre estes.

A pesquisa iniciou no ano de 2014 com acompanhamento escolar da aluna até o ano de 2016, sendo que no período ocorreu troca de escolas e, deste modo, são caracterizados três locais na pesquisa, sendo que neste artigo são consideradas duas escolas inclusivas denominadas Escolas 1 e 3, ambas privadas, sendo a primeira frequentada até maio de 2015 e a segunda, a partir de fevereiro de 2016.

A aluna em maio de 2015 foi transferida para uma escola especial, retornando no início de 2016 para a escola inclusiva. Cabe salientar que a aluna foi transferida da Escola 1 quando frequentava o 6º ano do Ensino Fundamental; porém, ao retornar para a Escola 3, decidiram pela matrícula no 5º ano do Ensino Fundamental e, conforme apontado por Colling e Geller (2018), esta decisão foi pautada no desenvolvimento da aluna, na recepção desta pelos colegas e pela professora ser especialista em educação especial. Os dados utilizados neste artigo retomam o 5º ano do Ensino Fundamental, sendo consideramos as professoras P4, P5, P6 e P8, além da PESQUISADORA, denominadas na investigação por letras maiúsculas seguidas por número. A escolha se deu, por estas em algum momento da investigação, trabalharem conceitos matemáticos com a aluna.

Colling e Geller (2015) trazem que em Matemática, o início da investigação se deu com a sondagem em relação aos registros do 4º ano do Ensino Fundamental, na Escola 1, e estes indicavam que a aluna compreendia noções de maior e menor relacionada a objetos, realizava correspondência entre número e quantidade e fazia agrupamentos até 10 utilizando material concreto. As análises das autoras das primeiras atividades realizadas apontavam noção da contagem até 7, sem compreensão do significado dos numerais e suas quantidades representativas e limitações de aprendizagem, entre elas dificuldade na fala, na motricidade fina e de concentração durante a realização das atividades propostas.

Com foco na formação dos professores que trabalharam com a aluna na busca da construção de conceitos matemáticos, a fim de compreender as impressões dos professores participantes da pesquisa, analisamos neste artigo as entrevistas realizadas com os mesmos. A

[1] Centro de informações sobre doenças genéticas e raras dos Estados Unidos, vinculado ao National Center for Advancing Traslational Sciences, financiado pelo U.S. Departament of Health Human Services e National Institutes of Heatlh, que fornece acesso público a informações sobre doenças genéticas ou raras em inglês e espanhol. Disponível em: <http://rarediseases.info.nih.gov/diseases/307/index#explanation>. Acesso em 30 maio 2017.

LDBEN (1996) traz que os professores que trabalham com classes inclusivas devem ser capacitados, comprovando que em sua formação, de nível médio ou superior, foram incluídos conteúdos ou disciplinas sobre Educação Especial. Em relação à formação dos professores que trabalhavam com a aluna na Escola 1, de acordo com Colling e Geller (2018), mesmo todos apresentando formação universitária completa, apenas a P5 afirmou ter realizado um curso sobre deficientes, este de apenas um encontro.

Quando questionada sobre a maior dificuldade relacionada ao trabalho diário a P5 relatou:

> A maior dificuldade foi a falta de contato com os especialistas que atendem ela. Muitas vezes me sentia no escuro, tateando, tudo era uma experimentação, meio sem propósito,..., no fim das contas, fiquei no trabalho com a motricidade fina.

Para Ramos (2010) as trocas entre equipes pedagógicas e estudos sobre o tema da inclusão são fundamentais na busca por planejamentos ricos em recursos didáticos que favoreçam o desenvolvimento dos alunos com deficiência. Ainda, de acordo com o GARD (2017), são necessários vários especialistas no tratamento de sinais e sintomas específicos dos indivíduos diagnosticados com a síndrome e pudemos verificar que a P5 trouxe em seu relato o sentimento quanto a falta de contato com os especialistas que trabalham com a aluna fora do ambiente escolar, como psicopedagoga, médicos e fonoaudióloga.

Ramos (2016) afirma ser fundamental que os professores que trabalham em classes incusivas sejam especialistas em Educação Especial e, em relação ao processo de inclusão nas escolas e classes regulares de ensino, quando questionada a P6 relatou que:

> Na minha opinião, precisamos avançar muito nestas questões, por enquanto, apenas abrimos as portas das escolas, mas não estamos capacitados para desenvolver um trabalho de qualidade.

Desse modo, podemos observar a importância de professores cientes de seu papel frente ao processo de aprendizagem dos alunos com deficiência, oferecendo planejamentos com recursos didáticos que promovam o desenvolvimento das habilidades dos alunos, respeitando suas limitações. Ainda, no caso da ALUNA, observamos a importância de meos de ensino que promovam o desenvolvimento de sua aprendizagem, visto que o diagnóstico da síndrome compromete sua capacidade cognitiva.

Em relação à disciplina de Matemática, durante o ano de 2014 a PESQUISADORA utilizou atividades em folhas brancas e coloridas, material concreto para contagem, como botões, palitos de picolés e grãos, além de jogos de memória, quebra-cabeça e atividades realizadas utilizando computador ou Tablet. Na Figura 1 temos uma das atividades realizadas em 2014 que tinha como objetivo o reconhecimento dos números e suas respectivas quantidades.



Figura 1. Adaptada de Colling e Geller (2018)

Em 2016 a P8, professora do 5º ano do Ensino Fundamental da Escola 3 priorizou, nas atividades propostas em Matemática, o reconhecimento dos números e seu traçado, realizando os registros das atividades em portfólios, sendo um em cada trimestre letivo. Na Figura 2 podemos

observar um dos registros, com o objetivo de reconhecimento da letra E e números até 4. Salientamos que neste ano letivo foi priorizado, pelas observações de Colling e Geller (2018), o ensino e reconhecimento das letras.

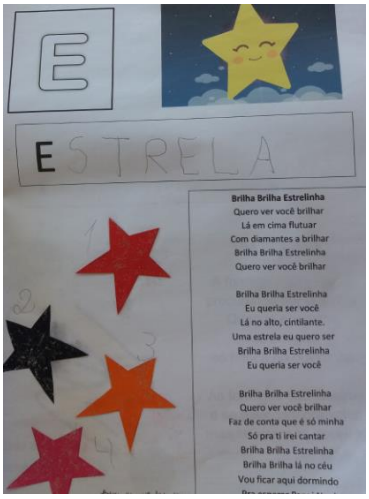


Figura 2. Adaptada de Colling e Geller (2018)

Para finalizar esta análise destacamos a afirmação da P8, que em Colling e Geller (2018), afirma que durante o ano letivo buscou o desenvolvimento da aprendizagem da aluna, concomitante com sua autonomia, propondo atividades lúdicas, trazendo que a maior dificuldade estava relacionada com a concentração, uma barreira devido à retomada constante das atividades, mas que as conquistas, mesmo que pequenas, devem sempre ser comemoradas.

Assim, as observações apontam para a dificuldade de evolução dos conteúdos e verificação da aprendizagem, decorrentes do atraso mental e cognitivo da aluna, estes descritos por Grossfeld, Mattina e Perotta (2009), bem como, confirmam o que afirma Machado (2008) quando traz que a escola inclusiva exige dos professores reflexão quanto as suas práticas e faz com que estes acreditem nas possibilidades de aprendizagem de todos os alunos, propiciando novas e diferentes formas de aprendizagem, bem como rompendo com o paradigma educacional que privilegia o conhecimento científico.

Considerações finais

A inclusão escolar enfrenta muitas barreiras, cabe à escola a busca por respostas e instrumentos diferentes e adequados às singularidades e ao professor tornar sua sala de aula um ambiente de trocas, auxílio, apoio, incentivo e aceitação ao aluno com deficiência, desse modo, estando à formação de professores diretamente ligada a busca por uma escola inclusiva de qualidade e que respeite as potencialidades de todos.

Verificamos que a política de formação de professores é um dos pilares da inclusão escolar e que requer de recursos humanos para ser efetivada. Discussões dentro do ambiente escolar, cursos para trocas de experiências, estudos sobre a temática, novos métodos de ensino e tecnologias, são necessários para que o professor se sinta preparado para enfrentar os desafios do cotidiano.

Como professores, sabemos que a disciplina de Matemática exige, no desenvolvimento da aprendizagem, uma complexidade de habilidades e, no caso de alunos com deficiência, esta deve ser conduzida gradualmente, respeitando tempo e limitações individuais do aluno. A ALUNA apresenta diagnóstico de uma síndrome rara, com inúmeras limitações de aprendizagem

e percebemos, ao longo da pesquisa, a importância de professores capacitados no auxílio e enfrentamento das dificuldades relacionadas ao seu cotidiano escolar.

As escolas regulares precisam ter professores capacitados, que sejam capazes de auxiliar no desenvolvimento das potencialidades de todos os alunos, principalmente aqueles com deficiência e, sendo assim, os sistemas educacionais devem estar preparados, com profissionais que possam efetivamente colocar a inclusão escolar em prática, buscando o desnevolvimento das habilidades de todos. A síndrome que acomete a ALUNA traz consigo enormes dificuldades em seu acompanhamento escolar e professores capazes de transpor essas dificuldades do dia a dia podem auxiliar sua inclusão escolar, fazendo com que ocorra a aprendizagem de acordo com suas possibilidades de desenvolvimento, respeitando as limitações decorrentes do diagnóstico complexo relacionado à síndrome.

Contudo, em relação a pesquisa apresentada, este recorte nos da ciência de que o caminho a percorrer é longo, repleto de desafios e possibilidades. Acreditamos que as políticas públicas de formação de professores voltados para inclusão escolar devam sair do papel, visando a valorização da educação para a diversidade e oferecendo condições iguais de desenvolvimento da aprendizagem a todos os alunos, respeitando suas limitações e favorecendo suas potencialidades, independentemente de sua deficiência, sendo a escola o ambiente de acolhimento e, esta, sendo capaz de fornecer meios eficazes de ensino e aprendizagem à todos os alunos.

Referências e bibliografia

Brasil. (1996). Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: MEC.

_____. (2001). Diretrizes Curriculares Nacionais para Cursos de Matemática – Resolução CNE/CES nº 1302/2001. Brasília: MEC.

Canepa, L. (2012). As barreiras da inclusão. In: Revista da ANEC. São Paulo: Zeppelin. p. 46–51.

Carvalho, R. E. (2012). Escola Inclusiva: a reorganização do trabalho pedagógico. Porto Alegre: Editora Mediação.

Colling, A. P. S.; Geller, M. (2018). Olhares da inlcusão: estudo sobre o processo de aprendizagem matemática de uma aluna com Síndrome de Jacobsen. Trabalho de conclusão de curso (Tese) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Canoas.

Colling, A. P. S.; Geller, M. (2015). Intervenções no ensino de Matemática com uma aluna com Síndrome de Jacobsen. In: XIV CIAEM-IACME. Chiapas, México.

Glat, R.; Fernandes, E. M. (2005). Da Educação Segregada à Educação Inlcusiva: uma breve reflexão sobre os paradigmas educacionais no contexto da Educação Especial brasileira. In: Inclusão – Revista da Educação 1, 35-39. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/revistainclusao1.pdf.

Grossfeld, P.; Mattina, T.; Perotta, C. S. (2009). Síndrome de Jacobsen. Disponível em: http://www.orpha.net/consor/cgi-bin/OC_Exp.php?lng=pt&Expert=2308.

Machado, R. (2008). Educação inclusiva: revisar e refazer a cultura escolar. In: Mantoan, Maria Teresa Eglér (Org). O desafio das diferenças nas escolas. Campinas: Editora Vozes, p. 69-76.

Ramos, R. (2010). Passos para a inclusão. São Paulo: Cortez.

Veltrone, A.A.; Mendes, E. G. (2007). Diretrizes e desafios na formação inicial e continuada de professores para a inclusão escolar. In: IX Congresso Estadual Paulista sobre formação de educadores. São Paulo.

Yin, R. K. (2010). Estudo de caso: planejamento e métodos. Bookman: Porto Alegre. 4ªedição.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O trabalho matemático e o autismo temático institucional

Silvia Teresinha Frizzarini
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, Joinville
Brasil
stfrizzarini@hotmail.com
Claudete Cargnin
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Brasil
cargnin@utfpr.edu.br
Cristiane Schlagenhaufer
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, Joinville
Brasil
cristianeschlag@yahoo.com.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é discutir as características do trabalho matemático que se constituem nas instituições durante o processo de inclusão de alunos com Transtorno do Espectro do Autismo - TEA. Para atingir esse objetivo, a metodologia utilizada foi de cunho qualitativo com a realização de pesquisas bibliográficas desenvolvidas a partir de materiais já elaborados e, principalmente, de livros e artigos científicos que permitirão fazer análises de práticas inclusivas realizadas numa pesquisa cooperativa em andamento entre duas Universidades do Estado do Paraná e de Santa Catarina - Brasil. A teoria utilizada foi Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard que permitiu analisar o trabalho matemático nesse processo de inclusão. Concluímos que nem todo o déficit, tanto institucional quanto da pessoa com TEA, devem ser compensados, pois as particularidades de processamento especializado e em detalhes é o que garante a diferença de ser, onde surgem muitos talentos e habilidades especiais.

Palavras chave: Educação Matemática, Inclusão, Transtorno do Espectro Autista, Autismo Institucional, Teoria Antropológica do Didático.

Introdução

O acesso de pessoas com algum tipo de deficiência nas escolas é garantido em todo território nacional brasileiro com as políticas educacionais vigentes. Com isso, Salas de Recursos Multifuncionais (SRM) com Atendimento Educacional Especializado (AEE) têm sido criadas para suprir a demanda do número de matrículas da Educação Especial no ensino regular que, em 2017, apresentava-se com um déficit de 40% no atendimento desse público (SANTOS, et al., 2017).

A criação dessas SRM gerou um novo trabalho ao professor da turma, que requer uma nova especialização, para que aluno tenha as condições específicas de realizar determinadas tarefas fundamentadas nas suas habilidades e competências. Para isso, o professor deve avaliar aluno, não somente ao iniciar o trabalho pedagógico especializado, mas também durante todo o processo de escolarização. Adequações e ajustes nos diferentes âmbitos, que interferem diretamente no processo de ensino e de aprendizagem do aluno, dependerá dessa avaliação "de conhecer o aluno e suas condições de inserção e participação na escola, na família e na sala de aula regular" (POKER, et al., 2013, p.11).

No Manual de Orientação destinado ao Programa de Implantação de Sala de Recursos Multifuncionais (BRASIL, 2010), o professor do AEE tem como função realizar esse atendimento de forma complementar ou suplementar à escolarização, considerando as habilidades e as Necessidades Educacionais Especiais dos alunos, público alvo da educação especial. Na inexistência deste professor especialista e até mesmo da inexistência das SRM, quem fica encarregado dessas funções e criação de dispositivos didáticos são os próprios professores regentes da turma que devem atender uma demanda de alunos com necessidades especiais e que vem crescendo a cada ano.

Além das diferenças que existem entre a gama de pessoas com necessidades especiais, como em relação a um surdo, cego, com Síndrome de Down, entre outras, existem as diferenças em relação às pessoas que tem a mesma deficiência, apresentando variações desde os níveis mais brandos aos mais severos e que influenciam diretamente no processo de ensino e de aprendizagem. Quando se trata de um aluno com transtorno do espectro autista (TEA), por exemplo, segundo Chequetto e Gonçalves (2015) "é possível observar que vários indivíduos diagnosticados com o mesmo tipo de autismo podem ter perfis e características próprios, diferentes uns dos outros" (p. 210).

Com respeito às aulas de matemática e ao processo de inclusão, o ensino e aprendizagem se tornam cada vez mais complexos neste contexto. A questão que se apresenta é "quais as características do trabalho matemático durante a inclusão escolar de alunos com TEA?"

Uma das teorias da Didática da Matemática que pode contribuir para esclarecer esse processo do trabalho matemático é a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (2009), caracterizada por um sistema didático como S (P, A, O) que une relações distintas entre professor P, alunos A e o saber O. De acordo com esta teoria, toda atividade humana, situada no interior de instituições concretas constituem o ensino e a aprendizagem do conhecimento matemático dotada de uma "razão de ser" ou de um "tipo de racionalidade" que lhe dá sentido. Isso inclui as condições visíveis ou invisíveis impostas por essas instituições, podendo, inclusive, limitar o ensino e a aprendizagem do conhecimento matemático.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é apresentar algumas características do trabalho matemático que se constituem nas instituições durante o processo de ensino e aprendizagem dos alunos com TEA.

Para responder a questão inicial, a metodologia utilizada foi de cunho qualitativo com a realização de pesquisas bibliográficas, que segundo Gil (2008, p.50), "é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos" e que permitirão fazer as análises de práticas inclusivas realizadas nos trabalhos de Frizzarini, Cargnin & Aguiar (2018), Frizzarini, Cargnin, Aguiar & Souza (2017), Bertão et all. (2017), Cargnin, Frizzarini & Ferreira (2017) e Cargnin, Frizzarini & Aguiar (2018).

Referencial teórico

O trabalho matemático, segundo Parra e Otero (2011), é composto por três aspectos inseparáveis que estão diretamente ligados aos elementos da TAD e têm contribuído com a Didática da Matemática, a saber: processo de estudo, organização matemática (OM) e de organização didática (OD), "El proceso de estudio puede ser entendido como el proceso de construcción matemática. El resultado de esa construcción es una OM y, finalmente, la manera en que esa organización se construye, una OD" (p. 720).

Para Chevallard (2001), existe uma hierarquia entre as OM e as correspondentes das OD com as formas de organizar as questões matemáticas estudadas e a maneira de organizar o estudo, colocadas de cima para baixo: civilização ↔ sociedade ↔ escola ↔ pedagogia ↔ disciplina ↔ área ↔ setor ↔ tema ↔questões. Esta hierarquia é interpretada para estudar o conhecimento de certas questões e reconhecer um caminho começado pela civilização e que continua na sociedade, bem como na escola, na pedagogia, em certa área dentro de uma disciplina, por certo setor da área e por certo tema.

Quando o professor se fecha nos temas, como do currículo oficial que propõem as sucessivas reformas, dos documentos de administração educativa e dos livros textos, Gascón (2003) considera como fenômeno chamado "autismo temático da instituição" ou "autismo institucional", que além do nível de organização os temas são considerados transparentes e inquestionáveis. Assim, é frequente que se acredite que o Ensino Médio seja inadequado, porque os estudantes não se adaptam às exigências e requisitos do nível seguinte, o da Universidade. Para essas instituições, o Ensino Médio tem como principal objetivo preparar os estudantes para seguir com seus estudos universitários, como se fosse sua única razão de ensino.

Para Chevallard (2001), existe outro tipo de autismo que é o "autismo disciplinar[1]" que, em longo prazo, cada disciplina define seus conteúdos emblemáticas, excluindo o estudo dos conteúdos das demais disciplinas. Ao considerar que a Matemática existe por si mesma e para si mesma, o "autismo disciplinar", neste caso, proíbe inclusive que outras disciplinas se interessem por seus conteúdos que, de certa forma, podem monopolizá-la.

A relação das ideias de Chevallard (2001) e de Gascón (2003) pode descrever um retraimento da ação do professor ao nível das questões que, neste trabalho, são analisadas em

[1] Autismo didático é um dos níveis de codeterminação entre as Organizações Matemáticas (OM) e as Organizações Didáticas (OD). Cada disciplina pode estar mais ou menos abertas para o estudo de questões que não lhe pertencem diretamente (Parra & Otero, 2011).

práticas educativas a nível de Ensino Técnico em Informática. Mas, antes é necessário compreender o sistema cognitivo dos alunos com TEA.

Análise de dados

As teorias psicológicas para o autismo

Uma das principais características de alunos com TEA que agrava o trabalho da matemática é a dificuldade na interação social, a falta de expressão facial, a dificuldade de o aluno permanecer sentado por muito tempo. Essas e outras dificuldades podem estar relacionadas com as seguintes teorias.

Três importantes teorias psicológicas, segundo Dourado (2012), que tentam explicar o autismo são a Teoria da Mente, a Teoria do Déficit nas Funções Executivas e a Teoria da Coerência Central Fraca. Na primeira teoria, a pessoa com autismo é incapaz de atribuir estados mentais às outras pessoas. Por exemplo, quando uma criança usa o artifício de apontar para um objeto e espera que essa outra pessoa volte sua atenção a esse objeto, isto seria um precursor da Teoria da Mente. Para Dourado (2012), a pessoa autista que tem essa dificuldade é chamada de cegueira da mente, fazendo uma analogia com os daltônicos que percebem o mundo de maneira diferente, ao contrário das que veem cheio de cores.

Na segunda teoria, a Teoria do Déficit nas Funções Executivas, a pessoa com autismo é incapaz de controlar voluntariamente as suas ações, atenção e pensamento. Segundo Dourado (2012), os três componentes: i) a capacidade de inibição, ii) a memória de trabalho e iii) a habilidade de gerar novas estratégias são fundamentais quando não se pode deixar que um processo ou uma ação seja guiado automaticamente e quando estamos diante de um novo desafio ou quando não temos resposta pronta para o desafio em questão. Apesar de possuir elevada capacidade intelectual, o autista apresenta déficit nesses componentes que estão associados com anomalias dos lobos frontais do cérebro confirmadas por exames.

Já a Teoria da Coerência Central Fraca faz com que o autista se saia melhor que pessoas típicas em testes como para encontrar figuras ocultas ou em montar um quebra cabeça que não forma figura alguma. No entanto, a pessoa autista tem a dificuldade de interagir diversas informações do ambiente de forma coerente e com significado. Segundo Dourado (2012), isso se deve ao fato que a coerência central, inata do sistema cognitivo de juntar as diversas formas disponíveis num ‘todo’ coerente é fraca para o autista. Em contrapartida, essa disfunção faz com que ele tenha a atenção aos detalhes, a insistência em rotina, as obsessões e até algumas habilidades especiais.

O elo que falta para unir essas três teorias, segundo Dourado (2012), seria o ‘eu consciente de si mesmo’ e que está dormindo nos autistas, enquanto que os outros “eus” executivos podem ser produtivos, autodisciplinados e aprender com o tempo a controlar impulsos. Acreditava-se que o autismo fosse o resultado de um desajuste emocional e de uma manifestação de desajuste mental de adultos, mas está comprovado que o autismo é causa de uma série de anomalias sutis no desenvolvimento cerebral, circunscritas a apenas algumas funções cerebrais e, às vezes, somente a alguns aspectos delas.

O trabalho matemático inclusivo no Ensino Técnico

A pesquisa que está sendo realizada no Ensino Técnico de Informática, com um aluno autista, mostra que as necessidades do processo de inclusão vão além das oferecidas pelas instituições que tem seus currículos oficiais fortalecidos por um ensino de qualidade, mas sem nenhuma preparação para a inclusão de alunos com necessidades especiais. Segundo Gascón (2003), o fenômeno chamado "autismo temático da instituição" ou "autismo institucional" faz parte de muitas instituições como esta, que além do nível de organização, os temas são considerados transparentes e inquestionáveis.

A base é sólida de uma Educação Profissional que surgiu a partir de 1809, com a criação do Colégio das Fábricas de outras instituições criadas durante o século XIX, no âmbito da sociedade civil, voltadas para o ensino das primeiras letras e a iniciação em ofícios (BRASIL, 2007). Hoje conhecida como Rede Federal de Educação Profissional, entre outras instituições que oferecem cursos técnicos surgiram com as mudanças ocorridas na economia brasileira do final do século XIX, com o aumento das atividades agrárias, industriais e comerciais. Seus estudantes eram pessoas que representavam um potencial para garantir a mão de obra às indústrias emergentes na recém constituída República Federativa do Brasil (KUNKE, 2009).

Nessa fase, o Ensino Profissionalizante não tinha nenhuma proximidade ou vinculação com a Educação Básica que se iniciou em 1941, através da Reforma Capanema (BRASIL, 2007). Somente em 1961, com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB houve a equivalência entre o Ensino Profissional e o Ensino Médio, possibilitando ao aluno realizar transferência entre ambos.

A instituição em que se realiza a pesquisa faz parte dessa Rede Federal de Educação Profissional e que possui mais de cem anos de história. Apesar de ser conhecida por sua excelência na formação profissional, ainda está engatinhando no que diz respeito à inclusão. Políticas de inclusão, no âmbito institucional, estão sendo estudadas e implementadas mais fortemente nesse ano de 2018. Possui vários cursos de engenharia, uma licenciatura e um curso técnico integrado, na área de Informática, do qual faz parte o estudante que é acompanhado pelo projeto de pesquisa referente ao acordo de cooperação entre as instituições, mencionado anteriormente.

O curso Técnico Integrado em Informática ocorre há 10 anos e apenas no ano de 2016 recebeu um aluno diagnosticado com Síndrome de Asperger[2], situação que afligiu alguns professores, devido às peculiaridades do caso. Em particular, no que se refere à Matemática, a preocupação foi grande, especialmente porque não existem trabalhos na área da educação matemática que se refira a estudantes autistas em nível médio, como é o caso desse curso, ou em nível superior. Os relatos existentes referem-se a crianças no início da escolarização, e não mencionam diretamente a matemática.

A natureza não-ostensiva dos objetos matemáticos é um agravante no caso de pessoas com Transtorno do Espectro do Autismo (TEA), que possuem um entendimento muito literal das palavras. Como fazer compreender um objeto que não pode ser visto, tocado? Nesse sentido, os diferentes registros de representação semiótica, especialmente o gráfico, torna-se a parte

[2] Este diagnóstico está englobado no TEA de acordo com DSM-5

ostensiva dos objetos não-ostensivos3 Por meio das representações semióticas a pessoa com TEA pode acessar os objetos abstratos, mesmo que com certa dificuldade.

Os registros são sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos que propiciam o acesso dos objetos não-ostensivos. Para ser um registro, um sistema semiótico deve cumprir duas condições. Primeiramente, poder produzir representações que permitem tanto ter acesso a objetos perceptivamente ou instrumentalmente inacessíveis, quanto explorar tudo o que é possível. Em seguida, e sobretudo, abrir um campo de operações específicas que permitem transformar as representações produzidas em novas representações (DUVAL, 2011b, p. 97)". Os registros considerados por Duval (2011b) são as línguas, figuras, gráficos etc.

Para isso, a dicotomia rigidez X flexibilidade na praxeologia matemática, da qual citam Lucas et al (2014), deve ser superada. Conforme esses autores,

> As instituições educativas deveriam ter, sob a sua responsabilidade, o trabalho de possibilitar e capacitar a articulação de vários registros de representação e as diferentes interpretações dos objetos matemáticos, uma vez que, quando esta articulação é deixada para o trabalho privado do aluno, as possibilidades de insucesso são elevadas (LUCAS et al, 2014, p.1329).

Para o caso específico em discussão neste artigo, a articulação entre registros de representação, segundo Cargnin, Frizzarini & Aguiar (2018), a articulação entre registros de representação semiótica foi proporcionada em sala de aula, porém priorizava-se o uso de registros gráficos, ou materiais concretos, para tratar de conceitos em estudo, como no caso de funções ou trigonometria. Nesses momentos, o estudante com TEA parecia conseguir "enxergar" as relações pretendidas pela docente.

Contudo, ressalte-se que ainda é precária a estruturação institucional disponível para atendimento das expectativas docentes em relação ao processo de inclusão de alunos com TEA. No presente contexto, teve que haver interesse e busca docente por alternativas possíveis para o tratamento diferenciado que o estudante requeria, em termos de ensino e aprendizagem de matemática. Embora a equipe pedagógica da instituição tivesse se colocado à disposição, não tinham Know-how suficiente para dar o suporte necessário aos docentes.

[3] Chevallard (1994) chama de ostensivos àqueles objetos que possuem uma forma material, sensível, manipulável. Podem ser gestuais, discursivos, gráficos ou escriturais (que usam uma simbologia específica como na matemática), enquanto que os não-ostensivos são as noções, os conceitos, as ideias, aquilo que apenas pode ser evocado mediante a manipulação dos objetos ostensivos associados.

Considerações finais

As pesquisas com TEA, voltados para o ensino de Matemática, ainda são incipientes e estão iniciando no Brasil, como destacam Bruniera e Fontanini (2016), o que dificulta os avanços na área de estudos e pesquisa sobre o trabalho matemático durante o processo de inclusão dos alunos com TEA.

Os trabalhos de Frizzarini et al (2017), Cargnin, Frizzarini e Ferreira (2017) e Frizzarini, Cargnin e Aguiar (2018) relatam a experiência do trabalho matemático com estudante diagnosticado com Síndrome de Asperger e destacam ainda a falta de propostas de material concreto para sua abordagem de alguns conteúdos matemáticos que são mais abstratos.

Vale ressaltar que, mesmo com a contribuição de *softwares* dinâmicos como o GeoGebra, para o estudante em tela, a utilização de materiais concretos mostrou-se mais eficaz, justamente por sua característica ostensiva. Manipular os objetos (no mundo físico) favoreceu melhor a percepção de relações trigonométricas ou funcionais.

A partir da pesquisa realizada com este estudante com TEA alguns encaminhamentos foram dados às aulas de matemática, a fim de proporcionar a sua inclusão:

- priorizar utilização de materiais manipuláveis e/ou recursos gráficos;
- elaborar tarefas com enunciados simples e objetivos;
- para tarefas individuais, estabelecer roteiros com instruções diretas;
- levar em consideração o interesse do estudante para propor atividades.

Apesar desses encaminhamentos, ainda há pontos obscuros em relação à aprendizagem matemática de alunos com TEA, como o ensino de números complexos e equações algébricas, assuntos bastante abstratos e sem, ainda, uma proposta de material concreto para sua abordagem.

Ambientes estruturados e previsíveis são fundamentais para as pessoas autistas compensar seus déficits, além de instrumentos fundamentais como agendas, lembretes, esquemas visuais, rotinas. Mesmo não sendo possível e nem indicado tentar compensar o déficit da coerência central, o mundo de particularidades dos autistas e o processamento especializado em detalhes é o que lhes garantem a diferença de ser e ver o mundo, onde surgem muitos talentos e habilidades especiais.

Agradecimentos

FAPESC - Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina

Referências

Brasil. (2010). *Manual de Orientação:* Programa de Implantação de Sala de Recursos Multifuncionais. Ministério da Educação Secretaria de Educação Especial, Brasília.

Bruniera, B.; Fontanini, M.L.C. (2016). Pontes entre portadores de Síndromes do Espectro Autista e Educação Matemática: entre o que já existe e o que pode ser construído. In *Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, São Paulo. Disponível em http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6592_2730_ID.pdf Acesso em 06 mar, 2017.

Cargnin, C.; Frizzarini, S.T.; Aguiar, R. (2018) Trajetória de um aluno autista no Ensino Técnico em Informática. *ENSINO EM RE-VISTA*.

Cargnin, C.; Frizzarini, S.T.; Ferreira, G.C.C. (2017). Um enfoque da Educação MAtemática Crítica para portador da Síndrome de Asperger. In: *Anais do Encontro Paranaense de Educação Matemática*, Cascavel, Paraná.

Chequetto, J. J.; Gonçalves, A. F. S. (2015). Possibilidades no Ensino de Matemática para um aluno com autismo. *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, ISSN 2236-2150 – V. 05, N. 02, p. 206-222, Outubro. Disponível em: http://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/427. Última visita em: 12/04/2016.

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*,. Disponível em : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensifs.pdf, Acesso em 06 jun. 2018.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER : problèmes et avancées*. Toulouse: UMF/ADER.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación em Didáctica de las Matemáticas. Huesca.

Dourado, F. (2012). *Autismo e o cérebro social*: compreensão e ação. São Paulo: Casa da Esperança.

Duval (2011). *Ver e ensinar a Matemática de outra forma*: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas, - São Paulo: PROEM.

Frizzarini, S.T. ; Cargnin, C.; Aguiar, R. ; Souza, S.R.O. (2017). Uma análise das aulas de matemática no primeiro ano do ensino técnico para um aprendiz com transtorno do espectro autista. In: *Anais do Simpósio Nacional "Por uma Escola Inovadora e Inclusiva"*, Poços de Caldas, MG, Universidade Federal de Alfenas, p.968-986. Disponível em https://lepaicontato.wixsite.com/simposio/publicacoes-do-simpósio. Acesso em 20 abr, 2017.

Frizzarini, S.T, Cargnin, C. Aguiar, R. (2018). Recursos didáticos para a acessibilidade de aluno com espectro autista nas aulas de matemática. *Anais Colóquio Luso Brasileiro de Educação - COLBEDUCA*, Braga.

Gascón, J. (2003). *Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria* I. Desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. SUMA, 44, 25-34.

Gil, A.C. (2008). *Métodos e Técnicas em Pesquisa Social*. São Paulo: Atlas.

Lucas, C.; Fonseca, C.; Gascón, J.; Casas, J. O (2014). Fenômeno Didático institucional da Rigidez e a Automação das Organizações Matemáticas Escolares. *Bolema*, Rio Claro, v.28, n.50, p.1327-1344.

Parra, V.E. y Otero, M.R. (2011). Praxeologías didácticas en la universidad y el fenómeno del «encierro»: un estudio de caso relativo al límite y continuidad de funciones. In: Bosch, M. et al. *Un panorama de la TAD*. Barcelona: CRM Documents, vol. 10, pp. 719-741.

Poker, R.B. et al. (2013). *Plano de desenvolvimento individual para o atendimento educacional especializado*. São Paulo: Cultura Acadêmica. Marília: Oficina Universitária.

Santos, J.O.L. et al. (2017). Atendimento Educacional Especializado: Reflexões sobre a Demanda de Alunos Matriculados e a Oferta de Salas de Recursos Multifuncionais na Rede Municipal de Manaus-AM. *Rev. Brasileira de Educação Especial*, Marília, v.23, n.3, p.409-422, Jul.-Set.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Características recomendables para propuestas de actualización en Educación Matemática para docentes de 1.° a 6.° grado.

Gabriela **Gomez** Pasquali
gabriela@omapa.org.py
Verónica **Rojas**
ingvero@gmail.com
Joel **Prieto**
joelprieto@gmail.com
Organización Multidisciplinaria de Apoyo a Profesores y Alumnos (OMAPA)
Paraguay

Resumen

Esta investigación tuvo como objetivo proponer y evaluar características innovadoras para propuestas de actualización en educación matemática para docentes en ejercicio en Paraguay. El proyecto abarcó el diseño de una propuesta que incorporó las características innovadoras a estudiar, así como su aplicación, evaluación y ajuste final, con base en la retroalimentación de los instructores del programa, de los docentes participantes del curso y en los resultados de la evaluación. El efecto en las competencias matemáticas se evaluó aplicando la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) con docentes y sus estudiantes de 3.° y de 6.° grado, además del enfoque clásico. Los resultados indican que la propuesta revela un impacto positivo, demostrado con el mejor desempeño de los docentes, así como de sus estudiantes, y que por lo tanto, la incorporación en futuras propuestas de actualización docente de las características estudiadas es recomendable.

Palabras clave: actualización docente, educación matemática, evaluación TRI.

Introducción

Atendiendo que existen sobradas evidencias que muestran la centralidad del docente en la obtención de resultados en los aprendizajes de los estudiantes, los nuevos desafíos en educación exigen de las políticas públicas, que aseguren la profesionalización docente y la formación y actualización permanente (Baumert, y otros, 2010; Hill, Rowan, & Ball, 2005).

Un docente de matemática debe ser capaz de aplicar algoritmos, entender su funcionamiento, prever errores, detectar conocimientos previos de sus estudiantes. Estudios del BID (Näslund-Hadley, Martínez, Loera Varela, & Hernández Agramonte, 2012) reportan resultados que muestran lejos de tales objetivos a los docentes paraguayos. Además, la baja calidad de los Institutos de Formación Docente (IFD) resalta en las pocas evaluaciones publicadas. Por ejemplo

en 2001 los futuros docentes de 73 IFD tuvieron en Matemática un promedio menor al 70% mínimo para aprobar y, en 2003/2004 en 103 IFD tuvieron un rendimiento promedio menor al 45% (Elías, Molinas, & Misiego, 2013). Con respecto a los estudiantes, más de la mitad de los de 3.°grado se clasificaron en los niveles más bajos en el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE); lo mismo sucedió con el 32% de los de 6.° grado. Además, los estudiantes de 6.° grado de Paraguay fueron los únicos que, estando en Matemática por debajo de la media regional, empeoraron con respecto al Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo.

Con base en la relevancia del conocimiento matemático y pedagógico que debe tener el docente, -fundada en las investigaciones citadas previamente-, y en el análisis del contexto paraguayo relacionado, la Organización Multidisciplinaria de Apoyo a Profesores y Alumnos (OMAPA), propuso este proyecto de investigación con el propósito de contribuir a desarrollar propuestas de actualización docente capaces de disminuir la brecha existente entre los conocimientos matemáticos y pedagógicos actuales y los conocimientos deseables de los docentes, en Paraguay.

Método

A partir del desarrollo del concepto de Conocimiento Matemático para Enseñar (MKT en inglés), se ha acumulado suficiente evidencia científica sobre la existencia de un conocimiento matemático específico de la tarea de enseñar (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Varas, Lacourly, López, & Giaconi, 2012) que impacta en el aprendizaje de los alumnos (Baumert, y otros, 2010; Hill, Rowan, & Ball, 2005). Para este conocimiento, la experiencia práctica en el aula escolar y su reflexión sistemática resultan cruciales. Se ha demostrado que los esfuerzos de formación docente son débiles cuando están desconectados de la intervención en aula. Además, en los últimos años, los currículos internacionales han cambiado su foco hacia habilidades superiores del razonamiento dando relevancia a la capacidad de resolver problemas (OCDE, 2003).

Sin embargo, la formación en servicio de los docentes en el país se viene realizando a través de talleres, seminarios y encuentros ocasionales, de corta duración; y también en círculos de aprendizaje entre pares, en los que se reflexiona sólo sobre las teorías y principios educativos (PREAL,2013; Saravia, Flores, 2005). La modalidad prioritaria en estos encuentros ha sido por años la "formación en cascada", en la cual grupos de docentes (50, 100, 500) escuchan exposiciones, con escasa posibilidad de interacción y participación (Buttice y otros, 2017), y con muy baja preparación de los instructores, quienes normalmente han tenido como única formación la previa participación en una actividad similar (de ahí el nombre de formación en cascada). En general estas propuestas de actualización son muy criticadas por los docentes destinatarios quienes consideran los temas poco interesantes, repetidos, con metodologías que no son participativas, ni motivante, y además reclaman la falta de participación que ellos tienen en el diseño de sus procesos de aprendizaje. (Buttice y otros, 2017)

Atendiendo las recomendaciones de las últimas investigaciones en educación matemática citadas anteriormente, las falencias detectadas en las prácticas tradicionales de formación en servicio, y la interpretación de las sugerencias de los docentes, recolectadas por OMAPA en diversas actividades e instancias previas de actualización, se seleccionaron las características innovadoras que debían orientar el diseño de la propuesta, para ser luego aplicadas y evaluadas. Atendiendo estas características se diseñó y aplicó la propuesta según los siguientes lineamientos.

- Se involucró a expertos internacionales en educación matemática en el proceso de diseño y en la formación de los instructores para asegurar la actualidad de los temas y enfoques abordados y la formación apropiada de los instructores.

- Se puso énfasis en el desarrollo del Conocimiento Matemático para Enseñar y por tanto los ejes temáticos priorizados fueron tanto de conocimientos matemáticos como de estrategias didácticas específicas para la enseñanza de la matemática.
- Se incluyeron módulos actualizados, producto de investigaciones internacionales de educación matemática de sólo un año atrás.
- Se seleccionaron los temas en función a la demanda de los docentes y las falencias detectadas en los estudiantes en las pruebas estandarizadas, además de la pertinencia de los mismos en los programas de estudio del Ministerio de Educación y Ciencias (MEC).
- Se contemplaron instancias intermedias de consulta con los docentes sobre la metodología y contenidos de las actividades en curso, para reorientarlas según sus recomendaciones.
- Se realizaron las clases presenciales los sábados y en periodos de vacaciones cuidando de tener periodos de año lectivo entremedio de modo a permitir la realización de las prácticas de aplicación con los estudiantes.
- Se establecieron 300 horas totales de formación, 200 horas presenciales y 100 de aplicación en aula. En cada jornada presencial se planificaron 8 horas de clase.
- En las horas de aplicación en aula, es decir la tercera parte del tiempo, los docentes debían realizar prácticas en el aula con sus estudiantes, las que luego eran objeto principal de estudio y reflexión colectiva en las siguientes clases presenciales.
- Se tuvo especial cuidado en incorporar dinámicas participativas en todas las clases y diversas actividades orientadas hacia el estudio y reflexión de la propia práctica docente incluidas Estudio de Casos y Observaciones de Clase entre pares.

Sintetizando, el carácter innovador de la propuesta de actualización está determinado por sus diferencias con respecto a las ofertas tradicionales de educación continua de docentes en servicio en Paraguay, tanto en sus enfoques y estrategias de diseño como en las de aplicación.

Con base en lo mencionado anteriormente, la intervención en Actualización en Educación Matemática propuesta en este proyecto tuvo dos grandes componentes: el diseño, la aplicación y la corrección de la propuesta del Curso de Actualización en Educación Matemática; y la investigación de los resultados por medio de un estudio de impacto. El desarrollo del proyecto fue realizado en cuatro etapas, las que se presentan a continuación.

a) Diseño de la propuesta de actualización en Educación Matemática

La propuesta de Actualización en Educación Matemática para docentes en ejercicio puso el énfasis en el conocimiento matemático y en el conocimiento de la tarea de enseñar, en la habilidad de reflexionar sobre la propia práctica a través de estudios de caso, y en la aplicación de la resolución de problemas como estrategia en el aula. El diseño se desarrolló en dos etapas bien diferenciadas: la capacitación del equipo académico encargado, y el diseño de los contenidos, didácticas específicas y metodología de aplicación.

La capacitación del equipo académico se realizó en el Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile (CMM).

El diseño inicial se ajustó a las características innovadoras identificadas previamente. Los contenidos matemáticos fueron seleccionados atendiendo las recomendaciones de las últimas investigaciones en educación matemática, la demanda de los docentes y las falencias de los estudiantes, detectadas en las pruebas estandarizadas; además de la pertinencia de los mismos en los programas de estudio del MEC. Luego, se elaboraron materiales y guías didácticas, estableciendo la bibliografía de apoyo y la metodología a ser aplicada. Los materiales en los que

se basaron los contenidos y las didácticas específicas para cada uno de ellos fueron proporcionados por tres fuentes diferentes: el CMM, OMAPA, y School of Education de Boston University. Con respecto al contenido temático del curso, los ejes desarrollados fueron: Números, Álgebra, Geometría, Datos y Azar, Didáctica de las Matemáticas, Resolución de Problemas, Estudio de Clases y de Casos y Educación Matemática en Paraguay.

b) Aplicación piloto de la propuesta innovadora de actualización en Educación Matemática

Con la colaboración de técnicos del MEC, la Secretaría de Educación de la Gobernación del Departamento Central, la Fundación Fe y Alegría, y delegados de OMAPA, se invitó a participar de la investigación y de la actualización docentes, a directores de instituciones educativas públicas, subvencionadas y privadas del Área Metropolitana. Se expuso a los directores los objetivos, actividades y cronogramas del curso y se logró la inscripción de 26 instituciones.

Los seis instructores previamente formados en el CMM de la Universidad de Chile, impartieron el curso de Actualización en Educación Matemática.

La carga horaria del curso fue de 300 horas (cada una de 60 minutos), de las cuales 200 fueron presenciales y 100 de trabajo a distancia. Fueron desarrolladas 25 jornadas de 8 horas diarias del modo siguiente: tres semanas intensivas, no correlativas, de lunes a viernes en el horario de 8 a 17 horas, en periodos de vacaciones. La primera en diciembre de 2015; la segunda en febrero de 2016 y la tercera julio de 2016; las 10 jornadas de clases restantes fueron distribuidas los sábados, de marzo a octubre de 2016.

La metodología durante las horas presenciales consistió en trabajos individuales y grupales, exposiciones, plenarias, y diversas actividades que fueron gestionadas por los instructores, promoviendo en cada caso el trabajo autónomo y la reflexión colectiva de los participantes. Se destacó la preparación de prácticas para el aula.

Al inicio del curso, en diciembre de 2015, se contó con 140 docentes participantes. En la semana de febrero de 2016, asistieron 90 docentes y entre marzo y noviembre asistieron 70 docentes. Se llegó al cierre del curso con 66 participantes, que son los que conforman el grupo identificado como de “alta participación”, para la interpretación de los resultados de la evaluación. Según información colectada a través de encuestas y entrevistas, la razón principal del alto grado de deserción de la primera etapa se debió a que muchos docentes recibieron la información de que el curso sería de sólo una semana y no de 300 horas, lo que sumado a la dificultad del test de línea de base hizo desistir a instituciones enteras a partir de la segunda jornada.

Durante el curso se realizaron estrategias de retroalimentación, como ser consultas entre docentes e instructores, dos entrevistas con los docentes y una con los que dejaron el curso. Como resultados de esas consultas se aplicaron modificaciones a las clases en desarrollo, entre las que se destacan la eliminación de tareas con ejercicios de fijación para la casa y la disminución de las horas de clase de cada jornada sabatina.

Además, se levantaron las siguientes recomendaciones para próximas ediciones del curso. Mantener las características principales como ser la modalidad mixta presencial y a distancia, la metodología de las clases, los ejes temáticos y sus contenidos, el sistema de evaluación y las clases prácticas a distancia. Las modificaciones recomendadas fueron: máximo 5 horas de clase por día: no utilizar sábados, sino excepcionalmente; aumentar horas de Números y Geometría; realizar las tareas de fijación durante las clases presenciales; desarrollar los contenidos más complejos de Números y Geometría entre los últimos, ya que son difíciles y preferentemente

acompañarlos en el mismo día por contenidos de Didáctica y Resolución de Problemas.

c) Corrección y ajustes del diseño inicial

Teniendo en cuenta los resultados de la evaluación de impacto y los aportes de los docentes, se identificaron las siguientes como las características innovadoras que deberían orientar el diseño y aplicación de propuestas exitosas de actualización en Educación Matemática.

Asegurar el involucramiento de expertos en el área, reconocidos nacional e internacionalmente, en el diseño y formación adecuada de los instructores para garantizar la apropiada actualización a los docentes a través de módulos sobre temas actualizados basados en investigaciones recientes. Poner énfasis en el desarrollo de conocimiento matemático y de las estrategias didácticas correspondientes; realizando la selección de temas con criterios específicos como demanda de docentes, falencias detectadas en estudiantes a partir de pruebas estandarizadas y en correspondencia con programas del MEC. Incluir horas presenciales de curso con los docentes, y también horas prácticas en aula, de dichos docentes con sus alumnos, en las que apliquen y revisen los conocimientos adquiridos, haciéndolos así actores activos de su propio mejoramiento profesional. Determinar el tiempo contemplado para las jornadas presenciales de modo a que sea suficiente para permitir el desarrollo profundo de cada concepto y el de los ejercicios de fijación correspondientes; además en cada jornada es conveniente intercalar contenidos complejos con contenidos simples. Contemplar la realimentación continua por parte de los docentes participantes de los cursos, tanto en relación a metodología como a contenido.

También debe tenerse en cuenta en cada aplicación, la flexibilidad necesaria para adecuarla a la disponibilidad de cada grupo específico de docentes destinatarios, en cuanto a los periodos de clases presenciales y de aplicación, y las horas de clase de cada jornada, cuidando de respetar en la medida de lo posible los tiempos de descanso de los mismos.

d) Evaluación de la propuesta

El estudio de evaluación de impacto tuvo como hipótesis la siguiente:

“Los docentes de Educación Escolar Básica de 1.° a 6.° grado, que participan de esta propuesta innovadora de Actualización en Educación Matemática de manera regular, activa y con disposición al aprendizaje, y sus estudiantes, desarrollan un mayor nivel de competencias específicas en las áreas de matemáticas que son trabajadas en el aula, siguiendo los lineamientos de la actualización metodológica.”

La evaluación se diseñó con la técnica de valor agregado (Tymms & Dean, 2004; Hanushek & Rivkin, 2010) para estimar el progreso alcanzado por dos universos: primero, el grupo de docentes que participó en forma permanente y activa en el proyecto; y segundo, los grupos de estudiantes de tercero y sexto grado asignados a los docentes participantes. El estudio consideró a los estudiantes, ya que constituyen una evidencia fuerte del impacto de las actividades, es decir, si finalmente los estudiantes mejoran su aprendizaje de manera significativa, el proyecto demuestra su trascendencia. El valor agregado resulta de calcular la variación del desempeño de docentes y estudiantes, que se observa al aplicar instrumentos estandarizados y validados en dos momentos: al inicio del proyecto, como línea de base, tanto en 2015 como en 2016; y al cierre de las actividades, al finalizar el año 2016. El desempeño se tomó como promedio de nota asignada en las pruebas. Un total de 40 variables fueron estudiadas para estudiantes de tercer grado, 64 para sexto grado y 68 para docentes. El valor agregado se exploró para dos grupos de docentes (y sus estudiantes): alto y bajo grado de participación en el curso de actualización.

Se aplicaron los instrumentos de evaluación elaborados a las tres poblaciones participantes, docentes, estudiantes de tercer grado y de sexto grado. Los instrumentos utilizados, que incluyeron una prueba de comprensión matemática y un cuestionario de contexto, cumplieron con los criterios de validez de contenido, mediante juicio de expertos durante el proceso de elaboración y ensamble. Consolidadas las respuestas halladas en las aplicaciones mencionadas, se procesaron los datos con el modelo de Rasch de la teoría de respuesta al ítem con un parámetro, para validar el desempeño estadístico de los ítems y los constructos configurados en las pruebas, y luego generar escalas de habilidad de estudiantes y docentes (Rasch, 1961). El valor de la habilidad, como posición relativa dentro de la escala generada, se transformó en una nota que fluctúa entre 0 y 5 puntos. Seguidamente, se analizaron las frecuencias de respuestas a las opciones de los ítems del cuestionario y después se asociaron las características indagadas con el nivel de desarrollo cognitivo observado a través las notas asignadas.

A los docentes se les aplicó los test de competencia matemática a fines del 2015 y a fines del 2016. La aplicación a fines del 2015 se realizó el primer día del curso, con todos los asistentes a la presentación del curso. La aplicación a fines del 2016 se realizó de dos modos distintos: a los docentes que permanecieron en el curso, es decir de alta participación, durante el último día de clase presencial del mismo; y a los docentes que no permanecieron en el mismo, que se retiraron y pasaron a ser el grupo de control o de baja participación, en sus propias escuelas.

En el 2015 se aplicaron los test de competencia matemática a los estudiantes de tercer grado y a los de sexto grado de esa cohorte. Esos test sólo se utilizaron para validar los instrumentos. Luego, a principio y fin de 2016 se aplicaron los instrumentos a los estudiantes de tercer y sexto grado de esa cohorte. Estos resultados fueron los utilizados para realizar las comparaciones. Los instrumentos fueron aplicados en las escuelas de los estudiantes. Los datos provenientes de las tres aplicaciones, fueron procesados manteniendo fija la escala generada en la aplicación del 2015, para garantizar la comparabilidad de las notas asignadas en cada caso.

Para caracterizar las poblaciones evaluadas se asociaron variables de contexto con desempeño cognitivo, en la aplicación realizada al final del proyecto. Las variables aludieron a información personal, entorno del hogar, hábitos de estudio y actitud hacia la matemática, en el caso de estudiantes, y formación académica y prácticas de aula en el caso de docentes.

Resultados

En primer lugar, se analizó la validez estadística de los ítems propuestos basados en la teoría de respuesta al ítem. Los indicadores hallados para constatarla fueron satisfactorios para aceptar los 45 ítems propuestos para la prueba de tercer grado, los 51 ítems de la prueba de sexto grado y los 30 ítems de la prueba de docentes. Respecto de la distribución de dificultad, en términos de porcentaje de respuestas correctas, se obtuvo un comportamiento próximo al normal al final de los años 2015 y 2016, y mayor concentración en la zona de bajo desempeño al inicio del año escolar 2016. Los valores encontrados otorgan validez a los resultados mostrados, y seguridad a las inferencias y decisiones que se deriven del análisis (Linacre, 2008).

La Teoría de Respuesta al Ítem clasifica a las personas en función de la habilidad que tienen en el área de estudio, asignando una nota relativa dentro de la escala entre 0 y 5. Basados en estas notas, se evaluó la variación del desempeño como la diferencia del promedio de notas asignadas a cada grupo de personas. Es así que, para el caso a los docentes, entre las aplicaciones del instrumento en los años 2015 y 2016, se verificó un aumento en 0,19 para los docentes de alto grado de participación, y una disminución de 0,07 para los de bajo grado de participación. En el

caso del promedio de notas correspondientes a los estudiantes de tercer grado, los del grupo relacionado a alto grado de participación del docente mostraron un aumento en 0,46, mientras los del grupo relacionado a bajo grado de participación del docente arrojaron un aumento en 0,44. Finalmente, el promedio de las notas asignadas a los estudiantes de 6. ° grado mostró un aumento en 0,42 para los del grupo de alto grado de participación del docente, y un aumento en 0,26 para el grupo correspondiente a docentes de bajo grado de participación. Estos resultados se muestran en la Figura 1. Se puede apreciar que en todos los casos donde el docente tuvo alta participación, se constataron mayores variaciones en las habilidades matemáticas, tanto en los docentes, como en sus alumnos. Cabe destacar que cualquier variación según la teoría de respuesta el ítem es significativa, ya que mide la habilidad en el área de estudio de las personas en sí, no la respuesta aislada de un ítem.

Luego se evaluó la diferencia de desempeño al iniciar y terminar la intervención según la teoría clásica, que evalúa el porcentaje de respuestas correctas. Esta diferencia fue calculada con el porcentaje de respuestas correctas aportadas a cada uno de los ítems de la prueba, al final del año escolar 2016, para los grupos de docentes con alto compromiso y de bajo compromiso con el proyecto, extendiendo tal condición a sus estudiantes. Para tercer grado, el grupo de estudiantes con docentes de alto compromiso logró mejor desempeño en 40 de los 45 ítems aplicados. Por su parte, los estudiantes de sexto grado cuyos docentes tuvieron alto compromiso con el proyecto aportaron mayor porcentaje de respuestas correctas en 42 de los 51 ítems aplicados. Y en relación con los docentes, el grupo de alto compromiso con el proyecto aportó mayor porcentaje de respuestas correctas en 26 de los 30 ítems. Estos resultados se muestran en la Figura 2.

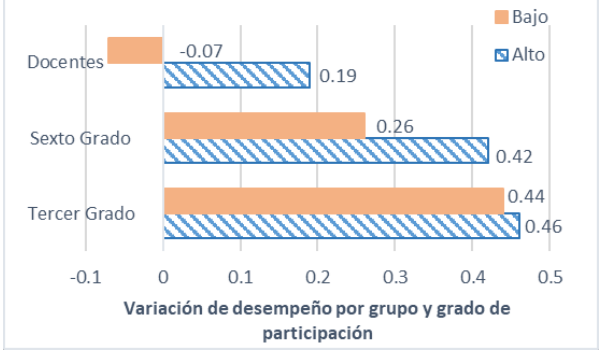


Figura 1. Variación del promedio de nota obtenida por los estudiantes de 3. ° y 6. ° grados y de los docentes entre inicio y fin de 2016, según grado de participación de docentes. Enfoque TRI.

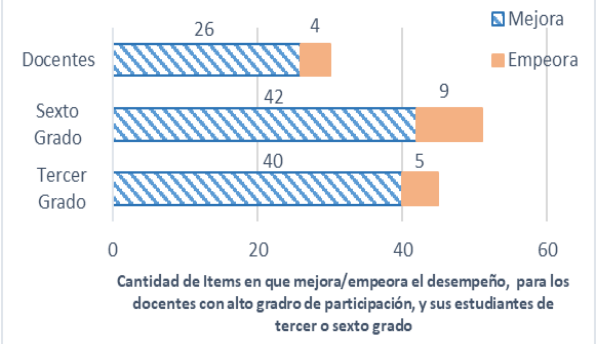


Figura 2. Variación de desempeño según porcentaje de respuestas correctas por ítem, para docentes con alto grado de participación y sus estudiantes de tercer/sexto grado. Enfoque clásico

Hay que remarcar que los resultados alcanzados suponen que se mantuvieron aproximadamente constantes las condiciones del contexto social, entorno de las familias y los hogares, prácticas de aula y vida institucional, es decir, que el cambio más notorio fue la implementación del proyecto, aunque con distintos grados de compromiso por parte de los docentes.

En suma, la propuesta de actualización revela un impacto positivo, demostrado con el mejor desempeño cognitivo de docentes con alto compromiso con el proyecto, así como sus estudiantes de tercero y sexto grados, frente al desempeño de docentes con bajo compromiso con las actividades realizadas. El mejoramiento de la comprensión matemática de los docentes y la forma eficaz de transmitirla a los estudiantes confirman el éxito de la propuesta.

Conclusión

Con base en la evaluación de esta propuesta de actualización en Educación Matemática, puede afirmarse que los docentes comprometidos en su participación alcanzaron una formación más profunda tanto en lo disciplinar como en lo pedagógico. Y que sus estudiantes mostraron mayor nivel de aprendizaje de los conceptos desarrollados, comparados a los del grupo de control.

Estos resultados indican que los lineamientos presentados en este estudio, en cuanto a características innovadoras para propuestas de actualización en Educación Matemática, podrían potenciar los beneficios de futuras capacitaciones dirigidas a docentes en ejercicio en Paraguay.

Referencias y bibliografía

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (November/December de 2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes it Special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Tsai, Y. (2010). Teacher's Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Education Research Journal,* 1(47), 133-180.

Buttice, N y otros. (2017). *Prácticas didáctico-pedagógicas innovadoras en escuelas públicas.* Investigación para el Desarrollo. Proyecto de Investigación Institucional: 14-INV-423. Ed. Anandurâ. Asunción. Paraguay.

Elías, R., Molinas, M., & Misiego, P. (2013). *Informe de Progreso Educativo Paraguay. El desafío es la equidad*. Asunción, Paraguay: Preal, Instituto Desarrollo.

Hanushek, E., & Rivkin, S. (2010). Generalizations about Using Value-Added Measures of Teacher Quality. *American Economic Review: Papers & Proceedings* (267-271).

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers 'Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.

Linacre, J. (2008). *A User´s Guide to Winsteps-Ministeps Rasch-Model Computer Programs*.

Näslund-Hadley, E., Martínez, E., Loera Varela, A., & Hernández Agramonte, J. M. (2012). Leading the Way to Math and Science Success: Challenges and Triumphs in Paraguay: *New research from the Inter-American Development Bank on the promotion of critical thinking in preprimary and primary education*. Inter-American Development Bank.

OCDE (2003). The PISA 2003 Assessment Framework. *Mahtematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OCDE.

PREAL, Instituto Desarrollo PARAGUAY, (2013). Informe de progreso educativo. Asunción, Paraguay.

Rasch, G. (1961). *On general laws and the meaning of measurement in phsychology*. Fourth Berkeley Simposium: 321-333.

Saravia, Luis y Flores, Isabel (2005). La formación de Maestros en América Latina. Estudio Realizado en Diez Países. Lima:PROEDUCA-GTZ.

Tymms, P., & Dean, C. (2004). Value Added in the Primary School League Tables. *A Report for the National Association of Head Teachers.* Durham: University of Durham.

UNESCO. (2014). Comparación de Resultados del Segundo y Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo SERCE y TERCE 2206-2013. Santiago: UNESCO.

Varas, L., Lacourly, N., López, A., & Giaconi, V. (2012). Evaluación del Conocimiento Pedagógico del Contenido para enseñar matemáticas elementales, *Enseñanza de las Ciencias*. 1(31), 171-187

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La gestión del docente de matemáticas cuando usa las herramientas computacionales, como recurso pedagógico en el aula para el aprendizaje de sus estudiantes.

Alisson Dayan **Rodríguez** Carlosama
Universidad del Valle
Colombia
alisson.rodriguez@correounivalle.edu.co
Alison Vanessa **Martínez** Sarria
Universidad del Valle
Colombia
alison.martinez@correounivalle.edu.co
Ronald Andrés **Grueso**
Universidad del Valle
Colombia
ronald.grueso@correounivalle.edu.co

Resumen

La presente investigación, pretende estudiar la manera en la que los profesores están haciendo uso de las herramientas computacionales como recurso pedagógico y las decisiones que toma en relación con dichos recursos para la enseñanza de un objeto matemático, en particular el sistema de numeración decimal. Para caracterizar la gestión didáctica de los profesores se hará un estudio de caso en los distintos momentos de la práctica docente, la planeación y planificación, la puesta en acto y la sistematización de experiencias enmarcándose este en la teoría de la Orquestación Instrumental de Trouche, L. (2004) y las decisiones didácticas del docente que desarrolla Lima, I. (2006)

Palabras clave: Sistema de Numeración Decimal, Orquestación Instrumental (OI), Recurso Pedagógico, Práctica Docente, Herramientas Computacionales; Decisiones Didácticas.

Abstract

The present research aims to study the way in which teachers are making use of the computational tools as a pedagogical resource and the decisions to be made in relation to the resources for the teaching of a mathematical object, in particular, the decimal numbering system. To characterize the use of teachers, the planning and planning, the implementation and the systematization of experiences, framed in the theory of Trouche, L. Instrumental Orchestration, and the teaching decisions developed by Lima, I.

Key words: Decimal numbering system, Instrumental Orchestration (OI), pedagogical resource, teaching practice, Computational tools.

Introducción y contextualización de la problemática

Durante el primer semestre de este año, se desarrolló el curso de seminario de trabajo de grado orientado al diseño de un proyecto que aportará a nuestra formación como profesionales, en el cual nuestro interés se orientó a analizar al docente de matemáticas en su práctica. La mayoría de investigaciones que preceden el problema que se desarrolla en este trabajo, elaboran secuencias didácticas en el aula, además las investigaciones que analizan el uso de herramientas computacionales, arrojan conclusiones que califican y cuantifican el uso de estos recursos pedagógicos. Sin embargo, la problemática que se pretende atender en este trabajo, obedece a la siguiente pregunta orientadora ¿Cómo caracterizar la gestión del docente de matemáticas cuando usa las herramientas computacionales, como recurso pedagógico en el aula para el aprendizaje de sus estudiantes de grado segundo en la Institución Educativa Técnica Industrial Pedro Antonio Molina sobre el Sistema de Numeración Decimal?

El docente que se pretende analizar, cumple con algunas características, por ejemplo, es competente en el uso de las herramientas computacionales. En este trabajo el sujeto de análisis será el docente y el aspecto que se analiza dentro de su práctica, son las decisiones que toma dentro y fuera del aula de clases en torno a los recursos pedagógicos, particularmente las herramientas computacionales. En el transcurso de la investigación y desarrollo de este trabajo, se pretende hacer un estudio de caso para profundizar en las macrodecisiones y microdecisiones que el profesor toma dentro y fuera del aula, esto entendiéndolo como Lima (2006) y evidenciando estas decisiones en los momentos considerados por la Orquestación Instrumental de Trouche.

Adicionalmente, la investigación permite experimentar y trabajar en la consolidación de comunidades de práctica y aprendizaje en la medida en que se espera que las reflexiones aquí generadas estén dirigidas a la comunidad educativa, especialmente a los profesores en ejercicio y aquellos que aún están en la formación gradual.

Objetivos

General

Caracterizar la gestión didáctica del docente de matemáticas cuando usa herramientas computacionales, como recurso pedagógico en el aula para el aprendizaje de sus estudiantes de grado segundo en la Institución Educativa Técnica Industrial Pedro Antonio Molina sobre el Sistema de Numeración Decimal.

Especificos

Definir los criterios que orienten la caracterización del diseño y aplicación de una propuesta desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental.

Analizar la gestión didáctica del docente desde la configuración de un recurso hasta la puesta en escena de un diseño desde la perspectiva de la Orquestación Instrumental y la relación entre la planificación y los niveles de la actividad docente.

Identificar posibles reflexiones acerca de la gestión didáctica del docente cuando

implementa las herramientas computaciones en el aula, en relación con el SND, como un aporte a los estudios en formación docente.

Marco Conceptual

En este apartado se encuentran los referentes teóricos que sirven para consolidar diferentes criterios que aportarán para el análisis de la gestión docente. Estos referentes teóricos son: la orquestación instrumental, las decisiones didácticas, y el sistema de numeración decimal (cabe resaltar que será el objeto matemático que se trabajará en clase mediado por las herramientas computacionales)

En la *figura 1* se presentan los referentes que hacen parte del marco conceptual.

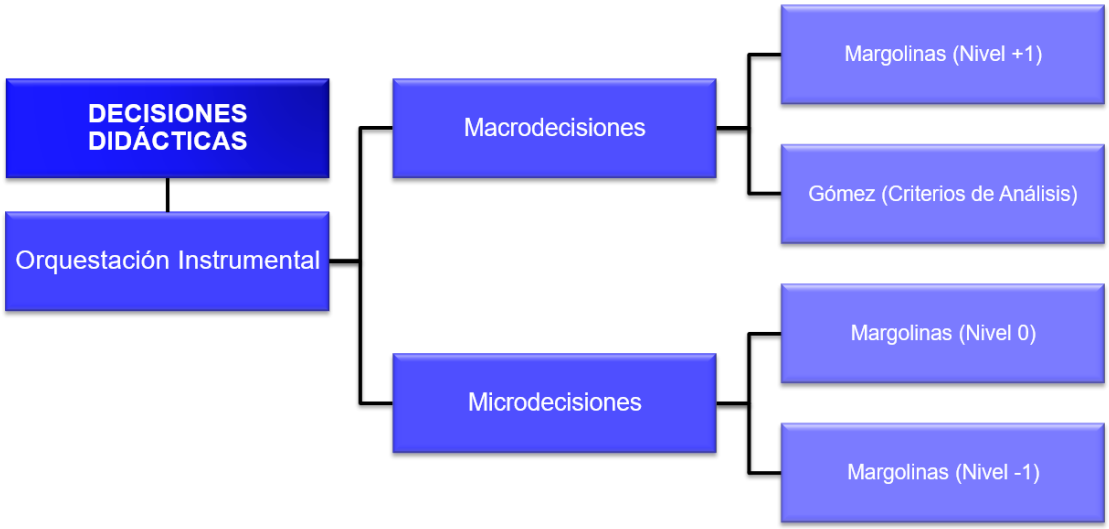


Figura 1. Articulación Conceptual

En él se destacan las decisiones didácticas desde Lima (2006), ya que es el interés global de la presente investigación, en ella se contemplan las *macro-decisiones* y *micro-decisiones* que plantea Margolinas (1995); estas decisiones son tomadas por el docente en la preparación de clase y durante la clase, respectivamente. Las macro-decisiones, se definen en la planificación del docente, por lo que se requerirá criterios que permitan analizar esas decisiones a-priori. Dentro de estos criterios, se tiene el Nivel +1 de Margolinas (2002), el cual nos habla de la actuación del docente en la planificación a modo general y con los criterios de análisis didáctico de Gómez (2002) se puede realizar un análisis más específico de dicha actuación. Para efectos de esta investigación se tendrán en cuenta tres tipos de análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción, los cuales están propuestos por Gómez (2002) el primero está relacionado al contenido matemático escolar; el análisis cognitivo está orientado a las hipótesis que realiza el profesor acerca del progreso cognitivo de cada uno de sus estudiantes; finalmente, se aborda el diseño de actividades que favorecen el aprendizaje matemático, lo inmediatamente dicho se destaca desde el análisis de instrucción. Los análisis anteriormente mencionados pueden ser vinculados con la actividad del docente en el nivel +1 propuesta por Margolinas (2002).

Con el análisis didáctico propuesto por Gómez (2002) y los niveles de la actividad del docente que propone Margolinas (2002) se pretende una relación entre ambos autores que servirá para la elaboración de una rejilla de análisis para esta investigación.

Por otro lado, las micro-decisiones también serán de interés específico de esta investigación, pues se quiere observar esas decisiones que el docente toma en el acto. En este sentido, Margolinas (2002) plantea el Nivel 0, el cual caracteriza la acción del docente en el aula, es decir, aquellas decisiones que no se planean con anticipación a la clase. Así mismo, se pretende observar la manera en que esas decisiones (las micro) generan oportunidades de aprendizaje (en estudiantes) y de enseñanza (para el docente) en la clase. Estas oprtunidades van en correspondencia con el Nivel -1 que plantea Margolinas, desde donde se pretende analizar las devoluciones por parte del docente teniendo en cuenta las retroacciones del medio, es decir, la manera en que la gestión didáctica del docente ayuda a los estudiantes a comprender el recurso que se esta llevando acabo en el aula.

La Orquestación Instrumental (OI) de Trouche (2004) estará presenta durante las decisiones mencionadas anteriormente, es decir, el docente de matemáticas debe planear la clase con las herramientas disponibles en el aula, con el objetivo de integrarlos y así lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, en este sentido, se piensa al docente como el director de una orquesta sinfónica cuyo propósito es que los músicos toquen una obra en la cual se integren todos los instrumentos, y para lograrlo, el director ya tiene estructurada una idea de cómo hacer esa integración, es decir, que requirió de una planeación para lograr el propósito mencionado.

En otras palabras la orquestación instrumental se está pensando en dos momentos, antes y durante la clase, en el antes se tiene a consideración una *configuración didáctica*, un arreglo de artefactos en el ambiente, es decir, una configuración de la ambientación de la enseñanza y los artefactos involucrados en ella; en el segundo momento, o sea, durante la clase, se evidencia una *actuación didáctica* la cual implica las decisiones *ad hoc* tomadas durante la enseñanza sobre cómo realizar la enseñanza promulgada en la configuración didáctica además del modo de explotación seleccionados (Pérez, 2014). No obstante en ambos momentos, el docente debe interesarse por el modo de aprovechamiento, el cual consiste en cómo el profesor decide explotar el recurso para beneficio de sus intenciones didácticas. Estos momentos incluyen las decisiones del docente con respecto al recurso que se trabajará en clase y los roles que tomarán los diferentes artefectos en pro del aprendizaje de los estudiantes, sobre el objeto matemático. Durante la clase, se desarrollarán diversos esquemas y técnicas por parte de los estudiantes, puesto que cada uno tendrá una manera diferente de realizarlo.

Posteriormente, se realiza el análisis de lo que se había planificado y lo que realmente sucedió en la clase, cabe resaltar que esta investigación no se enfocará en los estudiantes pero se tendrán en cuenta cuando haya una interacción del estudiante y el docente, debido a que pueden surgir diferentes oportunidades (aprendizaje o enseñanza) mediante las micro-decisiones

Metodología

Esta investigación se llevará a cabo bajo el enfoque cualitativo de investigación, tal y como lo plantea Hernández, R. Collado, C. Baptista, M. Méndez, S. y Mendoza, C. (2014). “El enfoque cualitativo utiliza la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación” (p. 7). Las preguntas se puedan

construir basándose en los antecedentes, ya que al tener definido un tema de interés, se busca bibliografía referente a él y se pueden encontrar en las conclusiones o en las recomendaciones, futuras investigaciones que pueden ser de interés para el investigador.

Es necesario resaltar que el enfoque cualitativo va de lo particular a lo general, pero para efectos de esta investigación, se realizará un análisis únicamente de lo particular, además, las hipótesis son generadas dentro del estudio y se estudian dentro del mismo proceso llegando a un resultado y en el caso de los métodos de recolección de datos, en este enfoque los instrumentos que se usen pueden tener preguntas abiertas para luego realizar una revisión de esos documentos y generar una sistematización de experiencias, además de poderlas analizar críticamente y del mismo será una evidencia de la investigación.

De esta manera, este trabajo de investigación se fundamenta en el enfoque cualitativo puesto que se basa en investigaciones previas para plantear el problema, en nuestros objetivos se hace evidente el caracterizar la gestión del docente de matemáticas teniendo en cuenta la orquestación instrumental para la planeación de la clase, en ellos hay una realidad que será observada y analizada desde un proceso particular, sin hacer generalizaciones sobre los conceptos estudiados.

Por otro lado, se realizará un estudio de caso con dos estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, las cuales orientan su trabajo de grado en integrar una secuencia didáctica en el aula de clase para el aprendizaje del SND en estudiantes de segundo grado de primaria, esto se hará teniendo en cuenta el enfoque cualitativo, con el cual se comprenderá la particularidad del caso.

El docente de matemáticas que se observará bajo el estudio de caso, deberá tener las siguientes características:

- Ser un docente de matemáticas en formación (formación gradual)
- Tener interés en la educación básica primaria
- Tener una formación en el uso de las herramientas computacionales
- En su planeación, debe incluir las herramientas computacionales para el desarrollo de su clase
- Desarrollar una clase en la que se promueva el conocimiento del SND

En nuestra investigación, se tendrá en cuenta un docente de matemáticas en formación, debido a que en algunas investigaciones, son ellos quienes diseñan y analizan lo que sucede con el estudiante y el applet (mediación instrumental), como es el caso de Pechené y Yela (2016), pero ¿quién analiza a los docentes de matemáticas? Por lo que en esta investigación nos centraremos en analizar la orquestación instrumental que realiza el docente de matemáticas cuando implementa los recursos computacionales en el aula.

El instrumento de medición que se trabajará en esta investigación será una entrevista no estructurada con la cual se quiere realizar una entrevista a priori y posteriori, esta última será diseñada desde la observación que se le realice al docente de matemáticas.

Ahora bien, de acuerdo con el marco conceptual se hará una rejilla de análisis con el propósito de analizar la gestión didáctica del docente, involucrando los criterios de Gómez (2002) y Margolinas (2002).

El siguiente aspecto corresponde a las fases que se llevarán a cabo en la investigación y las maneras en que se desarrollarán.

- Fase 1 (Documentación del problema de investigación): Se realiza una búsqueda de los antecedentes tanto local como internacional. Se tuvo en cuenta tres criterios para dicha búsqueda:

1. La gestión del docente entorno a las decisiones que toma en clase
2. La orquestación instrumental en relación al papel del docente al configurar el recurso
3. El sistema de numeración decimal y su enseñanza

La idea es evidenciar lo que se ha hecho hasta el momento con cada uno de los criterios y así tener un punto de partida para esta investigación. En el marco conceptual se redactan diferentes referentes teóricos pero que se relacionan con la gestión didáctica del docente en torno a la orquestación instrumental de Trouche (2004) y las decisiones didácticas de Lima (2006).

- Fase 2 (Consolidación de la rejilla de análisis): De acuerdo con los referentes teóricos que se mencionan en el capítulo II, se pretende hacer una articulación de las categorías de análisis de Gómez (2002) y los niveles de la actividad del docente de Margolinas (2002), en este sentido, se establecerán unos criterios con ambas teorías que permitan analizar la gestión del docente en el aula cuando implementa herramientas computacionales. Por lo tanto, se intentará consolidar e involucrar aspectos como la planeación, las macro y micro decisiones, la articulación de los recursos pedagógicos con el objeto matemático y la puesta en acto del mismo.
- Fase 3 (Observación de la gestión docente en el aula): En esta fase se llevará a cabo la observación de la población (en este caso, las profesoras) y para ello se hará énfasis en observar los criterios relacionados con lo que se establece en la rejilla de análisis mencionada en la fase anterior.
  Los instrumentos para la recolección de información serán: los insumos que las profesoras utilicen para realizar la planeación, los análisis a priori, el diseño del recurso, las entrevistas (tanto la a priori como la posteriori) serán semi-estructuradas, es decir, serán entrevistas con preguntas abiertas con énfasis en los temas que son de interés para esta investigación, también se harán algunas observaciones a las docentes de matemáticas en el aula, en ese momento se llevará un registro de notas y audiovisuales, las cuales serán el objeto de análisis.
- Fase 4 (Análisis de los resultados): Teniendo en cuenta el marco conceptual y la rejilla propuesta, se analizarán los datos que fueron recolectados por medio de los instrumentos y a partir de ahí se darán los resultados con base a lo documentado anteriormente.
- Fase 5 (Conclusiones): En esta fase, de acuerdo a los hallazgos de la observación y la teoría implícita en las rejillas de análisis, se propondrán reflexiones y aspectos concluyentes sobre las características de la gestión docente en el aula cuando se involucran herramientas computacionales. Así mismo, se espera que mediante los resultados, se puedan explicitar elementos o criterios que permitan establecer la importancia de que un profesor pueda reflexionar sobre su propia práctica pedagógica y sea un aspecto clave en su formación como docente.
  También se tendrán en cuenta aspectos que permitan dejar cuestiones discutibles para posibles investigaciones futuras.

Algunas Conclusiones

Esta investigación es una propuesta de trabajo de grado que se está desarrollando en el momento, por lo tanto, a continuación se enuncian algunas conclusiones preliminares desde lo que se ha documentado en los antecedentes, en la problemática y algunos de los referentes teóricos abordados. Entre ellas estan las siguientes:

Proponer una investigación que estudie al docente en su práctica posibilita indagar de manera teórica y práctica sobre su quehacer y todo lo que implica ser un docente dentro y fuera del aula.

La teoría de la orquestación instrumental (OI) enmarca en distintos momentos y tipos la práctica docente, lo que nos permite observar de manera específica y delimitada al docente en la planeación y planificación de clase. La OI también nos permitió hacer una analogía entre un orquestador y el profesor, el profesor como orquestador, se prepara para la presentación; durante la clase, cuando desarrolla la clase el profesor trata de ejercer todo lo que orquestó, teniendo disponibilidad para el cambio de orquesta o melodía (Recursos pedagógicos y la manera en la que los presenta para que los estudiantes los empleen) y finalmente lo que sucede después de la clase, en la que el docente recoge conclusiones sobre su misma práctica y se aproxima a sugerencias para mejorar la presentación.

Las decisiones del docente y sobre todo las que toma en acto (dentro del aula) determinan el desarrollo de la clase, es decir todos los aspectos que se relacionan en una clase de matemáticas y los comportamientos que tienen los estudiantes frente a su proceso de aprendizaje.

Desde los antecedentes, se puede inferir que las instituciones educativas también han dejado de ser sistemas cerrados, para convertirse en grupos colaborativos y de intercambio que buscan aprovechar eficientemente los recursos disponibles a nivel mundial. Por lo tanto, los profesores también se ven inmersos en estos cambios y, por consiguiente, es indispensable que desarrollen las habilidades necesarias para aprender a realizar su tarea educativa en las condiciones actuales, aprovechar las potencialidades de las innovaciones tecnológicas y escalar en sus niveles de apropiación.

Bibliografía y referencias

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en Matemáticas. Revista EMA. 7(3), 251- 292.

Hernández, R. Collado, C. Baptista, M. Méndez, S. y Mendoza, C. (2014). Metodología de la Investigación. Ed 6. México: McGraw-Hill Interamericana.

Latorre, A., et al (1996). Bases metodológicas de la investigación educativa. En: Barcelona-Hurtado. (p.237)

Lima, I. (2006). De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs. Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, Français. <tel-00119448>

Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En: Parra, C. y Saiz, J. (comp.). Didáctica de las matemáticas. Buenos Aires, Paidós.

Margolinas, C. (2002). *Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur.* In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (pp. 141-156). Grenoble La Pensée Sauvage.

Pérez, C. (2014, junio). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional: formación de profesores*. 53 (2), 129-150.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. International Journal of Computers for Mathematical

Learning, 9(3), 281–307.

Vega, M. y Garzón, D. (2014). *Los recursos pedagógicos en la enseñanza de la geometría: estudio de casos*. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali Colombia, recuperado de: https://campusvirtual.univalle.edu.co/moodle/pluginfile.php/551816/mod_resource/content/1/Recursos%20Pedag%C3%B3gicos.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Usando el cuerpo para aprender matemática, diseño de tareas enactivas

Paula Fernández Padilla
Colegio Sagrados Corazones
Chile
pfernandez@colegiosscc.cl

Elisabeth Ramos Rodríguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
elisabeth.ramos@pucv.cl

Patricia Vásquez Saldías
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
patricia.vasquez@pucv.cl

Resumen

Este taller pretende sensibilizar en los participantes su mirada sobre el rol que puede tener lo enactivo en las aulas de matemática, a partir de la vivencia de una situación de enseñanza enactiva para la enseñanza de figuras y cuerpos geométricos y de la generación de propuestas de enseñanza desde este constructo. Se dará a conocer elementos teórico-prácticos de la experiencia, el diseño del plan de clases, que trae consigo, la puesta en escena de la clase: donde se encuentran, la descripción, objetivos, las tareas, las devoluciones, la evaluación de la clase, los tiempos, el rol del profesor. Esta experiencia logra dar cuenta sobre los aprendizajes significativos que tienen los estudiantes de esa edad, en torno a la geometría y de las habilidades que han desarrollado los alumnos.

Palabras clave: enactivo, cuerpo, conocimiento, aprendizaje significativo, tareas matemáticas.

Introducción

Durante el siglo pasado, el campo de la psicología emergió como sustento para nuevos paradigmas educativos, que según el contexto social e histórico conducían los métodos de enseñanza en una sala de clases. Corrientes como el conductismo, el constructivismo entre otras, avalaban la forma de aprender y también la de enseñar. Es en este contexto y en la década de los

años 60, que Jerome Bruner surge con sus estudios acerca de la percepción y la representación, otorgándole a esta última un rol activo en el aprendizaje (Leahey, 1998).

Uno de los principios postulados por Bruner (1984) sobre el desarrollo del conocimiento, y por ende para su concepto de enacción, era el innegable y determinante vínculo que debe existir entre la cultura del individuo y la naturaleza de esta con el desarrollo de sus capacidades cognitivas. Existe entonces, una validación del entorno cultural y el desarrollo del propio conocimiento. Esta concepción, se convierte en un complemento de lo que Varela Thompson y Rosch (1992) en el contexto de las ciencias cognitivas, han desarrollado como el enfoque enactivo. Este nuevo concepto, evolucionado; es determinado por dos factores: la percepción como acción y las estructuras cognitivas derivadas de los modelos sensoriomotores del individuo. Según Varela, Thompson y Rosch (1992):

El punto de partida del enfoque enactivo es el estudio de cómo el perceptor puede guiar sus acciones en su situación local. Como estas situaciones locales cambian constantemente como resultado de la actividad del perceptor según su propia estructura sensorio motriz (p.203).

De esta manera, la propia estructura del individuo y su corporización, determinan cómo realiza su acción y a su vez, esta acción se vincula con sus propias situaciones ambientales.

Diversas experiencias exitosas involucran el cuerpo en el aprendizaje de las matemáticas, el uso de gestos con las manos, el movimiento y la corporalidad son desencadenantes de conceptualización matemática en saberes diversos. Es así como Delgado (2016) despliega una serie de tareas enactivas para la adquisición y consolidación del concepto de función real de variable real. Así mismo, lo hacen Fernández y Arias (2013) para el desarrollo de nociones matemáticas espaciales en educación infantil, o en la enseñanza de estrategias para resolución de problemas de equivalencias matemáticas de Novack, Congdon, Hemani-Lopez y Goldin-Meadow (2014) para un tercer grado. Es posible también evidenciar las prácticas enactivas interdisciplinariamente, así lo demuestra Hutto, Kirchoff, y Abrahamson (2015) ampliando el enfoque enactivo a dominios de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (STEM) demostrando de esta manera, la versatilidad del mismo.

En este contexto, dentro del proyecto ProMatEnactiva[1] nos planteamos aprovechar el constructo enactivo de manera de que estudiantes de pregrado se empoderen de él para su futura práctica docente. Es así como llevamos a cabo una Clase Pública para futuros profesores de las distintas universidades chilenas donde se realizó una clase enactiva sobre figuras y cuerpos geométricos. En este taller nos proponemos sensibilizar la mirada a los asistentes sobre el rol que puede tener lo enactivo en las aulas de matemática a partir de dos puntos de vista: la generación de propuestas de enseñanza enactivas y la vivencia de la situación de enseñanza enactiva trabajada en la Clase Pública.

Marco de referencia

Centramos nuestro estudio desde un marco de referencia centrado en lo enactivo. Bruner (1966) define el sistema enactivo como la representación hecha mediante la acción justificándola de la siguiente manera: “sabemos muchas cosas de las que no tenemos imágenes ni palabras para

[1] Proyecto ProMatEnactiva, 57335022, “Fortalecimiento de la formación inicial desde la conexión entre la teoría y la práctica", financiado por DAAD (Servicio Alemán de Intercambio Académico) desde la Universidad de Bielefeld.

explicarlas; y que resultan muy difíciles de enseñar a otro mediante términos, diagramas o ilustraciones" (p.14). De esta manera, diferencia a las imágenes y dibujos sintetizadores, pertenecientes al sistema icónico; a los símbolos y el lenguaje del tercer sistema; de la representación hecha acción o enactiva. Nace de esta manera, el concepto de enacción, alusivo a las representaciones, carentes de imágenes y/o símbolos, utilizadas como recurso del individuo para expresar conocimiento y para aprender, mediante la acción. Aquí un ejemplo clarificador del mismo autor:

"Si tomamos como ejemplo un nudo, lo primero es aprender la acción de anudarlo y cuando decimos que conocemos el nudo nos referimos a un acto habitual que hemos dominado y que podemos repetir. El hábito está organizado secuencialmente en un esquema que mantiene unidos a sus componentes secuenciales, y que además guarda una estrecha relación con otros actos habituales que facilitan o interfieren, tanto en su aprendizaje como en su ejecución" (Bruner, 1984, p.122).

Bruner (1966) dedicado a la solución de problemas, la determinación de conceptos, el pensamiento y el reconocimiento perceptivo, se diferencia respecto a las ideas piagetanas, regidoras de la naturaleza del conocimiento de esa época y estructuradas en sus estadios de desarrollo infantil; estableciendo procesos y profundizando en la representación como factor determinante en el desarrollo intelectual de los seres humanos, acuñando de esta manera, nuevos conceptos en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Existe en Bruner (1966) una búsqueda constante por significar la representación como parte del conocimiento. Entendiéndola como la aplicación de un modelo basado en las experiencias personales del individuo; la representación es un conjunto de reglas mediante las cuales se conserva lo experimentado en diferentes acontecimientos (Bruner, 1966; 1984). En estos modelos de representación, se categorizan tres subtipos conocidos como el enactivo, icónico y simbólico. Estos sistemas son los medios que determinan el conocimiento: "el desarrollo intelectual parece seguir el curso de tres sistemas de representación hasta que el ser humano es capaz de dominarlos" (Bruner, 1966, p. 16). Esta representación, posee a su vez un principio de selectividad, no todo debe ser necesariamente representado en los tres sistemas; existiendo una dependencia determinada por el objetivo de la representación inicial, es decir; el tipo de sistema seleccionado para representar está sujeto a la intencionalidad de lo que se quiere lograr con dicha representación (Bruner, 1984).

Si bien es posible establecer ciertas diferencias entre el concepto de enacción planteado por Bruner (1966) y el enfoque de Varela et al. (1992), estas no son excluyentes. Ambos planteamientos tienen por objetivo comprender y lograr aprendizaje mediante la acción, el cuerpo, lo sensorio motriz, la percepción; entendiendo que aquel que aprende lo hace desde su experiencia y según cómo entiende su entorno; para luego estructurar cognitivamente los conceptos matemáticos.

Desde una mirada constructivista, la enacción en matemáticas se hace visible exitosamente en diversas propuestas metodológicas. Así, podemos nombrar la metodología CPA (Concrete-Pictorial-Abstract) en Singapur, el método EIS Prinzip (Enaktiv-Ikonisch-Symbolisch) en Alemania y el método COPISI en Chile, con sus tránsitos entre lo concreto, pictórico y simbólico (Soto, 2015). En todas ellas, se considera una intervención manipulativa de parte del estudiante, generando en él imágenes mentales que lo harán a futuro prescindir de la acción para finalmente operar únicamente con símbolos. Esta tarea de manipular material concreto, desde un enfoque

enactivo y en el marco de las ciencias cognitivas, se convierte en un complemento al considerar que la enacción involucra un proceso perceptivo y sensorio motriz de parte del estudiante al momento de consolidar conceptos matemáticos; generando conocimiento al utilizar el propio cuerpo. De esta manera es posible establecer que, desde lo sensorio motriz, el estudiante crea conceptos matemáticos; el aprendizaje motor se une con la conceptualización (Abrahamson y Trninic, 2015).

Marco metodológico

Este taller se desarrollará considerando tres momentos claves:

Momento 1: Una enseñanza enactiva (40 minutos). Se presentará una propuesta de aula para trabajar en grupos las figuras y cuerpos geométricos desde lo enactivo (figura 1), en donde a cada grupo se le entregará una caja con elementos de la vida cotidiana con forma de figuras o cuerpos geométricos.

Geometría silenciosa y cuerpo

Cada grupo ha recibido una caja con un objeto. Obsérvenlo en silencio para que sólo su grupo lo conozca. Acuerden entre ustedes de qué manera la pueden representan usando solo su cuerpo, sin hablar. Para ello, todos los integrantes del grupo deben participar, ya sea haciendo la figura individualmente con su cuerpo, sus manos, o bien representando una parte de la figura en conjunto con el cuerpo o parte de ellos, entre todos o algunos integrantes del grupo.

Figura 1: Situación de aula para trabajar enactivismo en matemática

Esta propuesta será trabajada por los participantes del taller, de manera que "vivan" la experiencia de usar su cuerpo para el aprendizaje. Se realizará la puesta en común de manera de reflexionar sobre el uso del cuerpo como medio para el aprendizaje.

Momento 2: Profundización (30 minutos). Se entregarán herramientas teóricas referentes a la enacción con propósito de que el asistente pueda incorporar este constructo en su quehacer docente.

Momento 3: Creando con enacción (50 minutos). Considerando que en la práctica cotidiana del profesor cobra la relevancia el diseño de situaciones de aprendizaje de la matemática (Ponte, 2004), se desafía a los participantes diseñar en grupos una situación de aprendizaje desde lo enactivo para la enseñanza de un concepto matemático a elección. Se realiza puesta en común y reflexiona en torno a las fortalezas y complejidades que este trabajo involucra.

Conclusiones

Se espera que a partir del taller se sensibilice a los participantes sobre la importancia de considerar el enactivismo como una herramienta que permite avanzar hacia una enseñanza de la matemática de calidad.

Dado el tipo de clase que se lleva a cabo, esta logra que los alumnos den cuenta de sus aprendizajes en torno a la geometría, dando ejemplos y definiciones sobre la diferencia de figuras en 2d y 3d. Además, de las habilidades y actitudes sobre las matemáticas, como es el trabajo en equipo, la argumentación y el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas en el grupo curso.

El enfoque enactivo idea el aprendizaje en la interacción del ser que aprende con su medio y cómo dicha acción modifica el conocimiento del entorno. Estamos de acuerdo con Hutto,

Kirchoff, y Abrahamson (2015) en que esta interrelación aplicada conscientemente desde la enseñanza de la matemática genera cambios en las concepciones tradicionales de aprendizaje, permitiendo de esta manera concebir la construcción del conocimiento matemático de una forma distinta a la experimentada tradicionalmente.

Referencias y bibliografía

Abrahamson, D., Trninic, D. (2015). Bringing forth mathematical concepts: signifying sensorimotor enactment in fields of promoted action. *ZDM, 47*(2), 295–306.

Bruner, J. (1966). *Hacia una teoría de la instrucción*. Harvard, MA: Belknap Press of Harvard University Press.

Bruner, J. (1984). *Acción, Pensamiento y Lenguaje*. Madrid: Alianza.

Delgado, M. (2016). *Comunicación icónica y gestual en Análisis Matemático*. Pi-InnovaMath, (1)

Fernández, B. y Arias J. (2013) La expresión corporal como fuente de aprendizaje de nociones matemáticas espaciales en educación infantil. *Retos: nuevas tendencias en educación física, deporte y recreación, 24*, 158-164

Hutto, D., Kirchoff, M., & Abrahamson, D. (2015). The enactive roots of STEM: rethinking educational design in mathematics. *Educational Psychology Review, 27*(3), 371-389.

Leahey, T. (1998). *Historia de la psicología: principales corrientes del pensamiento psicológico*. Madrid, España: Prentice Hall Iberia.

Novack, M., Congdon, E., Hemani-Lopez, N., & Goldin-Meadow, S. (2014). Psychological science. *Psychological Science, 1*, 8.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En: Giménez, J., Santos, L. y Ponte, J. P. (Coord.). *La actividad matemática en el aula* (25-34). Barcelona: Graó.

Soto, J. (2015). La didáctica de la matemática vista desde la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. *Anales de la Universidad de Chile, 8*, 95-117.

Varela, F., Thompson, E., & Rosch, E. (1992). *De cuerpo presente: Las ciencias cognitivas y la experiencia humana*. Barcelona, España: Gedisa.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A abordagem TPACK para a integração da calculadora científica na prática docente através da metodologia Lesson Study

Jalman **Lima**
Université Catholique de Louvain
Bélgica
jalmanlima@gmail.com

Yuriko Yamamoto **Baldin**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
yuriko@dm.ufscar.br

Resumo

Considerando a questão "Como integrar a calculadora científica em sala de aula como um instrumento de aprendizado, sob perspectiva de formação de professores?" o objetivo deste trabalho é apresentar uma discussão sobre a integração da calculadora científica na prática docente, para além da inserção, fundamentada no Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo – TPACK. A pesquisa conta com a parceria das escolas públicas do estado de São Paulo, Brasil, em cursos de formação continuada que trabalham articulações do conteúdo curricular com a prática efetiva nas salas de aula. O planejamento, elaboração e execução dos roteiros didáticos com uso da calculadora científica foram fundamentados na metodologia Lesson Study como um processo de desenvolvimento profissional. Os resultados obtidos nos primeiros módulos possibilitam a interdisciplinaridade com outras áreas de conhecimento, indicando apropriação pelo professor do papel integrador da calculadora científica como uma alternativa de prática docente reflexiva para efetiva aprendizagem dos alunos.

Palavras chave: integração de tecnologia, calculadora científica, TPACK, Lesson Study, formação de professores, desenvolvimento profissional de professores, aprendizagem participativa.

Introdução

Há mais de três décadas a tecnologia digital tem feito parte de estudos de pesquisadores em Educação Matemática no Brasil e no exterior. Dentre as tecnologias digitais, encontra-se a calculadora científica, uma das peças controversas de tecnologia educacional e de sua presença em sala de aula.

O mecanismo para especificar vários tipos de uso da calculadora no ensino básico e superior pode tomar diversas formas. Nos documentos curriculares oficiais é possível encontrar referências ao uso (ou não) da calculadora, bem como aos tipos específicos de calculadoras: básicas, científicas, gráficas e calculadoras com CAS (Computer Algebra System).

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1997) para o Ensino Fundamental e Médio permitem e encorajam o uso de calculadoras e as trazem como uma ferramenta que "No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e o computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações. " (Brasil, 1997, p. 45).

Além disso, a Base Nacional Comum Curricular- BNCC (Brasil, 2017) para o Ensino Fundamental, recém aprovada e em elaboração para o Ensino Médio, traz, na página 96, como importante o uso de calculadoras "para avaliar e comparar resultados", sem, contudo, fazer referência sobre os tipos de calculadoras para os ensinos fundamental e médio. No entanto, não são apenas os tipos de calculadoras que estarão no foco da educação de professores atualizados para a realidade do século 21.

Neste trabalho, argumentamos que a simples menção à importância do papel das tecnologias na sala de aula, em particular das calculadoras científicas, não orienta os professores em exercício ou os cursos que estão a formar os futuros professores, sobre o que significa efetivamente trabalhar o conteúdo curricular das disciplinas específicas com o uso das tecnologias que impliquem na aprendizagem efetiva e consolidada do conteúdo curricular, com vistas à educação do cidadão inserido no mundo que convive com a tecnologia.

Kissane (2012) afirma que *"*... na prática é muito improvável que (os professores) usem materiais que não sejam oficialmente aprovados ... por essa razão, é bastante incomum que os professores de qualquer país usem calculadoras … em sala de aula se o currículo oficial e seu exame associado não sancionarem tal uso."

No Brasil, a situação é similar à descrita, com agravante dos documentos PCN ou BNCC não oferecerem aos professores a segurança e a confiança em mudar seus hábitos de métodos no ensino e aprendizagem na sala de aula, além de não haver orientações sobre "como mudar".

Isso coloca um desafio para motivar o uso de calculadoras no ensino básico para efetivamente cumprir as recomendações oficiais de integração da tecnologia no ensino e aprendizagem. Pelas nossas experiências, os professores carecem de formação para utilizar a calculadora científica como instrumento de aprendizado em sala de aula e, por conseguinte, poder desmistificar o seu papel de ser apenas um instrumento de cálculo e que não proporciona o desenvolvimento da compreensão da matemática na aprendizagem durante uma aula. O projeto do nosso trabalho tem como objetivo exatamente a formação continuada de professores que se tornem capazes de incorporar a mudança de concepção do papel de uma calculadora científica.

Nesta direção, apoiamos em Neves e Bittar (2015) que fazem uma importante observação sobre a carência de formações para o uso de tecnologias nos cursos de licenciatura do Brasil que podem contribuir para fomentar as discussões sobre o tema.

"Observávamos que os demais professores [...] careciam de formação para utilizar as tecnologias, pois muitos diziam que durante o processo de formação inicial, os cursos de licenciatura não haviam contemplado discussões e desenvolvimento de práticas para o uso das atuais tecnologias disponíveis na escola. Alguns professores afirmavam que ... ao preparar os

planejamentos, incluíam as tecnologias como recursos a serem utilizados no desenvolvimento de suas aulas, porém, na prática pedagógica, isso não acontecia." (Neves & Bittar, 2015)

É possível perceber que o trabalho do professor na educação básica se dá mediante desafios (Purificação, Neves e Brito, 2010). Neste contexto, as formações continuadas figuram-se como uma ferramenta essencial no processo constante e permanente de aperfeiçoamento dos professores, uma vez que permitem que estes agreguem conhecimento capaz de gerar transformação e impacto em suas práticas pedagógicas em sala de aula. Acreditamos que pesquisar, investigar, discutir e refletir representam, e isso requer, a busca permanente por formações continuadas que propiciem melhoria da prática pedagógica em sala de aula.

O objetivo deste trabalho é, portanto, trazer a discussão sobre a integração da calculadora científica na prática docente dentro do contexto de formações de professores, e para isso a metodologia de Pesquisa de Aula - Lesson Study norteia as propostas de atividades de formação do nosso projeto, como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula, como apontada em Baldin e Felix, (2011).

A estrutura deste artigo apresenta a seguir tópicos de discussão sobre o quadro teórico de TPACK – Conhecimento tecnológico e pedagógico de conteúdo, em que se fundamenta a proposta das atividades do curso de formação continuada do projeto, o potencial da calculadora científica como promotor da interdisciplinaridade da nova base curricular, e da análise do potencial pedagógico das fases da Lesson Study em promover a capacitação do professor em alternativas didáticas com uso de tecnologia.

Conhecimento Pedagógico, Tecnológico de Conteúdo (TPACK)

No contexto de integração de tecnologias em sala de aula, Mishra e Koehler (2006) introduziram o conceito de Conhecimento Tecnológico e Pedagógico de Conteúdo, conhecido como TPACK, que deriva do Conhecimento Pedagógico de Conteúdo - PCK de Shulman (1986), que é o conhecimento requerido do professor para ensinar determinada disciplina dentro do currículo. O TPACK identifica a natureza do conhecimento requerido pelos professores para a integração da tecnologia em sua prática, ao mesmo tempo em que aborda a natureza complexa, multifacetada e situada do conhecimento do professor. O TPACK suporta um quadro teórico que combina três áreas de conhecimento: conhecimento tecnológico, conhecimento pedagógico e conhecimento de conteúdo, e estuda como estes conhecimentos se conectam entre si, levando ao contexto de ambiente escolar, gestão da sala de aula e das características sociais dos alunos envolvidos. Esse conhecimento é diferente do conhecimento de um especialista em tecnologia ou disciplinar e também do conhecimento pedagógico geral compartilhado pelos professores em todas as disciplinas. O TPACK é a base do ensino eficiente com tecnologia, e requer uma compreensão do professor da representação de conceitos que usam as tecnologias e de técnicas pedagógicas que usam tecnologias de maneira construtiva no ensino de disciplinas específicas. Isto requer conhecimento do que torna os conceitos difíceis ou fáceis de aprender, assim como saber como a tecnologia pode ajudar os alunos a enfrentar problemas com suas dificuldades, considerando o conhecimento prévio dos alunos. Ainda o TPACK pode ser analisado dentro das teorias da epistemologia, e do conhecimento de como as tecnologias podem ser usadas para construir o conhecimento existente e desenvolver novas epistemologias ou fortalecer as antigas. Estes aprofundamentos não são tratados neste artigo, por fugir do escopo.

No nosso trabalho a calculadora científica é a tecnologia que utilizamos para potencializar as atividades didáticas que possam trazer alternativas para o ensino e aprimoramento da

aprendizagem significativa dos problemas de matemática e ciências (física, química, biologia), e de outras ciências dentro do contexto de atualização curricular. E o conceito de TPACK embasa as nossas propostas de roteiros didáticos.

A calculadora científica como ferramenta que possibilita a interdisciplinaridade

Um ponto importante do nosso trabalho é destacar a calculadora muito além de um dispositivo para manipulação aritmética. As calculadoras científicas evoluíram desde a primeira calculadora científica nos anos 70. Nessa época, a calculadora era usada principalmente para realizar cálculos longos, incluindo os cálculos de interesse de cientistas e engenheiros.

Segundo Kissane (2015), a calculadora científica foi aperfeiçoada nos últimos quarenta anos. Em vez de ser uma ferramenta para cientistas e engenheiros, ela tem sido aprimorada para servir como ferramenta para educação matemática.

A calculadora no contexto educacional é usada para representação de objetos matemáticos e conceitos, realizar conexão de significados, aumentar o entendimento sobre o significado do conceito numérico e promover o letramento matemático. Por exemplo, para estudantes do ensino fundamental anos finais, a calculadora científica surge como uma importante ferramenta para provocar curiosidade e interesse de usuários, como ilustrado na Figura 1 abaixo.

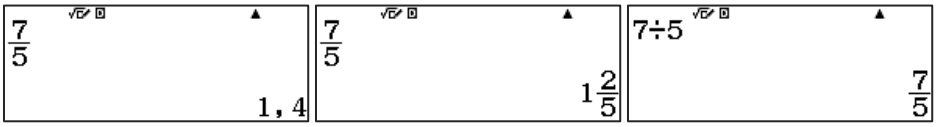


Figura 1. Reapresentando diferentes representações de frações, decimais e divisão.

A calculadora científica demonstra sua função mais promissora para o ganho educacional, quando é utilizada como dispositivo de exploração. Para ilustrar, consideremos estudantes aprendendo potenciação. Uma calculadora científica permite a exploração do significado de potências, especialmente quando os fatores dos números podem ser revelados.

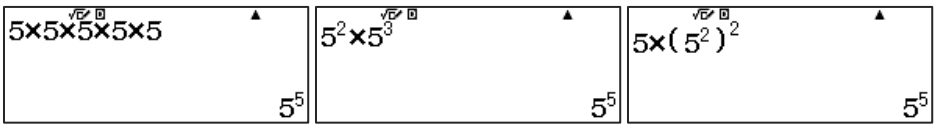


Figura 2. Explorando e entendendo potências.

Esta ferramenta possibilita a interdisciplinaridade preconizada pela nova Base Nacional Comum Curricular e já apontada pelos PCN e que ainda não está assimilada nas salas de aulas, a não ser em programas prontos de computadores. O domínio de linguagem matemática por meio da exploração de propriedades e de comparações de resultados numa calculadora abre as portas para trabalhar problemas de outras áreas de conhecimento que usam a linguagem matemática e notações científicas para seus conteúdos. Por exemplo, em um módulo para aulas de biologia do Ensino Médio, em execução no nosso projeto, a calculadora científica surge como uma valiosa ferramenta para conectar conceitos biológicos e matemáticos, tal qual para investigar o Gasto Energético Basal (GEB) de cada indivíduo para os próximos 20 anos, bem como o GEB quando estiver com 50 anos.

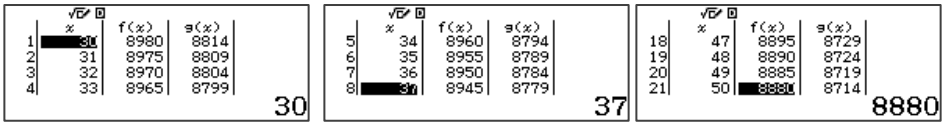


Figura 3. Ilustrações de telas da calculadora presentes no Roteiro de Aula sobre Nutrição: "Quanto necessitamos comer diariamente?".

Ao integrar a calculadora científica no roteiro de aula "Quanto necessitamos comer diariamente?", é necessário entender: as funções da calculadora científica (Conhecimento Tecnológico), entender a maneira pela qual o assunto (conteúdo específico, Nutrição) pode ser mudado pela aplicação da calculadora científica[1] (Conhecimento Tecnológico de Conteúdo) e como a calculadora científica pode ser incorporado dentro da metodologia de resolução de problemas, bem como considerar a problemática do planejamento apropriado de aulas (Conhecimento Pedagógico de Conteúdo). Para elaborar propostas de roteiros de aula integrada nesse sentido, a pesquisa leva em consideração questões que se levantam naturalmente: "Como os professores adquirem uma compreensão das relações complexas entre conteúdo, pedagogia e calculadora científica?" A abordagem padrão sugere que os professores simplesmente precisam ser treinados para manipular a calculadora científica. Partindo da necessidade de criar cursos de aperfeiçoamento especiais para professores na integração da tecnologia na sua prática docente, a pergunta natural surge: "Que metodologia é indicada para mudança de paradigma e integrar a calculadora científica na prática pedagógica do professor?"

A metodologia Lesson Study oferece um caminho para nortear o planejamento e execução das atividades e a reflexão sobre os resultados das mesmas e está presente no nosso projeto.

A Metodologia Lesson Study

No sentido de apontar uma mudança de paradigma para as formas de ensino da Matemática básica, como previstas nos PCN, a Lesson Study vem contribuir para capacitar os professores, de modo a promover melhorias na qualidade de aprendizagem de seus alunos (Baldin & Guimarães, 2012), (Baldin, 2010).

A Lesson Study é uma forma de desenvolvimento profissional realizado por ações colaborativas de professores que aprendem a pesquisar a aula. O Lesson Study é reconhecido internacionalmente como sendo uma forma extremamente eficaz de desenvolvimento profissional na mudança de práticas de sala de aula. (Isoda et al. 2007). Da mesma forma, ensinar através da resolução de problemas estruturados é amplamente reconhecido para desenvolver a capacidade dos alunos de pensar matematicamente e resolver problemas. O foco deste trabalho não é discutir a metodologia como estratégia para melhorar a prática do professor e a aprendizagem do aluno dentro da sala de aula (Baldin, 2009), mas sim fundamentar com esta metodologia a elaboração da proposta dos roteiros de aulas dos módulos do projeto. Para maiores detalhes da adequação necessária para impactar a prática na sala de aula referimo-nos a (Baldin & Felix, 2011).

Na próxima seção apresentamos os princípios básicos da metodologia Lesson Study em que se baseia o nosso projeto.

[1] O modelo usado foi a calculadora científica CASIO ClassWiz fx-991 LAX.

Os Princípios da Lesson Study

A Metodologia da Lesson Study consiste em atividade de pesquisa de uma aula (ou uma sequência de aulas) por professores, sendo uma atividade de grupo formado por pesquisadores, professores, coordenadores pedagógicos e até dirigentes. Em outras palavras, o Lesson Study é uma forma de investigação de uma aula-pesquisa sobre um tópico selecionado dentro do currículo escolar. O grupo pesquisa o planejamento (*conteúdo específico, estratégias de encaminhamento dentro da sala de aula, questionamentos adequados para estimular a aprendizagem participativa dos alunos, e previsão de possíveis soluções dos alunos*), para assim elaborar uma sequência didática a ser executada. Durante a execução do plano por um professor, o grupo observa a eficácia do plano elaborado de acordo com as evidências de aprendizagem dos alunos e analisando as expectativas iniciais. Após a realização da aula, o grupo se reúne para reflexão e avaliação do plano de aula como um todo, reunindo a auto-avaliação do professor com as contribuições críticas do grupo. A aula, assim analisada, pode retomar o ciclo com planejamento aperfeiçoado. (Isoda et al, 2007), (Fernandez & Yoshida, 2004), (Isoda, Arcavi, & Mena-Lorca, 2012).

Dentre todos as etapas do ciclo de uma Lesson Study o planejamento de uma aula com os ingredientes como citados acima constitui a pedra fundamental de todo o processo. Portanto, nos cursos de educação continuada de professores que almejam introduzir a Lesson Study como estratégia para promover mudança de paradigmas nas ações do professor na sala de aula, deve-se focar especialmente na aprendizagem do professor em "planejar uma aula" sob uma perspectiva diferente, mais completa e com dimensões que permitam a avaliação em si da aula durante a observação da mesma durante sua realização, assim como rever os seus olhares sobre a aprendizagem participativa do aluno através da execução do plano. (Baldin, 2010).

Tendo em vista que o nosso projeto está em execução com diversos módulos realizados e outras por realizar, notamos que o processo gradual de aprendizagem dos professores do grupo começa com a participação no plano de aula que é trabalhado inicialmente pelos pesquisadores para ser proposta para que o grupo a vivencie, para assim o grupo consiga acompanhar e compreender os itens do plano de aula, como parte da sua aprendizagem. É uma adaptação do ciclo da LS fundamentada por TPACK, dado que a inclusão da ferramenta tecnológica no plano de uma aula requer uma atenção redobrada na pesquisa.

Portanto, como Baldin (2009) afirma da necessidade de adaptar a metodologia de Lesson Study como Pesquisa de Aula, aos contextos da realidade brasileira nos cursos de educação de professores, o nosso projeto foca com prioridade o roteiro de aulas em que a integração da calculadora científica é realizada como uma aula inédita de resolução de problema-tema enaltecendo o significado do conhecimento de disciplinas específicas pelas facilidades que a calculadora traz para instigar a curiosidade, a exploração pela descoberta, a compreensão das possibilidades de generalizações e também da análise das limitações da calculadora.

Os passos da Lesson Study permitem a observação da eficácia de uma aula por meio de um planejamento cuidadoso, para então poder avaliar os resultados da aprendizagem dos alunos, que é o objetivo principal de uma aula.

Exemplo do projeto em escolas da rede estadual de ensino

A parceria do nosso projeto com a rede estadual de ensino básico, por meio da Diretoria de Ensino Regional de José Bonifácio, no estado de São Paulo, Brasil, está permitindo realizar a

médio e longo prazo as capacitações de professores no uso de calculadora científica, usando a metodologia Lesson Study para efetivamente levar os professores participantes a compreender a importância do planejamento criterioso de uma aula com integração da tecnologia, e trabalhando o conteúdo do currículo oficial em contexto ampliado de conectar os tópicos com dimensões de competências e habilidades preconizados em documentos oficiais, por exemplo, incluindo a educação financeira, educação pela cidadania, interdisciplinaridade com outras áreas como Física, Biologia, estando a Geografia e Química em planos imediatamente futuros. Além disso, o roteiro foi planejado para mudar a dinâmica de participação dos alunos para engaja-los na produção de suas respostas.

Um dos exemplos recentes do nosso projeto foi realizado por meio do roteiro pesquisado, testado por simulações pelos participantes antes de levar a sala de aula dos participantes, e depois analisado através de registros, fotos e questionários de avaliação. O tema foi a probabilidade de acerto no sorteio de loteria, a Mega Sena, que consiste em apostas em 6 escolhas entre os números de dois dígitos, de 01 a 60. Um texto motivador e explicativo foi colocado no início do roteiro com as regras da loteria, e a aula foi planejada com uma proposta de inclusão dos participantes vivenciando inicialmente as possibilidades dentro da sua turma de alguém acertar o prêmio. As primeiras atividades foram para que os professores identificassem o objetivo de trabalhar o pensamento de análise combinatória dentro de uma situação problema do cotidiano, por meio do questionamento “Qual é a melhor aposta?” e vivenciar as reações que ocorreriam dentro da sua sala de aula. O roteiro é cuidadosamente elaborado por meio de atividades, no início lúdicas, mas inquisidoras à medida que se exploram as probabilidades, as técnicas de elaborar a árvore de possibilidades e os cálculos mediados pela calculadora. A calculadora se mostra especialmente útil ao promover o senso numérico ao explorar a ordem de grandeza dos números que surgem nas diversas possibilidades de aposta e dos preços que se pagam pelas mesmas, assim como analisar as limitações próprias da tecnologia e, portanto, descobrir o potencial do conhecimento matemático para solucionar problemas. Enfim, a educação cidadã de promover o gasto responsável e tomada de decisões foram resultados implícitos na atividade.

Cerca de 45 professores da rede trabalharam o roteiro descobrindo novas formas de ensinar conteúdo com significados e com a tecnologia. Até o momento dois professores conseguiram levar a aula-pesquisa para suas salas de aula com registros da realização, e a análise dos relatos pós-aula são promissores em mostrar a superação do temor de deixar a zona de conforto, como também uma apreciação crítica do como os alunos podem aprender com nova ferramenta didática. Os professores do nosso projeto que ainda não testaram a aula-pesquisa são esperados que se sintam motivados a executar o roteiro e participar da análise coletiva a ocorrer.

Conclusões

Diante da resistência compreensível dos professores em enfrentar desafios de mudança no paradigma de ensino com vistas a aprendizagem participativa e significativa dos alunos, acreditamos que o projeto de integração da calculadora científica no contexto escolar, fundamentado pelo quadro teórico TPACK e realizado dentro da metodologia Lesson Study está trazendo respostas promissoras a questões de investigação que motivaram o projeto, na direção de alternativas para os cursos de formação de professores nos tempos atuais**.** Finalmente, este projeto contribuirá para o desenho de atividades de acordo com a Base Nacional Comum Curricular.

Bibliografia e referências

Baldin, Y. Y. (2009). O significado da introdução da metodologia japonesa de Lesson Study nos cursos de capacitação de professores de matemática no Brasil. *XVIII ENCONTRO ANUAL DA SBPN.* São Paulo, 26 a 28 de setembro de 2009.

Baldin, Y.Y. (2010). The Lesson Study as a strategy to change the paradigm of teaching Mathematics: a Brazilian case. In *Proceedings of 4th APEC Tsukuba International Conference.* Tokyo: U. Tsukuba. Recuperado de http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2009/doc/pdf_20-21/YurikoYamamotoBaldin-paper.pdf

Baldin, Y. Y., & Felix, T. (2011). A Pesquisa de Aula (Lesson Study) como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula. *XIII CIAEM-IACME*. Recife.

Baldin, Y.Y., & Guimarães, L. (2012). El proceso de introducción de Estudio de Clases en Brasil (versão ampliada em espanhol do original The process of introducing Lesson Study in Brazil). Em *Isoda, Arcavi & Mena Lorca (Eds), El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas, Su importância para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global. Tercera edición. Valparaíso: Ediciones Universitárias de Valparaíso*, pp. 306 – 315.

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais, parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2017). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular- BNCC*. Brasília.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese approach to improving Mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Isoda, M., Arcavi, A., & Mena-Lorca, A. (2012). *El estudio de clases japonés en Matemáticas, Su importância para el mejoramiento de los aprendizajes em el escenario global*. Tercera edición. Valparaíso: Ediciones Universitárias de Valparaíso.

Isoda, M., Stephens.M., Ohara, Y. & Miyakawa, T. (2007). *Japanese Lesson Study in Mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement*. Singapore: World Scientific.

Kissane, B. (2015). Learning with calculators: Doing more with less. *In: 25th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers: Mathematics: Learn, Lead, Link, 6 - 8 July 2015*. Adelaide, Austrália.

Kissane, B. & Kemp, M. (2012). Calculators and the mathematics curriculum. *In W.-C. Yang, M. Majewski, T. de Alwis & K. Khairiree (Eds.) Creative and Critical Thinking in Mathematics Through Technology: Proceedings of the 17th Annual Conference of the Asian Technology Conference on Mathematics*. (pp. 178-187) Bangkok, Thailand: ATCM Inc.

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, Volume 108, Number 6, June 2006, pp. 1017-1054.

Neves, T., & Bittar, M. (2015). Análise da prática de um professor no ensino da Matemática: Possíveis reflexões em um processo de integração de tecnologia. *EM TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana, 5*, número 3.

Purificação, I., Neves, T., & Brito, G. (2010). Professores de matemática e as tecnologias: medo e sedução. Em *Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: Algumas reflexões* (pp. 31-57). Campo Mourão: FECILCAM.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 4-14.*

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El profesor que enseña matemáticas en la inclusión escolar de niños con Trastorno de Espectro Autista (TEA)

Claudia **Franceschette**
Universidad de Antioquia
Colombia
claudia.franceschette@udea.edu.co
Lucía **Zapata-Cardona**
Universidad de Antioquia
Colombia
lucia.zapata1@udea.edu.co

Resumen

En esta ponencia discutimos la importancia del profesor que enseña matemáticas en el proceso de inclusión del niño con Trastorno del Espectro Autista (TEA). Presentamos inicialmente las principales normas de las entidades gubernamentales colombianas que buscan la protección de los niños que presentan este trastorno y que aportan los lineamientos para la inclusión en el sistema educativo convencional. Luego, se presenta una discusión sobre el Trastorno del Espectro Autista y sus principales características y se continúa con el papel que cumple el profesor que enseña matemáticas en el proceso de inclusión. Terminamos resaltando algunas conclusiones sobre el rol del profesor que enseña matemáticas en el éxito de la inclusión.

Palabras clave: educación inclusiva, Trastorno del Espectro Autista, matemática escolar, profesor que enseña matemáticas.

Introducción

La inclusión escolar de niños con discapacidad en los sistemas educativos convencionales además de ser un tema muy novedoso y reciente es también pertinente para el momento que vive nuestro sistema educativo y es de alto interés para la política pública. Ese proceso de vinculación de los niños con discapacidad en las escuelas regulares empezó cuando se pasó a exigir por ley la inclusión de estos niños en los sistemas educativos, atendiendo al marco de la Convención de las Naciones Unidas sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad (CDPD) en el que se reconoce el derecho de todos los niños con discapacidad a ser incluidos en los sistemas educativos generales y a recibir apoyo individual cuando lo necesiten (Organización Mundial de la Salud, 2011, p.231).

En Colombia, la matrícula y la permanencia de personas con algún tipo de discapacidad en los sistemas educativos se han incrementado cada año de acuerdo con los datos del Ministerio de Salud y Seguridad Social (2014, p. 20). Según El Ministerio de Educación Nacional, la atención educativa a la población con discapacidad se enmarca en los principios de la educación inclusiva: calidad, diversidad, pertinencia, participación, equidad e interculturalidad, conforme es establecido por la Ley 1618 de 2013 (Ministerio de Salud y Seguridad Social). De igual forma, se acogen los principios de la Convención de los Derechos de las Personas con Discapacidad, que en Colombia tiene fuerza de Ley desde 2009 registrada bajo número 1346 (Ministerio de Salud y Seguridad Social) la cual se enfoca en el favorecimiento de las trayectorias de niñas, niños, adolescentes y jóvenes para su ingreso, permanencia, promoción y egreso en el sistema educativo. Reforzando y direccionando el cumplimento de las leyes de inclusión está el Decreto 1421 de 29 de agosto de 2017 (Ministerio de Educación Nacional), por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad enfatizando que se hagan los ajustes necesarios buscando hacer efectiva la inclusión educativa en Colombia.

Teniendo en cuenta la obligatoriedad de la inclusión educativa en nuestro país, presentamos en esta ponencia algunas consideraciones sobre el trabajo del profesor en la inclusión de niños con el Trastorno del Espectro Autista (TEA), que es una discapacidad cuyo diagnóstico se ha incrementado en los últimos años en todo el mundo. Según el Protocolo Clínico para el Diagnóstico, Tratamiento y Ruta de Atención Integral de Niños y Niñas con Trastorno de Espectro Autista del Ministerio de Salud y Protección Social de Colombia (2017), se estima que aproximadamente un 16% de la población menor de 15 años en Colombia padece algún tipo de trastorno del desarrollo, entre ellos los trastornos del espectro autista (TEA).

El Trastorno del Espectro Autista (TEA)

El autismo es un trastorno complejo del desarrollo, definido desde un punto de vista comportamental, de etiologías múltiples y con grados variados de severidad. La gran variabilidad en el grado de habilidades sociales y de comunicación y en los patrones de comportamiento que ocurren en autistas hizo más apropiado el uso del término Trastorno del Espectro Autista (TEA), conforme explica el documento de Protocolo Clínico del Ministerio de Salud Protección Social de Colombia,

> El TEA comprende una gama de trastornos complejos del neurodesarrollo caracterizados por impedimentos sociales, dificultades en la comunicación y patrones de conducta repetitivos, restringidos y estereotípicos, sin que se presenten estas características o patrones en todos los casos. El trastorno del espectro autista varia ampliamente en gravedad y síntomas, incluso puede pasar sin ser reconocido, especialmente en los niños levemente afectados o cuando se enmascara por problemas físicos más debilitantes. (Ministerio de Salud y Protección Social, 2017, p.13)

Es importante resaltar que las características del autismo generalmente afectan a la persona durante toda su vida, aunque puedan cambiar considerablemente a lo largo del tiempo y en respuesta a las intervenciones recibidas. Una de las posibilidades para desarrollar en esos niños competencias sociales y académicas que posibiliten su desarrollo y autonomía es la inclusión escolar, visto que en el ambiente escolar se puede trabajar esas competencias.

El papel del profesor de matemáticas en el proceso de inclusión

La multiplicidad de patrones es un punto crítico para la inclusión de personas con TEA en los sistemas educativos convencionales, por la diversidad de comportamientos y comprometimientos que puede presentar un niño con ese trastorno. Proveer la inclusión escolar de un niño con TEA, más que garantizar un cupo en el sistema educativo, es establecer prácticas de enseñanza que logren, efectivamente, concretizar esa posibilidad. Solamente la legislación no es suficiente para garantizar una práctica inclusiva en las escuelas porque solo hay inclusión escolar si hay aprendizaje. Calvo (2013), corroborando esa idea, afirma que "se podría definir la educación inclusiva como el proceso para tratar de garantizar el aprendizaje y la participación de todos los estudiantes en la vida escolar de las instituciones educativas" (p. 5). Por tal motivo, la misma autora resalta la importancia del trabajo del profesor como punto central de la inclusión escolar,

> Existe consenso en que la inclusión educativa de estudiantes no puede realizarse sin una decidida intervención de los docentes. Para que esto sea posible, es necesario ubicar su centralidad en la educación y demostrar que no se puede avanzar en este plano sin mejorar, al mismo tiempo, en la comprensión de lo que cree, puede hacer y hace el docente. (Calvo, 2013, p.6)

Reforzando la importancia del trabajo docente para la inclusión escolar, Martinic (1999) resalta que "todos los estudios que han analizado los factores asociados a los aprendizajes destacan la importancia que tiene la forma en que los profesores perciben los aprendizajes de sus alumnos, y su capacidad reflexiva sobre sus propias prácticas" (p.4), es decir que las perspectivas que tienen los profesores en relación a su práctica pedagógica y en relación a la forma como aprenden sus alumnos influye en el aprendizaje. Por supuesto que el éxito de la educación inclusiva depende del empeño y compromiso de todo el sistema educativo, incluso del sistema de formación inicial y permanente de los docentes, asimismo Martinic citado por Calvo (2013) resalta el profesor como la persona que ejerce mayor influencia directa sobre esos niños, según él:

> La teoría y la práctica de la inclusión educativa indican que uno de los elementos que más incide en el proceso de aprendizaje de los estudiantes tiene que ver con lo que creen, pueden y están dispuestos a hacer los docentes y con las expectativas sobre los logros de sus alumnos. (Citado en Calvo, 2013, p.6)

Calvo (2009) también enfatiza que la inclusión no es un proceso aislado, "la inclusión es un proceso que implica la formación de maestros, la adecuación del currículo, la normatividad, la vinculación de la familia, la vinculación de la comunidad educativa: las interacciones deben fortalecer la inclusión" (p.25). En relación a la formación docente, Guajardo (2008) afirma que los procesos de formación inicial de los docentes en América Latina no evolucionan a la misma velocidad que los modelos educativos propuestos y exigidos en las políticas de Estado; de esta manera, la formación de los docentes de educación especial se centra en el entrenamiento para atender discapacidades específicas y, por otro lado, los docentes de la educación regular se han formado en modelos homogenizantes. Todo ello ocasiona que los profesores experimenten dudas e incertidumbres sobre su hacer cotidiano.

Sabemos que la inclusión es un desafío para los sistemas educativos porque rompe con los paradigmas que sostienen el conservadurismo en las escuelas. De esa forma contesta a los sistemas educativos en sus fundamentos básicos como la fijación de modelos ideales, la

normalización de perfiles específicos de alumnos y la selección de "los elegidos" para frecuentar las escuelas, produciendo, así, identidades y diferencias, inserción y/o exclusión (Ropoli, et al. 2010), pero también es un derecho que corresponde a esos niños. Por otro lado, si la escuela no está preparada para recibir a ese niño, puede que él permanezca aislado, aunque esté en un ambiente escolar. Para que esto no ocurra, Chiote alerta que:

> La inclusión del niño con autismo va más allá de colocarlo en una escuela regular, es necesario proporcionar a ese niño aprendizajes significativos, invirtiendo en sus potencialidades, constituyendo, así, el sujeto como un ser que aprende, piensa, siente, participa de un grupo social y se desarrolla con él y a partir de él, con toda su singularidad. (Chiote, 2013, p. 12)[1]

En especial, para el profesor que enseña matemáticas, propiciar la inclusión de un estudiante con Trastorno del Espectro Autista (TEA) en una clase regular, puede ser realmente muy complejo, requiriendo una adecuación en su trabajo debido a las dificultades específicas de ese alumno. Esas adecuaciones pasan necesariamente por lo que él entiende al respecto del autismo y de la inclusión, del currículo y del planeamiento de las acciones pedagógicas necesarias para el desarrollo de las potencialidades de ese alumno. Cunha (2012) señala la práctica escolar como una gran oportunidad para que profesionales y familiares construyan un repertorio de acciones inclusivas para el autista, dentro de una concepción de aprendizaje que incluye desafíos y superación, siempre con el propósito de propiciar la autonomía. Por esta razón, direcciona nuestra mirada hacia la fuerza que tiene el trabajo del profesor para el desarrollo de su alumno autista afirmando que,

> No hay cómo hablar de inclusión sin mencionar el papel del profesor. [...] Cuando creemos en el individuo, en su potencial humano y en su capacidad de reconstruir su futuro, lo incluimos, y nuestra actitud se convierte en el movimiento que dará inicio a su proceso de emancipación. En realidad, la inclusión escolar se inicia por el profesor. (Cunha 2012, p.101)[2]

Considerando la importancia del profesor en el proceso de aprendizaje del alumno con TEA, uno de los puntos clave para la inclusión sería procurar una mejor comprensión de cómo el aprendizaje efectivamente ocurre en un niño con TEA, para así construir un repertorio de acciones inclusivas, dentro de una concepción de aprendizaje que incluye desafíos y superación, siempre con el propósito de propiciar la autonomía del alumno (Marco, 2011).

Las matemáticas, por su representatividad en innumerables situaciones del cotidiano, debe ser trabajada de forma que ese niño adquiera habilidades formales que lo ayuden en la adquisición de la autonomía, tan importante para esas personas. Actividades comunes como leer las horas, encontrar direcciones y números telefónicos, hacer compras en supermercados, porcionar o fraccionar cantidades, requieren sistemas de conteo y habilidades para usar y reconocer los numerales (Goyos & Rossit, 2009, p. 214). Según Gomes (2007), se puede percibir también que, mejorando las estrategias de enseñanza que posibilitan la adquisición de habilidades básicas, como por ejemplo los conocimientos matemáticos de uso cotidiano, "niños con autismo han mostrado una ganancia en el repertorio general y, consecuentemente, se tornan

[1] Traducción de las autoras

[2] Traducción de las autoras

hábiles a aprender comportamientos más complejos como aquellos que son necesarios para los contenidos académicos" (p. 346).

La educación inclusiva debe estar planeada de acuerdo con la necesidad de cada niño, prevaleciendo siempre sus fortalezas y no sus dificultades y el profesor como siendo la persona del entorno escolar más cercana a sus alumnos será ciertamente la que más tiene evidencias en relación con sus necesidades. Los niños con autismo tienen condiciones para aprender, afirma Lago (2007), aunque presentan diferencias con respecto al desarrollo cognitivo normal, que pueden producir efectos peculiares en el proceso de aprendizaje. Siendo que esta manera diferente del autista de aprender refleja la manera en cómo enseñarles. La mayoría de las personas con autismo son *pensadores visuales* o *visual thinkers* y, según Grandin (1995), procesan el pensamiento en imágenes, tienen dificultades para cambiar sus rutinas diarias, necesitan ambientes estructurados y organizados para aprender y demuestran una inhabilidad en la percepción, la comprensión y la comunicación. Datos como estos, por ejemplo, son muy importantes cuando el profesor está pensando en las estrategias que va a utilizar para facilitar el aprendizaje de la persona con autismo, respetando la manera de pensar y aprender de ese alumno, presentando materiales que muestran de forma concreta los conceptos matemáticos.

El alumno autista también puede demostrar muchas habilidades que pueden ser explotadas por el profesor que enseña matemáticas para desarrollar estrategias de enseñanza y motivar la inclusión y el aprendizaje. Entre estas habilidades podemos destacar la memoria a largo plazo, intensa concentración y focalización (principalmente en las áreas preferidas), habilidades artísticas, habilidades matemáticas, habilidad en decodificar lenguaje escrito (incluso sin entender el sentido literal de las palabras), habilidad en resolver problemas y capacidad en informática y tecnologías. Identificando esas fortalezas se pueden adaptar los contenidos matemáticos a los intereses de los niños, ajustado con las habilidades y repertorios que se quiere desarrollar en ellos.

Conclusiones

Todos estos retos de conocer y adaptarse a nuevas exigencias, leyes, métodos, conocimientos y tecnologías, relacionados, con el Trastorno del Espectro Autista, hacen o deberían hacer parte de la formación y actualización de la profesión docente. En particular, el profesor que enseña matemáticas a niños con esta discapacidad tiene un doble reto: gestionar el currículo de matemáticas y garantizar el aprendizaje. Por supuesto esta no es una tarea fácil y en consecuencia la formación permanente del profesor es fundamental.

Mirando hacia el pasado, no hay duda de que Colombia camina en dirección a la inclusión. Todavía hay un largo camino por recorrer hasta que se cumpla el reto de garantizar la escolarización y la inclusión de los niños con Trastorno del Espectro Autista. Para el profesor que enseña matemáticas, queda el desafío de acoger ese alumno, respectando sus diferencias y necesidades, haciendo el ejercicio de enfocar en sus fortalezas y no su discapacidad.

Referencias y bibliografía

Calvo, G. (2013). La Formación de Docentes para la Inclusión Educativa. *Páginas de Educación [online], 6*(1),19–35.

Calvo, G. (2009). Inclusión y Formación de Maestros. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 7*(4), 78–94.

Chiote, F. A. B. (2013). *Inclusão da Criança com Autismo na Educação Infantil: Trabalhando a mediação pedagógica*. Rio de Janeiro: Wak Editora.

Cunha, E. (2012). *Autismo e Inclusão: Psicopedagogia e práticas educativas na escola e na família*. (4. Ed). Rio de Janeiro: Wak.

Gomes, C. G. S. (2007). Autismo e ensino de habilidades acadêmicas: adição e subtração. *Revista Brasileira de Educação Especial 13,* (3), 345–364.

Goyos, C. & Rossit, R. A. S. (2009). Deficiência intelectual e aquisição matemática: currículo como rede de relações condicionais. *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE), 13* (2), 213–225.

Grandin, T. (1995). *Thinking in Pictures*. New York: Doubleday.

Guajardo, E. (2008). La desprofesionalización docente en educación especial. *Revista latinoamericana de inclusión educativa, 4* (1), 3–11.

Lago, M. (2007). *Autismo na escolar: Ação e reflexão do professor*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Porto Alegre.

Marco, C.L.S.T. (2011). O aluno com síndrome de asperger em sala de aula. *Temas sobre Desenvolvimento, 18* (102), 63–65.

Martinic, S. (1999) Las representaciones de la desigualdad y la cultura escolar en Chile. *Proposiciones.* Santiago de Chile, Chile. (43) 1–10.

Ministerio de Educación Nacional – MEN (2017). Decreto 1421 de 29 de agosto de 2017. Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. MEN. Colombia, Bogotá.

Ministerio de Salud y Seguridad Social. (2009). Ley Estatutaria 1346 de 2009, Por medio de la cual se aprueba la "Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad", adoptada por la Asamblea General de las Naciones Unidas el 13 de diciembre de 2006. Colombia. Publicada en el Diario Oficial número 47427 de 31 de julio de 2009.

Ministerio de Salud y Seguridad Social. (2013). Ley Estatutaria 1618 de 2013, Por medio de la cual se establecen las disposiciones para garantizar el pleno ejercicio de los derechos de las personas con discapacidad. Colombia. Publicada en el Diario Oficial número 48717 de 27 de febrero de 2013.

Ministerio de Salud y Seguridad Social. (2014). *Línea de Base Observatorio Nacional de Discapacidad. Análisis Descriptivo de Indicadores.* Bogotá, Colombia.

Ministerio de Salud y Protección Social. (2017). *Protocolo Clínico para el Diagnóstico, Tratamiento y Ruta de Atención Integral de Niños y Niñas con Trastorno del Espectro Autista.* Ministerio de Salud y Protección Social. Instituto de Evaluación Tecnológica en Salud. Colombia. Bogotá.

Organización Mundial de la Salud – OMS. (2011). *Informe mundial sobre la discapacidad.* Organización Mundial de la Salud, Ginebra, Suiza.

Ropoli, E. A., Mantoan, M. T. E., Santos, M. T. C., & Machado, R. (2010). *A Educação Especial na Perspectiva da Inclusão Escolar: A Escola Comum Inclusiva*. Ministério da Educacão, Brasília, Brasil.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Dos experiencias de formación de maestros en la perspectiva de la etnomatemática

Carolina **Tamayo**
Universidade Estadual de Campinas
Colombia/Brasil
carolina.tamayo36@gmail.com

Hilbert **Blanco-Álvarez**
Universidad de Nariño
Colombia
hilbla@udenar.edu.co

Resumen

La presente comunicación tiene como objetivo presentar dos experiencias de formación de maestros enmarcadas en la perspectiva de la etnomatemática, como posibilidad de ampliar las reflexiones sobre el ser/hacer en la clase de matemáticas cuestionando las diversas formas en las que se manifiestan las tensiones entre el conocimiento matemático escolar y extraescolar. De un lado, presentamos la experiencia de dos profesores indígenas Guna y, por otro lado, un curso desarrollado para maestros afrodescendientes. Concluimos que en la formación de maestros –inicial y continuada- desde una perspectiva Etnomatemática es fundamental estudiar las relaciones de poder entre el conocimiento matemático escolar y extraescolar abriendo margen para currículos más incluyentes y apropiados a los contextos socioculturales de las poblaciones con una perspectiva decolonial.

Palabras clave: currículo escolar, educación indígena; educación afrodescendiente, educación matemática; enseñanza de las matemáticas.

La problemática

En la década de los 80 surgió en Colombia la etnoeducación como una propuesta para las comunidades indígenas y afrocolombianas, siendo uno de sus objetivos desarrollar experiencias educativas propias para defender y fortalecer sus culturas (Ministerio de Educación Nacional, 1994). En la búsqueda de caminos y de posibilidades de dar respuesta a estas preguntas, diversas universidades en Colombia – Universidad de Antioquia, Universidad del Cauca, Universidad de la Amazonía, Universidad de Nariño, Universidad del Valle, Universidad Nacional de Colombia, Universidad de la Guajira, entre otras – han abierto programas de formación de maestros, intentando responder no solo a la carencia de profesionales indígenas y afrodescendientes, sino también a las demandas educativas de los movimientos sociales y políticos en el país, sin embargo,

> En estas instituciones todavía se asume el currículo de manera homogénea y hegemónica, confundiéndose la igualdad (en el acceso a los centros educativos, sin cuestionar objetivos y contenidos de programas) con la equidad (el reconocimiento en el currículo de saberes y prácticas de diversos grupos poblacionales, cuyos derechos han sido y siguen siendo vulnerados). De esta manera, las universidades y las facultades de educación han venido contribuyendo, consciente o inconscientemente, con la violencia que ha caracterizado nuestra historia desde la conquista europea, en particular, la violencia epistémica (Castro-Gómez, 2000), al ignorar, invisibilizar o negar otras maneras de ser, pensar y habitar el mundo, privilegiando y legitimando aquellos conocimientos que benefician a quienes detentan el poder político, económico y social (Sierra, 2010, p. 158).

Los estudiantes indígenas y afrodescendientes - en diferentes campos de conocimiento-, pese a ser crecientes en número en su ingreso a la educación superior, se enfrentan a variados problemas en ese entorno, tanto en la formación inicial como en la continuada. Algunos de esos problemas van desde la falta de oferta de programas apropiados, dificultades de adaptación al medio cultural universitario, discriminación y exclusión, hasta dificultades en la apropiación del conocimiento. Vemos que estos problemas están relacionados con los efectos del quehacer autoritario de la academia y la ciencia, heredadas de una tradición colonial impositiva. Lo anterior es denominado por Boaventura Santos de Sousa (2010) como una relación *epistemicida*.

Buscando aportar elementos para repensar la formación de maestros que enseñan matemáticas en el marco de este contexto, nos proponemos desde una perspectiva etnomatemática, mostrar dos experiencias educativas, una con maestros indígenas y otra con maestros afrodescendientes, donde abordamos diversas reflexiones en la búsqueda de pedagogías otras desde y para la diversidad cultural.

Experiencia de formación con maestros indígenas

A partir de una experiencia de investigación desarrollada en 2012 con dos maestros indígenas en ejercicio de la comunidad Gunadule de Alto Caimán (Colombia)[1], quienes al mismo tiempo eran en ese momento, estudiantes del programa Licenciatura en Pedagogía de la Madre Tierra (LPMT) de la Universidad de Antioquia (Medellín-Colombia). Durante los últimos 3 semestres de la licenciatura, los dos maestros debían elaborar sus proyectos de grado acompañados de una docente de la universidad, en calidad de orientadora, para ello fue planeado un seminario de acompañamiento en el que fueron desarrolladas diversas actividades, tanto dentro de la propia comunidad como en la universidad. Sobre lo anterior uno de los maestros participantes planteó lo siguiente:

> Para mí la experiencia en la LPMT fue excelente, porque teníamos la oportunidad de ir a la universidad y escuchar otros discursos, pero también hacíamos trabajos comunitarios y visitar otras comunidades, y pasar por todos estos espacios, nos permitió darnos cuenta de que nuestra cultura posee otros conocimientos, que no tienen que ser vistos teniendo como parámetro los conocimientos de la matemática occidental. Para mí fue un avance muy muy positivo, la Etnomatemática me permitió ver que nosotros tenemos otras formas de producir conocimiento. [...] (Entrevista concedida a la investigadora por Olo Wintiyape el 20-02-2014).

[1] El pueblo Gunadule vive en el Golfo de Urabá, al noroccidente de la República de Colombia, en el departamento de Antioquia, en un territorio ancestral conocido como Resguardo *Ibgigundiwala*.

Es importante señalar, que en este seminario de acompañamiento el objetivo era identificar en la práctica del cultivo del plátano los *conocimientos [matemáticos]*[2] asociados a ella. El cultivo del plátano fue seleccionado por los dos maestros, debido a la problemática alimentaria en la comunidad, pues por el monocultivo de una única variedad de plátano se venían perdiendo las demás. De ese modo, se realizó inicialmente un recorrido por la comunidad en el que encontramos 25 variedades de plátano, con ello daríamos inicio a nuestro estudio.

Por otro lado, es importante señalar que se hicieron lecturas de diversos textos y experiencias en Etnomatemática (Green, 2007, 2011; Green *et al*. 1995; Higuita, 2011; Jaramillo, 2011; Monteiro, *et al.* 2007), se realizaron visitas a los sabios[3] y líderes de la comunidad.
A partir de esos encuentros, desarrollado durante 8 meses, diez *actividades orientadoras de enseñanza –AOE*[4]- fueron planeadas y desarrolladas en la escuela con el acompañamiento de una de las investigadoras de la universidad. En la tabla 1 se presenta una de las *AOE*, titulada la huerta comunitaria de la escuela:

Tabla 1:
La huerta comunitaria de la escuela, retomada de Tamayo-Osorio (2012)

Intencionalidad	Identificar la importancia del control de las cantidades en las prácticas sociales de la cestería y del cultivo del plátano.
Motivo	Control y sostenimiento de la alimentación de los niños de la escuela.
Necesidad	Manejo de las cantidades para el control de la huerta escolar y la alimentación sostenible para la escuela.
Acciones	Visitar con los niños y algunos padres de familia las huertas escolares para realizar el proceso de limpieza de los colinos que ya fueron sembrados. A partir de las indicaciones que los maestros indígenas y los padres de familia expertos, los niños van a formular preguntas en torno a la recolección de los colinos para investigar con los más viejos de la comunidad diferentes métodos de registrar y controlar las cantidades (¿cómo se hace el control? ¿se usa los dedos como referencia?) Diseño de preguntas para la visita a los miembros mayores de la comunidad. Dibujar en equipos las diferentes formas y significados ancestrales en las que sería posible controlar las cantidades según los relatos de los viejos.

Fuente: producción propia. 2012

[2] En vista de lo problemática que se tornó la discusión acerca de los hallazgos encontrados, optamos (tras innúmeras discusiones con los profesores) por asumir esta connotación [matemáticas] con la finalidad de problematizar los sentidos y usos de dicha palabra (TAMAYO-OSORIO, 2012).
[3] Para el pueblo indígena Guna, un sabio, cacique o en lengua Guna *sagla*, es una persona sabedora de los conocimientos e historias ancestrales, guía espiritual y líder político.
[4] Entendidas en el sentido propuesto por Moura, *et al* (2010, p. 220) la "*Actividad Orientadora de Enseñanz*a se constituye un modo general de organización de la enseñanza, en el que su contenido principal es el conocimiento teórico y su objeto es la constitución del pensamiento teórico del individuo en el movimiento de la apropiación del conocimiento. Así, el maestro, al organizar las acciones que objetivan el enseñar, también recualifica sus conocimientos, y es ese proceso que se caracteriza la *Actividad Orientadora de Enseñanza* como unidad de formación del maestro y del estudiante".

Iniciamos la implementación en la escuela con la presentación de dos videos que posibilitaron que los dos maestros y sus estudiantes reflexionaran conjuntamente sobre la importancia de la historia ancestral y de origen en la forma en que los Dule ven y dialogan con la Madre Tierra y los demás seres que en ella viven. Posteriormente, con algunos padres de familia y algunos de los *saglas* se realizó una visita a la huerta escolar, con la finalidad de entender cómo se dio la recolección de las 25 variedades de plátano y cómo realizar el proceso de cultivo, además para iniciar la preparación del terreno.

Es importante resaltar que se buscó generar reflexiones e indagaciones que posibilitaran que los niños y niñas se aproximaran al conocimiento de su propia comunidad, además, la producción del trabajo de investigación de pregrado de los profesores Guna – Cuellar-Lemos & Martínez (2013) - aprendimos cómo el cultivo del plátano y la necesidad del conteo posibilitaron que estudiáramos el número, esto es, los números utilizados en la cultura Dule. Mediante el estudio del control de las cantidades nos deparamos también con la *práctica de medir*[5] tiene una fuerte relación con los significados de los números. Formas de cuantificación que se constituyeron como base de lo que ellos mismos han denominado como la numeración Dule, por ejemplo:

> La cantidad de huecos que se hace por hilera en el terreno para cultivar los colinos de plátano siempre es número par, por ejemplo 20 huecos, o como los días de encierro que se le hace a la niña en la fiesta de la pubertad. ¿por qué? Por ejemplo, porque el número Bogwa, número dos (2), significa la paz del corazón, significa dos personas unidas en un solo corazón. Esto tiene que ver con la complementariedad perfecta de lo masculino y lo femenino. En el cultivo también debe verse esta complementariedad. Durgwen, "número veinte (20), una persona" Éste viene de las palabras dule "persona con sabiduría" y gwen "ser"; es decir, ser que en su totalidad tiene 20 dedos. Es la perfección del ser. (Reflexión realizada en el trabajo de aula, Olo Wintiyape, agosto 2011).

Para hacer la medición y el señalamiento del terreno, se utilizó una medida propia de su cultura adoptada como la "vara Dule", la cual, como se verificó en indagaciones anteriores (Berrio, 2009), mide 2,50 metros en relación a la cultura occidental aproximadamente, que se calculó en el terreno del siguiente modo:

> escogimos una de las personas que ayudó a tumbar el monte y él tomó la medida del largo de su cuerpo desde los pies hasta llegar a la punta de los dedos con un brazo extendido hacia arriba. Luego completo la medida con el largo del brazo hasta el codo más dos dedos de longitud, y ahí tenemos 1 vara. (Reflexión realizada en el trabajo de aula, Martínez Montoya, 20 de octubre 2011).

Así, fue posible que aprendiéramos que dentro de la cultura Dule, al comprender el medir como acción corporal y no como un contenido meramente cognitivo, se quiebra con la idea de entender esta práctica como algo meramente disciplinar, es decir, como un contenido exterior a las prácticas socioculturales.

[5] Entendemos el concepto de medida basados en Caraça (1984) que dice, para referirse al problema de medir, que este requiere de: 1º– Establecer un estándar único de comparación para todas las grandezas de la misma especie; ese estándar se llama unidad de la grandeza de la que se trata —es, por ejemplo, el centímetro para las longitudes, el gramo de peso para los pesos, el segundo para los tiempos, etc.2º – Responder a la pregunta –¿cuántas veces? –poner, lo que se hace dando un número que exprese el resultado de la comparación de la unidad. Ese número se llama la medida de la grandeza en relación a esa unidad. (p. 30).

Experiencia de formación con maestros afrodescendientes

El curso de formación de maestros desde la etnomatemática se llevó a cabo en el municipio de Tumaco, ubicado en el Departamento de Nariño en la zona sur occidental de Colombia. El grupo que participó en el curso fue de 28 maestros: 23 de ellos laboran en la educación básica primaria, y 5 en la educación básica secundaria del municipio de Tumaco. Su formación profesional es muy diversa, lo cual enriqueció las discusiones y las perspectivas frente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El Curso se organizó en tres fases: Planeación, Implementación y Resultados. En adelante se explica en detalle la dinámica del trabajo en la fase de implementación, por medio de sus tres etapas:

Etapa teórica-conceptual

Se buscó reflexionar sobre la naturaleza de las matemáticas, los saberes matemáticos extraescolares, el currículo de matemáticas y la cultura (Blanco-Álvarez, 2011; 2012), y se realizaron indagaciones sobre las prácticas matemáticas de la cultura tumaqueña, utilizando como metodología las actividades universales: contar, medir, diseñar, jugar, localizar y explicar (Bishop, 1999; 2005).
Los hallazgos de las prácticas matemáticas de la cultura tumaqueña se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2
Prácticas matemáticas encontradas por los maestros en la cultura tumaqueña

Contar	**Medir**	**Diseñar**	**Localizar**	**Jugar**	**Explicar**
La racción	*Longitudes*	La rampira	Los linderos	Chapacajón	Práctica
El ciento	La yarda	El abanico	La manga		Observación
La docena	La guasca	La catanga	Sanja		
La sarta	El paso	Petate de	Churo de		
La carga	La cuarta	tetera	guadua		
	La braza	La cobija	humo		
	El codo	La canoa			
	El geme	El canalete			
	La vara	El calabazo			
	Peso	Tagua			
	Balanza humana				
	Totumado				
	El puño				
	Pizca				
	Balanza de mate				

Fuente: tomado de Blanco-Álvarez (2016).

Etapa diseño de actividades

Se inició dividiendo el grupo de participantes en tres subgrupos, los maestros que trabajaban entre primero y tercero de primaria, entre cuarto y quinto, y los que trabajaban entre sexto y séptimo de la educación básica secundaria. Luego, cada grupo realizó la lectura reflexiva del apartado sobre pensamiento métrico y sistemas de medidas de los Lineamientos curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998) y se revisaron los Estándares de competencias básicas en matemáticas, en particular para el pensamiento métrico y los sistemas

de medidas; de allí reconocieron y clasificaron los niveles de construcción de la idea de magnitud y su asignación numérica. Con los elementos teóricos mencionados anteriormente y teniendo en cuenta las prácticas matemáticas que cada grupo había investigado en la comunidad tumaqueña, y provistos de los libros de texto que usualmente utilizan los maestros para la preparación de clase se dio inicio a la construcción de las actividades.

Etapa aplicación

Esta etapa consistió en acompañar y evaluar la implementación y rediseño de algunas situaciones de enseñanza desarrolladas con estudiantes de tercero (niños entre los 8 y 9 años) y quinto grado (niños entre los 10 y 11 años) de la educación primaria y de grado sexto (niños entre los 11 y 12 años) de la educación básica. Para la implementación de las actividades, un maestro de cada subgrupo desarrolló la actividad con los estudiantes para la cual había sido diseñada, mientras los docentes restantes observaron la clase y siguieron la actividad por medio del plan de clase. Finalizada la clase, se realizó una mesa redonda donde se llevó a cabo, primero, una autoevaluación del desarrollo de la actividad por parte del maestro que la ejecutó y luego los maestros observadores hicieron sus aportes constructivos para el mejoramiento de ésta.

Conclusiones

Considerando las dos experiencias en formación de maestros, un seminario con maestros indígenas y un curso con maestros afrodescendientes, resaltamos algunos aspectos que identificamos como puntos de encuentro sobre la importancia de incluir la Etnomatemática como elemento para discutir otras formas de ser/estar en el mundo y con ello problematizar la Educación Matemática desde una perspectiva sociocultural.

En primer lugar, evidenciamos que se posibilitó que los maestros ampliaran su comprensión de las matemáticas de un conjunto de saberes lógico-deductivos para entenderlas desde las prácticas sociales como una construcción humana que tienen unas significaciones diferentes al variar de un contexto para otro.

Por otro lado, fue posible repensar críticamente el currículo considerando a quién enseñamos como pregunta fundamental, donde los contenidos pasan a un segundo plano y las prácticas matemáticas autóctonas de estas regiones son las que nos posibilitan el estudio de los saberes culturales en relación con los escolares y de esa forma así enriquecer el proceso de resignificación del currículo en el marco del proceso de construcción de Proyectos Educativos Comunitarios (PEC).

En este sentido, concordamos con la propuesta de Oliveras y Blanco-Álvarez (2016) en que al incluir la Etnomatemática al aula de clase, se posibilita ampliar la concepción de las matemáticas de los maestros , y de esta forma pasar de utilizar la Etnomatemática solo como elemento motivador para introducir el tema de matemáticas escolar a estudiar - un interés cognitivo-, fomentando en el maestro en ejercicio y en formación un interés amplificador, donde además de aprender las matemáticas escolares se trabaje paralelamente en el aula las matemáticas producidas, legitimadas y validadas en las prácticas socioculturales. Luego, consideramos, que el fin último de la Etnomatemática en la escuela, debe ser la reivindicación de dichos saberes en los diversos contextos, estudiándolos, fortaleciéndolos, y divulgándolos, lo que corresponde con el interés político Blanco-Álvarez y Oliveras (2016).

En tercero lugar, se manifiesta la importancia de la relación entre los maestros y los sabios de las comunidades indígenas para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de prácticas [matemáticas] que se dan en la comunidad. La interacción entre los niños, las niñas y los sabios permitió identificar que fuera de la escuela hay unas realidades y necesidades relacionadas con la comunidad en las que son movilizados conocimientos que poseen otras significaciones diferentes a los de las prácticas matemáticas escolares.

Por último, planteamos que la escuela debe cumplir con el papel de preservación cultural, donde los maestros interactúen en compañía de los estudiantes con los elementos que constituyen su cultura. Se deja ver, una disociación entre teoría y práctica, es decir, se deja ver la disociación entre las prácticas sociales y los conocimientos [matemáticos] que son producidos, validados y legitimados desde y para las prácticas sociales.

Referencias y bibliografía

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós Ibérica.

Bishop, A. (2005). Retos críticos de la investigación de temas sociales, culturales y lingüísticos en la educación en ciencias, matemáticas y tecnología. En: A, Bishop. (Ed.). *Aproximación sociocultural hacia la educación matemática*. (pp. 149-165). Cali: Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Blanco-Álvarez, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 59–66.

Blanco-Álvarez, H. (2012). Estudio de las actitudes hacia una postura sociocultural y política de la educación matemática en maestros en formación inicial. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education*, 1(1), 57–78.

Blanco-Álvarez, H. (2016). Diseño de actividades para la enseñanza de la magnitud longitud y capacidad en la educación primaria y básica desde la Etnomatemática. In Fundación Save the Children Colombia (Ed.), Introducción al desarrollo de pensamiento métrico y los sistemas de medida en la educación básica primaria (pp. 9–26). Pasto: Graficolor.

Blanco-Álvarez, H., & Oliveras, M. L. (2016). Ethnomathematics: A political tool for Latin America. *RIPEM-International Journal for Research in Mathematics Education*, 6(1), 112–126.

Berrio, K. (2008). "La medida" en un contexto de escuela indígena: el caso del pueblo Tule y el caso del pueblo Embera-Chami. Universidad de Antioquia, investigación de pregrado.

Boaventura Santos, S., & Meneses, M. P. (2010). *Epistemologías do Sul*. São Paulo: Editora Cortez.

Caraça, B. J. (1984). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa.

Cuellar-Lemos, R.; Martínez, F. (2013). La revitalización del lenguaje de la medicina ancestral a partir de las veinticuatro variedades de plátano: una posibilidad para pensar una otra educación Gunadule dese la pedagogía de la Madre Tierra. Trabajo de pregrado. Universidad de Antioquia, Medellín.

Green, A., Cardozo, M., & Ochoa, R. (1995). *Currículo Tule*. Medellín: Organización Indígena de Antioquia -OIA- y Secretaría de Educación y Cultura de Antioquia.

Green, A. (2007). La lucha de los siete hermanos y su hermana Olowaili en defensa de la madre tierra: hacia la pervivencia cultural del pueblo Kuna Tule. *Revista Educación y Pedagogía*, 49, 227-237.

Green, A. (2011). *Significados de Vida*. Tesis de doctorado. Universidad de Antioquia, Medellín.

Higuita, C. (2011). *La medida desde la medicina tradicional: el caso de una comunidad Embera Chamí*. Trabajo de pregrado. Universidad de Antioquia, Medellín.

Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59),13-36.

Ministerio de Educación Nacional. (1994). *Ley General de Educación 115*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Monteiro, A., Sena. E., & Santos. J. (2007). Etnomatemática e prática social: considerações curriculares. En: *R. C. Grando., & J. Rodrigues Mendes*. *Múltiplos olhares: matemática e produção de conocimento*. (pp. 49-63). São Paulo: Musa Editora.

Moura, M, Sampaio, E., Dias, F., Pannosian, M. L., & Dias, V. A. (2010). Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. *Revista Diálogo Educacional*, 10(29), 205-229.

Oliveras, M. L., & Blanco-Álvarez, H. (2016). Integración de las etnomatemáticas en el aula de matemáticas: posibilidades y limitaciones. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 455–480.

Sierra, Z. (2010). Pedagogías desde la diversidad cultural: una invitación a la investigación colaborativa intercultural. *Revista Perspectiva*, 28(1), 157-190.

Tamayo-Osorio, C. (2012). (*Re)significación del currículo escolar indígena, relativo al conocimiento matemático, desde y para las prácticas sociales: el caso de la Comunidad Dule de Alto Caimán*. Investigación de maestría. Universidad de Antioquia. Medellín.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Herramienta desmos en la creación de tareas o actividades matemáticas

Resumen

El trabajo siguiente presenta una alternativa viable para complementar la dinámica tradicional en el campo de la didáctica de la matemática que se lleva en el salón de clases, esto a partir de la utilización de la aplicación gratuita DESMOS. Dicha aplicación es posible integrarla al computador, así como a cualquier dispositivo móvil inteligente, sin importar si su sistema operativo es ANDROID o IOS. En el trabajo mostrado se desarrolla la temática, en torno al uso que se le puede dar a este ambiente, así como la creación de tareas, asignaciones o exámenes creados desde DESMOS. Los temas que podrían ser abordados van desde ejercicios correspondientes a contenidos de secundaria, así como de cursos de matemática general en educación superior, esto complementado la enseñanza tradicional con la verificación a partir de la graficación de funciones.
Palabras clave: educación, matemática, didáctica, tecnología, aprendizaje, tareas.

Introducción

Este trabajo consiste en la presentación de la aplicación DESMOS como una herramienta tecnológica que le permita a los docentes trabajar en clases los contenidos matemáticos de una forma en la que además de visualizar interactivamente los mismos, puedan sus estudiantes manipularlos en la interfaz que proporciona la aplicación. Por otra parte, se convierte en una herramienta útil al docente puesto que la aplicación presenta una utilidad para la creación de tareas, mismas que los estudiantes pueden desarrollar desde sus hogares, es posible generar las respuestas de las mismas de modo que los estudiantes vayan trabajando y a la vez realimentado lo aprendido en clases. Dicha temática podría resultar de interés para estudiantes de secundaria, aquellos que cursen matemática general, asimismo para profesores de secundaria o profesores en algunos cursos de matemática básica

Objetivos

- Aportar tanto a docentes en el campo de la enseñanza de la matemática como estudiantes en su proceso de formación en el área de la docencia en matemática, una herramienta versátil que puede convertirse en un aliado en las experiencias de aula para el desarrollo y evaluación de diversos contenidos en el programa de matemática costarricense vigente.
- Promover espacios de reflexión docente acerca del uso de la tecnología como punta de lanza en el desarrollo de contenidos matemáticos y en aras de dar un abordaje diferente y atractivo al aprendizaje de esta ciencia.

Marco teórico

Con respecto a la implementación de la tecnología como recurso didáctico, puntualmente es posible señalar que"las tecnologías móviles han redibujado el panorama educativo, aportando a la educación no sólo movilidad sino también conectividad, ubicuidad y permanencia, características propias de los dispositivos móviles tan necesarias en los sistemas de educación" (Cantillo, Roura y Sanchéz, 2012, p.3), de esta forma el uso de dispositivos móviles en educación es un elemento fundamental en la construcción del conocimiento, ya que con la utilización de estas tecnologías se incrementan las posibilidades de interactuar con los miembros del grupo, se mejora la comunicación; por lo tanto, se difumina la barrera que separa a docentes y discentes.

La tendencia actual hacia el uso de dispositivos móviles y el computador en educación está enfocada a que, en el futuro, cada vez más se utilicen estos aparatos en las aulas y en los centros educativos. Creemos importante aprovechar los recursos tecnológicos que están a la mano de los estudiantes y tratar de convertir un distractor en un aliado en el proceso formativos de los mismos, es posible utilizar los dispositivos móviles y el computador para representar diversos problemas matemáticos que continuamente se desarrollan en los cursos, esto a partir de una gran cantidad de aplicaciones gratuitas y que quizás en ambientes de "papel y lápiz" no es posible visualizar de una forma interactiva y que le resulte más atractiva al estudiante. La versatilidad, el fácil uso, así como la interfaz que ofrecen una gran cantidad de aplicaciones móviles ya sea para sistemas IOS o ANDROID, las convierten en herramientas útiles para el aprendizaje de los estudiantes, corresponde a los docentes encauzar estos esfuerzos y liderar estas iniciativas en nuestro campo.

Metodología: guía didáctica

Debe tener instalado en su celular la aplicación DESMOS, la cual es gratuita y es posible descargarla desde cualquier tienda celular. También es posible acceder desde su computadora Cuando tenga instalada la aplicación en su celular, aparecerá el ícono siguiente:



Figura 1: Logo desmos.

Al ingresar a desmos tendrá la siguiente interfaz por visualizar:

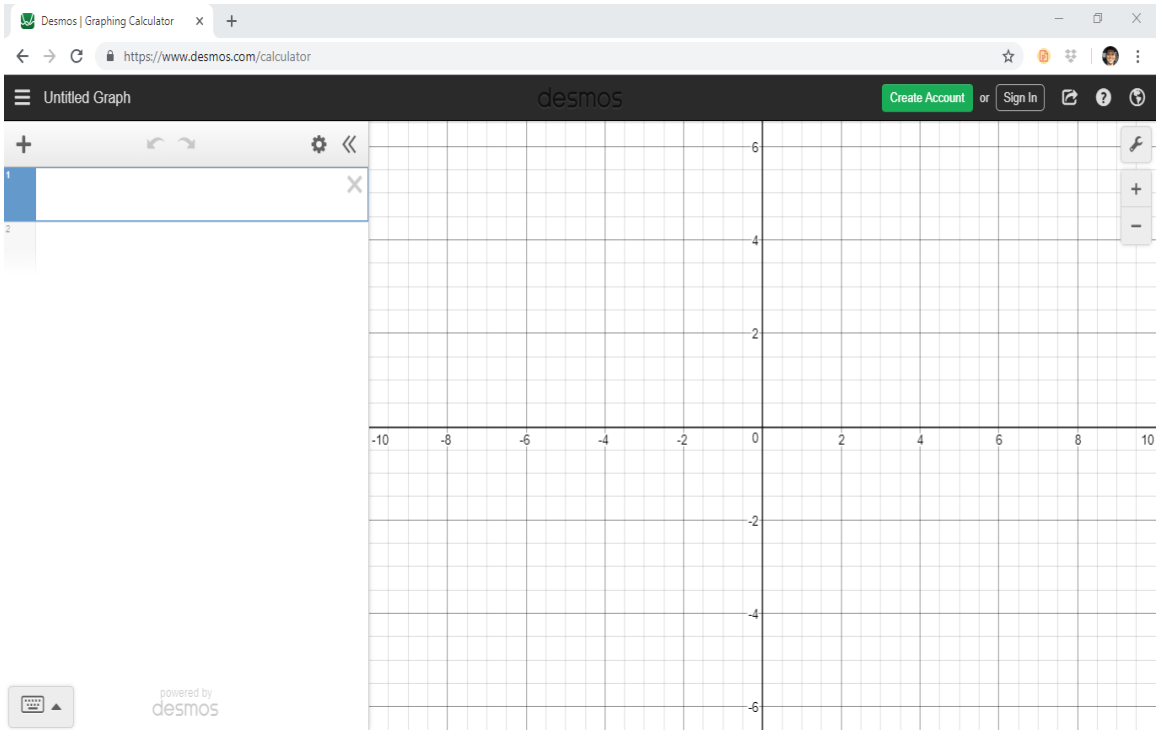


Figura 2: Interfaz desmos.

Como es posible observar, por default la aplicación ingresa al modo de graficación en el plano cartesiano, donde se tiene a disposición los diferentes botones con variables y constantes para el ingreso de ecuaciones, con el objetivo de graficar en 2D. En el botón **funcs**, es posible hallar algunas funciones

Guía desmos

La idea principal de esta guía es presentarle al estudiante los ejercicios de forma visual, de manera que estos cobren sentido para el mismo a partir de su representación gráfica. Por lo tanto, la herramienta no se convoca como un instrumento colaborativo paso a paso en la resolución del problema planteado, sino más bien se busca que el docente desarrolle los ejercicios en ambiente de papel y lápiz como comúnmente se efectúa, para luego que dicho ejercicio sea interiorizado a través de la visualización de su gráfica. Permitiendo esto relacionar la capacidad de generalización del algebra con el poder visualizador de la geometría. Podría darse el caso que los estudiantes no logran comprender el ejercicio en ambientes de papel y lápiz, pero si lo consiguen de forma visual. Los ejercicios también pueden abordarse primero a partir de la aplicación móvil o la computadora y luego mediante la resolución tradicional, dependerá de la práctica que vaya haciendo el estudiante y del conocimiento que adquiera para utilizar la aplicación como apoyo resolviendo paso a paso los ejercicios planteados. En el caso del uso de la aplicación como una herramienta docente se desarrollará un pequeño apartado a continuación en el cual se dará un guía que será ampliada por completo en el desarrollo del taller.

Creación de Tareas en desmos

Dentro de las utilidades de desmos es posible la creación de tareas mediante fichas por parte del docente, en estas el profesor puede elegir el tipo de ítem que puede utilizar para los ejercicios asignados. Entre las posibilidades se encuentran la selección única, el asocie, la respuesta breve entre otros. Para ingresar a la creación de tareas se requiere abrir una cuenta en desmos o también existe la posibilidad de ingresar desde Facebook o mediante la cuenta de google en el computador se ingresa a www.desmos.com y a la opción mostrada a continuación:



Figura 4: Ingreso a creación de actividades.

Al ingresar a classrom activities se selecciona en el menú de la izquierda la opción custom en la que es posible crear tareas para los estudiantes, se muestra a continuación dicha opción:

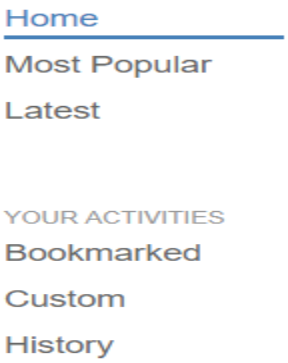


Figura 5: Opción Custom.

Posteriormente la aplicación abrirá un menú para creación de tareas, en figura 6 es posible observar algunas actividades creadas, mismas a las que el docente les asigna un nombre acorde con la temática a tratar, en el margen superior derecho se observa la opción New Activity que precisamente permitirá la creación de nuevas actividades.

Desmos: creación de tareas o actividades.

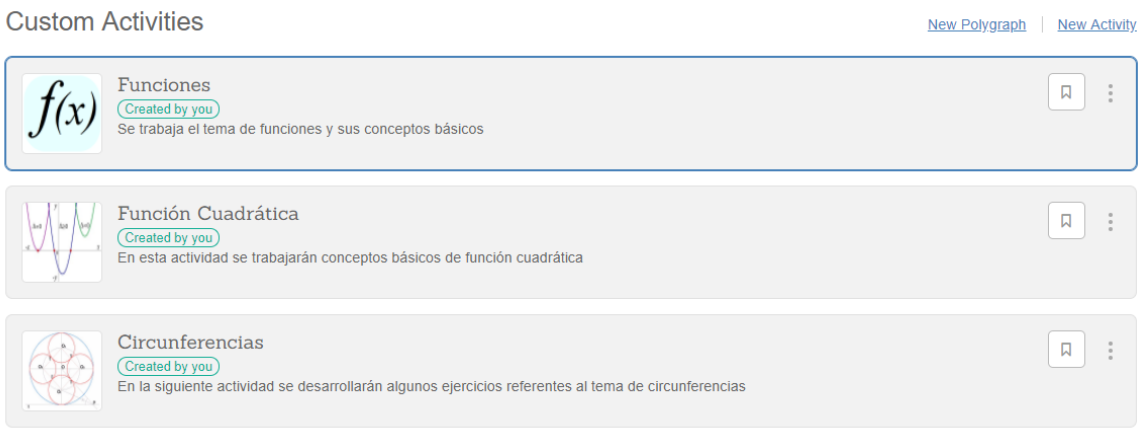


Figura 6: Actividades ya elaboradas.

Ingresando en nueva actividad lo que primero se mostrara será la opción para darle nombre a la actividad a desarrollar, así como un código para que los estudiantes ingresen. También existen ya una serie de actividades realizadas dentro de la misma aplicación, únicamente la barrera es el idioma en este caso. Luego de dar nombre a la actividad (figura 7) se iniciará en start building, para empezar a desarrollar dicha actividad.

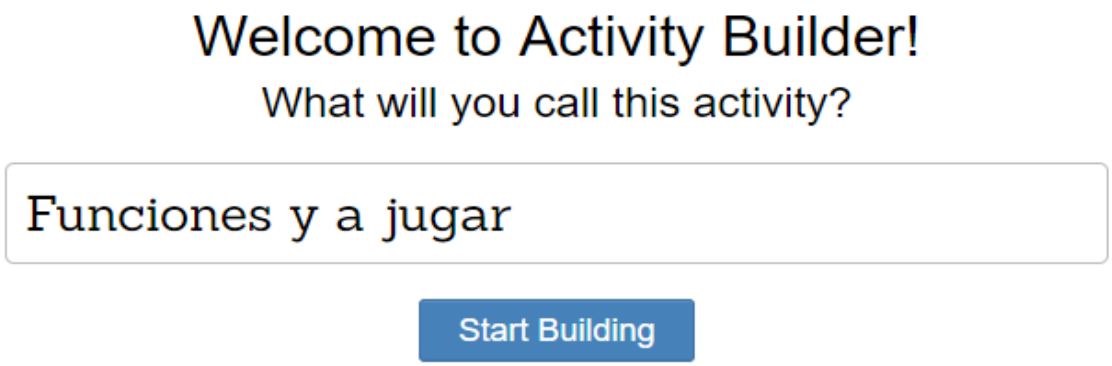


Figura 7: Darle nombre a la actividad.

Luego de asignarle un nombre a la actividad se iniciará con la construcción de la misma en la opción star building donde la interfaz de construcción será la mostrada en la figura 8.

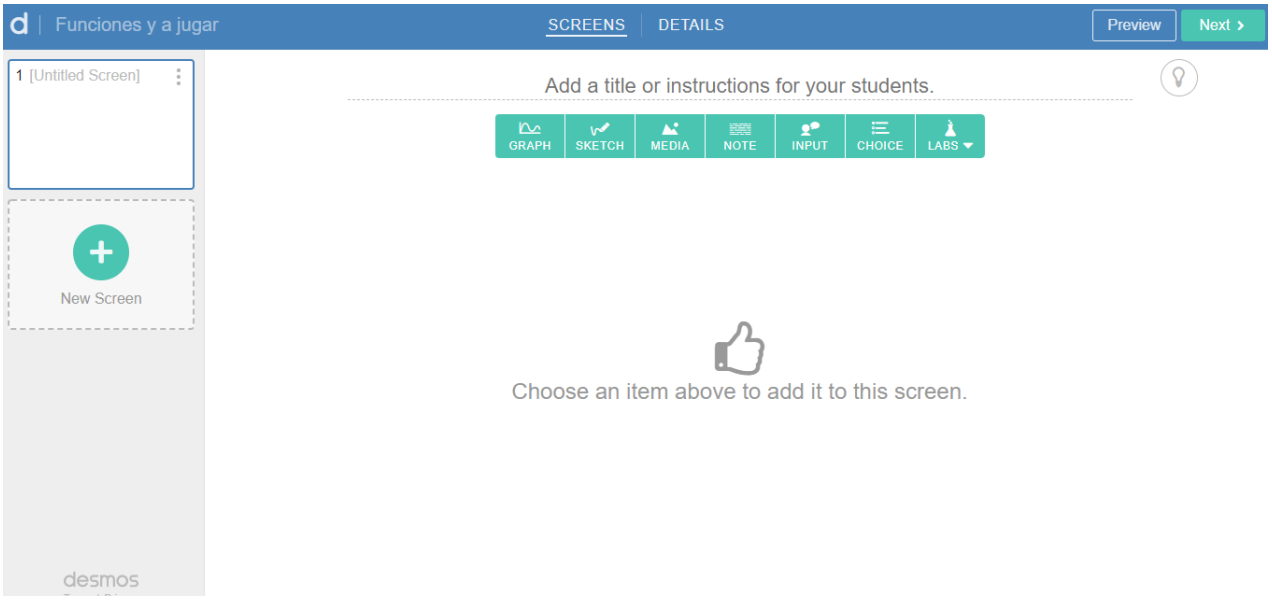


Figura 8: Interfaz de construcción de actividades o tareas

Como es posible observar en el margen izquierdo aparecen las fichas tarjetas para donde se construirán los ejercicios a desarrollar, en la parte central aparecen diferentes combos como graph que permite descargar una gráfica creada desde la calculadora graficadora de desmos, sketch permite a los estudiantes crear una pizarra interactiva para dibujar y probar algunos cuestionamientos con base en el dibujo, media es una opción que permite descargar algunos archivos ya desarrollados asi como imágenes que sirvan en algún ítem, note es una opción que permite escribir alguna nota particular en el ítem creado, input da la opción de utilizar lenguaje escrito convencional y trae una opción a la vez para la simbología matemática, choice permite escoger el tipo de ítem a crear ya sea de selección única, respuesta breve, desarrollo entre otros y para finalizar labs trae una opción llamada card sort que consiste en tarjetas de asocie.

Cuando la actividad ya está creada pueden visualizarse las distintas tarjetas que se le presentarán a los estudiantes, en la opción view dashboard es posible dar un seguimiento a los estudiantes que han contestado y las respuestas de estos. A los estudiantes se les brindará un código para que ingresen a trabajar desde sus hogares en las actividades previamente desarrolladas por el docente.

Desmos: creación de tareas o actividades.



Figura 9: Código de actividad y tarjetas realizadas.

Podemos observar el caso de una tarjeta de selección única y la vista que tendrá en estudiante de dicha tarjeta en la figura 10.

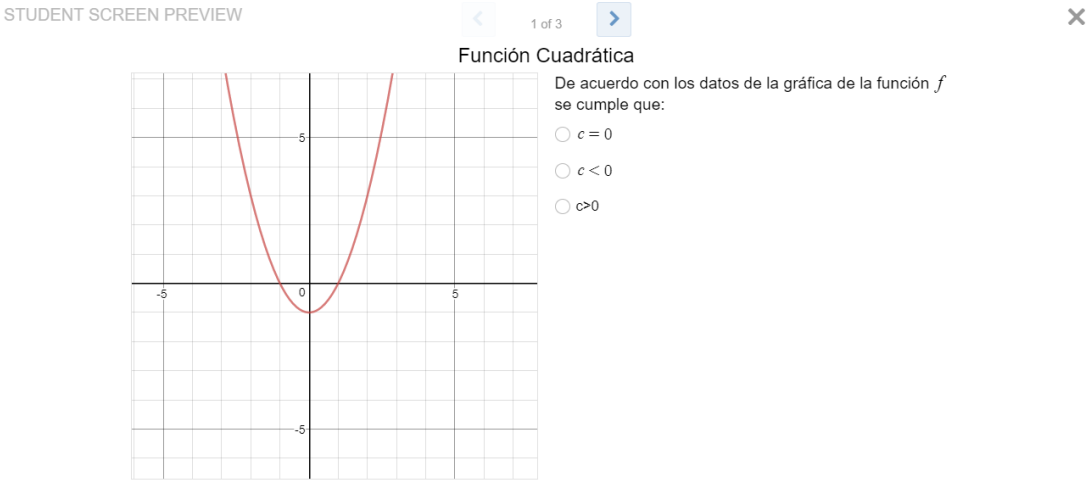


Figura 10: vista del estudiante de una tarjeta.

En el menú de dashboard es posible ver el avance de los estudiantes y contabilizar los aciertos y lo errores en las distintas tarjetas hechas como se observa en la figura 11.

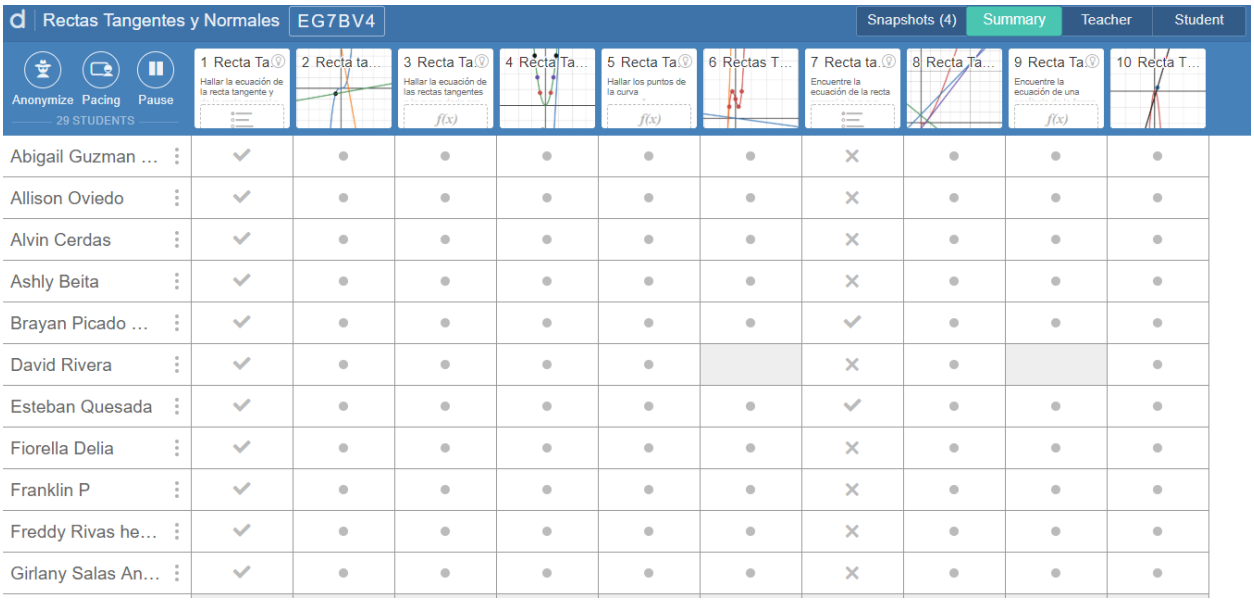


Figura 11: Menú dashboard.

Conclusiones

La idea primordial de este trabajo es convertir un distractor como lo ha sido en los últimos años la tecnología en un aliado en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática. La versatilidad de estas herramientas les permite a los estudiantes ver de una forma dinámica algún tema que en el desarrollo de la teoría quizás no será tan atractivo como al ejemplificarlo mediante algún recurso, en este caso que se propone el uso de la aplicación DESMOS.

Valorando lo anterior, nos parece importante motivar el deseo en los docentes por buscar continuamente estrategias de algún tipo, que le permitan a sus estudiantes interesarse por las temáticas desarrolladas en el salón de clase, hoy en día existe una gran cantidad de recursos que tenemos al alcance de las manos y que con un cambio en la perspectiva del uso que se les da podría convertirse como bien apuntábamos con anterioridad en un aliado estratégico en la enseñanza.

Referencias y bibliografía

Cantillo, C. , Roura, M. y Sánchez, A. (2012). Tendencias uso de dispositivos móviles en educación. *La educación digital magazine*, 147 (1), 1-21.

Paéz, C (2015). *Prácticas, soluciones y exámenes resueltos de Matemática General*. Cartago, Costa Rica: Editorial Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Swokowski, E. (2009). *Álgebra y Trigonometria con Geometria Analítica*. Santa Mónica, Estados Unidos: Editorial Brooks and Cole.

UNESCO. (2013). Enfoques Estratégicos de las TIC´s en la Educación en América Latina y el Caribe. Oficina Regional de Educación, Santiago Chile.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conocimiento del profesor con ayuda de Geogebra

Fernando **Mejía** Rodríguez
Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México
México
fernando.mejia@isceem.edu.mx

Resumen

La cultura de la evaluación no dejó escapar a la educación, ahora se crean organizaciones que aplican exámenes internacionales. Los resultados de PISA 2015 evidencian la posición del sistema educativo mexicano. El objetivo de esta comunicación es analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas cuando resuelve tareas con la ayuda de Geogebra. El enfoque metodológico es estudio de caso, se trabajó con seis profesores, cuatro de educación básica y dos de educación media superior. Se muestra una tarea resuelta por caminos diferentes. Entre las conclusiones, podemos destacar: el profesor de matemáticas, antes de exponer una tarea, debe al menos conocer tres caminos para encontrar el mismo resultado; el MTSK es complejo; una herramienta digital, que permitió la transición a una mejor comprensión y a la resolución de tareas, fue Geogebra, que, a partir de un bosquejo inicial o refuerzo, puede ser utilizado a favor de la matemática escolar.

Palabras clave: conocimiento, profesor, MTSK, tareas, Geogebra, estrategias.

Contexto del profesor de matemáticas mexicano

Los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), se organizaron para formar el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés). México ha participado desde el 2000 en estos programas, el más reciente fue el aplicado en el 2015. En la *Figura 1* (OCDE, 2016, p. 194), se puede apreciar el lugar que ocupa el sistema educativo mexicano en cuanto a matemáticas, con respecto a los países miembros de la OCDE. Estamos en último lugar, tomando en cuenta sólo los miembros de la OCDE que están en letras de color negro. Por otro lado, la OCDE hace la invitación a otras economías alrededor del mundo y están identificados con letras en color azul, entonces, alcanzamos el lugar 55 de 69. En la zona latina, estamos por encima de Costa Rica, Perú, Colombia y Brasil; pero debajo de Argentina, Chile y Uruguay.

En México, las autoridades educativas aseguran, que se debe *evaluar para mejorar*; los profesores si quieren seguir trabajando tienen que participar en evaluaciones, que como premio les dejarán

seguir laborando en las escuelas; de lo contrario, perderán su empleo.

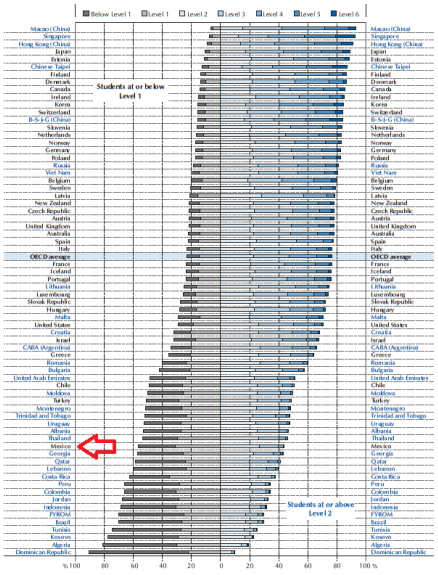


Figura 1. Resultados de matemáticas en PISA 2015

Resolución de tareas

Para Lester & Cai (2016, p. 8) la actividad principal en el salón de clases es "una tarea que se presenta a los estudiantes en un entorno de instrucción que plantea una pregunta para ser respondida, pero para la cual los estudiantes no tienen un procedimiento o estrategia disponible para responderla". El profesor debe tener un cierto conocimiento para poder explicar las ideas matemáticas a sus alumnos cuando resuelven tareas.

En la *Figura 2* se muestra el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés), expuesto por Aguilar et al. (2013), donde el dominio del Conocimiento Matemático (MK) está dividido en tres subdominios: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM); al igual el dominio del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) en otros tres subdominios: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

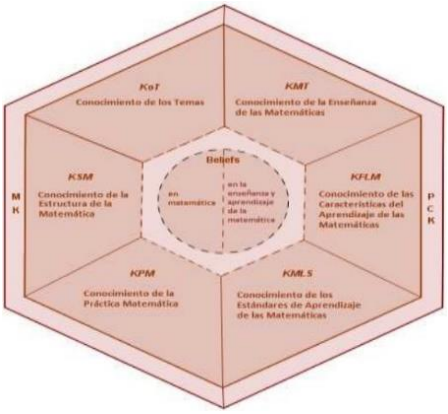


Figura 2. Modelo MTSK

El efecto de tomar la decisión de que los alumnos interactúen con un software dinámico para la construcción de figuras geométricas, las señalan Gutiérrez, Prieto & Ortiz Buitrago (2017, p.39) como "bondades de integrar tecnologías digitales en las experiencias de resolución de problemas matemáticos con cierto realismo". El software Geogebra, tiene ventajas sobre otros paquetes informáticos porque: es gratuito, es multiplataforma, es intuitivo y no demanda tanta cantidad de memoria y operaciones del microprocesador:

> Con el desarrollo de software gratuito basado en Internet, como Geogebra, es posible que se superen estas barreras. El mayor acceso a los estudiantes, y la disponibilidad de proyectores digitales, presenta el inconveniente de quién debería estar a cargo: el maestro dirigiendo una discusión de toda la clase o el estudiante involucrado en una 're-invención guiada' individual (Little, 2018, p. 9).

Fan & Zhu (2007) señalan las estrategias que se pueden utilizar para resolver tareas: (1) Actúalo, (2) Cambia tu punto de vista, (3) Dibuja un diagrama, (4) Adivina y revisa, (5) Razonamiento lógico, (6) Busca un patrón, (7) Elabora suposiciones, (8) Elabora una lista, (9) Elabora una tabla, (10) Replantea el problema, (11) Simplifica el problema, (12) Resuelve parte del problema, (13) Piensa en un problema relacionado, (14) Usa un modelo, (15) Usa una ecuación, (16) Usa concepto antes-después, (17) Trabaja de reversa.

Diseño

La mirada de esta investigación es cualitativa, con estudio de caso (Stake, 1999). El caso para esta investigación, fueron los profesores que estudiaron el programa de la maestría en investigación de la educación de la generación 2016-2018 en Toluca, Estado de México, cuyos temas de tesis estaban inscritos en educación matemática. Se trabajó con seis profesores de educación básica y media superior, que tomaron dos talleres de resolución de tareas, donde básicamente se llevaban a cabo dos actividades: la resolución de tareas con papel y lápiz, y la utilización de Geogebra. Cinco profesoras y un profesor, una profesora de educación preescolar (Araceli), dos profesoras de primaria (Lupita y Carmen), una de secundaria (Rocío), una de media superior (Edith) y un profesor de media superior (Sergio). Araceli tiene 11 años de servicio en la docencia, Lupita 11, Carmen 20, Rocío 5, Edith 4 y Sergio 11.

Se resolvieron diversas tareas, pero por el espacio para esta comunicación sólo se muestra una de ellas, que se tomó del calendario del mes de enero de 2018, del día 19 (NCTM, 2018): *Un triángulo isósceles tiene los vértices de sus ángulos base sobre la gráfica de* $x^2 + y^2 = 16$. *La coordenada del tercer vértice es (0,10). Encuentra las coordenadas de los vértices en los ángulos base que maximicen el área del triángulo.*

La tarea pide graficar una circunferencia con centro en el origen y de radio 4, después poner alineados y paralelos al eje x dos puntos del triángulo cuyo tercer vértice tiene la coordenada $(0,10)$, los dos vértices base se pueden mover a lo largo de la circunferencia y lo que se pide es encontrar el área máxima y la ubicación de los dos vértices base. Resolver esta tarea con lápiz y papel está en desventaja con Geogebra, primero porque no se puede apreciar el movimiento en el papel, pero sí en la pantalla de la computadora, tableta o celular.

Resultados

La tarea fue resuelta por tres caminos diferentes que llegan al mismo resultado de 42.7 como área máxima y los vértices base $(-3.8,-1.3)$ *y* $(3.8,-1.3)$: el primero, en plenaria; el segundo, por Araceli, Lupita y Carmen; y el tercero, por Rocío, Edith y Sergio. En el primer camino, todos los profesores con la ayuda de Geogebra[1], construyeron los siguientes comandos:

c=Circunferencia ((0,0),4)
A=Punto(c)
f=Recta (A,Ejex)
Interseca(c,f)
D=(0,10)
Polígono(B,C,D)

El resultado se puede ver al cambiar el punto B desde la parte alta del círculo hasta la parte baja y observar cómo el área del triángulo va teniendo incrementos hasta llegar a un tope y después empezar a disminuir hasta cero. En la *Figura 3* se aprecia el área máxima de 42.7 y las coordenadas de B y C son $(-3.8,-1.3)$ y $(3.8,-1.3)$ respectivamente. Cabe hacer mención, que lo encontrado es el valor aproximado, tanto de los valores de B, C y el área máxima del triángulo. Pudiera decirse que está resuelto parcialmente, que se tiene un buen acercamiento, pero el valor preciso no. En estudiantes de educación básica sería suficiente con estos números, pero en media superior, creemos que tenemos que seguir buscando el valor exacto. Las estrategias de solución empleadas, fueron: Actúalo, Dibuja un diagrama, Adivina y revisa, y Elabora suposiciones.

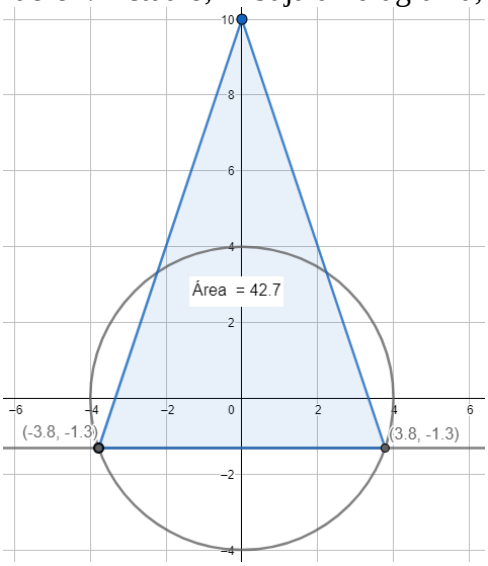


Figura 3. Primer camino.

[1] https://www.geogebra.org/m/uGncX53x

El segundo camino es por Araceli, Lupita y Carmen, que pensaron en construir una expresión para el área del triángulo, nombraron (a, b) y $(-a, b)$ a los vértices base del triángulo, el otro vértice es (0,10), así que la altura del triángulo la expresaron en términos de b.

$$h = 10 - b$$

Como el valor de b está dentro de la función $b = \pm\sqrt{16 - a^2}$, se tomó la función negativa porque es donde se encuentra el área mayor. La altura queda definida como.

$$h = 10 - \left(-\sqrt{16 - a^2}\right) = 10 + \sqrt{16 - a^2}$$

Para el área del triángulo escribieron.

$$A_{(a)} = \frac{(2a)\left(10 + \sqrt{16 - a^2}\right)}{2} = a\left(10 + \sqrt{16 - a^2}\right)$$

Graficaron la función en sus cuadernos, pero les costó trabajo, así que decidieron hacerlo con Geogebra, tal como lo muestra la *Figura 4*. La función de $A_{(a)}$ tiene un máximo en el primer cuadrante con las coordenadas $(3.84, 42.7)$; esto quiere decir, que el valor de los vértices bases tendrían las coordenadas de.

$$b = -\sqrt{16 - (3.84)^2} = -1.12$$

$$(-3.84, -1.12) \text{ y } (3.84, -1.12)$$

Por lo tanto, el área máxima del triángulo sería 42.7, con las estrategias de solución: Dibuja un diagrama, Adivina y revisa, Razonamiento lógico, Usa un modelo, y Usa una ecuación.

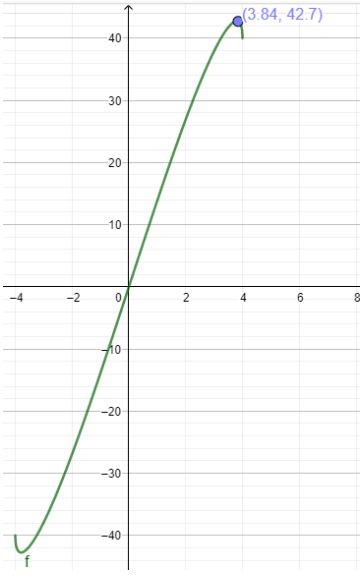


Figura 4. Segundo camino.

El tercer camino, expuesto por Rocío, Edith y Sergio, donde pensaron en resolver la tarea con la expresión del camino anterior, pero derivarla e igualarla a cero para encontrar el punto de inflexión.

$$A_{(a)} = a\left(10 + \sqrt{16 - a^2}\right)$$

$$A'_{(a)} = a\left(\frac{-2a}{2\sqrt{16 - a^2}}\right) + 10 + \sqrt{16 - a^2} = 0$$

$$4a^4 + 36a^2 - 1344 = 0$$

$$a^4 + 9a^2 - 336 = 0$$

Hicieron un cambio de variables.

$$x = a^2$$

Reescribieron la ecuación.

$$x^2 + 9x - 336 = 0$$

La resolvieron con la fórmula general.

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 1344}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}\sqrt{57}}{2} = \frac{-9 \pm 5\sqrt{57}}{2}$$

Buscaron los valores de a.

$$a = \sqrt{x}$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}$$

Que los valores aproximados son 3.791383137 y -3.791383137.

Para encontrar el valor de los vértices base, se tomó el valor de a para la siguiente ecuación.

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$b = \pm\sqrt{16 - a^2}$$

$$b = \pm\sqrt{16 - \frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}$$

$$b = -\sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}$$

Los vértices base están dados por las coordenadas.

$$\left(-\sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}, -\sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}\right) y \left(\sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}, -\sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}\right)$$

Que en valor aproximado son.

$$(-3.79, -1.27)\ y\ (3.79, -1.27)$$

El valor del área máxima es.

$$A_{\left(\sqrt{\frac{-9+5\sqrt{57}}{2}}\right)} = \sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}\left(10 + \sqrt{16 - \frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}\right)$$

$$A_{\left(\sqrt{\frac{-9+5\sqrt{57}}{2}}\right)} = \sqrt{\frac{-9 + 5\sqrt{57}}{2}}\left(10 + \sqrt{\frac{41 - 5\sqrt{57}}{2}}\right)$$

Cuyo valor aproximado es 42.747531, gracias a las estrategias de solución: Razonamiento lógico, Replantea el problema, Simplifica el problema, Resuelve parte del problema, Usa un modelo, Usa una ecuación, y Usa concepto antes-después.

Conclusiones

Existen diferentes caminos para resolver tareas, de la tarea propuesta en esta comunicación, se expusieron tres caminos diferentes; esto lo podemos trasladar a, que un profesor de matemáticas,

antes de llegar al salón de clases y exponer una tarea, debe por lo menos conocer tres caminos para encontrar el mismo resultado.

Cada profesor tenía sus estrategias de solución favoritas, lo que nos lleva a pensar que, cada profesor y cada estudiante pueden desarrollar más unas estrategias de solución que otras, podrán mejorar cierta destreza sobre el uso de unas estrategias con respecto a otras, cada quien lo hace de manera personal, lo importante es conocer más estrategias.

La ventaja de conocer más estrategias de solución por parte de los alumnos, en una clase de matemáticas, es que pueden construir más caminos diferentes para llegar a resolver la tarea matemática; la bondad de que el profesor de matemáticas amplíe su abanico de estrategias de solución, provocará que reconozca más caminos para resolver la misma tarea y llegar al mismo resultado, esto le ayudará a asesorar mejor a sus estudiantes, porque cuando vea el trazado de un camino, no será necesario esperar hasta el final, porque el profesor podrá adelantar al proceso que llevan y evitar una trayectoria que guiará a los alumnos al fracaso, por el contrario, alentará el camino que anticipa que terminará en éxito. Todo lo anterior se da en el contexto de trabajo en equipos por parte de los estudiantes.

Aunque existe consenso dentro de la comunidad de educación matemática, que el desarrollo de las habilidades de los estudiantes para resolver tareas es el objetivo principal de la enseñanza, no hay un consenso de qué tendrían que hacer los profesores para alcanzar dicho objetivo (Lester & Cai, 2016). Estamos de acuerdo los profesores de matemáticas, en que la actividad principal en las clases de matemáticas es la resolución de tareas, pero verla como un medio o como un fin, puede estar a discusión.

La resolución de tareas como una finalidad, muestra una postura donde el actor principal es el conocimiento y el profesor, porque quien lleva el conocimiento enseña, expone en clases tipo cátedra y mediante ejemplos deja más claro el tema a desarrollar, para después dar ejercicios de práctica, desarrollar la mecanización del algoritmo; que es buena, pero no suficiente.

Las tendencias internacionales de cómo enseñar matemáticas, está mayormente inclinada con la resolución de tareas como medio, ahora el centro de la educación es el estudiante, porque a través de ensayos, intentos y en ocasiones de errores, esboza un camino para poder encontrar la solución a las tareas. No se tiene un método eficiente para resolver esa tarea inicial, cuenta con elementos que le permiten acercarse a la solución, ha resuelto tareas similares, puede descomponerla para poder contestar parte de ella; el profesor, a partir de la necesidad, puede exponer un método más eficiente, nuevo, pero no mejor.

¿Qué método es mejor a otro? Depende, cada persona tiene a través de los años estrategias favoritas, atajos, artilugios, técnicas propias, que va desarrollando, perfeccionando, hasta que puede decir "para mí, este método es mejor que aquel"; pero eso se cumple exclusivamente para esa persona, no hay métodos universales que sean mejores que otros, pueden existir métodos más cortos, más rápidos, más abstractos, más complicados, pero no mejores para todos.

Los profesores de matemáticas no necesitan ser expertos para resolver tareas, deben ser serios estudiosos de la resolución de tareas (Lester, 2013). El profesor de matemáticas no requiere ser un matemático, un experto en la matemática, necesita ser una personas dedicada, comprometida, estudiosa y responsable con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, debe preocuparse por cómo aprenden sus estudiantes, por cómo está organizado el currículum escolar, de cómo comunicar las ideas matemáticas con sus estudiantes, de saber resolver tareas por diferentes caminos, usando diversas estrategias de solución, debe saber las bases de las matemáticas del siguiente nivel educativo; pero sobre todo, de tener la disposición para aprender, de buscar la información cuando no tenga la respuesta.

El MTSK del profesor de matemáticas es complejo, ya lo explicamos a lo largo de este documento; una herramienta digital, que permitió la transición a una mejor comprensión y a la resolución de tareas, fue Geogebra, que no sólo abonó en favor del MK, sino también del PCK porque podrá permitir tener una mejor comunicación con los nativos digitales, que en la mayoría son nuestros niños o jóvenes, alumnos de educación básica o media superior. Ya lo hemos resaltado, pero vale la pena volver a remarcar, no pensamos que la tecnología o que Geogebra sea la panacea de la educación matemática, el abuso puede provocar que no se aprenda a reflexionar, que se crea que las computadoras, el software, las aplicaciones, podrán sustituir los temas de matemáticas y aplicarlos directamente a la resolución de tareas; creemos que, como bosquejo inicial o refuerzo, puede ser utilizado a favor de un mejor aprendizaje y enseñanza de la matemática escolar.

Cierro este escrito, mencionando que me he divertido haciendo esta comunicación, considero que el mayor objetivo de una persona en este mundo, es buscar la felicidad, Walsh (2011) asegura que para lograr una salud mental, se requieren de ocho TLC (Cambios de Estilo de vida Terapéuticos): ejercicio, nutrición y dieta, tiempo en la naturaleza, relaciones, recreación, relajación y manejo del estrés, participación religiosa y espiritual, y contribución y servicio a los demás. Salir a disfrutar de la naturaleza con la bicicleta, me ayuda con el ejercicio, el tiempo en la naturaleza, la recreación y la relajación; en el Instituto donde laboro, puedo hacer lo que más me gusta, las matemáticas, con ello logro las relaciones, la recreación y el servicio con los demás, así que comparto este documento esperando que haga feliz a más personas.

Referencias

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., … Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. In *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 5063–5069). Uruguay: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.

Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 61–75.

Gutiérrez A., R. E., Prieto G., J. L., & Ortiz Buitrago, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educacion Matematica*, *29*(2), 37–68. https://doi.org/10.24844/EM2902.02

Lester, F., & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from Thirty Years of Research. In P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pehkonnen (Eds.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives*. Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1&2), 245–277.

Little, C. (2018). Interactive Geometry in the Classroom: Old Barriers & New Opportunities. *Mathematics in School*, *38*(2), 9–11.

NCTM. (2018). January 2018 Calendar. *The Mathematics Teacher*, *111*(4), 280–282. https://doi.org/10.5951/mathteacher.111.4.0280

OCDE. (2016). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. Paris: OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264266490-en

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Walsh, R. (2011). Lifestyle and mental health. *American Psychologist*, *66*(7), 579–592. https://doi.org/10.1037/a0021769

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Formação para a docência em matemática na Educação Básica no Brasil: experiência na formação inicial e continuada

Janaína Mendes Pereira **da Silva**
Universidade de Brasília
Brasil
Jana.mendes.ps@gmail.com
Regina da Silva Pina **Neves**
Universidade de Brasília
Brasil
reginapina@gmail.com
Wesley Pereira **da Silva**
Universidade de Brasília
Brasil
wesleynh3@gmail.com
Maria Luísa Piantamar **de Oliveira**
Universidade de Brasília
Brasil
maria2006luisa@hotmail.com

Jenifer de Sousa **Sales**
Universidade de Brasília
Brasil
lajenifer.sousa@hotmail.com

Resumo

Esta pesquisa procura contribuir com a Educação Matemática e a formação de professores. O estudo visa investigar as contribuições e os desafios de ensinar e aprender Matemática na escola básica, a partir da participação de licenciandos e licenciados no Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, Brasil. Desde novembro de 2004, os Circuitos de Vivências se apresentam como um espaço de formação para a docência em Matemática, em uma ação voluntária, que visa à prática docente. Metodologicamente, é uma pesquisa qualitativa, tendo como instrumentos de coleta de dados a análise documental. Os resultados parciais revelam que há significativo envolvimento dos participantes nas vivências; que a investigação e o aprimoramento profissional são importantes para o desenvolvimento da Educação

Matemática e que, ao envolver distintas instituições de ensino superior, é possível realizar trocas pedagógicas importantes que geram motivação pela Matemática.

Palavras chave: Circuitos de Vivências, formação de professores, Educação Matemática, formação inicial e formação continuada.

Introdução

A Educação Matemática é um campo do conhecimento que se dedica a estudar questões relativas ao ensino e à aprendizagem de matemática. É um campo interdisciplinar que faz uso de teorias de outros campos teóricos, como a sociologia, a psicologia, a filosofia, para a construção de seu conhecimento, além de construir suas próprias teorias (Passos, 2008). Este trabalho tem como proposta apresentar a participação e a aprendizagem profissional de professores experientes e futuros professores da Licenciatura em Matemática e Pedagogia (no âmbito disciplinar da Educação Matemática), que atuam em ação colaborativa, intitulada Circuito de Vivências[1] em Educação Matemática do Distrito Federal, Brasil.

O Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, Brasil se consolidou ao longo dos anos em espaço de formação inicial e continuada para os professores e futuros professores que ensinam este componente curricular no Distrito Federal (licenciados em Pedagogia e Matemática), na medida em que integra profissionais da escola e da universidade, e utiliza a investigação matemática como princípio no planejamento e na mediação das vivências.

Desenvolvidos desde novembro do ano de 2004 até a presente data, esses circuitos surgiram a partir do trabalho colaborativo e voluntário de seus membros, que intevêm socialmente com estudantes e professores de Escolas Públicas, por meio da oferta de vivências em matemática, conforme defendem Muniz (2008, 2010), Bertoni (2003, 2008) e Skovsmose (2000). Eles têm atendido grande quantitativo de estudantes da educação básica, distribuídos em escolas públicas de diferentes regiões do Distrito Federal. O processo de constituição e execução dos Circuitos pode ser observado na tabela 1, apresentada a seguir, com destaque para as fases, os participantes, as ações, entre outros aspectos.

Tabela 1

Circuitos de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal

Título	Circuito de Vivências em Matemática
Datas importantes	2003 – discussão/planejamento; 2004 – início das atividades; Situação atual: em desenvolvimento
Instituições envolvidas	Universidade de Brasília (Departamento de Matemática e Faculdade de Educação); Instituto Federal de Brasília; Universidade Católica de Brasília; Faculdade Projeção de Taguatinga (Antiga Faculdade Jesus Maria José)

1 Mais informações podem ser acessadas em: www.sbemdf.com.br

	Faculdade Estácio de Sá (Antiga Facitec de Taguatinga)
Programas de pós-graduação e/ou iniciação científica envolvida	Programa de Mestrado Profissional (ProfMat), Departamento de Matemática, UnB Programa de Mestrado em Educação, Faculdade de Educação, UnB Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Católica de Brasília Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), Departamento de Matemática, UnB Programa de Educação Tutorial (PET), Departamento de Matemática, UnB Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), Faculdade Projeção
Objetivos	1/ promover o pensar e o fazer matemática de maneira investigativa e criativa junto a estudantes da Educação Básica de Escolas Públicas da SEEDF; 2/ promover a produção de vivências em matemática por estudantes de graduação, pós-graduação, professores e pesquisadores da área de ensino de matemática, vinculados aos cursos de licenciatura em matemática e pedagogia de instituições públicas e particulares; 3/ desenvolver e avaliar as vivências em matemática produzidas; 4/ instituir a pesquisa colaborativa como ferramenta de formação inicial e continuada para o professor e/ou futuro professor que ensina matemática, assim como defende Fiorentini (2005), em todas as instâncias de produção, organização, avaliação, execução e socialização das vivências.
Princípios teórico-metodológicos	Produção de vivências em matemática tendo como referência o currículo de matemática da SEEDF em consonância com os aspectos teórico-metodológicos defendidos por Muniz (2010), Bertoni (2003, 2008) e Skovsmose (2000).
Metodologia	Eles são realizados em escolas públicas, previamente agendadas; cada vivência em matemática é desenvolvida por dois ou mais responsáveis, durante 40 minutos, em regime de circuito. Com isso os participantes têm a oportunidade de vivenciar até 5 vivências.
Demanda	A busca por agendamentos cresce a cada ano e o calendário anual é organizado com bastante antecedência. Para atender a demanda das escolas – sem lista de espera – o número de circuitos e pessoas envolvidas deveria triplicar.
Avaliação	As vivências em matemática são avaliadas tanto pelos estudantes das escolas atendidas quanto pelos que oferecem as vivências por meio de formulários de avaliação construídos para esse fim pela equipe. As avaliações têm auxiliado nos processos de reelaboração e adequação das vivências aos princípios teórico-metodológicos.

Fonte: SBEM/DF

Desse modo, interessa-nos, neste texto, compreender se as práticas coletivas que ocorrem no Circuito de Vivências proporcionam reflexão e investigação, na construção de novos modos de ensinar e aprender matemática na escola. Ademais, buscamos investigar quais são as contribuições e os desafios de ensinar e aprender matemática na escola básica, a partir dos dados documentais do Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, Brasil.

Para a concretização desta pesquisa, inicialmente, levantamos os aspectos teóricos que embasam a problemática do estudo, destacando aspectos da formação continuada, as características da fase inicial da carreira docente (em formação e recém-formados), a

socialização de forma coletiva dos conhecimentos por parte de professores experientes e os aspectos relacionados à aprendizagem do professor nestas fases, pela colaboração, pela reflexão e pela investigação da própria prática.

Formação inicial e continuada de professores de Matemática: algumas reflexões

Os estudos relativos ao campo de formação de professores, atualmente, têm reconhecido a complexidade da prática docente, o que leva à necessidade do aprender contínuo em um mundo em constantes mudanças. A formação inicial e continuada, em especial a dos professores que ensinam matemática[2], tem sido amplamente investigada, gerando debates e muitas publicações tanto no Brasil quanto em outros países.

A literatura acadêmica tem contribuído para a melhoria da formação inicial e continuada do professor que ensina matemática e registra as experiências exitosas, vivenciadas em diferentes instituições, com públicos também diversos. Algumas podem ser conhecidas, recriadas e/ou ampliadas e são, em sua maioria, divulgadas pelas sociedades, organizações e/ou grupos da área de Educação, Matemática, Educação Matemática e Psicologia da Educação Matemática, no Brasil[3] e no Exterior[4]. Nesse sentido, para Gama e Fiorentini (2009, p. 444):

> Da perspectiva do conhecimento "da" prática, os pesquisadores sugerem, para favorecer o desenvolvimento profissional, oportunidades para que os professores explorem e questionem suas (e dos outros) ideologias, suas interpretações e suas práticas. Isto significa que os professores aprendem: ao desafiar suas próprias suposições; ao identificar questões importantes da prática; ao propor problemas; ao estudar seus próprios estudantes, salas de aula e escolas; ao construir e reconstruir o currículo; e ao assumir papéis de liderança e de protagonismo na busca da transformação da prática de sala de aula e, por decorrência, das práticas escolares e sociais.

Além de uma formação inicial adequada, de um currículo atualizado, Moreira (2015, p. 11) salienta que o professor "dê conta dos fundamentos básicos da educação", além de uma formação continuada, Moreira (2015, p. 12) nos diz: "Consentaneamente, venho insistindo na priorização da formação continuada como um dos grandes pilares para a correção das lacunas deixadas pela formação inicial".

As vivências que ocorrem de forma coletiva e voluntária entre diferentes profissionais têm se constituído em uma instância estimuladora do desenvolvimento de um tipo de profissionalidade, que consiste no desenvolvimento da capacidade dos profissionais trabalharem colaborativamente num ambiente de diálogo e interação. Nesse ambiente, esses profissionais discutem, analisam, refletem e investigam sobre seu trabalho, buscando compreendê-lo e transformá-lo. Desse modo, é possível observar o desenvolvimento de uma ação que visa à

2 Termo usado por Fiorentini (2005) para se referir aos professores licenciados em Pedagogia e Matemática, docentes de Matemática na e educação básica.

3 Para mais informações acesse, por exemplo: http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/, http://www.sbm.org.br/pt/, http://www.sbemdf.com/, http://www.mat.unb.br/pibid/.

4 Informações podem ser obtidas em: http://www.fisem.org/www/index.php; http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem>; http://www.mathunion.org/ICMI, < http://www.apm.pt/portal/index.php>

formação inicial e continuada em que a proposta dialogue com as expectativas, realidades e desafios do ensino matemático, e que, por meios das práticas coletivas, pode-se manifestar de vários modos. Assim, realiza-se a reflexão sobre as novas necessidades e demandas do currículo, os diálogos com o mundo do trabalho e com a educação geral; as práticas pedagógicas interdisciplinares e interculturais, o que permite vislumbrar os enlaces entre tecnologia, ciência e cultura.

Metodologia

O método adotado para esta pesquisa é o estudo documental, em uma abordagem qualitativa, por se desenvolver em um ambiente que possibilita coletar dados descritivos com um plano aberto e flexível, que converge para a realidade do objeto de estudo de forma complexa e contextualizada (Lüdke & André, 2015). Isto significa examinar o contexto e os fenômenos que envolvem o processo a ser estudado.

Para esta análise documental, foram utilizados documentos obtidos no acervo da Sociedade Brasileira de Educação Matemática SBEM/DF. O acervo contém documentos digitais, arquivados ao longo de 14 anos, repassados a cada diretoria desta sociedade. Parafraseando Lüdke e André (2015), a análise documental constitui uma técnica de abordagem e dados qualitativos, seja como complementação a outras técnicas ou como forma de revelar novas pesquisas. Estas etapas da pesquisa consistem na imersão no ambiente investigado para conhecer o ambiente e os participantes envolvidos.

Como a análise documental se constitui em uma técnica de abordagem de dados qualitativos, que complementa as informações obtidas, o uso de documentos na pesquisa estabelece-se como uma fonte da qual se podem retirar evidências que fundamentem afirmações e declarações pesquisadas (Lüdke & André, 2015). Os documentos analisados da pesquisa são os registros desde o primeiro Circuito de Vivências em Educação Matemática do Distrito Federal, realizado em 2004 até o último circuito do ano de 2017. O acervo é composto por documentos digitais, tais como: materiais produzidos em editores de texto e/ou planilhas, nos formatos .doc, .docx, PDF etc., imagens, cartazes e fotografias. O acesso ao material deu-se por meio de pedido formal à diretoria da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Resultados Parciais

Considerando que estamos em processo de catalogação das vivências, apresentaremos parte da pesquisa. Assim, neste trabalho, trazemos resultados parciais dessa investigação em desenvolvimento. Para tanto, fizemos a análise dos dados do I Circuito de Vivências do ano de 2017, que ocorreu em 06 de maio de 2017 no Departamento de Matemática na Universidade de Brasília, sendo esse um evento especial, comemorando o Dia da Matemática e voltado para os anos finais dos ensinos fundamental e médio das escolas públicas da Secretaria de Estado e Educação do Distrito Federal (SEEDF).

Participaram das vivências professores dos ensinos fundamental e médio (de três escolas públicas e oito particulares) e do ensino superior (estudantes de graduação e pós-graduação de nove instituições de nível superior do Distrito Federal e uma do Maranhão). Entre as instituições de ensino superior, estiveram presentes: Universidade de Brasília (UnB); Instituto Federal de Brasília (Campus Estrutural); Instituto Federal do Maranhão (IFMA); Universidade Católica

(UCB); Centro Universitário Projeção (UniProjeção); Universidade Estácio de Sá; Universidade Paulista (UNIP); Faculdade Anhanguera; Universidade do Distrito Federal (UDF-Cruzeiro do Sul); Universidade Norte do Paraná (UNOPAR) e Faculdade Educacional da Lapa (FAEL).

As vivências aplicadas foram produzidas de modo voluntário entre os professores de nível superior e licenciandos em matemática. O circuito foi composto por 16 oficinas, distribuídas nas dependências do Departamento de Matemática e corredor do ICC Norte da UnB. Os sujeitos desse Circuito foram os professores e estudantes que ofertaram vivências, além dos estudantes do ensino médio e demais ouvintes. Ao todo, contabilizamos 122 pessoas (profissionais da educação, comunidade, estudantes de graduação e pós-graduação), 86 oficineiros (professores, estudantes de graduação e calouros) e aproximadamente 156 alunos do ensino médio das escolas da SEEDF e rede particular. Segue apresentação dos dados e resultados parciais:

Tabela 2

Vivências em Educação Matemática

Vivências	
Adicionando e Subtraindo na Trilha dos Inteiros	Construção dos números com 4 quatros
Expressões Algébricas	Geometria No Tangram
Geoplano E Teorema De Pick	Jogando Dominós Com Números Inteiros
Jogo De Nim	Jogos Com Tangram
Jogos Matemáticos	Multiplano
O Laboratório De Ensino De Matemática Do Departamento De Matemática Da Universidade De Brasília: Atividades Lúdicas E Criativas Para O Ensino E Aprendizagem Da Matemática	Operando Frações
Poliedros	Poliedros Divertidos
Truques E Puzzles Matemáticos Com Palitos De Fósforos	Volumes De Sólidos

Fonte: SBEM-DF (2017)

Pelo que se observa, foram feitas 16 vivências, que envolveram distintos oficineiros. Essas vivências envolveram diversos conteúdos matemáticos, desde a adição e subtração aos poliedros. Foram variadas instituições de ensino participantes, conforme detalhamento apresentado na Tabela 3, a seguir.

Tabela 3

Oficineiros

Instituição de Ensino Superior	Quantitativo de Vivências	Professores (as)	Oficineiros (as)
UnB	5	3	29

IFB (Campus Estrutural) [5]	3	1	9
UCB	1	1	?
Universidade Estácio de Sá	4	3	31
UNIP	1	1	6
UniProjeção	2	-	2
Totais	**16**	**9**	**77**

Fonte: Arquivo próprio.

Conforme detalhamento apresentado na Tabela 3, a instituição com o maior número de oficinas foi a UnB, que envolveu cinco oficinais, três docentes e 29 oficineiros. Ao todo, podemos ver que as atividades envolveram16 oficinais, nove professores e 77 oficineiros, o que demostra a boa adesão às oficinas.

Por sua vez, a Tabela 4 traz as informações detalhadas dos participantes. Vejamos:

Tabela 4

Participantes das Vivências

Instituição de Ensino Superior	Professores (as)	Estudantes de Pós-Graduação	Estudantes de Graduação	Estudantes do Ensino Básico
SEEDF	9	-	-	152
UnB	5	7	31	-
IFB (Campus Estrutural)	1	-	-	-
UCB	1	-	5	-
Universidade Estácio de Sá	4	1	33	-
UNIP	1	-	10	-
UniProjeção	-	-	2	-
UNOPAR	-	-	7	-
ICESP	-	-	1	-
ITEB	1		1	
Curso Preparatório	-	-	‘1	-
Colégio Vital Brasil	1	-	-	-
Colégios da rede privada	-	-	-	3
Colégio Coletivo	-	-	-	1
Totais	23	8	91	156

Fonte: Arquivo próprio.

Em consonância com a Tabela 4, tivemos 23 professores de instituições de ensino superior envolvidas; oito alunos de pós-graduação; 91 estudantes de graduação e 156 alunos da educação básica. Esses números revelaram a importância dos Circuitos, denotando a imprescindibilidade de sua continuação, sobretudo quando levamos aos alunos de educação básica, base do sistema de ensino, maneiras distintas de conceber e aprender Matemática.

5 O Campus da Estrutural oferece o curso superior em Licenciatura em Matemática.

Percebem-se três pontos importantes quando se analisam essas tabelas: o envolvimento; a investigação e as possibilidades de desenvolvimento profissional. O envolvimento de muitos grupos e instituições, que, em sua maioria, participam frequentemente dos Circuitos de Vivências, demonstra que a investigação, em todas as propostas de vivências, encontra elementos que provocam a pesquisa e o desenvolvimento profissional – a formação para a docência.

A frequência e o planejamento dos Circuitos ocorrem de forma voluntária e não obrigatória. Isso, de um lado, tem contribuído para uma prática colaborativa voluntária e espontânea e que evolui a partir dos interesses dos professores e estudantes de graduação. Por outro lado, a colaboração, geralmente, marcada pela socialização e aprendizagem mútua nas ofertas das oficinas, permite que se compartilhe as experiências, os saberes, as sugestões, as ideias e as expectativas de todos os envolvidos.

Considerações finais

Nossa investigação busca compreender os processos de constituição dos Circuitos de Vivências e se suas práticas proporcionam reflexão e investigação na construção e/ou contribuições e desafios de ensinar e aprender Matemática na escola básica para apreciação da possível construção do espaço de formação para a docência dos Circuitos de Vivências em Matemática na prática docente. Pelo que constatamos até o momento, uma vez que nossa pesquisa apresenta três fases e este texto apresenta os resultados parciais deste Circuito, que culmina com a primeira fase, os achados da pesquisa evidenciaram a participação da maioria das instituições de nível superior que oferecem graduação em Licenciatura em Matemática. Os sujeitos dos circuitos atuam no planejamento (composição e organização) do evento em conjunto com a SBEM/DF. Durante o período, muitos professores e estudantes socializam seus projetos. Assim, consideramos que esses encontros provocam os desenvolvimentos profissionais e acadêmicos de todos os envolvidos nas vivências.

Os desenvolvimentos das atividades acontecem no planejamento, desde a preparação das vivências (aprender a planejar, a executar, a avaliar se a vivência deu certo ou não), do estudante de graduação que assiste a vivência e se vê enquanto futuro professor, ao estudante de ensino médio que participa da vivência e ajuda quem preparou (a entender se ela deu certo ou não), ao aprender os conceitos que foram abordados, possibilitando ver e observar suas dificuldades. Há um longo caminho a trilhar para se perceber o aprofundar das análises na composição dos Circuitos e os validar como espaço de formação para a reflexão e a investigação na construção de novos modos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Referências

Bertoni, N. E. (2008). A construção do conhecimento sobre número fracionário. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, *21*(1-31), . Universidade Estadual Paulista.

Bertoni, N. E. (2003). Entrevista concedida à Educação Matemática em Revista – *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, *10*(14). São Paulo: SBEM.

Fiorentini, D. (2012). *Investigar e aprender em comunidades colaborativas de docentes da escola e da universidade.* In Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 16. Campinas. Anais... São Paulo: Junqueira & Marin, 239-252

Fiorentini, D. (2005, jun.). A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática. *Revista de Educação PUC-Campina*s, *18,* 107-115.

Gama, R. P., & Fiorentini, D. (2009). *Formação continuada em grupos colaborativos*: professores de matemática iniciantes e as aprendizagens da prática profissional. *EMP*, *11*, 441-461.

Gatti, B. A., Barreto, E. S. de S., & André, M. E. D. de A. (2011). *Políticas docentes no Brasil: um estado da arte.* Brasília: UNESCO.

Lüdke, M., & André, M. E. D. A. (2015). *Pesquisa em educação*: *abordagens qualitativas.* [2. Ed]. – [Reimpr.] - Rio de Janeiro: E.P.U.

Moreira, G. E. (2015). *O ensino de Matemática para alunos surdos: dentro e fora do texto em contexto.* Texto elaborado especialmente para o Seminário do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP).

Muniz, C. A. (2008). Políticas públicas e formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática. GT-19: Educação Matemática. In 31ª Reunião Anual da ANPEd: Constituição Brasileira, Direitos Humanos e Educação, Caxambu, MG, *Anais....*

Muniz, C. A. (2010). *Brincar e Jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática*. 1. ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica.

Passos, C. M. (2008). *Conexões Teóricas e Práticas entre Etnomatemática e Educação Matemática Crítica.* EBRAPEM, UNESP, Anais... 01-17.

Silva, A. J. N. da, Souza, I. S. de, Barros, S. S., & Almeida, J. D. S. (2014). A formação do professor de matemática em questão: reflexões para um Ensino com Significado. In A. J. N. da Silva & I. S. Souza (Orgs.). (pp. 53-75). Jundiaí: Paco Editorial.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, *14*, 66-91.



Estudio de clase en la formación de maestros reflexivos

María Teresa **Castellanos** Sánchez
Universidad de los Llanos
Colombia
mcastellanos@unillanos.edu.co

Hilbert **Blanco** Álvarez
Universidad de Nariño
Colombia
hilbla@udenar.edu.co

Resumen

El propósito del estudio se centra en analizar la implicación del *Estudio de Clase* para generar procesos de reflexión para y sobre la práctica docente de profesores en formación. Se conjetura que: el estudio de clase es una herramienta útil para generar procesos reflexivos sobre las propias prácticas de aula de maestros y por ende sobre su desarrollo profesional. Para argumentar esta conjetura exponemos una experiencia de formación continua con maestros de matemáticas afrodescendientes realizada en Tumaco, Colombia, donde el estudio de clase jugó un papel protagónico como metodología que guiaba cada fase del curso. Concluimos mostrando cómo el Estudio de Clase brinda elementos para el desarrollo de una mejor formación docente, en la línea de los desafíos que plantean proyectos y tendencias actuales.

Palabras clave: reflexión, estudio de clase, práctica docente, formación de profesores, autoevaluación

Antecedentes

La formación de maestros críticos reflexivos es un tema que ha venido ocupando a los investigadores en educación matemática a nivel internacional desde hace varias décadas. En particular, Schöenfeld y Kilpatrick (2008), en el Handbook Internacional de Educación de Profesores, incluyen la reflexión sistemática como una competencia del profesor de matemáticas. Recientemente, los estudios reportados en el Third International Handbook of Mathematics Education, otorgan relevancia a la reflexión sobre la práctica (Kieran, Krainer, Shaughnessy, 2013).

Por otra parte, estudios en la formación inicial, han valorado la reflexión sobre la propia experiencia como medio para promover una visión amplia del aprendizaje de las matemáticas; ofrecer una perspectiva sobre la enseñanza y proporcionar información sobre los cambios en la planeación de las lecciones (Llinares y Krainer, 2006). En la formación continua, la reflexión del profesor sobre su práctica se considera un elemento fundamental en su desarrollo profesional y un medio para la progresiva comprensión de la práctica dentro de un proceso de aprendizaje continuo (Climennt y Carrillo, 2003).

En los procesos de formación de maestros se ha utilizado con más frecuencia el Estudio de clase como metodología (Isosa y Olfos, 2009) para valorar las clases y para el mejoramiento de los procesos de enseñanza (Doig Y Groves, 2011). Así mismo, el Estudio de clase se ha usado en otras investigaciones para promover procesos reflexivos en formación inicial y continua de maestros (Hart, Alston Y Murata, 2011; Marmolejo, Blanco y Fernández, 2009; Unesco, 2016). En adelante intentamos ejemplificar cómo el Estudio de clase permite procesos de reflexión sobre la integración de la Etnomatemática en el currículo escolar y en el diseño de actividades.

Siguiendo los presupuestos anteriores la investigación centra objetivo en analizar la implicación del Estudio de Clase en la reflexión sobre la práctica docente de profesores que participan en un curso de formación continua.

Referentes Teóricos

Los principales referentes que orientan esta comunicación se soportan en los constructos: Reflexión y estudio de clase; en el primero se aborda con precisión en la idea de profesor reflexivo y el otro constructo es el Estudio de clase, ideas que se desarrollan a continuación.

La noción de reflexión y de profesor reflexivo

La idea de reflexión dada por Dewey (1989), “implica la consideración activa, persistente y cuidadosa de cualquier creencia o práctica a la luz de las razones que la sustentan y de las consecuencias a las que conduce” (p. 6). Esto es, un proceso cognitivo que tiene en cuenta el conocimiento subyacente. Por otra parte, Schön (1987) concibió la reflexión como “una continua interacción entre el pensamiento y la acción” (p. 281); y describió al práctico reflexivo, como el individuo que “reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura” (p. 50). De este modo, Schön concretó su teoría en la práctica reflexiva, la cual busca que un profesional, en este caso el docente, reflexione de modo permanente sobre su práctica de enseñanza con el fin de transformarla.

Como indican Castellanos, Flores y Moreno (2017), la reflexión sobre las situaciones de la práctica docente puede configurarse como estrategia para estimular el aprendizaje reflexivo y el

desarrollo profesional. En consecuencia, consideramos la reflexión como un proceso de pensamiento responsable y sistemático que surge de una situación problemática que requiere disposición para analizar, comprender y actuar ante las situaciones de dicha práctica. Por tanto, la reflexión en la formación de maestros permite al aprendiz la comprensión de la propia experiencia. El proceso reflexivo, implica una representación activa de la realidad, que incluye la mirada retrospectiva sobre las acciones en dichas experiencias, el reconocimiento de las concepciones implicadas, confrontar con otros y tomar en consideración las consecuencias de tales acciones, culminando con la exploración de posibles alternativas o decisiones fundamentadas sobre futuras lecciones.

En síntesis, el maestro debe estar dispuesto a volver sobre su práctica, para analizarla a fin de significar sus concepciones y conocimientos que le llevan a comprenderla o mejorarla; es decir, la reflexión busca la transformación consciente de los aspectos de la enseñanza (Korthagen, 2010).

Entendemos que profesor práctico reflexivo es aquel que tiene disposición para: a) percibir la práctica como problemática, identifica situaciones problemáticas en su actuación docente; b) tomar distancia de ellas, con el fin de analizar los elementos de dichas situaciones; c) identificar, explicitar y eliminar elementos que le condicionan la forma en que él considera las situaciones, incluidas sus propias creencias y d) buscar otras fuentes a fin de interpretar y responder a las mismas situaciones y responder a ellas (Castellanos et al., 2017). También se considera necesario tener apertura hacia las matemáticas y su disposición a transformar sus concepciones sobre ella, al tiempo que se debe tomar conciencia de la complejidad del conocimiento matemático para su enseñanza.

El Estudio de clase

El *Estudio de Clase*, entendido como "la investigación que tiene por objeto la clase, permite a un docente con el apoyo de sus compañeros involucrarse en procesos de investigación pedagógica, a partir de experiencias propias, para pensar sobre métodos y recursos de enseñanza más eficientes y pertinentes a cada contexto, con el fin esencial de mejorar las clases. Dada esta naturaleza, la implementación del '*Estudio de Clase'* requiere la *reflexión educativa continua*, la sistematización de la información recolectada, la innovación en el uso de recursos y materiales, la adaptación a condiciones específicas del contexto y la formación permanente de docentes en competencias pedagógicas y didácticas" (Torres y Vergara, 2009, p. 31).

Esta metodología busca por parte de los maestros una cualificación permanente, un trabajo reflexivo y crítico sobre su práctica. El estudio de clase permite abrir el aula de clase a la mirada crítica de los colegas, lo que permite un enriquecimiento mutuo con las experiencias y especialidades de cada uno. En adelante pasamos a describir cada de una de las etapas. Esta metodología debe mirarse siempre como un proceso de mejoramiento y no de evaluación descalificadora.

Esta metodología contempla cuatro etapas a saber: a) la planeación en grupo de las actividades; b) la implementación de la actividad y observación de la clase; c) la auto-evaluación y la co-evaluación y d) el rediseño de las actividades. Las etapas configuran un proceso cíclico, que garantiza la mejora permanente de la calidad de las actividades y de las clases.

Primera etapa: La planeación en grupo de las actividades. En esta etapa el *grupo de maestros*, de la educación básica o media, se reúnen a planear una clase alrededor del interés en

la enseñanza de un objeto matemático, seleccionado. Este es el punto de partida en el proceso de reflexión, implícitamente los maestros identificaran una situación de la práctica docente, ellos discuten sobre el objetivo que se persigue con la actividad, sobre la gestión del aula de clase por parte del profesor, las consignas que se darán al estudiante, la organización de los niños: individual o en grupo, los materiales a utilizar en el desarrollo de la actividad, el tiempo que se considera necesario, que puede variar entre 1 hora o varias horas durante varios días. Los maestros al considerar el origen, las cualidades y los presupuestos de la planeación de la enseñanza, configuran su problemática.

Luego, sintetizan los resultados de la planeación en el guion de clase. Los apartados del guion (Figura 1) son: Nombre de la Institución, Fecha, Grado escolar, Número de estudiantes, Nombre del profesor, Nombre de la Unidad, Estándares movilizados, Logro a desarrollar, Indicadores de logro, Gestión del profesor, Consignas, Dificultades esperadas de los estudiantes, Ayuda del profesor, Material, Tiempo.



INSTITUCION EDUCATIVA CIUDADELA MIXTA COLOMBIA
PLAN DE ENSEÑANZA

Fecha: 5 de octubre de 2012 Hora: Grado: 3° Número total de alumnos: Profesora: Cielo Angulo

1. Nombre de la unidad: Medidas arbitrarias de longitud
2. Estándares movilizados: Realizo y describo procesos de medidas con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto
3. Logro a desarrollar: Utilizo patrones arbitrarios para determinar la medida de una longitud.
4. Indicadores de logro: Utilizo partes del cuerpo para poder establecer diferentes medidas.

ACTIVIDADES	CONSIGNAS	DIFICULTADES ESPERADAS DE LOS ESTUDIANTES	AYUDA DEL PROFESOR	MATERIAL	TIEMPO
Motivación Se pide a los estudiantes que salgan al patio y se organicen en grupos de 5 personas. Luego cada grupo escogerá 2 estudiantes, el más pequeño y el más grande del grupo, para que registren los saltos y 3 estudiantes para realizar saltos largos a partir de un punto de punto de partida seleccionado por ellos. Finalmente, los dos estudiantes que no saltaron medirán con sus pies, uno seguido del otro, la distancia recorrida con los saltos de sus compañeros y anotaran las medidas.	Observo los datos recogidos por mis compañeros y respondo las siguientes preguntas: • ¿Cuántos pasos midió el niño pequeño? • ¿Cuántos pasos midió el niño más grande? • ¿De qué otra manera podemos medir estos saltos?	• Para hacer el salto no se ubicaban bien en el punto de partida • Después del salto querían adelantarse para llegar a la misma medida del compañero	• Ubicarlos en el punto de partida	Cuaderno y lápiz	15 minutos

Figura 1. Guion de clase

Segunda etapa: La implementación de la actividad y observación de la clase. La siguiente etapa del estudio de clase es la implementación de la actividad con los estudiantes, aquí uno de los profesores que participó en el diseño gestiona la clase, intentando seguir a cabalidad lo planeado en el guion, por supuesto *el guion no es una camisa de fuerza*, pero se sugiere que su desarrollo sea lo más fiel posible.

Con el fin de garantizar un distanciamiento de la propia acción y de las situaciones contempladas, mientras se está ejecutando la actividad, los otros maestros se sientan en la parte de atrás del salón o a los lados a observar: a) el apegado seguimiento del guion que haga el profesor; b) si las consignas son suficientes para desarrollar la actividad; c) si los niños las entienden o son ambiguas; d) se presta especial atención en la presencia o no de las dificultades esperadas propuestas a priori o si hay dificultades nuevas que expresan los niños; e) se observa si las ayudas del profesor son suficientes en relación a las dificultades presentadas por los niños; f) se presta atención a la pertinencia y suficiencia de los materiales, y finalmente, g) se evalúa si el tiempo fue suficiente y se cumplió cada una de las actividades en el lapso estipulado.

Así entonces, la observación de la clase es un elemento que permite a los maestros, reflexionar *in situ* sobre la práctica para analizar y comprender el proceso de enseñanza y aprendizaje puesto en juego en el aula, mediado por la actividad matemática diseñada en la primera etapa, apoyados en el guion de clase, con el cual van haciendo el seguimiento a la actividad. Estos maestros, no intervienen en la clase.

La amplitud y precisión con que los maestros identifican las situaciones problemáticas y las condiciones en las que se desarrolla la actividad, da cuenta del proceso reflexivo de éstos. Con la observación de la clase, los maestros van tomando nuevas formas de concebir su actuación y les permite adoptar una visión sistemática y fundamentada al respecto.

Tercera etapa: La auto-evaluación y la co-evaluación. Finalizada la clase, preferentemente de forma inmediata, se realiza una mesa redonda donde se lleva a cabo, primero, una auto-evaluación del desarrollo de la actividad por parte del profesor que gestionó la clase, y luego los maestros observadores hacen sus aportes constructivos para el mejoramiento de ésta. En este momento, los maestros reconocen algunas concepciones implicadas en el análisis de las situaciones registradas en el guion. La co-evaluación, permite confrontar con otros y considerar nuevas opciones.

Los indicadores a valorar, más comunes teniendo en cuenta el guion, son: La relación de los estándares de competencias y la actividad, el cumplimiento de lo propuesto en el guion, la claridad de las actividades propuestas, la concordancia de las dificultades esperadas a priori de los estudiantes y lo sucedido en el aula, la concordancia de las ayudas del profesor en el aula y las planeadas en el guion, la utilización del material y su pertinencia, el cumplimiento del tiempo propuesto. Otros indicadores, generales, son el tono de voz, el manejo del grupo, uso del tablero, forma de trabajo con los estudiantes, claridad en las respuestas por parte de profesor, motivación y participación de los estudiantes generada por la actividad, etc.

Cuarta etapa: El rediseño de las actividades. Esta última fase se forma a partir de los resultados de la auto y co-evaluación realizada anteriormente. El rediseño de la actividad es lo que permitirá su mejoramiento. Este es el fin último del estudio de clase, pues solo de esta forma las experiencias de enseñanza serán enriquecidas, ampliadas y las actividades estarán más cerca de cumplir con los objetivos propuestos.

Aspectos Metodológicos

Este estudio sigue el enfoque cualitativo de tipo descriptivo, la toma de datos procede de las producciones de los participantes (tareas formativas) y de los registros del grupo investigador. Para analizar la implicación del Estudio de Clase en la reflexión sobre la práctica docente, se planificó y desarrollo un curso de formación continua. La descripción sistemática del curso

consiste en la revisión y análisis secuencial a cada etapa formativa la cual permite identificar las características del profesor reflexivo (Blanco-Álvarez, 2017).

El curso de formación continua

Esta experiencia, tuvo lugar en Tumaco, Colombia, con 28 maestros de la educación básica, de 9 instituciones educativas, entre julio y octubre de 2012. Estos maestros se dividieron en tres subgrupos, aquellos que laboraban entre primero y tercero de primaria, entre cuarto y quinto, y los que trabajaban entre sexto y séptimo de la educación básica secundaria. Luego se inició la construcción de las actividades alrededor del pensamiento métrico. Pero además, por ser Tumaco un municipio que está en la tarea de fortalecer su proceso de etnoeducación se vio la pertinencia de incorporar al proceso de formación de maestros la Etnomatemática, definida por el profesor de matemáticas e investigador en Educación Matemática Ubiratan D'Ambrosio (1997) como "[…] la matemática que se practica entre grupos culturales identificables, tales como sociedades de tribus nacionales, grupos laborales, niños de cierto rango de edades, clases profesionales, entre otros" (p. 16), teniendo en cuenta "[…] las capacidades de clasificar, ordenar, inferir y modelar" (p. 17).

Dicha perspectiva sociocultural de la educación matemática aportó al menos dos elementos valiosos al diseño de las actividades: a) pensar las matemáticas como una actividad humana, social y cultural y b) reconocer y valorar en la cultura tumaqueña la existencia de ideas matemáticas extraescolares o etnomatemáticas.

En este primer momento, los maestros, dan cuenta de su disposición para abordar las situaciones de la práctica docente, sin ser explicita la formulación de una cuestión, ellos exhiben su interés y la necesidad de abordar la planeación para la enseñanza de las medidas de longitud en el grado tercero. Para los maestros ha sido relevante prestar atención al diseño de las actividades para la enseñanza, en las cuales reflejaban implícitamente tanto su problemática, como la forma en que han ido incorporando su conocimiento y su experiencia.

Posteriormente, las actividades diseñadas se llevaron al aula de clase con los estudiantes, por una de las profesoras que participó en su diseño

Los maestros al observar la actuación de su colega, reconocen en la realidad, situaciones que ocurren en su propia práctica y aquellas que no concebían. Diligenciar y seguir el guion les permitió analizar hechos que ocurren en la implementación de la actividad desde sus propios fundamentos. Entendemos que, de forma inicial, toman distancia de sus propias formas de concebir las situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Finalmente, se realizó el proceso de auto y co-evaluación y el posterior rediseño de las actividades. La estrategia de la autoevaluación, da origen a la explicitación de ideas y razones que justifican la actuación de los maestros; lo cual, conllevó a retomar la clase y hacer conciencia de los propios presupuestos. Con los aportes del grupo, los maestros logran identificar sus formas de ver la enseñanza de las matemáticas. Aunque no fueron profundizadas las creencias de los maestros en este momento, sí se explicitan algunas concepciones en relación al currículo, la gestión de la clase y la actuación de los estudiantes.

En este momento, identificamos en la mirada retrospectiva de la práctica que hacen los maestros, algunos comentarios como los siguientes: a) las instrucciones del maestro coincidían con el guion; b) La actividad motivadora planeada al inicio de la clase cumplió su propósito; c) Los estudiantes manifestaron dificultades en la escogencia y uso de patrones de medidas

arbitrarios, esta dificultad no se había previsto; d) La actividad tomó más tiempo del planeado. Finalmente, éstos y otros comentarios fueron utilizados a continuación para el rediseño del guion de la actividad.

La co-evaluación, ha encaminado a los maestros a examinar los elementos que le condicionan la forma en que se habían concebido las actividades. Aunque no se profundizó en las creencias particulares de los maestros, de manera colectiva, mostraron disposición para interpretar las dificultades enfrentadas y responder a estas en el rediseño de las actividades.

Resultados

Los resultados sintetizan en cada etapa del estudio de clase las disposiciones y características que dan cuenta de la formación como profesores reflexivos. Entre ellos:

La planeación de actividades para la enseñanza de la medida, integrando medidas no convencionales o etnomatemáticas utilizadas en la cultura tumaqueña, se constituyó en el principal interés que configuró la tarea de enseñar como problemática. Es decir, percibieron en su propia práctica acciones que requerían de su actuación.

La implementación y observación de la actividad permitió analizar la gestión de la clase y las formas de concebir la enseñanza del tema. Por su parte, la auto-evaluación afloró explicaciones y creencias que definían las actividades para la enseñanza y que de manera implícita sostenían hasta ese momento los maestros. Esto se corresponde con la condición del profesor reflexivo de distanciarse de las situaciones.

La auto-evaluación y la Co-evaluación permitió considerar aquellos elementos de las actividades y de la implementación de la clase que es necesario re-diseñar ha contribuido desde la coevaluación a dar cuenta de la tercera condición del profesor reflexivo. Por tanto, confrontar con pares y expertos permite eliminar aquellos elementos que condicionan la forma de concebir la práctica docente.

El rediseño de actividades, es la condición que concreta el proceso reflexivo y da cuenta de la formación de maestro reflexivo. Ello se nota, cuando los maestros han interpretado su actuación y han recurrido a otras fuentes para comprender su práctica y buscar nuevas alternativas.

Conclusiones

A manera de conclusión destacamos el éxito de un proceso reflexivo mediado por el estudio de clase el cual se atribuye: al diseño de la instrucción; al análisis sistemático al que se somete el curso y a la pertinencia del enfoque metodológico asumido. Los participantes han reflexionando sobre el diseño de actividades para la enseñanza de la medida y la integración de la Etnomatemática en el currículo escolar.

En segunda instancia, respecto a la pertinencia del estudio de clase se concluye:

Al iniciar la aplicación del estudio de clase, los maestros experimentaban incomodidad por la presencia de otros colegas en el aula, pero durante el proceso está indisposición cambió y se convirtió en un estímulo; la evaluación no es vista como algo negativo o sancionador, sino como algo constructivo y positivo para el mejoramiento de la calidad educativa.

El trabajo en grupo, colaborativo, hace que la programación de las actividades se enriquezca con la experiencia de cada uno, y las dificultades encontradas se discuten y se buscan

soluciones. Esto les permite pensar la actividad docente como un trabajo colectivo más que individual.

Se destaca la metodologia también utilizada por distintos centros educativos en países como: Japón, Estados Unidos, Colombia, Chile, etc.

Finalmente, la formación inicial y continua de maestros de matemáticas debe buscar maestros reflexivos sobre su propia práctica, usando el estudio de clase como metodología. En este sentido la UNESCO menciona que:

> "El contenido y el plan de estudios de los programas educativos para docentes deben ser específicos para el contexto local; [...] y orientar a los docentes en formación, para que lleguen a convertirse en 'practicantes reflexivos'" (UNESCO, 2015, p. 21); y "el dispositivo de estudio de clase y las reflexiones y estudios que ella motiva nos parece […] ilustrar la importancia de pensar sobre la evolución de las prácticas en términos parcialmente renovados, así como sobre los modos de formación continuada de los profesores, al colocar énfasis en las tareas profesionales de enseñanza" (UNESCO, 2016, p. 77).

Queda así, abierta la invitación a estudiar y utilizar el estudio de clase y la reflexión sobre la práctica docente, buscando la calidad educativa y el aprendizaje de las matemáticas

Referencias

Blanco-Álvarez, H. (2017). Elementos para la formación de maestros de matemáticas desde la Etnomatemática. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. España.

Castellanos, M. T., Flores, P y Moreno, A. (2017). La. Reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre problemas profesionales relacionados con la enseñanza del álgebra escolar. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 408-429

Climennt, N y Carrillo, J. (2013). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en Matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(3), 387–404

D'Ambrosio, U. (1997). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. In: Powell, A & Frankenstein, M. (Eds.), Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education (pp. 13–24). Albany: Suny Press.

Dewey, J. (1989). Cómo pensamos. Barcelona: Paidós.

Doig, B & Groves, S. (2011). Japanese lesson study: Teacher professional development through communities of inquiry. *Mathematics Teacher Education and Development, 13*(1), 77–93

Hart, L. C., Alston, A & Murata, A. (Eds.). Lesson study Research and Practice in Mathematics Education: Learning together. New York: Springer

Isosa, M & Olfos, R (2009). El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Valparaiso: Ediciones Universitarias de Valparaiso.

Kieran, C., Krainer, K & Shaughnessy, J. M (2013). Linking research to practice: teachers as a key stakeholders in mathematics education research. In: Clements, M. et al. (Eds.). Third International Handbook of Mathematics Education (pp. 361–392). New York: Springer.

Korthagen, F. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. Revista interuniversitaria de formación del profesorado, *68*(24), 83–102

Llinares, S. & Krainer, K (2006). Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners. In:

Gutiérrez, A & Boero, P. (Eds.). . Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 429–459). Rotterdam: Sense Publishers.

Marmolejo, G.-A., Blanco-Álvarez, H y Fernández, E. (2009). El estudio de clase y la formación de licenciados en matemáticas en la Universidad de Nariño. In: Torres, J & Vergara, L. (Eds.). Estudio de clase: una experiencia en Colombia para el mejoramiento de las prácticas educativas (pp. 93–104). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Schöenfeld, A & Kilpatrick, J. (2008). Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics. In: Tirosh, D & Wood, T. (Eds.). The International Handbook of Mathematics Teacher Education (pp. 321–354). Rotterdam: Sense Publishers.

Schön, D. (1987). Educating a Reflexive Practitioner. Toward a New Design for Teaching and Learning in the Professions. São Francisco: Jossey Bass.

Torres, J., y Vergara, L. (2009). Estudio de clase: una experiencia en Colombia para el mejoramiento de las prácticas educativas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional,

UNESCO. (2015). Guía para el desarrollo de políticas docentes. París: UNESCO,

UNESCO. (2016).Os desafios do ensino de matemática na educação básica. São Carlos: EdUFSCar - Editora da Universidad Federal de São Carlos – SP.

Perspectivas socioculturales: Etnomatemáticas, sociología, comunicación

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

The Role of Ethnomathematics and Social Justice in Mathematics Education

Milton **Rosa**
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
milton.rosa@ufop.edu.br

Daniel Clark **Orey**
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
oreydc@gmail.com

Abstract

One of the challenges faced by educational systems around the world is related to the growing number of students from linguistic and culturally diverse backgrounds. Both cultural and linguistic diversity draw increased attention by many teachers and researchers as areas identified as having connections to failed educational systems. There is a growing sense of urgency to resolve this inability to effectively educate all students. In the context of social justice, it is necessary to examine the embeddedness of mathematics in cultures, while drawing from ethnomathematical approaches that take on linguistic and cultural forms of knowledge production in the mathematics curricula. This pedagogical approach intends to promote social justice and the overall quality of students' educational experience.

Keywords: ethnomathematics, mathematics education, pedagogical action, social justice.

In the 21st century, a greater and more sensitive understanding of mathematical ideas, previous knowledge, and practices from members of diverse cultural groups has become increasingly available through the growth of the fields of ethnology, culture, history, multiculturalism, anthropology, linguistics, and ethnomathematics. One of the characteristics of ethnomathematics is to help to develop the concept of what mathematics really is through it is connection with culture (D'Ambrosio, 2007).

An ethnomathematics program offers a broad view of mathematics, which embraces ideas, processes, methods, previous knowledge, and practices related to different cultural environments, which lead to increased evidence of cognitive processes, learning capabilities, and attitudes that may direct a learning process occurring in mathematics classrooms.

The reflection on the social and political dimensions of mathematics offers an important perspective for a dynamic and globalized society, and which recognizes that all cultures and all people develop unique methods and explanations that allow them to understand, act, and transform their own reality (Rosa & Orey, 2007).

Ethnomathematics research emphasizes education for social justice, wherein it is necessary to empower students by teaching them about real-world issues and instills in them a desire to seek out and work towards this goal. In this regard, individuals who do not believe in their own cultural roots can easily assimilate dominant cultural values without critically reflecting on the values of the new culture (Rosa, 2010).

In this context, an ethnomathematics program can assist both school leaders and teachers to understand and accept the cultural roots of their students by valuing the mathematical ideas, practices, and previous knowledge as well as recognizing the applications of academic mathematics.

This program supports the learning of mathematics of academic mathematics because individuals from minority groups need to have equal access and be knowledgeable about academic and standardized mathematics (Rosa & Orey, 2007). It is crucial to ensure that the learning of mathematics that is contextualized and grounded in the needs and expectations of the students and the community that utilizes it, means teaching mathematics for social justice and in a non-colonial manner.

Teaching mathematics for social justice through an ethnomathematical perspective reminds school leaders and teachers that information may be meaningless unless it is embedded in appropriate contextual understanding. In other words, social justice relies on the relevant political and cultural aspects of mathematics in order to guide its instruction because teaching for social justice encourages the exploration, interpretation, and reconsideration about what is understood about mathematics (D'Ambrosio, 2007).

It is thought that the processes of mathematics are not easily amendable to teaching for social justice considerations. However, there is one exception found in the field of ethnomathematics, as it explores different methods of organizing mathematical ideas, practices, previous knowledge, and problem solving that individuals face daily in often non-academic contexts.

In this regard, one aspect of ethnomathematics explores how different cultures organize and classify mathematical knowledge. Thus, Rosa and Orey (2007) argue that this is because individuals from minority groups have the right to equal access and become knowledgeable about the mathematics of the dominators/colonizers.

The pedagogical action of the Program Ethnomathematics demonstrates that mathematics is contextualized and grounded in the needs and expectations of the community that utilizes it. Along this line, the goal of ethnomathematics is to contribute both to the understanding of culture and to the understanding of mathematics, but mainly to the relationship between the two.

Educating students mathematically consists of much more than just teaching them some mathematical concepts or algorithms.

Given the current political climate in many places, this is often complex, and difficult to accomplish. The problems and issues are much more challenging when it requires a fundamental awareness of the values that underlie mathematics and recognition of the complexity of educating students about these values. It is not enough just to teach students *mathematics*, it is necessary to educate them about the mathematics they encounter, and to educate them through and with mathematics (Bishop, 1991).

An important change in mathematics instruction and curriculum needs to take place in order to accommodate the demographic change in the school population. School leaders and teachers need to be instructed in gearing education more toward students of different languages and cultures.

Despite dire political conditions in many places, concerns about equity in relation to mathematics education have moved to the forefront in many countries in the world, most notably the *STEM Education*[1]. Related to this a goal for both school leaders and teachers is to accomplish this mathematical equity by incorporating an ethnomathematics perspective into the mathematics curriculum and instruction.

Ethnomathematics draws from the cultural experiences and practices of individual students, their communities, and the society at large in using them as vehicles to not only make mathematics learning more meaningful, but more importantly, to provide students with the insights of mathematical knowledge as embedded in their social and cultural environment.

One important implication of this approach is to emphasize connections between mathematics and often local culture in the mathematics curriculum. In so doing, it is paramount that school leaders consider students' linguistic and cultural backgrounds in designing and selecting school activities.

With the increased growth of a diverse student population, the school curricula need to reflect on the intrinsic and cultural learning of all students. This means that school leaders and teachers must be prepared to address students' linguistic and cultural backgrounds in the mathematics classroom.

According to D'Ambrosio and Rosa (2008), this inclusion improves students' academic achievement, helps move classrooms towards an equitable learning environment, helps students have positive beliefs about mathematics, integrates mathematics with other disciplines, and to promote mathematical understanding.

When students feel that the mathematics in the classroom does not relate to them or their experiences, backgrounds, and culture, they feel disconnected from the material. Student backgrounds and contexts provide a rich means for them who usually do not fully participate in the mathematics class, to make connections to the mathematical content (D'Ambrosio, 2007).

[1]Through STEM (Science, Technology, Engeneering, and Mathematics) Education students are taught through constructivist methods that aimed to build content understanding and application of general knowledge. It enables students to become conscious citizens because they must be able to apply their knowledge in meaningful ways, which allow them to address issues that better the lives of the members of societies (Rosa & Orey, 2017).

Ethnomathematics is a usable tool in the mathematics classroom, which helps students to make connections and develop deeper mathematical understanding and help them to learn about mathematical practices of other peoples as well as develop a deeper understanding of their own mathematical practices. In this regard, as students learn about other peoples, they can also learn about the mathematics and sciences used by them (Rosa & Orey, 2007).

One of the most important implications of social justice for mathematics education is that ethnomathematics is a tool to motivate disenfranchised students to pursue study of mathematics (D'Ambrosio, 2007). Educators must provide students with relevant mathematical experiences by integrating into the curriculum mathematical topics from their own cultures (Rosa & Orey, 2007).

Ethnomathematics facilitates the achievement of two objectives in mathematics teaching: a) it can establish a multicultural context for mathematics knowledge and skills and b) and it can help students in making connections among other disciplines (D'Ambrosio & Rosa, 2008). In this regard, students can learn to maximize possibilities for improving their attitude towards mathematics as the same time that they are improving their mathematics skills.

School leaders must be supported not only in terms of equity, but also in terms of mathematical viability. By placing the onus of mathematics education, at all levels, teachers and students recognize how mathematics is vital to maintaining and developing the technological underpinnings of a globalized society.

Overall, there is hope that school leaders, teachers, and students begin to recognize that mathematics is ubiquitous even if it is not visible and it has meaning beyond its numbers or the academic context that most experience it in.

Given the almost universal standardized requirements in mathematics content, certain mathematical concepts and skills must be covered, but often even these can be treated from the point of view of mathematics from the structures of languages and cultures. Looking at mathematics from diverse perspectives does more than teach students about mathematics because it also teaches school leaders, teachers, and students about mathematics in ways they would never see in traditional mathematics curriculum (Rosa, 2010).

In this context, Rosa and Orey (2007) argue that school leaders and teachers need to be challenged as professionals in order to perceive connections between language, mathematics, and culture and provoke deeper thought and critical thinking skills for all their students.

According to Giroux and McLaren (1994), *border pedagogy* creates borderlands in which diverse cultural resources allow the fashioning of new identities within existing configurations of power. It also works to *decolonize*[2] and revitalize teaching and learning to promote social justice for all students. Particularly, it engages students in multiple references that constitute different cultural codes, experiences, and languages in order to help them construct their own knowledge through sociocultural negotiation.

[2]Educational systems most certainly play a role in perpetuating colonialism. Thus, there is a need for the deconolization of the school curricula (Wane, 2013). Decolonization is the meaningful and active resistance to the forces of colonialism that perpetuate the subjugation and/or exploitation of our minds, bodies, and lands. "Decolonization is engaged for the ultimate purpose of overturning the colonial structure and realizing Indigenous liberation" (Waziyatawin & Yellow Bird, 2012, p. 3).

Border pedagogies teach students to develop the skills of thinking critically and debating power, meaning, and identity by encouraging tolerance, ethical sophistication, and openness to alternative forms of thinking (Giroux & McLaren, 1994). It is necessary for educators to be committed to equity in order to enhance all students' achievement and advancement in mathematics (Gutiérrez, 2007).

For minority students to reach their full potential, instruction should be provided in ways that promote the acquisition of increasingly complex mathematical knowledge and language skills in a democratic climate that fosters social justice, collaboration and positive interactions among students, school leaders and teachers.

Such classrooms are inclusive in their emphasis on high standards, expectations, and outcomes for all students. Important features of such settings include high expectations, and exposure to academically rich curricula, materials, resources, and approaches that are culturally and linguistically relevant to the minority students' needs in order to enhance mathematical learning and achievement (D'Ambrosio 1999). Consequently, knowing the cultural and linguistic background of our students is essential for providing successful learning opportunities and social justice for all.

Currently, the challenges for an increased accountability for both educators and learners demand different teaching strategies that enable educators to serve the community and their students more effectively for the development of social justice orientation. Therefore, mathematics educators need to be supported to develop educational opportunties linked to culturally relevant pedagogy and engage in reflection about their own teaching-learning practices.

In order to teach for social justice, it is necessary to recognize how reflections on and/or pondering about issues, perceptions, beliefs, and problems can lead teachers to enhance their own teaching practices (Airasian & Gullickson, 1997). Since reflection constitutes a valued strategy for enhancing pedagogical practices, it is necessary for educators to be given space to create opportunities and reflect upon their own pedagogical practices and to critique them and modify them (Rosa, 2010).

In this regard, "reflection is a central process of constructing knowledge and developing professionally" (Airasian & Gullickson, 1997, p. 219). In addition, an understanding of both culture and language and connections to mathematics is an important source of knowledge for teachers to reflect upon in order to transform their own practices.

Ethnomathematics emphasizes education for social justice, wherein it is necessary to empower individuals by teaching them about real-world issues and instill in them the desire to seek out and work towards this goal. Mathematics for social justice must be equal for students from different cultural backgrounds. An important change in instruction needs to take place in order to accommodate ongoing social and cultural changes.

In this regard, if educators are encouraged to facilitate successful learning opportunities for all students, they must know and acknowledge the community and prior experiences and perceptions about the world. This also includes respecting and getting to know student linguistic backgrounds and cultural values, which are essential for pursuing social justice for all learners (D'Ambrosio, 2001).

In conclusion, teachers who come to appreciate and understand diverse linguistic and cultural differences, strive for intentional variety in instruction, curricula, and assessments that lead to an improvement in the learning of mathematics. Teachers play a key role in encouraging and supporting pedagogical practices for their students.

It is our hope that this theoretical paper adds to the existing body of the literature in relation to the development of teaching for social justice in order to provide a useful perspective for decision-makers in the teaching mathematics to students from culturally and linguistically diverse backgrounds. It is recommended that educators discuss this issue not only in terms of mathematical viability, but also in terms of equity.

References and bibliographies

Airasian, P. W., & Guillickson, A. (1997). Teacher self-evaluation. In J. H. Stronge (Ed.), *Evaluating teaching*: A guide to current thinking and best practice (pp. 215-247). Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy, and technoracy: a trivium for today. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 131-153.

D'Ambrosio, U. (2001). What is ethnomathematics and how can it help children in schools? *Teaching Children Mathematics*, 7(6), 308-310.

D'Ambrosio, U. (2007). Peace, social justice and ethnomathematics. *The Montana Mathematics Enthusiast Monograph 1*, 25-34.

D'Ambrosio, U., & Rosa, M. (2008). A dialogue with Ubiratan D'Ambrosio: a Brazilian conversation about ethnomathematics. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 1(2), 88-110.

Giroux, H., & McLaren, P. (1994). *Between borders*: pedagogy and politics in cultural studies. New York, NY: Routledge.

Gutiérrez, R. (2007). Context matters: equity, success, and the future of mathematics education. In T. Lamberg, & L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-18). Reno, NV: University of Nevada.

Rosa, M. (2010). *A mixed-method study to understand the perceptions of high school leaders about English language learners (ELLs):* the case of mathematics. College of Education. Doctorate Dissertation in Education. Sacramento, CA: California State University, Sacramento - CSUS.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2007). Cultural assertions and challenges towards pedagogical action of an ethnomathematics program. *For the Learning of Mathematics*, *27*(1), 10-16.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2017). STEM education in the Brazilian context: an ethnomathematical perspective. In: Robin Jorgensen, & Kevin Larkin (Org.), *STEM education in the Junior secondary*: the state of play (pp. 221-247). Cham, Switzerland: Springer.

Wane, N. (2013). (Re)claiming my indigenous knowledge: challenges, resistance, and opportunities. *Decolonization: Indigeneity, Education & Society*, *2*(1), 93-107.

Waziyatawin, A. W. & Yellow Bird, M. (2012). Introduction: decolonizing our minds and actions. In Waziyatawin, A. W. & Yellow Bird, M. (Eds.), *For indigenous mind only*: a decolonization handbook (pp. 1-14). Santa Fe, NM: School for Advanced Research Press.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A Cultural Approach to Mathematical Modelling: An Ethnomathematical Perspective

Daniel Clark **Orey**
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
oreydc@gmail.com

Milton **Rosa**
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
milton.rosa@ufop.edu.br

Abstract

A major problem with mathematics education in contemporary society is its overwhelming bias towards a Western orientation in its topics and research paradigm. A search for new approaches and methodologies is necessary to record historical forms of mathematical ideas that occur in different cultural contexts, and to take advantage of the emerging globalization of business, science, religion, art, music and other aspects of culture. There is a need to apply a fundamentally different philosophy, modelling techniques, and an ethnomathematical perspective to mathematics curriculum. In this article, the authors propose to demonstrate how ethnomodelling is a methodology for teaching and learning of mathematics that challenges the prevailing way of thinking.

Keywords: cultural groups, ethnomathematics, ethnomodelling, modelling.

Initial Considerations

Throughout history, people have explored other cultures and shared knowledge often hidden within their traditions, practices, and customs. This exchange of cultural capital[1] has enriched and equalized all cultures. The Greek foundations of European civilization are themselves

[1]Cultural Capital is the knowledge, experiences, and connections that individuals have had through the course of their lives, which enables them to succeed more than individuals from a less experienced background. It also acts as a social relation within a system of exchange that includes the accumulated cultural knowledge that confers power and status to the individuals who possess it.

founded upon the Egyptian civilization (Powell & Frankenstein, 1997). One consequence of this is a widespread consensus towards the supremacy of Western scientific and logical systems at the exclusion of all other traditions.

In mathematics, as in other academic disciplines, the literature, methods of problem solving, and teaching materials are all based on the traditions of written sciences, and with very few exceptions, by Western academics. Most examples used in the teaching of mathematics are derived from European-based cultures. These same problem-solving methods mainly rely on the European view on mathematics. It goes without saying that culture and society considerably affect the way individuals understand concepts of any mathematical ideas and practices. It means that, this interaction may leave out a significant amount of knowledge in its cultural forms (D'Ambrosio, 1990).

Observing this, D'Ambrosio stated that the "culture of a group results from the fraction of reality that is reachable by the group" (D'Ambrosio, 2006, p. 5). However, the multiplicity of cultures, each one with a system of shared knowledge and a compatible set of behavior and values facilitates cultural dynamics by enabling an expanding familiarity with the rich diversity of humanity. This creates an important need for a field of research that studies the phenomena and applications of modelling in diverse cultural settings.

This kind of cultural perspective can be used in problem solving methods, numerous conceptual categories, structures and models that we use to represent and manipulate data translates as forms of cultural mathematical practices specifically the modelling processes referred to as *ethnomodelling* (Bassanezi, 2002, D'Ambrosio, 1993; D'Ambrosio, 2002; Rosa & Orey, 2006). It also recognizes how the foundations of ethnomodelling differs from the traditional modelling methodologies

Ethnomathematics and Modelling

Historically, models that arise from reality have been the first paths that have provided numerous abstractions of mathematical concepts. Ethnomathematics uses the manipulations of models taken from reality. Modelling as a strategy of mathematical education incorporates the codifications provided by others in place of a formal language of academic mathematics. According to this context, mathematical modelling is a methodology that is closer to an ethnomathematics program (Bassanezi, 2002; D'Ambrosio, 1993; Rosa & Orey, 2003) and it is defined as the intersection between cultural anthropology and institutional mathematics, and utilizes mathematical modelling to interpret, analyze, explain, and solve real world problems (D'Ambrosio, 1993; Rosa, 2000; Rosa & Orey, 2003).

Investigations in modelling have been found to be useful in the translation of ethnomathematical contexts by numerous scholars in Latin America (Bassanezi, 2002; Biembengut, 2000; D'Ambrosio, 1993; Ferreira, 2004; Orey & Rosa, 2007; Rios, 2000; Rosa & Orey, 2003). In order to document and study diverse mathematical practices and ideas found in many traditions, modelling has become an important tool used to describe and solve problems arising from cultural, economic, political, social, environmental contexts and brings with it numerous advantages to the learning of mathematics (Barbosa, 1997; Bassanezi, 2002; Bernardo & Morris, 1994; Biembengut & Hein, 2000; Cross & Moscardini, 1985; Hodgson & Harpster, 1997; Orey, 2000; Rosa, 2000; Rosa & Orey, 2003).

At the same time, outside of the community of ethnomathematics researchers, it is known that many scientists search for mathematical models that translate their deepening understanding of both real-world situations and diverse cultural contexts. This enables them to take social, economic, political, and environmental positions in relationship to the objects of the study (Bassanezi, 2002; D'Ambrosio, 1993; D'Ambrosio, 2002; Rosa & Orey, 2006). Ethnomodelling is a process of elaboration of problems and questions that have grown from a real situation (system). It forms an image, or sense of, an idealized version of *mathema*[2]. This perspective essentially forms a critical analysis for the generation and production of knowledge (creativity), and forms the intellectual process for its production, including the social mechanisms for the institutionalization of knowledge (academics), and its transmission (education). D'Ambrosio (2000) affirmed that "this process is modelling" (p. 142).

In this perspective, by analyzing their role in reality as a whole, this holistic context allows those engaged in the process of modelling to study systems of reality in which there is an equal effort made to create an understand of the components of the system as well as their interrelationships (Bassanezi, 2002, D'Ambrosio, 1993). By having started with a social or reality-based context, the use of modelling as a tool begins with the knowledge of the student by developing their capacity to assess the process of elaborating a mathematical model in its different applications and contexts (D'Ambrosio, 2000). This uses the reality and interests of the students, versus the traditional model of instruction, which makes use of external values and curriculum without context or meaning.

For example, Bassanezi (2002) has characterized this process as "ethno/modelling" (p. 208) and defines ethnomathematics as "the mathematics practiced and elaborated by different cultural groups and involves the mathematical practices that are present in diverse situations in the daily lives of members of these diverse groups" (p. 208). This interpretation is based on D'Ambrosio's (1990) trinomial: *Reality – Individual – Action* (Figure 1).

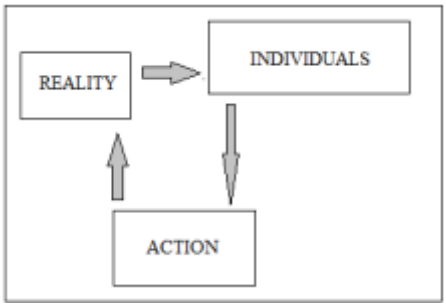


Figure 1: D'Ambrosio's trinomial

For example, D'Ambrosio (2006) affirmed that the "discourse above was about one individual. But there are many other individuals in varied contexts going through a similar

[2]According to D'Ambrosio (1990), mathema may be considered as the actions taken by people from distinct cultural groups to explain and understand the world around them. In other words, they have to manage and cope with their own reality in order to survive and transcend. Throughout the history of mankind, *technés (or tics)* of *mathema* have been developed in very different and diversified cultural environments, that is, in the diverse *ethnos*. Thus, in order to satisfy the drives towards survival and transcendence, human beings have developed and continue to develop, in every new experience and in diverse cultural environments, their own ethnomathematics.

process. For living individuals, the cycle is the same: ... → reality → individual → action → reality → individual → action → ...” (p. 5).

In this context, D’Ambrosio (2006) also states that the “individual agents permanently receive information and process it and perform an action. But although immersed in the same global reality, the mechanisms used to receive information of individual agents are different” (p. 5). In other words, it is crucial to highlight how individuals capture and process information in diverse ways and, consequently, their different actions. Thus, students learn to construct their own connections between both traditional and non-traditional learning settings, it becomes necessary to translate and/or interpret ethnomathematical knowledge into systemized mathematics.

Ethnomodelling

The etymology of the prefix *ethno* traces back to the Greek word *ethnos* relating to a *people*, a *nation* or a *cultural* group in the broadest sense. In the context of ethnomodelling, *ethno* does not refer to any specific race or people only, but also to interesting differences between cultural groups. These differences may include those based on racial oppression or nationality, but are mainly based on language, history, religion, customs, institutions, and on the subjective self-identification of a people. In so doing, *ethno* represents particularity and modelling universality and the combination of the specific and the universal leads to a mathematical activity that takes place within a culture.

The patron goddess of practical knowledge in ancient Greece was *Techné*, whose name forms the base for the words *technique* and *technology*. As well the Greek word for art is *techné* and the Greek word *tikein*, which means to create, is also derived from *techné*. Thus, *techné* is a form of practical knowledge that results in productive action. These mythic modes of knowledge are considered as practical knowledge that results in productive action.

This etymology reveals a deep connection between technology and the practices of living and creating. It represents relationships between humanity and the creation of all forms of technology, and how this might serve as a guide to scientists and educators to develop a moral and cultural standard for the teaching and learning mathematics. This is one of the most important purposes of ethnomodelling. Ethnomodelling binds contemporary views in ethnomathematics. It is an attempt at decolonizing previous ethnomathematics and related research by encouraging the voice of those once studies from the outside. It recognizes the need for a culturally-based view on modelling concepts and processes.

Studying the unique cultural differences in mathematics encourages the development of new perspectives on the scientific questioning methods. Research of culturally bound modelling ideas may address the problem of mathematics education in non-Western societies by bringing the local cultural aspects into mathematical teaching and learning processes (Eglash, 1999). This perspective is needed in mathematics education.

Therefore, ethnomodelling involves ways in which individuals or groups explain and draw on traditional or curricular mathematical ideas in the course of their problem-solving experiences. In so doing, it is important to not to idealize or label them as *correct* or *appropriate* ways of thinking, but rather to highlight the relationship between cultural groups and the deeply embedded mathematics in their daily activities (Rosa & Orey, 2010).

In this context, Rosa and Orey (2013) state that ethnomodelling is a "practical application of ethnomathematics which adds the cultural perspective and voice of the individual to modelling concepts" (p. 78). This cultural perspective broadens views of modeling because it recognizes it as a potential pedagogical bridge for students in their learning of mathematics (Bassanezi, 2002; D'Ambrosio, 2002). Hence, ethnomodelling brings an "inclusion of a diversity of ideas brought by students from other cultural groups can give confidence and dignity to students, while allowing them to see a variety of perspectives and provide a base for learning academic-Western mathematics" (Rosa & Orey, 2013, p. 78).

Ethnomodelling is a tool that responds to its surroundings and is culturally dependent (Bassanezi, 2002; D'Ambrosio, 2002; Rosa & Orey, 2006; Rosa & Orey, 2007). The goal of recognizing ethnomodelling is not to give mathematical ideas and practices of other cultures a Western stamp of approval, but to recognize that they are, and always have been just as valid in the development of mathematics and sciences.

Ethnomodelling studies the ideas of culturally different groups, whether technically advanced. It is necessary to understand how mathematical concepts are born, conceptualized, and adapted into the practices of a society (D'Ambrosio, 1993; Eglash, 1997; Huntington, 1993, Rosa & Orey, 2007). Ethnomodelling does not follow the linear modelling approach that is prevalent in modernity.

Previously, Bassanezi (2002) stated that the ethno/modelling process starts with the social context, reality, and interests of students and not by enforcing a set of external values and decontextualized activities without meaning for the students. This process is defined as the mathematics practiced and elaborated by different cultural groups, which involves the mathematical practices present in diverse situations in the daily lives of diverse group members.

For example, the introduction of the term *mathematization* by D'Ambrosio (1990) set the stage for emerging scholarship in ethnomodelling. This context allowed Rosa and Orey (2006) to state that "mathematization is a process in which individuals from different cultural groups come up with different mathematical tools that help them organize, analyze, comprehend, understand, and solve specific problems located in the context of their real-life situation" (Rosa & Orey 2013, p. 118).

This approach shows that people of different cultures have different views of relations between the nature of spirit and humankind, the individual and the group, the citizen and the state, as well as differing views on the relative importance of rights and responsibilities, liberty and authority, and equality and hierarchy. In addition to these categories, culture is expanded to include also how differing professional groups and age classes function (D'Ambrosio, 1985) as well as social classes and gender.

Culture is defined as the ideations[3], symbols, behaviors, values, knowledge and beliefs that are shared by a community (Banks & Banks, 1993). The essence of a culture is not its

[3]Ideation means to come up with a bright idea that may make a difference to society. A more innovative idea makes a bigger difference in society. Ideation involves both divergent thinking, starting with the known and moving outwards, and convergent thinking, starting with the known and moving inwards. In so doing, ideation is the process of generating innovative ideas and transforming them into valuable outcomes for the well-being of the members of all cultural groups.

artifacts, tools or other tangible cultural elements, but the way the members of the group interpret, use, and perceive them. An artifact may be used in different cultures in very different ways and for very different purposes. Mathematical ideas and practices are good examples of this fact.

Different cultures contribute to the development of mathematical concepts, ideas, and practices, and enrich them in the traditional fields of mathematics. As D'Ambrosio (1997) recognized, the ethnosciences, in this case ethnomathematics; means going back to basics which includes the goals of equity and dignity. Traditional Eurocentric conceptions of science have been imposed globally as the pattern of rational human behavior. Under the control of Western powers, the results of this globalization are far from being acceptable (D'Ambrosio, 1997). The study of ethnomodelling encourages the ethics of respect, solidarity and co-operation across cultures.

Final Considerations

This article outlines ongoing research related to cultural perspectives in mathematical modelling. Contemporary academic mathematics is predominantly Eurocentric and colonial in its spread across the globe. This Eurocentrism facilitates an ongoing divide that has hindered the mathematics coming from non-Western traditions. The motivation towards a cultural approach presents us with an assumption that makes use of cultural perspectives through ethnomathematics and uses mathematical modelling to bring local issues into global discussion, primarily using the voices and perspectives of those who do the math in the context under study.

The authors have suggested a mathematics education that is an active, participatory social product including a dialectic relationship between mathematics and society and is chiefly non-colonial in its approach. Moreover, when presented as a modern or westernized mathematics primarily dominated by the preferences of the West (European-North American), and or done by outsiders imposing their often-unintended bias, it is here that this Eurocentrism poses problems in mathematics education for non-Western cultures.

Ethnomodelling stands for mathematical ideas and practices, which have at its root culture. The immerging study of ethnomodelling is defined as the study of mathematical phenomena within a culture. Ethnomodelling differs from the traditional definition of modelling in that whereas the traditional view considers the foundations of mathematics education as constant and applicable everywhere. The study of ethnomodelling takes the position that mathematics education is a social construction and thus culturally bound, and seriously listens to the voice of those doing the mathematics.

In order to keep up with modern Western developmental models, other cultures have been forced to adapt or perish. Relying primarily on constructivist theories, the authors argue that universal theories of mathematics take different forms in different cultures, and that Western views on the abstract ideas of modelling are culturally bound. Ethnomodelling is considered a powerful tool used in the translation of a problem-situation of mathematical ideas and practices within a culture. These new-found ethnomathematical lenses lead to new findings in the development of an inclusive model of mathematics.

In an increasingly globalized world, educators must find ways in which we can consider accounting the cultural and philosophical background of a society. Ethnomodelling is just one way to do this. Different cultures have different perceptions of time and space, logic, problem

solving methods, society, and values and translating this to our westernized paradigm of thinking is often difficult. Learning to listen to, and then come to a mutual understanding and appreciation of these differences enriches the curriculum and increases understanding between peoples.

The adoption of an ethnomodelling perspective in a mathematics curriculum recognizes the importance of and gives voice to local cultures in the development of mathematics. This pedagogical aspect produces student-researchers who are active participants in their own mathematics education as they learn that they themselves can contribute to the development of mathematics.

References and bibliographies

Banks, J. A. (1993). Multicultural education: characteristics and goals. In: Banks, J. A., & Banks, C. A. M. (Eds.). *Multicultural education*: issues and perspectives (pp: 3-28). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Barbosa, J. C. (1997). O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? [What do teachers think on mathematical modelling?]. *Zetetiké*, *7*(11), 67-85.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* [Teaching and learning with mathematical modelling]. São Paulo, Brasil: Editora Contexto.

Bernardo, M. A., & Morris, J. D. (1994). Transfer effects of a high school computer-programming course on mathematical modelling, procedural. *Journal of Research on Computing in Education*, *26*(4), 523-537.

Biembengut, M. S. (2000). Modelagem & etnomatemática: Pontos (in)comuns [Modelling & ethnomathematics: (Un)common points]. In. Domite, M. C. (Ed.). *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1* (pp. 132-141). São Paulo, Brasil: FE-USP.

Biembengut, M. S., & Hein, Nelson (2000). *Modelagem matemática no ensino* [Teaching mathematical modelling]. São Paulo, Brasil: Editora Contexto.

Cross, M., & Moscardini, A. O. (1985). *Learning the art of mathematical modelling*. West Sussex, England: Ellis Horwood Limited.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *5*(1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática* [Ethnomathematics]. São Paulo, Brasil: Editora Ática.

D'Ambrosio, U (1993*). Etnomatemática*: um programa [Ethomathematics: a program]. *A Educação Matemática em Revista*, *1*(1), 5-11.

D'Ambrosio, U. (1997). Foreword. In: Powell, A. B., & Frankenstein, M. (Eds.). Ethnomathematics: *challenging Eurocentrism in mathematics education* (pp. xv-xxi). New York, NY: State University of New York Press.

D'Ambrosio, U. (1998). Introduction: ethnomathematics and its first international congress. *ZDM*, 31(2), 50-53.

D'Ambrosio, U. (2000). Etnomatemática e modelagem [Ethnomathematics and modelling]. In. Domite, M. C. (Ed.). *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1* (pp. 142). São Paulo: FE-USP.

D'Ambrosio, U. (2002). Prefácio [Forward]. In Bassanezi, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* (pp. 8-9) [Teaching and learning with mathematical modelling]. São Paulo, Brasil: Editora Contexto.

D'Ambrosio, U. (2006). The program ethnomathematics: A theoretical basis of the dynamics of intracultural encounters. *The Journal of Mathematics and Culture, 1*(1), 1-7.

Eglash, R. (1997). When math worlds collide: Intention and invention in ethnomathematics. *Science, Technology & Human Values*, *22*(1), 79-97.

Eglash, R. (1999). *African fractals*: modern computing and indigenous design. New Brunswick, NJ: Rutgers University Press.

Ferreira, E. S. (2004). Os índios Waimiri-Atroari e a etnomatemática [The indigenous people Waimiri-Atroari and ethnomathematics]. In Knijnik, G.; Wanderer, F., Oliveira. C. J. (Eds.). *Etnomatemática*: currículo e formação de professores (pp. 70-88) [Ethnomathematics: curriculum and teacher's education]. Santa Cruz do Sul, RS: EDUNISC.

Hodgson, T., & Harpster, D. (1997). Looking back in mathematical modelling: classroom observations and instructional strategies. *School Science & Mathematics*, *97*(5), 260-267.

Huntington, S. P. (1993). The clash of civilizations? *Foreign Affairs*, *72*(3), 22-49.

Orey, D. C. (2000). The ethnomathematics of the Sioux tipi and cone. In Selin, H. (Ed.). *Mathematics across culture*: the history of non-western mathematics (pp. 239-252). Dordrecht, The Netherlands: Kulwer Academic Publishers.

Orey, D. C., & Rosa, M. (2007). POP: a study of the ethnomathematics of globalization using the sacred Mayan mat pattern. In Atweb, B.; Barton, A. C.; Borba, M. C.; Gough, N.; Keitel, C.; Vistro-Yu, C.; Vithal, R. (Eds.). *Internacionalisation and globalisation in mathematics and science education* (pp. 227-235). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Powell, A. B. & Frankenstein, M. (1997). Introduction. In Powell, A. B., & Frankenstein, M. (Eds.). *Ethnomathematics*: challenging Eurocentrism in mathematics education (pp. 1-4). New York, NY: State University of New York Press.

Rios, D. P. (2000). Primero etnogeometría para seguir con etnomatemática [First ethnogeometry to follow with ethnomathematics]. In. Domite, M. C. (Ed.). *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1* (pp. 367-375). São Paulo, Brasil: FE-USP.

Rosa, M. (2000). *From reality to mathematical modelling*: a proposal for using ethnomathematical knowledge. Master thesis, California State University, Sacramento. Publication No. R7880 2000. Sacramento, CA: CSUS.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2003). Vinho e queijo: etnomatemática e modelagem! [Wine and cheese: Ethnomathematics and modelling!]. *BOLEMA*, *16*(20), 1-16.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delinenando-se um caminho para a ação pedagógica [Current approaches in the ethnomathematics as a program: delineating a path toward pedagogical action]. *BOLEMA*, *19*(26), 19-48, 2006.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2007). Cultural assertions and challenges towards pedagogical action of an ethnomathematics *program. For the Learning of Mathematics*, *27*(1), 10-16.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2010). Ethnomodeling: An ethnomathematical holistic tool. *Academic Exchange Quarterly*, *14*(3), 191-195.

Rosa, M., & Clark, D. (2013). Ethnomodelling as a methodology for ethnomathematics. In G. A. Stillman, K. Gabriele, W. Blum, & J. P. Brown (Eds.). *Teaching mathematical modelling*: connecting to research and practice (pp. 77-88). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A Cultural Approach to Mathematical Modelling: An Ethnomathematical Perspective

Daniel Clark **Orey**
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
oreydc@gmail.com

Milton **Rosa**
Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
milton.rosa@ufop.edu.br

Abstract

A major problem with mathematics education in contemporary society is its overwhelming bias towards a Western orientation in its topics and research paradigm. A search for new approaches and methodologies is necessary to record historical forms of mathematical ideas that occur in different cultural contexts, and to take advantage of the emerging globalization of business, science, religion, art, music and other aspects of culture. There is a need to apply a fundamentally different philosophy, modelling techniques, and an ethnomathematical perspective to mathematics curriculum. In this article, the authors propose to demonstrate how ethnomodelling is a methodology for teaching and learning of mathematics that challenges the prevailing way of thinking.

Keywords: cultural groups, ethnomathematics, ethnomodelling, modelling.

Initial Considerations

Throughout history, people have explored other cultures and shared knowledge often hidden within their traditions, practices, and customs. This exchange of cultural capital[1] has enriched and equalized all cultures. The Greek foundations of European civilization are themselves

[1]Cultural Capital is the knowledge, experiences, and connections that individuals have had through the course of their lives, which enables them to succeed more than individuals from a less experienced background. It also acts as a social relation within a system of exchange that includes the accumulated cultural knowledge that confers power and status to the individuals who possess it.

founded upon the Egyptian civilization (Powell & Frankenstein, 1997). One consequence of this is a widespread consensus towards the supremacy of Western scientific and logical systems at the exclusion of all other traditions.

In mathematics, as in other academic disciplines, the literature, methods of problem solving, and teaching materials are all based on the traditions of written sciences, and with very few exceptions, by Western academics. Most examples used in the teaching of mathematics are derived from European-based cultures. These same problem-solving methods mainly rely on the European view on mathematics. It goes without saying that culture and society considerably affect the way individuals understand concepts of any mathematical ideas and practices. It means that, this interaction may leave out a significant amount of knowledge in its cultural forms (D'Ambrosio, 1990).

Observing this, D'Ambrosio stated that the "culture of a group results from the fraction of reality that is reachable by the group" (D'Ambrosio, 2006, p. 5). However, the multiplicity of cultures, each one with a system of shared knowledge and a compatible set of behavior and values facilitates cultural dynamics by enabling an expanding familiarity with the rich diversity of humanity. This creates an important need for a field of research that studies the phenomena and applications of modelling in diverse cultural settings.

This kind of cultural perspective can be used in problem solving methods, numerous conceptual categories, structures and models that we use to represent and manipulate data translates as forms of cultural mathematical practices specifically the modelling processes referred to as *ethnomodelling* (Bassanezi, 2002, D'Ambrosio, 1993; D'Ambrosio, 2002; Rosa & Orey, 2006). It also recognizes how the foundations of ethnomodelling differs from the traditional modelling methodologies

Ethnomathematics and Modelling

Historically, models that arise from reality have been the first paths that have provided numerous abstractions of mathematical concepts. Ethnomathematics uses the manipulations of models taken from reality. Modelling as a strategy of mathematical education incorporates the codifications provided by others in place of a formal language of academic mathematics. According to this context, mathematical modelling is a methodology that is closer to an ethnomathematics program (Bassanezi, 2002; D'Ambrosio, 1993; Rosa & Orey, 2003) and it is defined as the intersection between cultural anthropology and institutional mathematics, and utilizes mathematical modelling to interpret, analyze, explain, and solve real world problems (D'Ambrosio, 1993; Rosa, 2000; Rosa & Orey, 2003).

Investigations in modelling have been found to be useful in the translation of ethnomathematical contexts by numerous scholars in Latin America (Bassanezi, 2002; Biembengut, 2000; D'Ambrosio, 1993; Ferreira, 2004; Orey & Rosa, 2007; Rios, 2000; Rosa & Orey, 2003). In order to document and study diverse mathematical practices and ideas found in many traditions, modelling has become an important tool used to describe and solve problems arising from cultural, economic, political, social, environmental contexts and brings with it numerous advantages to the learning of mathematics (Barbosa, 1997; Bassanezi, 2002; Bernardo & Morris, 1994; Biembengut & Hein, 2000; Cross & Moscardini, 1985; Hodgson & Harpster, 1997; Orey, 2000; Rosa, 2000; Rosa & Orey, 2003).

At the same time, outside of the community of ethnomathematics researchers, it is known that many scientists search for mathematical models that translate their deepening understanding of both real-world situations and diverse cultural contexts. This enables them to take social, economic, political, and environmental positions in relationship to the objects of the study (Bassanezi, 2002; D'Ambrosio, 1993; D'Ambrosio, 2002; Rosa & Orey, 2006). Ethnomodelling is a process of elaboration of problems and questions that have grown from a real situation (system). It forms an image, or sense of, an idealized version of *mathema*[2]. This perspective essentially forms a critical analysis for the generation and production of knowledge (creativity), and forms the intellectual process for its production, including the social mechanisms for the institutionalization of knowledge (academics), and its transmission (education). D'Ambrosio (2000) affirmed that "this process is modelling" (p. 142).

In this perspective, by analyzing their role in reality as a whole, this holistic context allows those engaged in the process of modelling to study systems of reality in which there is an equal effort made to create an understand of the components of the system as well as their interrelationships (Bassanezi, 2002, D'Ambrosio, 1993). By having started with a social or reality-based context, the use of modelling as a tool begins with the knowledge of the student by developing their capacity to assess the process of elaborating a mathematical model in its different applications and contexts (D'Ambrosio, 2000). This uses the reality and interests of the students, versus the traditional model of instruction, which makes use of external values and curriculum without context or meaning.

For example, Bassanezi (2002) has characterized this process as "ethno/modelling" (p. 208) and defines ethnomathematics as "the mathematics practiced and elaborated by different cultural groups and involves the mathematical practices that are present in diverse situations in the daily lives of members of these diverse groups" (p. 208). This interpretation is based on D'Ambrosio's (1990) trinomial: *Reality – Individual – Action* (Figure 1).

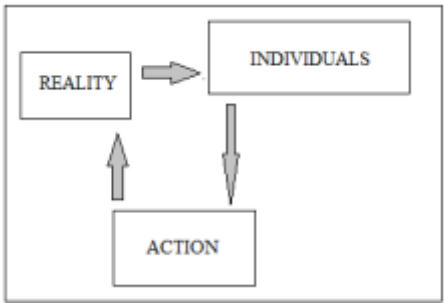


Figure 1: D'Ambrosio's trinomial

For example, D'Ambrosio (2006) affirmed that the "discourse above was about one individual. But there are many other individuals in varied contexts going through a similar

[2]According to D'Ambrosio (1990), mathema may be considered as the actions taken by people from distinct cultural groups to explain and understand the world around them. In other words, they have to manage and cope with their own reality in order to survive and transcend. Throughout the history of mankind, *technés (or tics)* of *mathema* have been developed in very different and diversified cultural environments, that is, in the diverse *ethnos*. Thus, in order to satisfy the drives towards survival and transcendence, human beings have developed and continue to develop, in every new experience and in diverse cultural environments, their own ethnomathematics.

process. For living individuals, the cycle is the same: ... → reality → individual → action → reality → individual → action → ...” (p. 5).

In this context, D’Ambrosio (2006) also states that the “individual agents permanently receive information and process it and perform an action. But although immersed in the same global reality, the mechanisms used to receive information of individual agents are different” (p. 5). In other words, it is crucial to highlight how individuals capture and process information in diverse ways and, consequently, their different actions. Thus, students learn to construct their own connections between both traditional and non-traditional learning settings, it becomes necessary to translate and/or interpret ethnomathematical knowledge into systemized mathematics.

Ethnomodelling

The etymology of the prefix *ethno* traces back to the Greek word *ethnos* relating to a *people*, a *nation* or a *cultural* group in the broadest sense. In the context of ethnomodelling, *ethno* does not refer to any specific race or people only, but also to interesting differences between cultural groups. These differences may include those based on racial oppression or nationality, but are mainly based on language, history, religion, customs, institutions, and on the subjective self-identification of a people. In so doing, *ethno* represents particularity and modelling universality and the combination of the specific and the universal leads to a mathematical activity that takes place within a culture.

The patron goddess of practical knowledge in ancient Greece was *Techné*, whose name forms the base for the words *technique* and *technology*. As well the Greek word for art is *techné* and the Greek word *tikein*, which means to create, is also derived from *techné*. Thus, *techné* is a form of practical knowledge that results in productive action. These mythic modes of knowledge are considered as practical knowledge that results in productive action.

This etymology reveals a deep connection between technology and the practices of living and creating. It represents relationships between humanity and the creation of all forms of technology, and how this might serve as a guide to scientists and educators to develop a moral and cultural standard for the teaching and learning mathematics. This is one of the most important purposes of ethnomodelling. Ethnomodelling binds contemporary views in ethnomathematics. It is an attempt at decolonizing previous ethnomathematics and related research by encouraging the voice of those once studies from the outside. It recognizes the need for a culturally-based view on modelling concepts and processes.

Studying the unique cultural differences in mathematics encourages the development of new perspectives on the scientific questioning methods. Research of culturally bound modelling ideas may address the problem of mathematics education in non-Western societies by bringing the local cultural aspects into mathematical teaching and learning processes (Eglash, 1999). This perspective is needed in mathematics education.

Therefore, ethnomodelling involves ways in which individuals or groups explain and draw on traditional or curricular mathematical ideas in the course of their problem-solving experiences. In so doing, it is important to not to idealize or label them as *correct* or *appropriate* ways of thinking, but rather to highlight the relationship between cultural groups and the deeply embedded mathematics in their daily activities (Rosa & Orey, 2010).

In this context, Rosa and Orey (2013) state that ethnomodelling is a "practical application of ethnomathematics which adds the cultural perspective and voice of the individual to modelling concepts" (p. 78). This cultural perspective broadens views of modeling because it recognizes it as a potential pedagogical bridge for students in their learning of mathematics (Bassanezi, 2002; D'Ambrosio, 2002). Hence, ethnomodelling brings an "inclusion of a diversity of ideas brought by students from other cultural groups can give confidence and dignity to students, while allowing them to see a variety of perspectives and provide a base for learning academic-Western mathematics" (Rosa & Orey, 2013, p. 78).

Ethnomodelling is a tool that responds to its surroundings and is culturally dependent (Bassanezi, 2002; D'Ambrosio, 2002; Rosa & Orey, 2006; Rosa & Orey, 2007). The goal of recognizing ethnomodelling is not to give mathematical ideas and practices of other cultures a Western stamp of approval, but to recognize that they are, and always have been just as valid in the development of mathematics and sciences.

Ethnomodelling studies the ideas of culturally different groups, whether technically advanced. It is necessary to understand how mathematical concepts are born, conceptualized, and adapted into the practices of a society (D'Ambrosio, 1993; Eglash, 1997; Huntington, 1993, Rosa & Orey, 2007). Ethnomodelling does not follow the linear modelling approach that is prevalent in modernity.

Previously, Bassanezi (2002) stated that the ethno/modelling process starts with the social context, reality, and interests of students and not by enforcing a set of external values and decontextualized activities without meaning for the students. This process is defined as the mathematics practiced and elaborated by different cultural groups, which involves the mathematical practices present in diverse situations in the daily lives of diverse group members.

For example, the introduction of the term *mathematization* by D'Ambrosio (1990) set the stage for emerging scholarship in ethnomodelling. This context allowed Rosa and Orey (2006) to state that "mathematization is a process in which individuals from different cultural groups come up with different mathematical tools that help them organize, analyze, comprehend, understand, and solve specific problems located in the context of their real-life situation" (Rosa & Orey 2013, p. 118).

This approach shows that people of different cultures have different views of relations between the nature of spirit and humankind, the individual and the group, the citizen and the state, as well as differing views on the relative importance of rights and responsibilities, liberty and authority, and equality and hierarchy. In addition to these categories, culture is expanded to include also how differing professional groups and age classes function (D'Ambrosio, 1985) as well as social classes and gender.

Culture is defined as the ideations[3], symbols, behaviors, values, knowledge and beliefs that are shared by a community (Banks & Banks, 1993). The essence of a culture is not its

[3]Ideation means to come up with a bright idea that may make a difference to society. A more innovative idea makes a bigger difference in society. Ideation involves both divergent thinking, starting with the known and moving outwards, and convergent thinking, starting with the known and moving inwards. In so doing, ideation is the process of generating innovative ideas and transforming them into valuable outcomes for the well-being of the members of all cultural groups.

artifacts, tools or other tangible cultural elements, but the way the members of the group interpret, use, and perceive them. An artifact may be used in different cultures in very different ways and for very different purposes. Mathematical ideas and practices are good examples of this fact.

Different cultures contribute to the development of mathematical concepts, ideas, and practices, and enrich them in the traditional fields of mathematics. As D'Ambrosio (1997) recognized, the ethnosciences, in this case ethnomathematics; means going back to basics which includes the goals of equity and dignity. Traditional Eurocentric conceptions of science have been imposed globally as the pattern of rational human behavior. Under the control of Western powers, the results of this globalization are far from being acceptable (D'Ambrosio, 1997). The study of ethnomodelling encourages the ethics of respect, solidarity and co-operation across cultures.

Final Considerations

This article outlines ongoing research related to cultural perspectives in mathematical modelling. Contemporary academic mathematics is predominantly Eurocentric and colonial in its spread across the globe. This Eurocentrism facilitates an ongoing divide that has hindered the mathematics coming from non-Western traditions. The motivation towards a cultural approach presents us with an assumption that makes use of cultural perspectives through ethnomathematics and uses mathematical modelling to bring local issues into global discussion, primarily using the voices and perspectives of those who do the math in the context under study.

The authors have suggested a mathematics education that is an active, participatory social product including a dialectic relationship between mathematics and society and is chiefly non-colonial in its approach. Moreover, when presented as a modern or westernized mathematics primarily dominated by the preferences of the West (European-North American), and or done by outsiders imposing their often-unintended bias, it is here that this Eurocentrism poses problems in mathematics education for non-Western cultures.

Ethnomodelling stands for mathematical ideas and practices, which have at its root culture. The immerging study of ethnomodelling is defined as the study of mathematical phenomena within a culture. Ethnomodelling differs from the traditional definition of modelling in that whereas the traditional view considers the foundations of mathematics education as constant and applicable everywhere. The study of ethnomodelling takes the position that mathematics education is a social construction and thus culturally bound, and seriously listens to the voice of those doing the mathematics.

In order to keep up with modern Western developmental models, other cultures have been forced to adapt or perish. Relying primarily on constructivist theories, the authors argue that universal theories of mathematics take different forms in different cultures, and that Western views on the abstract ideas of modelling are culturally bound. Ethnomodelling is considered a powerful tool used in the translation of a problem-situation of mathematical ideas and practices within a culture. These new-found ethnomathematical lenses lead to new findings in the development of an inclusive model of mathematics.

In an increasingly globalized world, educators must find ways in which we can consider accounting the cultural and philosophical background of a society. Ethnomodelling is just one way to do this. Different cultures have different perceptions of time and space, logic, problem

solving methods, society, and values and translating this to our westernized paradigm of thinking is often difficult. Learning to listen to, and then come to a mutual understanding and appreciation of these differences enriches the curriculum and increases understanding between peoples.

The adoption of an ethnomodelling perspective in a mathematics curriculum recognizes the importance of and gives voice to local cultures in the development of mathematics. This pedagogical aspect produces student-researchers who are active participants in their own mathematics education as they learn that they themselves can contribute to the development of mathematics.

References and bibliographies

Banks, J. A. (1993). Multicultural education: characteristics and goals. In: Banks, J. A., & Banks, C. A. M. (Eds.). *Multicultural education*: issues and perspectives (pp: 3-28). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Barbosa, J. C. (1997). O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? [What do teachers think on mathematical modelling?]. *Zetetiké*, *7*(11), 67-85.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* [Teaching and learning with mathematical modelling]. São Paulo, Brasil: Editora Contexto.

Bernardo, M. A., & Morris, J. D. (1994). Transfer effects of a high school computer-programming course on mathematical modelling, procedural. *Journal of Research on Computing in Education*, *26*(4), 523-537.

Biembengut, M. S. (2000). Modelagem & etnomatemática: Pontos (in)comuns [Modelling & ethnomathematics: (Un)common points]. In. Domite, M. C. (Ed.). *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1* (pp. 132-141). São Paulo, Brasil: FE-USP.

Biembengut, M. S., & Hein, Nelson (2000). *Modelagem matemática no ensino* [Teaching mathematical modelling]. São Paulo, Brasil: Editora Contexto.

Cross, M., & Moscardini, A. O. (1985). *Learning the art of mathematical modelling*. West Sussex, England: Ellis Horwood Limited.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *5*(1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática* [Ethnomathematics]. São Paulo, Brasil: Editora Ática.

D'Ambrosio, U (1993*). Etnomatemática*: um programa [Ethomathematics: a program]. *A Educação Matemática em Revista*, *1*(1), 5-11.

D'Ambrosio, U. (1997). Foreword. In: Powell, A. B., & Frankenstein, M. (Eds.). Ethnomathematics: *challenging Eurocentrism in mathematics education* (pp. xv-xxi). New York, NY: State University of New York Press.

D'Ambrosio, U. (1998). Introduction: ethnomathematics and its first international congress. *ZDM*, 31(2), 50-53.

D'Ambrosio, U. (2000). Etnomatemática e modelagem [Ethnomathematics and modelling]. In. Domite, M. C. (Ed.). *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1* (pp. 142). São Paulo: FE-USP.

D'Ambrosio, U. (2002). Prefácio [Forward]. In Bassanezi, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* (pp. 8-9) [Teaching and learning with mathematical modelling]. São Paulo, Brasil: Editora Contexto.

D'Ambrosio, U. (2006). The program ethnomathematics: A theoretical basis of the dynamics of intracultural encounters. *The Journal of Mathematics and Culture, 1*(1), 1-7.

Eglash, R. (1997). When math worlds collide: Intention and invention in ethnomathematics. *Science, Technology & Human Values*, *22*(1), 79-97.

Eglash, R. (1999). *African fractals*: modern computing and indigenous design. New Brunswick, NJ: Rutgers University Press.

Ferreira, E. S. (2004). Os índios Waimiri-Atroari e a etnomatemática [The indigenous people Waimiri-Atroari and ethnomathematics]. In Knijnik, G.; Wanderer, F., Oliveira. C. J. (Eds.). *Etnomatemática*: currículo e formação de professores (pp. 70-88) [Ethnomathematics: curriculum and teacher's education]. Santa Cruz do Sul, RS: EDUNISC.

Hodgson, T., & Harpster, D. (1997). Looking back in mathematical modelling: classroom observations and instructional strategies. *School Science & Mathematics*, *97*(5), 260-267.

Huntington, S. P. (1993). The clash of civilizations? *Foreign Affairs*, *72*(3), 22-49.

Orey, D. C. (2000). The ethnomathematics of the Sioux tipi and cone. In Selin, H. (Ed.). *Mathematics across culture*: the history of non-western mathematics (pp. 239-252). Dordrecht, The Netherlands: Kulwer Academic Publishers.

Orey, D. C., & Rosa, M. (2007). POP: a study of the ethnomathematics of globalization using the sacred Mayan mat pattern. In Atweb, B.; Barton, A. C.; Borba, M. C.; Gough, N.; Keitel, C.; Vistro-Yu, C.; Vithal, R. (Eds.). *Internacionalisation and globalisation in mathematics and science education* (pp. 227-235). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Powell, A. B. & Frankenstein, M. (1997). Introduction. In Powell, A. B., & Frankenstein, M. (Eds.). *Ethnomathematics*: challenging Eurocentrism in mathematics education (pp. 1-4). New York, NY: State University of New York Press.

Rios, D. P. (2000). Primero etnogeometría para seguir con etnomatemática [First ethnogeometry to follow with ethnomathematics]. In. Domite, M. C. (Ed.). *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1* (pp. 367-375). São Paulo, Brasil: FE-USP.

Rosa, M. (2000). *From reality to mathematical modelling*: a proposal for using ethnomathematical knowledge. Master thesis, California State University, Sacramento. Publication No. R7880 2000. Sacramento, CA: CSUS.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2003). Vinho e queijo: etnomatemática e modelagem! [Wine and cheese: Ethnomathematics and modelling!]. *BOLEMA*, *16*(20), 1-16.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delinenando-se um caminho para a ação pedagógica [Current approaches in the ethnomathematics as a program: delineating a path toward pedagogical action]. *BOLEMA*, *19*(26), 19-48, 2006.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2007). Cultural assertions and challenges towards pedagogical action of an ethnomathematics *program. For the Learning of Mathematics*, *27*(1), 10-16.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2010). Ethnomodeling: An ethnomathematical holistic tool. *Academic Exchange Quarterly*, *14*(3), 191-195.

Rosa, M., & Clark, D. (2013). Ethnomodelling as a methodology for ethnomathematics. In G. A. Stillman, K. Gabriele, W. Blum, & J. P. Brown (Eds.). *Teaching mathematical modelling*: connecting to research and practice (pp. 77-88). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O Aluno cego e os registros de representações matemáticas

Elisabete Marcon **Mello**
Universidade Federal do ABC - UFABC
Brasil
elisabete.marcon@ufabc.edu.br

A educação inclusiva requer mudanças na prática do professor, e essa prática é fundamental quando se trabalha com alunos com deficiência visual. Duval (1999) afirma que o uso dos sistemas de representação semiótica para o pensamento matemático é essencial porque, ao contrário dos outros campos do conhecimento, não há nenhuma outra maneira de se ter acesso aos objetos matemáticos a não ser por meio de algumas representações semióticas. Um indivíduo cego acessa as representações semióticas por meio do tato e não da visão. Quando temos acesso à representação semiótica pela visão, temos uma imagem de referência que guiará a criação de nossa imagem mental. Quando o acesso é pelo tato, e o indivíduo é cego, não se tem essa imagem de referência. Nos livros infantis escritos em Braille, podemos observar ilustrações em relevo, às vezes com texturas, que não são reconhecidas pelo cego, pois elas são criadas a partir de uma imagem visual que não é conhecida por ele. Isso acontece também com as representações, em relevo, de sólidos geométricos em perspectiva nos livros de matemática em braile, pois o cego faz o reconhecimento pelo tato, ele observa os contornos da figura, e os contornos de uma figura desenhada no papel não correspondem aos contornos do objeto conhecido por ele.

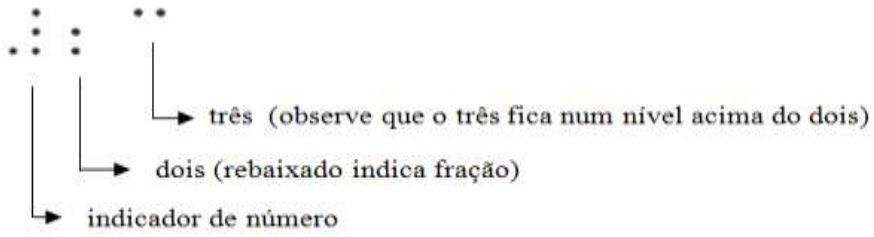
Duval (1995) nos fala da importância das representações para o conhecimento, mas, para o cego as representações têm uma importância ainda maior, pois, sem elas ele não teria acesso a grande parte do mundo que o rodeia e no qual ele está inserido. Por exemplo, criamos a representação de um leão pela imagem que vemos ao olhar para um leão, uma pessoa cega precisará de um modelo de um leão, pra que possa criar uma representação de um leão. Portanto, em muitas situações, entre a representação mental criada por ele e o objeto real haverá um intermediário que é a representação criada por outra pessoa. Da qualidade dessa representação intermediária dependerá a qualidade da representação mental que ele criará.

Na matemática, o uso das representações por alunos cegos requer um cuidado especial. O aluno cego usa um sistema de escrita próprio, diferente do utilizado pelos alunos que enxergam, e isso deve ser considerado em uma sala de aula inclusiva em que haja alunos cegos.

Tomemos por exemplo o ensino das frações. A representação de uma fração requer muita atenção ao ser transcrita para o Sistema Braille. Na escrita a tinta, a representação de uma fração é $\frac{a}{b}$, onde o "a" é o numerador e o "b" é o denominador. É comum os professores dizerem: "o número de cima é o numerador e o de baixo é o denominador". Mas a representação em Braille

não é assim. No Braille há várias formas de representar uma fração, na maioria delas os números estão no mesmo nível, e na representação em que os números estão em níveis diferentes, o número que fica rebaixado é o numerador e o que fica acima é o denominador. Portanto essa fala do professor pode causar um problema para o aluno cego, dificultando sua aprendizagem.

Observe como a fração $\frac{2}{3}$ é escrita em Braille:



Assim como com as frações precisamos ter o cuidado de identificar claramente qual é o numerador e qual o denominador, nas equações exponenciais precisamos deixar claro qual é a base e qual é o expoente da potência. Por exemplo, na equação $5^{x+3} = 25$, quando ditamos "cinco elevado a x mais três igual a vinte e cinco", o aluno cego pode escrever a equação $5^x + 3 = 25$, que é bem diferente da equação inicial. Para evitar esse problema, quando há alunos cegos na sala de aula, podemos escrever o expoente entre parênteses $5^{(x+3)} = 25$ e nos certificar que quem está ditando cite a existência dos parênteses, ou ainda, pedir para o aluno cego ler o que escreveu discriminando quem é a base e quem é o expoente da equação, pois, se houver erros o professor poderá identificá-los e corrigi-los. A comunicação entre professor e aluno cego é primordial para seu aprendizado.

Quando o assunto é logaritmo, podemos constatar outro problema. Quando escrevemos "$\log_3 9$" lemos: "logaritmo de 9 na base 3". Em Braille o aluno escreve a palavra log, depois a base e depois o logaritmando, portanto se ditarmos dessa forma: "log de 9 na base 3", o aluno vai ouvir numa ordem e terá que escrever em outra: "log 3 9". Assim a chance do aluno escrever "log 9 3" (logaritmo de três na base nove) será grande, gerando um erro. O ideal é que o professor dite: "log na base 3 de 9

Ressaltamos que, mesmo sem entender o Braille, é importante que o professor conheça as características da escrita em Braille, para poder contornar esses problemas de comunicação e evitar problemas de aprendizagem, pois abordamos alguns exemplos, mas isso pode se repetir com vários outros conteúdos matemáticos.

Referencias e bibliografia

DUVAL R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels***.** Berne: Peter Lang.

DUVAL R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. *Basic issues for Learning*, 3-25.

MELLO, Elisabete M. (2015). *A visualização de objetos geométricos por alunos cegos*: um estudo sob a ótica de Duval. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O diálogo com estudantes dv's como instrumento formativo para um ensino de matemática inclusivo

Fábio Alexandre **Borges**
Universidade Estadual do Paraná
Brasil
fabioborges.mga@hotmail.com
Tiago **Pereira**
Universidade Estadual do Paraná
Brasil
tiago025pereira@hotmail.com

Resumo

Discutimos aqui alguns aspectos apresentados por estudantes deficientes visuais (dv's) quanto às suas respectivas escolarizações inclusivas, enfocando a disciplina de Matemática. Foram entrevistados quatro sujeitos, atuais acadêmicos no Ensino Superior, por meio de entrevistas semiestruturadas, gravadas em áudio e transcritas na íntegra. Na análise, empregamos os pressupostos da Análise de conteúdo e, para expormos nossos resultados, utilizamos categorias elencadas por meio das convergências existentes nas falas dos entrevistados. As categorias identificadas foram: a diferenciação docente de conteúdos e atividades escolares entre estudantes dv's e videntes; o desconhecimento docente das necessidades educativas do aluno dv; negligências/omissões docentes no ensino de estudantes dv's inclusos quanto aos seus aprendizados; tentativas isoladas de apoio docente como reflexo da falta de um trabalho coletivo escolar mais amplo.

Palavras-chave: Deficiência Visual. Matemática inclusiva. Narrativas de estudantes.

Educação Inclusiva: alguns pressupostos

No decorrer da história, muitos foram os debates e lutas na busca de uma educação escolar que fosse realmente para todos. Esse "todos" modificou-se em decorrência do contexto social e histórico das diferentes épocas, passando a considerar negros, pobres, moradores do campo, indígenas, pessoas com deficiências etc., conforme cada momento histórico, sempre dependendo de um tensionamento causado, em muitos casos, pelos próprios indivíduos e/ou pessoas com algum vínculo, como os familiares.

Após embates travados historicamente, em contraposição à característica antidemocrática que marcou o ambiente escolar brasileiro, surge em meio a diversas críticas um modelo escolar

que compartilha de ideais que almejam uma sociedade cada vez mais igualitária e menos excludente, o modelo educacional inclusivo. A década de 90 foi o período em que se instauraram as principais discussões, em nível mundial, a respeito desse novo modelo de atendimento escolar. Esse é oriundo de radicais mudanças na maneira de organizar a educação especial e tem sua base situada na Declaração Universal dos Direitos Humanos. A inclusão evolui de um modelo educacional, postulado anteriormente, o modelo de integração. Nesse, já é transferida da escola especial para o ensino regular a responsabilidade em educar alunos com deficiências, entretanto, não havia um movimento no sentido de adequar os espaços escolares para esses novos alunos. Já em um modelo inclusivo, busca-se atender, além dos sujeitos com alguma deficiência, todos aqueles discentes que apresentam atrasos ou problemas de aprendizagem durante sua escolarização, alunos com altas habilidades, aprendizes com transtornos globais de desenvolvimento etc. Trata-se de uma mudança de paradigma no ambiente escolar se pensarmos que devemos retirar o foco do sujeito, o "deficiente", e passá-lo para o ambiente que o receberá.

Atender a esse número maior de alunos é um desafio para o qual poucas escolas assumem-se aptas, visto que, fornecer um atendimento satisfatório nesses casos, implica na disposição de profissionais preparados para atender esses alunos, conhecimento de materiais de apoio, infraestrutura adequada e demais condições que favoreçam uma participação ativa desses sujeitos em todas as atividades realizadas, para que assim possam ser realmente inclusos no ambiente escolar e não apenas inseridos.

Ainda que já tenhamos legislações que garantam a inclusão de sujeitos de grupos minoritários, a realidade mostra ainda professores inseguros em como abordar determinados conteúdos com alunos dv's, desinstrumentalizados de metodologias e materiais para utilizar em sala e alguns até mesmo negligentes às necessidades específicas desses alunos, que consideram a falta da visão um empecilho instransponível para o desenvolvimento matemático. Essa situação agrava-se ainda mais se levado em consideração o fato pontuado por Borges e Nogueira (2018, p. 40), que afirmam que "a educação brasileira tem impelido os professores que já estão atuando a buscar por conhecimentos sobre como agir pedagogicamente com estudantes cegos, surdos, cadeirantes, com altas habilidades, transtornos globais etc.".

Sabemos que há diversos documentos em favor de uma educação de qualidade para todos, mas esperar que apenas esses documentos resultem em ações efetivas de inclusão é de certa forma ingênuo. Um passo importante para assegurar o direito desses partícipes é dialogar com outros dv's que já vivenciaram situações semelhantes e sabem de suas reais necessidades em se tratando do seu processo de escolarização. Eles podem auxiliar-nos em relação às adaptações necessárias e/ou suficientes ao seu aprendizado, potencializando práticas de ensino e ajudando a garantir cada vez mais uma inclusão educacional adequada, ou seja, que focalize as questões do ensino e da aprendizagem, e não apenas o respeito à legislação.

Uma das possibilidades de se contribuir com o processo de inclusão de alunos dv's e conhecer elementos necessários no processo formativo desses sujeitos é por meio de investigações que partam das experiências de outros dv's que já passaram por essa escolarização inicial como alunos inclusos. Eles podem relatar-nos quais foram suas principais dificuldades, quais caminhos apontam para superá-las, que meios são capazes de potencializar os processos de ensino e aprendizagem e pelo que ansiavam enquanto alunos inclusos em redes regulares de ensino, dentre outras ponderações que considerem importantes.

O diálogo deve ser ampliado como ferramenta metodológica na organização da escola,

especialmente a inclusiva, envolvendo os mais diversos atores, incluindo os estudantes. Buscamos, assim, fortalecer as ideias defendidas por Marcone (2018) em prol da abertura de espaços para que as pessoas com deficiência adentrem e participem da construção de uma educação que os receba – mas nunca fale em nome deles – uma educação que aprenda a ouvir e a viver a complexidade das diferenças.

Quando nos propomos a discutir o ensino de matemática para alunos dv's, por meio do relato dos próprios sujeitos a quem se destinam as adaptações, estamos refletindo não somente o ensino de matemática para dv's, mas para todos os alunos, visto que, tanto discentes dv's como videntes comungam de obstáculos que são recorrentes à matemática e que não se manifestam apenas em um grupo. Desse modo, investigar maneiras de propor práticas inclusivas que abarquem as necessidades individuais do discente dv, mas que, ao mesmo tempo, estendam-se também para todos os alunos, torna-se necessário, afinal, acreditamos que incluir esse aluno é sinônimo de disponibilizar a participação no debate acerca dos mesmos conhecimentos. Além disso, entendemos que essa atitude desenvolva em todos os alunos o respeito e a solidariedade em relação aos seus colegas com maiores dificuldades.

Ainda no que diz respeito ao ensino de Matemática, entendemos que a Educação Matemática Inclusiva favorece um movimento de tensão nos projetos formativos ao exigir reflexões acerca de vários aspectos, dentre eles: Que materiais didáticos são mais adequados para a maioria dos sujeitos? Que matemática(s) precisa(m) ser veiculada(s) atualmente? Quem são nossos estudantes? Qual o papel da linguagem no ensino de Matemática? Que tipos de representações matemáticas são mais adequadas para os diferentes sujeitos? Em que medida nossas avaliações de aprendizagem estão em acordo com os pressupostos inclusivos?

Procedimentos metodológicos

Apresentamos aqui uma pesquisa realizada com quatro sujeitos dv's, escolarizados em ambientes inclusivos, buscando discutir alguns dos aspectos levantados por esses estudantes acerca de suas escolarizações e os processos ensino e aprendizagem, especialmente na disciplina de Matemática. Os quatro alunos entrevistados frequentaram todo seu Ensino Fundamental e Ensino Médio na condição de discentes inclusos em redes regulares de ensino. USA é do gênero feminino, tinha 24 anos, cursava Letras Português-Inglês e é cega. USB é do gênero masculino, tinha 22 anos, cursava Ciências da Computação e é cego. USC é do gênero masculino, tinha 20 anos, também cursava Ciências da Computação e apresentava baixa visão, com perda degenerativa. USD é do gênero feminino, tinha 39 anos, cursava Letras Português e é cega.

Para a coleta dos dados, elaboramos um roteiro de entrevista semiestruturado constituído por oito (08) questões. Essas indagações versavam a respeito das concepções dos sujeitos, seu processo de escolarização, questões relacionadas à inclusão, dificuldades no aprendizado, especialmente com a disciplina de matemática etc. As entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas na íntegra. Após a coleta de dados, utilizamos da Análise de Conteúdo de Moraes (1999) para o tratamento dos dados. Após as leituras das entrevistas, realizamos o processo de unitarização (Moraes, 1999), que implica dividir as transcrições em unidades de significado, que são fragmentos das falas dos entrevistados, dos quais se pretende perceber sentidos menores, implícitos no discurso dos sujeitos.

Feito o estabelecimento das unidades de significado, iniciamos a determinação das categorias, definidas por Moraes (1999) como o momento de comparações constantes entre as unidades de significado, possibilitando o agrupamento das unidades que apresentam teor

semelhante. Na sequência, trazemos a análise de apenas 3 (três) das 4 (quatro) categorias, considerando o espaço limitado para o presente texto.

Análise das categorias

a) A diferenciação docente de conteúdos e atividades escolares entre estudantes dv's e videntes

Nas narrativas por nós observadas, notamos uma diferenciação de conteúdos feita de modo prejudicial à escolarização do dv, isto é, trabalham-se conteúdos e atividades diferentes entre esses grupos de alunos, de modo que as abordadas com esses estudantes são de nível inadequado às séries escolares em que estão matriculados, o que não ocorre com os aprendizes videntes das mesmas turmas.

De nossas análises e leituras, destacamos dois principais obstáculos que levam à diferenciação de conteúdos e tarefas escolares entre dv's e videntes: as barreiras atitudinais e as barreiras pedagógicas . As barreiras atitudinais referem-se aos pré-conceitos que os docentes apresentam sobre a deficiência visual e o discente dv, muitas vezes já limitando o que o aluno pode ou não aprender, antes mesmo de ter um contato com o aprendiz. Essa barreira está fortemente presente no discurso do sujeito A, que, durante seu processo de escolarização, vivenciou conteúdos que foram passados aos demais e a ela não. "USA.21 - eles só davam continha de menos e de mais." e "USA.32 - geometria os outros tiveram e eu não tive". Também com os sujeitos B e C notamos situações semelhantes: "USB.17 - já tive caso de professores [...] que não aceitavam [...] que eu permanecesse em laboratório" e "USC. 37 - exercícios do tipo, esboce o gráfico [...], a adaptação que eles faziam era de eu não fazer essa questão".

É comum a nós, seres humanos, diante da presença de uma determinada deficiência, enfocarmos mais as impossibilidades em detrimento das possibilidades, entretanto, as impossibilidades não se apresentam como material de reflexão acerca do que nós podemos fazer para melhorar a qualidade de ensino desses estudantes, sendo que apenas as possibilidades nos delinearão caminhos possíveis. Focalizando especificamente a deficiência visual, Costa, Neves e Barone (2006) apontam que a incompreensão do impacto dessa patologia acerca do educando faz com que a escola desconsidere seu próprio referencial perceptual no ato da educação (Costa, Neves & Barone, 2006, p.151).

Existem outros diversos fatores que também contribuem para a manutenção desse quadro de diferenciação de conteúdos, como o despreparo docente, a falta de comunicação entre educador especial e professor da sala comum, a carência de materiais manipuláveis disponíveis nas escolas, o desconhecimento de tecnologias assistivas por parte dos docentes etc. E a esses fatores, denominamos barreiras pedagógicas. O despreparo dos professores é um aspecto recorrente na fala dos entrevistados e a manutenção desse quadro se deve em parte à formação docente que não contemplou discussões que abarcassem essa temática. Nas palavras do sujeito B: "USB.73 - os professores não estão preparados", "USB.90 - Não recebi apoio da questão tecnológica de ninguém". Mello (2013) destaca a necessidade urgente de se discutir o que deve ser abordado nos cursos de formação de professores, para que os novos profissionais, ao se depararem com alunos dv's em suas turmas, saibam como agir e não se guiem apenas pela intuição, criando situações de tentativa e erro que podem prejudicar os alunos.

Ainda focalizando possíveis fatores que levam à diferenciação de conteúdos, temos a falta de comunicação entre o professor da sala de aula regular e o educador especial como um possível

empecilho. Carlos, Vilaronga e Tonon (2012) relatam acerca da dificuldade de se trabalhar em equipe, o que exige mudanças na cultura da escola e o entendimento de que os alunos, principalmente os que têm necessidades educacionais especiais, não são "meus" ou "seus", mas alunos da escola; assim, as adaptações devem ser pensadas em conjunto. Em consonância com os autores, acreditamos que o trabalho colaborativo entre professor do ensino regular e educador especial tende a potencializar os processos de ensino e aprendizagem, visto que, partindo do pressuposto que um possui formação específica para a Matemática e outro para as necessidades especiais do aluno, o contato entre ambos pode fornecer adaptações curriculares pertinentes ao ensino e facilitar também o processo de avaliação da aprendizagem.

b) O desconhecimento docente das necessidades educativas do aluno dv

Apresentaremos aqui três pontos de desconhecimento que são relatados pelos entrevistados. O primeiro ponto abarca o desconhecimento de que escolhas por atividades com apelo visual tendem a potencializar as dificuldades de exploração e compreensão de determinados conceitos por alunos dv's. Tarefas estritamente visuais, que trabalham principalmente com a linguagem figural e a interpretação de desenhos e esquemas, são bastante difíceis para os discentes cegos, como aponta o sujeito B: "USB.81 – [...] só que ai o professor vai lá e quer fazer o mesmo desenho que ele fez para todo mundo ali, cara eu não aprendi a interpretar desenho". Ressalta-se aqui que não há, do ponto de vista cognitivo, diferenças entre o estudante dv e o vidente. O que existe é uma diferença no meio pelo qual o estudante irá apreender as informações.

As implicações da docência demandam uma figura polivalente frente à tarefa de atuar nos processos de ensino e aprendizagem nas salas de aula, buscando práticas que tornem menos explícitas as deficiências do aluno com necessidades educacionais específicas e propiciem situações de aprendizado, não "deficientizando" esse sujeito. Em outras palavras, se há um aluno dv em uma sala de aula inclusiva, a adoção somente de atividades com exploração visual tende a explicitar as dificuldades desse discente e aumentar a distância entre a possibilidade de aprendizado desse em relação aos demais sujeitos que apreendem pelo visual.

Um recurso necessário para driblar as dificuldades advindas da ausência da visão são os materiais manipuláveis, sendo que o desconhecimento desses materiais e de sua necessidade no ensino de matemática para dv's caracterizam o segundo ponto identificado. Sujeitos cegos congênitos, por exemplo, dependem de materiais manipuláveis para a exploração e a visualização, visto que esses não possuem memória visual, por isso a formação da imagem mental se dá principalmente pelo sistema háptico (Miranda & Baraldi, 2018, p. 97).

Gostaríamos de destacar a importância dos materiais manipuláveis na escolarização de todos os estudantes, independentemente da acuidade visual que possuam. Em geral, esses materiais possibilitam o tocar, sentir, manipular, testar e movimentar, que tendem a ajudar na compreensão de conceitos, ideias e propriedades, amenizando o enfoque no caráter de abstração matemática. Sarmento (2010) pontua algumas das vantagens para a aprendizagem que os materiais manipuláveis propiciam, tais como: motivação à investigação, que é atribuída ao aspecto lúdico; desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com colegas e com professor; contribuição com a descoberta e redescoberta das relações matemáticas subjacentes em cada material etc.

Os sujeitos entrevistados corroboram a importância que tiveram esses materiais em sua escolarização e fazem apontamentos indicando a necessidade do uso mais frequente desses:

"USB.43 - algumas partes da matemática, é praticamente impossível navegar sem algum tipo de adaptação, eu puxaria a geometria por exemplo", "USC. 45 - nas disciplinas de geometria, por mais que o professor descrevesse [...], ficava muito a cargo da minha própria abstração" e "USD. 31 - os laboratórios não tinham nada [...] em alto relevo para a gente poder perceber".

O terceiro ponto engloba dois fatores interligados: o desconhecimento docente das diferenças entre a escrita braile e a escrita a tinta e o despreparo dos professores para fornecer aos alunos dv's meios de registrar as simbologias e cálculos matemáticos. As diferenças entre a escrita a tinta e a escrita braile são retratadas pelo sujeito D como um possível meio que influía na dificuldade de relação dela com os demais alunos: "USD. 17 - o jeito do pessoal escrever a tinta [...] é outro". Essas diferenças na escrita são estudadas por Mello (2013) e, segunda ela, refletem na criação de obstáculos didáticos alimentados por docentes que compartilham de diversos jargões válidos na escrita a tinta, mas que, quando transpostos para o braile, tornam-se errôneos . Acreditamos que o diálogo entre professor e aluno é uma possibilidade de amenizar os problemas causados pelas diferenças entre as escritas. Tendo em vista que a ampla maioria dos professores de matemática do ensino regular não tem o domínio do braile, é necessário que o discente seja sempre estimulado a falar sobre sua resolução e resposta para que o professor consiga acompanhar as ideias do aluno em sala, favorecendo também a participação desse nas atividades escolares e o estimulando no desenvolvimento de sua autonomia.

O despreparo dos professores para fornecer aos alunos dv's meios de registrar as simbologias e cálculos matemáticos é outro desconhecimento elencado nessa categoria. Acontecem casos de alunos que estão inclusos em redes regulares de ensino, mas que não realizam nenhum registro durante as aulas, apenas encontram-se ali inseridos. Miranda e Baraldi (2018) retratam o caso de um aluno cego, matriculado na oitava série do Ensino Fundamental em 2016, que não realizava quaisquer tipos de registros durantes as aulas de matemática, atuando apenas como espectador.

Desconhecimentos semelhantes são retratados pelos sujeitos B e C. Ambos vivenciaram situações em que seus professores não conheciam meios de realizar os registros matemáticos, apelando para o recurso Equation Editor do Software Microsoft Word que apresenta diversas limitações, tais como uma gama limitada de registros, incompatibilidade com sistemas de leitura de voz etc. Ao iniciarem o Ensino Superior, cursando Ciências da Computação, foram apresentados ao programa de diagramação LaTex que, segundo eles, é um meio eficiente e ágil para se registrar textos matemáticos e que permite uma interação com o Dosvox na leitura dos registros. Nas palavras do sujeito C: "USC. 69 - bom, se eu soubesse da existência do LaTeX no meu Ensino Médio teria sido muito mais fácil. Há que se ponderar que, por se tratarem de estudantes de cursos superiores em tecnologias, a facilidade com o uso do LaTeX é maior do que com relação a estudantes da Educação Básica.

c) Tentativas isoladas de apoio docente como reflexo da falta de um trabalho coletivo escolar mais amplo

Esta última categoria reúne situações que versam acerca de condutas diferenciadas e positivas, por parte dos professores, em prol do aprendizado dos alunos dv's. Essas ações reúnem flexibilizações nas formas de ensinar e avaliar os alunos, conhecimentos de tecnologias assistivas para auxiliar os discentes e, especialmente, o ato de se mostrar disposto a dialogar com o estudante, conhecendo a melhor maneira que cada um aprende. Atitudes assim, ainda não são a norma, mas a exceção, partindo de professores que destinam um olhar cuidadoso para as

diversidades dos alunos e tornando-os figuras de referência positiva para os entrevistados.

Destacamos uma fala do sujeito B sobre uma professora do Ensino Superior, que acolheu a sugestão dada por ele e permitiu à sua turma utilizar em uma avaliação um algoritmo computacional para o cálculo de matrizes, mostrando-se preocupada com a compreensão do conceito e não apenas com a resolução, a qual implica em um processo repetitivo e especialmente difícil para o sujeito cego. Nas palavras do sujeito: "USB.55: seria muito mais fácil se tivesse um programa para calcular (multiplicação entre matrizes) [...], ela respondeu: "se você fizer eu deixo você usar". Além dessa situação, reconhecemos as atitudes da professora de biologia da entrevista do Sujeito A, que dedica-se ao aprendizado de sua aluna, destinando tempo extra para auxiliá-la em contraturno: "USA.15 – ela tirava horas que ela estava sozinha, para tirar eu da sala para conversar, ver no que eu tinha dúvida, então ela foi a que mais me ajudou sabe", "USA.41 - eu ia lá (laboratório de biologia) e a professora dava os objetos na minha mão".

Quando enfocamos as falas do sujeito C, retoma-se a questão do programa de diagramação LaTeX. Segundo ele, o conhecimento docente dessa tecnologia propiciou uma forma mais eficaz dele realizar os registros matemáticos, se comparado ao Equation Editor do Microsoft Word: "USC.76 – ele (professor de cálculo I) foi me ajudando, passou uns documentos de exemplo, aí eu fui pesquisando, tanto que a minha primeira prova [...], eu já fiz no LaTeX". Vemos a importância de se conhecer tais tecnologias, mas, mais importante que isso, mostrar-se disposto a buscá-las frente às necessidades dos alunos, compondo aos poucos um conjunto de recursos pluralísticos, teorias pedagógicas e técnicas didáticas, pois, assim, o professor tem a oportunidade de oferecer a metodologia mais adequada ao aluno.

Fabrício, Souza e Gomes (2007), ao discutirem um possível perfil do professor inclusivo, destacam a figura de um "eterno aprendiz" que busca se informar sobre as diversas áreas de atividades humanas, possibilitando maiores chances de articulação entre essas áreas e, concomitantemente, uma constante revisão interna do próprio conhecimento. Desse modo, teremos professores sempre mais dispostos a ouvir, entender e desenvolver as informações trazidas pelo aluno, ainda que sejam desconhecidas pelo docente. Tal perfil faz com que o professor saia de uma postura tradicional, marcada por elementos de autoritarismo em que o aluno é expectador das aulas, passando para um novo perfil que se ajusta melhor às diversidades humanas. Nesse perfil, destacamos alguns fazeres docentes que, acreditamos, enriquecem ainda mais as práticas do professor inclusivo, que são: cuidadoso olhar para as avaliações dos alunos; compartilhar com seus pares suas experiências, estando disposto à troca e construção de novas práticas; mostrar-se humilde e consciente de que há muito ainda que se aprender; despir-se de algumas crenças, valores, concepções e pré-conceitos que imperam em suas práticas e os tornam "cegos" mediante o real aluno presente em sala; saber lidar com frustrações para casos em que expectativas pessoais não são atendidas etc.

À guisa de conclusão

As categorias por nós levantadas em geral versam a respeito da incompreensão pelos docentes tanto da deficiência visual quanto do estudante dv, influenciando nos posicionamentos assumidos pelos professores em sala de aula. Sendo assim, trazemos um enfoque pautado no professor, que, como dito, possui um papel fundamental como agente no processo de inclusão escolar. Gostaríamos de pontuar que, apesar de nossas discussões em muitos momentos terem problematizado acerca do despreparo desse profissional, enfatizando sua responsabilidade social, a ele não deve ser atribuída a culpa pelo insucesso escolar. A comunidade escolar e as

universidades devem discutir mais o assunto e promover mais ações de formação e conscientização dos profissionais e alunos com vistas às atitudes mais inclusivas.

A descaracterização do sujeito real presente em sala, tomada por estereótipos e representações sociais que estruturam uma imagem concebida a deficientes visuais, é um dos empecilhos que mais nos chamam atenção nessa categorização. Acreditamos que essas convenções sociais (im)postas devem ser desconstruídas, visto que essas trazem consigo uma herança discriminatória que muitas vezes não dá chance para reflexão e informação, pois, foram arquitetadas e reforçadas em pilares históricos, religiosos e, principalmente, supersticiosos.

A inclusão não deve ser encarada como uma mera inserção do aluno em uma sala de aula regular ou tampouco buscando técnicas e práticas para ele alcançar um padrão estabelecido. A Inclusão escolar, a nosso ver, busca o respeito às características e singularidades desse aprendiz, considerando-as nas tarefas realizadas no meio em que o aluno está incluso, assim como se espera dos sujeitos ditos "normais". Concluímos ressaltando nossa crença em trabalhos que investigam as experiências de ex-alunos dv's, ex-alunos surdos, ex-alunos com transtornos globais de desenvolvimento, enfim, todos aqueles que se propõem a dar voz a esses sujeitos e a discutir com eles – e não por eles - as adaptações a serem pensadas, indicando possíveis caminhos rumo à inclusão de todos os alunos em uma educação de qualidade.

Referências

BORGES, F. A.; NOGUEIRA, C. M. I. (2018). Saberes docentes e o ensino de matemática para surdos: desencadeando discussões. In: Rosa, F. M. C.; BARALDI, I. M. *Educação Matemática Inclusiva*: estudos e percepções. Campinas, SP: Mercado das letras, cap. 2, p.37-62.

CARLOS, D. L.; TONON, S.; VILARONGA, C. A. R. (2012). Adaptações para o aluno com NEE: colaboração entre especialista e professores da sala comum In: Congresso Brasileiro de Educação Especial, V., 2012, Universidade Federal de São Carlos. *Anais eletrônicos*... São Carlos: UFSCar. p. 2233-2245.

COSTA, L. G.; NEVES, M. C. D.; BARONE, D. A. C. (2006). O ensino de física para deficientes visuais a partir de uma perspectiva fenomenológica. *Revista Ciência & Educação*, v. 12, n. 2, p. 143-153.

FABRÍCIO, N. M. C.; SOUZA, V. C. B.; GOMES, E. E. A. S. (2007). Perfil do professor inclusivo. *Revista Psicopedagogia*. v. 24, n. 74, p.117-125.

MARCONE, R. (2018). Desconstruindo narrativas normalizadoras. In: Rosa, F. M. C.; BARALDI, I. M. *Educação Matemática Inclusiva*: estudos e percepções. Campinas, SP: Mercado das letras, p.17-36.

MELLO, E.M. (2013). O professor, alunos cegos e a linguagem matemática. *Revista Paranaense de Educação Matemática*. Campo Mourão, v.2, n.2, p.132-143.

MIRANDA, E. T. J.; BARALDI, I. M. (2018). Desafios na inclusão escolar do aluno com deficiência visual nas aulas de matemática. In: Rosa, F. M. C.; BARALDI, I. M. *Educação Matemática Inclusiva*: estudos e percepções. Campinas, SP: Mercado das letras, cap. 4, p.81-98.

MORAES, R. (1999). Análise de conteúdo. *Revista Educação*, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32.

SARMENTO, A. K. C. (2010). *A Utilização dos Materiais Manipulativos nas aulas de Matemática*. Universidade Federal do Piauí. Disponível em: <http://www.ufpi.br//subsiteFiles/ppged/arquivos/files/IV.encontro.2010/GT_02_18_2010.pdf>. Acesso em 27/09/2018.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

WhatsApp no ensino-aprendizagem de matemática[1]

Ademir **Basso**
CEPACS - PR
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br
Maria José **Cáceres** Garcia
USAL - ES
Espanha
majoca@usal.es
María Mercedes **Rodríguez** Sánchez
USAL - ES
Espanha
meros@usal.es

Resumo

Este relato mostra uma experiência com turmas de 2º e 3º anos do Ensino Médio do CEPACS, Colégio localizado na Região Sudoeste do Paraná, Brasil, onde foi utilizado uma rede colaborativa, mais precisamente, o aplicativo *WhatsApp* como ferramenta de ensino-aprendizagem de matemática. O objetivo foi utilizar este recurso para que os estudantes colaborassem entre si nos temas de casa, bem como para estudarem para as avaliações contando com a ajuda do professor quando necessário. Dessa forma, foram criados grupos no *WhatsApp* exclusivos para a disciplina de matemática e sempre que os estudantes necessitavam estavam buscando ajuda, enviando fotos de atividades e perguntando quais "direções" seguir. Os resultados foram bastante promissores, já que os estudantes procuravam sempre tirar as dúvidas com o professor e colaboravam com seus colegas, além de mostrarem melhor compreensão dos conhecimentos/conteúdos e melhorarem seus resultados nas avaliações.

Palavras chave: ensino, aprendizagem, matemática, tecnologias, *WhatsApp*.

Ensino-aprendizagem de matemática

O ensino de matemática, já há algum tempo, vem sofrendo críticas na forma que é levado a

[1]Colaborou com este trabalho o Dr. José María Chamoso Sánchez do Departamento de Didática da Matemática e das Ciências Experimentais da Faculdade de Educação da Universidad de Salamanca - Espanha. jchamoso@usal.es.

cabo em sala de aula. Acusam a matemática de ser a disciplina mais difícil de ser aprendida, a que não oferece relação com a realidade além de ser avaliada de maneira quase exclusiva pela forma tradicional, os testes escritos e sem consulta.

No entanto, há muito se busca novas maneiras de ensinar matemática para que a mesma faça sentido para o estudante, que ele aprenda os conceitos, os conhecimentos matemáticos e saiba aplicá-los em seu cotidiano próximo ou mesmo a longo prazo. Que a matemática faça sentido para o estudante em qualquer grau de ensino.

Muitos estudos têm sido realizados nessa direção, tanto que atualmente estão disponíveis ao professor, as Tendências em Educação Matemática, como exemplo tem-se a criação de Polya (1995) que sugere alguns passos que o indivíduo deve seguir para garantir uma resolução exitosa de problemas; D'Ambrosio (2004), que sugere que todos os grupos sociais possuem sua matemática própria e que ela pode ser utilizada para melhorar o ensino desta importante ciência.

Não obstante, tem-se a Modelagem Matemática que une realidade com matemática, que modela problemas reais, cotidianos, matematicamente, encontrando a solução através de seus passos. Outra possibilidade é a História da Matemática, que mostra entre outras possibilidades, o contexto onde os conhecimentos matemáticos foram descobertos/criados/utilizados. Também a proposta de trabalhar em sala de aula com tarefas matemáticas autênticas (Cáceres, Chamoso & Cárdenas, 2015; Chamoso & Cáceres, 2018).

Tem-se ainda, a Comunicação em Matemática, a qual prevê que os estudantes podem aprender esta ciência, escrevendo, lendo, debatendo e ouvindo sobre matemática. Esta tendência pode ir unida à Literatura em Matemática, que traz vasto acervo de obras magníficas como é o caso de Tahan (2008) onde o protagonista resolve uma infinidade de problemas aparentemente irresolvíveis de forma fácil.

Pode-se recorrer ainda aos Jogos, utilizados em inúmeras ciências e que na matemática tem um papel de despertar o interesse pelos conhecimentos de uma forma prazerosa. Outra tendência é a Investigação em Matemática, onde o estudante é convidado a agir como um matemático, pois vai propor questões, vai formular conjecturas, vai fazer matemática (Chamoso, Durán, García, Martín & Rodríguez, 2004).

E, como não poderia deixar de ser, as Tecnologias não podem ficar de fora desta discussão. A justificativa é simples: o cotidiano está repleto dela, não há ramo ou evento que não a utilize em grande escala. Na matemática ela é importantíssima, pois desde uma simples calculadora até o mais avançado computador, auxilia e agiliza os procedimentos para se chegar ao resultado esperado.

Mas, de nada adianta utilizar algumas ou mesmo todas as Tendências em Educação Matemática para ensinar se a avaliação nesta disciplina continuar a ser realizada da maneira tradicional, classificatória e excludente. A avaliação nesta disciplina deverá deixar de ser realizada da forma somativa, com uso exclusivo do teste sem consulta ao final de um período ou conteúdo. Ela deve, ao contrário, ser realizada formativamente e processualmente, utilizar-se de inúmeros instrumentos e colaborar com o processo de ensino-aprendizagem de matemática. A avaliação nesta disciplina deve ocorrer integrada ao processo de ensino de maneira tão sutil que o estudante não diferencie os momentos em que está aprendendo e quando está sendo avaliado. Portanto, há um certo consenso que essa disciplina/ciência sempre foi a que mais sofreu críticas ao longo do tempo por oferecer um ensino quase sempre tradicional, com avaliações estanques e

finais de linha (Pinger, Rakoczy, Besser & Klieme, 2018). Neste contexto, nesta experiência buscou-se trabalhar com uma rede social colaborativa para favorecer o ensino-aprendizagem em matemática no Ensino Médio.

Redes sociais no ensino de matemática

Quanto à tecnologia, a sociedade atual, em todos os campos e eventos, tem experimentado um avançado sistema tecnológico que contribui, acelera e torna mais fácil a vida de todos. No entanto, na educação apesar da oferta crescente, há uma certa resistência em se utilizar as novas tecnologias. As discussões que querem mudar os rumos da educação têm defendido inúmeras mudanças. Uma delas é a questão de que em sala de aula tem que se utilizar a tecnologia.

A tecnologia nova ou moderna é uma ferramenta básica para o ensino e a aprendizagem efetiva de matemática, ela ajuda no recolhimento, gravação e análise dos dados, aumenta a capacidade de fazer cálculos, oferece ferramentas preciosas e dinâmicas que desenham, fazem gráficos e calculam. Utilizar tecnologias no ensino se justifica pois os estudantes que estão em sala de aula atualmente, são, em sua maioria da chamada Geração Z, segundo Siqueira (2012) são os nascidos a partir de 2001. Eles chegaram junto ao advento da internet e do boom tecnológico, são a geração atual, eles se comunicam com rapidez, estão conectados com o mundo, têm acesso a informações em tempo real, utilizando cotidianamente as redes sociais para praticamente toda ação realizada (Toledo, Albuquerque & Magalhães, 2012; Basso, 2015).

Neste contexto, as redes sociais permitem compartilhar informações de diversos tipos, texto, imagem, gravações de áudio e vídeo, etc. As possibilidades para o ensino de matemática são inúmeras. Há exemplos tais como os trabalhos que utilizaram aplicações Android para o ensino de estatística mediante trabalho colaborativo (González, Coelho, Cáceres, Chamoso Sánchez & Codes, 2017; González, Coelho, Cáceres, Chamoso Sánchez & Martín, 2017).

É possível utilizar a rede social *WhatsApp* para o ensino e aprendizagem de matemática. Ele é um aplicativo para as pessoas trocarem mensagens instantâneas em seus smartphones, o mesmo foi criado em 2009. Desde seu "nascimento" muitos recursos foram incorporados nele para melhorar a comunicação e o compartilhamento de imagens, vídeos e uma infinidade de arquivos. É praticamente impensável que alguém pensa em estar em conexão com o mundo sem fazer uso do *WhatsApp*.

Com tantos recursos de baixo custo, o *WhatsApp* se torna uma ferramenta *Mobile Learning*, ou *M-Learning*, que significa ou que une aprendizagem e mobilidade. Todos os recursos disponíveis nele permitem uma aprendizagem colaborativa bastante efetiva (Oliveira, Anjos, Oliveira, Sousa & Leite, 2014). Com este aplicativo, o ensino-aprendizagem em matemática pode ser mais efetivo, pois o contato estudante-estudante e estudante-professor ultrapassa as fronteiras da sala de aula.

A experiência com *WhatsApp* em matemática

Como é comum na prática de ensino-aprendizagem nesta disciplina com este professor, a cada trimestre letivo busca-se novas possibilidades, novos instrumentos para colaborar com o processo. Nesse sentido, no início do ano letivo de 2018, fez-se um contrato didático com os estudantes, baseado em Brousseau (1996), que afirma que um contrato didático deve descrever um conjunto de comportamentos específicos que os atores do processo de ensino – professor e

estudante – esperam um do outro, mediados pelo saber, onde ficou estabelecido que as turmas iriam criar um grupo *WhatsApp* exclusivo na disciplina para trocarem informações, dúvidas, ou seja, que este grupo facilitasse o processo de ensino-aprendizagem de matemática.

Dessa forma, as turmas de 2º e 3º ano do Colégio Estadual Presidente Arthur da Costa e Silva – EFM criaram seus grupos e, sempre que tinham necessidade e interesse, estavam utilizando para sanarem dúvidas entre eles e com o professor. Em muitas oportunidades resolvendo atividades de casa ou estudando para as avaliações buscavam ajuda com os colegas que escreviam ou enviavam fotos das estratégias utilizadas por eles para resolver tal atividade.

O objetivo de trabalhar com uma rede colaborativa em matemática, mais precisamente com *WhatsApp*, foi aproveitar a facilidade, soltura e interesse que os estudantes possuem com esse aplicativo, eles o utilizam praticamente a todo momento. Dessa forma, unindo uma ferramenta de uso cotidiano do estudante com os objetivos educacionais de ensinar matemática, buscou-se aprimorar o ensino-aprendizagem nesta disciplina.

Neste contexto, desde que o grupo foi criado, iniciou-se sua utilização. Ao finalizar as aulas, sempre que o tempo não permitia disponibilizar atividades para estudar em casa, o professor utilizava o grupo para enviar tais atividades. Mesmo em sala, quando o professor estava corrigindo alguma atividade ou passando atividades para resolverem em casa e o tempo se esgotasse, um estudante, de maneira geral o líder da sala, fotografava e enviava ao grupo. Dessa maneira, o uso do *WhatsApp*, foi incorporado naturalmente no trabalho diário.

Alguns resultados da experiência

Aqui mostra-se alguns resultados, alguns momentos onde os estudantes e professor fizeram uso do *WhatsApp* para dirimir dúvidas a respeito das atividades, dos conhecimentos em matemática. Um exemplo de uma estudante do 2º A com uma dúvida na resolução de área da região triangular conteúdo de aplicação de matrizes. Durante a resolução escreveu e mandou a foto da resolução para o professor.

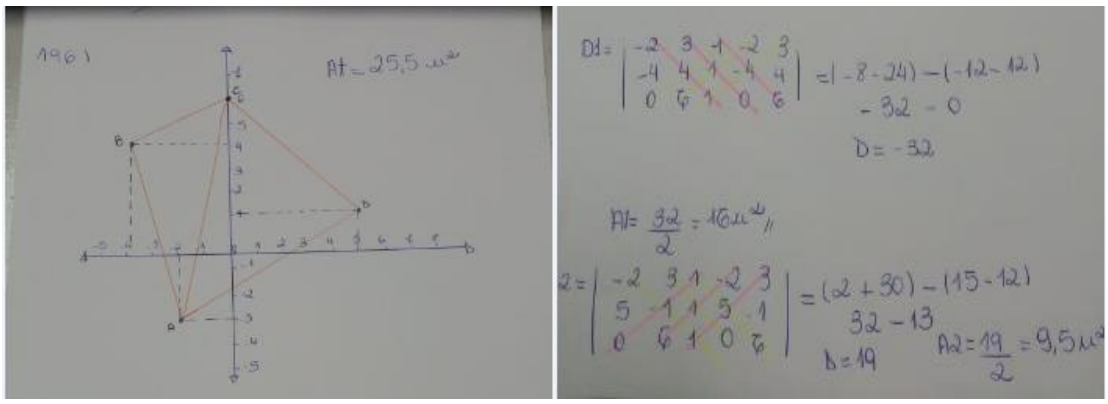


Figura 1. Atividade do estudante. 2018.

De posse dessas informações o professor identificou o erro e alertou a estudante que resolveu novamente. Aqui o *WhatsApp* proporcionando uma aula à distância com atendimento individual, no momento em que o estudante está resolvendo a atividade sem nenhuma interferência e com o apoio do professor.

Nas figuras a seguir se mostra uma sequência onde a atividade foi escrita na lousa nos últimos instantes de aula, por isso não ficou claro, esta atividade era um tema de casa/avaliação. Um estudante estava com dúvidas sobre a localização das coordenadas no gráfico cartesiano e perguntou se os pontos estavam sobre os eixos ou próximos. A sequência mostra a lousa com o rascunho feito pelo professor enviado pelo estudante, a segunda mostra o professor enviando um rascunho desde casa e por último um estudante resolvendo e perguntando se estava correto.

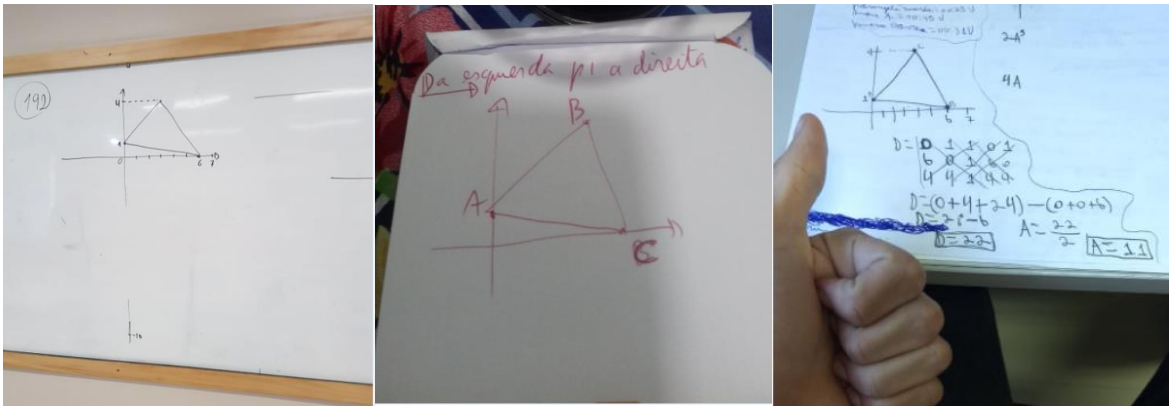


Figura 2. Sequência lousa-professor-estudante via *WhatsApp*. 2018.

A atividade da sequência, se constituía em um tema de casa/avaliação no 3º ano. Como ocorre com frequência, alguns estudantes faltaram, com isso, o líder/representante dos estudantes encarrega-se de enviar uma foto do tema do dia.

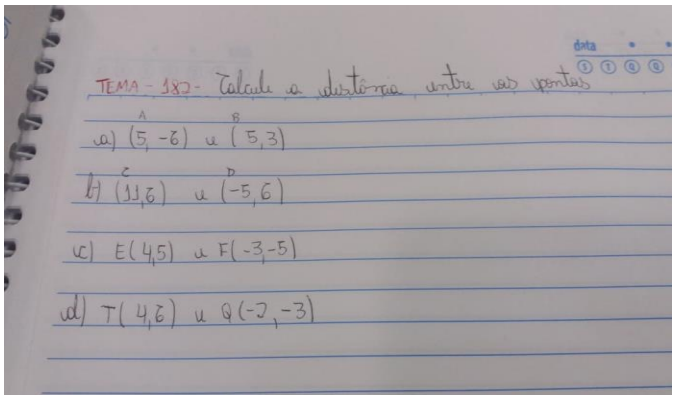


Figura 3. Tema de casa postado por estudante. 2018.

Dessa forma, mesmo os estudantes que não participaram da aula, podem realizar a atividade, tirar dúvidas e por fim aprender matemática. Dessa forma, o *WhatsApp*, está sendo utilizado para o ensino, para a aprendizagem e, em certa medida, para a avaliação de matemática.

Outro estudante de 3º ano estava realizando a atividade de casa e estava com dúvidas a respeito da resolução e do gráfico. Usou o *WhatsApp* para perguntar se estava no caminho certo:

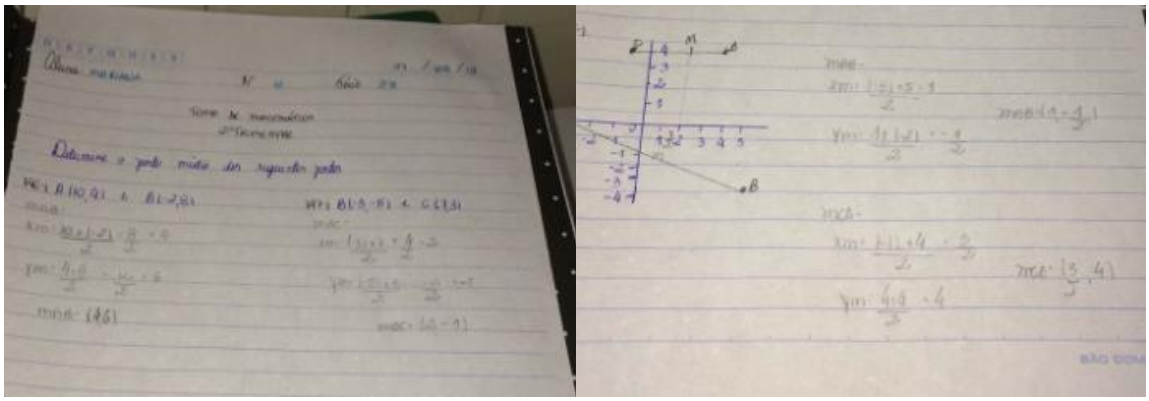


Figura 4. Dúvida de estudante no tema de casa. 2018.

Dessa forma, o professor explicou ao estudante os pontos errôneos e os corretos e o estudante pôde então completar a tarefa com êxito.

Em outro momento, o professor não conseguiu realizar a revisão antes de uma avaliação no 3º ano, por isso utilizou o grupo *WhatsApp* para enviar algumas atividades onde os estudantes estariam estudando para a avaliação. Ao todo, neste momento, o professor postou cinco atividades no grupo, o que, segundo os estudantes, colaborou muito para estudarem para a avaliação. Três destas atividades se mostram na sequência:

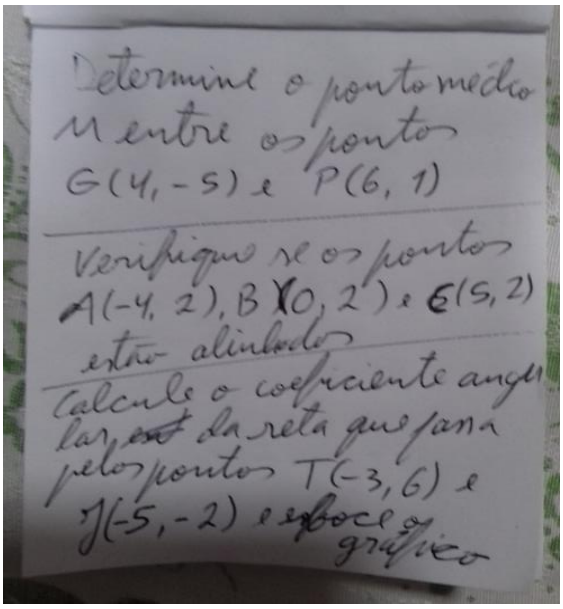


Figura 5. Atividade revisão postada pelo professor. 2018.

O uso dessa rede colaborativa foi intenso durante todo o ano letivo, no entanto, mais utilizado na resolução de atividades de casa e quando às vésperas de avaliação, momento onde o estudante procura dedicar-se um pouco mais com a preocupação de obter êxito na avaliação que se aproxima.

Considerações finais

Está claro que o homem não é o mesmo de seu ancestral e tampouco vive como vivia ele, os estudantes de hoje não são os mesmos que foram seus avós, seus pais e até mesmo seus

professores. O estudante de hoje utiliza a mais alta tecnologia para se divertir, para se comunicar e para obter informações rápidas e em tempo real, dessa forma, a escola deve aproveitar essa oportunidade para avançar no uso da tecnologia e das redes colaborativas.

Neste contexto, esta rede colaborativa foi utilizada com grande sucesso pelos estudantes durante todo o ano letivo. Inicialmente estavam um pouco tímidos quanto a usar a mesma para fins educacionais, mas aos poucos, foram tomando soltura e perguntando, respondendo, enviando fotos de atividades, de como estavam resolvendo e buscando informações pertinentes para chegar aos resultados das atividades propostas como temas de casa, como conteúdo das avaliações ou mesmo dúvidas corriqueiras dos conhecimentos/conteúdos estudados.

Como os temas de casa, em alguns momentos, foram considerados como avaliações, foi intenso o uso do *WhatsApp* na busca por uma melhor resolução das atividades, mas não somente neste momento, mesmo quando não eram considerados como avaliação, os estudantes compreenderam que resolver as atividades com êxito os faria aprender matemática e que certamente iriam alcançar êxito nas avaliações.

Neste contexto, este trabalho mostrou que o uso da ferramenta *WhatsApp* favoreceu o ensino e a aprendizagem de matemática pois os estudantes entenderam e aproveitaram esta oportunidade para trocar informações e colaborar com seus colegas, sanar dúvidas com o professor e pedir ajuda quando necessitavam. As mediações e colaborações efetuadas de maneira geral eram comentadas nas aulas como forma de iniciar os conteúdos ou quando um procedimento coincidia com aquela efetuada via rede colaborativa no dia anterior.

Neste sentido possivelmente a utilização do *WhatsApp* é mais favorável na disciplina de matemática do que em qualquer outra já que historicamente essa ciência foi considerada a mais difícil de ser apreendida, aquela que mais reprovou e classificou estudantes ao longo do tempo. Nessa rede colaborativa, os estudantes aprendiam além da sala de aula e em grupos o que é fundamental para um bom aprendizado matemático.

Como limitações é conveniente citar que a experiência foi realizada com grupos de 2º e 3º anos do Ensino Médio em um colégio apenas, ou seja, em um contexto concreto, mas se espera, no futuro, desenvolver de maneira mais ampla e com outros níveis educativos e também levar a proposta para outras disciplinas mesmo considerando que na disciplina de matemática parece mais adequado. Ainda, a ideia vindoura é experimentar outras redes sociais para corroborar com o aprendizado matemático.

As implicações que essa experiência traz é que ao descobrir que uma rede social tal como o *WhatsApp*, utilizada amplamente pelos jovens, favorece o aprendizado matemático, seria importante levar em consideração como uma ferramenta de trabalho para implementar em todas as aulas e ainda buscar e utilizar outras formas de trabalho e fugir do ensino tradicional.

Referências e bibliografia

Basso, A. (2015). *As tecnologias no ensino-aprendizagem*: uma discussão em aberto. Pato Branco: Imprepel.

Brousseau, G. (1996). Os diferentes papéis do professor. In C. Parra & I. Saiz. *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas.

Cáceres, M. J., Chamoso, J. M., & Cárdenas, J. A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas

propuestas por estudiantes para maestro. In C. Fernández, M. Molina & N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 201- 210). Alicante: SEIEM.

Chamoso, J., Durán, J., García, J., Martín, J., & Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *47*, 47-58.

Chamoso, J. M., & Cáceres, M. J. (2018): Propuesta de tareas matemáticas en contextos reales de estudiantes para maestro. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *17*, 83-94.

D'Ambrosio, U. (2004). *Educação Matemática:* Da teoria à prática. 11. ed. Campinas-SP: Papirus.

González, M. T., Coello, Y. M., Cáceres, M. J., Chamoso, J. M., & Codes, M. (2017): Collaborative work with Android Applications: research and practice. 18th Biennial ISATT Conference 2017. Salamanca.

González, M. T., Coello, Y. M., Cáceres, M. J., Chamoso, J. M., & Martín, E. (2017): El uso de aplicaciones Android para la enseñanza de la estadística. CIBEM. Madrid.

Oliveira, E. D. S., Anjos, E. G., Oliveira, F. S., Sousa, H. M., & Leite, J. E. R. (2014). Estratégias de uso do WhatsApp como um ambiente virtual de aprendizagem em um Curso de Formação de Professores e Tutores. In: *Simpósio Internacional de Educação a Distância*. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos.

Pinger, P., Rakoczy, K., Besser, M., & Klieme, E. (2018). Implementation of formative assessment–effects of quality of programme delivery on students' mathematics achievement and interest. Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 25(2), 160-182.

Polya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Siqueira, R. N. (2012). *Métodos de ensino adequados para o ensino da geração Z, uma visão dos discentes*. Artigo (Especialização) - Universidade Federal de Mato Grosso, Mato Grosso.

Tahan, M. (2008). *O homem que calculava*. 73. ed. Rio de Janeiro: Record.

Toledo, P. B. F., Albuquerque, R. A. F., & Magalhães, À. R. de. (2012). O comportamento da geração z e a influência nas atitudes dos professores. In: IX *Simpósio de excelência em gestão e tecnologia*. Disponível em: https://www.aedb.br/seget/arquivos/artigos12/38516548.pdf. Acesso em: 04 agosto.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O ensino de geometria para alunos surdos inclusos

Walber Christiano Lima da **Costa**
UNIFESSPA / UFPA
Brasil
walber@unifesspa.edu.br

Fábio Alexandre **Borges**
UNESPAR
Brasil
fabioborges.mga@hotmail.com

Marisa Rosâni Abreu da **Silveira**
Universidade Federal do Pará (UFPA)
Brasil
marisabreu@ufpa.br

Resumo

O ensino de geometria por muitas vezes recebe uma desvalorização nas escolas, haja vista que, com o advento das legislações educacionais, foi feita a leitura de que a geometria perdeu o caráter utilitário. Assim, muitas vezes há escolas que deixam de ensinar os conteúdos geométricos para os alunos, o que tende a ser um prejuízo para a educação desses discentes. Assim, o presente artigo tem como objetivo apresentar algumas considerações acerca do ensino de geometria para alunos surdos. Para este estudo bibliográfico, embasamo-nos em alguns autores da educação de surdos, geometria e ensino de geometria para surdos. Analisamos as literaturas e buscamos topicalizar o texto a partir dos eixos: Ensino de Geometria, Educação de Surdos e Ensino de Geometria para surdos. Como resultados, percebemos que os conteúdos geométricos trazem grandes contribuições para o aprendizado dos surdos e que a omissão desse ensino pode trazer prejuízos no desenvolvimento desses alunos.

Palavras chave: Ensino de Geometria. Inclusão educacional. Estudantes surdos.

Introdução

Observamos que falar do ensino de matemática no Brasil é um constante desafio, haja vista muitas problemáticas e dúvidas que perpassam por esse ensino. Por exemplo, sabemos que a disciplina de Matemática, juntamente com a Língua Portuguesa, são as que juntas apresentam a maior carga horária de ensino nas escolas. Porém, ao mesmo tempo em que a matemática apresenta uma grande carga horária, apresenta diversas críticas. Muitas dessas críticas são de que a Matemática é uma linguagem de difícil compreensão por parte dos alunos e, muitas vezes, pelos professores também.

Diversos autores se debruçam em responder questões de como minimizar essas dificuldades. Silveira (2014) apresenta que, devido à linguagem matemática intencionar ser monossêmica, essa apresenta uma especificidade de necessitar ser traduzida por uma linguagem natural, que, por sua vez, é polissêmica. No momento da tradução, pode ser que os alunos não estejam alcançando as traduções adequadas e, consequentemente, isso esteja gerando problemas em suas aprendizagens. Assim, para a autora, percebemos que uma dificuldade para a aprendizagem da matemática sejam os problemas de linguagem.

Em meio aos conteúdos matemáticos, temos a geometria, que é uma área específica dentro do ensino de matemática, que muitas vezes é desprezada e até mesmo omitida dos ensinos em sala de aula para ouvintes. Já para estudantes surdos, que vivenciam e dependem de experiências visuais, Kritzer e Pagliaro (2013) apresentam que esses estudantes demonstram maiores facilidades ao serem avaliados nos assuntos de geometria, devido às particularidades da visualidade do que em relação aos assuntos algébricos, que requerem maior abstração dos discentes.

Sobre o ensino de surdos, sabemos que este público necessita que em sala de aula possa ser proporcionado o uso da Língua Brasileira de Sinais (Libras) para que o mesmo possa ter acesso e sucesso no processo de inclusão. Sabemos que só o uso da Libras não é suficiente, porém, é um grande passo, haja vista que o sentido comunicativo já ajudará que o mesmo tenha motivação e acesso aos conteúdos em sala de aula de forma justa e igualitária em relação aos colegas ouvintes.

Acerca do processo de inclusão, Fernandes e Healy (2007, p. 01) afirmam que “este paradigma tem levado a busca de uma necessária transformação da escola e das alternativas pedagógicas com o objetivo de promover uma educação para todos nas escolas regulares”. Assim, entendemos de fato que não é só a Libras que é sinal de inclusão, mas sabemos que a presença da língua representa para o surdo algo fundamental.

Diante dessas informações, o presente artigo tem como objetivo apresentar algumas considerações sobre o ensino de geometria para alunos surdos. Para este estudo bibliográfico e qualitativo, embasamo-nos em alguns autores da educação de surdos, como Lacerda e Lodi (2014), alguns autores da geometria, como Silva e Valente (2014) e ensino de geometria pra surdos, como Borges e Nogueira (2013).

O ensino de geometria no Brasil: “Um pequeno recorte de três lados”

O presente tópico traz um recorte acerca do ensino de geometria no Brasil, trazendo à luz as três perspectivas de visualização sobre o ensino de geometria: sua importância, seu objetivo e seus principais resultados.

Valente e Silva (2014, p. 31) destacam como surge a geometria escolar:

> A forma prática dessa geometria deverá ser demonstrada no âmbito escolar: a atividade com o desenho das formas geométricas. Não mais o campo, o terreno, como lugar de ação dos alunos é prova do caráter prático. Assim, nesses tempos iniciais, logo ficam à mostra as transformações de significado da geometria prática. Nasce, desse modo, uma geometria escolar.

Assim, a partir dos autores, entendemos que a geometria escolar surge a partir da observação do caráter prático enquanto conteúdo escolar e não mais enquanto observações ligadas à agrimensura, medição de terrenos como era no início o uso da geometria. Consideramos essa mudança de perspectiva um grande avanço para conquistarmos a importância da geometria para o processo educacional.

Pinto e Valente (2014), por sua vez, apresentam que o Movimento da Matemática Moderna (MMM), por ser um movimento internacional, apresentou transformações de forma geral do Ensino de Matemática, como, por exemplo, buscou "aproximar o ensino realizado na Educação Básica àquele desenvolvido na universidade que, na altura, corresponde à linguagem e à estrutura empregada pelos matemáticos na época" (p. 66).

Vemos a partir dos autores que essas transformações visaram também o ensino de geometria. Assim, os autores destacam que o MMM trouxe as ideias de que as "figuras geométricas e suas propriedades representam o saber geométrico que as crianças devem aprender na escola hoje" (p. 82).

A partir do MMM, vemos transformações significativas no ensino de matemática. Atualmente, o ensino da disciplina, segundo Smole, Diniz e Cândido (2003, p. 9):

> Deve encorajar a exploração de uma grande variedade de ideias matemáticas não apenas numéricas, mas também aquelas relativas à Geometria, às medidas e às noções de estatística, de modo que as crianças desenvolvam e conservem com prazer uma curiosidade acerca da Matemática, adquirindo diferentes formas de perceber a realidade.

Assim, vemos os autores trazendo os principais objetivos da geometria, que não é só o fato do aluno dominar os conteúdos geométricos, mas também contribuir de forma significativa no aprendizado dos demais conteúdos, como os algébricos.

Acerca disso, nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997, p. 39) temos apontado que a geometria

> [...] é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.

Com isso, a partir do exposto, acreditamos que o ensino de geometria seja fundamental para que o aluno possa dominar as demais áreas do conhecimento matemático, pois, a partir dos exercícios, os alunos tendem a fazer diferenciações, semelhanças, enfim, verificar diversos aspectos que a visualização de objetos geométricos proporciona.

Educação de surdos no Brasil e os desafios com a veiculação da Libras

O presente tópico apresenta uma breve discussão sobre a educação de surdos no Brasil, fazendo um destaque à Libras e aos desafios que essa língua enfrenta para ser implementada de fato nas salas de aula do país.

Sobre a educação de surdos, inicialmente destacamos que as legislações brasileiras já trazem um imperativo para que os surdos possam ter condições favoráveis às suas aprendizagens. Leis como a Lei nº 10436/2002 (Lei que oficializa a Libras como forma de comunicação e expressão das comunidades surdas brasileiras), Decreto 5626/2005 (Decreto que regulamenta a Lei nº 10436/2002 e orienta diversos aspectos sobre surdez e a Libras) e a Lei Nº 13.146, de 6 de julho de 2015 (Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência - Chamada também de Estatuto da Pessoa com Deficiência) já mostram a importância que a Libras tem para a pessoa surda.

Lacerda e Lodi (2014, p. 15) dissertam que, para que haja inclusão, é importante respeitar as especificidades linguísticas do surdo:

> Quando se opta pela inserção do aluno na escola regular, esta precisa ser feita com cuidados que visem garantir sua possibilidade de acesso aos conhecimentos que estão sendo trabalhados, além do respeito por sua condição linguística e, portanto, de seu modo peculiar de ser no mundo.

Porém, sabemos que esta realidade é difícil em um país de dimensões continentais como o nosso. É possível afirmarmos que, por exemplo, no Sul brasileiro, as escolas estejam adaptadas às necessidades dos surdos, com o uso da Libras na sala de aula, materiais pedagógicos adequados, docentes preparados desde a formação inicial para as realidades inclusivas. Porém, observando o Norte do País, vemos que tais particularidades ainda estão distantes (Costa, 2017).

A Libras é uma Língua que se apresenta na modalidade visuoespacial. E como toda língua, tem suas características linguísticas, parâmetros etc. Isso, acreditamos, que muitas vezes não passa pela cabeça das pessoas, haja vista que sabemos de muitos docentes que fazem cursos rápidos e já acham que alcançaram a fluência da Língua. Talvez seja este o maior desafio da Libras ser implementada de forma geral no país: as pessoas compreenderem que esta é uma língua e que necessita ter uma dedicação para suas aprendizagens.

Quadros e Karnopp (2004, p. 26-27) apresentam algumas características da Libras:

> A produtividade ou criatividade de um sistema de comunicação é a propriedade que possibilita a construção e interpretação de novos enunciados. Todos os sistemas linguísticos possibilitam a seus usuários construir e compreender um número infinito de enunciados que jamais ouviram ou viram antes. O que é impressionante na produtividade das línguas naturais, na medida em que é manifestada na estrutura gramatical, é a extrema complexidade e heterogeneidade dos princípios que as mantém e constituem. Chomsky coloca que esta complexidade e heterogeneidade, entretanto, é regida por regras dentro dos limites estabelecidos pelas regras da gramática, que são em parte universais e em parte específicos de determinadas línguas, os falantes nativos de uma língua tem a liberdade de agir criativamente, construindo um número infinito de enunciados. O conceito de criatividade regida por regras é muito próximo do de produtividade e teve grande importância para o desenvolvimento do gerativismo.

Assim, Quadros e Karnopp (2004) resumem a importância da Libras para o surdo. Corrobora com esse pensamento Gesser (2009), que especifica que tudo pode ser expresso a partir dessa Língua, pois ela é completa assim como qualquer língua oral.

O ensino de geometria para alunos surdos inclusos: algumas considerações

O presente tópico apresenta algumas considerações sobre o ensino de geometria para alunos surdos. A geometria, enquanto conteúdo da matemática, que apresenta possibilidades de serem trabalhadas a visualidade, e o surdo por ser um sujeito que apresenta a Libras que é uma

língua visual. Essas características citadas acreditamos serem aproximações que podem favorecer o ensino e a aprendizagem dos surdos.

Inicialmente, destacamos que, para Borges e Nogueira (2013, p. 44), "como as representações simbólicas do mundo dependem dos canais sensoriais, a experiência visual está presente em todos os tipos de representações e produções dos surdos". Tal assertiva, acreditamos, vem aproximar o ensino e a aprendizagem da geometria e os alunos surdos, pois essa área da matemática é repleta de representações visuais que tendem a favorecer a aprendizagem a partir dos aspectos visuais.

Nogueira e Zanqueta (2013, p. 39) destacam que "a escola não deve se limitar apenas a traduzir, para a língua de sinais, metodologias, estratégias e procedimentos da escola comum, mas deve continuar a preocupar-se em organizar atividades que proporcionem o salto qualitativo no pensamento dos surdos". Assim, vemos que é fundamental ainda a preocupação institucional em todos os aspectos que corroborem para a inclusão efetiva dos alunos surdos. Como já exposto, sabemos das dificuldades de se implementar as políticas inclusivas de fato no país, porém, devemos refletir que a importância e execução depende de cada um de nós.

Ainda Borges e Nogueira (2013, p. 44) apontam sobre a importância do profissional tradutor-intérprete na sala de aula de matemática:

> O fato de que a Matemática possui linguagem própria, com termos que não estão consolidados em sinais específicos na Libras como logaritmos, matrizes, funções, particularmente porque a Libras ainda é uma língua em construção aliada ao conhecimento matemático superficial da maioria dos Intérpretes de Língua de Sinais, dificulta sobremaneira o ensino de Matemática para surdos.

O profissional tradutor-intérprete de Libras é considerado um ator importante quando se trata do processo de inclusão dos alunos surdos, pois sabemos que muitas vezes o professor desconhece a Libras, e esse profissional acaba por ajudar o processo comunicacional. Entretanto, sabemos que são poucos os intérpretes que dominam a linguagem matemática, ou seja, poucos que apresentam a competência referencial para atuação em sala de aula. Assim, vemos que muitas vezes apenas a presença do intérprete não é a garantia de sucesso do aluno, haja vista que o processo de desenvolvimento do aluno depende ainda de muitos fatores.

Caldeira e Moita (2013, p. 3) destacam que:

> Estudar Geometria deve ser um ato que transcenda as memorizações, uma vez que esse ramo da Matemática poderá apoiar vários entendimentos e nos levar a compreender os fenômenos do cotidiano. Atividades desenvolvidas em Ensino de Geometria, comprovadamente, já indicaram o quanto é importante a visualização de materiais, porquanto despertam grandes motivações e facilitam a passagem do concreto para as abstrações mentais.

Assim, entendemos que os conhecimentos geométricos abrem portas para que os alunos surdos possam compreender outros assuntos matemáticos considerados mais abstratos, como, por exemplo, a álgebra.

Corrobora com este pensamento Caldeira (2014, p. 58) ao afirmar que

> Assim, é inegável que a Geometria é um estudo importante para o estudante em todos os níveis de ensino, pois permite uma melhor leitura do ambiente físico em que vive. Podemos encontrar traços geométricos por toda parte, paralelismo, congruências, semelhanças, proporcionalidade, aferição de medidas, como, por exemplo, comprimento, área e capacidade como o volume, os elementos constantes na simetria, por meio de formas geométricas que alcançamos em nosso campo visual, portanto um campo fértil para o estudo.

Acreditamos que os alunos surdos tendem a ter maiores facilidades em relação aos assuntos geométricos, pois, além dos aspectos que os aproximam enquanto sujeitos visuais e conteúdos predominantemente visual, que também a geometria é facilmente vista nas relações cotidianas dos alunos. Tal aspecto remete ao exposto em Costa (2015) em que um aluno surdo, ao observar um cone, associou o mesmo ao chapéu de aniversário, ou seja, acreditamos que ele visualizou a partir de algo que ele vivenciou para fazer a relação cone-chapéu.

Tal aspecto, a dependência da visualidade do surdo para explorar objetos, não garante o melhor aprendizado. Todavia, entendemos que se apresenta como um grande potencial para que, a partir dessa visualidade experimentada no cotidiano, o professor possa promover a inclusão a partir de atividades adequadas, que sejam as mesmas para todos.

Entretanto, devemos ter cuidado com os exemplos dados em sala de aula, pois, muitas vezes, as contextualizações podem trazer confusões aos alunos, mas é importante fazer conexões diversas para que o aluno possa ter sucesso na aprendizagem. De acordo com Gottschalk (2004, p. 16-17),

> Para introduzir o conceito de triângulo recorremos a diversas formas triangulares como meios de apresentação, as quais passam a servir como regras para a utilização da palavra triângulo. Uma vez formado o conceito, este prescinde da existência de formas triangulares para que tenha significado e possa ser aplicado. Nesse sentido, a definição da palavra triângulo – "um polígono fechado de três lados" também pode ser vista como uma regra de utilização desta palavra. Dizer que "triângulo é um polígono que tem três lados" não é uma descrição de triângulo – essa proposição define o que é um triângulo. Estabelece-se uma conexão interna entre conceitos.

Assim, podemos entender que no uso de exemplos geométricos em sala de aula, é importante observarmos as aproximações que possam ocorrer de forma a facilitar o entendimento dos alunos, ou seja, favorecer o que o filósofo Wittgenstein (1979) destaca que são os jogos de linguagem. Vemos com isso que o entendimento geométrico passa pelo entendimento de conceitos geométricos iniciais para, a partir daí, aprofundar os conhecimentos mais sofisticados.

Considerações finais

O presente artigo teve como objetivo apresentar algumas considerações sobre o ensino de geometria para alunos surdos. A partir das literaturas estudadas, vemos que os conteúdos geométricos trazem grandes contribuições para o aprendizado dos surdos e que a omissão desse ensino pode trazer prejuízos principalmente no desenvolvimento desses alunos.

Sabemos que muitas vezes diversas situações ocorrem que prejudicam os processos de ensino e aprendizagem do aluno surdo, porém, se observarmos o compromisso com a inclusão, ou seja, compromisso efetivo com a aprendizagem do aluno surdo, vemos que cada um deve fazer sua parte para proporcionar uma educação mais justa e com igualdade social para esse público.

Entendemos que sobre geometria e surdez ainda há muitas especificidades que não conseguimos explorar neste texto, haja vista que este apresenta apenas um recorte acerca desta temática. Porém, pretendemos posteriormente aprofundar um pouco mais a partir das áreas específicas geométricas.

Referências y bibliografia

Borges, F. A.; Nogueira, C. M. I. (2013). Um panorama da inclusão de estudantes surdos nas aulas de matemática. In: Nogueira, C. M. I. (Org.). *Surdez, inclusão e matemática* (pp. 44-70). Curitiba, PR: CRV.

Brasil (1997). *Parâmetros curriculares nacionais*: matemática. Brasília, DF: MEC/SEF.

Brasil (2002). *Lei n°. 10.436, de 24 de abril de 2002*. Dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais - Libras, e dá outras providências. Brasília.

Brasil (2005). *Decreto n°. 5.626, de 22 de dezembro de 2005*. Regulamenta a Lei n°. 10.436, de 24 de abril de 2002 que dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais - Libras, e o Art. 18 da Lei n°. 10.098, de 19 de dezembro de 2000. Brasília.

Brasil (2015). *Lei n°. 13.146, de 06 de julho de 2015*. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Brasília.

Caldeira, V. L. A. (2014). *Ensino de geometria para alunos surdos*: um estudo com apoio digital ao analógico e o ciclo da experiência Kellyana. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia.

Caldeira, V. L. A., Moita, F. M. G. S. (2013). Geometria para surdos: uma análise apoiada no ciclo da experiência kellyana. Educação Matemática: retrospectivas e perspectivas. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática*. Curitiba-PR: XI ENEM.

Costa, W. C. L. (2015). *Tradução da linguagem matemática para a Libras*: jogos de linguagem envolvendo o aluno surdo. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará.

Fernandes, S., & Healy, L. (2007). Ensaio sobre inclusão na Educação Matemática. *Revista de Educação Matemática Unión*, 59-76.

Gesser, A. (2009). *Libras? Que língua é essa?*: crenças e preconceitos em torno da língua de sinais e da realidade surda. São Paulo, SP: Parábola Editorial.

Gottschalk, C. M. C. (2004). A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência, 14*(2), 305-334. Série 3.

Kritzer, K. L., & Pagliaro, C. M. (2013). Matemática: um desafio internacional para estudantes surdos. *Cadernos Cedes, 33*(91), 431-439.

Lacerda, C. B. F., & Lodi, A. C. B. (2014). A inclusão escolar bilíngue de alunos surdos: princípios, breve histórico e perspectivas. In: A. C. Balieiro Lodi, & C. B. F. Lacerda (Ors.). *Uma escola, duas línguas*: letramento em língua portuguesa e língua de sinais nas etapas iniciais de escolarização. 4. Ed. Porto Alegre, RS: Mediação.

Nogueira, C. M. I., & Zanquetta, M. E. M. T. (2013). Surdez, bilinguismo e o ensino tradicional da Matemática. In: Nogueira, C. M. I. (Org.). *Surdez, inclusão e matemática* (pp. 23-41), 1. ed. Curitiba: CRV.

Pinto, N. B. & Valente, W. R. (2014). Quando a geometria tornou-se moderna: tempos de MMM. In: Silva, M. C. L., & Valente, W. R. (Orgs.). *A geometria nos primeiros anos escolares*: história e perspectivas atuais. Campinas, SP: Papirus.

Quadros, R. M., & Karnopp, L. B. (2004). *Língua de sinais brasileira*: estudos linguísticos. Porto Alegre, RS: ArtMed Editora.

Silveira, M. R. A. (2014). Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. *Educação Matemática Pesq*uisa, *16*(1)1, 47-73.

Smole, K. S.; Diniz, & M. I.; Cândido, P. (2003). *Figuras e formas: matemática de 0 a 6.* Porto Alegre, RS: Artmed.

Valente, W. R., & Silva, M. C. L. (2014). Primórdios do ensino de geometria nos anos iniciais. In: Silva, M. C. L., Valente, W. R. (Orgs.). *A geometria nos primeiros anos escolares*: história e perspectivas atuais. Campinas, SP: Papirus.



Uma abordagem de trabalho colaborativo em Educação Matemática Inclusiva no contexto da Economia Solidária

Renata Cristina Geromel **Meneghetti**
Instituto de Ciências Matemática e de Computação, Universidade de São Paulo
Brasil
rcmg@icmc.usp.br

Edinei de **Oliveira Filho**
Instituto de Ciências Matemática e de Computação, Universidade de São Paulo
Brasil
edinei.filho@usp.br

Resumo

Este trabalho aborda atividades pedagógicas de Educação Matemática desenvolvidas no contexto de um Empreendimento Econômico Solidário (EES) que tem por finalidade a inserção de indivíduos com transtorno mental no mercado de trabalho. O objetivo desta investigação foi planejar e executar ações pedagógicas com base nos princípios da Etnomatemática e no trabalho colaborativo de Vygotsky, visando sanar dificuldades matemáticas advindas das demandas de trabalho deste empreendimento. A pesquisa seguiu uma abordagem predominantemente qualitativa pautada na metodologia de pesquisa-ação, a qual busca promover a transformação social do grupo pesquisado pela solução de problemas inerentes as suas atividades. Como resultado observou-se que considerar a Etnomatemática deste EES favoreceu a compreensão e a valorização de práticas matemáticas e que o trabalho colaborativo desenvolvido auxiliou as discussões sobre procedimentos e conceitos matemáticos, fortalecendo, principalmente o princípio da cooperação, que é um dos pilares da Economia Solidária.

Palavras chave: Etnomatemática, Economia Solidária, Inclusão Social, Trabalho Colaborativo, Cooperação.

Introdução

Neste trabalho, abordaremos algumas intervenções pedagógicas de Educação Matemática no contexto da Economia Solidária, realizadas junto a um Empreendimento Econômico

Solidário (EES) de produção de artesanato a partir do papel reciclado tais como: agendas, bloquinhos de anotação, cadernos, crachás, pastas, etc. Além disso, este EES e que tem por finalidade a inclusão no trabalho de pessoas com transtorno mental que são assistidos por Centro de Atenção Psicossocial (CAPS), serviços de saúde comunitário que realizam atendimento a pessoas com este tipo de transtorno (Brasil, 2018). O EES acima referido é constituído levando em conta aspectos da Economia Solidária, uma economia alternativa para aqueles que foram excluídos socialmente pelo Capitalismo.

A pergunta norteadora deste trabalho é: como a Educação Matemática pode ser abordada no contexto da Educação Especial de Adultos e da Economia Solidária visando sanar as necessidades de trabalho dos membros desses empreendimentos e contribuir com os princípios deste tipo de economia?

O objetivo desta investigação foi propor uma abordagem de Educação Matemática com base nos princípios da Etnomatemática (D'Ambrosio, 1996, 2001) e do trabalho colaborativo de Vygotsky (1991). Além disso, visou-se também a inclusão social dos membros deste empreendimento, caminhando na busca da emancipação dos seus processos produtivos favorecendo, não só a inserção de pessoas com necessidades especiais que foram excluídas pelo mercado de trabalho e ensino nos moldes tradicionais, mas também uma forma de geração de renda para essas pessoas. Desta forma, entende-se que eles poderão sentir-se autoconfiantes de suas possibilidades e eficazes na sociedade novamente.

Pressupostos teóricos

A competição, que é uma das características da economia capititalista (predominante no Brasil), favorece aqueles que possuem melhores condições, pois terão mais recursos e funciona como uma forma de reprodução da sociedade, colaborando na manutenção das desigualdades sociais. Em contrapartida a Economia Solidária tem a proposta de cooperação, para que pessoas excluídas pelo Capitalismo possam ter condições dignas, buscando a igualdade entre os participantes (Singer & Souza, 2000). Ainda segundo esses autores a Economia Solidária é pautada em quatro princípios: cooperação, autogestão, viabilidade econômica e solidariedade (Singer & Souza, 2000).

Esta pesquisa visou, por meio da Etnomatemática, colaborar com tais princípios, para isso foram utilizados pressupostos da Etnomatemática, considerando o contexto cultural das pessoas desse EES. Segundo D'Ambrosio (1996), a Etnomatemática visa reconhecer as diferentes culturas que constituem um país, dessa forma, colaborando com a busca pela cidadania e valorização de todas as culturas, principalmente daquelas excluídas pelo sistema Capitalista. Intervenções anteriores realizadas neste contexto foram abordadas em Meneghetti e Gargarella (2016).

Dessa forma, de acordo com D'Ambrosio (2001), pode-se compreender a Etnomatemática como as maneiras e técnicas de entender a realidade dentro de um contexto cultural próprio, isto é, as práticas e conhecimentos matemáticos relacionados a uma cultura ou que estejam presentes em suas atividades. Meneghetti (2013) salienta que é possível uma aproximação da Educação Matemática com a Economia Solidária por meio da Etnomatemática, pois esta visa entender a realidade dentro de um contexto cultural próprio, isto é, compreender os saberes matemáticos utilizados nas tarefas cotidianas de um EES.

A partir desse entendimento constata-se uma dificuldade desse grupo, consistindo de pessoas que possuem baixa escolaridade e necessidades educacionais especiais advindas de algum transtorno mental. Com isso, a matemática pode se tornar um empecilho no desenvolvimento das atividades de produção e comercialização do empreendimento.

A obra de Vygotsky traz grandes contribuições para o ensino de pessoas com necessidades educacionais especiais. De acordo com Costa (2006), para Vygotsky a deficiência não é um limitador para o desenvolvimento da inteligência, o que limita são as relações sociais mal estabelecidas entre a sociedade e o sujeito com necessidades educacionais especiais. O indivíduo constitui-se por meio das relações sociais, culturais e da interação com o outro.

Assim, o desenvolvimento de indivíduos com necessidade educacional especial carece de forma significativa da interação com sujeitos com uma bagagem cultural maior, entendemos que isso pode ser feito através de um trabalho que considere a Zona de Desenvolvimento Proximal, a qual de acordo com Vygotsky (1991) é caracterizada pela distância entre o nível real de desenvolvimento (determinado pela capacidade do indivíduo de resolver tarefas independentemente) e o nível de desenvolvimento potencial (determinado pela capacidade de resolver problemas com ajuda de um colega mais competente ou experiente nesta tarefa).

Segundo Damiani (2008), a teoria de trabalho colaborativo é advinda das teorias educativas de Vygotsky, trabalhos conjuntos em grupos oferecem vantagens ao aprendizado não encontradas em trabalhos individuais, pois considera-se que a formação do sujeito e do seu pensamento são provenientes da interação social com outros sujeitos. Assim, a interação entre educando/educando e educando/educador pode ser efetuada por meio de um trabalho educacional colaborativo, desenvolvidas através de algumas práticas como: corrigir, discutir e contrapor ideias, tornando todos mediadores na busca pelo conhecimento.

Portanto, com base em pressupostos de uma Educação Inclusiva e Colaborativa e dos princípios da Etnomatemática e da Economia Solidária, propusemos oficinas de Educação Matemática de modo que todos os membros deste EES tivessem a mesma importância, e trabalhassem de forma conjunta, auxiliando uns aos outros.

Metodologia

Nesta pesquisa seguimos uma abordagem predominantemente qualitativa (Bogdan & Biklen, 2004), pautada na metodologia de pesquisa-ação (Thiollent, 1986). Esta última objetiva uma maior interação entre pesquisador e sujeito e busca promover a transformação social do grupo pesquisado e a solução de problemas intrínsecos às atividades desse grupo.

As intervenções focalizadas neste trabalho se deram inerentes ao desenvolvimento de um projeto de iniciação científica sob a orientação da primeira autora deste artigo e com a participação do segundo. Num primeiro momento, foi feito a coleta de dados por meio da convivência com realidade dos sujeitos da pesquisa (membros de um EES de produção de artesanato anteriormente apresentado) e do seu cotidiano de trabalho.

Essa convivência se deu por meio de observação participante, conversas informais e da realização de entrevistas semiestruturadas que foram registradas em diários de campo do pesquisador. Considerando elementos da Etnomatemática deste grupo (levantados na fase de coleta de dados) foram realizadas intervenções pedagógicas em formas de oficinas de Educação Matemática junto a este EES a fim de desenvolver conhecimentos matemáticos pertinentes ao

trabalho realizado por seus membros. Essas oficinas foram registradas em um diário de campo do pesquisador.

No diagnóstico inicial observou-se que embora operações numéricas tivessem sido trabalhadas em intervenções anteriores, o grupo ainda tinha dificuldade em relação ao processo de cálculo do troco nas vendas dos produtos. Portanto, demos prioridade a essa dificuldade nas oficinas focadas neste trabalho. Tal assunto foi trabalhado em oficinas semanais de uma hora e meia de duração durante dois meses. O EES focalizado neste trabalho possui em torno de 20 membros, no entanto, há bastante rotatividade no cotidiano de trabalho e em geral somente 8 deles frequentam com assiduidade.

Todos os membros do EES foram convidados a participar. Porém, apenas três deles concordaram: Diego, Felipe e Mário (nomes fictícios) que têm idade entre 30 e 50 anos. Os primeiros possuem um quadro clínico bastante estável, o que possibilita que realizem as atividades do grupo sem maiores dificuldades, já o terceiro tem um quadro de trauma advindo de um assalto em uma loja na qual trabalhava como caixa.

Diego e Felipe já trabalhavam com as vendas nas feiras, fazendo cálculos de valor de venda e de troco o que auxiliou diretamente nas intervenções pedagógicas propostas. Mário estava em um processo para começar a participar das vendas do EES, porém já tinha um conhecimento sobre trabalho com compra e vendas, especialmente com cálculos de troco que adquiriu quando trabalhou como caixa. Os outros membros trabalhavam na produção do artesanato ou na reciclagem do papel, dessa forma, se parassem suas atividades, comprometeriam o trabalho do EES.

Desenvolvimento das Oficinas de Educação Matemática

Para que fosse desenvolvido um trabalho colaborativo em relação ao processo de cálculo do troco nas vendas dos produtos, foi proposta uma simulação de venda dos produtos onde os membros do EES seriam os vendedores e o pesquisador seria o comprador dos produtos.

Compreendemos que o recurso de simulação de uma situação real favorece o uso da imaginação (atuação do sujeito sobre uma situação imaginária), fator que de acordo com Vygotsky (2006), ajuda na atribuição de significado à situação apresentada. Para auxiliar a simulação, foram utilizadas notas de dinheiro fictícias (de brinquedo), a fim de que os trabalhadores tivessem uma maior familiaridade com o sistema monetário brasileiro.

O procedimento utilizado nas oficinas encontra-se exemplificado abaixo:

Pesquisador: Quanto custa os produtos vendidos pelo EES?

Diego: A agenda custa R$ 40,00, o caderno custa R$ 20,00 e o bloquinho custa R$ 5,00.

Pesquisador: Gostaria de comprar duas agendas, três cadernos e quatro bloquinhos.

Os três participantes da oficina deveriam, com auxílio uns dos outros, fazer o cálculo da venda. De forma dialogada buscamos a compreensão de como os membros do EES faziam esse cálculo na feira e foi possível perceber que eles sabiam que era necessária uma soma para encontrar o valor de venda. Ademais, também observou-se que os três participantes sabiam fazer a soma, visto que a mesma havia sido trabalhada em intervenções pedagógicas anteriores.

Em alguns momentos um ou outro errava o cálculo, o que tornava importante que as ideias fossem contrapostas e que se discutisse o porquê daquele resultado. Buscou-se sempre que eles tentassem ajudar-se um ao outro e pudessem chegar a um consenso, conseguindo explicar como havia sido feito o cálculo e porque achavam que era aquele o resultado e que tentassem ajudar um ao outro. Esse procedimento poderia ser utilizado na feira de maneira a contribuir que a prática de venda fosse sempre desenvolvida sem erros e coletivamente.

Posteriormente, após chegar-se a um consenso quanto ao valor de venda, foi feita a simulação:

Diego: O valor total de compra é R$ 160,00.

Pesquisador: Se eu pagar com quatro notas de R$50,00. Qual o valor do troco?

Os membros do EES deveriam inicialmente discutir qual foi o valor total dado para pagar a compra e então calcular o troco. A identificação do valor dado para pagamento foi algo simples, pois tratava-se de uma soma, que havia sido trabalhada na parte inicial da simulação. No entanto, o troco gerava algumas complicações, já que envolvia o conceito de subtração. Eles até compreendiam o procedimento a ser realizado, o qual chamavam de "conta de menos", porém tinham dificuldade em fazê-lo. Foi constatado que na feira eles utilizavam a calculadora, mas nem sempre sabiam se o cálculo havia sido feito de forma correta.

Com isso, essa etapa da comercialização era uma dificuldade importante a ser resolvida pelo grupo. Assim, para finalizar a simulação foi abordado como realizar o procedimento de subtração, a partir de se abordar a troca no sistema posicional na realização desta operação. Além disso, foi trabalhado e proposto o uso da calculadora como uma prática a ser utilizada na feira com o intuito de os membros pudessem verificar o resultado a que chegaram para a devolução do troco, que foi a seguinte:

Pesquisador: Como o troco é calculado a partir da seguinte operação: Troco = Valor Dado pelo Cliente - Valor total da Venda. O que podemos fazer para conferir se o troco foi calculado corretamente? Após discussão coletiva chegou-se à relação: Troco + Valor total da Venda = Valor Dado pelo Cliente

Felipe fazia o cálculo mental de forma rápida, enquanto Diego realizava-os utilizando a calculadora para verificar.

Felipe: O valor da venda dá 80 reais de agenda, 60 de caderno e 20 de bloquinho, então dá, 180.

Diego: Não, olha! Dá 160. Mário: Isso, 160.

Diego mostrava os cálculos para os demais, Felipe tentava compreender, senão, perguntava ao pesquisador. Mário apenas concordava com os outros.

Felipe: Então, se deu quatro notas de 50, pagou 200 reais né? Então o troco é 40?

Diego: Isso Olha! 200 - 160 = 40. E se fizer o valor do troco, 40, mais o valor da venda, 160, dá 200, que é o valor pago.

Desta forma, a cada simulação, os membros do EES deveriam calcular tal relação a fim de verificar se o troco estava correto. Essa relação poderia ser utilizada para contribuir com os

membros do EES, já que eles poderiam verificar coletivamente se o valor calculado estava correto. Assim, em situações similares eles poderiam fazer o cálculo do valor da venda e do valor do troco, enquanto outros poderiam atuar na verificação, estimulando a contribuição de todos nesse processo.

A possibilidade de conferir os resultados a que chegavam mostrou-se importante para a autonomia dos membros deste EES, uma vez que passaram a ter maior segurança na realização do cálculo e conseguiriam efetuá-los sem ajuda de terceiros. Ademais, o trabalho realizado coletivamente favoreceu também a cooperação na execução das tarefas.

Considerações Finais

As oficinas foram desenvolvidas considerando os princípios da Etnomatemática, já que os problemas trabalhados tiveram como base dificuldades advindas do trabalho deste EES, ou seja, problemas próprios do contexto do grupo pesquisado. Isso auxiliou na aprendizagem dessas pessoas, que veem aplicação da matemática na resolução de um problema que pode ser útil em seus cotidianos. Ademais, foram compreendidos e respeitados os procedimentos matemáticos que o grupo utilizava, sem apresentar métodos matemáticos muito distantes desses, a fim de valorizar as práticas matemáticas próprias do grupo.

Além disso, nessas oficinas, com base na teoria de Vygotsky (1991), deu-se ênfase ao trabalho colaborativo. Tal abordagem foi benéfica, pois auxiliou no que diz respeito às discussões sobre os procedimentos e conceitos matemáticos, a participação de todos favoreceu o desenvolvendo um de maior comunicação e relacionamento entre os membros deste EES, contribuindo tanto de ensino e aprendizagem dessas pessoas quanto no fortalecimento do princípio da cooperação, que é um dos pilares da Economia Solidária.

Portanto, acreditamos que a atuação pedagógica de Educação Matemática desenvolvida auxiliou os membros deste EES na superação de algumas dificuldades e aquisição de maior segurança quanto ao uso da matemática em suas atividades de trabalho. Entendemos que, ao transformarmos a relação dessas pessoas com a matemática caminhamos na direção de contribuir com suas emancipações no trabalho.

Agradecimentos: à Pró-reitoria de Graduação da USP (Programa Ensinar com Pesquisa e Programa Unificado de Bolsas para Graduação); ao MEC/ PROEXT (2015)[1] e à FAPESP que concedeu auxílio num projeto anterior que deu inicio a atuação de Educação Matemática no contexto da Economia Solidária[2].

Referências e bibliografia

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

[1]PROEXT 2015/MEC/USP: Ações pedagógicas em Educação Matemática para membros de Empreendimentos de Economia Solidária da cidade de São Carlos/SP; (Coordenação); projeto aprovado.
[2]Houve a participação da pesquisadora (primeira autora deste artigo) no projeto "Proposição de diretrizes para políticas públicas em Economia Solidária como condição para desenvolvimento de território urbano: caso Jardins Gonzaga e Monte Carlo – São Carlos – SP". Apoio: FAPESP (na linha de Políticas Públicas – Processo: 07/55393-6, no período de 2009 a 2011).

Brasil (2006). Ministério do Trabalho e Emprego. Secretaria Nacional de Economia Solidária. *Atlas de Economia Solidária no Brasil.* Brasília: MTE/SNES.

Costa, D. A. F. (2006). Superando limites: a contribuição de Vygotsky para a educação especial. *Revista Psicopedagogia*, *23*(72), 232-240.

Damiani, M. F. (2008). Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. *Educar em revista*, 31, 213-230.

D'Ambrosio, U. (1996) Educação Matemática: *Da Teoria à Prática. Campinas*: Papirus.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. Minas Gerais: Autêntica.

Meneghetti, R. C G. (2013). Educação matemática e economia solidária: uma aproximação por meio da etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *6*(1), 40-66.

Meneghetti, R. C. G., & Gargarella, B. C. (2016) Etnomatemática e economia solidária na educação especial de adultos. *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática*– Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. (p. 1-12). São Paulo – SP: SBEM.

Ministério da saúde. *Centro de Atenção Psicossocial (CAPS).* Recuperado de: http://portalms.saude.gov.br/saude-para-voce/saude-mental/acoes-e-programas-saude-mental/centro-de-atencao-psicossocial-caps.

Singer, P., & Souza, A. R. A. (2000). *Economia Solidária do Brasil – A autogestão como resposta ao desemprego*. São Paulo: Contexto.

Thiolletn, M. (1986). *Metodologia da pesquisa-ação*. São Paulo: Cortez: Autores Associados.

Vygotsky L. S. (2006). *La imaginacion y el arte en la infância* (7ª ed.).. Madrid: Akal.

Vygotsky, L. S. (1991). *A formação social da mente*. (4ª ed.). (Trad. J. Cipolla Neto., L. S. M. Barreto & S. C. Afeche, Trad.). São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El signo cultural como protagonista de la planificación: implementando etnomatemáticas regionales en la escuela

María Elena **Gavarrete Villaverde**
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
maria.gavarrette.villaverde@una.ac.cr

Jesennia Chavarría **Vásquez**
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
jessenia.chavarria.vasquez@una.ac.cr

Margot Martínez **Rodríguez**
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
margot.martinez.rodriguez@una.ac.cr

Marcela García **Borbón**
División de Educología, Universidad Nacional
Costa Rica
marcela.garcia.borbon@una.ac.cr

Resumen

El objetivo de esta comunicación, es mostrar una propuesta desarrollada en Costa Rica para enriquecer la planificación docente desde la visión sociocultural de las matemáticas, utilizando como vehículo los signos culturales regionales. Esta propuesta surge como resultado de las producciones didácticas obtenidas por parte de docentes de primaria que participaron en un curso de Enculturación Matemática y Etnomatemática, impartido en varias zonas del país, en el cual dichos docentes fungieron un doble rol, de investigadores de etnomatemáticas regionales y de docentes reflexivos de su práctica profesional para enriquecer su planificación didáctica desde la visión sociocultural. El principal hallazgo, es, por lo tanto, una estructura de planificación didáctica, a partir de las etnomatemáticas de signos culturales regionales, que los docentes puedan utilizar para el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas en la escuela.

Palabras clave: etnomatemática, signo cultural, planificación didáctica, formación docente

Introducción

El propósito de esta comunicación es describir una propuesta que ha sido desarrollada con la finalidad de enriquecer la planificación docente desde la visión sociocultural de las matemáticas,

utilizando como medio el estudio etnomatemático de signos culturales regionales. Esta propuesta surge a partir del curso de formación continua para docentes de primaria titulado "Etnomatemáticas y Enculturación Matemática", que se enmarca en el proyecto Formación de docentes en la visión sociocultural de las matemáticas, el cual surge en el 2015 como un esfuerzo conjunto de la Escuela de Matemática (EM) y la División de Educología (DE) de la Universidad Nacional (UNA), ante los desafíos nacionales e internacionales de atender la diversidad sociocultural, como una forma de propiciar la equidad y la justicia social

El propósito del curso radica en *promover la apropiación y comprensión del conocimiento desde una visión sociocultural de las matemáticas*, y está dirigido a docentes de primaria en ejercicio, que provengan de zonas rurales, urbano marginales y zonas indígenas o costeras. En las actividades desarrolladas, se propuso la etnomatemática en procura de promover la reflexión de los docentes sobre elementos de su entorno sociocultural para integrarlos en el desarrollo de su actividad profesional: dando lugar a la construcción de producciones didácticas a partir de la investigación etnomatemática de contextos locales. Cabe destacar que los docentes ya contaban con la experiencia y formación en competencias de planificación didáctica, por lo que el aporte de este trabajo es fortalecer dichas competencias, considerando los elementos del entorno sensibles a incorporarse en el aula, y que puedan abordarse en las clases de matemática.

Gavarrete, Albanese, Martínez, García y Chavarría (2018), plantean que el diseño del curso de enculturación de docentes a partir de etnomatemática se da en función de estimular:

- la sensibilización sobre la dimensión histórica y filosófica de la matemática,
- la sensibilización sobre la visión social y cultural de las matemáticas,
- la formación de los docentes como enculturadores matemáticos, es decir como sujetos que se apropian de su identidad regional desde la investigación de las matemáticas de su entorno,
- el fortalecimiento de la creatividad docente a partir de actividades que inducen a la creación de recursos didácticos contextualizados con el entorno del docente (p.364)

Las actividades desarrolladas en el curso contemplan un proceso de formación y sensibilización sobre la teoría desarrollada por Alan Bishop, respecto a la visión sociocultural de las Matemáticas y la Enculturación Matemática como un proceso de formación profesional; así como también, proponer la figura del docente como investigador de su contexto y de su propia práctica pedagógica, en la cual se promueve el desarrollo de una planificación curricular a partir de un signo cultural.

El docente como investigador de su contexto, elige un signo cultural de su comunidad o entorno, y a partir de él, considera las seis actividades matemáticas universales de Bishop (1988, 1999): contar, medir, localizar, diseñar, jugar, explicar; así como otras específicas en Costa Rica (clasificar, estimar y relacionar); vinculadas a dicho signo. Una vez seleccionado el signo cultural y las actividades matemáticas, el docente planifica y en algunos casos implementa en su aula estrategias pedagógicas dirigidas a partir del signo cultural seleccionado.

La Planificación Didáctica desde el Enfoque Intercultural

El interés por orientar la formación docente desde la visión del Programa de Etnomatemática (D'Ambrosio, 2008) radica en potenciar estas competencias que permitan "descongelar matemáticas" (Gerdes, 1985) insertadas en objetos culturales, y promover la creatividad docente

necesaria para desarrollar el currículo de matemáticas en conexión con el entorno sociocultural. Sin embargo, para presentar a las matemáticas como una ciencia al alcance de todos, se requiere un discurso que muestre la concordancia entre la matemática y su conexión con otras disciplinas (Oliveras, 1996).

Las propuestas de mediación en el aula plantean el protagonismo del estudio de un "signo cultural", entendido éste como un rasgo característico de una cultura, con el cual se puede construir una secuencia de actividades para introducir un concepto matemático escolar (Gavarrete y Albanese , 2015) cuyo potencial didáctico -matemático se pueda aprovechar en las aulas escolares (Oliveras, 1996). Desde esta perspectiva, se promueve una pedagogía culturalmente relevante (Rosa, D'Ambrosio, Orey, Shirley, Alangui y Gavarrete, 2016) y la sensibilización docente hacia la matemática como un fenómeno cultural que es compartido socialmente (Bishop, 1999).

Blanco (2008a) plantea que la visión pedagógica que se asume desde la Etnomatemática, debe regirse sobre una práctica y dentro de las necesidades ambientales, sociales y culturales, así como también dar espacio para la imaginación y para la creatividad, donde el docente tiene en cuenta el contexto en el que sus alumnos viven. Asimismo, Blanco (2008b) plantea que la etnoeducación requiere de etnoeducadores que promuevan en sus alumnos una visión crítica del presente y que les faciliten los instrumentos intelectuales, explícitos, analíticos y materiales para su desarrollo en una sociedad multicultural.

El proceso de *enculturación* de los docentes, abarca los aspectos teóricos y metodológicos, que se traducen en abordar el estudio del conocimiento matemático en el contexto regional del docente, quien se implica en un proceso de investigación de las etnomatemáticas de su propio entorno y quien reflexiona acerca de su propia práctica, con el fin de favorecer un aprendizaje significativo con pertinencia cultural.

Gavarrete y Albanese (2015) recalcan que lo que se pretende es que los docentes desarrollen competencias o habilidades para analizar los problemas de su aula y darle soluciones abiertas y coherentes con la realidad temporal y del entorno; para ello, la metodología de trabajo que ha sido implementada en estas experiencias formativas está centrada en el estudio de las matemáticas implícitas en un *signo cultura*l.

Gavarrete, M.E.; Albanese, V.; Martínez, M.; García, M. y Chavarría, J. (2018) establecen que en el proceso investigativo del signo cultural se reflexiona sobre la universalidad del conocimiento matemático y sus aplicaciones didácticas, ya que se ha buscado una formación didáctico-matemática para promover competencias que les permita a los docentes observar elementos, cotidianos y ancestrales, de la cultura desde una perspectiva matemática; además, establecer relaciones entre objetos culturales, materiales o simbólicos, y conceptos o propiedades; diseñar actividades basadas en situaciones culturales, que puedan abordarse en las aulas de matemáticas caracterizadas por su diversidad cultural; y, llevar a cabo el desarrollo del currículo de matemáticas con un enfoque intercultural, tanto en sus fines como en sus recursos.

Desde esta perspectiva se materializa el proceso de planificación considerando la posibilidad de hacer explícitas las matemáticas que están implícitas en el entorno del docente y del estudiante. Para ello, se entiende por planificación "el proceso de toma de decisiones que permite imaginar y crear ambientes y experiencias de enseñanza y de aprendizaje antes de que ocurran" (Martínez,

2007, p.232). Esto incluye decidir acerca de la intencionalidad educativa, las estrategias metodológicas, los métodos y técnicas de evaluación, los medios o recursos a utilizar, el ambiente o infraestructura, considerando el contexto sociocultural, las características del estudiantado, el rol que cada participante del proceso educativo ejerce, entre otros factores. La planificación didáctica se concentra en cuatro interrogantes alrededor de las cuales debe reflexionar el docente para la organización del proceso de enseñanza y de aprendizaje: *¿para qué enseñar?, ¿qué enseñar?, ¿a quiénes enseñar?, ¿cómo?* y *¿cuándo enseñar*?

El *para qué* enseñar responde a la intencionalidad que tiene en el proceso, es decir, las habilidades que se desean alcanzar, haciendo énfasis en los resultados. El *qué* enseñar refiere al contenido, para el cual el docente debe considerar su criterio pensando en que éste sea asequible al estudiantado. La tercera pregunta, a *quiénes enseñar,* apunta al estudiantado con quien se va a desarrollar el proceso de enseñanza y de aprendizaje; sus características, intereses, capacidades, entre otros factores. *Cuando* y *cómo* enseñar, implican la organización en tiempo, es decir, trimestres, ciclos, número de lecciones en las cuales se va a desarrollar el contenido y el cumplimiento de objetivos; y, la metodología, que responde a las estrategias de enseñanza y de aprendizaje y los recursos o materiales a utilizar en el aula para propiciar aprendizajes significativos. Dentro de la planificación también está la evaluación como un proceso permanente y continuo que nos permite conocer el avance en los aprendizajes del estudiantado a partir de técnicas e instrumentos.

Planificación Curricular a partir de un Signo Cultural

La planificación curricular que se propone, a partir de un signo cultural, es coherente con la propuesta de los programas del Ministerio de Educación Pública (MEP) aprobada en el 2012 para la enseñanza de la matemática, que busca romper paradigmas y mitos que han acompañado a esta disciplina en los diferentes niveles del sistema educativo costarricense, a través de una estrategia que promueve una visión de la matemática como algo más cercano a la realidad inmediata. En lo que refiere a la contextualización, se propone que el estudiante tenga un papel activo en su proceso de aprendizaje, que sea capaz de construir su propio conocimiento a través de la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos relacionados con su realidad educativa. Aquí, se entiende como modelo a "un conjunto de elementos matemáticos conectados que representan una realidad específica (explican, describen, permiten hacer predicciones)" (MEP, 2012, p. 31).

Según la posición del MEP (2012) "al colocar los objetos matemáticos en contextos socioculturales se permite visualizar la participación de heurísticas, dudas, errores, concepciones equivocadas e incluso la existencia de retrocesos cognoscitivos en algunos campos" (p. 39). Con más frecuencia de la debida, la matemática que predomina en las aulas es una matemática eurocéntrica y que no alude a la multiculturalidad del mundo contemporáneo. Los estudiantes se enfrentan al reto de aprender en ambientes que subvaloran o ignoran su propia cultura, con lo cual, se justifica la relevancia de incorporar el signo cultural para enaltecer el sentido de identidad de las regiones, a través de la planificación didáctica, motivando a los estudiantes de culturas diversas a sentirse orgullosos de las contribuciones del conocimiento local al desarrollo del conocimiento global (Rosa et al, 2016).

El signo cultural, desde el marco de esta propuesta de planificación didáctica para la educación matemática en primaria, constituye un elemento transversal en la planificación didáctica como

protagonista en el *qué enseñar* y *para qué enseñar*, *a quienes enseñar, cuándo* y *cómo enseñar*.

La planificación didáctica desde la perspectiva sociocultural: algunos resultados

Los elementos que se proponen para la planificación didáctica desde la perspectiva sociocultural de las matemáticas consideran: la descripción del signo cultural, las Actividades Matemáticas Universales asociadas al signo cultural, aspectos curriculares (área de conocimiento, nivel educativo, conocimientos matemáticos, habilidades específicas e indicadores de logro), secuencia y actividades didácticas y evaluación.

En cuanto al *signo cultural*, concebido como eje transversal de la planificación, refiere a aspectos históricos, anecdóticos, contextuales, económicos, sociales, entre otros. En la experiencia de implementación, los signos culturales fueron determinados por cada uno de los docentes participantes al curso y se circunscriben al contexto de una determinada Región Educativa, sin que esto impida su réplica o estudio en otras regiones del país. Cada signo cultural es el resultado de un proceso de investigación, enculturación y empoderamiento docente, que evidencia la identidad de una región, de un grupo social o de una práctica cultural.

La descripción del signo cultural, pretende responder preguntas como las siguientes: ¿cómo se desarrolla dicha actividad?, ¿dónde se realiza?, ¿quiénes la efectúan?, ¿en qué contextos se lleva a cabo?, entre otras. La pesca artesanal, por ejemplo, fue uno de los signos culturales analizados, y a pesar de surgir en una determinada región del país constituye un signo presente en diversas zonas de Costa Rica. De esta práctica, dependen económicamente miles de familias, y puede analizarse desde la acción de pescar, ligado al tipo de red que se utiliza, el tipo de pez que se obtiene, hasta su comercialización.

Por su parte, las *Actividades Matemáticas Universales* (AMU) fueron consideradas en la planificación didáctica, pues permiten describir la funcionalidad y el potencial del signo cultural para el desarrollo de conocimientos o habilidades matemáticas. Cabe destacar que no todos los signos culturales se asocian explícitamente a las seis actividades matemáticas universales. Por ejemplo, en el signo cultural del Desfile de Boyeros, actividad de festejo presente en ciertas zonas de Costa Rica, fueron identificadas las AMU vinculadas con contar, medir, localizar y diseñar; esto, por cuanto se puede contar la cantidad de boyeros, se mide la distancia que guarda cada carreta y boyeros en el desfile, se localiza el recorrido oportuno para efectuar dicho desfile y existen múltiples diseños en cada carreta dentro del desfile.

En cuanto a los *aspectos curriculares* considerados para la planificación didáctica se establecieron: área de conocimiento, nivel educativo, conocimientos matemáticos, habilidades específicas e indicadores de logro. En la Figura 1 se muestra cómo dichos elementos consideran los aspectos fundamentales para la organización curricular.

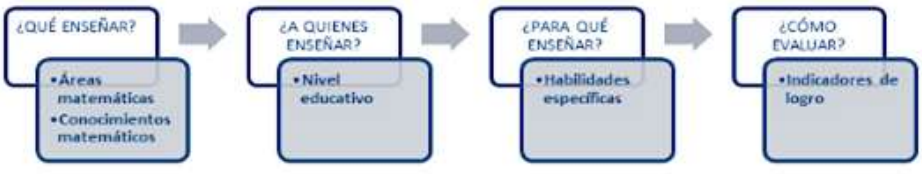


Figura 1. Elementos curriculares considerados para la planificación

El programa de estudio de matemática para la educación primaria y secundaria en Costa Rica,

establece cinco áreas matemáticas: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra y Estadística (MEP, 2012). Al respecto, Ruíz (2013) menciona que: "El currículo se diseñó con una integración vertical del primer grado escolar al último. La fundamentación teórica (filosófica y curricular) es la misma para todo el currículo, las áreas matemáticas son las mismas" (p.25). La planificación didáctica propuesta guarda coherencia con lo establecido en el programa de estudio del MEP, de manera que alude a las cinco áreas matemáticas establecidas en dicho programa.

El nivel educativo, por otra parte, es el grado escolar en el cual se pretenden desarrollar determinados conocimientos matemáticos y habilidades específicas. Los conocimientos y las habilidades específicas son contempladas de forma textual del programa de estudio. Esta propuesta favorece las conexiones e interrelaciones horizontales y verticales entre el área y el nivel educativo, tal y como se ejemplifica en la Figura 2.



Figura 2. Coherencias verticales y horizontales de las Unidades Didácticas.

Los indicadores de logro, por otra parte, constituyen criterios de evaluación, pero, además, representan la conexión, entre los conocimientos y habilidades matemáticas propuestos y el signo cultural. La Figura 3 muestra un ejemplo de esta conexión, con respecto al signo cultural del Desfile de Boyeros.



Figura 3. Conexiones entre indicadores de logro, conocimientos matemáticos y habilidades específicas

Los conocimientos matemáticos es un apartado considerado en la planificación didáctica que incluye aquellas definiciones, representaciones, propiedades, entre otros, relativos al contenido o contenidos matemáticos que se abordan.

Los elementos curriculares descritos hasta el momento son materializados en el diseño de la *secuencia y las actividades didácticas* que se sugieren al docente, donde el signo cultural es el protagonista del proceso de mediación. Por ejemplo, si el signo cultural es un determinado baile folclórico, una propuesta de mediación va a estar orientada a que los niños realicen el baile mientras se estudian elementos matemáticos geométricos.

La secuencia didáctica y actividades, están construidas en función de los indicadores y por esta razón responden a diversos niveles educativos, tal y cómo se evidenció previamente. De esta forma, cada docente en la planificación de su mediación pedagógica en el aula debe considerar si algunas actividades son pertinentes o no, para su grupo o grupos de niños; es decir, las actividades constituyen una propuesta que debe ser adaptada por los docentes de primaria, en función del nivel de los estudiantes, de los recursos disponibles y de las condiciones de cada institución educativa.

Finalmente, esta planificación didáctica contempla una *guía de evaluación para el docente*, donde se sugiere una rúbrica que pretende servir de base en la verificación de avance o logro de los indicadores propuestos. Esta rúbrica propone una escala cualitativa del nivel de rendimiento del estudiante, que representa un grado de apreciación por parte del docente en función del nivel de logro en las actividades.

Reflexiones Finales

Durante el tiempo en que se implementó el curso, se comprobó que muchos docentes cuentan con provechosa experiencia en el uso del recurso de la contextualización en su planeamiento docente. Fue muy satisfactorio, para las autoras-facilitadoras del curso, escuchar las intervenciones de algunos participantes, cuando explicaban - con mucho entusiasmo - que ya habían usado elementos de su contexto e incluso de su cultura, como base para el diseño de actividades de aula, así como los ventajosos resultados de esta práctica. Con sus comentarios, validaron la importancia de usar elementos propios de su entorno y herencia cultural como una forma de lograr un aprendizaje significativo, si bien admitieron que no conocían los conceptos de "etnomatemática" o "enculturación" propiamente, ni estar familiarizados con la visión sociocultural de las matemáticas. Por ejemplo, algunas docentes mencionaron proyectos basados en el salto de la cuerda o la elaboración de caballitos de palo en el abordaje de las matemáticas en contexto.

Como bien explican Albanese y Gavarrete (2015), la inclusión de las etnomatemáticas en la formación de maestros ha mostrado ser efectiva en la promoción de la equidad en la educación matemática. La reflexión profesional que ese proceso promueve resulta en la valorización del conocimiento ancestral dentro de un proceso de educación multicultural. Las reflexiones de los maestros sobre su rol como educadores en entornos específicos les ha conferido la posibilidad de enaltecer su profesión como agentes difusores de su cultura, además de considerar la elaboración de microproyectos curriculares basados en etnomatemáticas una práctica pedagógica que promueve procesos de enculturación (p.313).

Esta propuesta didáctica, por tanto, potencia el desarrollo de una educación que permita combatir la exclusión social vinculada a un currículo monocultural y etnocéntrico, así como promueve un equilibrio entre los conocimientos locales y globales para favorecer el trabajo en la escuela.

Referencias y bibliografía

Bishop, A. (1988). Aspectos sociales y culturales de la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 6 (2*), 121-125.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona: Paidós.

Blanco, H (2008a). Entrevista al profesor Ubiratán D'Ambrosio. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 1*(1), 21-25.

Blanco, H. (2008b). La integración de la etnomatemática en la etnoeducación. En *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/874/1/11Conferencias.pdf.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad.* México: Limusa.

Gavarrete, M. E. y Albanese, V. (2015). Etnomatemáticas de signos culturales y su incidencia en la formación de maestros. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8*(2), 299-315.

Gavarrete, M.E.; Albanese, V.; Martínez, M.; García, M. y Chavarría, J. (2018). Enculturación Matemática y Etnomatemática: fundamentos teóricos, metodológicos y empíricos de un proyecto de formación docente en Costa Rica, En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Eds.), *Libro de Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Madrid, 2017* (pp. 360-368). ISBN 978-84-945722-3-4

Gerdes, P. (1985). Conditions and strategies for emancipatory mathematics education in undeveloped countries. *For the Learning of Mathematics, 5*(1), 15-20.

Martínez, N. (2007). La planificación de un curso: una breve guía para profesores. *Revista Docencia Universitaria, 8*(1), 231 - 239

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de matemáticas*. San José, Costa Rica: Autor.

Rosa, M.; D'Ambrosio, U.; Orey, D. Shirley, L; Alangui, W. Palhares, P. y Gavarrete, M.E. (2016). *Current and Future Perspectives of Ethnomathematics as a Program*. Springer International Publishing: India.

Ruiz, A. (2013). La reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (10), 1-111.

Oliveras, M.L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Teatro no Ensino da Matemática: o lúdico como estratégia para humanizar a Matemática

Cláudia **Concordido**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro Universitário IBMEC-RJ
Brasil
concordido@ime.uerj.br

Jeanne **Barros**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Projeto Fundão, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
jeanne@ime.uerj.br

Maurício **Mendes**
Colégio Militar do Rio de Janeiro
Brasil
mauricio.mendes@uol.com.br

Daniele **Motta**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
daniele_motta@hotmail.com

Resumo

O artigo versa sobre a utilização do teatro como uma forma lúdica para atrair alunos do Ensino Básico a se envolverem na Matemática. São apresentadas aqui três experiências desenvolvidas no Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ), como atividades extra, para turmas de nono ano do Ensino Fundamental, com o uso do teatro na motivação para estudar Matemática. Três temas da História da Matemática foram escolhidos, em três anos consecutivos, para o qual o discente se vê obrigado a desenvolver pesquisas, escrever e representar peças teatrais. No final desse percurso, há um envolvimento que faz o alunado ver com outro olhar as ciências exatas, desenvolvendo a criticidade, aumentando a sensibilidade e o senso de solidariedade, passando a encarar a Matemática como uma ciência temporal, humana e sujeita a interferências políticas e sociais. Verificamos que a utilização do teatro no ensino da

Matemática une alunos afeitos tanto às ciências humanas como às ciências exatas, solidificando as relações entre os membros da comunidade escolar.

Palavras chave: teatro no ensino de Matemática, História da Matemática, ludicidade.

Introdução

Muitos alunos veem a Matemática somente como uma ciência exata, dissociada do contexto histórico-social. Nesta parcela existem aqueles que têm, por afinidade, uma performance mais destacada nas disciplinas de cunhos social e humano, muitas vezes, criando uma espécie de bloqueio ao aprendizado da Matemática e de outras ciências exatas.

O uso de jogos teatrais atrai o interesse daqueles mais simpáticos às ciências sociais e humanas e, também, permite àqueles que gostam da Matemática a visão de que essa disciplina é construída no tempo e está sujeita a interferências políticas e sociais. A História da Matemática é o fio condutor-motivador para a aprendizagem da disciplina, uma vez que, ao pesquisar fatos históricos de determinado tema, os alunos podem despertar um interesse pela Matemática, tornando-a mais concreta. Além disso, há a oportunidade de se treinar a abstração (representar quem não se é, é abstrato) e de se discutir diversos temas morais, que dizem respeito à sensibilidade, abrindo uma possibilidade de desenvolver a criticidade.

Em 2014, fazendo uso do teatro, foi desenvolvida, como atividade extra curricular, a escrita-montagem-encenação de uma peça teatral com um tema de História da Matemática, no ensino básico do Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ). Essa experiência foi tema de dissertação de mestrado profissional no IME/UERJ (Mendes, 2014), culminando na fundação do Clube de História da Matemática no CMRJ.

O Clube teve continuidade nos anos 2016 e 2017 quando passou a fazer parte de um projeto de Extensão da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, em parceria com o CMRJ. Por meio desse projeto, buscou-se iniciar os licenciandos em Matemática em atividades lúdicas como metodologia para o ensino dessa disciplina na sua futura prática docente. Houve nos dois anos de projeto a participação de uma aluna bolsista do curso de Licenciatura em Matemática. Estabeleceu-se, então, uma conexão entre o ensino superior e a escola básica, promovendo com isso a aquisição de novos conhecimentos por parte do futuro professor.

Este trabalho discorre sobre a importância das atividades teatrais nas classes de nono ano do Ensino Fundamental, cujos temas desenvolvidos pelos alunos nesses três anos foram o imbróglio entre Cardano e Tartaglia (Roque, 2012), a história do número zero (Roque, 2012; Kaplan, 2001) e a história de Pitágoras e sua filosofia (Roque, 2012).

Referencial Teórico

Entender a Matemática como uma ciência exata, porém contextualizada na história, é fundamental quando existe o objetivo de desenvolver a criticidade dos alunos e efetivamente prepará-los para atuar na sociedade de forma mais ampla, ainda que sua vida profissional esteja mais voltada para ciências exatas.

É importante o aluno perceber que a Matemática aprendida tanto no passado, como no presente, não está dissociada das outras diversas manifestações culturais, científicas, políticas e sociais e, assim, contribuir para o desenvolvimento do pensamento crítico.

A necessidade de atrair o interesse dos alunos para o ensino da Matemática não é nova. Desde séries iniciais são desenvolvidas pesquisas envolvendo jogos, brincadeiras que estimulam

ou atraem as crianças para a Matemática. No entanto, no segundo segmento do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, a Matemática fica afastada do contexto social. Isso acaba por afastar alunos dessa ciência, que independentemente dos conteúdos nela desenvolvidos, agrega também competências e habilidades importantes para o ser social, tais como: raciocínio lógico, capacidade de concentração, poder de síntese. Isso sem considerar conteúdos comuns a todos da sociedade (porcentagem, juros, operações básicas, perímetro, área, etc).

A oportunidade de o aluno representar, assumindo personagens da História da Matemática, atrai os desafetos das ciências exatas para perto e espera-se que isso se torne uma motivação extra ao aprendizado. Além da História da Matemática, fatos do cotidiano podem ser explorados e representados pelos alunos, ou ainda histórias como as contadas por Malba Tahan (2013) podem ser utilizadas.

Assim, trabalhar com teatro para ensinar ludicamente a Matemática, além de incentivar a busca de novos conhecimentos, também tem a função de formar criticamente o discente, apoiando-se na história e nas manifestações artísticas. E, para tal, faz-se necessário superar concepções que consideram tais manifestações como simples lazer ou algo supérfluo.

Merece destaque que a busca por uma forma lúdica de ensinar deve ser um motivador ao aprendizado, e não substituir aquilo que está posto.

Zuin (1999, p. 279-280) destaca que:

> Os grupos [de alunos] têm demonstrado grande interesse pelo desenvolvimento dos temas. Existe grande participação e envolvimento da turma. A criatividade é o ponto alto das apresentações: escrevendo mini-peças, apresentando teatros de fantoches, produzindo vídeos e materiais alternativos para o ensino de Matemática, os futuros professores se mostram capazes de inovar a prática pedagógica.

Se tais ações são positivas para alunos da graduação, quiçá para alunos do ensino básico. Qualquer oportunidade de se expressar além das formas tradicionais costuma ser incentivadora dentro do processo ensino-aprendizagem. A partir da possibilidade de se expressar ludicamente, o discente pesquisa, discute, busca se aprimorar em temas que tradicionalmente não teria interesse.

Fazendo isso, além de se apropriar de conhecimentos oriundos do capital cultural da humanidade, não raramente esse aluno desenvolve a criatividade e a imaginação. Goldschmidt (2004, p. 69) destaca que "nos processos de ensino aprendizagem pouca ênfase é dada à imaginação, que comumente é confundida com simples fantasia, resultando daí um certo desconhecimento para com suas virtualidades educativas através do fazer artístico".

Formas lúdicas de ensinar, além de serem incentivadoras para apropriação do conteúdo, cumprem o papel de despertar a imaginação e o interesse do educando. E é com práticas imaginativas que habilidades e competências necessárias a artistas em diversas modalidades, e até mesmo profissionais requisitados pelo mercado de trabalho se desenvolvem.

Davis (1993) proferiu palestra onde aponta a Matemática como uma ciência humana, elencando diversos aspectos humanísticos da Matemática. Traçando paralelos, principalmente, com a literatura, o autor argumenta que, assim como ela, a Matemática tem metáforas, ambiguidades, paradoxos. Faz ainda paralelos com a Filosofia, Antropologia e Teologia. E também destaca que a Matemática tem uma história e não é atemporal, da mesma forma que qualquer ramo do conhecimento.

A Matemática interfere na vida das pessoas das mais diversas formas no dia a dia, desde problemas relativos a finanças a problemas envolvendo pesos e medidas. Ainda hoje se pode dizer que influencia a Filosofia, visto que as bases que norteiam o pensamento filosófico ainda sofrem influência do tempo que Filosofia e Matemática se misturavam. E qual disciplina humana não tem a filosofia como escudeira?

Assim, segundo Davis (2013), se pode afirmar que se a Matemática apresenta características humanísticas, então esperamos que ela promova valores humanistas, que incitem a consciência da responsabilidade humana integral. Enfim, o autor defende a necessidade da Matemática, como ciência humana, despertar valores humanísticos. E a arte, em suas diversas manifestações, é uma excelente ferramenta para desempenhar esse despertar.

Conteúdos de qualquer disciplina podem ser ensinados através de encenações teatrais de uma forma mais concreta, oferecendo diversas possibilidades de discussão sobre temas que objetivam a formação moral do indivíduo, de uma forma que tende a ser mais prazerosa.

O teatro atrai público e pode ser aproveitado para apresentar conteúdos e desenvolver no indivíduo competências e habilidades ligadas a valores morais, éticos, estéticos e que despertem a sensibilidade, o afeto, a desinibição, a comunicação (nas suas diversas formas: corporal, gestual, visual, auditiva). E, claro, obriga o artista a pesquisar sobre aquilo que deseja manifestar.

Conteúdos densos e abstratos se tornam mais leves e ganham concretude quando podem ser representados. E, na própria peça teatral, todos os envolvidos, autores, figurinistas, músicos, atores precisam também abstrair, viver uma realidade que na maioria das vezes não é a sua. Poligicchio (2011, p. 23) diz que:

> [...] ao estudar um fato histórico antigo, o aluno precisa abstrair, ou seja, imaginar uma realidade que não condiz com o contexto atual. Quando falamos em moléculas, átomos, reações químicas, cargas eletromagnéticas, por exemplo, há uma necessidade extrema de abstração, visualização e imaginação das teorias que, muitas vezes, não se materializam diante de nós. As ciências exatas trabalham com modelos que exigem alto grau de abstração para compreendê-los. Tais como as teorias em torno das viagens espaciais. Falar em curvatura do espaço, em buraco de minhoca, ou física quântica, exige alto grau de imaginação. No âmbito teatral, a imaginação é o elemento chave do ator. A boa representação consiste em que o ator imagine o tempo todo em que estiver em cena, que é o que não é, que está onde não está, que sente o que não sente e com bastante convicção.

Tão importante como desenvolver a criticidade e a ludicidade é desenvolver a criatividade artística. Esses elementos se retroalimentam para formar o que socialmente deve (ou deveria) ser o papel dos sistemas de ensino: a formação do cidadão pleno para atuar em diversas frentes, como trabalho, solidariedade, política, família. Um cidadão que possa contribuir para a sociedade e usufruir o que esta sociedade lhe oferece.

Metodologia

Nos três anos nos quais os trabalhos foram desenvolvidos, o estudo de caso foi utilizado metodologicamente, com acréscimo da observação participante, na medida em que um dos autores do presente artigo é professor da instituição. Portanto sua participação é considerada necessária, assim como as ações, indiretamente, acabam também sendo acompanhadas e

avaliadas no processo investigativo desta pesquisa.

A pesquisa é, portanto, qualitativa e trabalha com diretrizes em substituição às hipóteses da pesquisa convencional. Porém essa não existência de hipóteses não faz a pesquisa perder o processo hipotético: as comprovações das afirmativas acontecem, sempre que necessário, respaldadas em teoria bibliográfica.

Dessa forma, nesta pesquisa, que é de cunho social, a observação de aspectos qualitativos tem prioridade: envolvimento dos alunos na proposta, socialização do grupo, interesse nos fatos históricos discutidos, capacidade de superação aos empecilhos da prática, os valores éticos envolvidos, a crítica. Enfim, os fenômenos qualitativos vivenciados, observados e resgatados.

Foram escolhidos, em cada ano acima citado, os seguintes temas:

- 2014: o imbróglio entre Cardano e Tartaglia a respeito da publicação, pelo primeiro, em sua obra *Ars Magna*, das descobertas feitas pelo outro de uma fórmula para resolver equações polinomiais do 3º grau (livre escolha entre 3 temas);
- 2016: a história do número zero percorrendo as principais civilizações que contribuíram para o surgimento desse número (tema proposto pelo projeto de Extensão);
- 2017: a história de Pitágoras e sua filosofia, quando foi possível aos alunos ver que este matemático fez bem mais que o conhecido teorema (livre escolha entre 3 temas).

A partir de pesquisa bibliográfica a respeito dos temas elencados nas três edições, são marcados encontros, semanais de uma hora, na própria sala de aula, inicialmente, para discussão das pesquisas realizadas. Começam os ensaios do teatro. Em todas as edições o grupo se divide e alguns cuidam do figurino, outros do cenário (Figura 1(a)), outros do som. Durante os ensaios a alegria é evidente. Todos brincam, descontraem, sem perder os objetivos. Vale ressaltar que, em 2016, foram realizados exercícios sobre o tema, durante o desenvolvimento da pesquisa bibliográfica.



(a) (b)

Figura 1. (a) Preparativos de cenário; (b) Apresentação da peça de 2014.

O teatro, com todo o amadorismo como é feito na presente pesquisa, seduz muitos indivíduos. Em todas as etapas do processo (formação do grupo, distribuição das tarefas, pesquisa bibliográfica, discussão dos fatos pesquisados, escrever a história, preparar e adequar falas e roupas e se colocar diante de um público) até a apresentação final (Figura 1(b)) e, mesmo depois disso, proporciona empreender diversos aspectos cognitivos, afetivos e psicomotores.

Resultados e Discussões

No decorrer das etapas do processo de criação, ensaio e apresentação da peça, nos três anos, foi visto de forma clara que os jogos teatrais são importante estratégia pedagógica para motivar os alunos da escola básica para estudo da Matemática. Até porque os roteiros criados procuravam traçar um paralelo entre o fato histórico e alguma situação atual ou cotidiana dos alunos (por exemplo, a briga entre deputados no Congresso Nacional em contraponto ao imbróglio entre Cardano e Tartaglia, na peça de 2014).

A partir do fato histórico elencado, criou-se no aluno a expectativa do conhecimento matemático envolvido. O passo a passo da pesquisa proporciona aos envolvidos o prazer da busca do conhecimento e da criatividade. A percepção de que os personagens da história, muitas vezes citados como gênios, são pessoas comuns, sujeitos a falhas de conhecimento ou mesmo de caráter, leva os envolvidos, seja o grupo de atores, ou a plateia, a refletir a respeito e aguça a criticidade.

Por outro lado, vencer a timidez, improvisar, colaborar com o companheiro que esquece sua fala, enfim, fazer algo de forma ativa e participativa contribui na formação afetiva.

A preocupação com a apresentação em público (Figura 2 (b)) foi evidente em todas as etapas da atividade. Eles se veem envolvidos no próprio gerenciamento de tempo e recursos. E todo o processo é desenvolvido em grupo, fator apontado como primordial na formação escolar visando à preparação para a vida social e profissional. Além disso, observou-se que os alunos sempre buscavam dar certo humor à história (Figura 2 (a)) até para tornar o tema mais interessante para plateia e, também, para a encenação ser mais lúdica e próxima de suas realidades, conforme mencionado acima.



(a) (b)

Figura 2. (a) Cartaz da peça de 2016; (b) Apresentação da peça (2016).

No terceiro ano de atividade do Clube, 2017, houve a maior quantidade de alunos no projeto (34 alunos voluntários). Foram apresentados pelos professores três possíveis temas: os números irracionais, a história do número π e Pitágoras, tendo sido esse último o tema escolhido pelos alunos (Figura 3 (a)).



(a) (b)

Figura 3. (a) Cartaz da peça (2017); (b) Página do Clube.

Foi criada ainda uma página no Facebook (Coliseu da Matemática) para que os alunos e os professores envolvidos troquem informações, compartilhem os textos que encontraram, publiquem vídeos, etc (Figura 3(b)). Lá encontram-se textos sobre a escrita de roteiros teatrais, artigos sobre os pitagóricos e sua filosofia, vídeos sobre números e notas musicais, dentre outros.

Conclusões

As atividades teatrais são utilizadas há muito tempo como estratégia pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem e se mostram eficazes quando se inseridas em turmas de jovens, e o presente trabalho confirma essa afirmação. De fato, a experiencia de teatro associado à História da Matemática torna possível ao aluno obter sucesso cognitivamente e desenvolver-se crítica e políticamente, permitindo-lhe se manifestar artisticamente. Isso por si só estimula a participação e aguça a curiosidade.

Constatou-se que a atividade teatral faz os alunos trabalharem de forma multidisciplinar, o que atualmente tem sido explorado pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e por outros vestibulares. A partir de um tema da História da Matemática (História e Matemática), pesquisam (habilidade importante para todas as disciplinas, sem exceção) e redigem um texto (Português) no qual se obrigam a conhecer os personagens, seus costumes, sua época, sua localização (Geografia). Como os temas envolvem personagens que são matemáticos (2014 e 2017), numa época em que é comum os indivíduos se envolverem em diversas áreas do conhecimento, os alunos têm, também, contato com a história das ciências em geral. Aspectos filosóficos e sociológicos aparecem naturalmente na história real e são discutidas durante as encenações, com a preocupação dos discentes.

Esse tipo de trabalho aproveita o envolvimento dos alunos no que concerne a apresentações teatrais para atrair o interesse tanto daqueles mais simpáticos às ciências sociais e humanas como também daqueles mais ligados às ciências exatas, formando um só grupo. A partir dos fatos vivenciados, ambos potencializam seu interesse pela Matemática, tornando-a mais concreta, ainda que os fatos tratem de assuntos abstratos.

O ator (no caso o aluno) vivencia uma realidade que não é a sua, o que o obriga a abstrair, habilidade importante, também, para todas as disciplinas. De acordo com Reverbel (1997, p. 25): O ensino do teatro é fundamental, pois através dos jogos de imitação e criação, a criança é estimulada a descobrir gradualmente a si próprio ao outro e ao mundo que lhe rodeia.

Durante a nossa experiência foi defendido muito fortemente o argumento da importância da escola no desenvolvimento da criticidade dos discentes. E a criticidade é proeminente em todas as etapas da atividade aqui estudada: para escolher o tema, pois o assunto deve ser

relevante e atrativo; na busca por informações a respeito do tema, já que as fontes devem ser confiáveis; na escritura do texto, havendo preocupação com o vocabulário e com a história em si; nos ensaios quando cobram uns dos outros seriedade e se comprometem a ajudar os companheiros nas disciplinas que têm pendências; no dia da apresentação, com o comprometimento para tudo dar certo.

A escola é a instituição em que a sociedade deposita as expectativas de formação educacional do indivíduo e onde, espera-se, este vai formar grande parte do seu caráter, além de evoluir cognitivamente e ter plenitude no exercício de cidadania.

Há diversos temas interessantes que poderiam ser escolhidos pelos alunos e que podem ser explorados na mesma linha, como, por exemplo, "mulheres na Matemática", "o número π", "a história de George Pólya" ou de "Johannes Kepler". O leque de opções é grande e depende das motivações da instituição, do docente ou dos próprios alunos.

Os autores agradecem à FAPERJ pelo apoio financeiro.

Referências e bibliografia

Davis, P. J. (1990). The Humanistic Aspects of Mathematics and Their Importance. *Humanistic Mathematical Network Journal, 5,* 1-2 . Recuperado em 20 de outubro, 2018, de https://scholarship.claremont.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1062&context=hmnj

Goldshmidt, L. (2004). *Sonhar, pensar e criar:* a educação como experiência estética. Rio de Janeiro: Wak.

Kaplan, R. (2001). *O nada que existe – uma história natural do zero*. Rio de Janeiro: Rocco.

Mendes, M. (2014). *Desenvolvimento do Clube de História da Matemática: um diálogo das Ciências Humanas com a Matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Poligicchio, A. G. (2011). *Teatro*: *materialização da narrativa matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Reverbel, O. (1997). *Um caminho do teatro na escola*. (2a ed.) São Paulo: Scipione.

Roque, T. (2012). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.

Tahan, M. (2013). *O homem que calculava*. (83a ed.) Rio de Janeiro: Record.

Zuin, E. S. L. (1999, novembro). Aprendendo Matemática Através da História. *Anais do Seminário Nacional de História da Matemática*, Vitória, ES, Brasil, 3.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La competencia democrática en la clase de matemáticas: ¿Cuánto se tarda en desaparecer el alcohol del cuerpo?

Edna Paola **Fresneda** Patiño
Colegio Técnico Menorah IED
Colombia
epfresnedap@gmail.com
Sergio Andrés **Sarmiento** Pulido
Institución Educativa Departamental Ricardo Hinestrosa Daza
Colombia
sersarmiento@gmail.com
Julio Hernando **Romero** Rey
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
juliohernandorr@yahoo.com

Resumen

Durante el proceso de investigación realizado en el marco de la Maestría en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, nace una preocupación por el desarrollo de la competencia democrática en los estudiantes, desde la clase de matemáticas. El propósito se enfocó en caracterizar tal competencia desde el montaje de un escenario educativo de aprendizaje (García, Valero & Camelo, 2013) que surge del estudio de una situación social relacionada con el cuidado de sí, en el uso de la moto. Se centra la atención, en el estudio del tiempo que tarda en desaparecer el alcohol del cuerpo considerando su incidencia en la conducción y por tanto en los accidentes de tránsito. La propuesta se sustenta teóricamente en el enfoque de la educación matemática crítica (Skovsmose & Valero, 2012; Valero, Andrade y Montecino, 2015), y en el enfoque metodológico de la investigación crítica (Skovsmose y Borba, 2004, Skovsmose, 2015).

Palabras clave: Educación matemática crítica, competencia democrática, alfabetización matemática, conocimiento reflexivo, escenarios educativos de aprendizaje.

Contextualización de la investigación

Durante la realización de sus estudios de maestría, Sergio y Paola, se dieron a la tarea de consolidar una propuesta que no solo trascendiera el paradigma del ejercicio, con su consecuente cultura de clase, sino que permitiera el desarrollo de la competencia democrática con miras a la

consolidación de espacios propicios para la constitución de sujetos críticos capaces de identificar su realidad, comprenderla y reaccionar frente a ella (Skovsmose, 1999). Exploraron, cómo desde la clase de matemáticas era posible abordar el desarrollo de la competencia democrática al trabajar con estudiantes del curso 803 de la Institución Educativa Departamental Ricardo Hinestrosa Daza del municipio de La Vega, en Cundinamarca. Asesorados por el profesor Julio y luego de una exploración inicial encontraron que en la clase habitual de matemáticas no había condiciones propicias para el desarrollo de la competencia democrática, al reconocer que ésta requería espacios de discusión entre los estudiantes y entre éstos y el profesor acerca de una situación social que los convocara teniendo en cuenta que de acuerdo a lo propuesto por Skovsmose (1999) el contenido de la competencia democrática depende de los problemas y/o las preocupaciones de la sociedad en cuestión. Esto generó la necesidad de propiciar un ambiente de clase diferente, por lo que decidieron trabajar en el montaje de un escenario educativo de aprendizaje (García, Valero y Camelo, 2013) a partir de la identificación de una situación socialmente relevante que convocara los intereses e intenciones de la mayoría de los estudiantes. Luego de mucho escudriñar y reflexionar sobre las vivencias habituales de la comunidad se estableció el uso de la moto, muy usual en este lugar, como un asunto social presente en sus antecedentes y porvenires (Skovsmose, 1999). De este modo, Paola, Sergio y Julio plantearon la situación en relación con el cuidado de sí en el uso de la moto, como el asunto que posibilitaría el desarrollo de su investigación. Aquí, se muestra el proceso realizado por un grupo de estudiantes que estudió algunos elementos relacionados con el estado de embriaguez y la manera en que esto afecta la conducción.

Competencia democrática, alfabetización matemática y conocimiento reflexivo

Con este panorama a la vista y con el propósito de caracterizar el desarrollo de la competencia democrática con los estudiantes del curso 803, Sergio y Paola se situaron desde un enfoque sociopolítico de la educación matemática, la Educación Matemática Crítica — EMC —, en el cual se parte de reconocer que las matemáticas son un elemento importante en el desarrollo de la competencia democrática, puesto que éstas son un objeto de crítica. En este sentido, el camino que los investigadores usaron para abordar el objetivo de la investigación se basa en reconocer que la competencia democrática se ejerce gracias a la alfabetización matemática (Skovsmose, 1997). Entendida como una composición de diferentes competencias: matemática, tecnológica y reflexiva, que como constructo radical le permita a las personas participar en la comprensión y transformación de la sociedad, es decir, tiene un poder crítico (Skovsmose, 1997). Existe entonces una relación entre la educación matemática y la educación para la democracia al situar la atención en la idea de "la alfabetización matemática se puede relacionar con nociones como empoderamiento, autonomía y aprendizaje para la democracia" (Jablonka, 2003, citado por Skovsmose 2012, p. 65). Esto requiere reconocer además que el conocimiento reflexivo tiene que desarrollarse para ofrecer una alfabetización matemática con un poder radicalizado" (Skovsmose 1997, p. 208). Así, el conocimiento reflexivo es la competencia para ser capaces de tomar una posición justificada ante diversas situaciones del contexto y poder reaccionar como ciudadanos críticos en la sociedad actual, aquí es necesario que se reconozcan las matemáticas como una herramienta que empodera la toma de decisiones. De esta relación, es posible concluir que al dar cuenta del conocimiento reflexivo, se estarían planteando elementos para el desarrollo de la alfabetización matemática, lo que necesariamente estaría involucrando el aprendizaje para la democracia, es decir, la competencia democrática. En consecuencia, al evidenciar indicios de la alfabetización matemática y del conocimiento reflexivo, es posible caracterizar el desarrollo de la competencia democrática en la clase de matemáticas.

Escenarios educativos de aprendizaje

El desarrollo de esta investigación implicó un proceso de cambio en la cultura de clase de los estudiantes del curso 803, así que, desde las bases teóricas de la EMC, Sergio y Paola encontraron en los ambientes educativos de aprendizaje (García, Valero y Camelo, 2013) una alternativa que se relacionaba con los propósitos de su investigación, un nicho que podría privilegiar la caracterización del desarrollo de la competencia democrática. Los escenarios educativos de aprendizaje implican vincular la intencionalidad del aprendizaje de los estudiantes relacionados con fenómenos, rutinas, situaciones y asuntos sociales y culturales a partir de las cuales se constituyen equipos de trabajo que exploran, investigan, explican y usan las matemáticas para modelar, analizar y justificar tales fenómenos y además tomar una postura crítica. De este modo, los escenarios educativos de aprendizaje se sustentan en la democracia, lo que quiere decir que la microsociedad del salón de clase debe encarnar aspectos democráticos, en los que los sujetos realmente participan, se empoderan y toman decisiones (Salazar y otros, 2010). En este proceso de indagación se invita a los estudiantes a formular preguntas y a buscar explicaciones proponiendo retos de exploración y permitiendo que sean ellos quienes tomen el mando en su proceso de aprendizaje, por eso es indispensable generar una invitación motivadora para los estudiantes, que pueda detonar el proceso de indagación esperado (Skovsmose, 2012).

Con este panorama a la vista, el estudio de la situación social relacionada con el cuidado de sí en el uso de la moto posibilitó el montaje del escenario de aprendizaje al explorar los antecedentes, porvenires y perspectivas de futuro de los estudiantes buscado movilizar los intereses e intenciones de la mayoría de ellos. El reconocimiento de esta situación surgió, primero, de la cultura propia de los estudiantes del curso 803 enmarcada en su diario vivir en un municipio de clima cálido en el que el uso de la moto es muy frecuente, no sólo como medio de transporte. Segundo, al ser este un municipio turístico y cercano a la ciudad de Bogotá la visita de caravanas de motociclistas es frecuente por lo que se pueden observar motos de distintos cilindrajes que llaman la atención de propios y visitantes. Y tercero, existe una creciente cultura de competencias ilegales en las que se han visto involucrados jóvenes y adultos del municipio. Estos hechos, sumados al deseo de los jóvenes por usar ese medio de transporte han ocasionado desafortunados accidentes de tránsito en los que se han visto involucrados algunos estudiantes, incluso con la pérdida de su vida.

Enfoque metodológico de la investigación crítica

Para desarrollar su investigación Sergio y Paola adoptaron el enfoque metodológico que es orientado por la *Investigación Crítica* (Skovsmose y Borba, 2004), entendida desde un enfoque dinámico que está en constante revisión y que se relaciona con las preocupaciones de la educación matemática crítica. Desde este enfoque, se pretende investigar, como lo menciona Skovsmose (2015) *"lo que no es, pero podría ser"*, es decir, la investigación de las posibilidades; buscando cambios tanto en la realidad observada como en la metodología usada. Aquí, se reconocen tres situaciones: actual, imaginada y dispuesta (Skovsmose y Borba, 2004), reconociendo la cooperación y la negociación como elementos fundamentales en el desarrollo de la investigación. La situación actual se refiere a la situación que hay en un aula y en una escuela, caracterizada por evidenciar "rasgos problemáticos" que constituyen la pregunta de una investigación crítica. La situación imaginada hace referencia a la posibilidad de pensar la situación actual de manera diferente, con base a las expectativas de los participantes sobre lo que "podría ser" para dar respuesta a la pregunta de investigación. Y la situación dispuesta, se entiende como una alternativa a las dos situaciones anteriores en tanto que media entre ellas y es

producto de la cooperación y negociación entre los participantes. En este proceso se hace uso de instrumentos de recolección de información como: notas de campo, videograbaciones, grabaciones de audio, transcripción de episodios y producciones de los estudiantes. Se define un episodio como un recorte espacio temporal de la información recolectada, constituido como fragmentos en los que es posible observar declaraciones de los estudiantes que evidencian el uso del conocimiento reflexivo y que tienen elementos de carácter matemático en relación al cuidado de sí en el uso de la moto. El episodio que aquí se pone en discusión hace referencia al tiempo que tarda en desaparecer el alcohol del cuerpo.

Análisis de resultados

Aquí se presenta el proceso de investigación realizado por el grupo conformado por Yuleidy, Estefanía y Jesica quienes reconocen el alto grado de irresponsabilidad de algunos conductores que no son conscientes del peligro de conducir mientras tienen presencia de alcohol en su cuerpo, o que al saberlo, le restan importancia al hecho de arriesgar su vida. Por esta razón, centraron su interés en esta problemática y encontraron en su investigación inicial una información importante con respecto al ritmo en que se elimina el alcohol del cuerpo, que se puede evidenciar en la Transcripción 1.

***Sergio**: Eso que tú me mostrabas ahorita del tiempo de reacción en condiciones normales que es entre 0,5 y 1 segundo, mira si de pronto ahí también está, si la persona está en estado de embriaguez, ¿cuál es el tiempo de reacción?*
***Yuleidy:** Pues es que acá había algo.*
***Sergio:** Para hacer una comparación.*
***Yuleidy:** El alcohol se elimina a ritmo de 0,2 gramos por hora, más despacio mientras dormimos, o sea porque si usted está en actividad suda y bota el alcohol más rápido.*
***Estefanía:** O sea, podríamos mirar cuánto tiempo se demora en desintoxicar el cuerpo.*
***Sergio:** Eso yo no lo sabía.*
***Jesica**: Dice: los efectos que produce el alcohol son el aumento en el tiempo de reacción, la disminución de la atención, de la capacidad de conducir, aumento en la fatiga y la somnolencia, la reducción del campo visual ("efecto túnel") y la incorrecta apreciación de distancias y velocidades.*
***Yuleidy:** O sea, puede pensar que va lento, pero va rápido y por eso es que pasan accidentes.*
***Estefanía:** También se podrá castigar con penas de prisión por conducir en estado de embriaguez.*
***Sergio**: Ahorita decían que el alcohol se demora "no sé qué tanto" en desaparecer del cuerpo.*
***Yuleidy:** 0,2 gramos por hora.*
***Sergio:** Tengan presente ese dato, podríamos mirar, cuando uno se toma, por ejemplo, cinco cervezas, ¿cuánto alcohol le llega al cuerpo?*
***Yuleidy:** Depende del alcohol que uno tome.*
***Sergio:** Y entonces cuánto tiempo se demora, eso puede ser una cosa que ustedes pueden tratar de responder.*
***Jesica:** Pero entonces toca ver cuánto alcohol uno se está tomando, toca entonces poner la referencia de alguna marca de cerveza.*

Transcripción 1. Implicaciones de conducir en estado de embriaguez.

En este fragmento se pusieron en discusión elementos relacionados con el tiempo de reacción de un conductor en condiciones normales —sin alteraciones en su cuerpo por consumo de alcohol u otras sustancias—, el ritmo en que se elimina el alcohol del cuerpo y los efectos que este produce para las aptitudes del conductor. Las declaraciones de las estudiantes salieron de la repetición de, por ejemplo, frases como "si va a tomar no maneje" o "se estrelló porque estaba borracho", que son expresiones que provienen de la cotidianidad y la experiencia de otros a los que les han sucedido incidentes. A cambio, se

plantearon otros argumentos que daban validez a la importancia de estudiar el estado de embriaguez para reconocer sus implicaciones en la conducción, como lo mencionó claramente Jesica desde su consulta. De ahí que fuera fundamental no conducir bajo los efectos del alcohol, lo que le daba fuerza a la reflexión que podía generarse desde este asunto en relación con el cuidado de sí. A partir del trabajo colectivo y de consulta, en este grupo parecía notarse un ambiente propicio para el desarrollo de la competencia democrática, puesto que se evidenciaba un gran potencial en relación con la alfabetización matemática y el conocimiento reflexivo, manifestado en el interés de las estudiantes por el tema de investigación a partir de esos elementos preliminares que habían encontrado desde la consulta. Por eso, con la orientación y acompañamiento de Sergio, se propusieron indagar cuál sería el tiempo estimado en que el alcohol desaparece del cuerpo de un conductor para una cantidad específica de cervezas consumidas, hecho que resultaría interesante para la reflexión que se puede establecer desde la clase de matemáticas.

Luego de algunos días de trabajo, al grupo llegó un nuevo integrante —Jaider—, que solicitó cambiarse de grupo porque los compañeros con los que estaba trabajando no aportaban a su proceso de investigación. Al empaparse del tema de investigación de sus compañeras y de acuerdo a una información preliminar que sugería que el alcohol desaparece a ritmo de 0,2 g/h, se propusieron indagar cuánto tiempo se tardaría en desaparecer del cuerpo el alcohol que había en una cerveza Poker[1], concluyendo que ésta contiene 13,18 g de alcohol. Este trabajo no fue sencillo, pues con ayuda de algunas pesas de precisión del laboratorio de física calcularon el peso real del líquido; posteriormente debieron hacer una conversión de centímetros cúbicos a gramos, lo que resultó complejo, incluso para el profesor. Por esta razón, recurrieron a la ayuda del profesor de física, quien les dio algunas orientaciones para hacer una aproximación a esta conversión. Con esta información, buscaban determinar el tiempo que se tarda en desaparecer ese alcohol del cuerpo, que corresponde a una sola cerveza. Frente al proceso de indagación realizado por el grupo, se presentó la conversación entre Jaider y Sergio que se muestra en la Transcripción 2, mientras Yuleidy, Jessica y Estefanía solo participan como oyentes.

> ***Jaider:*** *Profe ya arreglé eso, no son tres días con 224 minutos sino 2 días con 17 horas, porque como no da 62, acá la embarramos.*
> ***Sergio:*** *Dos días son 48 horas.*
> ***Jaider:*** *Y para que llegue a 65 se le suman 17 horas.*
> ***Sergio:*** *¿Y la tabla al fin la organizaron?*
> ***Jaider:*** *Pues acá yo empecé a tomar el tiro y me di cuenta que solamente era multiplicar el 24 por el 0,2. Da: en un día, se elimina 4,8 g de alcohol.*
> ***Sergio:*** *Tres horas, cuatro horas.*
> ***Jaider:*** *Tampoco daría porque…*
> ***Sergio:*** *¿Seguro que en 24 horas es 4,8g? ¿Cuántos gramos es que tiene la botella?*
> ***Jaider:*** *13,18 g*
> ***Sergio:*** *A mentiras, si*
> ***Jaider:*** *Pero no daría*
> ***Sergio:*** *4,8g ¿o sea en 2 días 9,6g?*
> ***Jaider:*** *Si, dos días con 17 horas. Entonces 9,6g más el 3,4g que elimina en las 17 horas*
> ***Sergio:*** *Ahí está, ¿no? ¿Y usted qué es lo que dice?, ¿qué multiplicando qué por qué?*
> ***Jaider:*** *¿qué?, señor*

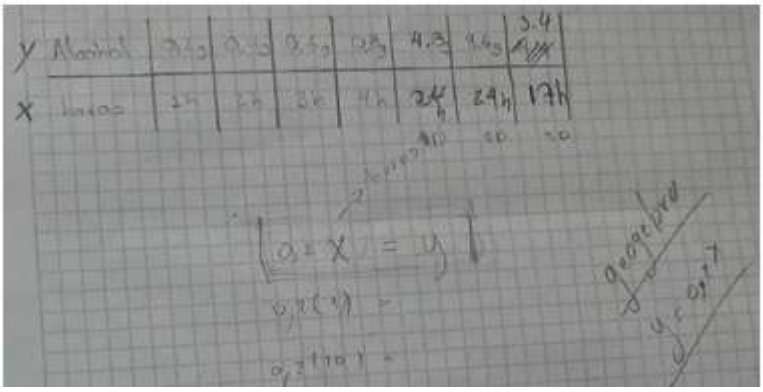
[1] Marca de cerveza colombiana que se consume usualmente y que tiene un volumen de alcohol diferente a otras marcas de cerveza.

> ***Sergio:*** *Usted dijo que se había dado cuenta que multiplicando algo…*
> ***Jaider:*** *Ah, pues ese era fácil porque es 24 horas que es un día, por el 0,2g que es lo que se demora por hora, da 4,8g, que es el mismo resultado de arriba, y es más fácil así que ponerse hora por hora.*
> ***Sergio:*** *Ah, ya le entiendo. ¿Usted dice multiplicar qué?*
> ***Jaider:*** *24 horas por el 0,2g que se elimina cada hora. Para pues ahí saber en las 24 horas cuántos gramos se elimina.*

Transcripción 2. Tiempo que tarda el alcohol en desaparecer del cuerpo

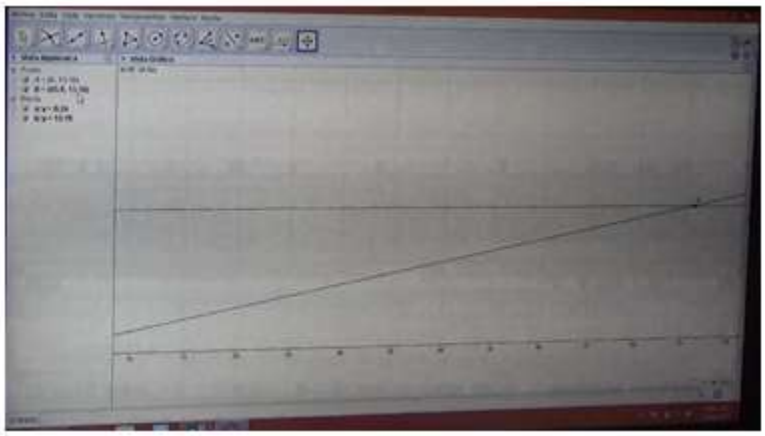
El trabajo de indagación realizado por el grupo y que se relata brevemente en la conversación de Jaider con el profesor se apoya con el uso de diferentes tipos de registro: tabulación de datos, identificación de variables, generalización usando una expresión matemática y elaboración de la gráfica para validar sus datos usando el software Geogrebra. Estos elementos evidencian la actividad matemática que surge en el grupo en busca de aproximarse a una respuesta a la pregunta ¿cuánto tiempo se tarda en desaparecer el alcohol del cuerpo? Vale aclarar que los estudiantes tomaron un caso puntual para avanzar en su trabajo de investigación.

Figura 1. Proceso de tabulación y generalización



Fuente: Fotografía tomada al trabajo realizado por los estudiantes del curso 803.

Figura 2. Gráfica en Geogebra para validar los datos obtenidos



Fuente: Fotografía tomada al trabajo realizado por los estudiantes del curso 803.

Durante el desarrollo de este proceso de interacción comunicativa solo uno de los integrantes del grupo tomó la vocería para mostrar los avances que habían logrado, pese a que en el trabajo realizado todos participaron de manera activa. Esto puede deberse a que, en este

momento del trabajo, el asunto que estaban investigando los llevó a tratar procedimientos matemáticos un poco más complejos, y algunos no se sentían tan hábiles. Esto deja ver rasgos del desarrollo de la competencia democrática en la medida en que, siendo conscientes de sus debilidades, tomaron decisiones que no entorpecieran el trabajo grupal y que, de esta manera, se pudiera avanzar en el proceso de investigación de acuerdo con sus características y habilidades.

A partir de lo observado en el proceso de investigación de este grupo podemos notar cómo la alfabetización matemática tomó lugar en sus avances frente a la investigación que se habían propuesto desde el principio, y que tal alfabetización se relacionó con los procesos de conversión de unidades, tabulación de datos, generalización de procesos, uso de gráficas y comprobación de los datos obtenidos, que se observan en las Figuras 1 y 2. Aquí se observó la riqueza de las matemáticas en los diversos asuntos relacionados con el cuidado de sí, en la medida en que permitieron dotar de sentido las decisiones, que se tomaban con un nivel de conciencia y responsabilidad mayor. Por supuesto estos elementos de carácter matemático permearon las declaraciones de los estudiantes de este grupo en relación con su postura frente al cuidado de sí en relación con el asunto del estado de embriaguez. En la voz de Jaider se percibe el conocer reflexivo que ha logrado desde el proceso de estudio cuando dice *[...] sabiendo los datos que obtuvimos con nuestra investigación y lo que estudiamos, una persona que tenga ese conocimiento ya va a pensar distinto a otras que no. Por decir algo, alguien que sepa que el cuerpo se demora tres días en eliminar una cerveza se va a prevenir en no manejar cuando ya esté tomado, pero para eso necesita estar informado sobre esas cosas, y así va a saber por qué no debe tomar cuando está manejando, o que si va a tomar tenga claro por qué no debe manejar. Por ejemplo, nosotros encontramos que el tiempo de reacción se ve perjudicado por la embriaguez, porque cuando se está en este estado se reacciona mucho más tarde, la reacción es más lenta. Entonces, si se fusiona el exceso de velocidad con el estado de embriaguez obviamente se produce un accidente, porque se va rápido y se va con menos reflejos.*

Escuchar estas declaraciones resulta satisfactorio para Sergio y Paola al identificar en la oralidad de los estudiantes esa conciencia crítica que desde hace tiempo anhelaban, y más aún verla reflejada de esta manera en el conocimiento reflexivo (Skovsmose, 1997) que habían desarrollado. Tal conocer les ha permitido tomar una postura en relación con la situación social del contexto que trasciende los pensamientos individuales y trata de comunicar y exteriorizar esos aprendizajes a otros, con el ánimo de generar una conciencia colectiva. Por supuesto, los estudiantes mismos reconocieron que no todas las personas lograban esa conciencia en relación con la importancia del cuidado de sí, porque aún no habían asumido y experimentado el proceso de estudio que ellos realizaron y con el cual notaron cómo las matemáticas tomaban relevancia en la constitución de argumentos que daban justificación a esos nuevos pensamientos. Los estudiantes discutieron sobre los riesgos que se corrían al usar una moto, y aunque sabían que no había garantía de que al ser cuidadosos se evitarían los accidentes, tenían claros diversos aspectos que se debían considerar para minimizar tales riesgos, por ejemplo, en relación al estado de embriaguez.

Conclusiones y reflexiones finales

De acuerdo a la investigación realizada Sergio y Paola notaron que el desarrollo de la competencia democrática en la clase de matemáticas es un proceso que va evolucionando y se va complejizando en la medida en que los estudiantes se insertan en el proceso de indagación de algún asunto particular de la situación social que convoca sus intereses e intenciones. En este

proceso que tiene lugar en el montaje de un escenario de aprendizaje, la alfabetización matemática y el conocimiento reflexivo permiten caracterizar la competencia democrática en la medida en que los estudiantes usan las matemáticas como una herramienta que empodera la toma de decisiones y sus posturas críticas en relación a situaciones propias de su contexto. Sin lugar a dudas, el estudio de una situación en la que se consideran los porvenires e intenciones de los estudiantes hace que ellos se sientan más involucrados en su proceso de aprendizaje ya que pueden reconocer en el contexto de sus vivencias la manera en que las matemáticas se hacen visibles y permiten la reflexión en relación al cuidado de sí. Este nuevo ambiente de clase, posibilitado desde el montaje del escenario de aprendizaje generó grandes cambios en la cultura de clase ya que se evidenció que el poder en la clase no está en manos del profesor únicamente, sino que los estudiantes pueden ser líderes de sus propios procesos generando distintas formas de comunicación, es decir, se genera un cambio en sus roles. Además, se reconoce que las matemáticas se convierten en una herramienta que empodera la toma de decisiones frente a situaciones sociales del contexto propiciando aprendizajes para la vida, los cuales buscan generar cambios en la visión que van construyendo los estudiantes de su vida fuera de la escuela.

Referencias y bibliografía

García, G.; Valero, P. y Camelo, F. (2013). Escenarios y ambientes educativos de aprendizaje de las matemáticas. Constitución de subjetividades en educación matemática elemental. En G. García, P. Valero, C. Salazar, G. Mancera, F. Camelo, J. Romero. (Eds.). *Procesos de Inclusión/Exclusión. Subjetividades en Educación Matemática* (pp. 43-76). Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Salazar, C.; González, M.; García, G.; Franco, M. y Heredia, D. (2010). *Profesores en búsqueda del sentido: una experiencia de trabajo por escenarios de aprendizaje*. Comunicación presentada en el IX Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística. Duitama, Colombia.

Skovsmose, (1997). Competencia democrática y conocimiento reflexivo en matemáticas. *Revista EMA, 2*(3), 191-216.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Uniandes.

Skovsmose, O. (2012). Escenarios de investigación. En P. Valero y O. Skovsmose. (Eds.). *Educación matemática crítica*. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (pp. 109-130). Bogotá: Uniandes.

Skovsmose, O. (2015). Pesquisando o que não é, mas poderia ser. En C. Lopes y U. D´Ambrosio. (Eds.). *Vertentes da Suversão na Producção Científica em Educação* Matemática (pp. 63-90). Campinas SP: Mercado das Letras.

Skovsmose, O. y Borba, M. (2004). Research methodology and critical mathematics education. En P. Valero y R. Zevenbergen. (Eds.). *Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education* (pp. 207-226). United States: Springer.

Skovsmose, O. y Valero, P. (2012). Rompimiento de la neutralidad política: El compromiso crítico de la educación matemática con la democracia. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.). *Educación matemática crítica*. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (pp. 1-23). Bogotá: Uniandes.

Valero, P., Andrade, M. y Montecino, A. (2015). Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(3), 287-300.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Videojuegos: un asunto de la educación matemática

Sindy Alejandra **Vasco** Alvarez
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
sindy.vasal@gmail.com
Valeria **Lebrun** Llano
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
valebrun961107@gmail.com

En el poster se presentarán los avances en la investigación que se desarrolla con estudiantes de grado 5°, cuyo propósito es caracterizar los procesos de razonamiento emergentes a partir del uso de la gamificación con el videojuego Hearthstone. La investigación se apoya en los planteamientos de Lee y Hammer (2011) respecto a la gamificación, como un medio para atender problemas en las situaciones que atañen la actualidad de los estudiantes, más que un proceso dirigido a la motivación y al simple encaje de elementos de juego. Aunque el trabajo comprende tres categorías de análisis enmarcadas en los procesos de razonamiento, producto de una serie de intervenciones durante la investigación, en este poster solo se expondrán los hallazgos relacionados con el proceso de generalización en los estudiantes, referente a una de las tareas propuestas en una intervención.

La investigación se desarrolló en una institución educativa de carácter público del municipio de Sabaneta, en la cual se encontró que el proceso de ejercitación tiene la mayor importancia entre las tareas propuestas por el maestro y el libro de texto. Se evidencia así, que se relega a un segundo plano el desarrollo de competencias de razonamiento, para dar primacía a un currículo estructurado y categorizado por contenidos. La problemática antes descrita posibilitó detectar en los estudiantes algunas dificultades a la hora de razonar y plantear estrategias.

La presente propuesta se fundamenta en la teoría sociocultural y retoma de esta la idea de instrumentos y mediación instrumental, como herramientas que son producto de una construcción social y cultural. Se reconoce que la tecnología digital es un instrumento que ha cobrado especial importancia en las dinámicas de los estudiantes, como es el caso de los videojuegos. Al respecto Rückriem (2010), reconoce la tecnología como un medio potencial de transformación, igual que la naturaleza del libro impreso, que fue el encargado de formar una cultura global de los últimos siglos.

Se encontró que los videojuegos cuentan con una importante acogida entre los estudiantes. Por tanto, se adoptó la gamificación como respuesta a la necesidad de vincular las prácticas sociales de los estudiantes al contexto escolar y a la posibilidad de movilizar procesos de

razonamiento, de tal forma que el contexto sea alterado para contemplar las características propias de los juegos.

El videojuego Hearthstone, compone en la investigación un espacio gamificado para caracterizar los procesos de razonamiento. Para fundamentar dichos procesos, se retomaron los aportes realizados por Pólya (1954) con relación al razonamiento plausible, debido a que resulta ser un proceso más cercano a los estudiantes, en cuanto no implica formalismos y admite la discusión, la controversia y la provisionalidad. Es este tipo de razonamiento el que permite relacionar el desarrollo de las matemáticas con la posibilidad de suponer, hipotetizar, construir ideas generales a partir de la observación, plantear analogías y realizar lo que este autor define como especializaciones. Para la propuesta se consideraron entonces, dos asuntos de especial importancia. En primer lugar, los aportes de Pólya (1954) y el proceso de generalización descrito por Cañadas y Figueiras (2009), el cual comprende la organización de casos particulares, la identificación de un patrón y la generalización. En segundo lugar, la tarea que consistía en determinar la cantidad de movimientos posibles en una partida del videojuego.

Los análisis preliminares, referentes al proceso de generalización, permitieron concluir que los estudiantes que participaron en la investigación, presentaron diferentes formas de organizar los datos, lo cual influyó de forma directa en la identificación del patrón que se generaba entre la cantidad de cartas de los jugadores. En este sentido, la formulación de la conjetura que hacen los estudiantes con relación al patrón puede variar, ya que las expresiones y representaciones que construyen los estudiantes para dar cuenta de la generalización dependen de la abstracción que realicen del patrón. Se destaca además que, aunque los estudiantes no lograron establecer una expresión algebraica para dar solución a la tarea, lograron realizar una generalización de la situación y expresarla, ya sea en un lenguaje aritmético o verbal, para determinar la forma de calcular la cantidad de movimientos posibles en una partida del videojuego Hearthstone.

El proceso de gamificación les permitió a los estudiantes vincular los elementos del juego con el desarrollo de la generalización en una situación de combinatoria. La cercanía a las mecánicas del videojuego movilizó nuevas alternativas para analizar sus partidas en el juego y ser mejores competidores en Hearthstone. Lo anterior implicó que el aprendizaje y las construcciones realizadas en torno a los objetos matemáticos correspondientes, tuvieran un sentido para los estudiantes y no resultaran ser elementos aislados de sus prácticas cotidianas.

Referencias y bibliografía

Cañadas, M., y Figueiras, L. (2009). Razonamiento en la transición de las estrategias manipulativas a la generalización. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 161-172). Santander: SEIEM.

Lee, J., y Hammer, J. (2011). Gamification in education: what, how, why bother? What: definitions and uses. *Academic Exchange Quarterly*, 15(2), 1-5.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*: induction and analogy in mathematics.Volume1. New Jersey: Princeton University Press. https://doi.org/10.1037/13969-012.

Rückriem, G. (2010). La tecnología digital y la mediación: un desafío a la teoría de la actividad. *Revista Electrónica Sinéctica*, *34*, 1-22.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Proceso de enseñanza de las Matemáticas dentro del resguardo Indígena San Lorenzo de Caldono: Obstáculos - retos

Daniela Andrea Mostacilla
Universidad del valle
Colombia
daniela.mostacilla@correounivalle.edu.co

Resumen

El presente trabajo contiene de manera general una descripción de la problemática de la enseñanza de las matemáticas, dentro de un resguardo indígena. Se espera generar una propuesta de intervención de carácter educativo en el proceso de enseñanza de las Matemáticas dentro del resguardo indígena San Lorenzo de Caldono; para ello se partirá del redescubrimiento del conocimiento propio del resguardo (educación propia en Manuel Q Lame), posteriormente, se caracterizará el pensamiento matemático propio. Este redescubrimiento del saber y posterior caracterización aportaran al fortalecimiento de la identidad cultural de la comunidad. Se espera que a través de la Etnomatemática se puedan delinear los hilos conductores, que permitan realizar la inclusión positiva del conocimiento externo dentro del PEC, en este caso, dentro del área de Matemáticas, brindándole así a los comuneros una educación incluyente que les permitirá no solo reafianzar sus valores culturales, si no, también, facilitar el dialogo con entornos externos.

Palabras clave: proyecto educativo comunitario, Etnomatemática, educación indígena, educación bilingüe, educación propia, Manuel Quintín Lame.

Introducción

El resguardo indígena San Lorenzo de Caldono, al igual que muchas otras comunidades, se ve sumergido en dos entornos. El entorno propio brinda posibilidades de continuar con lo que culturalmente se defina vivir bien, mientras que el entorno externo muestra al individuo otras formas de vida, otras formas de conocimiento y nuevos artefactos. Este choque cultural es el que mueve la investigación entorno a como se puede generar un dialogo entre el escenario de la educación propia y el escenario de la educación convencional; dialogo que con seguridad debe partir del reconocimiento del conocimiento propio, en ese sentido, se debe partir de los saberes

propios como ejemplo de la practicidad y aplicabilidad de ciertos conocimientos Matemáticos, hasta llegar a formas más elaboradas y universales de conocimientos. Desde esta investigación se propone desarrollar una propuesta educativa que enmarque no solo lo académico, sino, también en lo sociocultural- político.

Desarrollo del Problema

El proceso de reconocimiento de la diversidad sociocultural dentro de los diferentes escenarios en Colombia ha tenido como resultado una serie de normativas, proyectos e iniciativas, que tienen como eje fundamental la inclusión. En el caso del escenario educativo, el ministerio de educación nacional (MEN) determina:

- El decreto 1142 de 1978, reconoce que las comunidades indígenas tienen diferentes formas de apreciar la vida y que las necesidades académicas están ligadas a los diferentes proyectos de vida y a sus estructuras políticas.

- *"Proyecto Educativo Comunitario- PEC: Es la concepción integral de vida y gestión de saberes propios de los pueblos indígenas, comunidades afrocolombianas, raizales y rom (comunidad Gitana), que les permite recrear diferentes manifestaciones culturales y opciones de vida mediante la reafirmación de una identidad orientada a definir un perfil de sociedad autónoma, creativa, recreativa, reflexiva y comunitaria cimentada en sus raíces e historia de origen en permanente interacción con el mundo global. En este escenario multicultural y plurilingüe, la planificación, gestión y administración de Proyectos Educativos Comunitarios - PEC, se constituye en la fuente y fuerza motora de la reelaboración e implementación de los planes globales de vida acordes a su cultura, lengua, pensamiento, usos y costumbres".* Posteriormente se da inicio al programa de educación bilingüe intercultural PEBI, mediante el cual se espera fortalecer y recuperar la lengua materna mediante procesos de formación educativos pertinente a las realidades de la comunidad indígena.

Dentro del proceso de construcción del proyecto educativo comunitario, se visualizan tres escenarios educativos que envuelven a la comunidad; El escenario de la educación propia, como el espacio de reivindicación de los saberes ancestrales (Pilar cultural), el escenario de la educación bilingüe intercultural, en el que se da el fortalecimiento de la lengua materna (reconocimiento y autonomía de los procesos educativos en comunidades indígenas) y el escenario de la educación oficial. Diferentes tensiones se generan alrededor de estos tres escenarios, la comunicación se hace cada vez menos acertada.

El resguardo indígena San Lorenzo de Caldono, mediante la construcción comunitaria y reflexiva del proyecto Educativo Comunitario, proyecta soluciones a las necesidades de carácter social, cultural, político y económico; presentando su propuesta educativa, donde espera poder lidiar de manera positiva con las tensiones que generan los tres escenarios anteriormente mencionados. Su propuesta educativa está en constante renovación y busca una integración adecuada y equilibrada de contenidos académicos, además, de validar en la educación un instrumento de protección cultural y una herramienta de comunicación entre los diferentes

saberes. El proceso de consolidación del proyecto educativo comunitario del resguardo finaliza con la creación de una institución madre, en la cual se concentran alrededor de 5 colegios y 20 escuelas. Aproximadamente 25 establecimientos educativos; establecimientos educativos con una comunidad educativa no homogénea.

La comunidad educativa de este resguardo se caracteriza por tener estudiantes y docentes provenientes de diferentes entornos culturales (indígenas, campesinos, mestizos, citadinos); dentro de las aulas de clase se percibe esta multiculturalidad. "Las aulas de las escuelas han incrementado su diversidad étnica y cultural " (Skovsmose, 2008) , esto lleva a concluir que se necesitan propuestas educativas interculturales además de replantearse la formación de docentes. Los docentes deben de formarse dentro de esta multiculturalidad que caracteriza las aulas de clase, "ser un profesional consciente y respetuoso de la diversidad cultural de nuestro país" (Alvarez, 2008).

El proceso educativo de las diferentes áreas del PEC apunta a la apropiación y adecuación de los diferentes conocimientos tanto propios como externos, en el caso del área de Matemáticas y producción se visualiza un gran esfuerzo por realizar la inclusión del conocimiento externo de manera equilibrada. En respuesta al hecho de que, cuando se lleva a cabo un análisis extenso, se concluye, que en general, prima el conocimiento externo, que lo propio se limita únicamente al lenguaje y que el equilibrio buscado no se concreta; de otro lado se observa que el personal docente no cuenta con la formación básica en matemáticas, sumado a ello, son personas ajenas al entorno cultural. La realización de las clases se da en un entorno des culturalizado, las temáticas de trabajo y los conceptos movilizados son netamente de la educación matemática convencional. Se desechan los factores socio-culturales del individuo y se les termina incluyendo en un proceso educativo que discrimina sus valores culturales propios y los desplaza; generando situaciones críticas de carácter social, cultural y educativo.

Hoy en día "es comúnmente aceptado que una comunidad desarrolla prácticas y reglas matemáticas con su propia lógica para entender, lidiar y manejar la naturaleza. Es decir, la relación del hombre con la naturaleza es la que impulsa el desarrollo matemático, y es el hombre mismo, quien en esa relación construye las nociones matemáticas que le van a ser de utilidad a él y a su sociedad" (White, 1982). Pero, todo este proceso de transmisión, conservación y adaptación del conocimiento propio de una comunidad se ve debilitado dentro de un proceso educativo de las matemáticas que, en general, podríamos denominar Proceso educativo monocultural, el cual, además, de desplazar la lógica propia, fractura la relación individuo- naturaleza(entorno). Desde la educación matemática se ha procurado generar estrategias que contrarresten estas situaciones, siendo críticos ante las posturas absolutistas del conocimiento matemático que debe ser enseñado.

Es relevante aclarar que no se trata de ignorar los grandes avances del mundo y sus desarrollos tecnológicos, sino que, se espera lograr un acoplamiento adecuado de lo particular a lo general, permitiendo una comunicación acertada y fundamentada en el respeto a la diferencia entre lo local y lo global, en este caso la matemática que soporta la modernidad y lo convencional y la

matemática propia nacida en una lógica particular; además, de propiciar un lenguaje de comunicación asertivo, "lo que podemos hacer para nuestros niños es ofrecerles los instrumentos explícitos, analíticos y materiales para que ellos puedan vivir con capacidad crítica, dentro de una sociedad multicultural e impregnada de tecnología" (D´Ambrosio, 2014). En este sentido se es necesario una propuesta de intervención dentro de la comunidad del resguardo indígena San Lorenzo de Caldono, que permita lidiar con las tensiones entre lo propio y lo externo, reivindicando lo propio como estrategia de fortalecimiento cultural, garantizando la permanencia del conocimiento propio en diferentes espacios y tiempos.

De otro lado, se debe ser consciente que el intercambio cultural hace parte del diario vivir, desde aspectos educativos, culturales y económicos; por ello, es necesario la inclusión del conocimiento externo que le permita a los individuos tener maneras alternas de comunicación, entendiendo a las matemáticas como formas de lenguaje (Wittgenstein, Suarez, & Moulines, 2004); permitiendo el éxito y el buen adecua miento del individuo en entornos externos.

Referencias y Bibliografía

Alvarez, H. B. (2008). La educación matemática desde un punto de vista sociocultural y la formación de licenciados en matemáticas y etnoeducadores con énfasis en matemáticas. *Asocolme*, 4-6 .

D'Ambrosio, U. (2014). *Etnomatematicas*: entre las tradiciones y la modernidad. Madrid: Ediciones Diaz de Santos S.A .

INFIKUK (2001). Lineamientos generales: proyecto educativo comunitario. Cauca, Colombia: Caldano.

Skovsmose, H. A. (2008). Antes de dividir, se tiene que sumar" 'entre-vistar' porvenires de estudiantes indígenas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemàtica, I*(2), 111-136. Obtenido de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274020253005.

White, L. (1982). *La ciencia de la cultura*: un estudio sobre el hombre y la civilización. Barcelona: Paidos.

Wittgenstein, L., Suarez, A. G., & Moulines, U. (2004). *Investigaciones Filosoficas* 3º Ed. Barcelona: Critica.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La contextualización activa y artificial en el currículo matemático costarricense

Gilberto **Chavarría** Arroyo
Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
gilberto.chavarria.arroyo@una.cr

Veronica **Albanese**
Universidad de Granada
España
vealbanese@ugr.es

Resumen

Esta comunicación analiza la contextualización de los problemas propuestos en el Programa de Estudio de Matemática de Costa Rica. Se enmarca dentro de la Etnomatemática y responde a la importancia que revelan diversas investigaciones sobre contextualizar problemas matemáticos en situaciones cercanas a los estudiantes. En particular se trabaja la contextualización activa y artificial, detallada en el Programa. Forma parte de una investigación más amplia que profundiza en el estudio de contextos en los que se enmarcan los problemas matemáticos propuestos en el currículo costarricense. Se emplea una metodología cualitativa con un análisis de contenido, mediante la cual se analizaron 111 problemas correspondientes a los niveles de secundaria. Como uno de los resultados más relevantes, el Programa posee una cantidad considerable de problemas con contextualización artificial, contrario con lo planteado en los fundamentos teóricos que lo sustentan. El estudio ofrece ejemplificaciones para la construcción de problemas con contextualización activa.

Palabras clave: contextualización activa, problemas matemáticos, currículo costarricense.

Introducción

En Costa Rica, a partir del 2012 se implementó el Proyecto Reforma Matemática, que modificó los programas de estudio en primaria y secundaria, dando énfasis a la resolución de problemas, asociados al entorno físico, social, cultural de los estudiantes (MEP, 2012).

El programa de cada ciclo está estructurado en tres columnas: conocimientos, habilidades específicas e *indicaciones puntuales.* Estas indicaciones tienen la finalidad de proporcionar al docente ejemplos concretos de tareas o secuencias de tareas para presentar en el aula. Incluyen "sugerencias sobre la realización de los procesos matemáticos, pertinencia o lugar de los

mismos, ejemplos, métodos posibles y también sobre las actitudes creencias, así como sobre el uso de tecnologías y de la historia de las Matemáticas" (MEP, 2012, p. 74).

Con respecto a las indicaciones puntuales, la inexistente revisión de las tareas propuestas, motivó a realizar un análisis, con el fin de comprobar si responden precisamente a posibles experiencias de la vida y cultura del estudiante costarricense y si tienen coherencia con el enfoque teórico de la contextualización activa, explicada en los propios fundamentos del currículo.

Es importante aclarar que los ejemplos más inmediatos que tienen los docentes para guiarse en el planeamiento de sus lecciones, son dichas indicaciones puntuales presentes en el texto oficial: estas vienen a ser las herramientas que más utilizan los docentes en sus planeamientos, por tanto, la forma en que en ellas se plantea la contextualización es una evidencia de cómo se deben incorporar los contextos reales en las clases.

El director de esta reforma apunta a que la contextualización de las matemáticas juega un papel especial (Ruiz, 2000), y señala que los contextos reales en la enseñanza de la Matemática tienen un puesto central dentro del nuevo currículo, por lo que se deben propiciar "experiencias cercanas a la vida real y cotidiana" (Ruiz, 2013, p. 53), en concordancia con lo que expone D'Ambrosio (2008) dentro del Programa de la Etnomatemática, al expresar que la contextualización Matemática debe responder a la cultura en que se está inmerso el estudiante. Por tanto, una revisión de los problemas propuestos en el currículo, permitirá evidenciar si hay contextos alusivos al entorno del estudiante costarricense.

Fundamentación Teórica

Contextualización Matemática

Desde finales del siglo pasado, se ha investigado sobre la pertinencia de utilizar problemas contextualizados para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, por ejemplo, Nuñez y Font (1995) explican que, al trabajar con diversos contextos concretos, es posible que el estudiante note su significatividad y funcionalidad, al tiempo que se facilita el proceso de abstracción y generalización. Por su parte, Sánchez (2014) expone que esta concepción de la Matemática responde a cambios que se fueron gestando en las décadas de los años setenta y ochenta del siglo pasado, donde surgieron diversos estudios que insistieron en la importancia del contexto histórico-cultural en la construcción y entonces en el proceso de enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático.

Para Ramos y Font (2006), existen cuatro motivos para implementar problemas matemáticos contextualizados en el entorno: facilitan el aprendizaje de esta disciplina, desarrollan competencias ciudadanas, así como actitudes generales asociadas a la resolución de problemas y permiten que los educandos aprecien la utilidad de las matemáticas para resolver situaciones de otras áreas y de la vida cotidiana.

Al respecto, Ramos y Font (2006), en un análisis del proyecto Realistic Mathematics Education, explican que en este enfoque "se concibe la actividad matemática como una actividad humana más, por lo cual se considera que saber matemáticas es hacer matemáticas, lo cual

comporta, entre otros aspectos, la resolución de problemas de la vida". Este aspecto puede ser considerado como motivacional para el estudiante y permite el desarrollo de competencias aplicables en su entorno.

En el Programa de Etnomatemática, la contextualización está incluida *per se* y considera que en todas las culturas hay manifestaciones de matemáticas que son mezcladas con el arte, religión, música, técnica y ciencia. Como respaldo a esta afirmación, D'Ambrosio (2013), explica que el saber matemático es un saber/hacer contextualizado, que responde tanto a factores naturales como sociales. Para este autor, la propia cotidianeidad está impregnada por el contexto y es de ahí de donde emergen múltiples prácticas matemáticas.

En el ámbito escolar, Monteiro y Mendes (2011) señalan que:

> la organización curricular bajo la perspectiva de la Etnomatemática, entendida a partir de una mirada sobre diferentes prácticas sociales, exigiría comprender y problematizar el espacio escolar como un lugar de circulación de diferentes saberes, venidos de diversas prácticas, escolarizadas y no escolarizadas (p. 41).

Al respecto, Peña (2014) aclara que al estudiante se le debe permitir conectar las matemáticas escolares con las experiencias matemáticas que ellos viven fuera de la escuela, pues de lo contrario, "les negamos también la posibilidad de dar sentido a las matemáticas que aprenden en la escuela" (p. 176). Esta autora afirma que la mayoría de currículos matemáticos no tienen incorporadas las etnomatemáticas, coincidiendo con las conclusiones de la investigación de Viterina (2015), quien analiza el caso particular ecuatoriano.

La contextualización matemática no es un constructo acabado y existen diversas perspectivas sobre lo que esta significa. Al respecto, Ramos y Font (2006) hacen un análisis de lo que se entiende por contexto, diferenciando dos tipos, en cuanto a matemáticas se refiere: por una parte, el contexto "como un ejemplo particular de un objeto matemático" (p. 532) y otro que consiste en enmarcar dicho objeto en el entorno. Es decir, según estos investigadores, el contexto puede ser visto tanto como una entidad meramente matemática, por ejemplo, el contexto de espacios vectoriales, o como la situación del ambiente donde se desarrolla algún contenido en particular. A esa segunda concepción de contexto, le llaman *uso ecológico,* entendiendo que el contenido matemático tendrá un significado o uso distinto, según el lugar, grupo social o temporalidad en que se desarrolle. Para los fines de nuestro estudio, consideramos esta segunda concepción de contexto.

Contextualización Activa y Artificial

Con el Programa de Estudio de Matemáticas (MEP, 2012) se busca, entre otros aspectos, "contribuir a romper el mito de que las Matemáticas son áridas, feas, imposiblemente difíciles y algo de lo que los estudiantes tienen que sentir miedo" (p. 11). Una manera de lograr tal cometido, es mediante la resolución de problemas, de modo que se asigna a los estudiantes un problema, preferiblemente contextualizado, para introducir un conocimiento nuevo.

En este sentido, se enfatiza en la importancia de una contextualización activa, que según Ruiz (2017), debe responder positivamente a la pregunta: ¿es necesario el contexto para realizar la tarea? Al respecto, este autor añade:

> Si la tarea planteada no resuelve los desafíos del contexto o se podría prescindir del mismo para realizarla o sus resultados no aportan algo significativo para el contexto, no se logra lo que se persigue con el eje disciplinar. La clave debe ser la búsqueda de un involucramiento intelectual del estudiante por medio de situaciones que le permitirán desarrollar sus habilidades y capacidades matemáticas (p. 74).

En efecto, el MEP (2012), considera que la contextualización en este programa de estudio busca fortalecer el papel activo del estudiante, de modo que lo comprometa con su aprendizaje, mediante el uso y diseño de modelos matemáticos. Establece, por lo tanto, una diferencia entre lo que tradicionalmente se trabajaba en currículos pasados como contextualización, y lo que ahora se denomina contextualización activa. Para ello da un ejemplo de una tarea, que, a pesar de ser contextualizada, no calza dentro de la contextualización activa. Esta versa: "si Juan tenía 400 colones y gastó 200 en caramelos, ¿cuántos colones le quedan?" A problemas como este, donde se puede prescindir del contexto, se le nombra como problemas de contextualización artificial o de contexto forzado, según lo que se explica en el mismo documento del MEP (2012).

Metodología

Para esta investigación se utiliza una metodología cualitativa, mediante el análisis de contenido. Este método, según lo explica Bardin (2012) es "un conjunto de técnicas de análisis de comunicaciones" (p. 23), que permite obtener indicadores mediante procedimientos sistemáticos. En el caso particular que nos ocupa, el documento analizado es el Programa de Estudios de Matemática del Ministerio de Educación Pública (2012), focalizando en las indicaciones puntuales.

Se codificaron 111 problemas presentes en las indicaciones puntuales del Programa de Estudios de Matemáticas del MEP (2012) del III Ciclo de la Educación General Básica, en las áreas de números, relaciones y álgebra, estadística y probabilidad y geometría. Luego de revisar los principales conceptos y teorías relacionados con la contextualización de las matemáticas y bajo el supuesto de que este tópico es inherente al Programa de la Etnomatemática, se sintetizaron los constructos más relevantes para elaborar una serie de categorías, que dieron origen a indicadores (subcategorías) para el análisis de cada problema. En el caso particular de este reporte, solo se detallará las subcategorías de contextualización activa y artificial y si el contexto es costarricense.

El indicador que permite clasificar si un problema presenta contextualización activa, viene dado por la respuesta al siguiente interrogante: ¿es necesario el contexto que se brinda para resolver el problema? En el caso que la respuesta sea positiva, se dice que el problema presenta *una contextualización activa;* en el escenario contrario, *la contextualización es artificial*. Este es el indicador que se define en el propio programa de estudio (MEP, 2012, p.36. La validación fue realizada por dos expertos investigadores en etnomatemática.

Análisis de los Resultados

En total se analizaron 111 problemas, de los cuales 35 son del área de números, 28 de geometría, 24 de relaciones y álgebra y 24 de estadística y probabilidad.

Para el estudio de la contextualización activa y artificial, se trabajó con 44 problemas: no se consideraron aquellos con contexto histórico donde solo se solicitaba evaluar una fórmula, ni los de contexto matemático. Si el contexto presente no es necesario para resolver el problema, se clasifica como contextualización artificial o forzada. Tal como lo explica Ruiz (2017), uno de los autores del programa de estudio, en un documento posterior al programa de estudio, en relación al eje disciplinar de la contextualización activa: "si la tarea planteada no resuelve los desafíos del contexto o se podría prescindir del mismo para realizarla o sus resultados no aportan algo significativo para el contexto, no se logra lo que se persigue con el eje disciplinar" (p. 74).

En el fundamento teórico del programa, se indica que las contextualizaciones artificiales se presentan al contextualizar un problema que es matemático. Estas "no activan intereses y acciones cognitivas de nivel superior ni procesos matemáticos: no generan un involucramiento estudiantil activo" (MEP, 2012, p. 36). No obstante, de los 44 problemas que pudieron ser clasificados según estas subcategorías, 27 presentan una contextualización activa y 16 una contextualización artificial. Por tanto, poco más del 36% de los problemas tiene un contexto forzado, que no es necesario para dar significado a la situación planteada, ni para brindar solución al mismo.

Un ejemplo de problema que permite una contextualización activa, según la perspectiva del MEP (2012) se presenta en la figura 1.



Figura 1. Problema con contextualización activa (MEP, 2012, p. 285).

Con este problema se espera que el estudiante identifique nímeros racionales en diversos contextos. En este caso, se brindan datos del precio de la gasolina, obtenidos de una institución autónoma de Costa Rica (RECOPE). Es bastante común que al ir a una gasolinera se pida ₡5 000, ₡10 000 o ₡20 000 en gasolina. La pantalla indica el precio en colones y la cantidad de

litros, que comúnmente dará una cantidad racional no entera. La operación que debe resolver el estudiante (10 000 ÷ 600), generalmente no la haría el conductor o seguramente su interés se quedaría en el número natural aproximado de litros; pero el contexto sí es útil para que el alumno logre alcanzar la habilidad propuesta.

Otro ejemplo de contextualización activa se presenta en la figura 2. Se muestra un problema en el que se brindan ciertas especificaciones para construir una rampa, según la normativa vigente en el país y, con esa información, el estudiante debe determinar la distancia a la que debe empezarse la construcción de dicha rampa. En este caso, se evidencia que el contexto resulta indispensable para que el estudiante dé solución al problema. Además, se trata de un contexto costarricense.



Se quiere construir una rampa para personas con discapacidad en un colegio. Según la ley 7600 de Costa Rica, el ángulo adecuado para hacer estas rampas es de 15°. Si la altura que se quiere alcanzar es de 1,3 m:

a. ¿A qué distancia debe comenzar la rampa?
b. ¿Qué longitud tendría la rampa?

Figura 2. Problema con contextualización activa (MEP, 2012, p. 317).

Un ejemplo de contextualización artificial se muestra en la figura 3, donde se presenta una situación relacionada con la pintura *La Gioconda* de Leonardo Da Vinci. En esa indicación puntual se subraya la conexión que permite el problema entre las ecuaciones lineales, el arte y la historia, al tiempo que "confirma la utilidad de las matemáticas en diversos ámbitos de la vida" (MEP, 2012, p. 336). Sin embargo, tal como puede detallarse en la figura 4, los datos históricos y artísticos no son esenciales para resolver el problema.



Una pintura muy famosa es la Gioconda del artista Leonardo da Vinci. Esta pintura se encuentra en el Museo de Louvre en Paris, Francia. El cuadro tiene forma rectangular y su altura es 24 centímetros más que su ancho. El perímetro del cuadro es de 260 centímetros. Calcule la altura y el ancho del cuadro.

Figura 3. Problema con contextualización artificial (MEP, 2012, p. 336).

La contextualización presentada en el problema anterior es artificial, puesto que es un problema matemático con detalles innecesarios para su solución. Este podría resolverse con una redacción como: determine la altura y ancho de un rectángulo cuya altura es 24 cm más que su ancho.

Por otra parte, en el problema de la figura 4, propuesto para desarrollar la habilidad de encontrar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano aplicando el teorema de Pitágoras, se expone una situación que usualmente no se presenta en la vida cotidiana: se brinda la información de la trayectoria de dos estudiantes, desde el colegio hasta sus hogares, dando como

suposición que las carreteras son siempre rectas, lo cual no sucede en Costa Rica. Luego se solicita calcular la distancia que existe entre las casas de los dos estudiantes. Este es un cálculo que dos personas no harían, y más el contexto en cuestión podría ser fuente de dificultad. De hecho, en la realidad, el desplazamiento en un contexto como el de este problema no tiene relevancia, como sí lo podría tener la trayectoria. Conocer la trayectoria permite hacer un cálculo aproximado del cobro de un taxi, o el tiempo que se tardaría para llegar de una casa a otra, pero ya no correspondería a la habilidad que se desea desarrollar. Incluso, el contexto puede confundir al estudiante, o bien, ser irrelevante para resolver un problema de distancia entre puntos.



Figura 4. Problema con contextualización artificial (MEP, 2012, p. 316).

En otros casos, la contextualización es artificial porque aunque el ejercicio presenta algún dato descriptivo (relacionado con otras ciencias, datos geográficos, entre otros), este no es trascendental para la solución del problema. La situación podría presentarse como un contexto matemático. Un problema que ejemplifica esta afirmación versa así:

> El monte Everest (la montaña más alta del mundo) es 5 413 metros más alto que el volcán Irazú (uno de los puntos más altos de Costa Rica). Si la suma de sus alturas es 12 283 metros, plantee una ecuación que permita calcular la altura de cada uno de ellos. (MEP, 2012, p. 335)

Este problema debe responder a la habilidad de plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando ecuaciones de primer grado con una incógnita,. Se puede apreciar que realmente el contexto se limita a que hay una cantidad conocida (5 413) y una incógnita, que al sumarlas dan como resultado 12 283. Presentar este problema no difiere a uno de contexto matemático como: la suma de dos números es 12 283 y uno de ellos es 5 413, ¿cuál es el otro número? Por tanto la contextualización es artificial.

Otro ejemplo muy claro donde el contexto es artificial, se presenta en el problema de la figura 5, donde se pregunta por el área total de un terreno cuyas medidas de los lados están dadas por variables. En la vida real se tienen las medidas y no variables. En efecto, la situación es un contexto matemático al que se le agrega el dato de que la figura representa un terreno. Perfectamente podría plantearse: determine el área de la figura adjunta, suponiendo que los lados consecutivos son perpendiculares entre sí.

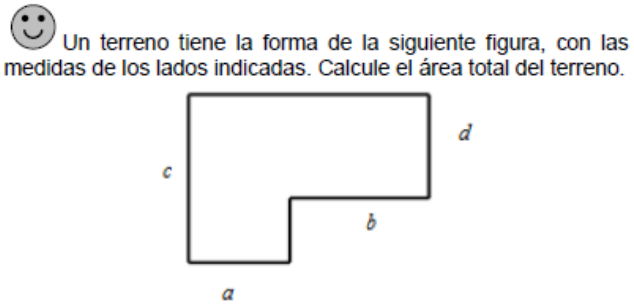


Figura 5. Problema con contextualización artificial (MEP, 2012, p. 334).

En otra indicación puntual aparece el siguiente problema: "Pedro debe a Juan ₡250 000 y le cancela ₡110 000. ¿Cuánto le queda debiendo Pedro a Juan?" (MEP, 2012, p.282). Un problema muy similar a este es utilizado en el propio Programa de Estudios de Matemáticas del MEP (2012) para indicar que no hay una contextualización activa (p. 36) puesto que "estas contextualizaciones son útiles en muchas circunstancias educativas, pero no activan intereses y acciones cognitivas de nivel superior ni procesos matemáticos: no generan un involucramiento estudiantil activo" (p. 36).

Por otra parte, en relación con el contexto costarricense, el Programa de Estudios de Matemáticas del MEP (2012) enfatiza, en su introducción, que el currículo debe responder a la realidad nacional. Al respecto y refiriéndose a Costa Rica, aclara que "la utilización de problemas como generadores de la organización de las lecciones ofrece oportunidades valiosas para conectar con las necesidades de nuestro país" (p. 19). De ahí la importancia de analizar si los problemas presentados para el III Ciclo responden a la realidad costarricense.

De la totalidad de problemas, 27 tienen la información necesaria para ser ubicados dentro o fuera de Costa Rica, lo cual equivale al 24,3% de la totalidad de problemas analizados. De ellos, 17 corresponden a un contexto costarricense, lo cual representa aproximadamente el 63% de los casos. Sin embargo, en la mayoría, son contextos poco relevantes, donde la realidad costarricense no es significativa para resolver el problema.

Estos problemas se caracterizan por proporcionar datos de instituciones costarricenses tales como la Refinadora Costarricense de Petróleo, la Caja Costarricense de Seguro Social y el Consejo Nacional de Producción. También se mencionan actividades recreativas, servicios públicos, datos demográficos, entre otros.

En varios casos, se hace alusión al país, pero sin que esto represente un contexto relevante para la solución del problema. Por ejemplo, en la situación ilustrada en la figura 6 se menciona el nombre de Costa Rica, pero el contexto es artificial. En este mismo caso, para resolver el problema, se debe suponer que las carreteras son totalmente rectas, lo cual no sucede en este país.



Carolina sale de su casa y se dirige al hogar de su mamá que se ubica 2 km al Sur del suyo. Luego de saludarla y conversar con ella, le informan que su hermano Andrés (quien estudia en el extranjero y llevaba más de 5 años de no visitar a su familia) llegó a Costa Rica y que se encuentra en su casa de habitación, a 750 m Norte de la casa de su mamá por lo que ellas se dirigen para darle la bienvenida. Considerando como punto de referencia la casa de Carolina:

a. Determine su ubicación actual en metros.
b. Determine la distancia en metros que hay entre la casa de Carolina y la de su hermano.

Figura 6. Problema que menciona a Costa Rica, con un contexto artificial (MEP, 2012, p. 282).

Por otra parte, de los siete problemas que se ubican en un contexto fuera de Costa Rica, cinco proporcionan datos numéricos sobre temperaturas o altitudes geográficas, con el fin de trabajar con números negativos o ecuaciones.



El yak es un animal que habita en las montañas del Tibet a unos 5000 m sobre el nivel del mar y el cachalote vive 5900 m más abajo. Determine la altura en la que suele vivir este último. Respuesta: 900 m bajo el nivel del mar.

Figura 7. Problema con contexto fuera de Costa Rica. (MEP, 2012, p. 280)

El problema de la figura 7, presenta información de animales que habitan fuera de Costa Rica. Se puede apreciar que el contexto como tal no es necesario para realizar el problema, ya que solo se requiere operar una resta, para lo cual no hay necesidad del dato sobre el lugar donde habitan esos mamíferos.

Conclusiones

Tanto en la revisión de literatura internacional, como en los fundamentos teóricos del Programa de Estudios de Matemática del MEP (2012), se evidencia la importancia de considerar el entorno del estudiante para la confección de problemas matemáticos. Presentar la matemática más cercana a la realidad del alumno, permite no solo motivar al alumno, sino también posibilita potenciar acciones cognitivas de nivel superior.

Tal como lo menciona el MEP (2012), una contextualización activa estimula la acción estudiantil, en el tanto que se le proporcionen problemas sobre la realidad cercana.

De acuerdo con los fundamentos teóricos, el enfoque principal del currículo matemático de Costa Rica, es la resolución de problemas que, al colocarse en contextos reales, "conlleva directamente a la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos" (MEP, 2012, p. 13). Al respecto se concluye que, en áreas como números y probabilidad, es donde mayormente hay problemas que promueven en los estudiantes la construcción o uso de modelos matemáticos, ofreciendo una contextualización activa. Para diversas habilidades, especialmente en las áreas de

geometría y álgebra-relaciones, se proponen problemas a los que se les agregan algunos datos de la vida cotidiana, pero que no son necesarios para la resolución de los mismos. La resolución generalmente es mecánica y no requiere un razonamiento superior. De esta manera, hay una presencia considerable de situaciones con contextualización artificial.

Los contextos de los problemas deben propiciar el desarrollo de competencias matemáticas, que permitan la construcción de capacidades ciudadanas esenciales para el progreso de la nación (MEP, 2012, p. 18). En este sentido, la Etnomatemática insiste en el entorno local/cercano de las Matemáticas; sin embargo, muy pocas situaciones fueron contextualizaciones activas ubicadas en el entorno costarricense.

Referencias y bibliografía

Bardin, L. (2012). *Análisis de contenido.* Madrid: Akal Ediciones.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemáticas, eslabón perdido entre las tradiciones y la formación permanente del profesorado* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.

D'Ambrosio, U. (2013). *Etnomatemáticas*: entre las tradiciones y la modernidad. México, D.F: Ediciones Díaz de Santos.

MEP - Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de estudio matemáticas. Educación general básica y ciclo diversificado*. Costa Rica.

Monteiro, A. y Mendes, J. (2011). Prácticas sociales y organización curricular: cuestiones y desafíos. *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59), 37-46.

Núñez, J. M. y Font, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas: Una aproximación histórica, *Revista de Educación*, *306*, 293-314.

Peña, P. (2014). Etnomatemáticas y currículo: una relación necesaria. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas*, *7*(2), 170-180.

Ramos, A. B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica*, *20*(4), 535-556.

Ruiz, A. (2000). *El desafío de las Matemáticas*. Heredia, Costa Rica: Editorial Universidad Nacional.

Ruiz, A. (2013). La educación matemática en Costa Rica: antes de la reforma. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 8* (número especial), 10-16.

Ruiz, A. (2017). Los contextos en el currículo de matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 12* (número especial), 72-76.

Sánchez, C. (2014). ¿Cómo contextualizar y dejar pensar la Matemática*? Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *9*(12), 55 -72.

Viterina, M. (2015). La Etnomatemática en el sistema educativo ecuatoriano. *Revista Publicando*, *2*(1), 24-34.



Problematización indisciplinar de prácticas sociales del trapiche para pensar la Educación [Matemática] Rural

Nancy Milena **Quintero** Serna
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
n.quinteroserna@gmail.com

Carolina **Tamayo**
Universidade de Campinas
Brasil
carolina.tamayo36@gmail.com

Resumen

Esta ponencia tiene como propósito presentar una investigación de maestría en su desarrollo inicial, en la cual el objetivo es *analizar la movilización de conocimientos [matemáticos] en las prácticas desarrolladas en el trapiche, a partir de una problematización indisciplinar con estudiantes del grado tercero de la I.E.R. Eva Tulia Quintero de Toro.* Para esto nos basamos en autores como D´Ambrosio (2008, 2014), Tamayo-Osorio (2017a, 2017b), Boix (2003), Walsh (2006, 2007), entre otros autores de la Educación Matemática y la Decolonialidad. Además, nos proponemos desarrollar la investigación en una perspectiva cualitativa, buscando transformar la práctica educativa que se vive junto a los niños y niñas en la I.E.R. Eva Tulia Quintero de Toro.

Palabras clave: Indisciplinaridad, Etnomatemática, Prácticas Sociales, Educación [Matemática], Ruralidad.

Introducción

Esta comunicación pretende dar a conocer una investigación de maestría en su desarrollo inicial en la cual pretendemos responder a la pregunta: ¿*Cómo se movilizan conocimientos [matemáticos] en las prácticas sociales del trapiche a partir de una problematización indisciplinar con estudiantes del grado tercero de la I.E.R. Eva Tulia Quintero de Toro para pensar la Educación [Matemática] Rural*? En coherencia con la pregunta, el objetivo es: *Analizar la movilización de conocimientos [matemáticos] en las prácticas desarrolladas en el*

trapiche a partir de una problematización indisciplinar con estudiantes del grado tercero de la I.E.R. Eva Tulia Quintero de Toro para pensar la Educación [Matemática] Rural.

Nos proponemos desarrollar la investigación en una perspectiva cualitativa en la perspectiva de Denzin y Lincoln (2012), bajo un enfoque crítico-dialéctico en la perspectiva de Sánchez (1998) centrando mi mirada en las narrativas que emerjan en el desarrollo del trabajo de campo orientada por Jaramillo (2003). Se espera que el análisis que será producido en 2019 se desarrolle a partir de la triangulación de las voces de los niños, de los expertos del *trapiche*[1] y cultivos de caña de azúcar, y de los teóricos que nos acompañan en el camino.

Planteamiento del problema

Este proyecto surgió a partir de diversas experiencias vivenciadas en práctica pedagógica como docente en una escuela rural en la vereda la Piñuela del municipio de Cocorná en el departamento de Antioquia (Colombia) durante el primero y segundo semestre de 2018. Comencé a evidenciar, que los niños presentaban diversas dificultades para resolver cálculos matemáticos y, que fuera del aula de clase ellos lograban desarrollar estos cálculos sin mayor dificultad; además, en diversas discusiones que desarrollamos en el área de ciencias naturales, los niños contaban historias producto de sus vivencias en el *trapiche* al participar con sus padres en la elaboración de productos de la región como la *panela*[2] y los *conejos*[3].

Así, fuera del aula clase cuando los estudiantes requerían realizar procesos aritméticos de cuantificación, medición, ordenación y clasificación lo hacían con facilidad, usando *conocimientos [matemáticos]*[4] movilizados y legitimados en las prácticas en las que participaban. Comencé a percibir, además, que estos *conocimientos [matemáticos]* eran usados con base en los criterios de las prácticas y no con base en la Matemática enseñada en la escuela. Mendes (2015) señala que este tipo de fenómeno escolar muestra que,

> […] el sentido de práctica aritmética aquí no está exclusivamente relacionado con los procedimientos aritméticos que involucran la actividad, es decir, a los cálculos; sino, con el conjunto de estos procedimientos asociados a los criterios establecidos para las elecciones, que tienen un origen sociocultural. (p. 8).

[1] Un *trapiche* es un molino utilizado para extraer el jugo de determinados frutos de la tierra, como la caña de azúcar, con el generalmente se fabrica diversos productos y se obtiene azúcar.

[2] Producto derivado de la caña de azúcar el cual se obtiene a partir del siguiente proceso: 1. Se corta la caña. 2. Se pasa por un trapiche para extraer el jugo. 3 este jugo se hierve en un fondo (paila), hasta obtener un espesor determinado, que al enfriarse se convierte en bloques una vez esté completamente dura es porcionada por libras o cuartos, también es distribuido al consumidor final en polvo. Una vez lista es usada como enducolorante natural y como bebida energizante.

[3] Los *Conejos* son productos semiblandos que sale en medio de la elaboración de la panela, antes de terminar su proceso de cocción comúnmente es llamado de *panelita*.

[4] La expresión '*conocimiento [matemático]*' la retomo de Tamayo-Osorio (2012) quien la usa con el propósito es cuestionar la concepción universal y neutral de la Matemática, llamando nuestra atención para (re)conocer otras formas de conocimientos no disciplinares oriundos de diversas prácticas sociales que se desarrollan en tiempos y espacios diversos. Usaremos la palabra 'Matemática', en mayúscula, para referirnos en palabras de Lizcano (2006, p. 20) a "las matemáticas, lo que suele entenderse como matemáticas, pueden pensarse como el desarrollo de una serie de formalismos característicos de la peculiar manera de entender el mundo de cierta tribu europea. Por ser sus primeros practicantes habitantes de ciudades o burgos podríamos llamarles la "tribu burguesa". Y a sus matemáticas "matemáticas burguesas". Estas matemáticas burguesas en las que todos (tal vez sólo casi todos) hemos sido socializados reflejan un modo muy particular de percibir el espacio y el tiempo, de clasificar y ordenar el mundo, de concebir lo que se considera posible y lo que se considera imposible".

Con base en esta comprensión de prácticas aritméticas, percibí que estas siempre varían y cambian de acuerdo con la actividad que se realiza y el lugar donde ocurren, existiendo una articulación entre las acciones de los niños y las acciones locales del contexto. Lo anterior, me permitió ver que en el aula de Matemática no se consideraban los *conocimientos [matemáticos]* que los niños utilizaban en su vida cotidiana. Entonces, comencé a preguntarme por qué los niños no utilizaban correctamente el algoritmo en los ejercicios académicos que involucraban conocimientos de las prácticas aritméticas que se realizan en el aula, pero cuando se encuentran en sus *prácticas sociales*[5] ellos si logran resolver los cálculos.

Me percaté que las experiencias que había observado estaban relacionadas con un problema de fondo que permea la enseñanza en el ámbito escolar rural, que tiene que ver con el hecho de enseñar únicamente la Matemática escolar que están organizada disciplinarmente – que hace parte de un sistema hegemónico globalizado de escolarización – deslegitimando y muchas veces desconociendo los conocimientos [matemáticos] producidos desde y para la ruralidad - que se usan en las prácticas sociales y que no encajan en la forma de organización disciplinar, ya que poseen sus propias formas de ser organizados, validados y legitimados-.

Esa organización jerárquica y disciplinar del conocimiento Matemático que se impone en la ruralidad evidencia currículos escolares centrados en las preguntas "¿*qué enseñar*?" y "¿*cómo enseñar*?" que excluyen la importancia de preguntarnos en la escuela "*¿a quién enseñamos*?", "*¿dónde enseñamos*?" y *"¿para qué enseñamos*?" (Tamayo-Osorio, 2012). Lo anterior, en el caso de la ruralidad, ha contribuido para que otros *conocimientos [matemático]* sean invisibilizados en aula de clase, en palabras de Boix (2003, p 5, *cursivas nuestras*),

> el *alumno rural suele manejar una cultura diferente a la de la escuela, los libros de texto* y, evidentemente, el maestro. *No son aprovechadas sus experiencias, sus vínculos familiares, sus conocimientos de los lenguajes silenciosos y del patrimonio natural que caracterizan la comunidad rural*; nada de ello es importante ni válido desde el discurso pedagógico urbano, al contrario, *deben imponerse precisamente los currículos diseñados para las escuelas urbanas*, de ciudad, uniformarse los valores y romper los sentimientos de pertenencia a un territorio menospreciado desde las grandes urbes. El mensaje es muy claro: *la escuela rural no "existe" y si pretende sobrevivir deberá hacerlo a costa de las propuestas curriculares diseñadas para las escuelas completas*.

Por lo anterior considero pertinente y necesario comenzar a cuestionar esa invisibilización epistémica y la subalternización[6] de los *conocimientos [matemáticos] rurales* en la escuela donde trabajo, para comenzar a pensar una *Educación [Matemática] Rural* a partir de una perspectiva *no disciplinar* y decolonial. En este proceso escuchar las voces de los niños de tercero es fundamental para tejer relaciones entre, las diversas prácticas aritméticas que se

[5] Según Miguel y Miorim (2004, p. 24) prácticas sociales pueden ser entendidas como "[…] toda acción o conjunto intencional y organizado de acciones físico-afectivo-intelectuales, realizadas, en un tiempo y espacio determinados, por un conjunto de individuos, sobre el mundo material y/o humano, y/o institucional, y/o cultural, acciones éstas que, por ser siempre, y en cierta medida, y por un cierto período de tiempo, valorizadas por determinados segmentos sociales, adquieren una cierta estabilidad, y se realizan con cierta regularidad". Esta postura nos permite entender que toda práctica es social y cultural, es situada y productora de conocimientos de forma no disciplinar, lo que abre la puerta para comprender que existen otros conocimientos [Matemáticos] producidos y legitimados por diversas culturas, pero que, no son reconocidos ni legitimados por la escuela.

[6] La subalternización es un ejercicio de clasificación utilizado para invisibilizar o hacer ver como inferiores los conocimientos de otras culturas o comunidades frente a los de tradición eurocéntrica. Concepto trabajado por Mignolo (2005) en los planteamientos del colonialismo.

procesan en los contextos escolares y extraescolares, y así, comprender que los valores socioculturales que permean dichos contextos son determinantes en las formas en que se usan nociones de *cuantificación*, *medición*, *ordenación* y *clasificación*, esto es visto por Mendes (2015) como, *prácticas de numeramiento*.

Es en este sentido, propongo estudiar junto con los niños de tercero las prácticas sociales que son desarrolladas en el *trapiche*, toda vez que, son un elemento constitutivo del territorio en el que se encuentra la Institución Educativa Rural Eva Tulia Quintero, apostando,

> *por una escuela abierta a la comunidad*, por una escuela que ofrece a sus alumnos estrategias y recursos que les ayuden a entender y respetar la cultura local, que valore las fiestas tradicionales, el entorno natural, la propia historia del pueblo, la lengua, los saberes individuales y comunitarios, el oficio de sus habitantes y las relaciones interpersonales y afectivas, y los integra en sus proyectos educativos y curriculares. Es una escuela que parta de la propia realidad y posibilite la creación y conservación de "estructuras de conocimiento locales" como punto de partida para la puesta en marcha de sus objetivos pedagógicos y ponga a disposición de los alumnos los recursos y medios didácticos necesarios para que éstos tomen conciencia de la necesidad vital de su existencia para el desarrollo comunitario. (Boix 2003, p.6),

Marco teórico

Las cosmovisiones, el uso del territorio, las prácticas sociales y hábitos de las comunidades campesinas, nos permiten identificar las estructuras y sistemas sobre los cuales se ha conformado procesos de acumulación de *conocimientos [matemáticos]*, que emergen de manera diferencial; sin embargo, en el sistema escolar se continúa demarcando una,

> […] distancia que separa esas prácticas de las nuestras, es decir, de la *matemática* (así, en singular) y, en función de ello, consideramos que ciertas *matemáticas* están más o menos avanzadas o juzgamos que, en cierto lugar pueden encontrarse 'rastros', 'embriones' o 'intuiciones' de ciertas operaciones o conceptos matemáticos. Las prácticas matemáticas de los otros quedan así legitimadas – o deslegitimadas- según *su mayor o menor parecido con la matemática que hemos aprendido en las instituciones académicas*. (Lizcano, 2002, p.1. *itálicos nuestros*)

Con relación a lo anterior, he venido comprendiendo que, para las comunidades rurales - sean ellas campesinas, indígenas o afrocolombianas - ha sido conflictivo pensar la educación, toda vez que al interior de cada una de ellas existen dificultades para organizar y gestionar una escuela otra, menos disciplinar y más *indisciplinar*[7]. Sin embargo, las comunidades rurales campesinas han venido tejiendo propuestas educativas que procuran recoger las dimensiones de la vida rural, en las que se incorporen los saberes y prácticas sociales de sus contextos, buscando atender las demandas del *Proyecto Educativo Rural*[8] (PER, 2009) propuesto por el Ministerio de Educación Nacional.

En esta perspectiva vale la pena anotar que Institución Educativa Rural Eva Tulia Quintero de Toro cuenta con 15 sedes, de éstas 14 son organizadas bajo el modelo de *Escuela Nueva*[9], y la

[7] En la perspectiva de Miguel, Vilela y Laner de Moura (2012).

[8] Es el principal programa del Ministerio de Educación Nacional encaminado a brindar una atención educativa pertinente a los niños, niñas y jóvenes de las zonas rurales y de difícil acceso.

[9] Modelo educativo, que según el MEN (1990), permite ofrecer primaria completa en escuelas multigrado con uno o dos maestros, integrados de manera sistémica, estrategias curriculares, comunitarias, de capacitación, seguimiento y

sede principal, que es donde realizaremos esta investigación, debido a la cantidad de alumnos, ha asumido la *educación formal*[10], o tradicional. Las 15 sedes de la Institución Educativa Rural Eva Tulia Quintero de Toro han organizado sus currículos con base en el ARTÍCULO 23 de la Ley General de Educación 115 (1994a), además de hacerlo bajo la guía del ARTÍCULO 77 que describe la autonomía escolar:

> […] Dentro de los límites fijados por la presente ley y el proyecto educativo institucional, las instituciones de educación formal gozan de autonomía para organizar las áreas fundamentales de conocimientos definidas para cada nivel, introducir asignaturas optativas dentro de las áreas establecidas en la ley, adaptar algunas áreas a las necesidades y características regionales, adoptar métodos de enseñanza y organizar actividades formativas, culturales y deportivas, dentro de los lineamientos que establezca el Ministerio de Educación Nacional.

Es por esto que en este proyecto me propongo partir de hecho de comprender la ruralidad desde una perspectiva *ruralocéntrica*, la cual es planteada por Boix (2003) y me permite acercarme con otra mirada al contexto donde desempeño mi quehacer docente, dado que esta

> […] estudia la situación, evolución y problemática de las zonas rurales a partir de la propia ruralidad, de los intereses de las personas que trabajan y viven en este medio. Es un planteamiento que pretende conservar la propia identidad, ni más ni menos importante que otro medio, y ni mucho menos subordinado a cualquier otro (p.1).

Por lo anterior este proyecto parte de la concepción de que es necesario comprender el territorio rural en su particularidad, reconociendo sus potenciales y la riquezas históricas y sociales, esto quiere decir, que es necesario *invertir* la mirada y causar *dislocamientos* que nos permitirán pensar de otros modos la *Educación [Matemática] Rural*, al proponer otras formas de conducir la enseñanza basadas en la *problematización no disciplinar* de prácticas sociales y, al cuestionar el hecho de que en la escuela solo se considere la Matemática.

Articulamos a esta perspectiva los planteamientos y posibilidades que la etnomatemática (D´Ambrosio 2014; Mendes 2001) nos posibilita para pensar de otros modos la *Educación [Matemática] Rural* que busquen la visibilización, apropiación y trabajo de otras formas de comprender y habitar el mundo. La Etnomatemática como una apuesta política, social y ética, parte del reconocimiento de la diferencia, al permitirnos pensar que diferentes prácticas sociales producen diferentes *matemáticas*, esto es,

> […] un conjunto de modos, estilos, artes y técnicas (*technés* o ticas) para explicar, aprender, conocer, lidear en/con (*matemá*) los ambientes naturales, sociales, culturales e imaginarios (etnos) de una cultura, o sea. Etnomatemática son las *ticas* de *matemá* en un determinado *etno*. Las etnomatemáticas son, por ende, contextualizadas en distintos ambientes naturales y culturales. (D`Ambrosio 2014 p. 103).

Por tanto, la etnomatemática anuncia y denuncia que es posible pensar otras formas de enseñanza, que consideren la multiplicidad de usos de las matemáticas, como lo explican

---

administración donde se promueve el aprendizaje activo participativo y cooperativo y se fortalece la relación escuela – comunidad.

[10] En Colombia la *educación formal* según el MEN (1994b), se organiza por niveles, ciclos y grados, la educación preescolar, con un año obligatorio, la educación básica que comprende nueve grados que se deben organizar en forma continua y articulada que permita el desarrollo de actividades pedagógicas de formación integral y la educación media (dos grados y culmina con el título de bachiller).

Monteiro y Mendes (2015) "la etnomatemática como discurso es capaz de cuestionar algunas de las estructuras más fuertes en el campo de la Matemática en especial su universalidad y como verdad única y absoluta" (p.5), y en esta misma línea "la etnomatemática no es, ella está siendo, ella es una formación discursiva en movimiento y tomada como un movimiento de contraconducta". (p. 7-8)

Con todo lo anterior, se hace necesario, según la propuesta de Monteiro y Mendes (2011), la creación de un espacio que no exija suprimir aquello que el estudiante trae de su vivencia, sus formas de pensar, conocimientos que no van ligados ni son legitimados por las prácticas dominantes de educación, en nuestro caso, posibilitar encuentro entre esas diversas prácticas aritméticas que son producidas fuera de la escuela en las prácticas sociales, y aquella que es producida al interior de la escuela.

En ese sentido asumimos la *problematización indisciplinar* en la lectura que hacen Miguel, Vilela y Lanner de Moura (2012) inspirados en los trabajos de Lave (1988, 1996, 2002) quienes plantean que

> […] problematizar, significa discutir, cuestionar y evaluar todos los tipos de relaciones asimétricas de poder que se instaura en cualquier comunidad humana. La movilización escolar de prácticas humanas está en consonancia con la propuesta no disciplinar que constituyen estas prácticas en su complejidad no multifacética en disciplinas. Además, mediante la movilización escolar de prácticas, la intención que subyace es abandonar al mismo tiempo la separación disciplinaria y el "dominio de conocimiento" (p.3)

Esta perspectiva requiere la observación de las diferentes prácticas de las comunidades, para comprender lo que hacen y por qué lo hacen y cuáles *conocimientos [matemáticos]* son allí movilizados, comprendiendo que el conocimiento es vivo, dinámico y que está en constante en cambio. En este sentido, y considerando el problema de investigación, es necesario crear espacios para problematizar diversas formas de practicar las prácticas aritméticas, ya que, en la comparación es posible entender que la forma en la cual la aritmética se utiliza en la escuela se rige con base en una racionalidad específica, mientras que, en las otras prácticas, la elección es hecha por una racionalidad utilitaria como lo esclarece Mendes (2015).

Por lo anterior con este trabajo de investigación pretendo analizar la movilización de conocimientos [matemáticos] en las prácticas desarrolladas en el trapiche a partir de una problematización indisciplinar desarrollada con estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa Rural Eva Tulia Quintero de Toro, que coexisten con los contenidos curriculares, lo que permite crear un escenario de movilización de los *conocimientos [matemáticos] rurales*, y la decolonización de las diferentes prácticas educativas al facilitar la oportunidad de crear nuevos fenómenos interculturales.

Metodología

Esta investigación se desarrollará bajo una perspectiva cualitativa en la perspectiva de Denzin y Lincoln (2012) porque permite dar respuesta a las diferentes preguntas a partir de experiencias reales, dándole voz a los participantes, para que estos puedan ser escuchados a partir de sus experiencias.

También seguiré el enfoque crítico-dialéctico trabajado por Sánchez (1998), quien trabaja la "relación sujeto – objeto, historia y realidad y los atraviesa con una discusión de los problemas éticos que son propios de la producción de conocimiento sobre la sociedad y la educación" (p.8),

y, además, comprende el ser humano desde su no terminación, sino a partir de su constante transformación y creación de historias que posibilitan el cambio de su entorno. Lo elijo sobre todo porque este enfoque cuestiona la visión estática de la realidad y busca un panorama transformador para esta y, a su vez, comprende los fenómenos a partir de sus prácticas sociales.

Por otro lado, me aproximaré en la investigación narrativa en la perspectiva en la que Jaramillo (2003) que la comprende a partir de estos 7 momentos:

> […] 1. Estar basada en la experiencia compartida entre el investigador y los participantes ubicados en el tiempo y en el espacio. 2. Negociación de entrada y salida de la búsqueda de campo. 3. Debe haber un contar y recontar constante, con base en esa relación colaborativa, en las narrativas compartidas. 4. Debe quedar claro quién es el Investigador y cuál es su papel. 5. Debe superar criterios como validez, confiabilidad y generalización, proponiendo criterios como transparencia, verosimilitud, transferibilidad y globalidad. 6. Los modos de recopilación de datos. 7. La escritura final de la investigación que necesita ser revisada, discutida y aprobada conjuntamente por investigadores y participantes.[11] (p. 247-248).

Así, la narrativa aborda a los seres humanos como organismos contadores de historias y que vivimos vidas relatadas, postulado que me va acompañar en la construcción de los relatos escritos por los niños y, para relatar narrativamente las voces de los expertos del *trapiche.* Lo anterior, con la finalidad de tejer nuevas posibilidades de enseñanza en la escuela que tengan en cuenta sus experiencias, las cuales son adquiridas en las prácticas sociales, ya que "la narrativa es una forma de caracterizar los fenómenos de la experiencia humana" (Connelly y Clandinin, 1995, p. 12). Vale la pena anotar que en este tipo de investigaciones es de vital importancia el permitirse "escuchar primero la historia de los participantes, pero no quiere decir que el investigador permanezca en silencio, es solo escuchar primero a quien ha sido silenciado por tanto tiempo" (Connelly y Clandinin, 1995, p.21).

Los registros y datos de esta investigación serán construidos en el 2019 a partir de: la voz de los niños, a través de un diario que es escrito por los participantes y por el investigador, también se harán entrevistas no estructuradas y se transcribirán para que hagan parte de los registros, a partir de las historias contadas (narradas). Además, se consideraran cuatro visitas de los expertos[12] del *trapiche* a la escuela, cuatro visitas de los niños a los *trapiches* de la región y la construcción de registros autobiográficos de los niños.

Mi voz como maestra investigadora se hará visible con un diario que se llevará a la par con los participantes, fotografías, videos y grabaciones de las visitas a los trapiches y de las actividades desarrolladas con los niños participantes. Se espera sea posible la "construcción de un documento colaborativo una historia construida y creada a partir de las vidas tanto del investigador como de los participantes" (Connelly y Clandinin, 1995, p. 51).

Referencias y bibliografía

Boix, R., & Realidad, H. E. N. (2003). Escuela Rural Y Territorio : Entre La Desruralización Y La Cultura Local. 1–8.

Connelly. D. J. & Clandinin., F. M. C. (1995). *Relatos de Experiencia e Investigación Narrativa*. Laertes S.A. Ed.

[11] Traducción propia.

[12] Se llamará expertos a las personas que practican las prácticas sociales desarrolladas en el trapiche, las cuales serán invitados de manera especial a la institución.

Denzin, N &. Lincoln S.L. (2012). *El campo de la investigación cualitativa*. (Gedisa, Ed.).

D'Ambrosio, U. (2008) Etnomatemática: Eslabón entre las tradiciones y la modernidad. (J. Arrieta & C. García, Trads) México: Limusa (Trabajo original publicado en 2001).

D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática Revista Latinoamericana de Etnomatemática, vol. 7, núm. 2, junio-septiembre, 2014, pp. 100-107.

Jaramillo, D. (2003). *(Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica*. Campinas.

Lizcano, E. (2002) Las matemáticas de la tribu europea: Un estudio de caso. II International Congress on Ethnomathematics, Ouro Preto, Brasil, 5 de agosto. Disponible en: http://www.unavarra.es/puresoc/pdfs/c_salaconfe/0-Lizcano-03-1.pdf

Lizcano, E. (2006). Metaforas que nos piensan. Sobre ciencia, democracia y otras poderosas ficciones. Ed. Cultura Libre. Disponible en: https://www.traficantes.net/sites/default/files/pdfs/Metaforas%20que%20nos%20piensan-TdS.pdf

MEN. (1994a). Ley 115 febrero 8 de 1994. Por la cual se expide la ley general de educación. From www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.

MEN. (1990). DECRETO NUMERO 1490 DE 1990 (julio 9) por el cual se adopta la metodología Escuela Nueva y se dictan otras disposiciones. *Diario Oficial*. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-104130.html

MEN. (1994b). DECRETO NUMERO 1860 DE 1994 (agosto 5) Por el cual se reglamenta parcialmente la Ley 115 de 1994, en los aspectos pedagógicos y organizativos generales. Recuperado de:

https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-172061_archivo_pdf_decreto1860_94.pdf

MEN. (2009). Proyecto Educativo Rural (PER). Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-82776.html

Mendes. J. (2015). Reflexões sobre numeramento: práticas sociais de leitura e escrita em torno do conhecimento matemático. Memorias 15º CONGRESSO DE LEITURA DO BRASIL. Disponíble en http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais15/alfabetica/MendesJackelineRodrigues.htm

Mignolo, W. (2005). A Colonialidade do Saber - Eurocentrismo e Ciências Sociais - Perspectivas Latino-americanas. *A Colonialidade Do Saber: Eurocentrismo e Ciências Sociais. Perspectivas Latino-americanas*, 33–49. Retrieved from http://www.livrariasaraiva.com.br/produto/1392252/a-colonialidade-do-saber-eurocentrismo-e-ciencias-sociais-perspectivas-latino-americanas

Miguel, A. & Miorim, M. (2004). Historia en la Educación Matemática: propuestas y desafios. Campinas: Autêntica.

Miguel, A., Vilela, D. S., & Moura, A. R. L. D. (2012). Problematização indisciplinar de uma prática cultural numa perspectiva wittgensteiniana. En *Revista Reflexão e Ação*, Santa Cruz do Sul, Vol. 20, núm. 2, Julio. Brasil.

Monteiro, A. & Mendes, J. (2011) Prácticas sociales y organización curricular: cuestiones y desafío. En *Revista Educación y Pedagogía*, vol. 23, núm. 59, enero-abril, (pp. 37-46). Colombia.

Monteiro, A & Mendes, J. (2015). Etnomatemática como Movimento de Contraconduta na Mobilização de Saberes em Práticas Culturais. Seminário internacional de pesquisa em educação Matemática. Pirenópolis, Goiás.

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa, presupuestos epistemologicos que*

orientan al investigador. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio

Tamayo, C. (2012). *(Re)significación del currículo escolar indígena, relativo al conocimiento [matemático], desde y para las prácticas sociales: el caso de los maestros indígenas Dule de la comunidad de Alto Caimán.* Trabajo de maestría. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Tamayo-Osorio, C. (2017a). Vení, vamos hamacar el mundo, hasta que te asustes: uma terapia do desejo de escolarização moderna. Tesis de doctorado. Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

Tamayo-Osorio, C. (2017b). A colonialidade do saber: Um olhar desde a Educação Matemática. En *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 10(3), 39-58.

Walsh, C. (2006). Lo pedagógico y lo decolonial entretejiendo caminos. En Walsh, C. (Ed.) Pedagogías decoloniales: prácticas insurgentes de resistir, (re)existir y (re)vivir (pp. 23-68). Quito, Ecuador: Ediciones Abya-Yala

Walsh, C. (2007). Interculturalidad, colonialidad y educación*. *Educación y Pedagogia*, *XIX*, 25–36.



Paz y Educación Matemática

Daniela **Montoya Osorio**
Universidad de Antioquia
Colombia
daniela.montoyao@udea.edu.co

Ángela María **Quiceno**
Universidad de Antioquia
Colombia
angelam.quiceno@udea.edu.co

Carolina **Tamayo**
Universidade de Campinas
Brasil
carolina.tamayo36@gmail.com

Resumen

En esta comunicación presentaremos una investigación de maestría en su desarrollo inicial en la cual pretendemos responder la pregunta: ¿Cuáles relaciones en uso son tejidas entre *matemáticaS y Paz* en la clase de Matemática por los estudiantes del grado quinto del Centro Educativo Autónomo y del grado undécimo del Colegio Parroquial Emaús, al problematizar de forma *indisciplinar prácticas bélicas* y Matemática?. Nuestro principal marco teórico se inspira en el diálogo tensional, entre los modos de hacer y pensar la filosofía del segundo Wittgenstein y Jacques Derrida con base en lo que Miguel (2016) ha denominado perspectiva *terapéutico-deconstrucionista*.

Palabras clave: prácticas bélicas, disciplinarización, Cátedra de la Paz, Indisciplinaridad, juegos del lenguaje.

Cátedra para la Paz, Disciplinarización y matemáticaS

En el año 2015, el Ministerio de Educación Nacional — MEN — institucionalizó *Cátedra de la Paz* como una asignatura obligatoria dentro de los planes de estudio de las

instituciones educativas del país, producto de la Ley 1732 del 2014 implementada mediante el decreto 1038 de 2015. *Cátedra de la Paz* es una iniciativa que surge a partir de la preocupación del Estado colombiano para impulsar una construcción de paz desde las instituciones educativas.

El decreto plantea que "*Educación para la Paz* se entiende como la *apropiación de conocimientos y competencias ciudadanas* para la convivencia pacífica, la participación democrática, la construcción de equidad, el respeto por la pluralidad, los Derechos Humanos y Derecho Internacional Humanitario" (Decreto 1038, 2015, p.3. *cursiva nuestra*). De este modo *Cátedra de la Paz*,

> deberá fomentar el proceso de apropiación de conocimientos y competencias relacionados con el territorio, la cultura, el contexto económico y social y la *memoria histórica*, con el propósito de *reconstruir el tejido social, promover la prosperidad general y garantizar la efectividad de los principios, derechos y deberes consagrados en la Constitución*. (Decreto 1038, 2015, p. 3, *cursiva nuestra*).

Así, se espera que las instituciones educativas en Colombia se apropien de la imperiosa necesidad de la construcción de una *paz estable y duradera*, ya que, en las escuelas, confluyen historias y muchas vivencias dolorosas de la guerra y los conflictos propios de la sociedad colombiana. Lo anterior, se relaciona con la idea de combatir la exclusión, segregación y desigualdad desde las instituciones educativas, para generar climas educativos inclusivos y armoniosos a través de la práctica de valores.

Es importante aclarar, que el decreto 1038 surge del momento histórico que vivió Colombia con la firma del *Acuerdo de Paz* con las *Fuerzas Armadas Revolucionarias de Colombia* (FARC), llevado a cabo durante el gobierno de Juan Manuel Santos en Bogotá el 24 de noviembre de 2016. Mediante tal decreto, se implementan a nivel nacional *competencias* y *estándares básicos*[1], para que en las instituciones educativas del país se enseñe *Cátedra de la Paz* como una disciplina escolar. Esta iniciativa, puesta en funcionamiento como una política pública, se relaciona, desde nuestra mirada, con la propuesta de la Naciones Unidas (1998) en la cual se describe que "la cultura de paz consiste en una serie de valores, actitudes y comportamientos que rechazan la violencia y previenen los conflictos, tratando de atacar sus causas para solucionar los problemas mediante el diálogo y la negociación entre las personas" (p.7).

La escuela, entonces, se vincula a los procesos de *Cátedra de la Paz* como porta voz de este tejido de ideas enunciadas, para atender las demandas sociales. La escuela se coloca al servicio de las políticas públicas, como un espacio que debería contribuir para pensar los problemas que se tejen en la sociedad. De hecho, la escuela, a lo largo de la Modernidad, se ha establecido "como una gran maquinaria social y cultural, o sea, como un gran conjunto de "máquinas" que, operando articuladamente entre sí, y desempeñaron un papel crucial para la formación política, cultural y económica de la sociedad occidental" (Veiga-Neto, 2008, p. 39-40). Esto es, en términos de Pineau (1996) citado por Tamayo-Osorio (2017a; p.37):

> *la escuela se convirtió en un innegable símbolo de los tiempos, en una metáfora del progreso, en una de las mayores construcciones de la modernidad*. A partir de entonces, una buena cantidad de hechos sociales fueron explicados como sus triunfos o fracasos: el

[1] "Los *estándares de competencias básicas* son criterios claros y públicos que permiten establecer cuáles son los niveles básicos de calidad de la educación a los que tienen derecho los niños y niñas de todas las regiones de nuestro país, en todas las áreas" (MEN, 2004, p. 7, *cursiva nuestra*).

> desarrollo nacional, el progreso económico, las guerras, la aceptación de los sistemas o prácticas políticas se debieron fundamentalmente a lo que el sistema escolar había hecho con las poblaciones que le habían sido encomendadas.

Como parte del proceso de vincular *Cátedra de la Paz* a la escuela se formalizaron *contenidos* y *estándares básicos* y en ese sentido el MEN produjo tres documentos que orientan a todas las Instituciones Educativas Colombianas: (1) "*Secuencias didácticas de Educación para la paz",* (2) *"Orientaciones generales para la implementación de la cátedra de la paz en los establecimientos educativos de preescolar, básica y media de Colombia" y,* (3)*"Propuesta de Desempeños de Educación para la Paz"*.

En este sentido, cuando *Cátedra de la Paz* pasa a ser organizada sobre la visión tradicional del currículo escolar, desde nuestra perspectiva, se procura responder a las preguntas "¿*qué*?" y "¿*cómo*?" enseñar y no necesariamente "¿*a quién?*" y "¿*dónde?*" enseñamos (Tamayo-Osorio, 2012); y entonces, ocurre inevitablemente, una desconexión de esas prácticas con la propia vida, se disloca la práctica de su contexto de actividad para imponerle otras reglas, otros formatos de funcionamientos que corresponden al ámbito de la escuela para movilizar otros objetivos, en palabras de Miguel (2010),

> […] en el paso de un campo a otro campo de actividad humana, inevitablemente se desconecta de sus condicionamientos originales y pasa a ser formateada según los condicionamientos de la nueva actividad en la cual fue movilizada de forma igualmente idiosincrática y, de ese modo, no podríamos más decir que, a rigor, estaríamos ante la misma práctica. (p.5)[2]

Lo anterior puede ser visto como uno de los efectos de que la escuela se organice de forma disciplinar, Veiga-Neto (1996) plantea que esto ocurre bajo dos ejes fundamentales: *disciplinazación-saber y disciplinazación-cuerpo.* Entonces, a pesar de que se busca que la escuela responda a las demandas sociales y políticas ocurre un cierto distanciamiento que se produce cuando en la escuela las *prácticas sociales*[3] son transformadas en listas de contenidos conceptuales, pues allí, toman otros formatos que no necesariamente reflejan las necesidades y problemas sociales reales. Al mismo tiempo que, como la cara de la misma moneda, se establecen códigos explícitos (o reglas) espacio-temporales de conductas, movimientos.

La clasificación de contenidos que fue realizada al organizar *Cátedra de la Paz* también se ha aplicado a otras prácticas que hoy sustentan nuestros sistemas escolares mediante los currículos; por ejemplo, *prácticas de localización espacial,* que se encuentran clasificadas en temas por grados, por edades, entre, otros. Es decir, la mayoría de nuestros saberes movilizados en las prácticas sociales, que realizamos en la vida cotidiana, han sido sometidos a los formatos y condicionamientos de la escolarización.

Un elemento que llamó nuestra atención, es el hecho de que en el Artículo 3 del decreto 1038 se reglamenta que *Cátedra de la Paz* debe ser discutida en las "disciplinas de ciencias

[2] Traducción Propia

[3] Entendemos la práctica social como "toda acción o conjunto intencional y organizado de acciones físico-afectivas-intelectuales realizadas, en un tiempo y espacio determinados, por un conjunto de individuos, sobre el mundo material y/o humano y/o institucional y/o cultural, acciones estas que, por ser, siempre, y en cierta medida, y por un cierto período de tiempo, valorizadas por determinados segmentos sociales, adquieren una cierta estabilidad y se realizan con cierta regularidad" (Miguel & Miorim, 2004, p.165).

sociales, ciencias naturales, ética y valores, como las áreas fundamentales", para realizar las intervenciones en las instituciones educativas del país. Sin embargo, deja entrever una flexibilidad para trabajar *Cátedra de la Paz* en otras áreas del conocimiento. Basadas en este último aspecto, rescatamos la importancia de trabajarla en las clases de Matemática de una forma más amplia, menos disciplinar y, más próxima de las prácticas sociales.

Con base en lo anterior, esta investigación es pertinente, por un lado, porque, posibilitará transgredir los limites disciplinares que permean la clase de Matemática y *Cátedra de la Paz*; y por el otro, como lo resalta Correa (2016), porque existe una imperiosa necesidad en el campo de la Educación Matemática —E.M—, no solo, de comprender las formas en las cuales la Matemática ha *participado de las guerras,* sino, también, de cómo las *matemáticaS*[4] participan en la construcción de Paz.

Es importante señalar que las relaciones entre *matemáticaS, Prácticas Bélicas y la Paz* ya ha venido siendo estudiadas en otras investigaciones en el campo de la E.M y la filosofía, en las cuales se han problematizado, indisociablemente. Entre estas investigaciones encontramos autores como D´Ambrosio (2010; 2011), quien fue punto clave para lograr observar que ya existía una preocupación por comprender que la Paz tenía que ser también pensada *desde* y *para* la E.M, y al mismo tiempo que, la E.M pensada *para* la Paz y *desde* la Paz. Con referencia a lo anterior, D´Ambrosio (2011) afirma que,

> […] *Matemáticas y Paz se extrañan*. Estamos llevados a concluir que el hecho de que la humanidad haya construido un cuerpo de conocimientos tan elaborado como la Matemática, es ofuscado por el hecho de que la humanidad *se ha distanciado de tal manera de la Paz*. En la búsqueda de la Paz, no basta con hacer una buena Matemática, pero *se debe hacer una Matemática impregnada de valores éticos*, que es un concepto, para muchos, desprovisto de significado. El desafío es dar el sentido del *concepto de Ética Matemática*. *Para ello es necesaria una reconsideración de la Historia de la Matemática*, buscando entender cuándo, dónde, cómo y por qué, la Matemática y la Ética se distanciaron. (p. 203, *cursiva nuestra*)[5]

En el marco de estas tensiones emerge nuestra pregunta de investigación: ¿Cuáles relaciones en uso son tejidas entre *matemáticaS* y *Paz* en la clase de Matemática por los estudiantes del grado quinto del Centro Educativo Autónomo – CEA- y del grado undécimo del Colegio Parroquial Emaús –CPE-, al problematizar de forma indisciplinar *prácticas bélicas* y Matemática?. Y, por ende, nuestro objetivo de investigación es: Describir las relaciones en uso que son tejidas entre *matemáticaS* y *Paz* en la clase de Matemática por los estudiantes del grado quinto del Centro Educativo Autónomo y del grado undécimo del Colegio Parroquial Emaús, al problematizar de forma indisciplinar *prácticas bélicas* y Matemática.

[4] El uso de la "S" mayúscula al final de la palabra '*matemáticaS'*, hace referencia a comprender los conocimientos como producidos, validados y legitimidades dentro de *juegos lenguaje* normativamente orientados en la perspectiva de Miguel (2016); además no apropiándomos de la notación utilizada por el proyecto "matemáticaS" del grupo de investigación "*Educação, Linguagem e Práticas Culturais*" (PHALA) junto al "*Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo*" (LABJOR) de la UNICAMP. Usamos la palabra 'Matemática', con "M" mayúscula, para referirnos al conocimiento en la perspectiva en la que occidente lo comprende, de forma disciplinar.

[5] Traducción propia.

Construyendo Tejidos sobre matemáticaS y Paz

Al pensar en la relación entre *matemáticaS* y *Paz* nos aproximarnos, mediante un proceso de lectura, a términos como: *prácticas bélicas, terapia decontrucionista, juegos del lenguaje, formas de vida, disciplinarización, indisciplinariedad,* entre otros. Nos hemos aproximado a estos conceptos, vinculadas a la perspectiva del giro lingüístico, a partir de autores como Campos (2015); Correa (2015); Condé (2004); Derrida (1989; 1998) Messina (2012); Miguel (2013; 2014; 2016); Tamayo-Osorio (2016; 2017a; 2017b); Vilela (2007); Wittgenstein (1988).

Con estas lecturas buscamos aproximarnos a nuestra pregunta de investigación asociada a las relaciones en uso que pueden ser establecidas entre *matemáticaS* y *Paz,* Miguel (2006), Correa (2015) y Campos (2015) nos dan la posibilidad de problematizar la Matemática como hija de la guerra fría - a partir del enunciado realizado por Paul Ernest (1999) como Correa (2015) anuncia–. Los autores señalan que a raíz de esos vínculos se crea la necesidad de hacer una reforma curricular en el mundo, con el fin de que la Matemática diera respuestas a los sucesos del momento. Se esperaba que la Matemática fuera funcional y práctica para resolver los problemas que se daban en la época de la guerra. En ese contexto, como lo plantea Correa (2015) se consideraba a la Matemática como un lenguaje universal; además,

> [...] antes de que los Estados Unidos entraran en la segunda guerra mundial, en 1939, la American Mathematical Society (AMS) y la Mathematical Association of America (MAA) crearon la Comisión de Preparación para la Guerra que luego se convirtió en una Comisión de Políticas de Guerra, y el Dr. Stone estuvo directamente involucrado en ambas. La Comisión Preparatoria de Guerra tenía tres objetivos: (1) resolver problemas matemáticos que eran esenciales para el contexto militar o de la industria de defensa; (2) preparación de matemáticos para la investigación bélica; (3) direccionamiento de la educación matemática escolar para la solución de problemas matemáticos que fuese útil al contexto bélico (Correa, 2015, p. 21).

Por lo anterior, y considerando las reformas curriculares de la época, las investigaciones en E.M y en Matemática involucraban, no solo, modificaciones a la Matemática; sino también, del campo pedagógico en las que ellas se desarrollaban en el ámbito escolar y universitario. Por tanto, en aquel momento se crearon varias publicaciones sobre la relación entre Matemática y la Guerra. Además, se fueron constituyendo organizaciones en varios eventos internacionales, con el fin de mostrar cómo la Matemática podía responder a las situaciones que se vivían en situación de Guerra, así como, también, pensarla para la construcción de Paz junto a otras áreas de conocimiento disciplinarmente organizadas. Como parte de este proceso de pensar la producción de conocimiento científico para la construcción de la Paz encontramos, por ejemplo, el Manifiesto Russell- Einstein, conferencia Pugwash.

Los procesos de enseñanza de la Matemática fueron vistos como "positividades o efectos performáticos generados por juegos modernistas de lenguaje en diversos campos de actividad humana a lo largo del siglo XX" como lo plantea Correa (2015, p. 20). En esos *juegos del lenguaje* desarrollados durante las guerras mundiales y las creaciones de nuevos currículos escolares institucionalizados, se marcaron pautas sobre la importancia de investigar sobre *matemáticaS* y la *Paz* al mismo tiempo que, desarrollar estudios sobre cómo la Matemática ha contribuido en procesos de Guerra. Por otro lado, se abrió una agenda de trabajo para tensionar la *universalidad* y *neutralidad* de la Matemática entendida disciplinarmente, para pensar en *matemáticaS,* en plural, lo que vemos como una transgresión epistemológica sobre la concepción eurocéntrica del conocimiento.

Consideramos que la mirada de Correa (2015) sobre *prácticas bélicas*, entendidas como *juegos normativos de lenguaje*, nos posibilitará establecer mediante analogías relaciones entre la Paz y las *matemáticaS*. Lo anterior, tiene que ver con la comprensión de que al considerar los modos como las personas practican ordinariamente el lenguaje, Wittgenstein (1988) sugiere que esas prácticas, para que se tornen significativas, no pueden ser desligadas de las acciones corporales de los propios practicantes. De hecho, para él, "palabras también son acciones" (Miguel. 2016, p. 371). Lo que significa que los *juegos del lenguaje* son acciones regladas, normativamente orientadas, esto es, son prácticas sociales, por ejemplo, disciplinarizar puede ser entendida como una práctica con sus propias reglas y maneras de uso, enraizada en la concepción moderna de ciencia, y en el contexto especifico de la escuela se practica esta práctica en función de unos objetivos, sean curriculares o de enseñanza. También, cocinar puede ser entendida como una práctica social con sus propias reglas y formas de ser practicada como Tamayo-Osorio (2017a) lo muestra.

Buscando comenzar a tejer relaciones entre *matemáticaS* y *Paz* nos hemos aproximado en el campo de la filosofía a algunas investigaciones como la de Messina (2012), para comprender cómo los usos de la palabra Paz pueden variar de un *juego de lenguaje* a otro. La autora retomando a Lévinas, plantea que el uso de la palabra Paz puede ser entendido como un "primer lenguaje", un primer encuentro, y muy alejada de la idea de conciliación de un conflicto, pues para Lévinas citado por Messina (2012, p 146) la paz "[...]no hace referencia a ninguna idealidad. Sólo significa en la puesta en cuestión del Mismo por el Otro, de un "yo" que llega a hablar, a significarse por el Otro, en la acogida de una significación que lo desborda". En esta afirmación evidenciamos que la palabra Paz puede ser usada para explicitar el acercamiento que hace el ser (yo) por el otro, como una acogida del ser del prójimo, por encima de su libertad y su voluntad (los términos libertad y voluntad serán explicados por Lévinas más profundamente).

La terapia deconstrucionista como actitud metódica para investigar

La actitud *terapéutica deconstrucionista* según Miguel (2016) está relacionada con esas formas de ver y afrontar las prácticas sociales dentro de unas *formas de vida* específicas, sin pretender *explicar* o *interpretar* de una forma cientificista, mecánica, estructurada, organizada los significados que puedan darse dentro de esas prácticas, así, se plantea que esta actitud

> […]no sigue una secuencia lineal, ni propone ninguna especie de continuidad. Por el contrario, ella *funciona por saltos discontinuos entre diferentes juegos de lenguaje en diferentes formas de vida*. Las pinceladas están conectadas por semejanzas de familia, pero estas similitudes no están en las pinceladas, sino que son propuestas por el historiador terapeuta sobre la base de la problemática investigada (Miguel, 2016, p. 389, *cursiva nuestra*)

De igual forma, la *terapia deconstrucionista* en los términos de Tamayo-Osorio & Cuellar-Lemos (2016) es vista como una actitud para investigar, que posibilita estudiar las prácticas socioculturales o *juegos de lenguaje* practicados en *formas de vida*, tal y como son realizados en sus contextos de actividad humana, con la finalidad de entender los usos del lenguaje en ellos movilizados.

Es importante aclarar que, desde Wittgenstein (1988), la *terapia* no se restringe a un solo método, a un solo problema, sino más bien, a métodos; es decir, existen diferentes terapias, pues como él explica en el libro de las Investigaciones Filosóficas -I.F- "no hay un *único* método en filosofía, si bien hay realmente métodos, como diferentes terapias" (Wittgenstein, 1988, I.F.

§133). Desde nuestro punto de vista, lo anterior, significa que no se puede tan solo tener una mirada universal de un problema, de una situación – por ejemplo, diversas significaciones que pueden ser producidas y usadas en *juegos de lenguaje* sobre la palabra Paz – sino, más bien, mirar los usos del lenguaje de una forma panorámica y analógica.

Entonces, desde la mirada de la *terapia* hay una intensión de comprender y permitir la pluralidad de significados, lo que, desde la filosofía de Jacques Derrida, nos posibilita hablar de la *deconstrucción*; a pesar de que los trabajos de Derrida no hablan propiamente de juegos de lenguaje, se entrevela esa relación de ambos autores (Wittgenstein y Derrida), toda vez que ellos, comprenden que el lenguaje no se da por sí solo, ya que esta permeado por una cultura y por unas prácticas. Correspondiente con esto Miguel (2016) menciona que hay una cierta analogía en los modos de actuar de ambos y en los correlatos, al decir que "[…] ambos ven, respectivamente, las escenificaciones de la escritura o del juego de lenguaje como un compuesto heterogéneo de otras escenificaciones precedentes-característica está a la que Derrida denomina el concepto de iterabilidad" (p. 376)

Al tejer esta relación *terapéutico deconstrucionista*, nos encontramos con el concepto de *deconstrucción* que es retomado desde la filosofía de Jacques Derrida (1989; 1998), como un concepto central en todas sus investigaciones, inclusive al problematizar conceptos como violencia, hospitalidad, justicia y paz, que no significa otra cosa que, pensar los términos anteriores de forma no estructurada desde sus usos por medio de *rastros de significación*, buscando superar el estructuralismo que permea los estudios sobre el lenguaje.

El trabajo de campo será realizado en el semestre 2019-1 con los estudiantes de los grados quinto del CEA y los estudiantes de undécimo del CPE, quienes serán los participantes de esta investigación. Para la producción de registros y datos usaremos herramientas como: observaciones, entrevistas, videos, audios, fotografías, diarios de campo, entre otros.

Las actividades que se llevarán al aula de clase, estarán guías por propósitos claramente definidos, con la intención de buscar responder al objetivo de la investigación y poder describir esas relaciones que se tejen entre los sujetos participantes y la Paz, las *matemáticaS* y la Guerra. Hasta el momento venimos considerando algunas actividades: visitas guiadas y con temáticas

definidas a la Casa de la Memoria en la ciudad de Medellín, cine en el aula de clase sobre temáticas que aborden las problemáticas a estudiar, narraciones e historias de vida, lecturas y análisis de textos de filosofía para niños, estudio minucioso sobre el Manifiesto Russell-Einstein.

Referencias y bibliografía

Campos, V. R. (2015). *Genealogías de la violencia: génesis y economía de la" violencia originaria" en la filosofía de Jacques* Derrida. Tesis Doctoral.

Condé, M. L. L. (2004). As teias da Razão: Wittgenstein e a crise da racionalidade moderna. Argumentum.

Correa, J. F. (2015). *He war*. Tesis doctoral. Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

Correa, J. F. (2016). Educação Matemática: entre guerras quentes e guerras frias. En *Perspectivas da Educação Matemática*, 9(20).

D'Ambrosio, U. (2010). Palestra Magna – Cultura de Paz e Pedagogia da Sobrevivência. Conferencia presentada en el Fórum de la Unesco de 2010 "Cultura de Paz: da reflexão à ação", Brasilia: Unesco.

D'Ambrosio, U. (2011). A busca da paz como responsabilidade dos matemáticos. En *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (7). Recuperado el 20 de noviembre de 2017 en: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6943/6629

Derrida, J. (1989). *Violencia y metafísica. En La Escritura y la Diferencia*. Barcelona, Anthropos.

Derrida, J. (1998). *Adiós a Emmanuel Lévinas*. Palabra de acogida. Editorial Trotta. S.A. Madrid.

Ley 1732 de 2014. Se establece la Cátedra de la Paz en Todas las Instituciones Educativas del País. Diario Oficial de la República de Colombia, Bogotá, Colombia. Naciones Unidas (1998), Asamblea General. Distrital. General. a/res/52/13. D

Messina, A. L. (2012). La paz como primer lenguaje. Paz y política en E. Lévinas. ideas y valores, 61(150), 145-167.

Miguel, A. & Miorim, M. A. (2004). Historia en la Educación Matemática: propuestas y desafíos. Campinas: Autêntica.

Miguel, A. (2010). Percursos Indisciplinares na Atividade de Pesquisa em História (da Educação Matemática): entre jogos discursivos como práticas e práticas como jogos discursivos. En *Revista Bolema,* 23(35a), p. 1-57, Rio Claro

Miguel, A. (2013). Posfácio ao livro "Usos e jogos de linguagem na matemática: diálogo entre Filosofia e Educação Matemática". Em D. Vilela, Usos e jogos de linguagem na matemática: diálogo entre Filosofia e Educação Matemática (pp. 319-348). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Miguel, A. (2016). *Um jogo memorialista de linguagem: um teatro de vozes.* Texto da libre docência. Universidade Estadual de Campinas. Campinas: São Paulo.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1994). Ley general de Educación. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional. Recuperado el 20 de marzo de 2018 en https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

MEN. (2004). Competencias ciudadanas: de los estándares al aula. *Revista de Estudios Sociales*, (19).

MEN. (2015). Orientaciones generales para la implementación de la cátedra de la paz en los establecimientos educativos de preescolar, Básica y media de Colombia. Bogotá, Colombia.

MEN. (2015). Decreto 1038 de 2015. Recuperado el 19 de marzo de 2018 en: http://www.alcaldiabogota.gov.co/sisjur/normas/Norma1.jsp?i=61735

Tamayo-Osorio, C. (2012). *Resignificación del currículo escolar indígena, relativo al conocimiento (matemático), desde y para las prácticas sociales: el caso de los maestros indígenas Dule de la comunidad de Alto Caimán*. Disertación de Maestría. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

Tamayo-Osorio, C. (2017a). *Vení, vamos hamacar el mundo, hasta que te asustes: uma terapia do desejo de escolarização moderna.* Tesis doctoral. Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

Tamayo-Osorio, C. (2017b). A colonialidade do saber: Um olhar desde a Educação Matemática. En *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *10*(3), 39-58.

Tamayo-Osorio, C., Cuellar-Lemos, R. C. (2016). Juegos de lenguaje en movimiento: Una experiencia Indígena. En *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *9*(1), 49-70.

Veiga-Neto, A. (1996). A didática e as experiências de sala de aula: uma visão pós-estruturalista. *Educação & Realidade*, *21*(2), 161-175.

Veiga-Neto, A. (2008). Crise da modernidade e inovações curriculares: da disciplina para o controle. Sísifo. En *Revista de Ciências da Educação*, (7).

Vilela, D. S. (2007). *Matemáticas nos usos e jogos de linguagem: Ampliando concepções na Educação Matemática*. Tesis de doctorado. Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Wittgenstein, L. (1988). *Investigaciones Filosóficas. Philosophische Untersuchungen*. Barcelona: Crítica.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Prácticas racistas en la escuela: Un análisis de las prácticas de maestros y maestras de matemáticas

Angela Patricia **Valencia Salas**
Secretaría de educación del Distrito
Colombia
angelapatriciav@gmail.com
apvalencias@educacionbogota.edu.co

Resumen

El siguiente texto presenta los resultados de una investigación que se pregunta por las prácticas racistas de maestros y maestras de matemáticas en el sistema educativo distrital, con relación a niños y niñas afrocolombianos. Tiene como objetivo analizar desde una perspectiva decolonial, cómo se configuran y reproducen prácticas racistas, en los procesos pedagógicos de maestras y maestros de matemáticas en escuelas distritales de Bogotá. Usa la perspectiva decolonial como perspectiva teórica, articulada con aproximaciones genealógicas y arqueológicas del racismo, su materialidad en la escuela, particularmente en las prácticas de maestros y maestras de matemáticas.

A partir de entrevistas a profundad a maestros de diferentes instituciones educativas distritales, trabajo de campo y observación en una IED en particular se explora desde las narrativas de maestros, niños y niñas las formas como se manifiesta el racismo y la discriminación racial en la escuela.

Palabras clave: Raza, Racismo, Matemáticas, Prácticas Pedagógicas, Decolonialidad, Estudios Raciales, Educación matemática.

RAZA, RACISMO: DESDE LO GLOBAL A LO LOCAL

La complejidad del concepto de raza y racismo y la incomodidad que genera en la sociedad su uso, aún más en un escenario como la escuela, hacen que para su comprensión se requiera no sólo de las comprensiones teóricas sobre este concepto, sino de la reconstrucción histórica sobre estas categorías, las condiciones de posibilidad que dieron lugar a la emergencia de dichas categorías, las relaciones entre la raza y el de racismo; cómo, pese a su erradicación legal, su presencia es tan vigente, como lo fué siglos atrás, donde aparatos como la escuela y ciertos agentes contribuyen a su perpetuación a nivel estructural y cotidiano.

Entre los debates que suscita el concepto raza, se encuentran diversas perspectivas. Una de

ellas tiene que ver con poner en duda la existencia de ese concepto. En ese sentido, gran parte de la academia en la actualidad, basada en los hallazgos del proyecto de Genoma Humano, señala que este concepto no existe, con el argumento de que sólo existe una raza, la humana. Por otro lado, se encuentra a quienes señalan que, a pesar de reconocer lo aportado por el proyecto anteriormente citado, la raza sí existe, en tanto referida a la noción de racismo.

Este grupo de académicos indica que raza es el resultado de una construcción social y, por tanto, existe en la medida que determina escenarios de exclusión, discriminación, negación de derechos entre unas personas respecto de otras. Al hacer referencia a la raza como una construcción social implica que ella no es algo que sólo suceda en la imaginación de las personas. Implica que es tan real, que se usa para clasificar a los seres humanos como inferiores o superiores y que, quienes son etiquetados como inferiores sufren física y emocionalmente por la discriminación de su ser racializado.

Por ejemplo, en Colombia, en el año 2012, se reconoció por parte de la Comisión Intersectorial para el Avance de la población Afrocolombiana, Palenquera y Raizal, al racismo y la discriminación racial como la principal barrera que impide el desarrollo de los pueblos negros-afrodescendientes en el país. No por ser construido, el racismo deja de ser poderoso y estructurante en prácticas concretas, materiales, reales (Grimson, 2011).

Por otra parte, los Estudios Culturales conciben la raza y el racismo como hechos radicalmente contextuales; es decir, como lo señala Grossberg (2006), en el estudio de la complejidad social, se debe ubicar a la raza y el racismo, primero en una lucha coyuntural y hegemónica particular y, segundo, en un contexto aún más amplio de transformación y lucha globales. También desde la perspectiva de pensadores decoloniales de América Latina, se señala que el concepto raza está articulado al surgimiento de la modernidad y el papel que tuvo en ella la colonización de los territorios americanos, en la medida que ésta determinó las relaciones sociales, económicas y políticas de lo que serían, posteriormente los Estados-nacionales.

Esta última perspectiva sobre las relaciones entre los efectos de la colonia en los modos de constituir sujetos, articuladas con los estudios culturales y los estudios raciales, que efectúan lecturas del racismo de forma situada, contextual, específicamente, los que aportaron a la construcción de las categorías raza y racismo desde contextos locales (de Latinoamérica, Norteamérica e islas del Caribe) con enfoques cercanos, históricos y narrados a partir de los territorios invadidos y saqueados, recuperando las voces de quienes fueron víctimas y hoy son una voz de resistencia al racismo y la discriminación racial, se retomaron en este trabajo.

Para esta investigación se comprende el racismo como un complejo que no existe únicamente en el ámbito de las ideas, pasiones y sentimientos individuales, que dan cuenta de posturas éticas y morales, ni como "consecuencia social" del capitalismo, exclusivamente, o como producto del divisionismo nacional, de la lucha de clases, según el argumento economicista del marxismo, ni como una aberración o sólo por discriminaciones a causa de prejuicios, sino como un sistema/estructura. Para definirlo así, Moore (2011) analiza tres instancias operativas entrelazadas que lo ubican como un sistema: las estructuras políticas, económicas y jurídicas de comando de la sociedad, el imaginario social total que rige el orden simbólico de la sociedad, los códigos de comportamiento que rigen la vida inter-personal de los individuos que componen la sociedad.

Estas instancias operativas son lugares desde donde se mantienen hoy en día y fortalece el racismo en las sociedades. Por ejemplo en Colombia desde las prácticas de colonización y

esclavitud, la equiparación de la condición de esclavo con la categoría negativa "negro", la limpieza de sangre[1], la degeneración de las razas[2] , y el discurso del mestizaje, que fueron articulados de forma perfecta para que hoy se logren reconocer juegos de poder en los discursos oficiales y los locales alrededor de la raza y el racismo, aquellos discursos que hacen presencia en la cotidianidad de maestros y maestras en una institución educativa y, que como conjunto de prácticas estas constituyen los sujetos.

AQUÍ TODOS SON IGUALES: RACISMO EN LA ESCUELA

Los modos en los que opera el racismo requieren de instituciones para que los mismos tengan sentido y ocurra su tránsito; la escuela aporta su cuota en ello, en la medida que contribuye -de múltiples maneras- en la configuración de prácticas racistas. Se sabe que, además de establecerse como uno de los principales lugares para ejercer formas de poder/saber opresivo y de dominación, las instituciones educativas han sido escenarios excluyentes y reproductores de formas de discriminación racial en contra de segmentos definidos de la población.

De hecho, según los discursos marxistas, la escuela se ubicaba como espacio transmisor de la cultura hegemónica, a través de la circulación de conocimientos, saberes, discursos y prácticas, mediante los cuales se perpetuaban privilegios de la élite blanco-mestiza sobre las personas clasificadas como negras e indias.

En el escenario colombiano, la escuela se fue constituyendo históricamente en un lugar donde el conjunto de posiciones con respecto a la diferencia racial se definieron bien sea por cercanía o alejamiento, entre quienes tenían mayor o menor capital cultural, así como las relaciones de orden para identificar quiénes debían estar "arriba" y quienes deberían estar "abajo", de acuerdo a su capital económico, siendo estos dos factores determinados por las relaciones sociales basadas en la diferencia étnica, producto de la racialización efectuada desde la invasión europea.

la iglesia ocupó un papel preponderante en este camino. Este fue tan importante en la perpetuación de los privilegios de los criollos, que al tiempo que imponía restricciones a los otros, mestizos pobres, indígenas y negros, le fue reasignada la total conducción de la política educativa desde 1870 y, posteriormente, gozaría de privilegios derivados del Concordato para manejar la llamada "educación en territorios nacionales", justamente donde se localizaban los pueblos indígenas y afrodescendientes. La iglesia, como institución encargada de los mecanismos para dar forma al encauzamiento de las conductas de la gente, basados en la moral cristiana y la evangelización, utilizó a la escuela, parafraseando a Bourdieu (2001), como el lugar estratégico para "fabricar", "elaborar" personas, formas de pensar y formas de actuar.

La integración de la gente negra a la nación se proyectó en la educación cristiana, a partir de la enseñanza de la doctrina católica y algunos elementos de la lectura y escritura, no para alcanzar los niveles educativos requeridos al resto de la población nacional, sino para poder acceder a la apropiación de la biblia. No es sino hasta 1930 que, en territorios como la costa del Pacífico, donde no había colegios de secundaria y se contaba con menos de quince escuelas primarias, cuando se convierte en Prefectura, aumenta considerablemente la presencia de

[1] En términos de Castro-Gómez (2010), fue la creencia en la superioridad étnica de los blancos criollos sobre los demás grupos poblacionales de la Nueva Granada (p. 15).
[2] Ejemplo de discursos higienistas, que dan cuenta de las imágenes de las personas negras e indígenas y el efecto de su presencia en Colombia.

escuelas: al año 1950 se registraban 145 escuelas entre privadas y públicas (Ayape, 1950 citado por Almario, 2013). De esas 145 escuelas, 25 eran escuelas misionales, hoy llamadas escuelas católicas y las restantes, públicas, todas ellas sin las condiciones mínimas para el trabajo pedagógico.

Esto sin contar los procesos de deslegitimación del conocimiento de las personas afrodescendientes a partir de tecnologías como la evangelización para "civilizar al salvaje", de la invisibilización y el sometimiento de otros conocimientos.

MATEMÁTICAS Y PRÁCTICAS RACISTAS

En Colombia se reconoce que a partir de las reformas borbónicas introducidas en España y sus colonias, se identificó el papel fundamental de la matemática en lo que se asumiría como necesidad para el progreso del país. Se propuso desmontar el modelo privado de educación a cargo de los religiosos donde primaban las visiones teleológicas como las de Santo Tomas y de Aristóteles en el estudio de las ciencias de la naturaleza, para ubicar las propuestas modernizantes de la reforma educativa que, iniciaba la incorporación oficial del saber matemático en la escuela colombiana.

Lo anterior ya que se necesitaba la formación pública y secular de jueces, médicos y científicos, fieles a los propósitos modernizadores del Estado (cuyo fin era el comercio), la cual implicaba, según el imperio español, la sustitución de las "humanidades" (gramática, retórica) por las "ciencias útiles" (matemáticas, física) (Castro-Gómez, 2010), en pro del desarrollo de la colonia en su última etapa.

Pero también el naciente Estado de lo que sería posteriormente Colombia, necesitaba gobernar, es decir, poder desplegar todo un saber articulado a un aparato de gobierno, para poder asegurar su control sobre las colonias. La utilidad de estos nuevos conocimientos radicaba en que podían ser sometidos al modelo de racionalidad económica; es decir, eran útiles a la sociedad, comunicables y podían revertirse en políticas de gobierno, de rápida circulación y con un número mayor de usuarios (Castro-Gómez, 2010) además de ser considerados necesarios para los proyectos gubernamentales del Estado borbónico.

Hoy en día, pese al tiempo transcurrido, no estamos muy alejados de estas concepciones; de hecho, las mismas son reafirmadas cada día con acciones individuales, colectivas y estatales. Todas y cada una de las reformas educativas en Colombia se han dirigido a consolidar un proyecto de nación basado en una visión occidental de desarrollo (fortalecimiento del capital económico, industria, explotación de los recursos, etc.).

En el período de las reformas borbónicas, la "oscuridad" en la que se encontraba la Nueva Granada, se debía a que, *pese a la colonización española*, el reino seguía atribuyéndole a Dios todos los males que aquejaban a sus pobladores. Por tanto, salir de esta "oscuridad", de las "densísimas tinieblas de la ignorancia", como lo señalaba Mutis, dependía de la posibilidad de introducir en la educación (destinada a la elite criolla y españoles) la enseñanza de las ciencias, entre ellas las matemáticas.

Emergieron aquí algunas expresiones del papel de la enseñanza de la disciplina de las matemáticas en la configuración y reproducción de prácticas racistas en el aula, articulando una exploración en la incorporación del conocimiento matemático en la escuela, el lugar jerárquico que empiezan a ocupar las matemáticas en las áreas de conocimiento y el trabajo de campo realizado para la investigación a partir de entrevistas a profundidad a maestros y maestras.

Por ejemplo, Para Mutis era necesario que la catedra de matemáticas no entrara en el cuerpo de asignaturas de la Universidad, "ni de los estudios generales, sino de quien se ha dicho, como mero aliciente de la curiosidad de los jóvenes aplicados" (Hernández de Alba, 1980: tomo V, p. 103 citado por Ortiz, p. 63). El conocimiento matemático era de uso exclusivo de unos cuantos: jóvenes juiciosos y aplicados estudiaban matemáticas. Parece que este tipo de asociaciones hacen presencia hoy, de hecho, es un común denominador necesario para el aprendizaje de las matemáticas señalado por los maestros entrevistados. Con relación a los niños y niñas afrocolombianos, varios maestros señalan que, dado que sus intereses son otros y se sienten mejor para actividades como el baile, no dan la suficiente energía a las matemáticas y por eso no son muy buenos en este campo disciplinar.

Por otro lado, en la Nueva Granada se instaló una concepción de identidad basada en la diferencia étnica frente al otro subalterno, que caracteriza todo el sistema-mundo moderno/colonial. Cabe recordar que esta distinción planteaba, por un lado, la superioridad de unos seres humanos sobre otros y por el otro, la superioridad de unas formas de conocimiento sobre las otras. Toda forma de conocimiento que no hiciera parte de la sociedad española y, en general europea, no era considerada como tal. El conocimiento propio o saberes producidos por los pueblos originarios y, posteriormente, los conocimientos y saberes de las personas de origen africano traídos a América fueron estigmatizados, satanizados y sepultados por la sociedad blanca en Latinoamérica (Valencia, 2016).

La inferiorización de estos conocimientos y su negación, se convirtieron en el habitus de las y los ciudadanos colombianos desde el siglo XVIII hasta la actualidad, tal y como se refleja en la ausencia de información sobre conocimientos propios de las comunidades pertenecientes a grupos étnicos en el currículo escolar de la escuela convencional. Aún hoy se sigue pensando que el conocimiento oficial occidental es el único válido y los conocimientos propios de las comunidades son señalados como atrasados.

Es por ello que, la negación y ausencia en la escuela de conocimientos de los pueblos afrodescendientes e indígenas, denominados aquí como conocimientos otros, que pueden (y deben) entrar en diálogo con el conocimiento occidental, constituye un lugar estructural que favoreció la producción del racismo, como herencia que, en el caso de la enseñanza de la matemática, se manifiesta en el propio ordenamiento y contenido del currículo escolar y, con ello, en su materialización en las prácticas pedagógicas.

Cabe señalar aquí que, el panorama es aún más desalentador cuando quienes pretenden acceder al conocimiento matemático pertenecen a grupos históricamente excluidos, como son los pueblos negros-afrocolombianos y los pueblos indígenas, dado que el "conocimiento matemático", a partir de su diseño curricular, desconoce las particularidades de estos pueblos, sus contextos y ambientes de aprendizaje; y, lo más importante, sus conocimientos propios.

El currículo en matemáticas ha fortalecido su lugar privilegiado frente a otras ciencias y continúa instalando lecturas universales en contextos particulares. Lee de la misma forma a diferentes sujetos con diferencias étnicas y culturales, cuando los considera como sujetos que sólo hacen parte del pasado de la nación o a muchos otros, como seres desprovistos de un lugar en la historia.

ALGUNOS RESULTADOS

La perspectiva metodológica se enfocó en la investigación cualitativa articulada con una

aproximación etnográfica en la que se hacen análisis de elementos intersubjetivos con el fin de estudiar las relaciones de constitución de los seres humanos, en este caso como nos constituimos con relación al racismo. Se retoma también algunos elementos del trabajo de campo etnográfico, que permitieron comprender a los niños, niñas, maestros y maestras, conocerse uno mismo y mejorar un poco la propia práctica pedagógica. Se realizaron los análisis conversacionales establecidos con cinco maestros y maestras de matemáticas de diferentes instituciones educativas distritales, a partir de la realización de entrevistas a profundidad, desarrolladas en dos y tres sesiones y las narrativas manifestadas en ellas.

Los análisis conversacionales fueron fundamentales ya que todos aquellos elementos enunciados en las conversaciones sostenidas con maestros y maestras se constituyen en prácticas. Lo que dicen los profesores y profesoras sobre los niños y niñas afrocolombianos, su desempeño en clase de matemáticas, los factores que influyen en su rendimiento escolar, la descripción de sus habilidades, destrezas, entre otros aspectos, son prácticas. En la investigación aquí presentada, se identificó con base en las narrativas de los maestros y maestras, algunos elementos que se destacan respecto de prácticas racistas en la clase de matemáticas, particularmente referidas a su desempeño académico. Esto no quiere decir que, en el ámbito de las relaciones personales entre estudiante y maestro/a no se den dichas discriminaciones, aunque éstas no fueron observadas en esta investigación.

Se decidió, por ende, enfocarse en el desempeño académico de los/las estudiantes porque es este aspecto el que, mediante los sistemas de evaluación, mide y categoriza al estudiantado.

Con relación al desempeño académico de las/los estudiantes afrocolombianos, se encontró que la mayoría de maestras/maestros coincide en que el desempeño académico de estudiantes afrocolombianos no es sobresaliente. Para estos maestros/as, los niños y las niñas afrocolombianos hacen parte de aquellos con desempeño regular (promedio) y, en su mayoría, muy bajo.

Estos son unos pequeños apartes de entrevistas a maestros participante en la investigación que refleja esta concepción: "*no quieren mostrarse (…) como…lo que sí he notado es que, de pronto, en el colegio, en la mañana la mayoría de los niños afro son muy… hmmm… expresivos… ocultos en la parte académica, pero en cuanto a lo que son habilidades hacia el arte y hacia los deportes sí se logran destacar muchísimo" (Entrevista profesora G, junio de 2017)*". *"En cuanto a los niños afrocolombianos, creo que siempre se ha vivido el tema de la estigmatización, pero por parte de ellos mismos, entonces si soy diferente, entonces los demás me ven diferente, pero, posiblemente, no sea así. Entonces, y…de pronto eso ha hecho que muchos... pues ¡no…. exploten todas esas habilidades que tienen! Porque, sencillamente. (…) …prefieren mantenerse ocultos, sí?" (Entrevista profesora Jo, junio de 2017).*

Aunque algunos, acudiendo al ideal de igualdad que se promulga en las instituciones educativas modernas, y el enfoque congnitivista asociado a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, considera que las identidades raciales, étnicas, de los estudiantes, y sus actos de posicionamiento en el salón de clase no son aspectos relevantes para comprender las diferencias en resultados de aprendizaje, medidos en pruebas de conocimientos, respecto de las experiencias escolares de los/las estudiantes y el acceso desigual a una educación matemática de calidad (Valoyes, 2015).

Por ejemplo: *An: Profe y con los niños afro, usted…me imagino… que ha tenido niños afro, ¿Cómo le ha ido con ellos en el tema académico?. Fre: Es que yo esas cosas, las veo como*

que son todos iguales; para mí, a los niños que tienen problemas de retraso en aprendizaje los veo iguales a los demás, y se lo he dicho a mis compañeros y a muchos, que cuando me dicen: - no, es que este niño tiene problemas…- no y entonces ¿los demás también?. (Entrevista profesor F, junio de 2017).

CONCLUSIONES

Maestros y maestras definen la raza como aquello que se relaciona directamente con las características fenotípicas de las personas, específicamente con su color de piel, y que esta definición, coincide con las configuradas desde el siglo XVII con la intención de clasificar a unas personas como inferiores, respecto de otras, con más poder político y económico. Esto pone en evidencia la manera como la raza está presentes en la actualidad, y el nivel de sedimentación de prácticas discursivas que perviven los maestros y las maestras, en las escuelas distritales de Bogotá. Esta categoría se hace presente en lo que se dice, en lo que se hace, en las cualidades y en las capacidades que se les asignan a unos sujetos con relación a otros.

La perspectiva de los estudios decoloniales brindó un escenario de reformulación de algunos enfoques teóricos, a partir del reconocimiento de las relaciones de dominación particulares establecidas en América Latina desde el momento de la colonización de los pueblos originarios, pasando por la trata trasatlántica, para entender cómo vivimos hoy las relaciones atravesadas por la raza/etnia hasta el día de hoy. Partir del periodo colonial es fundamental, por un lado, para entender y comprender la perpetuación de relaciones de desigualdad entre comunidades y cómo perviven éstas en la escuela, como institución moderna, que mantiene una mirada racionalista del conocimiento; y por otro lado, permite identificar y comprender las racionalidades instaladas en el proyecto de nación moderno, en el que se inscribe la escuela.

Mostró otras formas de materialización del racismo, particularmente en el sistema educativo. No sólo en términos de acceso de las personas afrocolombianas al derecho a la educación y sus condiciones de garantía para el ejercicio de tal derecho, sino que nos remite un tipo de materialidad concreta, enfocada en los modos de construir conocimiento.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

Almario, Ó. (2013, Julio). Modelos culturales en conflicto: grupos negros y misioneros agustinos en el pacífico sur colombiano (1896-1954). *Tabula Rasa* (19), p. 193. Recuperado de: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1794-24892013000200009&lng=es&tlng=es.

Bourdieu, P y Passeron, J. (2001). *La reproducción*. Elementos para una teoría del sistema de enseñanza. Madrid, España: Editorial popular.

Castillo, E y Rojas, A (2005). *Educar a los otros*: Estado, políticas educativas y diferencia cultural en Colombia. Cali, Colombia: Editorial Universidad del Cauca.

Castro-Gómez, S. (2010). *La hybris del punto cero*: ciencia, raza e ilustración en la Nueva Granada. Bogotá, Colombia: Editorial Pontificia Universidad Javeriana.

Foucault, M. (2014). *Seguridad, territorio y población*. Ciudad de México, México: Fondo de Cultura económica.

Grimson, A. (2011). *Los límites de la cultura*. Buenos Aires, Argentina: Siglo XXI editores.

Grossberg, L. (Julio, 2006). Stuart Hall sobre raza y racismo: estudios culturales y la práctica del contextualismo. *Tabula Rasa, 5*, 45.

Helg, A. (1984). *La educación en Colombia 1918 y 1957*. Una historia social, económica y política. Bogotá, Colombia: Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Jaramillo, J. (1994). El proceso de la educación del virreinato a la época contemporánea. En: *Manual de Historia Colombiana. Tomo III*. Bogotá, Colombia: Procultura, Tercer Mundo Editores.

Moore, C. (2011). *La humanidad contra sí misma*. Para una nueva interpretación epistemológica del racismo y de su papel estructurante en la historia y la contemporaneidad.

Ortiz, R y Álvaro, P. (2003). *Reformas borbónicas*: mutis catedrático, discípulos y corrientes ilustradas, 1750-1816. Bogotá, Colombia: Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario.

Packer, M. (2013). *La ciencia de la investigación cualitativa*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Quijano, A. (Diciembre, 1999). ¡Que tal raza!. En: *Ecuador Debate. Etnicidades e identificaciones* (48) p. 141.

Restrepo, E. (Agosto, 2007). Imágenes del "negro" y nociones de raza en Colombia a principios del siglo XX. *Revista de Estudios Sociales*, (27), p. 46.

Valencia, A (2016, Octubre). Discursos raciales históricos y su influencia en las prácticas de enseñanza de las Matemáticas escolares asociadas a ellos. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, Recuperado de: https://www.redalyc.org/jatsRepo/2740/274047941002/html/index.html

Valoyes-Chávez, L. (2015, Mayo). "Los negros no son buenos para las matemáticas": Ideologías raciales y prácticas de enseñanza de las matemáticas en Colombia. *Revista en Ciencias Sociales*. Recuperado de: https://www.icesi.edu.co/revistas/index.php/revista_cs/article/view/1909

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Las etnomatemáticas de las danzas típicas en Costa Rica: el caso del Punto Guanacasteco desde la visión emic y etic

Steven **Quesada** Segura
Universidad Nacional
Costa Rica
steven_09_11@hotmail.com

Resumen

El presente trabajo consiste en evidenciar las conexiones entre las etnomatemáticas de las danzas folclóricas de Costa Rica, en un caso especifico, para el punto guanacasteco, a la vez, es una forma de desentrañar el conocimiento matemático cultural de la región guanacasteca, pues así se logra reforzar la identidad cultural de este entorno. Estos aspectos son abordados desde la Antropología y la Etnomatemática, desde la visión emic/adentro y etic/afuera, los cuales nos ayudan a caracterizar el Conocimiento Matemático Cultural, desde la perspectiva de la danza folclórica costarricense, además se evidencia un análisis de la coreografía y todas sus implicaciones presentes en la cultura de la danzas desde las perspectivas emic/adentro y etic/afuera, cabe mencionar que el autor posee la visión emic/adentro pues toda su vida se ha dedicado a bailar canciones folclóricas de Costa Rica y estudios sobre enseñanza de las matemáticas la visión etic debido a que no tiene ningún vinculo con la danza folclórica, lo cual aporta mucha riqueza a dicho trabajo.

Palabras clave: educación, matemática, etnomatemáticas, danza, cultura.

Introducción

Este trabajo describe los avances de un proceso de análisis desde la perspectiva etnomatemáticas realizado en Costa Rica, donde la protagonista es la danza folclórica costarricense en un caso específico como lo es el Punto Guanacasteco. Se trata de una investigación que se encuentra en desarrollo y que es aplicada en Costa Rica, específicamente en las danzas tradicionales de la provincia de Guanacaste.

El principal interés es difundir los aspectos relacionados con la herencia del conocimiento cultural y su relación con el conocimiento matemático, pues es de esta forma es cómo se logra reforzar la identidad cultural de estos entornos, debido a que es una temática poco abordada en el país, donde se pretende desentrañar el conocimiento matemático cultural de la región e indagar las potencialidades de una propuesta didáctico-matemática pertinente relacionada con la cultura.

Desde la perspectiva histórica, según CECC (2003) “las danzas guanacastecas, que por tradición oral se han conservado hasta nuestros días, son la más fiel representación de lo que fue la vida social y cultural de Guanacaste” (p. 217).

La danza folclórica sigue siendo un componente cultural, pues ha permitido visualizar la cultura costarricense a nivel mundial e inclusive en la actualidad existe gran cantidad de personas que practican dicha actividad, según CECC (2003) “es durante la primera fase del periodo colonial que empieza a gestarse ese lenguaje musical regional guanacasteco, hoy patrimonio costarricense, dentro de un contexto social y político” (p. 216).

El interés en el que se centra esta propuesta radica en describir los elementos que caracterizan las etnomatemáticas de la danza del Punto Guanacasteco desde la visión emic (desde adentro) y desde la visión etic (desde afuera). La relevancia, atinencia y pertinencia del trabajo se justifican por el esfuerzo de resaltar el conocimiento de todas las personas que intervienen en la actividad y sus conocimientos específicos, tales como el uso de un lenguaje técnico y simbólico, las interacciones y prácticas sociales inmersas en las danzas.

Este trabajo relaciona aspectos de índole antropológico y etnomatemático, para abordar desde la visión emic y etic (Orey y Rosa , 2017), para caracterizar el Conocimiento Matemático Cultural, desde la perspectiva regional de las danzas tradicionales.

La contribución de este trabajo al Programa de Etnomatemática es proponer en la educación costarricense, unas matemáticas contextualizadas más cercanas al estudiante, que potencien la capacidad de resolver problemas desde su realidad, haciendo un dialogo entre la herencia del conocimiento cultural utilizado en las danzas folclóricas y las matemáticas escolares, tomando como ambas posturas validadas en la creación de conceptos matemáticos, pues es de esta forma en cómo se logra reforzar la identidad cultural de estos entornos.

Fundamentos Teóricos y Metodológicos

Este trabajo se fundamentará con el Programa de Investigación en Etnomatemática, pues tiene como objetivo “analizar las raíces socioculturales de conocimiento matemático, revelando una gran preocupación con dimensiones políticas por estudiar Historia y filosofía de las matemáticas en sus implicaciones pedagógicas” (D’Ambrosio, 2000, p. 22), favoreciendo la contextualización de los elementos y símbolos presentes en las danzas folclóricas.

Como lo afirma D'Ambrosio (2018) “la forma en como diferentes grupos culturales se desenvuelven en sus maneras de hacer y conocer los con llevan a comparar, evaluar, clasificar, cuantificar, contar, medir, representar e inferir; lo cual los lleva a sustentar sus ideas matemáticas” (p. 23).

Como lo afirma “el reconocimiento, tardío, de otras formas de pensar, inclusive matemático, impulsa reflexiones más amplias sobre la naturaleza del pensamiento matemático, desde el punto de vista cognitivo, histórico, social y pedagógico. Ese es el objetivo del Programa de Etnomatemáticas” (p. 22). Desde esta perspectiva, se enaltece que en cada pueblo del mundo existen diferentes conocimientos y comportamientos vinculados al origen de su cultura, lo cual facilita comprender la vivencia de distintos pensamientos.

En este trabajo, se entiende el Conocimiento Matemático Cultural en las Danzas Folclóricas como el conjunto aspectos relacionados con la herencia del conocimiento en la construcción de danzas folclóricas, que se ha construido con el fin de representar todos los aspectos que sucedían en las vidas cotidianas de nuestros antepasados, donde implican las etnomatemáticas a través de las prácticas realizadas por los diseños coreográficos, tales como cuenta de tiempos musicales, figuras geométricas, y distribución espacial de los bailarines, los cuales han formado un conjunto de conocimiento compartidos por un grupo cultural, como los menciona Clark y Rosa (2017):

El conocimiento matemático adquirido por los miembros de grupos culturales distintos es el resultado de un sistema cultural de valores que se ha desenvuelto en un contexto cultural específico, este se desenvuelve a lo largo del tiempo conforme estos miembros socializaban en un determinado grupo cultural (p. 31).

En este trabajo se estudia el "saber hacer" de las danzas folclóricas desde dos visiones: "etic" y "emic", que están fundamentadas en los aportes teóricos para el Programa de Etnomatemáticas dados por Orey y Rosa (2017), y relacionados con la teoría antropológica de Harris (1996), los cuales facilitan la caracterización de los comportamientos, acciones, comunicaciones, lenguaje y significados de los "constructos lógico-empíricos basados en la observación de la conducta verbal y no verbal de los actores humanos individuales" (Harris, 1996, p. 340).

A partir de la perspectiva teórica de Orey y Rosa(2017), en este trabajo, se establece la visión etic como una interpretación "desde afuera" de los aspectos de la cultura usando las categorías de lo quien observa, es decir desde la visión de los investigadores; mientras que la visión emic procura entender "desde adentro" una cultura a partir de la base de sus propias referencias cosmogónicas, en este caso particular, se consideran todos los aspectos físicos y simbólicos vinculados con las danzas folclóricas costarricenses.

Con respecto a lo anterior, en la visión emic de este estudio se describen algunos de los fenómenos matemáticos presentes en las danzas, sus interrelaciones y estructuras a través de los ojos de las personas que pertenecen a este grupo cultural en particular y, en la visión etic descripciones y análisis de ideas matemáticas, conceptos y procedimientos de sus prácticas (Orey y Rosa, 2017).

La utilización del abordaje émico o ético depende del estudio a realizar, pues es importante resaltar que existen aspectos importantes con la relación y noción de una cultura, diferencias culturales y también los modos en que estas pueden ser estudiadas (Orey y Rosa, 2017, p. 28), por lo que en la visión emic de este estudio se describen la construcción de una coreografía muy representativa en nuestro país, junto con sus interrelaciones y estructuras a través de los ojos de las personas que pertenecen a este grupo cultural en particular y, en la visión etic descripciones y análisis de ideas matemáticas, conceptos y procedimientos de sus prácticas

La visión emic se va a centrar en el significado de los movimientos y su respectiva evolución historia dentro de la cultura guanacasteca, los cuales poseen un valor agregado porque logran organizar la información propia de este entorno; mientras que desde la visión etic se reivindica el conocimiento local y sus posibles comparaciones entre unidades y categorías con respecto a lo global (Gavarrete 2017).

A partir de la perspectiva teórica de Orey y Rosa (2017), en este trabajo, se establece la visión etic está relacionado con el punto de vista de los investigadores con creencias conocimientos matemáticos y científicos del desenvolvimiento de los miembros de un grupo cultural como una interpretación "desde afuera" de los aspectos de la cultura usando las categorías de lo quien observa; mientras que la visión emic procura entender "desde adentro" esta relacionada con el punto de vista de los miembros de grupos culturales distintos en relación de sus propias costumbres, creencias y también en el desenvolvimiento de conocimientos.

Cabe destacar que el autor del trabajo pertenece a la comunidad de este estudio, lo cual orienta el trabajo hacia el enfoque etnográfico-participativo, desde la perspectiva de Yojcom (2013), y, por lo tanto posee una visión emic/desde adentro pues tiene una relación directa a la práctica de las danzas folclóricas, adicional posee estudios sobre la enseñanza de las matemáticas por lo que tiene una visión etic predominante-desde afuera, se considera como un elemento enriquecedor para la validez interna del trabajo.

Además, desde la perspectiva antropológica, se han respetado los criterios de Marvin Harris (1976) para la etnografía, dado que: las descripciones etic no dependen de los sentidos de los observadores ni las intenciones subjetivas, mientras que las distinciones emic exigen que nos adentramos en el mundo de los actores, para así entender la cultura o el lenguaje como un todo ordenado (p. 493).

Resultados y conclusiones

Con el propósito de integrar y sintetizar los principales resultados del trabajo de campo, se realizó una sistematización de la información recolectada, tomando en consideración los indicadores descriptivos de las danzas folclóricas desde las visiones emic y etic, tal como se muestra en la Tabla 1.

La Tabla 1 muestra la organización de los hallazgos a partir de la identificación y caracterización de acuerdo con las visiones emic y etic. Para cada uno de los elementos culturales elegidos como significativos en las etnomatemáticas del Punto Guanacasteco, se realizó una descripción que se apoyó de una etnografía.

Canción: Punto Guanacasteco

Género: Danza folclórica

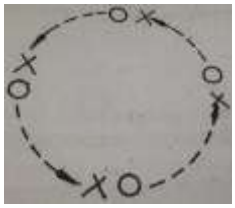
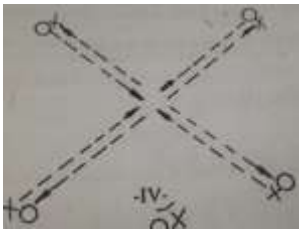
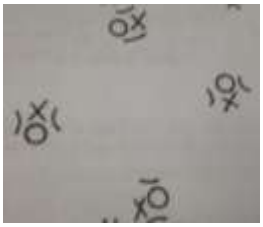
Música y autor: Leandro Cabalceta Briones

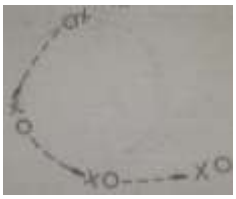
Origen: Una celda de la antigua cárcel de Liberia, Guanacaste

Interpretes: cuatro parejas

Pasos: Pas de punto, zapateado y carreritas

Tabla 1. Organización de los hallazgos por indicadores descriptivos de la cultura y tipo de visión

Partes de la coreografía	Tipos de Visión		IMAGEN
	Visión Emic	Visión Etic	
I	Los bailarines entran en una fila india, el hombre detrás de la mujer.	Línea recta	
II	Con el Paso de Punto (los hombres moviendo los pañuelos y la mujer sus enaguas), forman una rueda en el centro del escenario, como se muestra en la imagen	Círculos Ejes de simetría Números pares en el borde de la circunferencia	
III	El paso de carreritas: El hombre frente a la mujer, dos pasos cruzaditos con una vuelta en cuatro tiempo hacia el centro y afuera, la mujer manos en la falda y el hombre agitando los pañuelos, como se muestra en la imagen	Centro del círculo Desplazamiento sobre el radio Simetría Axial: se definen dos diámetros Rectas Oblicuas Ángulos central en la circunferencia	
IV	Manteniendo la figura de rueda la pareja junta espalda con espalda, para realizar un zapateado marcado con la música, el hombre sacude los pañuelos y la mujer la enagua.	Puntos de la circunferencia Números Pares: tipo de marcha y tiempos del patrón rítmico	

V	El hombre vuelve su cuerpo al lado izquierdo, mientras que la mujer al lado derecho, realizando un coqueteo por medio de un beso, pues el hombre esconde a la mujer con su pañuelo	Puntos de la circunferencia Simetría por reflexión en parejas Sincronía en el patrón rítmico	
VI	Una pareja del elenco rompe la figura circular para realizar la salida en forma de una curva como se muestra la imagen	Trayectoria curva	

Como resultado del trabajo de campo etnográfico, la Tabla 1 muestra de manera sintetizada la visión emic de cada parte de la coreografía, que será detallada a continuación:

- Como podemos observar que los bailarines deben de conocer y tener cada posición que deben tomar para que el diseño de la coreografía sea armonioso.
- Los tiempos musicales deben ser contados por los bailarines para que exista una coordinación entre todos.
- En el momento cinco de la coreografía cada pareja de baile tiene que tener claro las simetrías para que cuando simulen el coqueteo puedan simular el detalle amoroso.
- La ubicación de puntos en la circunferencia se debe tener clara para los bailarines en escena pues cada pareja tiene que estar a la misma distancia del centro para que el diseño

De acuerdo con la tabla anterior podemos evidenciar las principales etnomatemáticas presentes en las danzas folclóricas y el aporte al Programa de Etnomatemática, además queda claro las diversas posibilidades que podemos utilizar estos resultados como usos didácticos con el fin de contextualizar en nuestras clases.

Dicho de otro modo, la importancia de este estudio radica en cómo se ha tratado de rescatar el conocimiento matemático que ha sido desarrollado en las danzas folcloricas, por medio de sus sistemas de símbolos y artefactos. Además, destacar la forma en que desenvuelven su lógica interna y la toma de decisiones de cada uno de los miembros de esta cultura.

Referencias y bibliografía

D'Ambrosio, U. Fantinato, M. y Vargas, A. (2018). *Etnomatemática*. Conceptos, dinámicas y desafíos. Jundiaí, Brasil: Paco Editorial

D'Ambrosio, U. (2000). *Las dimensiones políticas y educacionales de la etnomatemática.* Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo90.pdf

Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana (2003). *Nuestra música y danzas tradicionales*. Serie culturas populares centroamericanas.

Orey, D. y Rosa, M. (2017). *Etnomodelización el arte de traducir prácticas matemáticas locales*. São Paulo, Brasil: Editorial Librería de la Física

Orey, D. y Rosa M. (2017). *Influencias Etnomatemáticas en las aulas caminando hacia la acción pedagógica*. Curitiba, Brasil: Editorial Appris

Gavarrete, M. (2015). Etnomatemáticas indígenas y formación docente: una experiencia en Costa Rica a través del modelo MOCEMEI. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(1), 1-30

Harris, M. (1976). *El desarrollo de la teoría antropológica*. Historia de las teorías de la cultura. Recuperado de https://antroporecursos.files.wordpress.com/2009/03/harris-m-1968-el-desarrollo-de-la-teoria-antropologica.pdf.

Yojcom, D. (2013). *La epistemología de la matemática maya*. Guatemala: Editorial Maya Wuj.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Evolución de un proceso de análisis etnomatemático del Palo de Mayo utilizado en las danzas folclóricas en Costa Rica

Steven **Quesada** Segura
Universidad Nacional
Costa Rica
steven_09_11@hotmail.com

Este trabajo describe los avances de un proceso de análisis desde la perspectiva etnomatemática realizado en Costa Rica, donde el protagonista es el palo de mayo, es un artefacto utilizado en las danzas folclóricas de la provincia de Limón.

El Palo de Mayo es un tipo de danza caribeña que forma parte de la cultura de diferentes regiones de la costa caribe como Honduras, Nicaragua, Belice Panamá y Puerto Limón en Costa Rica, cuenta la historia que corresponde a una herencia europea en especial inglesa cuando conmemoraban el cumple años de la reina victoria , además era el inicio de la primavera donde la celebraban bailando alrededor de un árbol adornado con cintas de colores, como lo podemos observar en la siguiente imagen.



Figura 1: Palo de Mayo danza afro caribeña Limon
Fuente: https://www.google.com/search

Se parte de la premisa de que en el canasto existe un conocimiento cultural matemático poco reconocido y nunca estudiado, es así como surge la intención de los investigadores por

determinar *¿Cuáles son los principales elementos matemáticos que están presentes en el tejido artesanal del palo de mayo utilizado en las danzas folclóricas de Costa Rica?*

En la idiosincrasia de esta investigación **la Etnomatemática** se concibe como una corriente de investigación para la Educación Matemática que permite contextualizar elementos y símbolos, y que "se interesa en estudiar los factores sociales y culturales que afectan la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contextos escolares y extraescolares en diversos contextos sociales, económicos, políticos y multiculturales" tal como lo afirma Blanco (2008, p. 3), considerando en este caso, los elementos culturales, sociales y matemáticos inmersos en las danzas folclóricas de Costa Rica.

El método de estudio a través de un **análisis etnomatemático del modelo del trenzado**, a partir de las ideas de Albanese (2012), que sirven de guía para realizar una adaptación del modelo MOMET, y organizar un *estudio interpretativo formal* del palo de mayo, considerado como una artesanía de trenzado.

En este caso, el modelo de trabajo se titula *METMOM*, pues primero abarca un *método de análisis etnográfico (MET*) y posteriormente un *modelo de análisis matemático* (MOM), que constituyen en conjunto una propuesta de *Etnomodelización del palo de mayo.*

Para describir el *METMOM*, se consideran dos aspectos: el producto final de la labor artesanal (analizado en su complejidad global), y el proceso que se lleva a cabo para realizarlo.

Para la evolución del proceso descriptivo de categorías etnomatemáticas (MET)

Como se detalló en los fundamentos, el MET constituye un Método de Análisis Etnográfico que considera el trabajo de campo, el cual incluye las categorías consideradas para las observaciones y entrevistas diseñadas, las cuales son explicadas a continuación.

- Delimitación del Contexto Socio-geográfico:
- Funcionalidad y utilidad del canasto:
- Materia prima de confección del canasto
- Duración y costos de la cadena productiva

Para Evolución del proceso de análisis interpretativo geométrico (MOM). Como se detalló en los fundamentos, el MOM constituye un Modelo de Análisis Matemático, el cual consiste en la creación de modelos matemáticos que nos justifiquen la forma del tejido que utilizan para confeccionar un palo de mayo desde la perspectiva geométrica.

Referencias y bibliografía

Albanese, V y Oliveras, M. (2012). Etnomatemáticas en artesanías de trenzado: un modelo metodológico para investigación. *Bolema, 26*(44), 1314-1344.

Blanco Álvarez, H. (2008). *La integración de la etnomatemática en la etnoeducación*. En Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/874/1/11Conferencias.pd.

Guber, R. (2001). *La etnografía. Método, campo y reflexividad*. Buenos Aires: Editorial Norma

Rosa, M. y Orey, D. (2010). Etnomodelización como herramienta pedagógica para el programa etnomatemáticas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 3*(2), 14-23.

(Re)significación del currículo de matemáticas a partir del estudio indisciplinar de prácticas sociales

Oscar Guillermo Charry **Gutiérrez**
Universidad de Antioquia
Colombia
oscar.charry@udea.edu.co

Diana Victoria **Jaramillo** Quiceno
Universidad de Antioquia
Colombia
diana.jaramillo@udea.edu.co

Carolina **Tamayo-Osorio**
Universidade de Campinas
Brasil
carolina.Tamayo36@gmail.com

Resumen

Esta ponencia tiene como propósito presentar una investigación doctoral en su primer año de desarrollo, por esta razón sólo haremos referencia en este documento al planteamiento del problema y a algunos elementos del marco teórico. El objetivo de la propuesta doctoral es analizar el proceso de (re)significación del currículo de matemáticas que realizan los maestros de tres instituciones educativas de El Carmen de Atrato (Chocó, Colombia), a partir del estudio indisciplinar de prácticas sociales. Pensamos orientar esta investigación bajo una perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática, y en ella, la Etnomatemática y la interculturalidad. Se planea adoptar una metodología cualitativa con enfoque crítico-dialéctico. El trabajo de campo se piensa realizar en el marco de una investigación colaborativa, en la cual participarán profesores mestizos, indígenas y afrodescendientes que trabajan en algunas instituciones educativas del municipio de El Carmen de Atrato.

Palabras clave: perspectiva histórico-cultural, investigación colaborativa, interculturalidad, etnomatemática, pluriculturalidad.

Contextualización del proyecto

Esta investigación surge en el marco del proyecto "Jóvenes Excelentes y Líderes del Nuevo Chocó (JEL)"[1]. Ese proyecto tiene como objetivo "mejorar la calidad de la

[1] Proyecto que hace parte del Convenio especial de cooperación No. 019 de 2015 entre la Universidad Tecnológica del Chocó y la Gobernación del Chocó para el mejoramiento de la educación básica y media, ejecutado con Fondos de Desarrollo y Compensación Regional del Sistema General de Regalías.

educación básica y media del Chocó, proporcionando herramientas que incrementen la competitividad de los estudiantes y fortalezcan sus aptitudes para su formación profesional de una manera exitosa", –según el *Plan Estratégico de Mejoramiento de la Calidad Educativa en el Departamento del Chocó* (2017, p. 8)–. Según ese *Plan Estratégico*, el proyecto "JEL" emergió en un esfuerzo por revertir los bajos indicadores de calidad educativa[2], que ubican al Chocó en los últimos lugares en desempeño académico del país a partir de los resultados de las Pruebas SABER[3] 11 de los años 2014 – 2015 (ICFES, 2016).

Además de los bajos resultados en las pruebas SABER durante ese período, el Chocó presentaba unas condiciones socioeconómicas que reflejaban una realidad de abandono por parte del Estado y de necesidades básicas insatisfechas (Correa y Ríos, 2015). En relación con este aspecto, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2016) denunció serias disparidades que presenta Colombia en cuanto a aprendizaje y acceso a la educación, las cuales se agudizan en departamentos como el Chocó, donde la mayoría de sus pobladores se ubican en zona rural.

Para hacer frente a esta situación de desigualdad en términos educativos, el proyecto "JEL" presentó en el año 2016 algunas alternativas para intentar reducir la brecha con respecto a los otros departamentos del país. Una de esas alternativas fue el componente denominado "Maestros Líderes en el Aula (MLA)"[4], el cual tenía como propósito:

> Contribuir a los procesos de enseñanza y aprendizaje en las instituciones educativas del departamento del Chocó con el fin de motivar a la población docente y estudiantil para generar procesos de trabajo en equipo, investigación, liderazgo y emprendimiento que fortalezcan el sistema educativo y se alcancen estándares de excelencia. (CEIBA, 2016, p. 2)

Es justamente en el marco de ese componente que se planteó el presente proyecto de investigación de tesis doctoral.

Planteamiento del Problema

Iniciaremos exponiendo algunas tensiones que se presentan en una posible organización curricular. Autoras como Monteiro (2005), Jaramillo (2011), Tamayo-Osorio (2012), Suárez y Tamayo-Osorio (2018), entre otros, vienen identificando algunas tensiones con relación al currículo escolar. Estas autoras denuncian que los maestros deben atender a dos frentes; por un lado, al reconocimiento de la diversidad y el interculturalismo; y, por el otro, a los procesos homogeneizadores que se ejercen a través de currículos nacionales y pruebas estandarizadas nacionales e internacionales.

Derivado de esas tensiones, según autoras como Monteiro (2005) y Jaramillo (2011) se presentan dos escenarios, entre otros posibles. El primero de ellos tiene que ver con la tendencia a superponer, en el interior de las escuelas, los saberes escolares por encima de los saberes

[2] Esta información es suministrada por el mismo proyecto "Jóvenes Excelentes y Líderes del Nuevo Chocó" en el documento "Plan Estratégico de Mejoramiento de la Calidad Educativa del Departamento del Chocó.

[3] "El Examen de Estado de la Educación Media, ICFES-SABER 11°, que aplica el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) es un instrumento estandarizado para la evaluación externa (…)" (MEN, 2010, p. 1).

[4] El proyecto Jóvenes Excelentes y Líderes del Nuevo Chocó presenta seis componentes articulados para enfrentar algunos de los factores que influyen en la calidad educativa del departamento. Uno de ellos, es el programa "Maestros Líderes en el Aula".

cotidianos. Esta situación se presenta ya que las estructuras curriculares legitiman la mayoría de las veces únicamente los conocimientos escolares, e impiden la inclusión de los conocimientos cotidianos que se construyen fuera de la escuela (Monteiro, 2005; Jaramillo, 2011; Tamayo-Osorio, 2012). El segundo escenario, está relacionado con las evaluaciones estandarizadas, las cuales terminan convirtiéndose en mecanismos de control y de poder sobre los estudiantes y las instituciones (Jaramillo, 2011; Suárez y Tamayo-Osorio, 2018). En estas evaluaciones parece que se legitimaran únicamente los conocimientos escolares e invisibilizaran los conocimientos cotidianos, como lo denuncian también otros autores como Suarez y Tamayo-Osorio (2018), Blanco-Álvarez, Higuita y Oliveras (2014).

Esta situación nos lleva a pensar que los esfuerzos del Estado en proponer distintas políticas tanto constitucionales como educativas ─las cuales mencionaré más adelante, específicamente en el contexto colombiano─ para el respeto de la diversidad y el fomento de la interculturalidad, no garantizan la inclusión de los conocimientos de los grupos étnicos en el currículo de matemáticas, tal como lo expresan Peña-Rincón y Blanco-Álvarez (2015). Parafraseando a Monteiro (2005), esto podría ser considerado como una forma de exclusión social, ya que al invisibilizar otras formas de conocimiento se termina por desconocer o deslegitimar las prácticas sociales que dan sustento a dichos saberes. Con relación a la exclusión social, D'Ambrosio (2008) denuncia algunas de sus implicaciones, particularmente en los pueblos marginados:

> La exclusión social violenta la dignidad del individuo, que en muchos casos surge a partir de las barreras discriminatorias establecidas por la sociedad dominante, aun, y principalmente, en el sistema escolar. Pero también ocurre cuando se juzga la vestimenta tradicional de los pueblos marginados, se alimentan las fantasías que consideran a los mitos y religiones como un asunto folclórico y se criminalizan las prácticas médicas de dichos grupos. Incluso ocurre por hacer de sus prácticas tradicionales y de su matemática simple curiosidad. (p. 9)

Una posibilidad para hacer frente a la exclusión de los conocimientos cotidianos del currículo escolar, es la que presentan autores como Jaramillo (2011), Blanco-Álvarez, Higuita y Oliveras (2014), Tamayo-Osorio (2012), Monteiro y Mendes (2011), entre otros, al invitar a investigadores y profesores a pensar las prácticas sociales como punto central del currículo, de tal manera que se pueda facilitar un diálogo entre los diferentes grupos culturales, posibilitando la superación de las asimetrías existentes. Esas prácticas sociales las entendemos en el sentido de Miguel y Miorin (2004) como:

> Un conjunto de actividades o acciones físico-afectivas-intelectuales que se caracterizan [estas últimas] por ser: (1) conscientemente orientadas por ciertas finalidades; (2) configuradas en un tiempo y espacio determinado; (3) realizadas sobre el mundo material y/o cultural por grupos sociales, cuyos miembros establecen relaciones interpersonales entre sí que se caracterizan por ser relaciones institucionales de trabajo organizado; (4) productoras de conocimientos (…) (p. 165)

Según esos mismos autores, en el interior de las prácticas sociales se constituyen, se ejercen y se configuran relaciones de poder, que dan lugar a la producción y legitimación de conocimientos. Esto quiero decir que existen diferentes formas de ver y entender el mundo, dependiendo de cada grupo cultural. Esa concepción de prácticas sociales, en el campo de la Educación Matemática, nos invitaría a pensar que "no existe la matemática, *sino que* existen

matemáticas, que son producidas y significadas dentro de diferentes prácticas *culturales*[5]" (Monteiro y Mendes, 2011, p. 40). Hasta aquí, hemos venido presentando dos tendencias asociadas con el currículo escolar. La primera, que consiste en privilegiar el conocimiento escolar sobre el cotidiano y, la segunda, que tiene que ver con la evaluación estandarizada como un mecanismo de control y de poder.

Ambas tendencias contribuyen a la invisibilización de los conocimientos cotidianos de las comunidades indígenas y afrodescendientes que habitan en el municipio de El Carmen de Atrato. A continuación, explicaremos cómo se vislumbra el problema de investigación que se viene avizorando hasta el momento, en este municipio.

El discurso neoliberal de la pluriculturalidad: el caso del municipio de El Carmen de Atrato (Chocó)

Desde el año 2016, uno de los autores de esta comunicación se ha venido desempeñando como "Maestro Líder en el Aula" del área de matemáticas en las Instituciones Educativas Marco Fidel Suarez y Corazón de María, ubicadas en el municipio de El Carmen de Atrato (Chocó). Desde ese año ha podido observar algunos aspectos singulares de ese municipio que mencionaremos a continuación. En primer lugar, el municipio de El Carmen de Atrato tiene una composición triétnica[6], en donde la mayoría de su población es mestiza proveniente de los antioqueños, les siguen las comunidades indígenas pertenecientes a los grupos Embera Katíos y Embera Chamí y, por último, las comunidades negras que representan la menor parte de la población y que provienen del interior del Chocó. Se puede decir, que además de esta visibilización estadística de los grupos étnicos, también existe el reconocimiento de la diversidad cultural en este municipio a partir de distintas políticas educativas y constitucionales propuestas por el Estado desde la década del 90.

Con relación a este aspecto, en Colombia se destaca la amplia normatividad desarrollada para los grupos étnicos, partiendo del reconocimiento y protección a la diversidad étnica y cultural de nuestra nación en la Constitución Política de 1991, y de la política educativa denominada Etnoeducación[7] propuesta en la "Ley General de Educación de 1994". Por su parte, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha publicado algunos documentos que también promueven el reconocimiento de los grupos étnicos y la interculturalidad; destacamos la "Cátedra de Estudios Afrocolombianos", documento publicado en el año 2001.

Por lo anterior, podríamos pensar que en nuestro país ha existido un avance hacia el respeto y la conservación de los conocimientos de los pueblos indígenas y afrodescendientes. Sin embargo, autores como Rojas y Castillo (2009) sostienen que mientras la "Etnoeducación" siga

[5] Desde la mirada de Miguel (2010) ─que es una de las que adoptamos en esta investigación─ una práctica social es siempre cultural y una práctica cultural es siempre social. Por lo tanto, cada vez que hagamos referencia en este documento a las prácticas sociales o a las prácticas culturales estamos hablando de lo mismo.

[6] Información tomada del sitio oficial del municipio de El Carmen de Atrato en Chocó, Colombia. Disponible en: http://elcarmendeatrato-choco.gov.co/presentacion.shtml.

[7] La Etnoeducación ─según el artículo 55 de la Ley General de Educación de 1994─ es definida como "la educación para grupos étnicos que integran la nacionalidad y que poseen una cultura, una lengua, unas tradiciones y unos fueros propios y autóctonos, ligada al ambiente, al proceso productivo, al proceso social y cultural, respetando sus creencias y tradiciones".

siendo entendida como una educación para grupos étnicos[8], continuará representando para el Estado colombiano una simple estrategia política para hacer sentir incluidas a las comunidades indígenas y afrodescendientes. Por su parte, Walsh (2010) cuestiona la "Cátedra de Estudios Afrodescendientes" al decir que "su incorporación ─aún muy limitada a nivel nacional─ se da como materia 'étnica' y no como base para pensar 'con' los conocimientos, las historias, memorias y actualidades de la Colombia de descendencia africana" (p. 10).

En ese sentido, la interculturalidad iría mucho más allá de la inclusión de los saberes indígenas y afrodescendientes como si fueran un complemento de los saberes universales, tal como lo promueve la política de "Etnoeducación" y la "Cátedra de Estudios Afrocolombianos". Desde la mirada de autores como Rojas y Castillo (2009), Walsh (2010) y Tubino (2016) ─, esta forma de promover la interculturalidad termina propiciando un diálogo descontextualizado que invisibiliza las asimetrías sociales, las precarias condiciones socioeconómicas de los pueblos indígenas y afrodescendientes, y no cuestiona, desde nuestro punto de vista, la autoridad que se le ha otorgado a la matemática disciplinar (escolar) para determinar qué es conocimiento y quiénes lo producen.

En otras palabras, podemos decir que estas políticas educativas y constitucionales responden a un interculturalismo funcional para el sistema dominante. Esta perspectiva de interculturalidad ─que se denomina funcional─ se centra en el reconocimiento de la diversidad a través de un diálogo que no cuestiona las causas de las asimetrías sociales y de poder, como lo denuncia Walsh (2010). Consideramos que esto muestra una contradicción por parte del Estado, pues a través de esas políticas busca promover la inclusión de los conocimientos de los grupos étnicos en los currículos, pero, al mismo tiempo, mantiene una estructura disciplinar tanto en el modelo educativo como en la evaluación que, como ya dijimos, es estandarizada.

En suma, se podría decir que la interculturalidad, como se vislumbra en el municipio de El Carmen de Atrato, estaría enmarcada en un discurso pluriculturalista, cuestionado por Walsh (2005) en los siguientes términos:

> La pluriculturalidad es el referente más utilizado en América Latina, reflejo de una convivencia histórica entre pueblos indígenas y pueblos afros con blancos-mestizos. Se basa en el reconocimiento de la diversidad existente, pero desde una óptica céntrica de la cultura dominante y nacional. Desde esta perspectiva, las culturas indígenas y negras enriquecen al país, sin implicar o proponer un repensamiento de éste o de sus instituciones o estructuras. De esta manera, la pluriculturalidad funciona como un proceso de una vía, donde es más fácil aplicar el modelo predominante en la mayoría de las reformas educativas, sumando la diversidad cultural a lo establecido. (p. 45)

Esta forma de interpretar la interculturalidad, según Walsh (2005), continuaría perpetuando las asimetrías sociales, económicas y de poder entre las diferentes culturas. Por esta razón, nos soñamos en el municipio de El Carmen de Atrato trasgredir el discurso de la pluriculturalidad, el cual se encuentra al servicio del Estado ─como lo mencionamos anteriormente─ para pasar al discurso de la interculturalidad crítica (Walsh, 2010) como apuesta política y epistemológica que parta de las poblaciones indígenas y afrodescendientes. En ese sentido, nos planteamos la

[8] En el campo de las políticas educativas, cuando se habla de "educación para grupos étnicos", se hace referencia a "un programa de acción estatal que regula la educación de las poblaciones indígenas y negras" (Rojas y Castillo, 2009, p. 15). Aunque, según estos mismos autores, las poblaciones gitanas (Rom) han empezado a ser incluidas.

siguiente pregunta de investigación, la cual pone como punto central del currículo el estudio de las prácticas sociales, pero desde una perspectiva indisciplinar[9]: ¿cómo los maestros de tres instituciones educativas de El Carmen de Atrato (Chocó) (re)significan el currículo de matemáticas a partir del estudio indisciplinar de prácticas sociales?

En coherencia con esa pregunta, el objetivo de la investigación es analizar el proceso de (re)significación del currículo de matemáticas que realizan profesores de tres instituciones educativas de El Carmen de Atrato (Chocó), a partir del estudio indisciplinar de prácticas sociales. De esta manera buscamos que los conocimientos matemáticos se pongan al servicio de prácticas socioculturales, invirtiendo la mirada tradicional, que tiende a poner las prácticas sociales al servicio de la matemática escolar, como lo denunciara Lizcano (2002).

La (re)significación del currículo a partir de la problematización indisciplinar de prácticas sociales: abriendo caminos hacia la interculturalidad crítica

Autores como Jaramillo (2011), Tamayo-Osorio (2012), Peña-Rincón, Tamayo-Osorio y Parra (2015), Monteiro y Mendes (2011), entre otros, coinciden en proponer la Etnomatemática como una posibilidad para (re)significar los currículos escolares desde una perspectiva histórico-cultural de la Educación Matemática. De esta manera, consideramos ─basados en esos autores y en Walsh (2010) ─ que se haría posible la interculturalidad crítica, pero como una apuesta político-epistemológica que se construya "de y desde la gente que ha sufrido un histórico sometimiento y subalternización" (Walsh, 2010, p. 12).

Por otro lado, la interculturalidad crítica como lo denuncia Walsh (2010), no parte de la diferencia o de la diversidad, sino del problema estructural-colonia-racial. Esto quiere decir, en términos de Walsh (2010, p. 4), que se parte es del "reconocimiento de que la diferencia se construye dentro de una estructura y matriz colonial de poder, racionalizado y jerarquizado", en donde por lo regular los pueblos indígenas y afrodescendientes aparecen en los escalones más bajos. Podemos decir, apoyados en Walsh (2005), que esta forma de interculturalidad no existe, más bien, es una construcción social que va mucho más allá del respeto y el reconocimiento de la diversidad; es por esta razón que Walsh (2005) sugiere el término 'interculturalizar'.

Lo anterior significa, que nos soñamos la construcción de la interculturalidad crítica en el municipio de El Carmen de Atrato, propiciando la transformación de las relaciones, estructuras, instituciones, y conocimientos, para construir modos 'otros' de poder, saber y ser. Para esto, consideramos importante que los maestros hagan una (re)significación del currículo buscando su descolonización, y de esta manera se pueda dar paso a pensamientos 'otros', producto de un posicionamiento crítico de los miembros de las diferentes etnias de este municipio. Un primer paso para contribuir a la construcción de la interculturalidad crítica ─a partir de la descolonización del currículo en poblaciones consideradas por el Estado como pluriculturales─ es poner en cuestión la colonialidad del saber a través de la denuncia de las relaciones de poder que permean los procesos de validación y legitimación del conocimiento. Lo anterior, es el

[9] Según Miguel (2010), este término es utilizado por el lingüista brasileiro Luis Paulo da Moita Lopes, con el cual quiere significar "un procedimiento metodológico que voluntariamente transgrede las fronteras de los campos culturales disciplinares establecidos a fin de reconocer como igualmente legítimos, desde un punto de vista del análisis cultural, actividades humanas y prácticas socioculturales que ellos realizan y que, por alguna razón, no alcanzaron el estatuto disciplinar" (p. 4).

objetivo de la Etnomatemática en su dimensión política según autores como D'Ambrosio (2008) y Lizcano (2002).

En ese sentido, la Etnomatemática aparece como una posibilidad para la producción, la legitimación y la validación de conocimientos cotidianos que circulan en prácticas sociales de las comunidades. El pensar en una posible (re)significación curricular desde esta perspectiva, nos lleva a situarnos en la siguiente pregunta planteada por Monteiro y Mendes (2011, p. 41): "¿Cuáles son las voces y las culturas silenciadas en la escuela, y de qué modo pueden ser valorizadas?". Por su parte, Jaramillo (2011) y Tamayo-Osorio (2012), basados en Silva (1998) proponen centrar las discusiones sobre el currículo ─desde una perspectiva crítica─ en la pregunta: ¿A quién enseño? De esta manera, el foco del debate curricular se sería el reconocimiento de los sujetos desde el lugar que ocupan en el mundo y las distintas prácticas sociales en las que están inmersos. Con relación a este aspecto, Silva (1998) nos dice que:

> Un currículo crítico no puede dejar de lado las actuales preocupaciones y vivencias centradas en los niños y jóvenes. Descolonizar el currículo es también tornarlo relevante para la vida social de esta época turbulenta. Evaluar en qué medida el currículo está implicado con estas cuestiones puede ser una forma de reconocer su carácter crítico y descolonizador. (p. 8)

Un currículo que podría situarse como "un todo significativo, un instrumento privilegiado de construcción de identidades, y subjetividades" (Moreira, 1997; citado por Monteiro y Mendes, 2011, p. 40), que responde a preguntas como: ¿A quién enseño? ¿Por qué? y ¿Para qué? Esto quiere decir que el currículo puede entenderse como un instrumento significativo, según estas autoras, usado por las diferentes sociedades para la conservación, la transformación y la (re)significación de sus conocimientos ancestrales, promoviendo un diálogo contextualizado entre culturas que posibilite comprender la realidad existente, y la circulación de conocimientos 'otros' provenientes de distintas prácticas sociales.

Finalmente, podemos decir que la (re)significación curricular desde la perspectiva de la etnomatemática, a partir del estudio indisciplinar de prácticas sociales, implica discutir dos aspectos que consideramos fundamentales. El primero de ellos, es "comprender y problematizar el espacio escolar como un lugar de circulación de diferentes saberes, venidos de diversas prácticas, escolarizadas y no escolarizadas" (Monteiro y Mendes, 2011, p. 41). El segundo, tiene que ver con la disciplinarización, cuestionada por Miguel (2010), la cual es una práctica del modelo educativo actual. Pensando en la (re)significación curricular a partir del estudio indisciplinar de las prácticas, encontramos como primer obstáculo los procesos de disciplinarización que son el común denominador de la mayoría de las instituciones educativas del país.

En esa perspectiva, autores como Miguel (2010), Tamayo-Osorio (2012), Tamayo-Osorio y Cuellar (2016), entre otros, proponen el estudio indisciplinar de prácticas sociales, de tal manera que se pueda poner en debate la forma como ha sido organizado históricamente el currículo a través de la práctica de disciplinarización. Pues, al realizar una problematización indisciplinar de prácticas sociales no estaríamos interesados en preparar a los estudiantes para el mercado laboral a través de currículos disciplinares, sino que más bien, nos proponemos poner en cuestión las asimetrías de poder que se han instaurado en las tres instituciones educativas del municipio de El Carmen de Atrato. De esta forma, se promovería la construcción de la interculturalidad crítica como proyecto ético, político y epistemológico.

Referencias y bibliografía

Blanco-Álvarez, H., Higuita, C., & Oliveras, M. L. (2014). Una mirada a la Etnomatemática y la Educación Matemática en Colombia: caminos recorridos. En *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, 7(2), 245─269.

Correa, G. A., & Ríos, A. M. (2015). *Caracterización Socioeconómica del Departamento del Chocó. Análisis de Información Primaria y Secundaria.* Recuperado el 11 de abril del 2018 en http://www.perschoco.com/Componentes_WEB/Políticas_WEB/Socioeconómico_PERS%20Chocó%20Documento%20Preliminar_Junio2016.pdf

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática: Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.

Fundación CEIBA. (2016). *Términos de referencia Componente: Maestros Líderes en el Aula.* Bogotá: CEIBA. Recuperado de https://www.ceiba.org.co/site/images/PDF/Choco/TerminosRefMaestrosChocoConv10v1.pdf

Instituto Colombiano de Fomento de la Educación Superior. (2016). *Reporte de resultados de las pruebas SABER 11 por aplicación entidades territoriales.* Bogotá: ICFES. URL disponible en*: http://www.icfesinteractivo.gov.co/resultadosSaber/resultadosSaber11/rep_resultados.htm.*

Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), p. 13─36. Universidad de Antioquia.

Jóvenes Excelentes y Líderes del Nuevo Chocó, Locomotora de Pensamiento (2017). *Compendio para la calidad de la educación en el departamento del Chocó.* Quibdó: JEL. Recuperado el 9 de abril del 2018 en https://www.utch.edu.co/portal/images/Plan-de-Mejoramiento-de-la-calidad-listo.pdf

Lizcano, F. E. (2002). Las matemáticas de la tribu europea: un estudio de caso. In II Congresso Internacional de Etnomatemática, Ouro Preto (MG), Brasil.

Miguel, A. (2010). Percursos Indisciplinares na Atividade de Pesquisa em História (da Educação Matemática): entre jogos discursivos como práticas e práticas como jogos discursivos. *Boletim de Educação Matemática*, 23(35).

Miguel, A., y Miorim, M. Â. (2004). *História na educação matemática: propostas e desafios*. Belo Horizonte, Autêntica.

Ministerio de Educación Nacional. (2001). *Cátedra Estudios Afrodescolombinos.* Bogotá: MEN. Recuperado el 9 de febrero de 2018 en https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_recurso_2.pdf

Monteiro, A. (2005). Currículo de matemática: reflexões numa perspectiva Etnomatemática. 7° Encuentro de Educación Matemática, Asocolme, Tunja.

Monteiro, A., & Mendes, J. (2011). Prácticas sociales y organización curricular: cuestiones y desafíos. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 37─46.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2016). *La educación en Colombia: revisión de políticas nacionales de educación.* Paris: OCDE.

Peña-Rincón, P., & Blanco-Álvarez, H. (2015). Reflexiones sobre cultura, currículo y etnomatemáticas. In K. de la Garza & R. Cortina (Eds.), Educación, pueblos indígenas e interculturalidad en América Latina (pp. 213–246). Quito: Ediciones Abya-Yala

Peña-Rincón, P., Tamayo-Osorio, C., & Parra, A. (2015). Una visión latinoamericana de la etnomatemática: tensiones y desafíos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(2), 137─150.

Rojas, A., & Castillo, E. (2009). Multiculturalismo y políticas educativas ¿Interculturalizar la educación? *Revista Educación y pedagogía*, 19(48), 11─24.

Silva, da T. T. (1998). Descolonizar el currículo: estrategias para una pedagogía crítica. GENTILI, P.(comp.) Cultura, política y currículo. Ensayos sobre la crisis de la escuela pública. Buenos Aires: Losada, 63-80.

Suárez, A. M. W., & Tamayo-Osorio, C. (2018). Evaluaciones estandarizadas, modelos de aculturación y transgresión en las comunidades indígenas colombianas. *Zetetike*, 1(1), 21─40.

Tamayo Osorio, C. (2012). *Resignificación del currículo escolar indígena, relativo al conocimiento (matemático), desde y para las prácticas sociales: el caso de los maestros indígenas Dule de la comunidad de Alto Caimán* (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia, Medellín.

Tamayo-Osorio, C., & Cuellar-Lemos, R. N. (2016). Juegos de lenguaje en movimiento: Una experiencia Indígena. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 9(1), 49─70

Tubino, F. (2016). Los sentidos del interculturalismo latinoamericano y la utopía dialógica. *Cuyo*, 33(1), 69─77.

Walsh, C. (2005). Interculturalidad, conocimientos y decolonialidad/Inter-culturality, knowledge and decolonialism. *Signo y pensamiento*, 24(46), 39.

Walsh, C. (2010). Interculturalidad crítica y educación intercultural. En *Jorge Viaña, Luis Tapia y Catherine Walsh, Construyendo interculturalidad crítica. La Paz: Convenio Andrés Bello*, 75─96.



Metáforas en el discurso matemático de algunos profesores en la región del Eje Cafetero

Oscar **Fernández** Sánchez
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
oscarf@utp.edu.co

Monica **Angulo** Cruz
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
monac@utp.edu.co

Resumen

Se asume que el discurso matemático escolar, tanto de estudiantes como de los profesores, está sustentado por metáforas, las cuales reflejan el imaginario social de una comunidad de discurso. Se trasciende de la concepción estética de la metáfora como mero elemento de adorno y se tiene en cuenta su concepción cognitiva en la medida que, como fenómeno mental, le permite al hombre categorizar la experiencia. Las metáforas implicadas en el discurso matemático en la enseñanza de algunos conceptos es un hallazgo del proyecto de investigación "Imaginarios Matemáticos en el Eje Cafetero 2016-2017. Fase uno", mediante el cual, con un enfoque de investigación cualitativo se pretendía hacer una descripción de las tendencias en las expresiones metafóricas presentes en el discurso no profesional que usan los docentes de matemáticas en esta región.

Palabras clave: Discurso matemático escolar, metáforas, imaginario social, conceptos matemáticos, enseñanza.

Introducción

Según Lizcano (2006), una vía de acceso al imaginario social son las metáforas presentes en el discurso. Aquí, el interés se plantea en torno al imaginario social, término al cual Castoriadis, (citado en Erreguerena, 2002, p. 40) considera como "la concepción de figuras/formas/imágenes de aquello que los sujetos llamamos "realidad", sentido común o racionalidad en una sociedad. Esta "realidad" es construida, interpretada, leída por cada sujeto en

un momento histórico social determinado". Según esta afirmación, el docente, como sujeto social, con su discurso metafórico recrea la realidad, tanto la de él como la de sus estudiantes mediante las metáforas que utiliza en las explicaciones para sus estudiantes.

Adicionalmente, Castoriadis (1997, p. 9), considera que "las significaciones imaginarias sociales crean un mundo propio para la sociedad considerada, son en realidad ese mundo: conforman la psique de los individuos". Esas significaciones imaginarias sociales que menciona este autor, es aquello a lo que Godino, Batanero y Font (2008), llaman significados institucionales. Y estas significaciones imaginarias sociales crean una representación del saber matemático, a través de las metáforas que habitan el discurso de los profesores en el aula.

Según Lizcano (2006), aunque tradicionalmente se ha buscado expresiones del imaginario social en las narraciones míticas y en leyendas de los grupos sociales; también es posible encontrarlos en formas discursivas formales como es el lenguaje de las matemáticas. Un lenguaje que no es ajeno al imaginario colectivo, puesto que ese lenguaje como creación humana, y al cual se accede como expresa el mismo Lizcano (2006), a través de las metáforas presentes en ese lenguaje.

Respecto a la metáfora, abundan las fuentes bibliográficas. Es posible verificar la abundancia de trabajos sobre el tema (Aristóteles, 2006, 2007; Black, 1955; Cicerón, 2013; De Bustos, s.f.; Dormolen, 1991; Lakoff y Johnson, 1995; Lakoff y Núñez, 2000; Lizcano, 2006; Nietzsche, 2006; Perelman, 1997; Serna, 2007). Aquí, se asume las consideraciones que sobre la metáfora hace De Bustos (s.f.) y Perelman (1997), debido a que su enfoque se ajusta al objetivo planteado en esta investigación.

Según De Bustos (s.f., p. 5) la metáfora es un fenómeno que ocurre en la mente con el cual es posible asimilar y categorizar la experiencia y mediante el cual es posible la constitución de conceptos abstractos. Esta es una forma de concebir la metáfora muy acorde con lo que el docente de matemáticas busca conseguir en el aula cuando se ve en la necesidad de utilizar lenguaje metafórico.

Por otro lado, Perelman (citado en Fernández, 2010, p. 179), considera la estructura proporcional de la analogía A es a B como C es a D, a través de la cual se deriva la metáfora "A es D" o "C es B" o "A es C". Esta estructura metafórica lo ilustra con el ejemplo: "la vejez es a la vida lo que la noche es al día", se derivan las metáforas: "la vejez del día", "la noche de la vida" o "la vejez es una noche".

González (2014), muestra que hay presencia de metáforas en el discurso de los docentes de matemáticas, y que estas, a pesar que en ocasiones sirven para ayudar al estudiante a entender elementos abstractos de la matemática, podrían también obstaculizar el aprendizaje. Los resultados de la investigación de González (2014), es un antecedente importante que induce la pregunta ¿qué metáforas sustentan el imaginario colectivo, desde el cual se estructura el discurso de los docentes de matemáticas en el Eje Cafetero?

En el presente trabajo se ilustran metáforas halladas en los discursos de aula cuando se enseñan los temas número, raíz cuadrada, número imaginario y número complejo, encontradas como resultado del análisis de datos obtenidos a través de instrumentos de investigación cualitativa en el desarrollo del proyecto de investigación Imaginarios Matemáticos en el Eje Cafetero 2016-2017. Fase uno. El problema de investigación planteado es, indagar sobre las metáforas presentes en el discurso de aula de los docentes de matemáticas en la región del Eje

Cafetero, que es la región en Colombia comprendida por los departamentos de Risaralda, Caldas, Quindio y el norte del departamento del Valle del Cauca.

Esta investigación pretende aportar a la discusión presente en la Teoría del Aprendizaje de la Matemática desde un Enfoque Comunicacional propuesto en Sfard (2009), sobre todo en el papel que tiene la presencia de metáforas y su influencia en la modificación suscitada en la forma de pensar de los estudiantes, una vez entran en diálogo dentro del aula con el profesor de matemáticas.

Según esta autora "los objetos matemáticos surgen a través de las negociaciones entre la metáfora y el rigor" (p. 109), las metáforas que siempre están presentes en el discurso de aula como se pudo evidenciar a través de esta investigación, aunque sea de manera no consciente, inclusive en la génesis de los objetos matemáticos que constituyen el lenguaje formal de la Matemática.

Método

Debido a la naturaleza focal de las expresiones metafóricas en el discurso, como unidades de análisis, el enfoque de investigación cualitativo se ajusta a este tipo de datos. Además, los instrumentos usados para la recolección de los datos: Audio grabaciones de clases de siete profesores compañeros de los estudiantes de la maestría en Enseñanza de la Matemática participantes en el proyecto y de 30 profesores en ejercicio que trabajan en educación secundaria (bachillerato) en la región. Para la categorización y subcategorización de los datos, se utilizó la codificación abierta, axial y selectiva sugerida por Strauss y Corbin (2002).

Análisis

Como herramientas de análisis cualitativo se usaron mapas conceptuales, matrices de correlación y diagramas como el "modelo relacional" generado como resultado de investigación en Angulo (2011) con las categorías iniciales: metáforas estructurales, metáforas orientacionales y metáforas ontológicas sugeridas por Lakoff y Johnson (1995), todo este análisis asistido con el software Atlas.ti, V7, un software usado como auxiliar en el análisis de datos cualitativos sugerido por Hernández, Fernández y Baptista (2006); sin embargo, con el uso del software para los primeros datos se evidenció la necesidad de hacerlo de manera más pausada a través de matrices de análisis, debido a la naturaleza de los datos, puesto que lo que se buscan son frases metafóricas que en el lenguaje de la matemáticas son sutiles y tienen una carga histórica fuerte.

Para la sistematización de la información, se han realizado las transcripciones de los datos. En ese proceso se ha visto la necesidad de dar forma a las transcripciones y de diseñar formatos para ubicar las unidades de análisis, que en este caso son párrafos y diálogos de docentes y estudiantes que involucren frases metafóricas. Una vez organizada la información en estos formatos, se procede a refinarla en la medida que requiere ser interpretada siguiendo las teorías que sobre la metáfora se encuentra en (Aristóteles, 2006 y 2007; Dormolen, 1991; Lakoff y Johnson, 1995; Lakoff y Núñez, 2000; Lizcano, 2006 y Perelman, 1997). Las metáforas obtenidas y su tipología (ver Tabla 1) se generan según Lakoff y Johnson (1995). Estas metáforas, como fenómenos mentales estructuran, según De Bustos (s.f., p. 5), el discurso que los profesores usan para explicar conceptos abstractos como los señalados antes.

Resultados

La muestra de los profesores es homogénea, sugerida en Hernandez *et al.* (2006, p. 567), en tanto se escogieron según el criterio: profesores que enseñen matemáticas en el nivel de

educación secundaria de colegios públicos y privados de la región del Eje Cafetero. Y además la muestra es en cadena, también sugerida en Hernandez *et al.* (2006, p. 567), en tanto cada cohorte que ingresa a la Maestría en Enseñanza de la Matemática agrega profesores participantes a la muestra.

Con este criterio se obtuvieron los datos de la siguiente manera: Audio grabaciones y sus transcripciones de clases de siete profesores, quienes trabajan en los colegios: Rafaél Reyes de Pereira (colegio privado y mixto, con modalidad académica y modalidad militar), Santa Sofía de Dosquebradas (colegio público y mixto), Jaime Salazar Robledo de Pereira (Mega-colegio público y mixto) y Hogar Nazaret de Dosquebradas (colegio privado y femenino).

También audios y videos de clases tanto simuladas como de aula en colegio, de 30 profesores de la región que se encontraban en el programa Maestría en Enseñanza de la Matemática durante el periodo de la fase uno del proyecto. Y de cuatro trabajos de investigación de profesores en ejercicio que realizan estudios en la Maestría en Enseñanza de la Matemática pertenecientes al grupo de investigación GIPEMAC.

Por ejemplo, en la tabla 1 se enuncian algunas de las frases metafóricas identificadas que componen dicho corpus, como una pequeña muestra, debido a la limitante en el número de páginas que impone el CIAEM XV.

Tabla 1: Algunas expresiones metafóricas en el discurso de aula sobre número, raíz cuadrada, número imaginario y número complejo en la Región del Eje Cafetero

Categoría	Tipo	Metáforas	Frases metafóricas
Número	Estructural	*El 1 es como una guayaba o una manzana, no puede ser las dos*	¿Sí usted quiere una guayaba manzana, y en la tienda sólo hay guayabas y manzanas, la puede comprar? Así el número 1 no es primo ni compuesto
	Ontológica	*Los factores primos de un número son como los ladrillos de una pared*	Los factores primos los llamamos ladrillos, El albañil pega los ladrillos y se forma la pared, que es única
	Estructural	*El máximo común divisor de dos números es como la mayor longitud de dos listones de madera*	¿Cuál es la mayor longitud qué puede obtener de cada listón?
Raíz cuadrada	Estructural-ontológica	*La raíz cuadrada es la medida del lado de un cuadrado.*	**Profesor**: "…Porque nueve por nueve, es ochenta y uno, ¿cierto?, este nueve correspondería con la medida de un lado de un cuadrado" **Profesor**: "…en esas mismas figuras que les entregue, pueden representar, digamos la raíz cuadrada de treinta y seis ¿cierto?, ¿qué es cuánto?" **Estudiantes**: "seis".
	Ontológica	*La raíz cuadrada de una cantidad r como una cantidad t que multiplicada por si misma produce a r.*	**Profesor**: "¿qué significa tener raíces cuadradas?, o sea ¿cómo saco una raíz cuadrada?" **Estudiante**: "Tomando un número, y lo

			eleva a la dos, elevando al cuadrado" **Profesor**: "Un número elevado al cuadrado". **Estudiante**: "Un número que multiplicado por sí mismo, de ese número"
Número imaginario	Estructural	*Un número imaginario es una raíz imposible*.	**Profesor**: ¿será qué el cuadrado de un número real me puede dar uno negativo? **Estudiantes**: No **Profesor**: … la condición de equis al cuadrado es que el mismo número se multiplique dos veces igual, con signo y todo ¿es posible? **Estudiante**: Que de negativo, no **Profesor**: No es posible cierto (…) porque no existe un número real cuyo cuadrado sea menos uno **Profesor**: Imposible, ¿cierto? Exactamente, representando la letra i, se consideró como un número ficticio o imaginario, (…) su cuadrado es -1
	Estructural	*El nuevo número i es la unidad del conjunto de los números imaginarios*.	Se dice que 7i es siete veces la unidad en el conjunto de los números imaginarios. $\frac{i}{unidad\ en\ Im} = \frac{1}{\mathbb{R}}$
	Estructural-orientacional	*La unidad imaginaria es la unidad real rotada 90°*	Implica que "no está en el eje real" sino en un eje de números imaginarios porque al hacer la rotación "se sale" del eje de los números reales. $\frac{i}{eje\ imaginario} = \frac{1}{eje\ real}$
	Ontológica	*El número complejo es el color morado producido por la mezcla entre el color azul y rojo*	En el color morado obtenido; del azul, asociado a la parte real y rojo, a la parte imaginaria.
	Ontológica	*El número complejo es el cuadrado que se forma por la unión de dos triángulos*	Un triángulo de color azul, para representar la parte real, y otro de color rojo para representar la parte imaginaria.
	Estructural	*El número complejo es la suma de dos números diferentes*	Los dos números, una parte real simbolizada por la letra a, y de una parte imaginaria llamada b, la cual va acompañada de la letra i para identificarla como imaginaria, esto se simboliza como a + bi.

Número complejo	Ontológica	*El número complejo es un vector*	Se expresa que en el plano complejo se manipula gráficamente como un vector.
	Estructural	*El número complejo es un punto en un plano*	La idea se expresa por la asociación metafórica $a + bi = (a, b)$.
	Ontológica	*El número complejo es un número que tiene un cuadrado negativo*	Con estos "números complejos" ya es posible resolver cualquier ecuación, estos nuevos "números" al salirse de las fronteras de la recta de los números reales, arrasan con las imposibilidades que hasta su momento imponían las raíces de cantidades negativas.
	Estructural	*El número complejo es una raíz de un número negativo*	Surge cuando el profesor escribe en el tablero $\sqrt{-9}$, y pregunta por la posibilidad de encontrar, entre los números conocidos, un número *r* para el cual $r * r = -9$, a lo cual responden los estudiantes que no es posible. El profesor ratifica que no se encuentra entre el conjunto de los números reales un número que sea la raíz cuadrada de -9, o que multiplicado por sí mismo de -9.
	Ontológica	*El número complejo es un símbolo z*	Se utiliza la metáfora z = *a* + *b i*, para expresar que se considera a *a* + *b i* como si fuera un numeral z.
	Estructural	*El número complejo es una solución de un radical con un número negativo*	cada vez que tengan un radical con un número negativo, primero hasta hoy ustedes sabían que si ese radical era negativo no tenía solución, se cancelaba. Pero ya saben que a partir de hoy si le puede dar solución, podemos echarle mano a los complejos
	Estructural	*El número imaginario surge de raíces cuadradas de números negativos*	Necesito hallar la raíz cuadrada de menos 18, ¿Cómo la puedo sacar?, vamos a cambiar el menos 18 y a darle la vuelta. Raíz de menos 18 es lo mismo que decir la raíz de 18 por menos 1, ahí ya los separé ya los tengo, y esto es lo mismo que decir la raíz cuadrada de 18 por la raíz cuadrada de menos 1

Conclusiones

Entre las conclusiones de la fase uno, están: En general los profesores de nivel secundario, usan lenguaje metafórico para explicar temas de matemáticas de manera inconsciente, pues cuando se les aplica una prueba donde se les interroga sobre lo que querían dar a entender con las frases metafóricas que usó en clase, aducen no estar conscientes de haber usado dicha frase.

Otra conclusión es que la categoría que más se presenta es la metáfora de tipo ontológico, la cual se manifiesta en la medida que está presente la metáfora "los conceptos matemáticos son objetos que se pueden manipular".

Por otro lado, y como tema de esta comunicación, se muestra el caso de las categorías número, raíz cuadrada, número imaginario y número complejo, y un corpus de frases metafóricas relacionadas con estas categorías.

Referencias y bibliografía

Aristóteles. (2006). *Poética*. Traducción de Alicia Villar Lecumberri. Madrid, España: Alianza Editorial, S. A.

Aristóteles. (2007). *Retórica*. Traducción de Alberto Bernabé. Madrid, España: Alianza Editorial, S. A.

Angulo, M. (2011). *Rutinas ciudadanas: Escenarios urbanos hechos de urbanismos ciudadanos desde la familia, las parejas, los jóvenes* (Tesis de maestría). Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

Black, M. (1955). Metaphor. En *Philosophical Perspectives on Metaphor de Mark Johnson* (1985). Minnesota: Universidad de Minessota. 63 – 82. Recuperado de https://books.google.com.co/books?hl=es&lr=&id=Y6TzgsS035kC&oi=fnd&pg=PR9&dq=philosophical+perspectives+on+metaphor+by+mark+johnson&ots=_12vPw-pJx&sig=xIzj8oBsvhqLrKniIjgByDgK_Vc#v=onepage&q=philosophical%20perspectives%20on%20metaphor%20by%20mark%20johnson&f=false

Castoriadis, C. (1997). *El imaginario social instituyente*. Trad. Luciana Volco. En Revista Zona Erógena No. 35. Recuperado de http://www.ubiobio.cl/miweb/webfile/media/267/Castoriadis%20Cornelius%20%20El%20Imaginario%20Social%20Instituyente.pdf

Cicerón. (2013). *El orador*. Madrid, España: Alianza.

De Bustos, E. (Sf.). *La metáfora. Ensayos transdisciplinares*. Recuperado de https://www.academia.edu/

Dormolen, J. (1991). Metaphors Mediating the Teaching and Understanding of Mathematics. En *Mathematical Knowledge: It's growth trough teaching* de Alan Bishop, Stieg Mellin-Olsen y Joop Van Dormolen, 89 - 106. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Erreguerena, M. (2002). *Cornelius Castoriadis: sus conceptos*. En Revista ANUARIO • UAM-X • MÉXICO • PP. 39-47. Recuperado de http://148.206.107.15/biblioteca_digital/capitulos/32-1112kfr.pdf

Fernández, O. (2010). Pensamiento matemático de los mayas. Una creación metafórica. En Entre Ciencia e Ingeniería, Vol 4. No. 8, 174 – 188.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

González, R. (2014). *Posibles implicaciones del discurso metafórico docente en el abordaje del concepto de divisibilidad con estudiantes de séptimo grado de la institución educativa Santa Teresita del municipio de La Victoria (Valle del Cauca)* (Tesis de maestria). Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México, D.F., Mexico: McGraw-Hill/Interamericana.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. New York, United States: Basic Books.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1995). *Metáforas de la vida cotidiana*. Segunda edición. Madrid, España: Cátedra. Recuperado de https://linguisticaunlp.files.wordpress.com/2012/11/lakoff-y-johnson.pdf

Lizcano, E. (2006). *Metáforas que nos Piensan. Sobre Ciencia, Democracia y otras Poderosas Ficciones*. Ediciones Bajo Cero, bajo licencia de Creative Commons.

Nietzsche. F. (2006). *Sobre Verdad y Mentira en Sentido Extramoral*. Traducción Jorge Castillo. Bogotá, Colombia.

Perelman, Ch. (1997). *El Imperio Retórico, Retórica y Argumentación*. Traducción de Adolfo León Gómez. Bogotá, Colombia: Norma.

Serna, J. (2007). *Ontologías alternativas. Aperturas de mundo desde el giro lingüístico*. Rubí, Barcelona, España: Anthropos. Pereira, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira.

Sfard, A. (2009). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde um enfoque comunicacional*. Cali, Colombia: Editorial Universidad del Valle.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoria fundamentada*. Trad. Eva Zimmerman. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia. Recuperado de https://diversidadlocal.files.wordpress.com/2012/09/bases-investigacion-cualitativa.pdf



A tendência das pesquisas envolvendo estudantes com autismo

Elton de Andrade **Viana**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
eltondeandradeviana@gmail.com

Ana Lúcia **Manrique**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
analuciamanrique@gmail.com

Resumo

Considerando as diferentes pesquisas desenvolvidas sobre o ensino de matemática na perspectiva inclusiva, e com o objetivo de verificar como as pesquisas da Educação Matemática envolvendo estudantes com autismo estão se articulando com a teoria e com a prática docente, realizamos um trabalho que tem como questão norteadora: qual é a tendência observada nos artigos científicos sobre o ensino e a aprendizagem de matemática para pessoas com autismo no que se refere ao elo entre a teoria e a prática? Utilizando como referencial teórico o fluxo denominado *bidirecional information flow* e referencial metodológico a pesquisa por amostragem com estrutura fechada, foram investigados artigos disponibilizados no repositório brasileiro CAPES Periódicos, resultando na observação de que a tendência atual é concentrar as pesquisas diretamente no beneficiar da prática docente, com pouca ressignificação das teorias comumente assumidas na educação matemática.

Palavras-chave: educação especial, pesquisa, prática, tea, teoria.

Introdução

O tema da diversidade na educação matemática, assim como as especificidades da alteridade humana, como é o autismo, tem intensificado reflexões importantes no que se refere ao desenvolvimento de estudos que potencializem uma prática inclusiva de estudantes com autismo no contexto educacional e com diferentes perspectivas na Educação Matemática.

Diante das pesquisas que estão se desenvolvendo em diferentes países no que se refere ao ensino de matemática na perspectiva inclusiva, observamos que tais pesquisas estão se concentrando em diferentes aspectos do contexto educacional, como os aspectos teóricos e

práticos. Com esta observação, justificamos o trabalho aqui apresentado, o qual se inicia com uma revisão de literatura sobre como a teoria e a prática estão sendo compreendidas na Educação Matemática e como o autismo é definido internacionalmente no contexto educacional.

Em seguida apresentamos a trajetória de pesquisa que assumimos para a constituição de um estudo investigativo sobre as atuais tendências no que se refere ao ensino de matemática para estudantes com autismo.

Revisão de literatura

Em relatório produzido no *12th International Congress on Mathematical Education*, uma das considerações foi a de que se pode atribuir à teoria diferentes papéis e funções: (1) teoria como fonte de modelos a serem aplicados à prática de ensino e aprendizagem, (2) teoria construída para compreender um fenômeno específico e (3) teoria como uma informação instrucional a ser codesenvolvida com desenho a fim de alcançar um objetivo específico (Bikner-Ahsbahs e Clarke, 2015).

No que se refere a atribuição à teoria do papel de ser um modelo aplicável na prática, observamos neste trabalho ser de grande importância um entendimento, mesmo que introdutório, sobre a complexidade em que se constitui o elo entre a teoria e a prática. Tal elo no que se refere a Educação Matemática, não se efetiva de maneira linear e simples, mas sim em uma rede complexa em que o conhecimento teórico dialoga constantemente com a prática presente nos ambientes de ensino e de aprendizagem, como a sala de aula, as escolas e as comunidades educacionais.

Esse diálogo permite o aprofundamento ou até mesmo a ressignificação da teoria, pois a constituição do ambiente de ensino e de aprendizagem é particular temporalmente, socialmente e culturalmente. Assim como afirma Boaler (2000), há uma necessidade de refletirmos como as práticas culturalmente constituídas nas escolas codeterminam o conhecimento na comunidade.

A prática desenvolvida nos diferentes ambientes implica na construção do conhecimento, o que nos convida a ter um novo olhar sobre as teorias assumidas até então na nossa área científica. Assim como sugere Radford (2008), uma teoria pode ser entendida como uma maneira dinâmica de produzir entendimento e formas de ação, o que nos conduz a uma reflexão sobre como esta contribui para a prática docente, tanto no nível epistemológico como também praxeológico, na atual conjuntura educacional que o professor de matemática se encontra.

Tal reflexão pode ser desenvolvida diante do recém ingresso de estudantes apresentando diferentes condições biológicas e comportamentais sob a égide da inclusão escolar. Dentre esses estudantes, destacamos os que têm autismo, um transtorno que se manifesta principalmente na interação e na comunicação nos diferentes grupos sociais.

O autismo é terminologicamente conhecido como Transtorno do Espectro Autista (TEA), atual terminologia divulgada pela *American Psychiatric Association* (APA), a qual o define como um dos Transtornos de Neurodesenvolvimento que se manifestam na humanidade, se caracterizando por causar dificuldades na comunicação social recíproca e na interação social.

Trajetória metodológica adotada

Com o objetivo de verificar como as pesquisas da Educação Matemática e áreas afins, envolvendo estudantes com TEA, estão se articulando com a teoria e com a prática docente,

realizamos o estudo aqui apresentado se fundamentando na seguinte questão norteadora durante a nossa investigação: qual é a tendência mais observada nos artigos científicos sobre o ensino e a aprendizagem de matemática para pessoas com autismo no que se refere ao elo entre a teoria e a prática?

Como referencial metodológico, buscamos uma resposta a questão norteadora utilizando Pires (2008). Desenvolvendo um estudo com uma natureza qualitativa e caracterizado como uma pesquisa que tem uma estrutura convencional ou fechada na sua constituição, estabelecemos o repositório científico brasileiro CAPES Periódicos como o universo de onde obtivemos as unidades empíricas consideradas neste trabalho como objeto de análise (Figura 1).

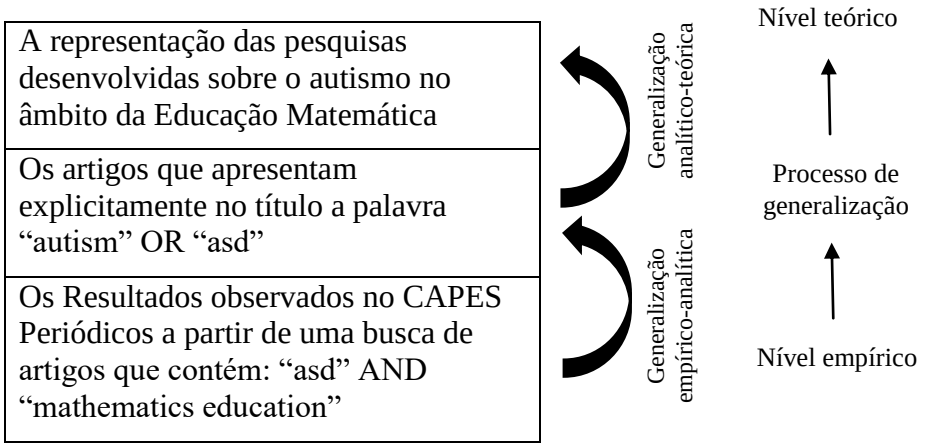


Figura 1. Estrutura da pesquisa para a constituição do objeto de análise.

Segundo Pires (2008), essa estrutura de pesquisa se distingue operacionalmente em três patamares, o da amostra, o do universo de análise e o universo geral. Neste trabalho, o patamar da amostra é compreendido por uma busca realizada no repositório CAPES Periódicos. Para esta busca, consideramos inicialmente que a língua inglesa tem se tornado importante na produção acadêmica, com ora a totalidade do texto acadêmico escrito em inglês, e ora parte do texto, como por exemplo o resumo. Assim, utilizamos as palavras *asd* (*Autism Spectrum Disorder*) e *mathematics education* nesta busca, onde identificamos um total de 77 artigos como amostra e que tinham tais palavras no corpo textual.

Partindo da amostra, foi constituído o universo de análise, que ainda no nível empírico, é entendido como o que melhor possibilita responder à questão norteadora deste trabalho. Para isso, foram identificados dentre os 77 artigos, os que explicitavam no título a palavra *autism* ou *asd*, ainda considerando a importância da língua inglesa na produção acadêmica. Neste patamar, foram identificados 16 artigos que além de apresentarem tais palavras no corpo textual, também as apresentavam no título.

Como último patamar na estruturação do nosso trabalho, o do universo geral, é necessário destacarmos aqui, assim como o faz Pires (2008), que esta etapa da pesquisa, apesar de ser a mais pertinente permitindo a obtenção de um conhecimento teórico sobre o universo do fenômeno ao qual tal conhecimento se aplica, no nosso caso, o fenômeno da relação entre teoria e prática no ensino de matemática para estudantes com autismo, nossa proposta neste patamar foi introduzir um conhecimento heurístico não exaustivo em si mesmo, mas que introduza um

melhor entendimento sobre como a Educação Matemática tem se desenvolvido internacionalmente diante da nossa questão de pesquisa.

É neste último patamar, que consideramos como fundamental a leitura minuciosa do resumo de cada um dos artigos. Para a seleção dos artigos, os critérios adotados na leitura dos resumos foram: (1) o resumo explicita uma questão norteadora que se articula com o tema 'O ensino de matemática para estudantes com autismo', (2) o resumo explicita uma metodologia e referencial teórico que já sejam conhecidos por nós – os investigadores autores do presente artigo -, (3) o resumo explicita quais foram os resultados alcançados na pesquisa que apresenta. Após considerarmos os três critérios já anunciados, identificamos 7 artigos (Quadro 1), os quais vieram a compor o objeto de análise na nossa investigação.

Quadro 1

Artigos identificados como objeto de análise

Código	**Título**	**Referência**
A1	Virtual and concrete manipulatives: a comparison of approaches for solving mathematics problems for students with autism spectrum disorder	Bouck et al (2013)
A2	Science, technology, engineering, and mathematics (STEM) participation among college students with an autism spectrum disorder	Wey et al (2013)
A3	Design approach of mathematics learning activities in a digital environment for children with autism spectrum disorders	Santos et al (2017)
A4	Video-based intervention in teaching fraction problem-solving to students with autism spectrum disorder	Yakubova et al (2015)
A5	Distinctive role of symbolic number sense in mediating the mathematical abilities of children with autism	Hiniker et al (2016)
A6	The effects of solve it! On the mathematical word problem solving ability of adolescents with autism spectrum disorders	Whitby (2012)
A7	Learning with technology: video modeling with concrete-representational-abstract sequencing for students with autism spectrum disorder	Yakubova et al (2016)

Fonte: arquivos pessoais dos autores. 2018.

Resultados

Apesar de se observar nesta investigação que a partir da Pesquisa, se pode alcançar contribuições tanto para a Teoria como para a Prática no que se refere ao desenvolvimento da Educação Matemática como área científica, Lesh (2002) também argumenta que os sistemas complexos em que se constituem os problemas da Pesquisa exigem, para um melhor aprofundamento, um fluxo de informações que não se dá diretamente da Pesquisa para a Prática, mas sim um fluxo que se define nos três âmbitos da tríade, se direcionando da Pesquisa para a Teoria, e em seguida da Teoria para a Prática.

A Pesquisa, por sua vez, é um elemento importante nesta tríade, partindo de um conjunto de estudos que são realizados no universo acadêmico institucionalizado na sociedade moderna.

Tais estudos contribuem simultaneamente tanto para o desenvolvimento de uma teoria como também para o aprimorar da prática docente. Essa dupla contribuição a partir da Pesquisa é o que Lesh (2002) denomina como *bidirecional information flow*, que no trabalho aqui apresentado, é o que assumimos como referencial teórico para o desenvolvimento do nosso estudo e obtenção dos resultados apresentados a seguir.

Considerando o *bidirecional information flow* proposto por Lesh (2002), a análise do nosso objeto de investigação foi feita por meio de quatro etapas: (1) leitura integral de cada um dos sete artigos, (2) seleção de trechos textuais que explicitam uma relação da pesquisa com a prática ou com a teoria, (3) identificação de quais são as tendências das pesquisas apresentadas nos sete artigos utilizando como referencial o *bidirecional information flow*, (4) criação de um diagrama que represente as tendências identificadas na etapa anterior.

Diante do objeto de análise, observamos na leitura dos artigos que a teoria e a prática estavam sendo observadas de diferentes formas, aparentando ora uma maior concentração na prática docente e ora na consolidação de uma teoria. Assim, se apoiando em Lesh (2002), que afirma ser o elo entre a teoria e a prática parte de uma tríade composta pela Teoria, pela Prática e pela Pesquisa, começamos a analisar os artigos no que se refere a esses três elementos da tríade.

A seguir, apresentamos duas tendências que foram identificadas nesta análise e o diagrama criado na última etapa do nosso processo de investigação.

Tendência 1: pesquisa - prática

O artigo A_1 explora, por meio de uma pesquisa investigativa envolvendo três estudantes com TEA, o êxito na resolução de problemas matemáticos do campo aditivo utilizando recursos concretos e virtuais. Na leitura deste artigo, é interessante a forma como os autores direcionam explicitamente a pesquisa diretamente para a prática, quando afirmam que "This study holds implications for practice as it suggests both virtual and concrete manipulatives can successfully support students with ASD with Regards to academic mathematical content" (Bouck et al, 2013, p. 191).

Já o artigo A_3, por meio de uma descrição de atividades de geometria propostas em um ambiente digital de aprendizagem denominado LEMA e dirigido aos estudantes com TEA, enfatiza claramente o seu desejo com a pesquisa no que se refere ao alcance direto para a prática quando as autoras citam:

> We hope that LEMA may prove to be a learning tool ensuring access and equity to the process of teaching and learning and a powerful tool to support teachers and educators, fostering new opportunities and educational strategies for the improvement of math skills in children with ASD. (Santos et al, 2017, p. 1320).

Outro artigo que identificamos neste grupo foi o A_4. Por meio de um estudo experimental constituído por diferentes momentos, foi realizada uma pesquisa sobre a efetividade da intervenção pedagógica utilizando o vídeo como recurso, no que se refere ao desempenho de estudantes com TEA na resolução de problemas envolvendo frações. Foi possível observar com uma leitura mais pontual do artigo, principalmente nas considerações finais, que o estudo se concentra na dimensão da prática, mas os autores entendem ser uma real necessidade a proposição de outros estudos para que posteriormente se efetive uma pesquisa que alcance diretamente a prática, quando afirmam:

> Findings from this study contribute to emerging trends supporting video-based interventions to teacch students with ASD and expand to teaching mathematics skills. Whether video-based interventions can be considered to be evidence-based practices in academic areas, particularly, in mathematics is yet to be seen. More research in this area is needed to address the academic needs of students with ASD in efforts to improve the likely trajectory of student outcomes. Findings from this study are promising, that with the right instruction and academic supports, students with ASD can successfully learn and maintain complex mathematics problem-solving skills and improve academic outcomes. (Yakubova et al, 2015, p. 2873).

Também identificamos na dimensão da prática, o artigo denominado como A_6. Trata-se de um estudo experimental de resolução de problemas envolvendo estudantes como TEA, sendo que os autores declaram nas últimas considerações do artigo que "Problem Solving Routine may be an effective intervention for students with ASD." (Whitby, 2012, p. 86), o que validou a nossa observação de que a pesquisa está direcionada diretamente à prática. O artigo A_6 não apresenta uma preocupação em ressignificar a perspectiva de Resolução de Problemas diante das particularidades de um estudante com autismo, mas visa alcançar diretamente a prática desta perspectiva como ela é no contexto de aprendizagem.

Ainda nesta tendência, encontramos como diretamente direcionado a prática o artigo que identificamos como A_7. Com um estudo sobre a eficácia de uma intervenção utilizando o vídeo como recurso e uma sequência instrucional Concreto-Representação-Abstração, os autores citam claramente a importância da pesquisa diretamente para a prática quando já no resumo esclarecem que são discutidas no corpo textual do artigo "Implications for practice [...]" (Yakubova et al, 2016, p. 2349) e também na conclusão indicam que "The findings of this study contribute to research and practice on determining evidence-based practices in teaching students with ASD" (p. 2360).

Tendência 2: pesquisa – teoria – prática

Nesta tendência, identificamos o artigo A_2, uma pesquisa realizada a partir de um conjunto de dados que expressam a transição de estudantes com TEA entre as diferentes etapas do sistema educacional dos Estados Unidos e sobre a participação desses estudantes nas ciências, tecnologia, engenharia e matemática. Nas suas considerações finais, o artigo motiva para que estudos na área do autismo sejam realizados, pois se percebe uma lacuna entre as pesquisas realizadas na academia e a prática educacional com este público em específico.

No entanto, junto a esta motivação, observamos que os autores entendem a pesquisa apresentada no artigo como um estudo que "[...] also support previous research [...]" (Wei et al, 2013, p. 1545). Identificamos em A_2 uma pesquisa que se desenvolve inicialmente no solo da teoria, o que fazendo uma leitura mais cuidadosa do artigo, observamos que a teoria destacada é *the systemizing-empathizing theory* postulada por Baron-Cohen (2009). No entanto, o artigo também descreve sua contribuição para corroborar pesquisas anteriores e já publicadas em outros momentos, isto é, para o desenvolvimento da teoria, conforme indica Lesh (2002) no *bidirecional information flow.*

Na investigação que aqui apresentamos, o artigo identificado como A_5 foi o segundo artigo identificado nesta tendência, já que contribui com uma pesquisa sobre como os sistemas simbólicos ajudam estudantes com TEA na aquisição de uma proficiência matemática no que se

refere ao senso numérico. Não observamos aqui uma pesquisa diretamente direcionada à prática, mas sim uma pesquisa que, assim como os autores destacam na conclusão, contribui para as diferentes teorias que estão sendo discutidas na academia:

> Our study provides a detailed investigation of number sense and its relation to mathematics ability in children with ASD. We found that non-symbolic number sense was impaired in children with ASD, while symbolic performance was comparable to that of TD [typically developing] children. Surprisingly, the influence of symbolic number sense on math ability was stronger in children with ASD than in TD children, and symbolic numerical acuity and math ability in the ASD group only. These results point to a more critical and distinctive role for symbolic knowledge in the development of mathematical skills in children with ASD. Our findings indicate that symbolic skills are a preserved strength in children with ASD and suggest that leveraging symbolic number knowledge may help them develop mathematical proficiencies. (Hiniker et al, 2016, p. 1279).

Fluxo entre pesquisa, teoria e prática

Fundamentando-se no fluxo existente entre pesquisa, teoria e prática proposto por Lesh (2002), e com a identificação das duas tendências assumidas nos artigos identificados como objeto de análise, definimos um fluxo conforme apresentamos na Figura 2.

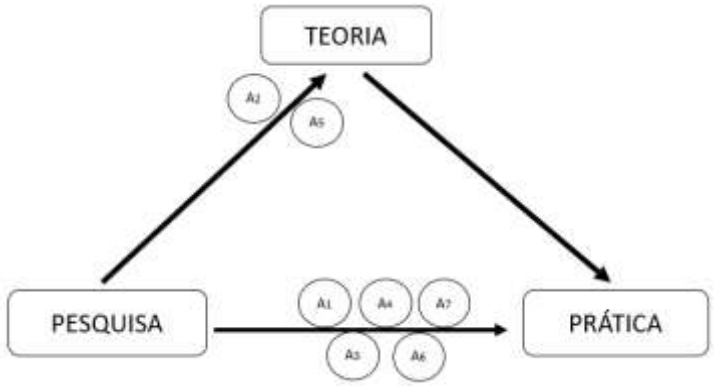


Figura 2. Fluxo entre pesquisa, teoria e prática identificado na investigação.

O fluxo aqui definido permite uma primeira, mas não exaustiva, representação de como as pesquisas estão se encaminhando quando o foco de investigação é o autismo. Tal representação demonstra que a tendência mais observada nas pesquisas é a de beneficiar diretamente a prática docente, com pouca ou até mesmo nenhum olhar mais pontual sobre as teorias tradicionalmente assumidas. Esta representação pode, por hipótese nossa, ser um reflexo da emergência de criação de recursos e estratégias para o lidar pedagógico com os recém-chegados (historicamente) estudantes com autismo no ambiente escolar, o que provoca pesquisas imediatistas no que se refere ao atendimento a esta emergência.

No entanto, uma importante reflexão a ser feita com os resultados deste trabalho, é que os educadores matemáticos também precisam olhar as teorias já constituídas com mais criticidade, aprofundando, ressignificando, verificando e porque também não dizer, suprimindo, diante dos fenômenos observáveis no contexto educacional como consequência de uma sociedade moderna e fundamentada nos direitos humanos e na equidade.

Conclusões

O movimento explicitamente assumido pelos autores em A_2 e A_5 indica a consideração na pesquisa em primeiro se consolidar teoricamente, fazendo uma reflexão sobre a teoria já conhecida. Isso não significa olhar apenas para o seu terreno particular de pesquisa, 'pescando' proposições teóricas tradicionalmente assumidas na Educação Matemática e as anexando por meio de uma 'costura', mas sim olhar como o seu terreno particular de pesquisa está sendo entendido na área da Educação Matemática de forma mais ampla, observando quais são as reflexões necessárias para um aprofundamento ou até mesmo a ressignificação da teoria, para em seguida contribuir para a prática docente.

Assim como é proposto no *bidirecional information flow*, sistemas complexos exigem pesquisas que se consolidem teoricamente, para em seguida beneficiar a prática docente, e a participação de estudantes com TEA no sistema educacional é um sistema complexo que exige esta trajetória de pesquisa, dada as dificuldades em se manter práticas educativas tradicionalmente constituídas nos diferentes países diante do comprometimento apresentado de diferentes formas e em diferentes graus nas pessoas com autismo.

Referências

American Psychiatric Association. (2014). *Referência rápida aos critérios diagnósticos do DSM-5*. Porto Alegre: Artmed.

Bikner-Ahsbahs, A., & Clarke, D. (2015). Theoretical issues in mathematics education: an introduction to the presentations. In S. J. Cho (Ed.). *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: intellectual and attitudinal challenges* (pp. 579-583). New York: Springer.

Boaler, J. (2000). Introduction: intricacies of knowledge, practice, ang theory. In J. Boaler (Ed.). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 1-17). London: Ablex Publishing.

Bouck, E. C., Satsangi, R., Doughty, T. T., & Courtney, W. T. (2013). Virtual and concrete manipulatives: a comparison of approaches for solving mathematics problems for students with autism spectrum disorder. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, *44*, 180-193.

Hiniker, A., Rosenberg-Lee, M., & Menon, V. (2016). Distinctive role of symbolic number sense in mediating the mathematical abilities of children with autism. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, *46*, 1268-1281.

Lesh, R. (2002). Research design in mathematics education: focusing on design experiments. In L. D. English. (Ed.). *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 27-49). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Pires, A. P. (2008). Amostragem e pesquisa qualitativa: ensaio teórico e metodológico. In J. Poupart, J. Deslauriers, L. Groulx, A. Laperrière, R. Mayer, & A. Pires. (Eds.). *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos*. (pp. 154-210). Petrópolis, RJ: Vozes.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 317-327.

Santos, M. I., Breda, A., & Almeida, A. M. (2017). Design approach of mathematics learning activities in a digital environment for children with autism spectrum disorders. *Education Tech Research Dev*, *65*, 1305-1323.

Wei, X., Yu, J. W., Shattuck, P., McCracken, M., & Blackorby, J. (2013). Science, technology, engineering, and mathematics (STEM) participation among college students with an autism spectrum disorder. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, *43*, 1539-1546.

Whitby, P. J. S. (2012). The effects of solve it! On the mathematical word problem solving ability of adolescents with autism spectrum disorders. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, 28 (2), 78-88.

Yakubova, G., Hughes, E. M., & Hornberger, E. (2015). Video-based intervention in teaching fraction problem-solving to students with autism spectrum disorder. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, *45*, 2865-2875.

Yakubova, G., Hughes, E. M., & Shinaberry, M. (2016). Learning with technology: video modeling with concrete-representational-abstract sequencing for students with autism spectrum disorder. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, *46*, 2349-2362.



Resolución de problemas usando el algoritmo de la sustracción en una persona con discapacidad mental leve

Diana Carolina **Galvis** Santamaria
Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
dianagalviss@gmail.com

Angie Yulieth **Gómez** Julio
Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
Angieyulieth2565@gmail.com

En el presente proyecto se abordan las necesidades educativas especiales que tiene Juan, un hombre de 31 años diagnosticado con déficit cognitivo por epilepsia, quien asiste a ASODISPIE[1]. Juan no presenta ninguna discapacidad física, le apasiona jugar baloncesto, es bastante comunicativo, ha sido escolarizado, sabe leer y escribir muy bien. Inicialmente se propone una prueba diagnóstica a Juan, en la cual él presentó dificultades en la resolución de problemas de sustracción y el manejo del dinero, a partir de la identificación de estas dificultades surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo propiciar en una persona con discapacidad mental leve el uso implícito del algoritmo de la sustracción en problemas cotidianos que involucran el uso del dinero?

Para solucionar esta pregunta fue necesaria la búsqueda de algunos antecedentes: Castillo (2014), López (2001), Vargas & Porras (2015) , y Alfaro (2006), investigaciones enfocadas en las dificultades encontradas en la sustracción y estrategias implementadas en la resolución de problemas, tales investigaciones proporcionaron ideas e información que permitieron seleccionar el marco teórico que direccionó esta investigación, en los aspectos conceptuales de este marco se contempló lo siguiente: la teoría de los cuatro pasos de Polya (1957) (comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y examinar la solución) y el papel del docente en el proceso (Alfaro, 2006),y los tipos de problemas para la sustracción según los lineamientos curriculares (Separación o quitar, Comparación - Diferencia, parte- parte- todo unión, adjunción. Añadir, añadir) (MEN, 1998).

[1] Asociación de discapacitados de Piedecuesta; una institución cuyos educandos son personas con necesidades educativas especiales (NEE).

La metodología de esta investigación consistió en una prueba diagnóstica inicial muy general, que evaluaba el desarrollo del algoritmo de la suma y la resta , está buscaba detectar las principales dificultades de Juan.Seguidamente se realizó una segunda prueba diagnóstica más enfocada en problemas de sustracción ya que este fue el obstáculo conceptual más evidente en Juan. A Partir de estas pruebas se realizaron tres sesiones de acompañamiento, en las que se trabajó el uso del algoritmo de la sustracción en problemas que involucran el dinero.

Las distintas intervenciones, lo evaluado en la prueba diagnóstica final y el método de los cuatro pasos de Polya (1957), permitieron realizar un análisis de resultados, donde se observó que Juan pudo pasar de no comprender un problema, a ser capaz de ejecutar un plan que es el tercer paso de la resolución de problemas de Polya (1957), fortaleció el desarrollo en el algoritmo de la sustracción, en especial cuando es necesario hacer préstamos y comprendió en qué consiste este procedimiento.

Al analizar los resultados obtenidos por Juan, durante todo el proceso, se logró ver que para que se de un progreso en el educando es fundamental el continuo acompañamiento del profesor en las intervenciones, el diseño de actividades propicias a las dificultades conceptuales y necesidades educativas especiales, es también recomendable llevar una relación dinámica y muy comunicativa entre maestro y alumno, donde tal relación permita que se generen cuestionamientos entre el educador y el educando que enriquecen el trabajo que se está desarrollando.

Referencias y bibliografía

Alfaro, C. (2006). *Las ideas de Polya en la resolución de problemas.* Cuadernos de investigación y formación matemática. Universidad Nacional. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6967/6653**.**

Castillo, C. (2014). *Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos* (Tesis de posgrado). Universidad Nacional, Colombia. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/47573/1/94442425%20Cesar.pdf.

López, A. (2001). *Desarrollo de las operaciones de sumar y restar*: comprensión de los problemas verbales (tesis de doctorado). Universidad complutense de Madrid, España. Recuperado de: http://biblioteca.ucm.es/tesis/psi/ucm-t25308.pdf.

Polya, G. *How to solve it*: a new aspect of mathematical method. New Yourk: Princeton University Press.

Vargas, S. & Porras, L. (2015). *Resolución de problemas en adición y sustracción de números naturales mediante la aplicación de componentes lúdicos, en estudiantes del grado sexto, del colegio Comfatolima* (tesis de posgrado). Universidad del Tolima, Ibagué Tolima. Recuperado de: file:///C:/Users/Administrador/Downloads/RESOLUCI%C3%93N%20DE%20PROBLEMAS%20EN%20ADICI%C3%93N%20Y%20SUSTRACCI%C3%93N%20DE%20N%C3%9AMEROS%20NATURALES%20MEDIANTE%20LA%20APLICACI%C3%93N%20DE%20C.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Profesores Aimaras de Educación Intercultural Bilingüe y sus emociones en la clase de matemáticas

María del Carmen **Bonilla**
APINEMA: Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática
Perú
mc_bonilla@hotmail.com

María S. **García** González
Universidad Autónoma de Guerrero
México
mgargonza@gmail.com

Felipe **Huayhua** Pari
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Perú
fhuayhua@gmail.com

Resumen

En el presente estudio se da a conocer una investigación de tipo cualitativo en la que participaron docentes aimaras en su mayoría de Educación Intercultural Bilingüe (EIB), que trabajan principalmente en Educación Primaria. El objetivo planteado fue caracterizar las emociones experimentadas por los docentes durante la enseñanza de las matemáticas. Los resultados encontrados señalan que las emociones de los profesores, negativas y positivas, están en función de lo que los estudiantes pueden lograr, por ejemplo que comprendan los temas que se les enseñan, que pongan atención y muestren interés por las clases, y que resuelvan problemas, pero también de factores como la lengua y el contexto. De manera particular, los resultados dan a conocer la problemática relacionada al modelo de servicio de EIB, que propugna el reconocimiento y la revalorización de la lengua, los saberes y la cultura aimara.

Palabras clave: conocimiento emocional, educación intercultural bilingüe, aimara, educación matemática, docentes en formación.

Las emociones del profesorado en la clase de Matemáticas

Muchos de nuestros éxitos o fracasos son determinados por las emociones que experimentamos, la clase de matemáticas no escapa a este hecho, tanto el profesor como los estudiantes las sienten, aunque muchas veces no estén conscientes de ellas, y es que es tan normal sentirlas que llegan a formar parte de la vida diaria académica. Es así como el salón de

clases como una microcultura norma el comportamiento y sentir de sus actores. La investigación ha evidenciado el estrés, la desmotivación, el abandono de la profesión y el síndrome de Burnout que experimentan los docentes (Schutz & Zembylas, 2009). También se ha evidenciado que una gran proporción de maestros en formación expresa emociones negativas producto de sus experiencias vividas como estudiantes, conocer estas emociones es importante debido a que influyen en la perspectiva del profesor acerca de tener que enseñar matemáticas (Coppola, et al, 2012; Di Martino & Sabena, 2011). De acuerdo con Zembylas (2005), cuando un profesor toma decisiones en el aula de clases entran en juego sus valores, creencias y emociones, éstos actúan y se reflejan en diferentes propósitos, como los métodos y significados de la enseñanza.

Existe un consenso entre los investigadores de que las causas de todas las emociones negativas de los profesores obedecen principalmente a que la mayoría de ellos no son especialistas en matemáticas y han tenido a menudo experiencias negativas con las matemáticas cuando eran estudiantes de primaria o secundaria (Philipp, 2007). La ansiedad matemática es el fenómeno emocional más estudiado en los profesores en formación (Bekdemir, 2010). También ha sido reportada como un fenómeno común entre los profesores en formación de la escuela primaria en muchos países, y se ha evidenciado que puede interferir seriamente en ellos para convertirse en buenos profesores de matemáticas (Hannula, Liljedahl, Kaasila, & Rösken, 2007).

La revisión de antecedentes nos ha permitido conocer que la investigación sobre emociones en la enseñanza de las matemáticas se ha centrado en el nivel primaria, con profesores en formación y algunas veces con profesores en servicio. Por ahora tenemos el interés de profundizar en las emociones experimentadas por profesores en servicio durante la enseñanza de las matemáticas en diferentes contextos, uno de ellos es la cultura y lengua materna originaria, esta investigación particulariza en el aimara, propio de la cultura que ocupa territorios del sur de Perú, Bolivia y norte de Chile.

Pretendemos acercarnos a una explicación de las emociones experimentadas al enseñar matemáticas por profesores de Educación Intercultural Bilingüe (EIB), debido a que ellos enseñan en su propia lengua y en el castellano - lengua de comunicación nacional- como segunda lengua. De esta manera, los profesores buscan comunicar eficientemente los conocimientos matemáticos en diversos contextos de interacción social y cultural, actividad que se encuentra condicionada por la primacía del pensamiento matemático occidental, situación que produce conflictos en los docentes de los pueblos originarios, en tanto esa mirada de las matemáticas no corresponde a su cosmovisión, ni al pensamiento de la comunidad.

Además del problema cognitivo también se presenta un conflicto epistemológico y emocional, pues históricamente este pueblo andino ha sido marginado e invisibilizado, menospreciado en su identidad cultural, produciéndose un epistemicidio de sus saberes ancestrales (De Sousa, 2010), situación que perjudica el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la autoestima y seguridad, tanto de los docentes como de los estudiantes. La pregunta de investigación planteada fue ¿qué emociones experimentan los profesores de EIB durante la enseñanza de las matemáticas?

Los resultados de esta investigación tienen implicaciones para la investigación en el campo del Dominio Afectivo, así como en la misma formación de profesores. En el primero de los casos permite ampliar el conocimiento que se tiene de las emociones de profesores en formación, hasta ahora se sabe que la mayoría de profesores en formación experimentan emociones negativas producto de sus experiencias vividas como estudiantes, y que estas emociones influyen en la perspectiva que se crea el profesor acerca de tener que enseñar matemáticas (Coppola, et al, 2012; Di Martino & Sabena,2011), en el segundo de los casos ayuda a los profesores a

desarrollar su conocimiento emocional (García & Pascual, 2017), esto es, ser conscientes de las emociones que experimentan y conocer las situaciones que las desencadenan.

Referentes conceptuales

Concebimos las emociones desde la postura de las teorías de la valoración, que proponen que las personas experimentamos emociones de acuerdo con nuestras evaluaciones de la situación específica que desencadena la emoción. Particularmente nos ceñimos a la Teoría de la Estructura Cognitiva de las Emociones, llamada teoría OCC (Ortony, Clore & Collins, 1996). La elección descansa en dos razones; la primera de ellas es que algunas investigaciones precedentes en Educación Matemática (García-González-Martínez-Sierra, 2016 y Di Martino & Sabena, 2011) han mostrado su potencial para conocer las emociones de estudiantes y profesores de matemáticas, así como para identificar las emociones que las desencadenan. La segunda de las razones es que esta teoría nos indica el tipo de datos a recolectar y una tipología de emociones para analizarlos.

La teoría OCC usa como evidencia de las emociones al lenguaje, siendo este un método para acceder al conocimiento de las emociones de quien las experimenta e ignora por completo la evidencia conductual y fisiológica. Aunque se tiene en cuenta la evidencia lingüística, el análisis de las emociones no es acerca de las palabras que se refieren a emociones, sino de las situaciones que las desencadenan. Este hecho obedece a que en el lenguaje cotidiano existen varias palabras que pueden ser usadas para referirse a diferentes aspectos del mismo tipo de emoción. Por ejemplo, la palabra congoja hace referencia a un miedo moderado mientras que la palabra pánico da evidencia de un nivel intenso de miedo, pero en definitiva las dos se refieren al mismo tipo de emoción, el miedo.

Con base en las consideraciones anteriores, desde la OCC las emociones se definen como "reacciones con valencia ante acontecimientos, agentes u objetos, la naturaleza particular de las cuales viene determinada por la manera como es interpretada la situación desencadenante" (Ortony, Clore & Collins, 1996, p. 33). De esta manera entendemos las emociones como las reacciones de valencia ante situaciones generadas en el aula de matemáticas. Ejemplo de ellas son la satisfacción o el miedo, entre otras. Esta teoría presenta una tipología de 22 emociones, misma que ha sido robustecida por Martínez-Sierra & García González (2014), al incluir las emociones de aburrimiento e interés (Tabla 1), ésta la hemos utilizado para analizar la evidencia recolectada.

Tabla 1: Tipología de emociones desde la OCC.

Clase	Grupo	Tipos (*ejemplo de nombre*)
Reacciones ante los acontecimientos	Vicisitudes de los otros	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*feliz-por*)
		Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*alegre por el mal ajeno*)
		Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*resentido-por*)
		Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*quejoso-por*)
	Basadas en previsiones	Contento por la previsión de un acontecimiento deseable (*esperanza*)
		Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (*satisfacción*)
		Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento

		indeseable (*alivio*) Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable (*decepción*) Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (*miedo*) Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento Indeseable (*temores confirmados*)
	Bienestar	Contento por un acontecimiento deseable (*júbilo*) Descontento por un acontecimiento indeseable (*congoja*) Disgustado por un estado cognitivo indeseable de distracción (*aburrimiento*) Complacido por un estado cognitivo deseable de atención (*interés*)
Reacciones ante los agentes	Atribución	Aprobación de una acción plausible de uno mismo (*orgullo*) Aprobación de una acción plausible de otro (*aprecio*) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo (*autoreproche*) Desaprobación de una acción censurable de otro (*reproche*)
Reacciones ante los objetos	Atracción	Agrado por un objeto atractivo (*agrado*) Desagrado por objeto repulsivo (*desagrado*)
Reacciones ante el acontecimiento y el agente simultáneamente	Bienestar/Atribución	Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado (*gratitud*) Desaprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (*ira*) Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado (*complacencia*) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo y descontento por el acontecimiento indeseable relacionado (*remordimiento*)

Fuente: (Martínez-Sierra & García González, 2014).

Metodología

La investigación es de tipo cualitativo, pues pretendemos hacer una caracterización de las emociones que experimentan por las matemáticas los profesores de EIB.

Contexto y Población

Los participantes de esta investigación son un grupo de profesores de EIB, en el marco del Proyecto de Investigación "Normalización de léxicos pedagógicos aimara en el área de Comunicación Integral en el nivel primario de la Educación Intercultural Bilingüe" ejecutado por el Grupo de Investigación Intercultural para la formación docente y la enseñanza de las lenguas de la Escuela Profesional de Lingüística, Facultad de Letras y Ciencias Humanas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, y dirigido por el tercer autor de esta comunicación.

Como parte del proyecto se realizó del 5 al 7 de septiembre del 2018 en Chucuito, Puno, Perú, el Taller Estandarización y Normalización del léxico pedagógico gramatical aimara-castellano en el área de comunicación, en este escenario se invitó a los asistentes a participar de manera voluntaria con el llenado de un cuestionario cuyo objetivo era conocer las emociones experimentadas durante la enseñanza de las matemáticas. A este llamado acudieron 13 docentes, 7 mujeres y 6 hombres (edades de 29 a 58 años).

De ellos, 10 tienen como formación la docencia en Educación Primaria, 1 de ellos tienen la

licenciatura en Educación Secundaria, uno más es Ingeniero Civil y un profesor estudió Física-matemáticas. Del total, 10 laboran en educación primaria y 3 en educación secundaria. 12 de ellos son bilingües y 1 de ellos es monolingüe (castellano), pero todos enseñan matemáticas en aimara y castellano. Los años de experiencia frente a grupo van desde los 4 hasta los 28 años.

Recolección de Datos

Para conocer las emociones de los docentes se usó el cuestionario como herramienta de recolección de datos, éste se compone de un protocolo de preguntas (ver Tabla 2) que ha sido ya validado por el grupo de Dominio Afectivo de la Universidad Autónoma de Guerrero, el cuestionario fue transcrito para su posterior análisis.

Tabla 2: Protocolo del cuestionario.

Peguntas para conocer las emociones de profesores de EIB
¿Qué emociones o sentimientos experimenta en sus clases?, ¿por qué experimenta eso?
¿Cuáles son las principales experiencias positivas que ha tenido como docente de EIB?, ¿porque experimenta eso?
¿Cuáles son las principales experiencias negativas que ha tenido como docente de EIB?, ¿por qué?
¿En qué circunstancias y situaciones ha experimentado felicidad o alegría en sus clases?
¿En qué circunstancias o situaciones ha experimentado tristeza o pesar en sus clases?
A lo largo de su vida académica ¿Qué emociones ha experimentado en las clases de matemáticas?, ¿por qué experimenta todo eso?
Describa una experiencia positiva que haya vivido con las matemáticas. ¿Por qué fueron experiencias positivas?
Describa una experiencia negativa o mala que haya vivido con las matemáticas. ¿Por qué fueron experiencias negativas? Dar ejemplos concretos

Fuente: (García-González y Martínez-Sierra, 2016)

Análisis de datos

Para identificar las emociones y las situaciones que las desencadenaron, se procedió a identificar en las transcripciones las definiciones de los tipos de emociones señaladas por la OCC (Tabla 2). La segunda autora realizó una primera identificación de las emociones, después este análisis fue triangulado con el resto de los autores, con el fin de garantizar saturación teórica. A manera de ejemplo presentamos al lector una codificación de emociones.

La decepción se define como "descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable", en el siguiente extracto identificamos esta emoción.

M5_43: [Siento] *tristeza* por **la falta de material concreto** para trabajar con los alumnos.

Interpretamos que la profesora M5 (de 43 años), manifiesta un descontento expresado con la palabra "tristeza", cuando la escuela no la provee de material concreto para trabajar con sus estudiantes, este evento refuta su previsión de que la escuela debe proveer material concreto para trabajar en las clases y la hace decepcionarse.

La codificación de emociones se hizo por profesor, posteriormente se hizo una agrupación por tipo de emoción, y se resaltó en cada una de ellas, las situaciones desencadenantes, como se muestra en la siguiente sección.

Resultados

Como resultado, identificamos 7 tipos de emociones, 3 positivas y 4 negativas (ver Figura 1).

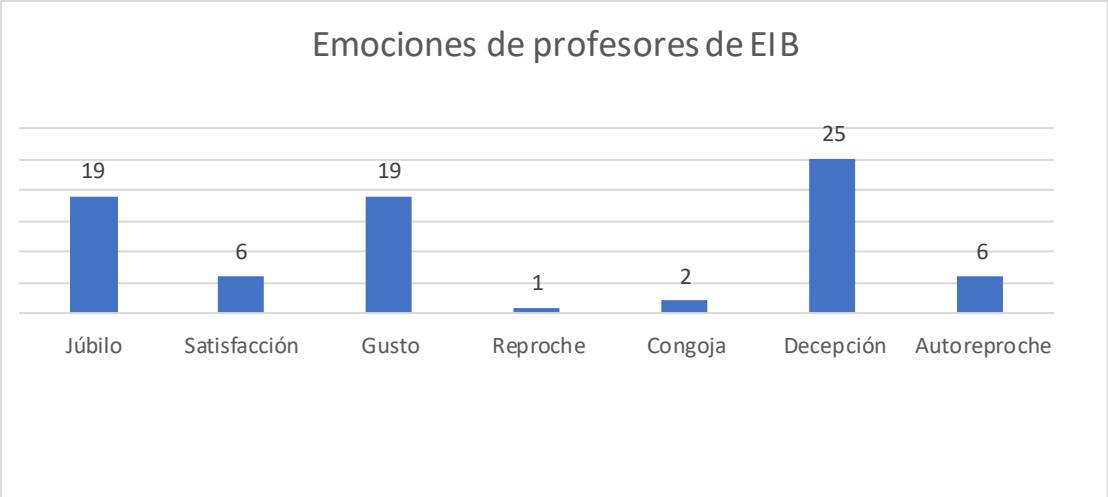


Figura 1. Frecuencia de las emociones experimentadas por los docentes de EIB. *Fuente*: elaboración propia.

La Tabla 3 detalla las situaciones desencadenantes de las emociones identificadas. Todas las situaciones las hemos agrupado en factores principales. A manera de ejemplo y para que el lector comprenda la tabla, diremos que las emociones de júbilo (contento por un acontecimiento deseable, definición OCC) se desencadenan por 4 factores, la lengua, el contexto, los estudiantes y la enseñanza de las matemáticas. Los profesores señalaron que se sienten contentos cuando sus estudiantes logran resolver los problemas planteados en aimara y castellano.

De igual manera se sienten contentos cuando los estudiantes comprenden los temas matemáticos mediante actividades contextualizadas como la venta, el trueque y el juego de canica, en general, cuando utilizan sus saberes ancestrales. Otro factor que les causa satisfacción es cuando se percatan de la motivación y el interés de los estudiantes por aprender matemáticas mediante las vivencias en labores de la comunidad, aunado a lo anterior, hubo profesores que declararon que su satisfacción en el aula es enseñar, debido al gusto que sienten por las matemáticas.

Tabla 3: Emociones y situaciones desencadenantes

Júbilo	*Lengua*: Cuando los estudiantes logran resolver problemas en aimara y en castellano. *El contexto*: La comprensión de los temas matemáticos a partir de prácticas culturales como la venta, el trueque, juegos de canica, y en general, a partir de sus saberes ancestrales. *Estudiantes*: La motivación y el interés por aprender matemáticas a partir de sus vivencias. *Enseñanza de las matemáticas*: Por gusto del profesor.
Reproche	*Estudiante*: Manifiestan vergüenza de comunicarse en aimara.
Satisfacción	*Lengua*: Que se hable aimara. *Alumnos*: Cuando participan en clase de matemáticas de forma creativa. *Planeación*: Cuando se alcanzan los objetivos planteados para la clase.
Congoja	*Alumnos*: Cuando no comprenden los temas. *Profesor*: Falta de capacitación en los nuevos enfoques de la EIB.

Decepción	*Didáctica*: No tener materiales didácticos aimaras. *Estudiantes*: El desinterés por las matemáticas y su rebeldía. *Padres*: Cuando hay rechazo a hablar en lengua aimara. *Colegas*: Cuando hay rechazo a hablar en lengua aimara. *Recursos didácticos*: La falta de recursos tecnológicos, computadoras, internet, material concreto.
Gusto:	*Lengua*: Recuperación de vocablos aimaras en unidades de medida. *Didáctica*: Trabajar en el contexto bajo proyectos. *Aplicación*: Ayudar a productores de la comunidad aimara a resolver problemas matemáticos. *Cultura:* Sentimiento profundo por la identidad de nuestra cultura andina.
Auto reproche:	*Profesor*: No poder ayudar a una alumna quechua que no comprendía las clases por el lenguaje.

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

Los resultados encontrados, de manera general, coinciden con los reportados en García-González y Martínez-Sierra (2016) las emociones de los profesores, negativas y positivas, están en función de lo que los estudiantes pueden lograr, por ejemplo que comprendan los temas que se les enseñan, que pongan atención y muestren interés por las clases, que resuelvan problemas. De manera particular, los resultados dan a conocer la problemática relacionada al modelo de servicio al que pertenecen los participantes, la EIB, pues manifiestan júbilo cuando los estudiantes aprenden a comunicarse en aimara en la clase de matemáticas.

El problema del uso de la lengua originaria en la escuela tiene que ver con la experiencia negativa de los padres, que muchas veces fueron prohibidos de hablar en su lengua materna y sufrieron discriminación por expresarse en su idioma. Es por ello que hasta hace poco tiempo los padres de familia no deseaban que sus hijos aprendan en aimara, como se evidencia en las afirmaciones de los docentes.

El problema no solo se presenta en la lengua, sino en todas las manifestaciones culturales y saberes ancestrales de los pueblos originarios, conocimientos que fueron invisibilizados e ignorados por la cultura oficial y relegados al plano familiar (De Sousa, 2010; Peña-Rincón, Tamayo-Osorio, & Parra, 2015). Esa situación llevó a que los estudiantes de la educación rural e indígena tuvieran problemas en el aprendizaje de los conocimientos básicos. El ejercicio del derecho a la equidad en la educación y el respeto a la diversidad cultural, propugna el desarrollo de la EIB, al reconocimiento y revalorización de los saberes ancestrales de las poblaciones originarias.

Es por ello que otra de las situaciones desencadenantes que se resaltan es que los profesores en la clase de matemáticas se inclinan por resolver problemas dentro del contexto de la comunidad donde enseñan, utilizando los saberes cotidianos, lo que ocasiona que los aprendizajes se vuelvan cercanos y significativos para los estudiantes, coadyuvando todo ello a un mayor éxito en el logro de los aprendizajes deseados.

Referencias y bibliografía

Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in*

Mathematics, *75*(3), 311–328. http://doi.org/10.1007/s10649-010-9260-7

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *17*(3–4), 101–118.

De Sousa, B. (2010). *Descolonizar el saber, reinventar el poder*. Montevideo: Trilce.

Di Martino, P., & Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future. In K. Kislenko (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs* XVI (pp. 89-105). Tallinn University.

García-González, M. & Pascual-Martín, M. (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, *8*(15), 133-148.

García-González, M. y Martínez-Sierra, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247-252). Málaga: SEIEM.

Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R., &Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. P. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of 31st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 153–156). Seoul, Korea: PME.

Martínez-Sierra, G. & García González, M.S. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics classes. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 234-250, DOI: 10.1080/14794802.2014.895676.

Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions*. (J. Martínez y R. Mayoral, traductores). España: Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1988).

Peña-Rincón, P., Tamayo-Osorio, C. & Parra, A. (2015). Una Visión Latinoamericana de la Etnomatemática: Tensiones y desafíos. *RELIME*, *18*(2), 137-150. México.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Schutz, P., y Zembylas, M. (2009). Introduction to advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives. En P. Schutz, y M. Zembylas (Eds.), *Advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives*. New York: Springer.

Zembylas, M. (2005). Beyond teacher cognition and teacher beliefs: the value of the ethnography of emotions in teaching. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, *18*(4), 465-487.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La competencia democrática desde ambientes de modelación matemática: reflexiones con estudiantes de grado quinto

Edna Paola **Fresneda** Patiño[1]
Colegio Técnico Menorah IED
Colombia
epfresnedap@gmail.com

Francisco Javier **Camelo** Bustos[2]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
fjcamelob@gmail.com

Resumen

Discutimos en este documento el desarrollo y análisis de una práctica pedagógica que incorporara elementos de la perspectiva socio crítica de la modelación matemática para dar cuenta del desarrollo de la competencia democrática —caracterizada por la alfabetización matemática y el conocer reflexivo—. La propuesta se aborda con un grupo de estudiantes de grado quinto de un colegio —femenino— de carácter oficial de la ciudad de Bogotá a partir del estudio de asuntos relacionados con el medio ambiente. Ponemos en discusión cinco etapas que permiten desarrollar y analizar prácticas pedagógicas en ambientes de modelación matemática. Matizamos retos y posibilidades que experimentamos como docentes e investigadores al asumir el enfoque de la Educación Matemática Crítica en nuestro hacer y sentir como educadores matemáticos que le apostamos a la transformación social desde la escuela.

Palabras clave: modelación matemática, competencia democrática, alfabetización matemática, conocer reflexivo, perspectiva socio crítica, educación matemática crítica.

A manera de contextualización

"¿Cuánto demora en descomponerse una amistad?"

Nicolle, 11 años.

Desarrollar un ambiente de modelación matemática con estudiantes de grado quinto del Colegio Técnico Menorah IED, a partir del estudio de una situación que genere interés en las

[1] Magíster en Educación y Docente del Colegio Técnico Menorah IED.
[2] Doctor en Educación y Profesor de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

estudiantes, es uno de los retos que nos propusimos alcanzar, luego de que Paola —una de las autoras de este documento— finalizara sus estudios de maestría. Lo anterior en tanto una de las preguntas abiertas que nos generó su trabajo de grado (Fresneda & Sarmiento, 2018) se relaciona con las posibilidades de crear, reflexionar e investigar prácticas pedagógicas e investigativas en donde sea posible dar cuenta de la competencia democrática —caracterizada por el conocer reflexivo y alfabetización matemática— desde el estudio de una situación social que movilice las intenciones de la mayoría de las estudiantes en la clase de matemáticas.

Bajo el propósito anterior, y dado que Francisco —el otro autor de este documento— ha desarrollado trabajos sobre modelación matemática, decidimos incorporar resultados de investigación de este campo —tanto a nivel nacional (Camelo, 2017; Salazar, Mancera, Camelo, & Perilla, 2017) como internacional (Barbosa, 2004; Kaiser, & Sriraman, 2006; Araújo, 2009)— para crear espacios donde fuera posible que el grupo de estudiantes asumiera posicionamientos críticos que nos permitieran reflexionar sobre la pregunta que nos habíamos planteado.

Con el ánimo de poner en discusión ante la comunidad académica el trabajo que desarrollamos, en este documento presentamos, en un primer aparte, los entendimientos que incorporamos en torno de la modelación matemática. En un segundo momento, mostramos las comprensiones sobre competencia democrática que asumimos. Para, en un tercer apartado, describir y analizar la práctica pedagógica creada con las estudiantes. Finalmente damos cuenta de algunas conclusiones y reflexiones finales, producto del desarrollo de esta práctica pedagógica.

Marco de referencia

Modelación matemática

Partimos por reconocer que cuando nos remitimos a la modelación matemática en la educación matemática, nos estamos refiriendo a un concepto polisémico que adquiere significado para cada investigador de acuerdo a los marcos de referencia que asume y a los intereses que persigue (ver por ejemplo: Kaiser & Sriraman, 2006; Acevedo & Camelo, 2018). Para este trabajo aceptamos con Barbosa (2003) y Araújo (2009) que es posible en ambientes de modelación matemática contribuir al desarrollo de posicionamientos críticos en los estudiantes, por lo que nos alineamos con la perspectiva socio crítica de la modelación matemática.

Desde tal perspectiva se plantea que las prácticas pedagógicas deben iniciarse en discusiones a partir de problemas del día a día con origen en la realidad de los estudiantes, cuyo abordaje sea cuestionado y reflexionado colectivamente (Araújo, 2012). Además, Barbosa (2004) propone que tales problemas pueden ser definidos de tres maneras diferentes, a las que denomina caso 1, 2 y 3.

Para crear un ambiente de modelación desde el caso 1, el profesor asume la definición del problema a estudiar, su simplificación y recolección de datos, mientras el estudiante se limita a reflexionar el problema y encontrar una posible solución. En el caso 2, las responsabilidades del estudiante se amplían a la definición de problemáticas específicas en un marco de referencia que el docente propone, simplificando y recolectando datos para conducir a resultados (ver por ejemplo: Camelo, Perilla, & Mancera, 2016; Vanegas, & Camelo, 2018). En el caso 3, tanto la formulación como la simplificación, recolección de datos y búsqueda de soluciones son responsabilidad de los estudiantes, siendo el maestro un soporte para las gestiones y decisiones

que se tomen (ver por ejemplo Camelo, 2017; Mancera, Perilla & Camelo 2017).

Bajo estos presupuestos, Salazar et al. (2017) y Camelo (2017) plantean el seguimiento de cinco etapas que recontextualizan desde Burak (1994) y a través de las que se: *i)* selecciona colectivamente un problema o tema a trabajar otorgando gran importancia al macro y micro contexto; *ii)* desarrolla una investigación exploratoria de esa temática o problema seleccionado; *iii)* levanta datos y delinean trayectorias de acción; *iv)* reinterpretan las situaciones soportadas en consideraciones matemáticas; y *v)* analizan críticamente los desarrollos planteados.

Con estas consideraciones decidimos crear un ambiente de modelación matemática y, a partir de su puesta en marcha, analizar si es posible contribuir al desarrollo de la competencia democrática, entendida como se explica a continuación.

Competencia democrática, conocer reflexivo y alfabetización matemática

Reconocemos con Skovsmose (1999) que la Educación Matemática Crítica —EMC— se preocupa por el desarrollo de una educación matemática que sustente la democracia. Lo que quiere decir que la micro sociedad del salón de clase debe encarnar aspectos democráticos en donde se desarrollen competencias que posibiliten interpretar y actuar en una situación social y política determinada. Aceptamos que la democracia no es una realidad efectiva sino un ideal que se quiere —o al menos se intenta— alcanzar.

En tanto que es un concepto abierto, no tenemos la intención de proporcionar una definición tajante, más bien queremos cuestionar la idea de que la democracia está solamente conectada con organizaciones formales y en expresiones como ”el gobierno es democrático”, “la escuela es democrática” o “el salón de clase es democrático”, pues de esta forma se retrata la creencia de que la democracia es externa a la gente —en el sentido en que reside solamente en organizaciones formales y no en las relaciones cotidianas entre las personas que la constituyen— (Skovsmose y Valero, 2012).

Es necesario enfocar la democracia en la esfera de las interacciones sociales; es decir, en aquella en la que día a día las personas se relacionan unas con otras para producir sus condiciones materiales y culturales de vida. Allí, la democracia representa una “manera de vivir”, una acción política abierta llevada a cabo por las personas en la entremezcla compleja de relaciones y procesos locales, nacionales, regionales y globales” (Held, 1995, p. IX; citado por Skovsmose y Valero, 2012).

Para caracterizar el desarrollo de la competencia democrática reconocemos que ésta se ejerce gracias a la alfabetización matemática (Skovsmose, 1997), y que ésta, a su vez, es necesaria para que se desarrolle el conocer reflexivo (Skovsmose, 1997). Desde la EMC, la competencia democrática requiere de la alfabetización matemática para caracterizar la habilidad de calcular y usar técnicas formales y matemáticas.

Como constructo radical enraizado en un espíritu de crítica y proyecto de posibilidad, le permite a personas participar en la comprensión y transformación de la sociedad, de forma que se convierte en una condición para la emancipación social y cultural (Skovsmose, 1997). Es decir, posibilita usar elementos de carácter matemático para interpretar, analizar y tomar decisiones frente a las problemáticas de la sociedad.

Ahora, entendemos el conocer reflexivo como la competencia necesaria para ser capaces de tomar una posición justificada en una discusión sobre asuntos sociales y políticos, lo que quiere

decir que se requiere de esta competencia general para reaccionar como sujetos críticos en la sociedad actual (Skovsmose, 1999). Es necesario buscar esta competencia particular en términos de habilidades y disposiciones —más que como la existencia de un cuerpo de conocimiento explícito o autorizado— y, en consecuencia, entenderla como un proceso, por lo que se usan acepciones como "reflexiones", "reflexionar" o "conocer reflexivo" a cambio del término "conocimiento reflexivo" en sí mismo.

Además, no puede olvidarse que para alcanzar el conocer reflexivo se requiere de la conjugación de los conocimientos matemático y tecnológico, que surgen en el trabajo que se realiza en el ambiente propuesto en la clase de matemáticas a partir del estudio de una situación social que pueda ser relevante para los estudiantes.

Descripción de la experiencia

El desarrollo del ambiente de modelación matemática que creamos junto al grupo de estudiantes de grado quinto de un colegio oficial de Bogotá, considera las siguientes etapas que recontextualizan Salazar et al. (2017) y Camelo (2017) para el desarrollo de tales ambientes.

i) Escogencia del problema o tema a trabajar otorgando gran importancia al micro y marco contexto

Al considerar que uno de los proyectos institucionales del Colegio se enfoca en el cuidado del medio ambiente, en tanto es una problemática social que convoca a su comunidad, decidimos plantear un ambiente guiado por lo que Barbosa (2004) denomina el caso 2. Para ello incorporamos un videoclip en el que un personaje se acerca a un río para dejar caer la basura que lleva en la parte trasera del platón de una camioneta, para posteriormente dirigirse a su vivienda y tomar una ducha; curiosamente, en lugar de agua le cae la basura que había arrojado al río.

Adicionalmente se proyectaron imágenes relacionadas con el tiempo que tardan en biodegradarse residuos que generalmente desechamos sin tener conciencia de su impacto para el medio ambiente. A partir de estas estrategias, que buscaban generar la discusión en las estudiantes frente a esta problemática, resultó interesante notar las reflexiones y comentarios que hacían desde su experiencia. Sin duda, había interés en ellas por este asunto, el cual no era ajeno a sus vivencias, fuera en el colegio o en casa, lo que mostraba un panorama alentador para el trabajo investigativo que se pretendía desarrollar.



Figura 1. Escogiendo un problema a abordar.

ii) Desarrollo de una investigación exploratoria

Con esta contextualización y la discusión en torno de la contaminación, propusimos a las estudiantes definir temáticas que les generaban interés, obteniendo diez opciones de trabajo. Posteriormente ellas elegían aquella sobre la cual deseaban investigar organizándose en pequeños equipos con afinidad de temáticas. Luego de asignar un nombre a su equipo de trabajo, plantearon una pregunta de investigación en relación a su tema de interés, que por supuesto no tuviera una respuesta inmediata y en torno a la cual se realizaría la investigación.

Se definieron estrategias que se debían tener en cuenta para el desarrollo de la investigación desde el cual era necesario indagar en distintas fuentes —internet, libros, periódicos, videos, noticias, imágenes, etc.—, hacer entrevistas a docentes, familiares o amigos que aportarán información nueva. Poner en discusión esa información recolectada para llegar a acuerdos, trabajar en el planteamiento o acercamiento a una posible solución a la problemática planteada y socializar el proceso de investigación para aprender del trabajo realizado por todos los equipos. Con estas pautas, las niñas se distribuyeron algunas funciones y tareas para consultar y seleccionar información que sería discutida y analizada por las integrantes en la siguiente sesión de trabajo.



Figura 2. Investigación exploratoria.

iii) Levantamiento de los datos y delineamiento de trayectorias de acción

Con la información consultada se realiza una discusión para analizar y organizar los datos en busca del delineamiento de reflexiones y reinterpretaciones. Para ello se posibilita el uso de computadores con conexión a internet para socializar e incluso consultar información adicional en relación con el interés de investigación que estaban abordando.

Es interesante notar la curiosidad que evidenciaron las estudiantes en las actividades que ellas mismas planearon para dar cuenta de su trabajo, los cuestionamientos que se generaron y las reflexiones que se van suscitando frente a la situación estudiada, teniendo en cuenta que en sus indagaciones preliminares se reconocen algunos indicios de elementos matemáticos que desde la alfabetización matemática se pueden transformar en argumentos y herramientas que empoderen sus decisiones, reflexiones y posturas en relación a la situación que han definido abordar.

***iv)* Reinterpretación de la situación soportada en consideraciones matemáticas y desarrollo del problema**

Es importante resaltar que al iniciar este proceso de indagación las niñas daban algunas explicaciones a las problemáticas que estudiaron las cuales devenían o de la experiencia o de creencias culturales que son transmitidas sin mayores reflexiones; por lo que, incluso, tales explicaciones aparecieron en algunas ocasiones como mitológicas.

Sin embargo, con el desarrollo del ambiente de modelación, fueron fundamentando sus intervenciones, soportadas en las consultas que hicieron y en las matemáticas, lo que les permitió dar cuenta de, por ejemplo ¿cuántos árboles se necesitan para hacer el papel que una persona consume en una semana?, ¿cuánta basura produce un individuo en un determinado tiempo?, ¿cuánta contaminación produce una persona que ha fallecido?, ¿qué diferencias existen entre un relleno sanitario y un botadero de basura?, entre otras.

En el proceso de aproximación a las respuestas de estos cuestionamientos es posible reconocer indicios de la alfabetización matemática donde elementos de carácter matemático como proporciones, regla de tres, estimaciones de unidades de tiempo y masa, operaciones básicas, datos estadísticos toman lugar en proceso de interpretación de la problemática estudiada. De manera que las reflexiones o argumentos nuevos ya no provienen de la experiencia sino que se sustentan en las matemáticas como herramienta que permite tomar una postura crítica frente a situaciones sociales del contexto que nos convocan a todos.



Figura 3. Consolidación de información

***v)* Análisis crítico de los desarrollos encontrados**

En el proceso de modelación matemática llevado a cabo por las estudiantes en relación a la contaminación y el cuidado del medio ambiente, en el que las preguntas orientadoras fueron formuladas por ellas mismas, resulto ser muy importante para los desarrollos que se buscan en la clase de matemáticas en relación al proyecto educativo institucional en el que es fundamental empoderar a la mujer en la transformación de su contexto inmediato.

A partir de la indagación que realizó cada uno de los equipos y el surgimiento de las matemáticas como parte de la respuesta a los cuestionamientos formulados, en los que la alfabetización matemática toma su lugar para convertirse en herramienta que fundamenta las reflexiones y comentarios de las estudiantes en relación a estas problemáticas sociales que debe ser estudiadas, comprendidas y repensadas por todos en la medida en que seamos conscientes de la manera en que esto nos afecta si no tomamos medidas que permitan preservar la riqueza de

nuestro medio ambiente.

Sin duda, la alfabetización matemática y el conocer reflexivo tomaron lugar en el proceso de modelación matemática llevado a cabo por las estudiantes y esto permite caracterizar el desarrollo de la competencia democrática dado que han logrado establecer conocimientos y reflexiones nuevas que les posibilitan tomar una postura propia en relación al cuidado del medio ambiente y la contaminación desde la clase de matemáticas.



Figura 4. Socialización de avances

Conclusiones y reflexiones finales

De acuerdo al proceso que hemos observado durante el desarrollo del ambiente de modelación matemática, reconocemos un cambio en los roles, tanto de las estudiantes como de la docente, puesto que se ha posibilitado el espacio para que sean ellas mismas quienes formulen posibles preguntas de investigación y, a partir de ellas, exploren e indaguen en búsqueda de ideas que aclaren su conocimiento sobre las problemáticas estudiadas. En su rol de investigadoras, el cual han acogido con mucho entusiasmo, se evidencia que sus apreciaciones y/o declaraciones iniciales frente a los asuntos que se ponen en discusión provienen más desde sus creencias y experiencias, lo que requiere la caracterización de la competencia democrática.

Especialmente en las fases iv y v, se observan indicios de la alfabetización matemática en relación a los asuntos de investigación que cada equipo se formuló, reconociendo que en ellos emergen elementos de carácter matemático que les permiten un mejor análisis y comprensión de la información consultada en la que las intervenciones complementan la experiencia. En esta medida las estudiantes generaron un conocer reflexivo en relación al estudio del medio ambiente y las implicaciones de la contaminación, el mal uso de los residuos e incluso de nuestros recursos naturales dando más valor a las estrategias que se implementan en el colegio y en general en la comunidad en relación a las 3R —reducir, reutilizar y reciclar— dotándolas de sentido desde el proceso realizado en el ambiente de modelación desde la clase de matemáticas.

Desde la perspectiva socio crítica partimos por estudiar una situación social del entorno de las estudiantes en la medida en que se relaciona con sus prácticas y vivencias dado que es un proyecto que se trabaja en la institución y que sin duda mueve sus intereses y motivaciones, posibilitando que se desarrolle de manera un tanto más natural y espontánea, más no como una actividad impuesta por la docente en la rutina habitual de la clase. En este sentido, más que buscar el desarrollo de un contenido matemático, nuestra intención es posibilitar un ambiente de

clase que permita, desde la clase de matemáticas, estudiar una situación social del contexto, a través de un ambiente de modelación matemática, donde emerjan la alfabetización matemática y el conocer reflexivo que caracterizan la competencia democrática al tomar posturas en relación a la problemática de la contaminación y el cuidado del medio ambiente apoyados por las matemáticas y la experiencia de la investigación.

Agradecimientos

Agradecemos muy especialmente a las estudiantes de grado quinto, jornada tarde —2018—, del Colegio Técnico Menorah IED por su enorme compromiso en el desarrollo de las actividades que dieron origen a esta reflexión y a las directivas de la institución por permitirnos pensar y desarrollar otros ambientes de clase que posibiliten cambios en la forma de concebir los procesos de aprendizaje propendiendo por el empoderamiento de la mujer y el estudio y transformación de las situaciones sociales del entorno.

Referencias y bibliografía

Acevedo, D., & Camelo, F. (2018). *Modelación matemática en el encuentro distrital de educación matemática: una revisión documental*. Presentado en Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM-5: «Reflexiones sobre la labor del profesor de matemáticas y estadística», Bogotá.

Araújo, J. (2009). Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 55-68.

Araújo, J. (2012). Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática. *Boletim de educação matemática, 26*(43). Recuperado de http://www.redalyc.org/html/2912/291226275005/

Barbosa, J. (2003). *Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica.* En II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Vol. 2 (pp. 1–13). Santos. Recuperado de http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/material/142008-11-01-15-44-48.pdf

Barbosa, J. (2004). Modelagem matemática: o que é? por qué? cómo? *Veritati, 4,* 73-80.

Burak, D. (1994). Critérios norteadores para a adoção da modelagem matemática no ensino fundamental e secundário. *Revista Zetetiké, 2*(2), 46-60.

Camelo, F., Perilla, W., & Mancera, G. (2016). Prácticas de modelación matemática desde una perspectiva socio crítica con estudiantes de grado undécimo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *9*(2), 67-84.

Camelo, F. (2017). *Contribuciones de ambientes de modelación matemática a la constitución de la subjetividad política* (Doctorado). Universidad Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Fresneda, E., & Sarmiento, S. (2018). *Desarrollo de la competencia democrática en la clase de matemáticas*. Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM, 38*(3), 302–310.

Mancera-Ortiz, G., Perilla-Triana, W. Y., & Camelo-Bustos, F. J. (2017). *El conocer reflexivo en un ambiente de modelación matemática*. Presentado en X CNMEM – Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: história, atualidades e projeções., Maringá, Brasil.

Salazar, C., Mancera, G., Camelo, F., & Perilla, W. (2017). *Una propuesta para el desarrollo de prácticas pedagógicas de modelación matemática en la perspectiva socio crítica*. En Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM-4 "Cultura, sociedad y escuela en la educación matemática del Distrito capital". Bogotá: Gaia.

Skovsmose, (1997). Competencia democrática y conocimiento reflexivo en matemáticas. *Revista EMA, 2*(3), 191-216.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Uniandes.

Skovsmose, O. y Valero, P. (2012). *Rompimiento de la neutralidad política*: El compromiso crítico de la educación matemática con la democracia. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.). Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (pp. 1-23). Bogotá: Uniandes.

Vanegas-García, D., & Camelo-Bustos, F. (2018). Contribuciones al desarrollo del pensamiento crítico en prácticas de modelación matemática: alzas en el SITP. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 11*(1), 211-233.



Desarrollo del pensamiento teórico de estudiantes de undécimo grado mediante un proceso de objetivación del concepto de límite de una función en un punto

Claudia Patricia **Quintero** Quintero
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
claudia.quintero@udea.edu.co
Diana Victoria **Jaramillo** Quiceno
Universidad de Antioquia
Colombia
diana.jaramillo@udea.edu.co

Resumen

Presentamos resultados de una investigación realizada en el marco de un Doctorado en Educación, en la línea de Educación Matemática. El objetivo de esta investigación fue analizar el desarrollo del *pensamiento teórico* de estudiantes de undécimo grado, en un proceso de objetivación del *límite de una función* de variable real en un punto. El diseño metodológico lo realizamos desde un paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico. Se diseñaron e implementaron *Actividades Orientadoras de Enseñanza* enmarcadas en la *Teoría de la Actividad*. Cada una de las estudiantes protagonistas de la investigación en la dialéctica individuo/colectivo, desarrolló cierto nivel —inacabado— de *pensamiento teórico*. Un nivel que fue determinado, además, por las formas particulares de ser y conocer de cada estudiante y, por consiguiente, por sus formas particulares de tomar conciencia progresiva del objeto existente en la cultura.

Palabras clave: Teoría de la Actividad; límite de una función de variable real, conciencia.

Planteamiento del problema

La organización de los contenidos del currículo escolar bajo la influencia de la estructura formal del Análisis Matemático conlleva, en general, a la propensión del empleo memorístico de algoritmos para el cálculo del *límite*, mas no por la apropiación de su concepto. Este hecho se transforma en una problemática que se hace evidente en las dificultades a las que se enfrentan los maestros para la enseñanza de dicho concepto matemático y, especialmente, en las que se enfrentan los alumnos para su aprendizaje. En ese sentido, concordamos con Blázquez, Ortega, Gatica, y Benegas (2006) cuando plantean que el concepto de *límite* surgió históricamente de las matemáticas y no de la didáctica. Así, consideramos que el proceso de formalización del cálculo, consolidado por necesidades concretas en períodos históricos concretos, ha crecido con el avance

de las matemáticas, pero al mismo tiempo ha interpuesto una distancia considerable entre objetos matemáticos –como el *límite de una función*, por ejemplo– y su aprendizaje por parte de los estudiantes del ciclo de enseñanza media, al ser llevado al aula sin adaptaciones curriculares pertinentes para su enseñanza en el contexto escolar.

Así mismo, coincidimos con Cantoral (1995) y Blázquez et al (2006) en que la incorporación del concepto de *límite* al currículo escolar conlleva a una serie de problemas teóricos y prácticos que deben discutirse desde otras apuestas epistemológicas, gnoseológicas, metodológicas y ontológicas a las tradicionales. Consideramos que dichas apuestas deben, además, estar dirigidas hacia una enseñanza que posibilite un aprendizaje con significado y sentido para los estudiantes de forma que, a su vez, fomenten el desarrollo de su *pensamiento* (en el sentido propuesto por Davidov (1988) y Kopnin (1978)).

Davidov (1988) afirma que en la escuela se practica una enseñanza que no propende por el *pensamiento teórico*. En su lugar, la escuela fomenta en los alumnos un *pensamiento empírico*. Es decir, un *pensamiento* que, al igual que el teórico, tiene formas específicas de generalización y abstracción, pero, en la mayoría de los casos, constituye obstáculos para la formación de conceptos. El mismo autor plantea cómo el contenido curricular y los métodos del sistema escolar tradicional en general, orientan la formación de los escolares hacia este tipo de *pensamiento* el cual dificulta la aproximación teórica de los estudiantes al saber.

En el sentido de lo expuesto anteriormente, la pregunta que orientó este proyecto de investigación fue: ¿cómo puede desarrollarse el *pensamiento teórico* de estudiantes de undécimo grado, en un proceso de objetivación del concepto de *límite de una función en un punto*?

Marco Teórico

Como parte del proceso de búsqueda de la respuesta a la pregunta de investigación de la tesis, abordamos un marco teórico que fue el resultado de un tejido entre la Teoría de la Objetivación (Radford, 2006, 2017, entre otros), el desarrollo del *pensamiento teórico* (Vigotsky, 1989, 1991; Kopnin, 1978; Davidov, 1988 y Moura, 2010) y el concepto de *límite de una función* real de variable real (Caraça, 1951; Laurentiev y Nikolski, 1976, entre otros). Este tejido estuvo basado en una fundamentación epistemológica perteneciente al materialismo histórico-dialéctico.

Comprendemos la objetivación, desde Radford (2006, 2017, entre otros) como un proceso social, dinámico, creativo y transformación, donde el aprendizaje surge desde las unidades dialécticas individuo/colectivo, individuo/cultura, cuando el sujeto "*toma conciencia progresiva"* (Radford, 2006, p. 116) de ese algo encontrado y lo dota de sentido.

Según Davidov (1988) contrariamente al *pensamiento empírico*, el *pensamiento teórico* posibilita al sujeto comprender la esencia del objeto estudiado mediante la elaboración de los datos observados dialécticamente. Esto es, hallar las conexiones internas de las propiedades de los objetos analizados, sus contradicciones y singularidades, como parte de un todo integrado. De esta forma, como lo expresa el mismo autor, en el *pensamiento teórico*, el concepto surge como un modo de actividad psíquica del sujeto que le posibilita la reproducción del objeto idealizado, develando su esencia.

El concepto de *infinitésimo* que propusimos a las estudiantes va en vía con los planteamientos de Cauchy y Caraça (1951). Esto es, el *infinitésimo* como una variable que toma valores sucesivos, tan cercanos "a cero cuánto se desee" (Caraça, 1951, p. 219). Como un instrumento de naturaleza dinámica que, por lo tanto, posibilita analizar la infinidad de estados

posibles entre dos estados cualquiera de un fenómeno en movimiento. Desde nuestra postura ontológica, es esta la esencia del *infinitésimo* y por ende, fue a la luz de ella que analizamos su aproximación paulatina por las estudiantes protagonistas de la investigación. Las tres estudiantes se aproximaron al concepto de *infinitésimo* —cimiento del concepto de *límite de una función de variable real*— en imbricación con el concepto de vecindad. En esa misma línea, el concepto de *límite de una función en un punto* que pretendimos que las estudiantes visualizaran y apropiaran, paulatinamente fue, esencialmente el planteado por Caraça (1951). Es decir, el concepto de *límite* como un objeto matemático y como un método que posibilita entender la mutabilidad de los fenómenos. Esto es, el *límite de una función* en *un punto*, como un número resultante de la interdependencia del conjunto de las posibilidades de los valores de la *función* en la vecindad del punto de interés. Un resultado que conlleva un método dialéctico para determinar el estado del fenómeno estudiado, en interrelación con sus estados vecinos. Dialéctico, en primer lugar, porque contiene en sí mismo una de las categorías fundamentales de la dialéctica: el movimiento —en este caso, hallar el *límite de una función* mediante aproximaciones sucesivas— En segundo lugar, porque como método dialéctico posibilita explicar el fenómeno por medio de las concatenaciones de sus aspectos constitutivos. Esta concepción ontológica del *límite de una función*, lejos de ser una concepción simplista, se aparta del formalismo matemático contenido en la definición topológica o en la definición métrica de Weierstrass; un formalismo que puede dificultar la comprensión de su esencia en el nivel escolar de las protagonistas del estudio. Dicha concepción ontológica va en dirección a la planteada por Cauchy, la cual es, también, de carácter dinámico, lo que la puede hacer asequible para los estudiantes de nivel medio.

Diseño metodológico

Realizamos el presente estudio desde un paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico. A la luz del enfoque crítico-dialéctico nos basamos, en primer lugar, en el concepto de dialéctica asumido por Kopnin (1978). Para este autor la dialéctica se concibe como un método de conocimiento de la esencia de los fenómenos de la realidad; fenómenos –naturales y sociales – que están en permanente interrelación, movimiento y cambio. En segundo lugar, concebimos la relación sujeto/objeto de conocimiento, según los planteamientos de Sánchez (1998). Esto es, desde supuestos ontológicos y gnoseológicos, una relación que se entiende como unidad y no como relación bipolar.

Producción conjunta de registro y datos

Para esta, partimos de *Actividades Orientadoras de Enseñanza* (Moura, 2010) realizadas por tres estudiantes de undécimo grado de una institución de carácter oficial. Las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, propuestas por Moura (2010) y su equipo de colaboradores, se enmarcan en la *Teoría de la Actividad*. En este sentido, la *actividad* puede interpretarse como un proceso de humanización a través del cual, el sujeto identifica las necesidades que surgen de su relación con el entorno. En la *Actividad Orientadora de Enseñanza* tanto el maestro como el estudiante son sujetos de la *actividad* misma, pero con necesidades y, por ende, motivos diferentes. Mientras el maestro tiene la necesidad de enseñar, el estudiante tiene la necesidad de aprender, hecho que genera objetivos divergentes. La *Actividad Orientadora de Enseñanza* sugiere pensar, planear y desarrollar los encuentros en el aula de clase, de tal manera que se generen interacciones –entre el maestro y el estudiante– que posibiliten (re)significar el saber matemático socialmente construido. En esa línea, diseñamos ocho *Actividades Orientadoras de Enseñanza* como medio para el desarrollo del *pensamiento teórico* en el proceso de objetivación del *límite de una función* de las estudiantes y, a su vez, para la producción conjunta de registros y

datos. Las ocho *Actividades Orientadoras de Enseñanza* fueron realizadas desde el mes de julio hasta el mes de octubre de 2017. Cada una de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* implicó dos sesiones mínimas. Además del tiempo requerido para el desarrollo en el interior de los grupos conformados por las estudiantes, cada *Actividad Orientadora de Enseñanza* tuvo un espacio de socialización grupal, acción que consideramos fundamental en el proceso de objetivación.

Análisis de los datos

Realizamos un estudio de casos, bajo las consideraciones de Yin (2010) y una triangulación entre los datos, nuestra mirada como investigadoras y el marco teórico para analizar los datos. En esa línea, analizamos el caso de tres estudiantes protagonistas de la investigación. Así, el objeto de estudio fue la manera en que las estudiantes desarrollaron el *pensamiento teórico* en el proceso de objetivación del concepto de *límite,* en el contexto escolar al que pertenecían. Las unidades de análisis fueron los enunciados (verbales y no verbales) de las estudiantes protagonistas de la investigación, presentes en las acciones realizadas por éstas en el desarrollo de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*.

Resultados

Para responder la pregunta de investigación establecimos dos categorías de análisis emergentes: "El Movimiento: Carácter indefectible de la naturaleza", y, "Límite de una Función real de variable real: Una manera particular de conocer la mutabilidad de los fenómenos". En estas categorías analizamos la manera en la que cada protagonista de la investigación, desde su modo particular de ser/aprender, fue aproximándose de forma paulatina al concepto de *límite de una función en un punto*. Consideramos que el grado de desarrollo del *pensamiento teórico* de las estudiantes protagonistas de la investigación, en su proceso de *objetivación* del *límite de una función,* se produjo en concordancia con el proceso socio-histórico del desarrollo del *pensamiento* del ser humano; esto es, a través de la *actividad —práctica y mental—*. Esta *actividad,* traducida al contexto escolar, corresponde a la *actividad pedagógica*, constituida por la *actividad* de enseñanza en dialéctica con la *actividad* de aprendizaje. En esa dirección, fueron las *Actividades Orientadoras de Enseñanza —enmarcadas en la Teoría de la Actividad—* las que posibilitaron a las estudiantes sumergirse en un proceso de *objetivación* de un objeto del saber matemático escolar.

Conocimiento del objeto a partir de su contemplación directa

En el desarrollo de algunas *Actividades Orientadoras de Enseñanza* las estudiantes establecieron una relación con el objeto de estudio en la que primaron juicios aislados, como resultado de una descripción superficial a partir de la interacción con éste. Tal relación se pudo evidenciar, por ejemplo, en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado". En ella, las estudiantes realizaron asociaciones simples de elementos que observaron en la manifestación del fenómeno (el desplazamiento de un cuerpo en una trayectoria rectilínea). Estas asociaciones se hicieron evidentes en expresiones verbales enunciadas por las estudiantes respecto a una de las acciones contenidas en la *actividad* en mención: "explica el desplazamiento del cuerpo (la burbuja) en la manguera":

> "*La burbuja tiene un movimiento que no es constante, pero es continuo*" (Eliza, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 21 de julio de 2017).

> *"La burbuja posee un movimiento rectilíneo variante, más o menos rápido"* (Dana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 21 de julio de 2017).
> *"Esta tiene un movimiento rectilíneo variable"* (Ana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 21 de julio de 2017).

El ejemplo anterior denota una aproximación de las estudiantes al fenómeno a partir de la mera percepción. En otras palabras, el tipo de *pensamiento* que emplearon las tres estudiantes fue un *pensamiento* de carácter *empírico*. Sin embargo, esto no fue un impedimento para que se interesaran por el estudio del objeto, o fenómeno y que, posteriormente, comenzaran a visualizar algunos de sus aspectos teóricos y a transformarlo como parte de una elaboración mental en sus conciencias.

El proceso de Objetivación del límite de una función en un punto

En los dos momentos principales de cada *Actividad Orientadora de Enseñanza* —al interior de los subgrupos conformados por las estudiantes con el fin de resolver las *actividades* propuestas, y en la socialización general de los resultados construidos por cada subgrupo— las estudiantes se aproximaron de forma paulatina al objeto de estudio, por medio de la interacción con sus compañeras de aula y con la maestra, a través de una relación dialógica. Esta relación posibilitó que las estudiantes se posicionaran en el proceso de aproximación a un concepto teórico preexistente en la cultura, constituido en un devenir histórico. Estos dos momentos estuvieron permeados por el trabajo colectivo en el que la voz del otro —maestra o compañera de la *actividad* de estudio— cobró un significado fundamental tanto en el proceso de desarrollo del *pensamiento* de las estudiantes, como en su proceso de objetivación del concepto *límite de una función.* Un ejemplo se encuentra en uno de los momentos de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada "¿Límite?" En ella, Ana le explicó a Dana la necesidad del uso del *infinitésimo* como parte de la solución al problema planteado en la *actividad*. Así, cuando Ana expresó el resultado de su reflexión, Dana logró ver lo que antes no había sido visible para ella. Es decir, cuando Dana enunció, *"¡Ah, claro, yo no había entendido! Es que no es el punto exacto, sino en la… vecindad. ¡Ay, claro!"*, su enunciado apareció como resultado de la influencia de la voz de Ana en su razonamiento. Es decir, el proceso de formación de conceptos en Dana —*infinitésimo y* vecindad— se encontraba en la categoría interpsíquica en la cual la colaboración de su compañera de *actividad* se volvió fundamental en la solución del problema y, por consiguiente, en su proceso de aprendizaje.

Las estudiantes se aproximaron al concepto de *infinitésimo* y de *límite* de una función de forma paulatina y, desde sus particularidades, mediante el desarrollo de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*. En el momento de la socialización de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", por ejemplo, las estudiantes dieron cuenta de su proceso de aproximación paulatina al concepto de *infinitésimo*, mediante enunciados verbales (y gestuales) como:

> *Ah, sí, sí. Si fuera un solo segmento, pues, no cambiaría, estaría ahí quieto…* (Ana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado"-Socialización 28 de julio de 2017).
> *O sea, ¿qué es como una especie de variable, o…algo así?* (Dana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado"-Socialización 28 de julio de 2017)
> *Sí. Es que… vea que según lo que usted dibujó ahí* [señalando la gráfica en la que resalté la variable] *se nota claramente que son todos esos números, pequeñitos que están en la*

> *vecindad del número y, obviamente, están cambiando* (Eliza, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado"-Socialización 28 de julio de 2017).

El concepto de *límite de una función* asumido en la investigación fue asequible para las estudiantes protagonistas; hecho identificado en sus procesos de *objetivación*, especialmente en los procesos de Eliza y Ana. Un ejemplo de lo enunciado se evidenció en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada, "Límite de una Función", y específicamente en la respuesta de la pregunta N°2 (la cual contenía la representación gráfica de la *función* a estudiar). La pregunta a la que hacemos alusión es, "¿Es posible hallar el valor de $f(0)$? Explica". Las respuestas de las tres estudiantes dieron cuenta del establecimiento de una relación entre el concepto de *función*, *infinitésimo* y *límite de la función* dada. Aunque en la pregunta problematizadora no era explícita la acción de hallar el *límite de la función* en el origen, las tres estudiantes emplearon dicho concepto —como aproximaciones sucesivas— como instrumento para hallar la solución a la situación. Las estudiantes, en el proceso de su búsqueda de la respuesta a la pregunta que motivó su *actividad mental*, visualizaron el objeto *límite* como un método para solucionar la situación matemática presentada.

Aproximación a un pensamiento teórico

El movimiento es concebido, desde el materialismo dialéctico, como la propiedad fundamental de la materia; la materia no puede ser concebida sin movimiento. En esa línea, una de las formas del movimiento es el mecánico, el cual puede ser estudiado a través del *límite de una función*. Esta forma de movimiento fue identificado por las estudiantes en *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, como por ejemplo en la denominada "Determinación de la Posición de un Cuerpo en un Instante Dado". En esta, ante nuestra pregunta sobre sobre el fenómeno físico principal identificado por las estudiantes en el sistema burbuja-manguera, Eliza y Ana respondieron:

> *Es el movimiento…Porque es lo que estamos viendo. La burbujita se desplaza por la manguera (*Ana*, "Determinación de la Posición de un Cuerpo en un Instante Dado," 18 de julio de 2017)*
> *El movimiento de la burbuja…Porque es el cambio que la burbuja hace en su recorrido. En ningún momento, la burbuja para (*Eliza, "Determinación de la Posición de un Cuerpo en un Instante Dado,"18 de julio de 2017).

Ambas estudiantes identificaron el movimiento mecánico como fenómeno principal manifiesto en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* en mención, lo que dio cuenta del reflejo del objeto en sus conciencias, como producto de su *actividad mental* en dialéctica con la *actividad práctica*.

En la última *Actividad*, "Límite de una Función en un Punto", en la situación N°5, tanto Eliza como Dana evidenciaron en sus operaciones dificultades para hallar la solución a la situación-problema planteada, debido, principalmente, a la falta de apropiación del establecimiento de relaciones de orden en la recta numérica. Contrariamente, Ana resolvió la situación denotando apropiación del concepto en mención.

Conclusiones

A partir de la triangulación que realizamos durante todo el proceso investigativo, podemos decir, en cuanto al proceso de desarrollo del *pensamiento teórico* de las estudiantes lo enunciado a continuación.

Dana dedujo nexos entre aspectos del *límite de una función*. Sin embargo, algunas de sus operaciones en la última *Actividad Orientadora de Enseñanza,* la cual tuvo un carácter de síntesis, no nos permite afirmar que Dana se haya apropiado de este concepto matemático. Es decir, que haya dotado de sentido el significado de *límite de una función* y lo haya empleado como medio de sus elaboraciones teóricas.

Aunque Eliza presentó dificultades en la solución de algunas situaciones-problema, contenidas en determinadas *Actividades Orientadoras de Enseñanza,* en general ella evidenció un proceso de toma de conciencia progresiva de la esencia del objeto cultural al que se aproximó. Las dificultades que referimos aquí obedecieron, principalmente, a la falta de apropiación de conceptos matemáticos que eran requisitos para la operatividad del *límite de una función.* Dificultades, principalmente, en operaciones algebraicas y en las propiedades de orden en el sistema de los números reales. Éstas se convirtieron, a su vez, en una forma de impedimento para aplicar correctamente el concepto de *límite* en situaciones que exigían su empleo. Sin embargo, durante todo su proceso de *objetivación,* a lo largo de la realización de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza,* Eliza denotó algunas características del *pensamiento teórico* como la deducción de conexiones al interior del objeto (fenómeno/esencia, particular/general) y el uso consciente del *límite* como un método. El cálculo del valor resultante de la interdependencia del conjunto de las posibilidades del comportamiento de la *función* en la vecindad del punto de interés, Eliza lo halló mediante aproximaciones sucesivas, más, con la limitante mencionada anteriormente.

Ana interiorizó la esencia del objeto *límite* y la transformó en un concepto que, a su vez, empleó como medio para la solución de situaciones que contienen dicho concepto; Ana se apropió del concepto. De esta manera, ella dio cuenta de una aproximación a un *pensamiento teórico,* lo cual se evidenció, además de lo concluido en el párrafo anterior, *en* las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* detalladas en la segunda categoría de análisis de esta tesis.

Desde el materialismo histórico-dialéctico, el desarrollo del *pensamiento* en general —y del *pensamiento teórico* en particular— no puede abordarse en términos absolutistas; admite gradaciones. Gradaciones (no lineales) que en el caso de esta investigación obedecieron, de un lado, al mismo carácter dialéctico del desarrollo de todo fenómeno —natural o social— y, de otro lado a las condiciones singulares de las tres estudiantes protagonistas de la investigación. Así, en sus procesos de toma de conciencia progresiva al objeto cultural, Eliza, Dana y Ana realizaron un movimiento de lo particular (cada aspecto del *límite de una función* contenido en cada situación desencadenadora de aprendizaje) a lo general (el uso del concepto de *límite* como método para resolver situaciones que lo contenían) y viceversa (especialmente Eliza y Ana). Así mismo, realizaron reflexiones que les posibilitaron hallar vínculos al interior del objeto matemático. Sin embargo, no nos es posible afirmar que las estudiantes, especialmente Dana, hayan alcanzado un "nivel superior" (Rubinstein, 1974, p. 444) en su *pensamiento teórico.*

Así entonces, tanto desde la concepción ontológica y epistemológica como desde el marco teórico que asumimos, consideramos que, aunque Dana evidenció reflexiones teóricas durante varias *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, pensamos que en su *pensamiento* predominaron características de un nivel empírico. Contrariamente, Ana y Eliza, desde sus particularidades desarrollaron un nivel de *pensamiento teórico* que les posibilitó comprender elementos constitutivos del objeto de estudio, a través del desarrollo de la *actividad* de aprendizaje en que se sumergieron por medio de la realización de las *Actividades Orientadoras*

de Enseñanza. Un nivel que, probablemente, les posibilite aproximarse conscientemente al lenguaje formal del *límite de una función,* posteriormente, en un contexto que lo demande.

Desde nuestros presupuestos ontológicos, gnoseológicos y epistemológicos, identificamos la importancia de transformar nuestras prácticas de enseñanza de las matemáticas (la de otros maestros y también la nuestra) en otras que generen, a su vez, una transformación del *pensamiento* de nuestros estudiantes. Prácticas, como parte de la organización de nuestra *actividad* de enseñanza, que viabilicen el desarrollo de un *pensamiento* que trascienda de la generalización empírica —producto de establecimiento de relaciones mediante la sola percepción— hasta el desarrollo de un *pensamiento* que posibilite un análisis dialéctico del objeto o fenómeno a ser aprendido; esto es, hacia el desarrollo de un *pensamiento teórico*.

Referencias y bibliografía

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Relime, 9*, (2) pp. 189-209. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000200002

Cantoral R (1995). Hacia una didáctica del Cálculo basada en la Cognición. En: *Antologías-I Publicaciones Centroamericanas, 7,* 1-24.ISBN:9977-64-769-0 Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/263010052_Hacia_una_didactica_del_calculo_basada_en_la_cognicion

Caraça, B de J. (1951). O Método dos Límites. En: *Conceitos Fundamentais da Matemática* (pp. 213-227). Lisboa: Livraria Sá Da Costa.

Davidov V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Progreso.

Kopnin, P.V. (1978). *A Dialéctica como lógica y teoría do conhecimento*. Río de Janeiro: Civilização Brasileira.

Laurentiev, M. A y Nikolski, S.M (1976). Límites. En A. D. Aleksandrov. (Ed). *La Matemática*: su contenido, métodos y significado (pp. 108-117). Madrid: Alianza Editorial.

Moura, M. O. (2010). *A atividade pedagógica na teoría histórico-cultural*. Brasilia: Liber Livro.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de objetivación. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número Especial*, 103-129.

Radford, L. (2017). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. En: D'Amore, B. y Radford, L. *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos (pp. 115-136). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rubinstein, S.L. (1974). *Principios de psicología general*. México, D.F: Grijalbo S.A

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Vigotsky (1989). La génesis de las funciones psíquicas superiores. En *El Proceso de formación de la psicología marxista* (pp. 138-155). Moscú: Rusia. Editorial Progreso.

Vigotsky, L. S. (1991). *A Formação social da mente*. São Paulo, Brasil: Martins Fontes Editora Ltda.

Yin, R.K. (2010). *Estudo de caso*: planejamento e métodos. Bookman: Sao Paulo.



Antecedentes, intenciones y porvenires en el Colegio Sierra Morena IED: Un pretexto para desarrollar un ambiente de Modelación Matemática desde la perspectiva socio crítica

Claudia María **Arias**-Arias[1]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas y Secretaría de Educación del Distrito
Colombia
cmariasa@correo.udistrital.edu.co

Julieth Marcela **Tamayo**-Cárdenas[2]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas y Secretaría de Educación del Distrito
Colombia
jmtamayo@correo.udistrital.edu.co

Francisco Javier **Camelo**-Bustos[3]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
fjcamelob@udistrital.edu.co

Resumen

En este artículo hacemos una descripción y contextualización inicial del proyecto de investigación a desarrollar en el marco de la Maestría en Educación con énfasis en educación matemática en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. La intención es mostrar las características que reúnen las situaciones de frontera (Skovsmose, Scandiuzzi, Valero & Alrø, 2011), para posibilitar reflexiones sobre el rol del docente en la identificación de tales situaciones y en la caracterización del contexto como una oportunidad para desarrollar ambientes de Modelación matemática, donde los contenidos matemáticos son mediadores para una mirada reflexiva y crítica del contexto socialmente relevante en que se desenvuelven los estudiantes.

Palabras clave: Educación Matemática Crítica, situaciones socialmente relevantes, situación de frontera y Modelación matemática.

[1] Estudiante de Maestría en Educación y Docente del Colegio Sierra Morena IED.
[2] Estudiante de Maestría en Educación y Docente del Colegio Sierra Morena IED.
[3] Doctor en Educacion y Profesor en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Desde la montaña

En la localidad de Ciudad Bolívar en Bogotá —Colombia— se concentra el 8,7% de la población del Distrito Capital, la cual proviene de diferentes lugares del país (Secretaría de Planeación Distrital, 2015). Allí existe una alta percepción de pobreza, donde los ingresos no superan el valor de la canasta básica familiar[4] y algunas viviendas no cuentan con los servicios públicos elementales —agua y alcantarillado, gas y energía eléctrica—, incluso, menos de un tercio de los hogares posee computador y acceso a internet.

En el año 2015, las autoras de este documento comenzamos la experiencia de ser docentes en el Colegio Sierra Morena IED, ubicado en esta localidad. Allí se acoge a más de 2000 estudiantes distribuidos en tres jornadas —Mañana, Tarde y Fin de Semana— y cuatro sedes educativas localizadas en barrios aledaños —Santo Domingo, Santa Viviana, Potosí y Divino Niño—.



Figura 1. Colegio Sierra Morena IED

La jornada comienza a las 12:15 pm y termina a las 6:15 pm en la sede A del barrio Santa Viviana, construido en la cima de una montaña con climas variados y oleadas de viento que se combinan con un frio pellizcador —ver figura 1—. La ruta de acceso al colegio depende del transporte público en Bogotá. El tiempo de trayecto de la avenida principal —"El cruce"— a la entrada de la institución es incierto, puesto que el transporte es escaso para el sector. Por tanto, coexisten transportes informales de los que hacemos uso frecuentemente —pequeños

[4]Segun el portal web Finanzas Personales, en Colombia la canasta familiar está compuesta por los bienes y servicios básicos que necesita una familia de forma habitual. Para el año 2017, el DANE publicó que un hogar compuesto por 4 personas esta fuera de la escala de la pobreza sí sus ingresos son iguales o mayores a $1´002.480 para que garanticen una canasta básica de bienes alimentarios y no alimentarios, lo que significa que una persona podría sobrevivir al día mínimo con $8.354 (Vale la pena mencionar que el salario mínimo mensual para el año 2018 es de $781.242).

automóviles con 5 pasajeros —sin sumar al conductor— a una tarifa de $1300. Día a día hemos presenciado hurtos, agresiones entre estudiantes y consumo de sustancias psicoactivas que difícilmente la policía consigue evitar, a pesar de realizar el acompañamiento ante los llamados de los miembros de la institución educativa.

No obstante, desde la cima de la montaña contamos con una hermosa vista de la ciudad, los arcoíris se observan en todo su esplendor y las puestas del sol hacen parte de toda una gama de colores. Durante estos tres años de prácticas educativas hemos identificado en las aulas diversidad de estudiantes provenientes de distintos lugares del país o de países vecinos —Ecuador y Venezuela, principalmente—, cada uno de ellos con estilos de vida propios y particulares que nos han impulsado el pensar y reflexionar en una enseñanza y aprendizaje más humanizado, más atento al contexto, basado en el afecto y en la esperanza de apoyar la construcción de un proyecto de vida en nuestros estudiantes.

Sin embargo, hemos sido participes de reflexiones en diferentes espacios institucionales donde se discute acerca de las causas por las que los estudiantes presentan *aparentemente bajo desempeño* en diferentes áreas, destacando, particularmente en matemáticas, que para algunos docentes: i) el contexto —poco acompañamiento de los padres de familia, mal manejo de las tecnologías, presencia de microtráfico, pandillas o grupos al margen de la ley, recursos económicos, etc.— es un obstáculo para el "*buen*" desarrollo de las actividades escolares; ii) el aprendizaje de las matemáticas adquiere un sentido y significado alrededor de un proceso instrumental (Skovsmose et al., 2011), por lo que es poco probable que los estudiantes relacionen sus actividades en el aula de matemáticas con características específicas de su contexto y sus porvenires; y iii) la enseñanza de las diferentes asignaturas se encuentra aislada y no se evidencia un interés por articular el desarrollo de situaciones que partan de las intenciones de los estudiantes considerando sus antecedentes y porvenires.

Ante el anterior panorama, nos preguntamos cómo desde las clases de matemáticas podemos aportar en la reflexión que deben hacer los estudiantes de la IED Sierra Morena para entender su contexto y ofrecer alternativas de transformación que conduzcan a la construcción colectiva de una sociedad más humana. Parafraseando a Gustein (2006, p. 4), cómo preparar a través de la educación matemática a nuestros estudiantes para desarrollar en ellos herramientas que les posibiliten investigar, criticar y transformar la injusticia, los actos y estructuras opresivas —esto es, "leer y escribir el mundo" con las matemáticas—.

¿Por qué pensar en una EMC?

Adoptar los planteamientos de la Educación Matemática Crítica [EMC] como la lectura y escritura del mundo soportado en unas matemáticas que toman situaciones de la cotidianidad en diferentes grupos de estudiantes —con riesgo social, con puestos cómodos, adultos, universitarios, entre otros—, muestra la gama de interpretaciones que lleva a la EMC a pensar en la diversidad y en la necesidad de empoderamiento, justicia social y autonomía que no debe interpretarse únicamente en términos sociopolíticos sino también en términos de experiencias personales (Skovsmose, 2016). Esto es, interpretar y reconocer como docentes de un colegio del sector público de Bogotá —Colombia—, características particulares del contexto que involucren experiencias, sentires y porvenires de los estudiantes.

El Colegio Sierra Morena IED posee características específicas en su contexto, y de este existen múltiples maneras de reconocer situaciones que llegan a ser socialmente relevantes para nuestros estudiantes. Entendemos situaciones socialmente relevantes como el conjunto de situaciones de los estudiantes que incorporan las experiencias, vivencias, intenciones, porvenires, diversidades culturales, aspectos socio políticos del entorno, emociones y diálogos que emergen en sus espacios de interacción (Mancera, Camelo, Salazar, & García, 2014) y que por tanto privilegian situaciones cercanas a la vida de los miembros de una comunidad y que son de orden social, político y económico, con sus procesos históricos que le otorgan significado (García, Valero, Salazar, Mancera, Camelo, & Romero, 2013).

De estas situaciones, las matemáticas podrían surgir como herramientas que favorecen en los estudiantes apropiarse de estas y que les permite tomar una postura reflexiva y crítica. Por lo tanto, nuestra tarea como docentes —en la etapa inicial del proyecto de investigación— se encaminó en aprovechar todos aquellos espacios de interacción en los que se vislumbre situaciones particulares que afecten directamente a los estudiantes y sean de su interés para abordarlas y reflexionarlas soportados en las matemáticas.

En este contexto, cada viernes, dos horas antes de iniciar la jornada escolar esperamos en la puerta del colegio a los estudiantes de grado séptimo, a quienes hemos invitado a participar de manera voluntaria en encuentros alrededor de juegos o actividades que involucren el pensamiento lógico–matemático. Nuestro propósito es reconocer en ellos los aspectos que los interesaron a vincularse al grupo y negociar un camino de construcción colectiva del conocimiento soportado en las matemáticas a partir de sus intenciones —y no es propósito el abordar las dificultades cognitivas que presentan durante las clases de matemáticas habituales—.

Evidenciamos la importancia del contexto de cada estudiante al querer reconocer los motivos que los impulsaron a participar y al reflexionar sobre aquellos estudiantes que decidieron no asistir, puesto que el contexto lo entendemos como "la serie de circunstancias que rodean un evento" (Valero, 2002, p. 50) y que pueden detonar en los estudiantes sentires que los mueve y los estimula a participar —ya sea porque son atraídos por las matemáticas o como una oportunidad de salir de casa, entre otras—.

Además, como el contexto proporciona a los estudiantes la necesidad de afrontar los problemas y establece conexiones con lo que ya conocen —conocimiento matemático u otro— se aumentan las posibilidades de asimilar y reorganizar su pensamiento (Valero, 2002). Por lo que las conversaciones grupales que se dan en los Encuentros Matemáticos Alternativos [EMA] desde *entre-vistas semiestructuradas* como los medios que permiten entre-ver juntos (Kvale, 2011), reflejan aquellas necesidades, intereses e intenciones de los estudiantes para reconocer situaciones de su contexto y abordarlo desde el conocimiento matemático.

El estudiante al abordar su contexto y reflexionarlo, abre posibilidades para constituirse como un sujeto crítico que acciona desde unas intenciones y unas disposiciones. Las intenciones son entendidas como las guías para la acción que provienen de una habilidad y sus disposiciones compuestas por los sucesos históricos que caracterizan al sujeto —Antecedentes— junto con las posibilidades que él mismo visualiza ante su situación social —Porvenires— (Skovsmose, 1999).

Por lo anterior, nos reconocemos con algunos de los planteamientos que hace Guba y Lincoln (1994) con respecto al paradigma de investigación de la teoría crítica, puesto que se analiza la realidad desde la subjetividad y los valores del sujeto de quien la estudia, teniendo en cuenta aspectos históricos, políticos, económicos, sociales, éticos y culturales cuyos hallazgos están mediados a través de discusiones dialógicas y críticas.

"Prefiero estar en el colegio que en la casa"

Una vez involucrados en las conversaciones del grupo EMA, uno de los objetivos es hacer que las interacciones entre los estudiantes sean más espontáneas, permitiendo reconocer las intenciones que los impulsan a asistir al colegio en un horario diferente a su jornada escolar, de manera voluntaria y sin el condicionamiento de obtener alguna calificación extra.

Por medio de la reflexión a registros de audio identificamos aspectos que resaltan en los estudiantes sus intenciones a asistir a EMA, y que no se separan de manera radical del interés por aprender matemáticas.

> ***PROFE JULIETH:*** *Bueno, ya que estamos poco a poco formalizando nuestros encuentros, nosotras no pretendemos que nuestros encuentros sean propiamente un Club matemático, sino obviamente [Angie interviene diciendo "de lo que salga"] exacto, como que sean unos encuentros, unos conversatorios en los que, pues nosotras podamos trabajar cosas que a ustedes les interese y pues sí se dan las matemáticas perfecto y si no pues no. Entonces, tal vez ustedes venían con la intención de un Club matemático —ósea vamos a trabajar matemáticas—.*
> ***LUISA****: Interviene diciendo: "Yo venía por no quedarme en mi casa" [Risas].*
> ***PROFE JULIETH:*** *¿Cómo, tú venías por qué?*
> ***LUISA:*** *[Risas] Por no quedarme en mi casa [más risas].*
> ***PROFE JULIETH:*** *¿Luego qué pasa en tu casa?*
> ***ANGIE****: Es que el problema, es que uno en la casa se aburre haciendo nada, mientras que acá al menos conoce gente nueva y [...].*
> ***LUISA:*** *[Hablando al mismo tiempo] Yo me aburro mucho. Acá al menos usted comienza a recochar.*
> ***JULIAN:*** *La casa es muy aburrida*

Del diálogo anterior se evidencia un bajo deseo de algunos estudiantes en estar en su casa y la preferencia en asistir a actividades como las del grupo EMA, manifestando que la casa no proporciona una diversión o atracción para ellos, que posiblemente el colegio si podría ofrecer. Es así, como emerge la necesidad de indagar por aquellos aspectos que hacen parte de sus antecedentes pensando en especificidades de sus hogares y del barrio en el cual transitan a diario y que contribuye a sus disposiciones.

"Uno camina con terror en las calles"

Los conflictos o situaciones que se presentan en la localidad Ciudad Bolívar hacen que los barrios pertenecientes a esta localidad sean reconocidos por los habitantes de la ciudad como focos de inseguridad, expuestos frecuentemente en noticias por los medios de comunicación. Ante esto, los estudiantes ven con suma naturalidad los puntos de expendio de estupefacientes u "ollas", hurto de celulares, asesinatos, peleas callejeras y poco respeto por la autoridad policial — considerados como una persona del común, pero con un uniforme—. Todas estas, generan

reacciones por el cuidado de sí mismo en no oponer resistencia, en *"no dar papaya"* y en no confiar o esperar que la policía actúe para la comunidad.

> ***PROFE JULIETH**: ¿Para ustedes es muy natural este tipo de corrupción, de consumo de drogas, de asesinatos, de atracos, es muy natural? ¿Es pan de cada día?*
> ***LUISA:** [entre risas] De drogas no.*
> ***TODOS**: Si, si.*
> ***PROFE JULIETH:** ¿En cierto modo, ustedes creen que les afecte en sus vidas este tipo de naturalidad en el barrio?*
> ***TODOS:** Claro, obvio.*
> ***KAREN**: Uno camina con terror en las calles.*
> ***ANGIE:** Porque uno no sabe.*

Este tipo de manifestaciones son similares a un contexto con condiciones y características de una *situación de frontera,* entendida tal situación como el "espacio relacional en el que los individuos ven claramente su entorno social y donde, dada su posición en tal entorno, tienen que encarar las múltiples encrucijadas y dilemas que la diversidad cultural y económica les presentan y les hacen evidente" (Skovsmose, Scandiuzzi, Valero, & Alrø, 2011, p. 103). Estos mismo autores destacan, a través de entre-vistas, como este tipo de encrucijadas son motivos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas y en los sentires de los estudiantes que viven en las favelas de la ciudad de Säo Paulo —Brasil—.

Afirmaciones como *"Quiero llegar lejos", "Quiero entrar a la universidad", "Quiero viajar, conocer Colombia", "Voy a trabajar y ahorrar para..."*, entre otros, son aspectos relevantes que dan cuenta de los porvenires de los estudiantes pertenecientes al grupo EMA, puesto que visualizan un futuro ante su situación social actual, tomando como referentes sus familiares o personas cercanas que han venido construyendo una vida laboral, profesional y que manifiestan un *"vivir bien"*.

Además, los estudiantes nos manifiestan que las matemáticas son útiles y que de alguna manera les podrían permitir alcanzar aquellas metas, ya sea para acceder a una universidad por medio de una examen de admisión, para administrar los bienes que consigan en un futuro, para desempeñarse en determinado campo laboral o simplemente para *"no dejarse tumbar en la tienda del barrio"*.

Lo anterior, nos permite reflexionar y pensar en desarrollar una Educación Matemática que ofrezca este tipo de oportunidades. Además de posibilitar espacios en donde sea posible contribuir a la constitución como sujetos críticos, dentro de una sociedad que relacione su contexto, sus intenciones y disposiciones con el deseo de actuar en la búsqueda de un cambio social de forma colectiva.

Situaciones socialmente relevantes

Caracterizando el contexto de los estudiantes pertenecientes al grupo EMA, los espacios de interacción vislumbran situaciones que son socialmente relevantes tales como la inseguridad, la corrupción y encuentros alternativos distintos al aula para el fortalecimiento del aprendizaje, que desde el diálogo y la negociación podrían ser pretexto para que todos los participantes

definamos cuales podrían llegar a ser abordadas y reflexionadas con el apoyo o soporte de las matemáticas.

Este tipo de acciones se hacen con la intención por generar escenarios que relacionen el lenguaje matemático con la conexión que establecen los estudiantes entre el contexto y el compromiso del conocer reflexivo. Lo anterior, reconoce los constructos para identificar que se manifiesta una EMC, ya que las situaciones socialmente relevantes definen una crisis, una actitud crítica y un interés por buscar alternativas de transformación (Skovsmose, 1999).

Por tanto, indagar en el contexto de los estudiantes, a través del diálogo en entre-vistas permite identificar sus antecedentes, intenciones y porvenires para visualizar situaciones que son socialmente relevantes. Tales situaciones serán, entonces, el pretexto para la creación de un ambiente de modelación matemática —ubicados en la perspectiva crítica—, puesto que se enfoca en el trabajo en grupos a partir de un problema con origen en la realidad, en el día a día, cuyo abordaje sea cuestionado y reflexionado colectivamente (Araújo, 2012) para orientar a los estudiantes en tomar un distanciamiento crítico y comprendan el papel socio-cultural de las matemáticas dentro de la sociedad (Barbosa, 2004).

Reflexiones finales

En el camino investigativo nos surgieron los siguientes cuestionamientos: ¿Cómo reconocer situaciones socialmente relevantes para los estudiantes?, ¿Por qué pensar en un ambiente de modelación matemática como alternativa de trabajo pedagógico?, ¿Qué características debe poseer un ambiente de modelación matemática?

Tales preguntas determinan una extensa y constante reflexión como docentes alrededor del objetivo por desarrollar un ambiente de modelación matemática en la perspectiva socio crítica a partir de las situaciones que son socialmente relevantes para los estudiantes, pues hemos evidenciado que el docente necesita caracterizarse con unas acciones, intenciones y disposiciones que lo permean en su práctica educativa. Es decir, que el docente sería:

- Un sujeto sensible al reconocer la subjetividad de sus estudiantes, sus experiencias y su entorno.
- De mente abierta, porque esta presto a comprender cualquier aspecto o situación que emerja dentro de las interacciones con los estudiantes, que puede alejarlo de su zona de confort o de sus antecedentes en las prácticas educativas y donde los aspectos sociales anteceden a los conocimientos matemáticos.
- Observador, dialógico y negociador cuando se inquieta por una EMC que reúna el contexto, los antecedentes, las intenciones y los porvenires de sus estudiantes y que sirvan para la creación de ambientes de aprendizaje.
- Innovador al reconocer y comprender que la Modelación matemática permite propiciar ambientes de aprendizaje que se articulen con la EMC, y que construye procesos de participación donde los estudiantes colectivamente problematizan situaciones socialmente relevantes y reflexionan sobre el papel sociocultural de la matemática.

Referencias y bibliografía

Araújo, J. (2012). Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática. *Boletim de Educação Matemática*, *26*(43), 839–859. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n43/05.pdf

Barbosa, J. (2004). Modelagem Matemática: ¿O que é? Por que? Como? *Veritati*, *4*, 73–80. Recuperado de http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_veritati_jonei.pdf

García, G., Valero, P., Salazar, C., Mancera, G., Camelo, F., & Romero, J. (2013). *Procesos de inclusión y exclusión*. Subjetividades en educación matemática (Primera). Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/281438062_Procesos_de_inclusion_exclusion_Subjetividades_en_educacion_matematica

Guba, E., & Lincoln, Y. (1994). Paradigmas en pugna en la investigación cualitativa. En N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), A. Goñi (Trad.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 105–117). London. Recuperado de https://es.scribd.com/doc/35269285/Guba-Lincoln-Paradigma-en-Pugna

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the WORLD with MATHEMATICS*. New York: Routledge.

Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.

Mancera, G., Camelo, F., Salazar, C., & García, G. (2014). Aspectos políticos y críticos en las prácticas de modelación matemática escolar. *Encuentro Distrital de Educación Matemática*, *1*, 292–307. Recuperado de http://comunidad.udistrital.edu.co/edem/files/2014/12/MEMORIAS-EDEM-1.pdf

Secretaría de Planeación Distrital. (2015). *Caracterización del sector educativo Localidad de Ciudad Bolívar año 2015* (pp. 1–10). Bogotá, Colombia. Recuperado de http://www.educacionbogota.edu.co/archivos/SECTOR_EDUCATIVO/ESTADISTICAS_EDUCATIVAS/2015/19-Perfil_localidad_de_Ciudad_Bolivar.pdf

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. (P. Valero, Trad.) (Una empresa docente). Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/673/1/Skovsmose1999Hacia.pdf

Skovsmose, O. (2016). What could critical mathematics education mean for different groups students? *For the Learning of Mathematics*, *36*(1), 2–7. Recuperado de http://vbn.aau.dk/files/273291195/What_Could...Ole_Skovsmose.pdf

Skovsmose, O., Scandiuzzi, P. P., Valero, P., & Alrø, H. (2011). Aprender matemáticas en una posición de frontera: los porvenires y la intencionalidad de los estudiantes en una favela brasilera. *Educación y Pedagogía*, *23*(59), 103–124. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4156581

Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. *Quadrante*, *11*(1), 33–40. Recuperado a partir de https://www.researchgate.net/publication/281438072



Viaje hacia el pasado: multiplicación

Fabiola **Delgado Navarro**
Universidad Nacional Costa Rica
Costa Rica
anadelgado15@gmail.com

Marianella **Jiménez Fernández**
Costa Rica
nelajimfer@gmail.com

Resumen

La visión de la etnomatemática sobre los ábacos permite una enseñanza y aprendizaje cultural en las matemáticas que busca estudiar y conocer los ábacos realizado en el siglo XVII por el Matemático John Napier. Son métodos distintos de realizar operaciones básicas como multiplicaciones de manera llamativa para los estudiantes. Permite a los estudiantes cálculos mentales mucho más rápido que manipulando la calculadora, es una forma diferente para enseñar las operaciones básicas a los estudiantes utilizando el ábaco.

Palabras claves: Ábaco, Multiplicación, Regletas, Napier, etnomatemática.

Marco Teórico

Según Ortiz (2004) "las etnomatemáticas analizan los aspectos antropológicos, históricos, geográficos, y psicofilosóficos que inciden en el desarrollo del conocimiento matemático" (p.3), lo que permite ver las matemáticas de manera dinámica y hacer conexiones con otras culturas para un mejor aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Tradicionalmente y en la mayoría de los casos, la enseñanza de las Matemáticas ha seguido métodos rígidos, que se basan en aprender los conocimientos de manera mecánica, como las famosas tablas de multiplicar que se dicen de memoria.

Es importante indicar que existen varios sistemas para resolver las operaciones básicas diferentes a los tradicionales, conocidos como algoritmos alternativos, como lo menciona Ereño (2014), actualmente hay dos corrientes: los algoritmos históricos, utilizados a lo largo de la historia por diversas civilizaciones, y los algoritmos alternativos que se emplean en la actualidad.

Con respecto a los algoritmos alternativos empleados en la actualidad, se encuentran los algoritmos ABN (Abiertos Basados en Números) desarrollado por Jaime Martínez Montero, maestro y doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación.

Martínez (2010), define que la letra "A" se refiere a "Abiertos", es decir, se contrapone a lo clásico, y las siglas "BN" quieren decir "Basados en Números".

Además, Martínez (2011), menciona algunas de las ventajas del cálculo basado en los algoritmos ABN, entre ellos indica que los niños aprenden más rápido, mejora el cálculo mental y se aumenta la capacidad para resolver problemas.

Por otra parte, algunos de los algoritmos históricos son el algoritmo de la rejilla, la multiplicación china, la multiplicación egipcia, la multiplicación y división rusa, la tabla pitagórica, entre otros.

En la civilización Inca se encuentra la yupana. Según Micelli, y Crespo (2012) "los incas no solo hacían uso del Khipu para llevar sus registros, sino que para sus cálculos usaban la yupana como complemento del Khipu." (p. 22). Es la calculadora de operaciones aritméticas utilizada por la cultura Inka para realizar operaciones básicas de cálculo, donde el resultado era ingresado al Khipu que juntos conforman el "sistema informático Inka".

Prem (2016), menciona que "del equivalente al ábaco de otras culturas y a la calculadora o computadora actuales, según se puede apreciar de manera sencilla, era la Yupana el instrumento con el que se realizaban las operaciones de cálculo para luego pasar a registrar dichos resultados en el Khipu" (p.18). Además, existen alrededor de 15 métodos basados en la yupana Inka haciendo calzar la metodología arábiga en el tablero, a diferencia de los demás métodos el "Tawa Pukllay" es el único método que no se basa en la matemática arábiga.

La metodología "Tawa Pukllay" basa su funcionamiento en formas y movimientos, utiliza tanto el pensamiento intuitivo y el lógico, estimulando mayor capacidad cerebral.

Bajo el método Tawa Pukllay se pueden realizar sumas, restas con varios minuendos y sustraendos a la vez, multiplicaciones sin necesidades de saber tablas de multiplicar y divisiones con infinitos decimales.

Como se menciona anteriormente, las civilizaciones antiguas utilizaban distintas maneras de resolver las multiplicaciones y muchas de éstas también contaban con diferentes tipos de ábacos entre ellos el ábaco neperiano y el ábaco promptuario. Vega y Carranza (2016) indican que "el ábaco sirve de soporte para develar propiedades de la estructura aditiva y multiplicativa de números naturales, por lo que su enseñanza es significativa y pertinente para la construcción de dichas estructuras desde las etapas iniciales" (p. 41).

Ábaco neperiano

Maestre y Conejo (2014), afirman que, en el siglo XVII, el matemático escocés John Napier indicó cómo construir un espléndido mueble con dos ábacos para el Monasterio ubicado en Madrid, El Escorial, siendo integrado más tarde al Gabinete de Antigüedades y Monedas de la Real Biblioteca, donde llegó al Museo Arqueológico Nacional en el año 1867.

Maestre y Conejo (2014), mencionan que Napier diseño dos ábacos: el rabdológico o huesos de Napier, ubicado en la parte superior del mueble, y el ábaco promptuario ubicado en los cajones. Sus acabados realizados con hueso contienen diseños geométricos, arquitectónicos y vegetales, mientras que en las puertas se encuentran el escudo de la orden de los Jerónimos del Monasterio de Madrid.

Napier escribió sus métodos de cálculo para los ábacos en el libro Rabdología, publicado después de su muerte en 1617 en Edimburgo.

El rabdológico o huesos de Napier

Maestre y Conejo (2014), indican que el mueble tiene en la parte superior un estuche en forma de prisma de base cuadrada con 60 varillas de marfil rabadas con las tablas de multiplicar del 1 al 9. El nombre de huesos de Napier se debe al matemático que los inventó y que están hechos de marfil. Permite obtener de forma directa multiplicaciones de varias cifras por un multiplicador de una sola cifra. Además, calcular de manera indirecta divisiones y raíces cuadradas.

Ábaco promptuario

Según Maestre y Conejo (2014), en la actualidad, no se ha logrado conocer la existencia de algún otro ábaco de este tipo, por la dificultad de la construcción del mismo. En los cajones centrales del mueble contienen regletas con cada uno con dos números que forman el ábaco promptuario, el método permite obtener multiplicaciones con números superiores a 10 cifras, algo muy elevado para la época.

El ábaco está compuesto por fichas que completan las tablas de potencias grabadas en placas de marfil, entre ellas dos almacenadas en el escuche portátil con los huesos de Napier.

Cálculo de multiplicaciones con el ábaco rabdológico

Cada una de las varillas prismáticas de marfil del ábaco tiene grabadas las tablas de multiplicar del número que está en la parte superior, los huesos de Napier que permite multiplicar números

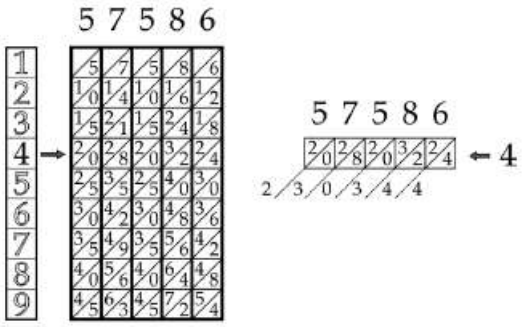


Figura 1

de varias cifras, por ejemplo, el de la figura 1 que multiplica 57586 x 4.

Figura 1: imagen de multiplicación utilizando el ábaco rabdológico

Los distintos huesos necesarios para formar el número 57586, y fijándose sólo en una fila de la varilla numerada del 1 al 9, en este caso, en la del 4. El resultado es 230344 se obtiene al sumar las líneas oblicuas como si se tratara del método de la celosía introducido por los árabes, muy popular en la época de Napier y del cual procede el algoritmo de multiplicación que se enseña en la actualidad en secundaria.

El método de las celosías

Para multiplicar 325 x 47 es necesario realizar una hoja cuadricula de 3 columnas una por cada dígito de 325 por 2 filas y una por cada dígito de 47. En las celdillas obtenidas, y una vez

subdivididas en diagonal, se coloca el resultado de multiplicar el número de la columna por el de la fila, situando sobre la diagonal la cifra de las decenas y, bajo ella, la de las unidades.

Se repite la operación con cada combinación de fila y columna (5x4; 2x4; 3x4; 4x7; 2x7 y 3x7) y se suman todos los números que aparecen entre cada par de diagonales largas, es decir, la cifra de decenas de un cuadrado con la de unidades del cuadrado que está a su derecha, y así sucesivamente.

Si el total pasa de 9, se apunta la cifra de unidades de dicho número y se añade la llevada a las decenas para sumarlas al total de la siguiente columna oblicua. El resultado del producto es 15275. De esta manera, la multiplicación se hace rápidamente, sin riesgo de error y sin necesidad de saber de memoria las tablas de multiplicar.

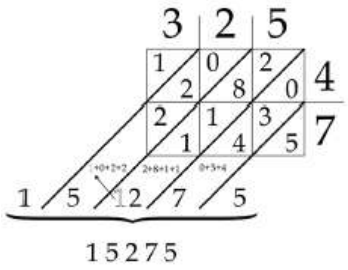


Figura 2

Figura 2: imagen de multiplicación utilizando el método de celosías

Cálculo de multiplicaciones con el ábaco promptuario

El ábaco promtuario tiene dos tipos de regletas, una de 100 verticales numeradas con los múltiplos y 200 con perforaciones triangulares, que para hacer las operaciones se superponen perpendicular a las anteriores.

En la parte izquierda de la figura 3, las regletas de números sus casillas son similares a los de rabdológico o huesos de Napier, con la tabla de multiplicar indicada en la parte superior. El sistema seguido en la disposición de estos múltiplos y la disposición de las perforaciones de las fichas horizontales, que funcionan como las plantillas correctoras de los actuales test. En la parte derecha de la figura 3 en los triángulos sombreados asigna la localización de los productos parciales.

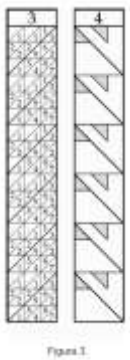


Figura 3: imagen del ábaco promtuario

Al realizar la multiplicación de 325 x 47 una vez colocada las regletas en la figura 4.

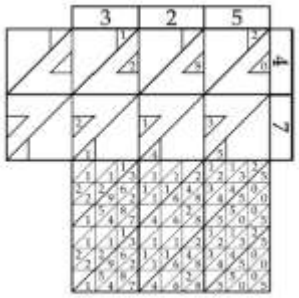


Figura 4

Figura 4: imagen de multiplicación utilizando el método de promtuario

Según el mismo ejemplo de la multiplicación por celosías, solo hay que operar igual que en casos anteriores: sumar los números entre cada par de líneas oblicuas y añadir "la llevada" aparte. Por lo tanto, el ábaco promptuario resuelve la multiplicación de números grandes con sólo estas regletas.

Metodología

Los algoritmos históricos ponen de relieve que las operaciones básicas han sido importantes en las diversas civilizaciones, y que estas tenían sistemas de cálculo desarrollados con los medios y el conocimiento de la época. En general son algoritmos útiles que ayudan a reflexionar sobre cómo se enseña actualmente y poder, en cierta medida aplicarlas en la educación actual, puesto que por lo general utilizaban una forma de operar sencilla.

No se puede negar que el hecho de introducir en el aula una nueva forma de trabajar los algoritmos, puede generar una perturbación en algunos profesores, pero es importante buscar métodos diferentes a los convencionales que favorezcan también al estudiante.

En cuanto a la utilización del ábaco promptuario los estudiantes aprenden de manera distinta disfrutando de las matemáticas por medio del material concreto, simplifican los cálculos a solo operaciones de sumas, también se les concientiza la utilidad de estas tablillas de hace 400 años, donde incluso personas que no sabían leer ni escribir utilizaban el ábaco para realizar sus transacciones comerciales en su diario vivir.

Cabe resaltar que es escasa la información que se encuentra acerca de los ábacos expuestos; por ende, se recurre a la profesora de Matemática Inmaculada Conejo para indagar acerca de los mismos. El taller consiste en la creación del ábaco Neperiano y el Prompturio, por medio de materiales de fácil acceso. Además, se realizan multiplicaciones con estos.

Algunas actividades a desarrollar en el taller son:

1. Cálculo de multiplicaciones con el ábaco Neperiano.

Cada estudiante construye con paletas de colores su ábaco Neperiano:

- Con diez paletas se hacen cuadrados de 1,5 cm x 1,5 cm.
- En una paleta se coloca el signo "x" en el primer cuadrado, y en los demás cuadrados se colocan los números del uno al nueve.
- A las nueve paletas restantes, se les traza la diagonal en cada cuadrado, excepto en el primero, lo que permite separar las decenas de las unidades.

- En el primer cuadrado de cada paleta se colocan los números del uno al nueve, en los cuadrados restante que tienen diagonales se colocan los productos de cada dos unidades, a modo de una tabla de doble entrada.
- Se realizan multiplicaciones de varias cifras por un multiplicador de una sola cifra.

57580 x 4.

6230 x 6.

2. Cálculo de multiplicaciones con el ábaco Promptuario.

- Se le entrega a cada estudiante dos fotocopias como las de la figura del ábaco Promptuario o ponemos las hojas que específicamente vamos a entregar con los números del cero al nueve.
- Los estudiantes recortan cada regleta y las pegan en paletas.
- Se realizan multiplicaciones de varias cifras por multiplicadores de varias cifras
  6237 x 520.
  58945 x 2367.
- El producto se realiza como se indica en la parte titulada "Cálculo de multiplicaciones con el ábaco promptuario".

Conclusión

Se promueve la creatividad en los estudiantes y se sale del esquema que caracteriza a una lección de matemáticas, pues el mismo estudiante debe construir los ábacos con las instrucciones que va brindando el facilitador. El desarrollo de este taller permitió hacer un rico uso de la historia de las matemáticas en la construcción de los ábacos.

Pues se incia con la historia de los ábacos y se logra también relacionar las matemáticas con otras áreas educativas, por ejemplo: historia. Este tipo de metodología sin lugar a dudas mejora el trabajo en equipo entre docentes y estudiantes, además que propicia aprendizajes basados en la multidisciplinaridad..

Referencias y bibliografia

Ereño, E. (2014). *Algoritmos alternativos para la enseñanza de operaciones en educación primaria* (tesis de grado). Bilbao, España: Universidad Internacional de La Rioja.

Maestre, A. Conejo, I. (2015, 3 de marzo). *El ábaco neperiano del Museo Arqueológico Nacional.* Cincuentopía. Recuperado de: http://cincuentopia.com/?s=%C3%A1baco+neperiano

Martínez, J. (2011). El método de cálculo basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón, 63* (4), 95-110.

Micelli, M y Crespo, C. (2012). Ábacos de América prehispánica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 5*(1). 159-190.

Ortiz, L. (2004). Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(2), 171- 185.

Prem, D. (2016). *YUPANA INKA*: Decodificando la Matematica Inka. Lima, Perú: Dharma Jiten.

Vega, J y Carranza, E (2016). *SOROSUMA: iniciando con el ábaco Soroban.* Taller realizado en Encuentro Distrital de Educación Matemática (8-10 de Septiembre 2016). Bogotá DC, Colombia.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La escuela multigrado en México. Un estudio sobre la toma de decisiones docentes durante la enseñanza de las matemáticas.

Gabriela **Zepeda Padilla**
Universidad Autónoma de Querétaro
México
gzepeda18@alumnos.uaq.mx

Erika **García Torres**
Universidad Autónoma de Querétaro
México
erika.garcia@uaq.mx

Resumen

La modalidad multigrado en México fue creada para atender la problemática de analfabetismo en zonas rurales del país. Actualmente, las escuelas primarias multigrado representan el 43.2% a nivel nacional, sin embargo, no cuentan con una propuesta curricular acorde a sus necesidades. El objetivo de esta investigación es analizar las decisiones docentes relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado. Se reporta un estudio de caso, situado en una escuela unitaria en el Estado de Querétaro, enmarcado en una perspectiva sociocultural sobre la construcción de conocimiento matemático. Se reconoce que en la toma de decisiones subyacen saberes que los docentes construyen en múltiples escenarios y que determinan la organización de la enseñanza de las matemáticas en el aula y, por ende, el aprendizaje de los alumnos.

Palabras clave: escuela multigrado, práctica docente, toma de decisiones, saberes matemáticos.

Introducción

La escuela multigrado se caracteriza porque la organización y atención escolar, se realiza en varios grados de manera simultánea, ya sean dos, tres, o bien, los seis grados de educación primaria en una misma aula. Por lo general, las escuelas multigrado se sitúan en comunidades rurales, casi siempre en zonas con presencia de población indígena y con altos o muy altos grados de marginación, lo que se asocia con una infraestructura inadecuada. En muchos casos,

las escuelas no cuentan con recursos y materiales básicos como agua, luz, internet y personal de intendencia (Juárez, 2017; Juárez, Vargas y Vera, 2015).

Entre algunos antecedentes de la escuela multigrado, se puede mencionar que, durante siglos, los maestros atendieron a grupos heterogéneos de niños sin clasificación de grupos, por edad o nivel de conocimiento. Los alumnos aprendían a leer, escribir y a hacer cálculos, con el objetivo de conseguir algún oficio. La separación de grupos por edad o nivel de avance similar surgió a lo largo del siglo XVIII; para el siglo XIX ya se había logrado que esta fuera la forma preferente de organización escolar. La masificación de la escuela elemental fue consecuencia de la percepción de la educación como derecho universal, esto trajo consigo la necesidad de atender a grandes cantidades de alumnos de forma eficiente, por lo que nuevas formas de organización fueron fundamentales para dar respuesta a la creciente demanda (Martínez, 2017).

En México, las escuelas multigrado fueron creadas para brindar cobertura educativa y a su vez dar respuesta a la necesidad de atender y acabar con el analfabetismo, la deserción y el rezago educativo de la población de las zonas geográficas más desfavorecidas (zonas con altos índices de migración, pobreza, marginación, de difícil acceso y poca o nula escolaridad).

Entre los fenómenos presentes en las escuelas multigrado se puede mencionar en primera instancia, una irregularidad en el servicio, pues los docentes desempeñan funciones administrativas y de intendencia, además de trabajar con el grupo (Juárez, 2017), lo cual reduce el tiempo de la jornada laboral, destinado a la gestión del aprendizaje de los alumnos. Asimismo, hay un dominio insuficiente de estrategias de enseñanza para dar atención a la diversidad presente en los grupos, lo que ocasiona que las prácticas docentes estén centradas en la repetición y ejercicios mecánicos. Si bien los docentes en multigrado generan estrategias propias de atención para los grupos diversos, es limitado el uso de recursos y materiales educativos.

La educación que se imparte en esta modalidad representa complejidades tanto en el currículo como en política pública. A nivel curricular, no se incorpora en el Plan de Estudios de Educación Básica (3-5 años, preescolar; 6-12 años primaria; 12-15 años, secundaria) un tratamiento específico acorde a las características y necesidades de este tipo de escuelas, pues solo se atiende a la modalidad de educación general y de educación bilingüe. En ese sentido, los libros de distribución gratutita en Educacuón Básica son de dos tipos, un libro por cada grado, o bien, libros específicos en lengua materna indígena para algunas asignaturas, pero también por grado.

No se cuenta con libros para escuelas unitarias, o para grupos multigrado, pues tampoco se cuenta con planes de estudio que agrupen los contenidos a aprender si se tienen varios grados en un mismo grupo. Además, la formación inicial de los docentes se enfoca en los grupos con características de educación general o bilingüe, no así en grupos multigrado. De este modo, se advierte a nivel curricular que se invisibiliza en la práctica a la modalidad multigrado. En tanto política pública, al no haber un diseño preciso de un Modelo Educativo Multigrado, se hace evidente el desapego en la implementación de las estrategias, principalmente al interior del aula.

En el 2005, para dar respuesta a la creciente demanda de profesionalizar docentes multigrado y buscar alternativas en búsqueda de una intervención que mejorara los aprendizajes de los alumnos, se desarrolló una Propuesta Educativa Multigrado (SEP, 2005). Esta propuesta tuvo como propósito proporcionar a los maestros herramientas funcionales para atender a dos grados o más simultáneamente y tuvo su origen en la sistematización de experiencias exitosas de maestros que trabajaban con grupos cuyas edades, intereses y aprendizajes eran diferentes. En dicho documento, se propuso la organización de contenidos comunes por ciclos (primero y

segundo; tercero y cuarto; quinto y sexto de primaria) y asignatura, lo cual llevó a los docentes a planear un tema común para el grupo, para posteriormente diferenciar actividades por grados, respetando de esta forma el nivel de complejidad de los contenidos, atendiendo simultáneamente a todos los grados. Con esto se evitaba que el docente planeara una clase para cada grado, fraccionara la atención a los grupos y se redujera el tiempo de espera de un grupo para ser atendido por el docente. De este modo, se podría cubrir las necesidades de todos los alumnos utilizando una sola planeación.

Aunque esta propuesta tuvo un nivel de concreción importante a nivel nacional, no derivó en un plan de estudios para multigrado, lo que ocasiona que actualmente, se siga en la misma situación de invisibilidad. Basta con mencionar que, en la última Reforma Educativa en México en el 2013, no se hace referencia ni a la escuela rural multigrado ni a los docentes que en ella laboran (Juárez, Vargas y Vera 2015). Desde la propuesta antes mencionada en el 2005, no se ha desarrollado ninguna otra que ofrezca la organización de los nuevos contenidos curriculares en planeaciones por ciclos.

Los esfuerzos recaen en los docentes y los colectivos que conforman, haciendo ajustes y propuestas a nivel local y regional, las cuales, si bien son sumamente pertinentes, distan también de reconocerse a nivel oficial. En nuestra opinión, este panorama es alarmante, pues parecería que las escuelas multigrado no tienen presencia en el país, no obstante, las cifras de su presencia a nivel nacional son contundentes. De acuerdo con datos ofrecidos por el INEE (2018), para el ciclo escolar 2016-2017 había un total de 97553 escuelas primarias en el país, de las cuales 43.2% era multigrado. En estas escuelas se atendía a 1259312 alumnos, que representaban a 8.9% del total de alumnos de primaria.

Aunado a lo que ya se ha mencionado, existe también una representación social entorno a las escuelas multigrado, como aquellas que no ofrecen una educación de calidad. Se tienden a comparar los resultados de desempeño de docentes y alumnos de escuelas multigrado con las escuelas de organización completa, las llamadas “escuelas regulares”, evidenciando que son mejores los resultados de éstas últimas. En esta investigación, partimos de reconocer que la escuela multigrado no tiene las mismas características que otro tipo de escuelas y, por tanto, la forma de organizar la enseñanza y promover el aprendizaje va adquirir matices importantes, que es necesario evidenciar.

El aprendizaje de las matemáticas en la escuela multigrado

Algunas investigaciones reportan dificultades a las que se enfrentan los maestros para enseñar en las condiciones mencionadas de la escuela multigrado, particularmente la necesidad de reorganizar el currículo de la primaria para abordar temas comunes en los distintos grados, así como implementar formas de organización que reduzcan los tiempos de espera de atención a los alumnos (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015).

Es de destacar que los procesos didácticos que ocurren en los grupos multigrado poseen características particulares, tanto así que pueden ser considerados propios y específicos de la modalidad (Santos, 2011). Esto apunta a centrar la atención en la forma en que, al interior de las aulas, se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los rasgos propios de los determinan y las formas situadas de producción de conocimiento matemático.

Los estudios de Block, Ramírez y Reséndiz (2015); Block, Carrillo y Reséndiz (2017), contribuyen a la comprensión de la complejidad de la enseñanza de las matemáticas en las

escuelas multigrado. Identifican y analizan estrategias para la enseñanza de las matemáticas desarrolladas por maestras con experiencia en escuelas multigrado. Muestran algunas condiciones didácticas que propician el trabajo matemático, con el objetivo que el conocimiento generado sea útil para la práctica docente y los procesos de formación.

Por ejemplo, en Block et al. (2017) se muestra la ayuda que ofrece la maestra a un alumno cuando éste realiza la resta "*50.00 -23.80-7.00*". La maestra le indica al alumno que primero realice la suma de 23.80 y 7.00 para posteriormente a 50.00 restarle la cantidad obtenida. Esta ayuda, sin embargo, detuvo el procedimiento que el alumno propuso de manera inicial, a saber, una resta sucesiva a 50.00 de las dos cantidades.

Al cuestionar el procedimiento del alumno e inducirlo a que realizara el que ella le indicó, la toma de decisión de la maestra, modificó el razonamiento inicial del alumno, en cierta forma, impuso un único significado a la forma de realizar las operaciones. Consideramos que esta orientación y en general, las decisiones que toman los docentes en la práctica, que realizan en función de su conocimiento profesional, influye en el pensamiento matemático de los alumnos.

Algunos autores (Schoenfeld, 2008; Thames y Ball, 2013, citados en Garzón, 2017) han centrado la atención en la toma de decisiones del profesor en los "momentos de enseñanza", aquellas situaciones de una clase en que emergen oportunidades pedagógicas que posibilitan la transformación del pensamiento matemático del alumno, en condiciones en que se manifiesta el diálogo. Stockero y Van Zoest (2013) reconocen que los momentos de enseñanza y la toma de decisiones asociadas pueden ser evaluadas a fin de establecer cómo influyen en el aprendizaje de los estudiantes.

En este contexto es que situamos nuestra problemática de investigación. Partimos de reconocer una modalidad educativa como multigrado en la que las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, adquieren elementos propios que permiten hablar de un conocimiento matemático situado, permeado por las formas de organización escolar, en función de la diversidad presente en el aula. Al ser el docente quien toma la responsabilidad de todo el proceso, surgen algunas preguntas: ¿Cómo se realizan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en aulas multigrado? ¿cuáles son las decisiones que toman los docentes en este proceso? Más aún, ¿qué subyace a la toma de decisiones de los docentes y cómo influyen en el aprendizaje de los alumnos?

Objetivos

General: El objetivo de esta investigación es analizar las decisiones docentes relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado.

Específicos:

1. Comprender qué subyace a la toma de decisiones de los docentes.
2. Comprender cómo influyen en el aprendizaje de los alumnos

Marco conceptual

Este estudio pondrá énfasis en que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que tiene lugar en un aula multigrado, es el resultado de un proceso social y cultural. De este modo, la investigación se inscribe en una perspectiva sociocultural, la cual tiene en cuenta que, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, intervienen factores sociales y culturales en contextos escolares y extraescolares en diversos ambientes económicos, políticos y

multiculturales (Blanco, 2011). Esto implica que la construcción de conocimiento que se realiza en estos escenarios, es una construcción social. Como menciona Planas (2010) "no tiene sentido pensar la actividad matemática en el contexto único de la persona que la realiza sin ubicar esta persona en un contexto amplio de influencias históricas, sociales y culturales que explican en parte sus acciones y el uso de ciertos mediadores" (p.166).

Como parte del marco conceptual de esta investigación, el primer referente teórico que reconocemos es la etnográfica, para sustentar la complejidad de las prácticas docentes. Rockwell y Mercado (2003) argumentaron que en las prácticas docentes intervienen condicionantes más allá del conocimiento pedagógico o del contenido matemático que se posea; están inmersas también las variables institucionales, sociales y personales.

Arteaga (2011) hace referencia a que el trabajo del docente dentro del aula está regido por saberes que regulan su actividad, los cuales se basan en un tipo particular de conocimiento, el cual, frecuentemente, no está formulado o sistematizado o explicado. Esto implica el ensayo y solución de problemas que las condiciones de trabajo presentan, además de una reflexión sobre aquello que el trabajo diario trae consigo. Estos saberes y experiencias nutren la práctica docente y con ello las relaciones que existen entre diversas propuestas curriculares. Además, las relaciones con otros maestros o directores, padres de familia y su propia trayectoria como alumno están inmersas en las experiencias y saberes que le permiten desempeñar su profesión.

Es por ello que consideramos que las decisiones que toma el docente en multigrado recaen sobre sus saberes. Las decisiones se logran caracterizar en los diferentes recursos que usa para lograr su tarea y pueden variar de acuerdo a la organización que se decida usar dentro del grupo, la forma en que los estudiantes se involucren, las estrategias de gestión e intervención, la manera en que se promueva el trabajo individual y colectivo, por nombrar algunas. Por lo tanto, el maestro es considerado como un sujeto "constructor de conocimiento en su tarea de enseñanza" (ídem). Este conocimiento lo construye situado en el aula multigrado, con las características específicas y retos que ahí tiene que afrontar.

El referente teórico que usaremos para caracterizar la toma de decisiones es el propuesto por Schoenfeld (2011), en el cual ha buscado identificar cómo y por qué los docentes toman decisiones en el momento mientras enseñan. El autor desarrolló un modelo de decisiones basado en las herramientas, orientaciones y objetivos de los maestros y la manera en que estos están involucrados en la toma de decisiones dentro de las aulas.

En este sentido los elementos de la teoría son, primero, los recursos. Estos hacen referencia al conocimiento de procedimientos (cómo), conocimiento conceptual (por qué) y las estrategias de resolución de problemas. El conjunto de conocimientos es de crítica importancia para comprender y reaccionar sobre el discurso de los estudiantes. Aunado a estas herramientas se encuentran los libros de texto, tecnología digital, pizarrones, etc.

Después están las orientaciones, las cuales están relacionadas con las disposiciones del docente, creencias, valores y preferencias.

Finalmente se encuentran los objetivos que constituyen las metas a alcanzar durante la clase, pueden ser a corto o largo plazo, así como preconcebidos o surgir durante la lección.

Las relaciones entre estos elementos determinan el proceso de toma de decisiones puesto que las orientaciones no sólo determinan la manera en que se percibe el mundo sino que se establecen también los objetivos que se establecen para enfrentar ciertas situaciones.

En situaciones pedagógicas, un docente entra al aula con un portafolio básico de herramientas, orientaciones y objetivos, para posicionarse frente a sus estudiantes. Posteriormente, las metas son establecidas y el conocimiento profesional es activado (el conocimiento, puede ser conceptual, de procedimiento, de resolución de problemas, rutinas y esquemas). Por ejemplo, una rutina muy familiar a los docentes es la secuencia donde se plantea una pregunta/problema, se obtiene una respuesta de la clase/individual y se evalúa dicha respuesta.

Las decisiones que el docente tome durante los momentos de enseñanza están en función de sus objetivos (los cuales están determinados previamente o emergen conforme la lección se desarrolla), creencias (cuya función es re-priorizar los objetivos en tanto se vayan logrando o nuevas metas surjan) y conocimiento (incluye varias rutinas del docente para alcanzar sus objetivos).

El tercer referente teórico es la Teoría de Situaciones Didácticas. En dicha postura teórica, la noción de *situación didáctica* se entiende como aquella situación construida intencionalmente por el profesor con el objetivo de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado. La situación didáctica se planifica basándose en actividades problematizadoras, cuya necesidad de ser resueltas o abordadas, implique la generación del conocimiento matemático que da sentido a la clase, en un escenario llamado triángulo didáctico, cuyos lados ilustran conjuntos de interacciones entre los tres protagonistas (alumno, saber y docente), cuyas interacciones tienen lugar en el *medio* (Brousseau, 2007, en Block et al., 2017).

Para los fines de esta investigación, interesa reconocer las decisiones que una docente en multigrado debe tomar al momento de crear el *medio* de la situación didáctica, el cual está constituido por problemas, ayudas o intervenciones hacia el alumno y las modificaciones surgidas a partir de las intervenciones y el curso de la clase. Para construir el medio, la maestra debe incluir los saberes del tema, la forma individual de trabajo, incluyendo las modificaciones curriculares apropiadas, propuestas didácticas, formas de interacción con los alumnos, todo dentro del marco institucional al que pertenece y sus respectivas características (atención simultánea a sus alumnos, jornadas laborales cortas, falta de propuestas curriculares oficiales). Estos conocimientos se hacen visibles en la práctica docente, con las decisiones que toma la maestra dentro del salón de clase.

Diseño metodológico y contexto de los participantes

En este panorama, la etnografía posibilita indagar en el entramado de significados de las acciones humanas y conocer las lógicas que subyacen a las prácticas sociales (Erickson, 1989; Geertz, 2002 y 2005; Rockwell, 1986 y 1987, citados en Arteaga, 2011). Para esta investigación, nos permitirá estudiar qué tipo de decisiones debe tomar una docente durante una clase de matemáticas en una escuela multigrado unitaria.

La investigación que se reporta, se encuentra en la etapa inicial, configurando el diseño metodológico de la misma. A través de un enfoque cualitativo y dentro del paradigma interpretativo, se recurrirá al estudio de caso como instrumento metodológico, para analizar la particularidad y complejidad de un caso singular que, para este estudio, consiste en una primaria multigrado unitaria.

La escuela se localiza en el municipio de Pinal de Amoles, Querétaro, México. La comunidad tiene alto índice de marginación y los problemas sociales emergentes son altos índices de alcoholismo, drogadicción, vandalismo y migración nacional y a Estados Unidos.

La escuela es rural unitaria, donde una docente atiende a los 6 grados simultáneamente. El grupo se compone 20 niños: 5 en 2º grado, 6 en 3º, 3 en 4º, 4 en 5º, 2 en 6º. En cuanto a infraestructura, se cuenta solo con dos aulas, una que se utiliza como biblioteca y sala de medios y un otra, como salón para las clases. Tienen una pequeña parcela y unas canchas en malas condiciones. En cuando a recursos tecnológicos, tienen 5 computadora de escritorio y 8 laptops, copiadora e impresora, y aunque cuentan con acceso a internet, éste no funciona. La docente a cargo de la escuela, atiende a los alumnos, realiza actividades de dirección, organiza la limpieza de las instalaciones y están en contacto con los padres de familia. Su formación profesional es de maestra normalista y lleva dos años de experiencia trabajando en esta escuela.

Con este contexto, previo consentimiento informado de los participantes, se tendrá acceso a al aula multigrado, para observar y llevar registro en audio y video de varias sesiones de clase. Adicionalmente, se realizarán entrevistas a la maestra para conocer sus planeaciones, adecuaciones curriculares, materiales utilizados, así como elementos emergentes que surjan del trabajo etnográfico. Se realizarán transcripciones y análisis de las clases grabadas y los resultados del estudio serán devueltos a la maestra y la comunidad.

Consideraciones finales

Se ha destacado la problemática del aprendizaje de las matemáticas en escenarios socioculturales diversos en cuanto a formas de organización escolar, como es la escuela multigrado. Siendo que es una modalidad de la educación básica que atiende a casi el 9% de los alumnos de primaria en México, parecería que por ser una minoría no se visibiliza la importancia que estas escuelas tienen para esta población. La escuela multigrado es la única opción educativa en comunidades de difícil acceso, alto grado de marginación, carencias económicas y problemáticas sociales. Aún sí, el currículo nacional es estandarizado, basado en una concepción homogénea y graduada de los grupos escolares y adecuado para ciertos contextos urbanos. El presupuesto para mejorar la infraestructura y los recursos pedagógicos de los planteles parece inexistente y la preparación especializada que requieren los docentes para la enseñanza multigrado no es prioridad en los programas de actualización o de formación inicial (Galván y Espinosa, 2017). Una escuela multigrado no tiene las mismas características que los demás modelos educativos, pero se insiste en implementar una uniformidad que no tiene, lo homogéneo para todos los centros escolares.

En México, los planes oficiales de estudio pretenden llevar a las aulas contenidos que permiten construir conocimientos a través de actividades, para que esto suceda, el maestro elije y diseña contextos donde dicha construcción se lleve a cabo. A diferencia de esto, la modalidad multigrado suscita procesos de enseñanza que dan respuesta a sus características propias. Los docentes multigrado, entonces, hacen uso de materiales didácticos, planeaciones y organizaciones curriculares que no fueron diseñadas para las necesidades de esta población sino para escuelas de organización completa (1º a 6º). Aunado a esto, la modalidad también demanda atención simultánea del profesor a los estudiantes de diversos grados, lo cual requiere que el profesor sea capaz de organizar y planificar las tareas de tal manera que pueda entretejer los contenidos de las asignaturas y grados, evitando planear y dividir los temas por grados. Por esto, es importante, visibilizar, rescatar y sistematizar las decisiones tomadas por el docente, de tal forma que, los profesores que así lo requieran, puedan replicar los elementos necesarios para mejorar sus propias prácticas docentes.

La visibilización de las escuelas multigrado es necesaria. Arteaga (2011) advierte que también en el ámbito de la investigación educativa se mantiene esta tendencia, de no hacer estudios que den

cuenta de las condiciones escolares de multigrado. Por tanto, consideramos que es necesario impulsar investigación desde la educación matemática que contribuya a caracterizar los procesos de enseñanza y aprendizaje que ocurren en las aulas multigrado, cuando el conocimiento matemático se construye en escenarios con estas características.

Referencias y bibliografía

Arteaga, P. (2011). *Los saberes docentes de maestros en primaria con grupos multigrado*. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A.C.

Blanco, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59), 59-66.

Block, D., Ramírez, M. y Reséndiz, L. (2015). Las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *20*(66), 7111-735.

Block, D; Carrillo, J. y Reséndiz, L. (2017). Una clase de matemáticas sobre problemas de aplicación, en una escuela multigrado unitaria. Un estudio de caso. *Revista Educación Matemática, 29(2),* 99-123.

Galván, R. y Espinoza, L. (2017). Diversidad y prioridades educativas en escuelas multigrado. Estudio de caso en México. *Revista Sinéctica*, *49*, 1-19.

Garzón, D. (2017). Análisis de las decisiones del profesor de matemáticas en su gestión de aula. *Revista Educación Matemática, 29(3),* 131-160.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2018). *La educación obligatoria en México*. INEE: México.

Juárez, D. (2017). Percepciones de docentes rurales multigrado en México y El Salvador. *Revista Sinéctica*, *49*, 1-16.

Juárez, D., Vargas, P. y Vera, J. (2015). Condiciones de trabajo y prácticas didácticas de profesores que atienden escuelas primarias rurales en México. *Revista Senderos Pedagógicos, 6, 15-27.*

Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.

Martínez, F. (2017). Las primarias comunitarias y su desempeño. Consideraciones a partir del estudio comparativo 200-2005. *Cuadernos de Investigación, 23.* México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Rockwell, E. y Mercado, R. (2003). *La escuela, lugar del trabajo docente*. Descripciones y debates. México: DIE-CINVESTAV-IPN.

Santos, L. E. (2011). Aulas multigrado y circulación de saberes: especificidades didácticas de la escuela rural. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 15*(2), 71-91.

Secretaría de Educación Pública (2005). *Propuesta educativa multigrado*. SEP: México.

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think.* A theory of goal-oriented decision making and its educational applications. New York, NY: Routledge.

Stockero, S. L. y Van Zoest L. R. (2013). Characterizing Pivotal Teaching Moments in Beginning Mathematics Teachers' Practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(2), 125-142.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Una propuesta de articulación entre geometría y aritmética desde problemas sobre situaciones contextualizadas

Sandra Liceth **Solarte** Alvear
Universidad del Cauca, Popayán Cauca
Colombia
sandra-lsa@hotmail.com

Luz Ayda **Muños** Mamiam
Universidad del Cauca, Popayán Cauca
Colombia
luzayda@unicauca.edu.co

Ana María **Palacios** Rojas
Universidad del Cauca, Popayán Cauca
Colombia
anamariarojas@unicauca.edu.co

Resumen

El presente poster describe los avances de una investigación más amplia que estudia el desarrollo de una propuesta de diseño curricular que articula Geometría y Aritmética desde la resolución de problemas sobre situaciones contextualizadas de la comunidad indígena Nasa del Resguardo de Huellas Caloto[1], en una Institución Etnoeducativa de modalidad Técnico Agroambiental. El diseño metodológico atiende con una técnica etnográfica y para su desarrollo se tiene cuenta las siguientes fases: Reconocimiento y Caracterización de las Problemáticas del contexto; Análisis de la estructura curricular actual; y Diseño de situaciones problemas contextualizados. De modo particular se establecerá un referente para el trabajo con el núcleo de pensamiento matemático comunitario[2].

Palabras clave: Geometría, Aritmética, Problemas contextualizados, Proyecto Educativo Comunitario (PEC).

[1] El resguardo Indígena de Huellas Coloto, se encuentra ubicado en la zona norte departamento del Cauca, en Colombia.
[2] El Núcleo de Pensamiento Comunitario, hace parte de los núcleos enmarcados en el Proyecto Educativo Comunitario PEC.

Geometría y Aritmética en la educación básica secundarias. Consideraciones para una articulación.

Actualmente en las instituciones educativas, se tienen varias dificultades con la enseñanza y estudio de la geometría; se ha indagado sobre el espacio y sentido que se da de esta en las instituciones educativas y lo difícil que resulta para los docentes encontrar suficientes situaciones o problemas que representen verdaderos desafíos para los estudiantes, es decir, los problemas planteados en las aulas de clases no están acordes a las realidades que vivencian los estudiantes Itzcovich (2005, págs. 9-15); se reconoce también que la geometría es vista como un cuerpo aislado de las matemáticas, donde se da mayor reconocimiento y énfasis a otras ramas en este campo como lo son; aritmética, algebra, trigonometría, cálculo y estadística; y donde por falta de tiempo en algunas ocasiones se deja al final del año lectivo la enseñanza de la geometría. Flores (2010, págs. 11-13).

Esta situación no es alejada a las prácticas diarias que presentan los docentes de matemáticas en la actualidad, debido a que en los diferentes niveles de escolaridad se ve la enseñanza de la geometría como una asignatura aislada de las matemáticas y en ocasiones, cuando se hace la asignación académica del área, de las cinco horas destinadas semanalmente para el caso de los colegios con modalidad académica, se debe dejar una hora para orientar la asignatura de geometría, a esto se le suma que muchas veces el docente que orienta geometría no es el mismo docente que orienta matemáticas y entonces surgen dificultades propias del área, al no desarrollarse situaciones que propicien el acercamiento de estas, ya que cada docente sigue su propio plan de área.

Ahora bien, si se detiene a mirar la situación que se presenta en una Institución Etnoeducativa de zona rural, perteneciente a un resguardo indígena, cuya modalidad es técnica y regida por las directrices del Ministerio de Educación Nacional (MEN), la situación se torna más compleja, debido a que por la asignación académica y la carencia de proyectos pedagógicos integradores, solamente se destinan tres horas semanales para el área de matemáticas, donde se deben desarrollar contenidos relacionados con geometría y estadística además de abarcar los de matemáticas como asignatura principal.

En esta medida es importante que los docentes del área reconozcan el valor que implica la identificación del contexto cuando se labora en instituciones educativas del sector rural con las características antes mencionadas, ya que además de tener en cuenta los lineamientos curriculares del MEN, se debería como primera medida priorizar el Proyecto Educativo Comunitario (PEC); el cual busca según Rodríguez, Chaparro y Martínez (Marzo del 2003, págs. 53-55) responder desde la educación a los problemas y necesidades de la comunidad a través de la clarificación, reconocimiento del potencial social y formación de la comunidad para el plan global de vida; en este mismo sentido el PEC se alimenta de la educación propia y de la multiplicidad de saberes y valores comunitarios, y toma en cuenta los problemas regionales y las alternativas tradicionales y emergentes que existen para enfrentarlo (PEC,1995),

No se debe dejar de lado que el PEC busca también que los jóvenes comprendan mejor los cambios que se dan socialmente, sin que se pierda su identidad como miembros de una comunidad y de un pueblo indígena insertos en una sociedad mayor. Se resalta también que los niños y las comunidades manejan numerosos conceptos y tecnologías relacionadas con el pensamiento matemático; así destacan los siguientes usos que resultan ser una guía para relacionar la teoría con la práctica y para la invención de problemas sobre situaciones reales y

conocer lo que traen los niños a la escuela, así determinar los conocimientos con los que cuentan al momento de la enseñanza y para investigar: la construcción de viviendas, corrales y gallineros; bancos redondos y cuadrados para sentarse; elaboración de burros (camas); croquis de los terrenos; elaboración de chumbes, jigras, tejidos de anacos y ruanas, telares, macanas; en las flautas, tambores, charrascas; forma de cono en algunas chozas y sombreros; trazos de sembrados técnicos; subdivisión de potreros; entre otras.

En este sentido se considera en el PEC que la actividad matemática escolar consiste en el desarrollo de la capacidad mental del niño para resolver problemas cotidianos en su vida y en consecuencia se sabe si el niño aprendió cuando hace un uso social de las matemáticas en su vida diaria y en los procesos comunitarios.

Referencias y bibliografía

Flores, J. A. (2010). *Exploración del impacto de un software dinámico en el aprendizaje de la geometría*. Tegucigalpa: Tesis de maestría.

Itzcovich, H. (2005). Introducción. En H. *Itzcovich, Iniciación al estudio didáctico de la geometría* (pp. 9 -15). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

PEC. (1995). *Proyecto Educativo Comunitario PEC. Morales Cauca*: Asociación de Cabildos Indígenas del Norte del Cauca y Fundación Caminos de Identidad.

Rodríguez A, Chaparro R y Martínez A. (Marzo del 2003). *Proyectos educativos comunitarios en pueblos indígenas*. Fusagasugá, Cundinamarca, Colombia: Kimpres Ltda.

XV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos matemáticos subyacentes al quehacer de los cortadores de papel del gremio de las artes graficas

Rosa Juleidy **Alvarez Diaz**
Universidad del Valle Cali
Colombia Yul.alvarez23@gmail.com

Victoria Andrea **Arango Morales**
Universidad del Valle Cali
Colombia
Victoria.arango@correounivalle.edu.co

Resumen

Esta ponencia tipo poster tiene como propósito identificar los conceptos matemáticos y herramientas utilizadas por los cortadores de papel en máquina guillotina del gremio de las artes gráficas en la ciudad de Cali. Los datos se constituyeron a partir de la observación de procesos de corte usados en guillotina por los operarios del barrio San Nicolás, dichas observaciones se realizaron: dos horas diarias para los tres operarios distribuidas en la mañana y la tarde. Obteniendo registro de audio y notas de campo. Los resultados indican que la actividad de corte de papel tiene inmersa una amplia gama de conceptos matemáticos utilizados empíricamente por los cortadores, ayudando a ampliar la comprensión del quehacer de quienes al realizar su trabajo diario aplican conceptos que tal vez no lograron interiorizar en su formación académica pero que terminan utilizando por los requerimientos laborales.

Palabras claves: matemática, ciencias, etnomatemática, conceptos matemáticos, artes gráficas

Introducción

La siguiente ponencia tipo póster expone el resultado sobre el análisis de las estrategias matemáticas utilizadas por los cortadores de papel en guillotina en la ciudad de Cali. Actividad que se realiza como parte de los procesos finales en la producción de piezas gráficas. Dicha actividad tiene inmersa una variedad de conceptos matemáticos utilizados empíricamente, que por lo regular no son percibidos ni reconocidos explícitamente por los operarios.

Propósito

Identificar los conceptos matemáticos y herramientas utilizadas por los cortadores de papel en máquina guillotina.

Metodología

El presente trabajo investigativo enmarcado en el ámbito de las ciencias sociales y humanas, consiste en un proyecto requerido en la asignatura etnomatemática dentro de la formación de pregrado del plan de estudios Licenciatura en Educación Básica con énfasis en matemáticas de la Universidad del Valle. Para llevarlo a cabo, fue necesario hacer uso de ciertas técnicas de

investigación que permitieran justificar el problema a investigar. El tipo de estudio de acuerdo al enfoque de investigación es cualitativo-descriptivo y para ello hicimos uso de la observación como principal técnica de investigación.

En el barrio San Nicolás de la ciudad de Cali (Centro de las artes gráficas) observamos durante una semana a tres trabajadores pertenecientes a dos empresas del sector. Se realizaron observaciones de dos horas diarias para los tres operarios distribuidas en horas de la mañana y la tarde. Estas, se realizaron a distancia moderada sin participación activa sobre la manipulación del papel.

Cortador 1, **Formación académica:** Básica primaria, **Edad:** 23

Cortador 2, **Formación académica:** Tecnología en sistemas, **Edad:** 18 años

Cortador 3, **Formación académica**: Básica primaria, **Edad:** 42 años

Resultados

El cortador reconoce que es obligatorio poner el papel ordenadamente en la escuadra de la máquina y que si no lo ubica en ese lugar correría el riesgo de que cuando baje la cuchilla el papel quede torcido y mal cortado. Pero no necesariamente reconoce que esa escuadra da un ángulo recto de 90° que permite la mejor posición y estabilidad del papel al momento de cortar.

Durante la observación pudimos tener claro los siguientes conceptos que usan los tres cortadores en diferentes momentos sin importar el tipo y medida de papel:

La traslación. La rotación. La ubicación espacial (momento de acomodar de manera óptima la medida para evitar desperdicio del papel), el concepto de conjunto (al momento de agrupar los tamaños de papel cortado para no confundirse). Suma (cuando suman las medidas de corte correspondiente a un lado del pliego ej: por el lado de 70 cm pueden salir 3 tamaños de 20 cm y queda un sobrante de 10 cm o por el lado de 100 cm podríamos sacar 6 tamaños de 20 cm y sobra uno de 10 cm, optimizando los espacios, generando menos desperdicio). Ángulo recto (permite que el papel quede cortado de manera pareja). División, Multiplicación, Estimación, Aproximación de un valor a partir de un cálculo. (Cuando no están seguros de la cantidad de tamaños al finalizar un corte). Conversión de medida (cuando le dan la medida en mm o mts y debe convertirla a cm), Área, Perímetro y Longitud.

Conclusión

Como observadoras es importante resaltar que el presente análisis nos permite evidenciar que las matemáticas están inmersas en la cotidianeidad de las distintas acciones que realizamos, en este caso los cortadores al realizar su trabajo diario aplican conceptos que tal vez no lograron interiorizar en su formación académica pero que terminan utilizando por los requerimientos dentro de su área laboral.

Referencias bibliográficas

Solanes Ramón, C. (2005) *Manual del cortador con guillotina lineal programable*. Buenos Aires. Banco Interamericano de Desarrollo.



Resolver o no el problema: El rol de las identidades sociales y matemáticas de los estudiantes durante el trabajo en grupo

Teresa **Sánchez**
Centro de Modelación Matemático, Universidad de Chile
Chile
tsanchezvecilla@gmail.com

Nicole **Fuenzalida**
Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile
Chile
nicole.fuenzalida@ciae.uchile.cl

Luz **Valoyes-Chávez**
Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile
Chile
luz.valoyes@ciae.uchile.cl

Resumen

La investigación en educación matemática resalta la importancia del trabajo en grupo en la construcción de conocimiento matemática y en el desarrollo de competencias democráticas. Sin embargo, pocos estudios han analizado cómo el posicionamiento jerárquico de los estudiantes en los grupos con base en sus identidades sociales y matemáticas configura no sólo las posibilidades de participación y acceso durante la resolución de problemas sino además, y fundamentalmente, las posibilidades de resolverlos exitosamente. En esta propuesta analizamos las tensiones que emergen en grupos de estudiantes organizados al azar durante la resolución de problemas. El estudio se realiza en el contexto de un programa de desarrollo profesional en escuelas marginalizadas en Santiago, Chile. Los resultados muestran la forma en la cual la colaboración, el respeto por las ideas de los demás y la responsabilidad por el aprendizaje entre los miembros del grupo configuran las posibilidades de resolver exitosamente los problemas matemáticos.

Palabras clave: Trabajo en grupo, resolución de problemas, identidad, identidad matemática, posicionamiento.

Introducción

Los discursos de la denominada reforma a la educación matemática abogan por una enseñanza centrada en el estudiante (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 1984) que posibilite la construcción colectiva de conocimiento matemático (Yackel, Cobb &Wood, 1991) y

el desarrollo de habilidades matemáticas y de competencias democráticas (Boaler, 2008). Se argumenta que la resolución de problemas en grupos pequeños de estudiantes es un dispositivo didáctico útil para afrontar los problemas de inequidad en el acceso y la participación en la clase de matemáticas (Boaler, 2008). Sin embargo, diversos estudios muestran las tensiones que se generan entre los estudiantes durante el trabajo en grupo (Esmonde, Brodie, Dookie & Takeuchi, 2009), así como las dificultades de los maestros para promover dicho estilo de aprendizaje (Yackel, Cobb & Wood, 1991). En primer lugar, tales tensiones emergen como resultado del posicionamiento jerárquico de las identidades sociales en la clase de matemáticas (Esmonde, 2009). Esmonde, Brodie, Dookie y Takeuchi (2009) muestran la forma en la cual la raza, la clase social y el género de los estudiantes influyen en los roles que éstos asumen durante el trabajo en grupo. En segundo lugar, tensiones emergen como resultado de las diferencias percibidas por los estudiantes en su estatus académico (Bianchini, 1999). La investigación muestra que estudiantes posicionados como "inteligentes" y "buenos para las matemáticas" tienden a dominar las discusiones y decisiones durante el trabajo en grupo pequeños así como en discusiones que involucran a la clase en general (Cohen, Lotan, Scarloss & Arellano, 1999). Así pues, antes que construir una respuesta efectiva al problema de la inequidad en la clase, el trabajo en grupo podría exacerbar tensiones afectando tanto la participación de los estudiantes así como sus oportunidades de aprendizaje (Bianchini, 1999).

Yackel, Cobb y Wood (1991) señalan la escasez de estudios que documenten los procesos involucrados en el trabajo en grupo en la clase de matemáticas. Pocos estudios han analizado la forma en la cual el posicionamiento jerárquico de los estudiantes con base en sus identidades sociales y matemáticas determinan no sólo las posibilidades de participación y acceso durante los procesos de resolución de problemas en grupo, sino además, y fundamentalmente, las posibilidades de resolver exitosamente dichos problemas. En esta propuesta exploramos esta problemática. El estudio que presentamos se desarrolla en el contexto del programa de desarrollo profesional *Activando la Resolución de Problemas en el Aula*, *ARPA*. En tanto que uno de los dispositivos propuestos por *ARPA* para fomentar la resolución de problemas es el trabajo en grupo, su implementación en escuelas chilenas durante los últimos 3 años ha constituido un laboratorio importante para estudiar la problemática anteriormente descrita. En este sentido, la pregunta que orienta la investigación que presentamos se plantea de la siguiente manera:

¿De qué manera el posicionamiento jerárquico de los estudiantes con base en sus identidades sociales y matemáticas durante el trabajo en grupo configura los procesos de resolución de problemas matemáticos?

Marco Teórico

Identidades sociales y matemáticas

Las nociones de identidad y poder son fundamentales en la compresión del fenómeno objeto de análisis. En esta propuesta asumimos que la *identidad* se (re)crea en los espacios discursivos que configuran las formaciones sociales tales como la escuela. A partir de diversas prácticas discursivas se crean *categorías o posiciones* las cuales crean subjetividades, es decir, vuelven a los individuos *sujetos* (De Freitas, 2010). Por ejemplo, discursos normativos dominantes en el campo de la educación matemática crean categorías particulares de estudiantes, tales como "competente", "hábil" o "lento". Tales categorías son contingentes e históricas y el acceso a ellas no es automático; por el contrario éste se encuentra mediado por las relaciones de poder en la escuela. Así, por ejemplo, el acceso a la categoría "hábil en matemáticas" se encuentra

condicionado por otras categorías tales como "ser negro" o "ser mujer" (Valoyes-Chávez, 2017). Asimismo, Martin (2006) define *identidad matemática* como "las disposiciones y creencias que los individuos desarrollan acerca de su habilidad para participar y desempeñarse efectivamente en contextos matemáticos y para usar las matemáticas para cambiar las condiciones de vida" (p. 207). Con base en la discusión anterior, en esta propuesta asumimos que la identidad matemática comprende además las creencias y posicionamiento que los otros con los cuales interactuamos-maestros, compañeros, directivos, familiares-producen discursivamente sobre nuestra propia habilidad matemática. De Freitas (2010) señala la dualidad involucrada en el proceso de posicionamiento. En primer lugar, al ser asignado a una *categoría* creada por los discursos normativos dominantes en una formación social, el individuo se vuelve inteligible como *sujeto* y al mismo tiempo gobernable en un sentido foucaultiano. En segundo lugar, al atarse a dichos discursos, el individuo se auto reconoce y posiciona en dicho espacio discursivo. Así pues somos posicionados por otros al tiempo que nos posicionamos nosotros mismos al reconocernos en los discursos normativos dominantes. Es en este sentido que entendemos la noción de poder, no como "algo" que se posee sino que circula en las formaciones sociales y que le permite a los sujetos posicionarse, posicionar a otros y resistir y negociar tales actos de posicionamiento.

Un modelo del trabajo en grupo durante la resolución de problemas

En el currículo chileno el trabajo en grupo es un aspecto crítico no solo para la construcción de conocimiento matemático, sino además para el desarrollo de competencias ciudadanas (MINEDUC, 2016). En este sentido, *ARPA* modela el trabajo en grupo de acuerdo con cuatro elementos fundamentales: (i) *La organización al azar* de los estudiantes en los grupos como una forma de garantizar oportunidades de participación igualitaria entre estudiantes con diversos noveles de desempeño matemático; (ii) *colaboración*, entendida como las acciones e interacciones entre los estudiantes que permiten adelantar exitosamente una tarea; (iii) *respeto* por las ideas y aportes de los demás; y (iv) *responsabilidad* con el aprendizaje de cada uno de los miembros del grupo. Los últimos tres elementos articulan la noción de equidad relacional introducida por Boaler (2008).

Metodología

El estudio que presentamos se realizó en el contexto del Programa de Acompañamiento y Acceso Efectivo a la Educación Superior, PACE. Desde el 2014, esta iniciativa gubernamental, en alianza con universidades locales, busca responder al problema de la inequidad en el acceso a la educación superior de estudiantes en condición de pobreza en Chile. En la Universidad de Chile la iniciativa PACE-*ARPA* se desarrolla en 7 liceos ubicados en contextos marginalizados en Santiago. Durante un año lectivo los maestros asisten a 8 sesiones de taller *RPAula*. En cada sesión, los maestros planifican y adaptan problemas para posteriormente implementarlos en sus clases de acuerdo con el modelo *ARPA*, el cual consta de 4 etapas: Entrega, Activación, Consolidación y Discusión. Cuando un grupo tiene dificultades resolviendo el problema, se le da una simplificación. Si por el contrario logra resolverlo, se le da una extensión.

Participantes

Francisco[1] es un maestro de matemáticas con 5 años de experiencia docente, todos de los cuales habían tenido lugar en "Altas Colinas", uno de los liceos del programa PACE-*ARPA*. Como parte de un estudio exploratorio cuyo objetivo era identificar desafíos en la implementación de

[1] Todos los nombres son pseudónimos.

ARPA en contextos marginalizados, le solicitamos a Francisco seleccionar un(a) estudiante que considerara tendría problemas con el aprendizaje de las matemáticas durante el año con el propósito de apoyar justamente su proceso de aprendizaje. Juana, estudiante de segundo año de la media fue seleccionada por Francisco, quien la posicionó como desmotivada e incapaz de aprender matemáticas.

Técnicas de Recolección y Análisis de Datos

Los datos utilizados en este estudio consisten en 12 videos de clases en las cuales Francisco implementaba los problemas diseñados en las sesiones del taller *RPAula*. Una cámara ubicada en la parte posterior del salón, capturó las dinámicas e interacciones de todos los grupos durante 6 clases en los cuales los estudiantes resolvían problemas en grupo. La segunda cámara filmó las interacciones en los grupos en los cuales Juana participaba durante estas 6 sesiones. Para el análisis de los datos se utilizó la técnica de *Videoanálisis* (Knoblauch & Schnettler, 2012). Este enfoque interpretativo analiza las interacciones sociales registradas en un ambiente "natural" asumiendo que los significados de tales interacciones son construidos colectivamente entre los sujetos involucrados y los observadores externos. Como parte de un análisis secundario, las autoras observaron grupalmente los videos y clasificaron las clases entre aquellas en las que el grupo de Juana resolvía el problema y en las que no. Posteriormente seleccionaron episodios significativos en relación con las categorías de *colaboración, el respeto y la responsabilidad* descritas en el marco teórico, para identificar cómo dichas categorías configuraban las posibilidades de resolver o no el problema.

Resultados

A partir del análisis realizado es posible constatar la forma en la cual las identidades sociales y matemáticas de los estudiantes parecen configurar las posibilidades de resolución de los problemas matemáticos propuestos. Los estudiantes de Francisco son homogéneos en términos raciales, étnicos y de clase; en este sentido, las diferencias en los actos de posicionamiento en los grupos pequeños surgen a lo largo de líneas de género y de las identidades matemáticas. A continuación analizamos dos de las clases en las cuales los estudiantes resolvieron problemas matemáticos. En la primera clase, el grupo no resolvió el problema mientras que en la segunda el grupo encuentra la respuesta del problema inicial y su extensión, la cual también se resuelve exitosamente. Ambos grupos están constituidos por un estudiante hombre y tres estudiantes mujeres, una de las cuales es Juana. En cada caso, analizamos las interacciones entre los integrantes del grupo que configuran el proceso de resolución de los problemas en relación con las categorías de colaboración, respeto y responsabilidad.

Clase 1: El problema del Crecimiento

Posicionamiento e identidades matemáticas. En el grupo conformado por Juana, Pedro, Flor y Carla los diferentes actos de posicionamiento entre los estudiantes configuran la colaboración, el respeto por las ideas y la responsabilidad por el aprendizaje, como mostramos a continuación. Desde el comienzo de la actividad, Pedro, quien luce incómodo, conversa, se ríe y bromea constantemente con compañeros de otro grupo cercano conformado por 3 estudiantes hombres y una mujer. Después de leer rápidamente el problema, Pedro se posiciona negativamente en el grupo:

> P: (Señalando el problema) Esto es materia de Harvard. Ya chiquillas, ustedes lo hacen y yo escribo. Es que no sé hacerlo.

Al posicionarse como incapaz de resolver el problema, Pedro condiciona su participación en el proceso de solución. Por su parte, y sin tomar en cuenta a Juana, Carla y Flor, quienes están sentadas frente a frente, leen y discuten el problema entre ellas. Después de un momento en el que parecen no entender el problema, Flor se dirige a Juana:

F: ¿Entendiste algo?
J: ¿Me ves cara de poder entenderlo? Yo sólo pongo cara de inteligente, no es que yo sepa

Al igual que Pedro, Juana construye discursivamente una identidad matemática negativa. Esta representación sobre la habilidad matemática de Juana es además compartida tanto por la clase como por el maestro. En este caso, le permite a Junan aislarse del proceso de solución colectiva para concentrarse en otras actividades. Flor, por su parte, conversa sobre el problema con sus amigas, quienes han quedado ubicadas en otro grupo. Dirigiéndose a Carla le comenta:

F: ¿Viste? Si yo funciono bien con ellas no más, o si no la cabeza no me da.

Así, Pedro, Juana y Flor limitan sus posibilidades de participación y colaboración, creando de esta manera una situación de in(ex)clusión (García, 2014) en el grupo. La dinámica de trabajo en general se basa en la integración entre Carla y Flor, a quien los miembros del grupo le han otorgado el liderazgo del grupo al posicionarla como la más hábil. Aunque inicialmente Flor se resiste a asumir dicho posicionamiento, ella termina liderando las interacciones con Francisco y es la encargada de valida o ignorar los aportes de sus compañeros, cuando éstos esporádicamente deciden intervenir.

Colaboración, respeto y responsabilidad. Diversos episodios muestran las dificultades para establecer relaciones de colaboración, respeto y responsabilidad durante el proceso de resolución del problema. El siguiente episodio evidencia la forma en la cual Flor desestima los aportes de los demás miembros del grupo, aún cuando estos podrían en efecto conducir a la solución del problema, y prefiere acudir a la autoridad de Francisco:

C: Es que la cuestión es que n+10 en la primera parte da 14 y en la segunda parte da 20; entonces sería mayor en Andrés, pero cuando empezamos con 10, la 2n+3 nos da más, entonces debería ser ésta (señalando el cuaderno).
J: Pero es que a veces los resultados cambian y aunque veamos aquí que sea el mayor, a veces este mismo que está acá, que es el mayor, es el menor en este caso.
C: Pero es que ahí te está mostrando los números que son menores.
J: Si, pero por alguna razón las dos dicen “mayor”. Está dando a entender que los dos son mayores. Tenemos que encontrar cuál es el verdadero entre los dos que es mayor.
P: ¿Y si suman todo esto?
F: ¡De qué estás hablando, Pedro!
P: Pero si suman ese (señalando el cuaderno de Carla), si suman todo va dar el mayor, ¿No tiene sentido? Después va a ser ese y ahí van a estar (idea sin terminar).
F: (Dirigiéndose a Pedro, sarcásticamente) ¡Ah, claro! (Dirigiéndose a todo el grupo) Ya, llamemos al profe no más.
C: (Dirigiéndose a Flor) Pero igual podrías preguntarle lo que dije.

Así, el respeto por las ideas de los demás está ausente en la discusión anterior. Es difícil para los estudiantes establecer un diálogo que permita comprender y construir sobre los aportes de los

demás. Más aún, antes que un interés real por el aprendizaje y la comprensión de cada uno de los miembros del grupo, existe una preocupación por el cumplimiento de las reglas establecidas por Francisco, de acuerdo con la cual todos deben entender y estar de acuerdo con la respuesta. En este sentido, Carla increpa a Pedro:

C: ¡Oye loco, ya pues pon atención! Después nos van a preguntar a todos y no vas a saber nada. ¿Qué estás haciendo? Estás puro conversando. (Dirigiéndose a Flor) Por eso no quería que nos tocara con un hombre.

Clase 2: El problema del "Monito Melocotonero"

Posicionamiento e identidades matemáticas. Durante la segunda clase, el grupo está constituido por María, Naty, Juana y Diego. Los miembros del grupo trabajan individualmente hasta el momento en el cual Francisco reconoce la estrategia de Diego y lo posiciona con autoridad matemática ante las compañeras. Esta acción define tanto la actividad y las interacciones así como la posibilidad de resolver el problema exitosamente:

> F: Está bien, 28. *Ese* es el análisis (señalando el cuaderno de Diego). Vas bien tú, Diego. Explícale a las compañeras cuál es el análisis.

Diego acepta el posicionamiento otorgado por Francisco y toma el liderazgo del grupo, organizando la actividad, dando explicaciones y tomando en cuenta los aportes de las demás estudiantes. Este posicionamiento también es reconocido y aceptado por las estudiantes, ilustrando el carácter dual del acto de posicionamiento (De Freitas, 2010):

M: ¿Cómo lo hiciste Diego?
D: Es sacarle los ¾ de 60 porque tienen que dividir 60 entre 4, son 15.
M: A ver, 60/4.
D: Da 15.
N: Sí, da 15.
D: Después multipliqué por el número de arriba y da 4 multiplicado por 7, 28, después se come 1 (melocotón) y da 27.
J: ¡Ah! Ahí está.
D: Y ahí después seguís.
N: A ver. 44 dividido entre 11 me da 4, y eso lo multiplico por 7. Me da 28 y se comió 1, me da 27. ¡Ah, ya caché!
J: ¡Ah, ya caché!

Colaboración, respeto y responsabilidad. El posicionamiento anterior reguló las interacciones, las cuales condujeron a la solución del problema. Durante este proceso, cada miembro del grupo participa, aporta ideas y construye sobre las ideas de los demás, tal y como se evidencia en el siguiente episodio:

J: ¿Y si hacemos primero todas las cuestiones que están aquí y vemos qué salen de esos resultados?
D: Acá yo lo dividí entre 4 para que me dé ¼ y me dio 9,125. Ese sería ¼ de eso.
J: Sí
D: Yo tenía pensado (idea sin terminar). ¿Viste que dice que se come un melocotón?
J: Sí, dice que se come uno.
D: Había pensado restar un melocotón primero y después dividir. Porque quedaría 74 y quedaría en 37. Y después podríamos seguir.

J: Y ahí no hay (idea sin terminar). (Dirigiéndose a Diego) Intenta hacer eso.
D: (Hace cálculos) Igual daría decimal.
J: ¡Chuta!
N: (Leyendo el problema) ¡Ah! Ahora hay que ver el orden, ósea hacer lo mismo, pero ver en qué orden tiene que ir. Si, ahí sale, el orden que usó, para saber qué le quedará hasta llegar a 1. Ósea hay que ordenarlo y sacarlo y ordenarlos hasta que llegue a 1.
D: ¡Ah!
M: ¡Ah! ¡Así como lo hicimos acá!
N: Como lo hicimos ahí, pero hay que sacar el orden.
J: ¡Sí, antes les dije po!
D: Es que (inaudible)
J: Te confundiste.
D: Ya. ¡Ahora lo sacamos!

La colaboración y el respeto por las ideas y aporte de los demás, configura en este caso la actividad matemática realizada. Adicionalmente, se evidencia la responsabilidad que los miembros asumen por el aprendizaje de los demás. El contraste al posicionamiento negativo de Juana en la clase 1, dicha responsabilidad y el reconocimiento de sus aportes parecen motivar su participación y confianza en su habilidad para resolver problemas. Es así como durante la plenaria, Francisco posiciona positivamente al grupo frente del curso y les pide resolver el problema en el tablero. Es Juana quien, con ayuda de sus compañeros, explica el procedimiento a la clase. Tal acto de posicionamiento otorga a los miembros del grupo motivación y confianza para aportar a la construcción del conocimiento matemático del curso. El grupo logra resolver tanto el problema inicial así como la extensión.

Discusión

En este estudio indagamos la manera en la cual el posicionamiento jerárquico de los estudiantes con base en sus identidades sociales y matemáticas durante el trabajo en grupo configura los procesos de resolución de problemas matemáticos. En primer lugar, los resultados evidencian justamente la forma en la cual las identidades de género emergen como un aspecto que determina las interacciones entre los estudiantes. Aunque en los dos casos considerados la composición de los grupos es similar en términos de género (1 hombre, 3 mujeres), las diferencias en el posicionamiento dentro del grupo varían considerablemente. En el primer caso, y aunque la investigación muestra el dominio de "lo masculino" en las matemáticas (Esmonde, 2009), la diferencia numérica entre hombres y mujeres parece tensionar las interacciones en el grupo. Ni Pedro ni Carla se sienten cómodos con la configuración del grupo en términos de género, lo cual condiciona la participación. En el segundo caso, es una autoridad externa -el maestro- quien posiciona al estudiante hombre como autoridad matemática, posicionamiento reconocido y aceptado por las demás integrantes. Este simple acto parece contribuir a consolidar la actividad matemática que conduce a la solución del problema. Lo anterior no es más que una muestra de las complejidades de las interacciones durante los procesos de trabajo en grupos entre los estudiantes.

En segundo lugar, los resultados evidencian el papel fundamental de las identidades matemáticas durante el trabajo en grupo. Existe en la clase de matemáticas una jerarquía de identidades matemáticas (Martin, 2006) que se negocian y resisten. Categorías tales como ser "hábil" o "lento" surgen durante las interacciones, condicionando la participación y el aprendizaje. Los estudiantes posicionan a otros y se posicionan ellos mismos, al tiempo que negocian y resisten

tales actos. Los resultados muestran la emergencia de problemáticas de poder durante el trabajo en equipo, las cuales no se resuelven de manera espontánea por los estudiantes. Más allá del foco en la complejidad matemática y cognitiva de los problemas, se necesita investigación sobre la problemática aquí abordada, la cual podría iluminar el efecto de este modelo en la participación y el aprendizaje de los estudiantes; también podría ayudar a identificar formas efectivas de intervenir para posibilitar que los maestros reconozcan estas tensiones y puedan fortalecer en sus estudiantes la construcción de identidades matemáticas positivas y de habilidades democráticas relacionadas con la colaboración y la responsabilidad.

Agradecimiento: Se agradece financiamiento otorgado por el proyecto CONICYT/FONDECYT # 3180238 y por el Proyecto Basal FB0003 del Programa de Investigación Asociativa de CONICYT.

Referencias

Bianchini, J. (1999). From here to equity: the influence of status on student access to and understanding of science. *Science Education, 83*(5), 577-601.

Boaler, J. (2008). Promoting 'relational equity' and high mathematics achievement through an innovative mixed-ability approach. *British Educational Research Journal,* 34(2), 167-194.

Cohen, E. G., Lotan, R. A., Scarloss, B. A., & Arellano, A. R., (1999). Complex instruction: Equity in cooperative learning classroom. *Theory into Practice, 38*(2), 80-86.

De Freitas, E. (2010).). Regulating mathematics classroom discourse: Text, context and intertextuality. En M. Walshaw (Ed.). *Unpacking pedagogy: New perspectives for mathematics classroom* (pp.129-151). Charlotte, NC: Information Age.

Esmonde, I. (2009). Ideas and Identities: Supporting equity in cooperative mathematics learning. *Review of Educational Research, 79*(2), 1008-1043.

Esmonde, I., Brodie. K., Dookie, L., & Takeuchi, M. (2009). Social identities and opportunities to learn: Student perspective on group work in an urban mathematics classroom. *Journal of Urban Mathematics Education, 2*(2), 18-45.

García, G. (2014). La producción de in(ex)clusión, currículo y cultura(s) en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas, 7*(2), 202-221.

Knoblauch, H., & Schnettler, B. (2012). Videography: Analysing video data as a "focused" ethnographic and hermeneutical exercise. *Qualitative Research, 12*(3), 334-356.

Martin, D. B. (2006). Mathematics learning and participating as racialized forms of experience: African American parents speak on the struggle for mathematics literacy. *Mathematical Thinking and Learning 8*(39), 197-229.

MINEDUC (2016). Orientaciones curriculares para el desarrollo del plan de formación ciudadana. Recuperado el 15 de octubre de 2018 de http://formacionciudadana.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/46/2016/11/Orientaciones-curriculares-PFC-op-web.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (1984). *An agenda for Action. Recommendations for school mathematics of the 1980s.* Reston, VA: NCTM Inc.

Valoyes-Chávez, L. (2017). Inequidades raciales y educación matemática. *Revista Colombiana de Educación, 73,* 127-150. https://doi.org/10.17227/01203916.73rce127.150

Yackel, E., Cobb, P., & Wood, T. (1991). Small-group interaction as a source of learning opportunities in second-grade mathematics- *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(5), 390-408.



La clase de matemáticas: potenciando el pensamiento crítico a partir del cuidado del medio ambiente

Lina Marcela **Patiño** Londoño
Estudiante maestría en educación, Universidad de Antioquia
Colombia
lmarcela.patino@udea.edu.co

Liliana **Quintero** López
Profesora, Universidad de Antioquia
Colombia
liliql22@gmail.com

Carolina **Higuita** Ramirez
Profesora, Universidad de Antioquia
Colombia
carolina.higuita@udea.edu.co

Resumen

Las experiencias como maestra me han movilizado a pensar en un aprendizaje de las matemáticas que trascienda los contenidos y se convierta en un saber que esté ligado a resolver problemas de la vida cotidiana. En este caso, problemas relacionados con el medio ambiente. Aquí presentaremos la propuesta del proyecto de investigación de la *Maestría en Educación, Línea de Educación Matemática de la Universidad de Antioquia* (Colombia). El propósito del estudio es potenciar el pensamiento crítico en la clase de matemáticas con estudiantes de grado noveno a partir del cuidado del medio ambiente. El camino que queremos recorrer tiene como principio una voluntad por ubicarse en el mundo que moviliza la construcción de conocimiento (Zemelman, 2012) para el cuidado de la vida, esto es, del medio ambiente.
Palabras clave: Saberes de experiencia, Educación matemática crítica, Epistemología crítica, Alfabetización crítica, Pensamiento crítico.

Introducción

Esta comunicación tiene como finalidad presentar las generalidades de la propuesta de investigación titulada: "*Potenciar el pensamiento crítico en la clase de matemáticas a partir del cuidado del medio ambiente*". El estudio se encuentra en proceso de construcción[1] y toma como

[1] Corresponde al segundo de los cuatro semestres que constituyen la Maestría en Educación, Línea Educación Matemática de la Universidad de Antioquia, Colombia.

fundamentos la educación matemática crítica de Skovmose (1999), Valero (2017), Skovmose y Valero (2012); y la epistemología crítica de Zemelman (2015). En este trabajo hacemos referencia a unos antecedentes desde la práctica del ser maestra, el planteamiento del problema, el horizonte conceptual y el camino metodológico.

El estar siendo maestra: afectaciones

Este apartado tiene como finalidad presentar una síntesis de las experiencias de mi ser[2] como maestra. Para esto, describo las características de mi proceso pedagógico, en el cual evidencio unas matemáticas alejadas de los contextos de los estudiantes y enfocadas en la enseñanza de algoritmos, es decir, una matemática abstracta, alejada de las realidades sociales. La reflexión sobre la propia práctica y el encuentro con algunos autores a partir de las lecturas me han posibilitado reflexionar y problematizar mi práctica. A continuación, describo cuatro acontecimientos que me han constituido:

El primero tuvo lugar en una escuela rural del municipio de La Unión (Antioquia, Colombia)[3], allí compartí con población campesina. Para la época en esta comunidad educativa se desarrollaba un proyecto de reciclaje. Sin embargo, como maestra no establecí una relación con las matemáticas. Mi objetivo estaba centrado en enseñar contenidos. El segundo acontecimiento fue en el municipio de Buriticá, enmarcado en un contexto de deterioro social y ambiental ocasionado por la minería. Si bien, yo era conocedora de las problemáticas sociales existentes en el Municipio, en el aula de matemáticas estos flagelos eran invisibilizados por una enseñanza basada en contenidos.

El tercer acontecimiento ocurrió en el barrio Carambolas del municipio de Medellín. El contexto en el que se desarrollaba mi actuar como maestra estaba permeado por problemas relacionados con la desigualdad social y problemas ambientales. En la clase de matemáticas mi actuar era el mismo de las experiencias anteriores, es decir, a partir del tratamiento de contenidos siguiendo rigurosamente el plan de estudio planteado. Mi propósito estaba centrado en lograr que los estudiantes fueran competentes en matemáticas.

El último acontecimiento, corresponde al lugar actual en el que me desempeño como maestra, el municipio de la Unión. Un contexto que basa su economía en la agricultura, la ganadería, la minería de caolín y de material pétreo. Dichas prácticas vienen afectando el medio ambiente, la salud y la seguridad alimentaria de los unitences. Las reflexiones sobre las experiencias vividas me han señalado la necesidad de pensar el aprendizaje de las matemáticas y su relación con el cuidado del medio ambiente, así como proponer una clase de matemáticas que trascienda la enseñanza de contenidos y posibilite un aprendizaje para la toma de decisiones y resolución de problemas cotidianos.

Planteamiento del problema

Nuestra motivación por desarrollar un pensamiento crítico en la clase de matemáticas con estudiantes de grado noveno a partir del cuidado del medio ambiente tiene sus orígenes en la reflexión de tres aspectos que involucran los saberes de experiencia, las necesidades y los

[2] Este apartado está escrito en primera persona del singular en tanto hace parte de lo vivido en mi estar siendo como maestra. Los demás apartados fueron constituidos en conjunto con las maestras que acompañan este proceso, de allí que se hable en primera persona del plural.

[3] Los municipios señalados en esta comunicación se encuentran todos ubicados en el departamento de Antioquia, Colombia.

desafíos a los que se enfrenta la educación matemática hoy, en particular en el contexto colombiano. Estos son: la reflexión sobre la propia práctica (presentada en el apartado anterior), la necesidad de pensar la clase de matemáticas más allá de la formación cognitiva, esto es, la consideración del estudiante como un ser histórico y constructor de mundo y la búsqueda de posibilidades para aprender matemáticas ligadas al cuidado del medio ambiente, como un asunto que puede ayudar a la supervivencia de la humanidad. A continuación, se presentan los aspectos enunciados.

Una formación centrada en el desarrollo cognitivo

Los criterios de productividad, eficiencia y eficacia que se han apoderado de la escuela como producto de apuestas sociales, políticas y económicas del orden mundial han hecho que la enseñanza de los saberes, en particular los matemáticos, centren su atención en aspectos cognitivos que implican necesariamente un aprendizaje memorístico y sin aplicabilidad real de los conceptos. Aprendizajes que son validados a través de pruebas estandarizadas.

Buen ejemplo de ello es mi experiencia actual como maestra en la Institución Educativa Félix María Restrepo Londoño, donde las matemáticas han sido presentadas como exactas y neutrales, dejando de lado la realidad de los estudiantes, sus saberes y de las problemáticas sociales que a diario enfrentan sus comunidades. Este ejercicio como docente contradice los principios filosóficos propuestos en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM) donde se promueven "procesos de pensamiento aplicables y útiles" (1998, p.18).

Esta enseñanza de las matemáticas ha alejado a los estudiantes y a la familia de una lectura e intervención en el mundo (en el sentido de Freire, 2004) y ha generado una apatía a lo que sucede alrededor no solo del país, sino incluso dentro del municipio y de la institución educativa. Lo anterior como fruto de un pensamiento racional. De allí que consideremos necesario pensar una educación matemática con estudiantes como lo señala Valero (2002) con "una existencia física y temporal, con sentimientos, con múltiples razones para involucrarse (o no) en el aprendizaje de las matemáticas y con una vida que trasciende los límites del aula y de la escuela" (p. 55). Es decir, la educación matemática debe posibilitar conocimientos a los estudiantes que les permita tomar decisiones y resolver problemas de su vida cotidiana, no es suficiente enfocarse en enseñanza de algoritmos, es indispensable vincular en la enseñanza los temas sociales.

La relación entre las matemáticas y el medio ambiente

El crecimiento acelerado de la humanidad y el modelo capitalista-consumista ha ocasionado una afectación al medio ambiente, como lo afirman Abad y Fernández: (2011) "los principales problemas de la degradación del medio ambiente están determinados por estilos de vida y modelos de comportamiento derivados de la evolución dinámica de la ciencia y la tecnología" (p. 104). De allí que la educación se piense como el aspecto central para combatir esta situación y que se generen políticas educativas como se señalan en documentos producidos por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco) y el Ministerio de Educación Nacional de Colombia – MEN (2017).

La Unesco (2015) en su objetivo para alcanzar en el 2030 la Educación de Desarrollo Sostenible (EDS) propone una formación que posibilite a los estudiantes tomar decisiones y adoptar medidas responsables para cuidar el medio ambiente. En este documento se promueve que, con la ciencia, la tecnología y la ingeniería (STEM) es posible aportar al desarrollo de un mundo

sostenible. Así mismo, en el Plan Nacional Decenal de Educación (Pnde) 2016-2026 se plantea que se debe promover una formación integral del ciudadano, donde exista la posibilidad de aprovechar las nuevas tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje en armonía con el medio ambiente.

Las referencias anteriores nos dejan ver la preocupación en el orden internacional y nacional por el cuidado del medio ambiente y el papel crucial que puede cumplir la educación para su preservación. Los LCM (1998) y los Estándares Básicos de Competencias (EBC) (2006) como documentos orientadores de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Colombia nos señalan de manera explícita una relación entre las matemáticas y el medio ambiente a través del desarrollo del pensamiento métrico y su vínculo con las ciencias naturales y sociales. También, expresan la relación entre matemáticas y el uso racional de recursos.

Los documentos más recientes de orientación curricular, Derechos Básicos de Aprendizaje-(DBA) (2017) y las Mallas de Aprendizajes (2017) en matemáticas no señalan de manera explícita un relacionamiento de estas con el cuidado del medio ambiente. Sin embargo, se platean algunas actividades que permiten comprender fenómenos naturales asociados con la variación. Lo anterior no implica necesariamente procesos de actuación por parte de los estudiantes para la toma de decisiones que permitan prevenir y predecir situaciones que afecten la vida.

Por otra parte, encontramos algunas investigaciones donde se ve la relación entre educación matemática y medio ambiente. Son ellas: *Bertanha y França (2016); Gómez (2016*); *Urkidi & Correa*. (2015); *Lombardo & Lorenzetti (2007).* En estos trabajos se hace explicita la necesidad de integrar el medio ambiente con las matemáticas, y trascender de la enseñanza basada en contenidos a una en la que los estudiantes se puedan involucrar mediante la reflexión crítica sobre las dificultades ambientales específicas.

El medio ambiente en la Unión

A continuación haremos una descripción de las problemáticas ambientales del municipio de La Unión, lugar donde se desarrolla esta investigación. Las fuentes económicas del municipio se centran en la ganadería, la agricultura y la explotación minera de material pétreo y del caolín. Estas prácticas económicas generan deforestación, daños del suelo y contaminación de las fuentes hídricas, pues están determinadas por el uso de agroquímicos y químicos. Respecto a esta problemática en el Municipio, el Proyecto de Educación Ambiental (PRAE) (2018) de la Institución Educativa Félix María Restrepo Londoño invitó a la comunidad educativa a pensar cómo desde las diferentes áreas del conocimiento puede analizarse el uso de agroquímicos y la alimentación saludable.

Hasta ahora hemos presentado el problema desde la política educativa nacional e internacional y desde una lectura de la realidad local. Con el escenario ya presentado y las reflexiones suscitadas nos surge la siguiente pregunta de investigación*: ¿Cómo potenciar el pensamiento crítico en la clase de matemáticas con estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Félix María Restrepo Londoño a partir del cuidado del medio ambiente?*

Horizonte Conceptual

El horizonte conceptual de esta investigación lo venimos tejiendo a partir de dos perspectivas, estas son: la educación matemática crítica de Skovmose (1999), Skovmose y Valero (2012),

Lizcano (2016), Valero, Andrade y Montesino (2015), Valero (2017); y la epistemología crítica de Zemelman (2012). A continuación, presentamos una síntesis de estas perspectivas.

Educación Matemática Crítica

De acuerdo con los autores Valero, Andrade y Montesino (2015) la educación matemática crítica surgió al inicio de 1980 en Europa y otros países. Nació con la finalidad de relacionar aspectos sociales con la matemática, romper el paradigma de la matemática como ciencia abstracta alejada de la cultura y de la psicología cognitiva y que basa su estudio en el aprendizaje y enseñanza de aspectos cognitivos, para entrar a relacionar la educación matemática con aspectos como la democracia y la justicia social. Las categorías que son problematizadas en esta perspectiva son: matemáticas, alfabetización funcional, alfabetización crítica, empoderamiento y justicia social. Estas se desarrollan en el marco de los procesos de globalización[4] y también los de resistencia a este modelo. Seguidamente se presentan de manera general estas categorías.

Matemáticas. Estamos entendiendo este concepto a partir de Skovmose y Valero (2012) y Lizcano (2006), ellos reconocen que las matemáticas están ligadas a las prácticas sociales. Skovsmose y Valero (2012) plantean la "necesidad de redefinir las matemáticas en conexión con el contexto social en el que operan con los fenómenos educativos en los que están inmersas" (p.17), es decir, las matemáticas deben estar en función del contexto, se debe trascender de las matemáticas abstractas que solo se aprenden en el aula de clase y sin aplicabilidad en la vida. Además, Lizcano (2006) nos muestra como las matemáticas se desarrollan a partir de las prácticas sociales de un grupo particular, pues estas surgen de acuerdo con cada cultura y cada necesidad. En diferentes situaciones se ven reflejados los distintos modos de razonar. Lo que nos muestra que no tienen que tener parecido con las matemáticas universales.

Justicia social. La definición que hacemos de esta categoría es con base en Skovmose y Valero (2012). La justicia social lucha por combatir la desigualdad, por incluir a las poblaciones vulnerables de la sociedad y por dar solución a las problemáticas sociales con la finalidad de mejorar las condiciones de vida de las comunidades. Busca reconocer una diversidad donde se acepten las diferencias y se incluyan los saberes de los estudiantes sin desmeritarlos simplemente porque no cumplen con la racionalidad establecida.

Alfabetización funcional. De acuerdo con Skovmose (2012) esta expresión se refiere a las "competencias que una persona podría tener para cumplir una función particular de un trabajo" (p. 65). Así, esta formación no permite cuestionar la realidad, sino que perpetua la idea de servir al Estado. No hay posturas críticas frente a las problemáticas.

Alfabetización crítica. Skovmose (2012) se refiere a una educación que no solo se base en la enseñanza de leer y escribir y al aprendizaje de las operaciones básicas, sino a una formación matemática que permita cuestionar las dificultades sociales, favoreciendo así la toma de decisiones en los aspectos de la vida, que en palabras de Valero (2017) sería el empoderamiento.

[4] Skovmose (2012) caracteriza la globalización a partir de seis aspectos. Estos son: Primero. Hay acuerdo general en que los procesos de globalización se facilitan mediante tecnologías de la información y la comunicación. Segundo. Se ve que la globalización está comprometida con un capitalismo de crecimiento libre. Tercero. Los procesos de globalización no siguen una ruta simple y predecible. Cuarto. La globalización incluye distribución y redistribución de "bienes" y "males". Quinto. La pobreza acompaña el capitalismo que crece libremente y la globalización se transforma en guetización que también incluye áreas considerables de Europa, Estados Unidos y partes de sus más grandes metrópolis. La gente que está en los guetos es gente inmovilizada. Sexto. La globalización podría ser armada (pp. 67-69).

Epistemología Crítica

La perspectiva de la epistemología crítica de Zemelman (2015) tiene como principio la lectura de la realidad que habitamos, es decir, pensar el aquí y el ahora. En esta perspectiva, la construcción del conocimiento se hace considerando el contexto histórico y cultural, desvelando sus límites y analizando sus posibilidades. El autor nos invita a no ser conformista con las situaciones que nos presenta la cultura dominante, esto nos moviliza a ser sujetos pensantes.

Estas apreciaciones tienen relevancia en nuestro estudio porque nos invitan a mirar desde otras perspectivas y cobran sentido en nuestra investigación porque vamos a cuestionar las matemáticas que concebimos en nuestro contexto particular, basadas solo en lo cognitivo. Nos enfocaremos en una disciplina que también busque la formación de ciudadanos que se preocupen por los problemas sociales, en especial, los ambientales. Para pensar debemos salir de los parámetros y no naturalizar las realidades, sino cuestionarlas en busca de soluciones. Entendemos el pensamiento crítico a partir de Zemelman (2012), como un pensamiento liberador del ser humano que reconoce su historia y la convierte en experiencia, para así transformar su futuro.

Caminos para potenciar el pensamiento crítico en la clase de matemáticas

La investigación se enmarca en el paradigma cualitativo, debido a que nuestro interés es favorecer desde el aprendizaje de las matemáticas el cuidado del medio ambiente. Lo que significa la construcción de conocimiento necesario para leer y actuar en una realidad particular a partir de las relaciones de los participantes con el mundo. Así, el estudio será fundamentado en un enfoque crítico dialéctico debido a que pretendemos una transformación de quienes hacen parte de este proyecto. Para lograrlo, planteamos un método enmarcado en la teoría crítica, debido a que busca transformar problemáticas sociales propias del contexto donde se llevará a cabo la investigación. Además, busca trasgredir paradigmas de manipulación y dominio de la sociedad en busca de luchar por la justicia social. De acuerdo con Kincheloe y McLaren (2012) "la investigación que aspira recibir el nombre de crítica debe estar conectada con el intento de confrontar la injusticia de una sociedad o una esfera pública en particular dentro de la sociedad" (p. 244).

Bajo este marco, los registros que proponemos son:

- **Cartografías propias:** son comprendidas de acuerdo con Vargas (2016) como "representacio[nes] de cómo nos situamos en el mundo, de cómo habitamos el territorio, a partir de las coordenadas que son al tiempo éticas, estéticas, sagradas y profanas" (p. 127). Los estudiantes reconstruyen desde sus propias percepciones los problemas ambientales que vive en la actualidad el municipio de La Unión. Estas cartografías iniciales posibilitarán que se definan algunos proyectos en torno a los cuales los estudiantes podrían centrar su atención, y a partir de allí girarán los escenarios de aprendizajes.

Las cartografías podrán resignificarse en el proceso de la investigación a partir del diálogo con personas conocedoras de las problemáticas expuestas.

- **Escenarios de aprendizaje:** Esta propuesta está fundamentada en los aportes de Skovmose (2002), García, Valero & Camelo (2013). Los escenarios de aprendizaje tienen como finalidad trascender la enseñanza basada en ejercicios donde hay una única respuesta y mecanización de algoritmos, lo que se busca es que los estudiantes se

involucren en el aula y se establezcan relaciones entre los conceptos matemáticos y su realidad. Los escenarios de aprendizaje se constituyen a partir de proyectos que emergen de los intereses de los estudiantes y se desarrolla en espacios escolares y no escolares. Los proyectos estarán acompañados por la maestra, lo que implica también la apuesta por la formación autónoma de los estudiantes. Los estudiantes tendrán el poder de decidir sobre qué problemática gira su trabajo y tendrán la tarea de mirar qué de las matemáticas serán necesarias para comprender y buscar soluciones al problema. Como maestra tengo la tarea de tejer relaciones entre los proyectos, proponer escenarios de aprendizaje (cuatro). Las matemáticas estudiadas deben tener sentido para cada uno de los proyectos. También se orientarán discusiones en cada uno de los grupos.

- **Diario de la investigadora:** refleja las reflexiones propias generadas a partir de la práctica en el desarrollo de los escenarios de aprendizaje y las que surgen con las lecturas de autores que fundamentan el trabajo y el diálogo con colegas del área que posibilitan ampliar los horizontes.
- **Entrevistas:** posibilitan ampliar comprensiones sobre la relación entre las matemáticas y el cuidado del medio ambiente. Estas entrevistas son semiestructuradas, en tanto, plantean algunos interrogantes y abren la posibilidad para que emerjan otros a medida que avanza la conversación. En este sentido, las entrevistas representan una visión de mundo de quién nos habla y permiten ampliar los horizontes de comprensión.

  Las entrevistas serán realizadas a personas del Municipio que tengan relación con el medio ambiente, a estudiantes participantes, maestros y a personas que de acuerdo con los intereses planteados por los estudiantes en los proyectos tengan conocimiento al respecto.
- **Salidas pedagógicas:** Estarán definidas en función de los proyectos que emerjan en el trabajo colectivo con los estudiantes. Tendrán como objetivo reconocer y ampliar comprensiones sobre la realidad estudiada. Los contextos de las pedagogías podrán ser escolares y comunitarias.
- **Cine-foros:** La utilidad de esta herramienta según Zerpa (2010) es que: “La formación en cine abre otros espacios para la reflexión y la crítica” (p.59). En nuestro estudio buscamos que con el cine se genere un espacio de reflexión, que posibilite cuestionar los problemas ambientales que afronta el mundo.

Para el análisis de los registros se procederá con un estudio de caso entendido en relación a Yin (2003) que nos manifiesta la utilidad de este en relación a la investigación porque: “permite que una investigación retenga las características holísticas y significativas de los eventos de la vida real” (p. 3). La selección estará determinada por criterios como: estudiantes que se hayan involucrado en el área de matemáticas, además, que sus preguntas y sus respuestas sean innovadoras. En este sentido, el análisis de estos registros producidos de manera colectiva implicará una triangulación con los autores estudiados y las comprensiones que como maestro tuve en el marco del proceso de investigación.

Referencias y bibliografía

Abad, G., & Fernandez, K. (2011) Enseñar y aprender matemáticas desde el enfoque medio ambiente ciencia-tecnología-sociedad. *Revista Educación Inclusiva*, *4*(2), 99-110.

Freire, P. (2004). *Pedagogía de la autonomía*. México: Siglo XXI Editores.

García, G.; Valero, P.; Salazar, C.; Mancera, G.; Camelo, F. y Romero, J. (2013). *Procesos de inclusión/ exclusión*. Subjetividades en educación matemática. Capítulo II. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Gómez, E. (2016). *Ciudadanía ambiental desde las prácticas de medición en la construcción del espacio de reforestación la restauración*. Universidad Pedagógica Nacional Facultad de Ciencia y Tecnología. Colombia.

Institución Educativa Félix María Restrepo Londoño (2018). *Agroquímicos vs alimentación saludable*: infórmate, decide y actúa. La Unión: I.E. Félix María Restrepo Londoño.

Kincheloe, J. & McLanen (2012). Replanteo de la teoría crítica y la investigación cualitativa. En Denzin & Lincon. *Paradigmas y perspectivas en disputa. Manual de investigación cualitativa*. Volumen II (pp. 241-319). España: Gedisa, S.A.

Lizcano, E. (2006). Las matemáticas de la tribu europeas: Un estudio de caso. *Metáforas Que Nos Piensan. Sobre Ciencia, Democracia y Otras Poderosas Ficciones*, 185–204. Recuperado de: https://www.traficantes.net/sites/default/files/pdfs/Metaforas que nos piensan-TdS.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Documento fundamentación teórica de los derechos básicos de aprendizaje (V2) y de las mallas de aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: MinEducación.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2015). *Declaración de Incheon y Marco de Acción para la Realización del Objetivo de Desarrollo Sostenible*, *4*, 83. Disponible en: https://doi.org/D-2016/WS/28

Urkidi, P., Correa, J. M. (2015). Acción de la escuela en favor del medio ambiente : un modelo crítico de educación medio ambiental. *Revista de Psicodidáctica*, *2*, 45–63. Recuperado de: https://doi.org/10.1387/RevPsicodidact.362

Skovsmose, O, & Valero, P. (2012). Rompimiento de la neutralidad política: El compromiso crítico de la educación matemática con la democracia. In P. Valero, & Skovsmose. *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 1-23). Bogotá: una empresa docente.

Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. *Quadrante*, *11*(1), 49–59.

Valero, P. (2017). El deseo de acceso y equidad en la educación matemática. *Revista Colombiana de Educación. Núm., 73,* 99-128.

Valero, P., Andrade, M. & Montesino, A. (2015) Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *18*(3), 287–300.

Vargas, P. (2016). *Historia de territorialidades en Colombia*. Biocentrismo y antropocentrismo. Colombia: Autores independientes.

Yin, R. K. (2003). Introduction and designing case study. *Case study research design and methods*. Recovered from: https://doi.org/10.1017/CBO9780511803123.001

Zemelman, H (2012). *Los horizontes de la razón*. Volumen I: Dialéctica y apropiación del presente. Barcelona: Anthropos Editorial.

Zemelman, H. (2015). Pensamiento Y construcción de conocimiento histórico. Una exigencia para el hacer futuro. *El Ágora Usb*, *15*(2), 343–352. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/4077/407747672001.pdf



Conceptos matemáticos subyacentes al quehacer de los cortadores de papel del gremio de las artes gráficas

Rosa Juleidy **Alvarez Diaz**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Cali – Colombia
Yul.alvarez23@gmail.com

Victoria Andrea **Arango Morales**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Cali - Colombia
Victoria.arango@correounivalle.edu.co

Resumen

Esta ponencia tipo comunicación tiene como propósito identificar los conceptos matemáticos y herramientas utilizadas por los cortadores de papel en máquina guillotina del gremio de las artes gráficas en la ciudad de Cali. Los datos se constituyeron a partir de la observación de procesos de corte usados en guillotina por los operarios del barrio San Nicolás, dichas observaciones se realizaron: dos horas diarias para los tres operarios distribuidas en la mañana y la tarde. Obteniendo registro de audio y notas de campo. Los resultados indican que la actividad de corte de papel tiene inmersa una amplia gama de conceptos matemáticos utilizados empíricamente por los cortadores, ayudando a ampliar la comprensión del quehacer de quienes al realizar su trabajo diario aplican conceptos que tal vez no lograron interiorizar en su formación académica pero que terminan utilizando por los requerimientos laborales.

Palabras claves: matemática, ciencias, etnomatemática, conceptos matemáticos, artes gráficas

Introducción

La siguiente ponencia tipo comunicación expone el resultado sobre el análisis de las estrategias matemáticas utilizadas por los cortadores de papel en guillotina en la ciudad de Cali. Actividad que se realiza como parte de los procesos finales en la producción de piezas gráficas. Dicha actividad tiene inmersa una variedad de conceptos matemáticos utilizados empíricamente, que por lo regular no son percibidos ni reconocidos explícitamente por los operarios.

Nuestro interés está centrado en identificar los conceptos matemáticos utilizados por estas personas al realizar su trabajo. El desempeño que ha de cumplir el cortador es "…de preservar la calidad de los productos gráficos, de prevenir el desperdicio de material impreso, de optimizar los tiempos de entrega y de trabajar en condiciones de seguridad personal, de los equipos y de los

materiales a su cargo" (Solanes, 2005, p17). El proceso de corte tiene una incidencia grande en el producto final ya que permite tener un valor agregado a la pieza.

Propósito

Identificar los conceptos matemáticos y herramientas utilizadas por los cortadores de papel en máquina guillotina.

Metodología

El presente trabajo investigativo enmarcado en el ámbito de las ciencias sociales y humanas, consiste en un proyecto requerido en la asignatura etnomatemática dentro de la formación de pregrado del plan de estudios Licenciatura en Educación Básica con énfasis en matemáticas de la Universidad del Valle. Para llevarlo a cabo, fue necesario hacer uso de ciertas técnicas de investigación que permitieran justificar el problema a investigar. El tipo de estudio de acuerdo al enfoque de investigación es cualitativo-descriptivo y para ello hicimos uso de la observación como principal técnica de investigación.

En el barrio San Nicolás Centro de las artes gráficas de la ciudad de Cali, observamos (a distancia moderada sin participación activa) durante una semana a tres trabajadores pertenecientes a dos empresas del sector de las artes gráficas. Dichas observaciones se establecieron de dos horas diarias distribuidas en horas de la mañana y la tarde. Con ayuda de notas de campo y grabaciones de voz nos enfocamos en los procesos realizados por los operarios al momento de cortar papel en la maquina guillotina, sus gestos, comunicación con los clientes, análisis a requerimientos y el posible uso de conceptos matemáticos.

Cortador 1, **Formación académica:** Básica primaria, **Edad:** 23

Cortador 2, **Formación académica:** Tecnología en sistemas, **Edad:** 18 años

Cortador 3, **Formación académica**: Básica primaria, **Edad:** 42 años

La máquina cortadora utilizada en la industria gráfica tiene la función de cortar y refilar cantidades de hojas de papel o cartón en porciones de altura variable hasta 180 mm y de una longitud de hasta 2 metros aproximadamente, según su tamaño. Está dotada de escuadras para la colocación exacta del papel y, a veces, de mandos automáticos con programas para la ejecución de una serie de cortes sucesivos en la misma porción de papel.

Las guillotinas lineales pueden ser usadas para refilar los márgenes de los libros cuando no se dispone de guillotinas trilaterales apropiadas.(1) Existen diferentes tipos de guillotinas lineales: a palanca, semi automática y automáticas con programa.

Las guillotinas lineales pueden cortar papel que viene en rollos o en pliego. En el mercado del papel industrial se manejan dos medidas para el pliego:

- Medida Europea según ISO 216. 70 cms de ancho por 100 cms de largo (70x100)
- Otra estándar 60 cms de ancho por 90 cms de largo (60x90)

Algunos tipos de papel manejan ambas medidas, pero hay otros como el papel bond, por ejemplo, que solo maneja la medida 70x100

Cuando el cliente va a comprar un papel que tiene cualquiera de las dos medidas debe saber cuál le conviene más para evitar el gasto o desperdicio de papel. En caso de que el cliente no lo sepa debe preguntar a un publicista o a un cortador.

Las guillotinas vienen con una medida de luz que es el ancho de la máquina o la medida máxima de papel que puede entrar para que sea cortado. La luz de alguna manera limita los cortes, pues dependiendo de esta, se permite el corte de ciertos formatos de papel.

Normalmente los cortes de pliego de papel se hacen en grandes cantidades. Por ejemplo, el cliente compra en la distribuidora de papel x cantidad de pliegos de papel, lo lleva donde un cortador y le dice que corte ese papel a tamaño carta. En ese momento el cortador entra a hacer la conversión del papel, es decir, empieza a pensar cómo organizar en el pliego el tamaño que necesita el cliente de manera que se genere menor desperdicio.

Análisis Previo

A continuación presentamos ejemplos que permitan la comprensión a manera general de lo que hace un cortador en una situación específica; utilizamos una herramienta virtual llamada Calculadora de Corte de Papel S.A

Ejemplo 1. Un cliente lleva x cantidad de pliegos de papel bond de 70x100 para que sean cortados a tamaño carta que mide 22x28. Entonces el papel se debe cortar en las siguientes posiciones para generar el mínimo de desperdicio.

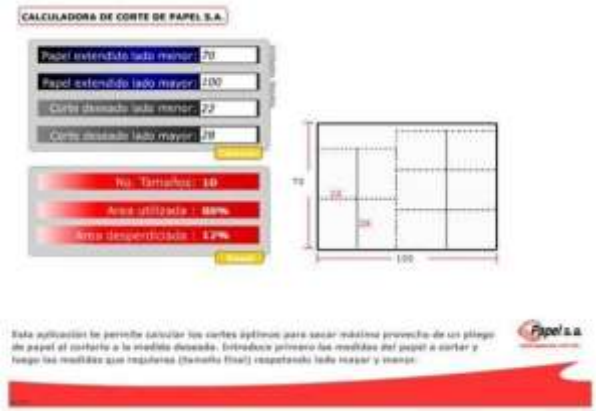


Figura 1. Corte en papel bond-Tamaño (22x28)
Fuente: Calculadora de Corte de Papel S.A http://papelsa.com.mx/calculadora.htm

Al lado derecho se observa el tamaño del pliego y lo punteado es la cabida, esto es, la cantidad de veces que cabe el tamaño que pidió el cliente en ese pliego.

En este caso es una cabida 10.

Obsérvese que en el pliego se encuentran espacios que son de diferente tamaño a los otros; estos son los desperdicios.

Entonces se plantea lo siguiente: Si un tamaño carta (22x28) cabe 10 veces en un pliego (70x100)

¿Cuántas veces cabe un tamaño media carta (22x14) en un pliego (70x100)?

Haciendo un cálculo mental rápido se pensaría que cabe 20 veces, pero en realidad son 22 veces puesto que se aprovecha el desperdicio del ejemplo anterior.

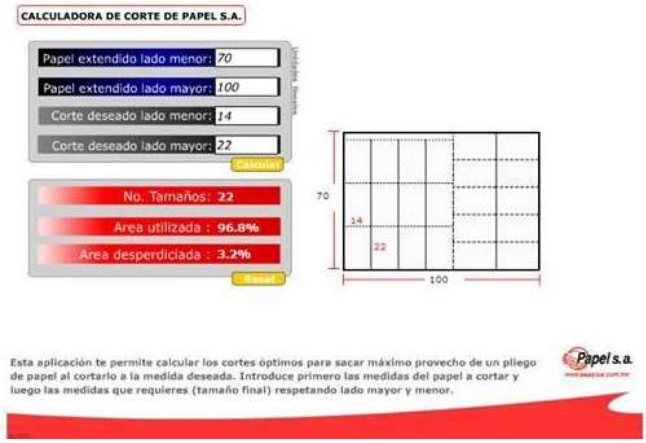


Figura 2. Corte en papel bond-Tamaño (22x28)
Fuente: Calculadora de Corte de Papel S.A http://papelsa.com.mx/calculadora.htm

Teniendo claro lo anteriormente planteado pueden hacerse preguntas como:

- Si necesito mil hojas tamaño carta ¿cuántos pliegos debo comprar?

Esto se puede solucionar con una regla de tres simple.

$$1 \text{ pliego} \rightarrow 10 \text{ tamaño carta}$$

$$x \text{ pliegos} \rightarrow 1000 \text{ tamaño carta}$$

Despejando x, tenemos que: $x=100$ pliegos

- Si necesito 2530 hojas tamaño media carta ¿cuántos pliegos debo comprar?

$1 \text{ pliego} \rightarrow 22 \text{ tamaño media carta}$

$x \text{ pliegos} \rightarrow 2530 \text{ tamaño media carta}$

Despejando x, tenemos que: $x=115$ pliegos

Lo anterior permite poner de manifiesto las operaciones que han de hacer los cortadores para asesorar bien a los clientes y generar menor desperdicio, menor gasto de cuchillas, entre otros. También se pueden presentar situaciones de más complejidad como:

Supongamos que se necesita determinada cantidad de hojas para imprimirlas a full color. En este caso se han de comprar más pliegos de papel del requerido en consideración al sobrante o la cantidad de hojas adicionales que se necesitan para mantener el margen de error, pues se pueden dañar pliegos en la impresión, el corte inicial u otro proceso.

Al finalizar algún trabajo se lleva al corte final, el cortador debe conocer la cantidad de tinta, el tipo de papel (kimberly, propalcote, bond, maule, bristol, etc) y el proceso que lleva para así conocer la cantidad de sobrante que se requiere.

Resultados y discusión

El conocimiento de los distintos tipos de papel y materiales que existen en el mercado, su manipulación, la toma de medidas y la elección de la manera como debe ser cortado el material para la optimización en el área del papel de manera que genere menor desperdicio, son factores que permiten identificar la agilidad y profesionalismo del Cortador al ejercer su labor.

Así, para ser reconocido en el medio, es necesario que el cortador:

- Reconozca las características del papel (su grosor, calidad, acabado, medida en pliego y muchas veces tener idea de su costo)
- Establezca la manera para el corte del papel que optimice tiempo y espacio
- Sea claro con el cliente en cuanto al desperdicio que le generara el corte en dicho papel
- Identifique el momento preciso para hacer cambio de cuchilla (cuando pierde su filo) porque podría dañar el papel o agrietar la cuchilla.
- Identifique los tipos de papel cuyo corte ha de hacerse cuando la cuchilla esta recién afilada ya que hay materiales que no son recomendables cortar porque el filo de la cuchilla se desgasta rápidamente.

Los clientes que requieren a los cortadores pueden llegar con los pliegos de papel en blanco o impresos. Tamaños de papel ya impresos a los que les llaman montajes o trabajos dependiendo la referencia (carpetas, tarjetas, etc.).

Para llevar un corte ordenado y parejo, y sin importar cuál sea el tamaño de corte, el papel debe ser girado siempre a 90°, lo cual se hace normalmente en el sentido de las manecillas del reloj.

El Cortador 3 es una persona que, como lo dice él, “ha trabajado toda la vida en esto y no necesita de esa tabla de cortes porque aún su cabeza recuerda cómo son”. Pero los Cortadores 1 y 2 son personas que, como muchos en el sector, al momento de cortar el papel deben tener visibles las tablas de corte. Dicha tabla es distribuida de un lado a otro por diseñadores o por los mismos cortadores del sector (no la distribuyen de manera voluntaria, sino cuando alguno lo solicita).

Se observa que cuando llega x cliente con una carreta donde transportaba pliegos de papel solicita al operario de la máquina guillotina cortar el papel a 1/11. El operario miró su tabla de corte, confirmó la medida con el cliente preguntándole “¿1/11 de 20x28 o de 20x30? ¿de cuál lo necesita usted?”. Después que el cliente le aclaró la medida, el operario procedió a tomar los pliegos dándoles aire con el movimiento de sus manos para facilitar que el papel empareje en su totalidad; posteriormente lo acomoda en la mesa de la guillotina e inicia el proceso de corte.

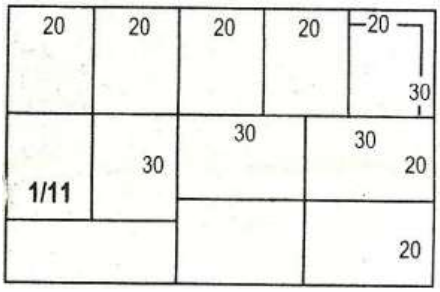


Figura 3. Cabida 1/11 de pliego

Primero cortó el pliego por el lado de 70 cm a 40 cm y procedió a seguir su corte como lo muestra la tabla anterior. Fue necesario dejar las notas de campo ya que la agilidad de esta persona no nos permitía observar y tomar nota. El operario separó el papel en columnas y los seleccionaba según la medida para después retomar las columnas, agruparlas y cortarlas nuevamente; durante este proceso el cortador realizó movimientos de traslación y rotación para seleccionar, acomodar, agrupar el papel según la medida y poder obtener un corte final parejo donde todo el papel quedara del mismo tamaño. También observamos que el operario digitaba en el panel de control de la máquina la medida pero verificaba con un metro que correspondiera a la medida que él estaba ordenándole a la máquina.

Durante el análisis de la observación pudimos tener claro los siguientes conceptos que usan estos tres cortadores sin importar el tipo y medida de papel:

La traslación. La rotación. La ubicación espacial (momento de acomodar de manera óptima la medida para evitar desperdicio del papel), el concepto de conjunto (al momento de agrupar los tamaños de papel cortado para no confundirse). Suma (cuando suman las medidas de corte correspondiente a un lado del pliego ej: por el lado de 70 cm pueden salir 3 tamaños de 20 cm y queda un sobrante de 10 cm o por el lado de 100 cm podríamos sacar 6 tamaños de 20 cm y sobra uno de 10 cm, optimizando los espacios, generando menos desperdicio).

Ángulo recto (permite que el papel quede cortado de manera pareja). División, Multiplicación, Estimación, Aproximación de un valor a partir de un cálculo. (Cuando no están seguros de la cantidad de tamaños al finalizar un corte). Conversión de medida (cuando le dan la medida en mm o mts y debe convertirla a cm), Área, Perímetro y Longitud.

Conclusiones

En este apartado mostramos las conclusiones cualitativas a las que llegamos a través del análisis antes presentado:

Como observadoras es importante resaltar que el análisis nos permite evidenciar que las matemáticas están inmersas en la cotidianeidad de las distintas acciones que realizamos, en este caso los cortadores al realizar su trabajo diario para su sostenimiento aplican conceptos que tal vez no lograron interiorizar en su formación académica pero que terminan utilizando por los requerimientos de su trabajo.

Como maestras en formación debemos tener la sensibilidad para identificar esos conocimientos matemáticos que han sido adquiridos por el sujeto en su ambiente cultural y social, para que de esta manera se pueda lograr una conexión entre los objetos matemáticos y la contextualización adecuada que ha logrado obtener el individuo a través de su experiencia.

En el camino de investigar sobre el tema, encontramos aplicaciones que facilitan la labor del cortador como son:

- Calculadora de corte de papel S.A
- Aplicaciones para sistema operativo Android

En la observación tuvimos la oportunidad de preguntar a los cortadores si eran conocedores de estas herramientas a lo que contestaron negativamente. Esto muestra la falta de socialización de los artefactos creados para una comunidad en particular y el poco des interés en suplir una mejora en el trabajo de un grupo determinado.

Referencias bibliográficas

Solanes Ramón C. (2005) *Manual del cortador con guillotina lineal programable*. Buenos Aires. Banco Interamericano de Desarrollo.

Papel S.A de CV (2014). *Calculadora de corte*. Recuperado de http://papelsa.com.mx/calculadora.htm.

Currículo, competencias y evaluación

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Análisis de las reflexiones de estudiantes para profesor de matemáticas de Educación Secundaria sobre su motivación hacia la enseñanza

Marisol **Salomón** Plata
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
msalomonp@usal.es

José María **Chamoso** Sánchez
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es

M. Mercedes **Rodríguez Sánchez**
Escuela de Magisterio, Universidad de Salamanca
España
meros@usal.es

Beatriz **Sánchez-Barbero**
Escuela de Magisterio, Universidad de Salamanca
España
beatrizsanchezb@usal.es

PALABRAS CLAVE: Motivación hacia la enseñanza, Formación inicial del profesorado de Secundaria de Matemáticas, Máster de Secundaria de Matemáticas, Identidad Profesional

La importancia de la identidad profesional es reconocida (Beijaard, Verloop y Vermunt, 2000). Un aspecto que se ha relacionado con la identidad profesional y que está ganando importancia en los últimos años es la motivación que presentan los profesores hacia la enseñanza (Canrinus, Helms-Lorenz, Beijaard, Buitink y Hofman, 2012). Esa motivación se ha relacionado con su identidad profesional en el siguiente sentido: los profesores suelen tener una fuerte motivación para la enseñanza y esa motivación guía la caracterización de sus identidades (Zembylas, 2005).

Este trabajo es parte de un estudio que intenta avanzar en el conocimiento de la identidad profesional de estudiantes para profesor de Matemáticas de Secundaria. Para ello, treinta y seis estudiantes del Máster de Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, especialidad de Matemáticas, de las Universidades de Salamanca y Valladolid (2015-16 y 2016-17), realizaron un cuestionario de preguntas abiertas en el horario y aula habitual, donde reflexionaron por escrito, sobre sus percepciones acerca de qué formación y desarrollo son necesarios para ser un buen profesor de Matemáticas de Secundaria, cuál es la mejor manera de conseguirlo y cuál es su propia visión como futuro profesor de Matemáticas de Secundaria.

En este trabajo solo se consideraron las reflexiones que se referían a la motivación del docente hacia la enseñanza de Matemáticas en Secundaria y a la motivación que el docente ejerce en los estudiantes de Secundaria. Como resultado de este estudio, las alusiones de los futuros profesores fueron en los siguientes sentidos: Referido a la motivación del docente, alta motivación hacia la enseñanza (69,4%), escasa motivación hacia las Matemáticas (27,8%) y escasa motivación hacia los estudiantes (36,1%). Referido a la motivación que el docente ejerce en los estudiantes, alta motivación hacia su aprendizaje (75%) y escasa motivación hacia las Matemáticas (36,1%).

Este estudio es un primer paso para caracterizar la motivación de futuros docentes de Matemáticas de Secundaria hacia la enseñanza que puede ayudar a avanzar en el conocimiento de su identidad profesional y, por ejemplo, a mejorar los programas de formación de esos futuros docentes.

Agradecimientos

RED8-Educación matemática y formación de profesores (EDU2016-81994-REDT), Proyecto 2017/00111/001 (463AC01, Universidad de Salamanca), Proyecto EuropeanUnion. Erasmus (2017-1-ES01-KA203-038491), Proyecto Ministerio de Economía y Competitividad España (PSI2015-66802-P).

Referencias

Beijaard, D., Verloop, N. y Vermunt, J. D. (2000). Teachers' perceptions of professional identity: an exploratory study from a personal knowledge perspective. *Teaching and Teacher Education, 16*, 749-764.

Canrinus, E.T.; Helms-Lorenz, M.; Beijaard, D.; Buitink, J. y Hofman, W.H.A. (2012). Self-efficacy, job satisfaction, motivation and commitment: exploring the relationships between indicators of teachers' professional identity. *European Journal of Psychology of Education, 27*, 115–132.

Zembylas, M. (2005). Discursive practices, genealogies, and emotional rules: A poststructuralist view on emotion and identity in teaching. *Teaching and Teacher Education, 21*, 935–948.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Análisis de la interacción profesor-alumnos cuando resuelven problemas realistas en el aula

Marta **Escribano** Gallardo
Universidad de Salamanca
España
m.escribanog@usal.es

Beatriz **Sánchez-Barbero**
Universidad de Salamanca
España
beatrizsanchezb@usal.es

Jose María **Chamoso** Sánchez
Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es

Resumen

La interacción que se produce entre profesor y alumnos en la resolución conjunta de problemas en aulas de matemáticas es un tema de interés en Educación Matemática. Algunas investigaciones analizaron dicha interacción cuando se resolvían problemas rutinarios y no rutinarios, pero poco conocimiento hay cuando los problemas son realistas. En este estudio se pretendió analizar la interacción al resolver diez problemas realistas en el aula referido a los procesos promovidos y al grado de participación. Los resultados reflejaron que se produjo una alta promoción de procesos cognitivos de razonamiento y de procesos metacognitivos de regulación y una alta participación de los alumnos cuando razonaban. Ello aportó perspectivas de futuro que pueden tener implicaciones educativas si se desea que se produzca un mayor razonamiento en las aulas y una mayor participación de los estudiantes.

Palabras clave: interacción en el aula, procesos cognitivos, procesos metacognitivos, grado de participación, resolución de problemas, problemas realistas.

Introducción

En los últimos años, un eje de interés en la investigación en Educación Matemática es el análisis de la interacción que se produce cuando se resuelven tareas matemáticas en el aula pues

Este trabajo ha sido realizado en el marco del Grupo de Trabajo formado por los autores junto con D. Javier Rosales Pardo (rosales@usal.es), D. Santiago Vicente Martín (vicente@usal.es) y Dª. Mª. Mercedes Rodríguez Sánchez (meros@usal.es) de la Universidad de Salamanca (España)

aporta información que ayuda a comprender qué sucede en las aulas(Rosales, Vicente, Chamoso, Múñez y Orrantia, 2012). Algunos estudios analizaron las interacciones en el aula en la resolución conjunta de problemas rutinarios (Rosales et al., 2012) y no rutinarios (Sánchez, Carrillo, Vicente, y Juárez, 2015) pero poco se sabe cuando se resuelven problemas realistas. Por ello, el presente estudio pretende analizar la interacción producida en el aula entre un profesor y sus estudiantes durante la resolución conjunta de diez problemas realistas teniendo en cuenta los procesos promovidos y el grado de participación de profesor y estudiantes, para así estudiar si existen cambios en cuanto a análisis de interacción en la resolución de otro tipo de problemas.

Marco teórico

Tareas matemáticas

Las tareas matemáticas que pueden realizarse en las aulas dependen de las oportunidades de aprendizaje que ofrecen al alumnado (Elbers, 2003). Una posible forma de clasificarlas es la diferenciación entre ejercicio –aquéllas en las que la aplicación mecánica de un algoritmo o de conocimientos previos llevan a la solución (Díaz y Poblete, 2001)- y problemas –aquéllas en las que esta aplicación mecánica no es suficiente para llegar a la solución (Kantowski, 1981)-. Poniendo el foco de atención en los problemas, si nos centramos en su contexto, Vicente y Orrantia (2007) definían un problema realista como aquel que trata de resolver situaciones ocurridas en el mundo real para lo que se deben tener conocimientos de la realidad ya que, en otro caso, el uso de procedimientos aritméticos podría llevar a soluciones con sentido matemáticamente pero sin sentido real (más detalle, Verschaffel, De Corte y Lasure, 1994).

Interacción en las clases de matemáticas

La interacción generada entre el docente y sus alumnos durante la resolución conjunta de problemas en el aula ha suscitado interés en la investigación en Educación Matemática pues permite la discusión y facilita la construcción de los alumnos de su propio aprendizaje (Depaepe, De Corte y Verschaffel, 2010). La literatura ha analizado esa interacción considerando procesos que se promueven y el grado de participación (Sánchez et al., 2015) pero, en la mayor parte de los trabajos, se ha realizado con problemas rutinarios. Atendiendo a los procesos cognitivos que se promueven en el aula, esos trabajos mostraron que se basaba en la mera selección de datos y apenas se consideraba el razonamiento (p.e., Chapman, 2006; Depaepe et al., 2010; Rosales et al., 2012). Referido a la metacognición, los maestros se centraban más en cómo resolver el problema que en enseñar a resolverlo (p.e., Biryucov, 2004; Ramos, Vicente, Rosales y Sastre, 2016). Atendiendo al grado de participación, ésta era prácticamente inexistente por parte de los alumnos y aumentaba al avanzar en el curso escolar (p.e., Nathan y Knuth, 2003). Si se tiene en cuenta tanto procesos cognitivos como grado de participación, sólo conocemos el estudio de Sánchez et al. (2015) que analizó la interacción de dos maestros cuando resolvían un problema rutinario y uno no rutinario conjuntamente con los estudiantes en el aula y los resultados mostraron que en el problema no rutinario aumentó el razonamiento y el grado de participación de los alumnos. En este trabajo se pretende realizar un estudio exploratorio con problemas realistas, para estudiar si el tipo de tarea utilizada en la resolución conjunta en el aula influye en la promoción de procesos y en la participación de los estudiantes.

Metodología

Participantes y contexto

Un profesor del Máster Universitario en Estudios Avanzados en Dificultades del

Aprendizaje (Universidad de Salamanca, España) y 22 estudiantes (mujeres entre 22 y 25 años).

Procedimiento y problemas

El profesor resolvió problemas realistas conjuntamente con los estudiantes en el aula y en horario habitual dedicado a actividades de ese tipo (37 minutos de duración). Los estudiantes no tenían preparación previa referida a problemas realistas.

Los 10 problemas realistas utilizados fueron los del trabajo de Verschaffel et al. (1994). Por ejemplo, "El abuelo da a sus nietos una caja con 18 globos para repartir entre ellos. ¿Cuántos globos le toca a cada uno?"; "Andrés nació en 1978. Ahora estamos en 1993. ¿Cuántos años tiene?"; "Juan corre los 100 metros en 17 segundos. ¿Cuánto tardará en correr 1 kilómetro?".

Análisis de datos

La sesión fue grabada en audio y posteriormente transcrita. Para el análisis de la interacción se tomó como unidad de medida el ciclo, entendido como la segmentación de las acciones realizadas durante el desarrollo de la interacción y que suele comenzar con una pregunta, ya sea implícita o explícita, y finalizar cuando la pregunta ha sido respondida o abandonada (Wells, 1999). Para ello se tuvieron en cuenta los contenidos públicos entendidos como la información que maestro y alumnos comparten explícitamente en el aula, de modo que cada ciclo contiene un único contenido público (en las ocasiones en que, en un mismo ciclo, existe más de un contenido público, se considera el principal del que dependan el otro u otros contenidos públicos; Rosales et al., 2012).

Una vez delimitados los ciclos, se categorizaron atendiendo a:

Los procesos promovidos que se aluden en la resolución según se refirieran a (Sánchez-Barbero et al., 2017b, adaptado de Nathan y Knuth, 2003; Rosales et al., 2012; Tabla 1):

Tabla 1. *Sistema de categorías de los procesos promovidos (Sánchez-Barbero et al., 2017a)*

	Categorías	Definición
PROCESOS COGNITIVOS	**Selección**	Información o datos que aparecen, explícitamente, en el enunciado del problema o surgen en el proceso de resolución, así como a la elección de operaciones, sin justificación
	Integración	Aspectos que relacionan información o datos que aparecen explícitamente en el enunciado del problema o surgen en el proceso de resolución, que son algo más que la mera selección de información existente, de forma adecuada y justificada
PROCESOS METACOGNITIVOS	**Generalización**	Aspectos del proceso de resolución que son más generales que los del problema que se está considerando como, por ejemplo, la contextualización del problema en otros contextos o la relación del problema o su resolución con otros problemas o resoluciones similares
	Regulación	Aspectos del proceso de resolución relacionados con acciones de planificación (organización del proceso), supervisión (valoración y observación del proceso) y evaluación (determinación del avance y progreso en la resolución, así como valoración de la realización del proceso)
OTROS PROCESOS	**Control**	Aspectos relacionados con aspectos de atención, orden u organizativos, sin relación en ningún sentido con el proceso de resolución
	Lectura	Lectura del problema y aclaración de conceptos no matemáticos

Fuente: elaboración propia.

El grado de participación de profesor y alumnos en la resolución según fuera (Sánchez-Barbero et al., 2017a, adaptado de Rosales et al., 2008; Tabla 2):

Tabla 2. *Sistema de categorías del grado de participación (Sánchez-Barbero et al., 2017a)*[1]

	Categoría	Construcción de la idea principal	Intervención
GRADO BAJO	**Grado P**	Asumida por el profesor de forma autónoma, sin la participación de los alumnos.	Profesor comienza la intervención y puede cerrarla
	Grado Pa	Asumida conjuntamente por profesor y alumno, con una mayor participación del profesor.	Profesor comienza la intervención con una pregunta cerrada o invasiva. Profesor puede finalizar la intervención con un feedback de añadir o redirigir
GRADO ALTO	**Grado Ap**	Asumida conjuntamente por profesor y alumno, con una mayor participación del alumno.	Profesor comienza la intervención con una pregunta abierta. Profesor o alumno puede finalizar la idea con un feedback
	Grado A	Asumida por el alumno de forma autónoma, sin la participación del profesor.	Alumno comienza la intervención y puede cerrarla

Fuente: elaboración propia.

Una vez categorizados los ciclos, se contabilizaron en valores absolutos y en porcentajes. De acuerdo con las características de la muestra para la comparación de porcentajes, se realizaron estadísticos chi-cuadrado de Pearson (χ^2) con un valor de significación menor del .05, con pruebas Z ($\alpha = .05$) para el análisis de los procesos cognitivos y de los procesos metacognitivos, así como para el grado de participación.

Medidas

Referente a los procesos cognitivos, los porcentajes de ciclos destinados, por un lado, a los procesos cognitivos (selección e integración) y, por otro lado, a los procesos metacognitivos (generalización y regulación).

Referente al grado de participación, los porcentajes de ciclos de grado bajo y grado alto, teniendo en cuenta si se producían en los procesos cognitivos o en los metacognitivos.

Fiabilidad

El análisis se realizó por dos jueces de forma independiente (dos autores de este trabajo), que resolvieron los desacuerdos mediante consenso (Kappa de Cohen entre 0.80 y 0.95, por lo que el análisis se consideró válido).

Resultados

Los resultados de la interacción de un profesor cuando resolvía problemas realistas conjuntamente con los estudiantes en el aula, en valores absolutos y en porcentajes, fueron, en primer lugar, atendiendo a los procesos que se promovieron en la interacción (Tabla 3):

[1]P: profesor; Pa: profesor-alumno; Ap: alumno-profesor; A: alumno

Tabla 3. *Porcentaje y frecuencia (entre paréntesis) de ciclos a los diferentes procesos*

	Proceso	% (frecuencia)
Procesos cognitivos	Selección	4.31% (5)
	Integración	50.00% (58)
Procesos metacognitivos	Generalización	2.59% (3)
	Regulación	33.62% (39)
Otros procesos[2]	Control	0.86% (1)
	Lectura	8.62% (10)
	TOTAL	100.00% (116)

Fuente: elaboración propia.

Se observa que más de la mitad de los ciclos se dirigieron a procesos cognitivos mientras que más de una tercera parte a procesos metacognitivos. Referido a los procesos cognitivos, la mayor parte de los ciclos se dirigieron a *Integración* (92.06%) frente a *Selección* (7.94%), con diferencias significativas [χ^2 (1, 100) = 70.560, p = .000]. Referido a los procesos metacognitivos, sobresale el porcentaje de ciclos dirigido a *Regulación* (92.86%) frente a los de *Generalización* (7.14%) con diferencias significativas [χ^2 (1, 100) = 73.960, p = .000].

En segundo lugar, atendiendo al grado de participación que se produjo en la interacción (Tabla 4):

Tabla 4. *Porcentaje y frecuencia (entre paréntesis) de ciclos dedicados por el docente al grado de participación*

Grado de participación	Proceso	% (frecuencia)	Total
Grado alto	Selección	2.86% (3)	60.38% (63)
	Integración	50.48% (53)	
	Generalización	2.86% (3)	
	Regulación	3.81% (4)	
Grado bajo	Selección	1.90% (2)	39.62% (42)
	Integración	4.76% (5)	
	Generalización	0.00% (0)	
	Regulación	33.33% (35)	

Fuente: elaboración propia.

Se observa que, referido al grado de participación, globalmente, existió un mayor porcentaje de *Grado alto* que de *Grado bajo*, con diferencias significativas [χ^2 (1, 100) = 4.000, p = .046]. Si se profundiza en los datos del grado de participación teniendo en cuenta su relación con los procesos cognitivos y los metacognitivos, existieron diferencias significativas en los procesos cognitivos de *Integración* (*Grado alto* 84.13% y *Grado* bajo 11.91%; [χ^2 (1, 94) = 55.149, p = .000]), en los procesos metacognitivos de *Generalización* (*Grado alto* 4.76% y *Grado bajo* 0.00%; [χ^2 (1, 7) = 3.571, p = .049]) y de *Regulación* (*Grado alto*6.35% y *Grado bajo* 83.33%; [χ^2 (1, 89) = 66.618, p = .000]).

[2]Otros procesos, Control y Lectura no fueron considerados en este trabajo

Discusión

En este trabajo se pretendió analizar si en la interacción que se produce entre un profesor y sus estudiantes cuando resuelven problemas en el aula influye el tipo de problemas que se utilizan. Para ello se consideraron los procesos promovidos y el grado de participación que se produjeron en la interacción. La mayor parte de los estudios previos que analizaron ese tipo de interacción utilizaron problemas rutinarios y los resultados mostraron una promoción baja de procesos cognitivos, una escasa existencia de procesos metacognitivos y una baja participación de los estudiantes (p.e., Chapman, 2006; Depaepe et al., 2010; Rosales et al., 2008; Rosales et al., 2012). En este trabajo se utilizaron problemas realistas y los resultados mostraron que la mayor parte de los procesos cognitivos fueron de grado alto de integración, una alta existencia de procesos metacognitivos de regulación y una alta participación de los alumnos especialmente en los ciclos de integración y generalización, y una baja participación de los alumnos en los de regulación.

Referido a los procesos cognitivos, llama la atención que la mayor parte de los ciclos fueran dirigidos al grado alto de integración. Esto podría deberse a la influencia de los problemas realistas ya que, cuando se resuelven problemas no mecánicos que suponen reto, los alumnos muestran interés y curiosidad que se traduce en una interacción más rica (Sánchez et al., 2015), a diferencia de cuando se resuelven problemas rutinarios (Chapman, 2006; Depaepe et al., 2010).

Referido a los procesos metacognitivos, es llamativo el alto porcentaje de ciclos de regulación en el desarrollo de la interacción, a diferencia de los resultados de estudios previos (p.e., Biryucov, 2004; Ramos et al., 2016). Es difícil valorar la importancia de esos resultados pero profundizar en estos resultados y la influencia que los problemas realistas tuvieron en ello podría ser objetivo de futura investigación.

Referido al grado de participación de los estudiantes, se obtuvo una alta participación de los mismos en la resolución a diferencia de los resultados obtenidos en estudios previos (p.e., Nathan y Knuth, 2003). Quizás la utilización de problemas realistas que pueden suponer un reto para el alumno pudo tener influencia en estos resultados (Sánchez et al., 2015).Que el mayor grado de participación de los estudiantes se produjese en ciclos de integración puede tener implicaciones educativas pues si se quiere promover la participación de los estudiantes se deberían favorecer la promoción de ciclos cognitivos de un grado alto de razonamiento. Por otro lado, parece lógico que el alto porcentaje de ciclos de regulación se correspondiese con un grado bajo de participación de los estudiantes al ser un aspecto metacognitivo que debería favorecer el docente, así como es llamativo que la totalidad de ciclos de generalización se correspondiese con un grado alto de participación, aunque ese aspecto merecería mayor profundización.

Conclusiones

El análisis de la interacción de un profesor cuando resuelve problemas realistas de forma conjunta con los estudiantes en el aula permite decir que, atendiendo a los procesos cognitivos que se promueven y al grado de participación de los alumnos, se produjo un alto porcentaje de procesos cognitivos promovidos, una alta alusión a procesos metacognitivos de regulación y una alta participación de los estudiantes especialmente en los ciclos cognitivos de integración y en los metacognitivos de generalización, aunque baja en los metacognitivos de regulación. Estos resultados que parecen indicar la influencia del tipo de tareas utilizadas en la interacción, concretamente problemas realistas aunque más investigación sobre ello sería necesaria. Ello va en la línea de las recomendaciones actuales de promover el razonamiento en las aulas (Rosales et

al., 2012), de desarrollar aspectos metacognitivos que favorezcan el desarrollo de las tareas y aumenten el grado de transferencia de la misma a otros entornos (White y Frederiksen, 1998) y de facilitar una mayor participación del alumnado (Bransford, Ann, Brown y Rodney, 2000).

Como fortalezas del estudio cabe destacar que previamente no se había analizado la interacción en el aula resolviendo de forma conjunta problemas realistas. Como limitaciones del mismo, se trata de un estudio exploratorio de un único profesor con sus estudiantes. Esta limitación puede solventarse ampliando la muestra; así mismo, podría ser analizada la interacción en diferentes niveles educativos, no sólo considerando la promoción de procesos cognitivos sino que se debería prestar especial atención a los procesos metacognitivos, algo que apenas se ha considerado en la literatura de Educación Matemática. Profundizar en dichos procesos metacognitivos de regulación atendiendo a sus aspectos de planificación, supervisión y evaluación también podría ser un tema de interés, así como la importancia de la participación de los estudiantes también debería ser considerada en esos estudios con relación a los diversos procesos promovidos. Por último, la consideración de otros tipos de problemas, por ejemplo los problemas abiertos, puede ser interesante en el campo.

Como implicaciones educativas, este trabajo podría ser un primer paso pues, si se pretende una enseñanza basada en un aprendizaje basado en el razonamiento, quizás sea necesario ampliar el abanico de tareas que se desarrollen para la formación de los estudiantes donde los problemas realistas podrían tener una consideración interesante.

Agradecimientos

Este trabajo se realizó en el marco del Grupo de Investigación Reconocido de Matemática Educativa (GIRME) y fue parcialmente subvencionado por la Universidad de Salamanca [2017/00111/001 (K118/ 463AC01)]; European Union, Project Erasmus+ [2017-1-ES01-KA203-038491], Ministerio de Economía y Competividad de España [PSI2015-66802-P], RED8-Educación Matemática y Formación de Profesores [EDU2016-81994-REDT].

Referencias

Biryucov, P. (2004). Metacognitive Aspects of Solving Combinatorics Problems. *International Journal for Mathematics teaching and learning*, *84.*

Bransford, J.D., Brown, A.L. y Cocking, R.R. (2000). Learning: From Speculation to Science. En Bransford, J.D., Brown, A.L. y Cocking, R.R. (Eds.), *How People Learn: Brain, Mind, Experience and School* (pp. 3-27).Washington D.C.: National Academy Press.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics Word problems. *Educational Studies in Mathematics, 62,* 211-230.

Depaepe, F., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2010). Teachers´ approaches towards Word problema solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education, 26,* 151-160.

Díaz, M.V. y Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 45*, 33-41.

Elbers, E. (2003). Classrroom interaction as reflection: learning and teaching mathematics in a community of inquiri. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 77-99.

Kantowski, M.G. (1981). Problem solving. En Fennema, E. (Ed.). *Mathematics Education Research: Implication for the 80´s*. NCTM: Reston.

Nathan, M.J. y Knuth, E.J. (2003). A study of whole classroom mathematical discourse and teacher change. *Cognition and Instrucion, 21* (2), 175-207.

Ramos, M., Rosales, J., Vicente, S. y Sastre, S. (2016). Aspectos metacognitivos durante la resolución de problemas en aulas de primaria. Actas. *VIII Congreso Internacional de Psicología y Educación, pp. 1848-1849.* Alicante: CIPE.

Rosales, J., Orrantia, J., Vicente, S. y Chamoso, J. (2008). Studying mathematics problem-solving classrooms. A comparison between the discourse of in-service teachers and student teachers. *European Journal of Psychology of Education, 23* (3), 275-294.

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J. Mª., Múñez, D. y Orrantia, J.(2012). Teacher-student interaction in joint Word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and Teacher Education, 28*, 1185-1195.

Sánchez, B., Carrillo, J., Vicente, S. y Juárez, J. A. (2015). *Análisis de la interacción alumnos-profesor al resolver problemas no rutinarios en aulas de Primaria.* Comité Interamericano de Educación Matemática. Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 3: Formación Continua. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz (pp. 34-47). República Dominicana.

Sánchez-Barbero, B., Ramos, M., Chamoso, J.M., Vicente, S., Rosales, J. y Rodríguez M.M. (2017a). Una herramienta para analizar el grado de participación en la interacción de maestro y estudiantes cuando resuelven conjuntamente tareas matemáticas. Actas. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, pp. 217-221.* Madrid: CIBEM.

Sánchez-Barbero, B., Ramos, M., Chamoso, J.M., Vicente, S., Rosales, J. y Rodríguez M.M. (2017b). Una herramienta para analizar los procesos que se promueven entre el profesor y los alumnos al resolver tareas matemáticas en el aula. Actas. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, pp. 217-221.* Madrid: CIBEM.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lassure, S. (1994). *Realistic considerations in mathematical modelling of school word problems*. En W. Schnotz, S. Vosniadou y M. Carretero, (Eds), New perspectives on conceptual change (pp. 175-189). Oxford: Elsevier.

Vicente, S. y Orrantia, J. (2007).Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura y Educación 19, 1,* 61-85.

Wells, G. (1999).*Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge: CUP.

White, B. y Frederiksen, J.R. (1998). Inquiry, modeling and metacognition: making science accessible to all students. *Cognition and instruction 16* (1), 3-118.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El análisis de textos como metodología de investigación en educación matemática

Flor M. **Rodríguez** Vásquez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
flormonr@hotmail.com
Ademir **Basso**
CEPACS-PR
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br
María S. **García** González
Universidad Autónoma de Guerrero
México
mgargonza@gmail.com

Resumen

El análisis de documentos oficiales como el currículum, programas de estudio, planificaciones, libros de texto, es una actividad que coadyuva en la comprensión de problemáticas en el campo de la investigación en educación matemática, por ejemplo, se pueden estudiar aspectos específicos, tanto teóricos como prácticos del desarrollo curricular, del aprendizaje, de la enseñanza. En este artículo, se exponen algunas tendencias, en la investigación en educación matemática, sobre el análisis cualitativo de libros de texto de matemáticas.

Palabras clave: análisis, cualitativo, textos, metodología, educación, matemática.

Análisis de textos y su impacto

De acuerdo a Begle & Gibb (1980, p. 8), la investigación debe considerar tanto la realidad escolar como los aspectos teóricos, por lo que comprende varios objetivos de estudio, entre los que menciona:

a) Los estilos cognitivos, características de la personalidad y habilidades individuales de los alumnos y del profesor como fondo para una teoría general sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

b) Los aspectos teóricos del aprendizaje, enseñanza y desarrollo del currículum.

c) El desarrollo de modelos de toma de decisiones que se puedan usar en las escuelas para

poder hacer elecciones inteligentes entre varias alternativas.

d) La evaluación de procedimientos instructivos, programas y materiales para predecir sus beneficios educativos.

e) El desarrollo de productos educativos como currículos, test y escalas de actitudes".

Para cada uno de estos objetivos, un enfoque metodológico, se fortalece con el análisis cualitativo de textos, con aportación teórica y/o práctica, investigación cualitativa fundamental para la educación matemática, toda vez que posibilitan nuevos temas de investigación y problemas en el campo.

Analizar textos debe ser una actividad inherente para los investigadores porque se deben hacer inferencias sobre la base de tal análisis, con impacto, en nuestro caso, en la educación. Por ejemplo, analizar libros de texto usando metodologías adecuadas resulta sustancial por su valioso papel en el sistema educativo y porque tienen características de alto impacto. Entre estas características, Escolano (2000), Choppin (1998), Stray (1991) refieren que los textos son un recurso educativo en la formación de las personas, un elemento fundamental en la transmisión del conocimiento, un apoyo indispensable para maestros y alumnos, un reflejo de la enseñanza, evidencia clara y contundente del currículo escolar, un instrumento de apoyo en el proceso enseñanza aprendizaje, además de que proporcionan información y cumplen con una función ideológica, también son una herramienta pedagógica porque facilita el aprendizaje, son un soporte de la verdad que la sociedad cree necesario transmitir a las jóvenes generaciones, por lo que cambia considerablemente según lugar, época y régimen político, además son un medio de comunicación potente que tiende a uniformar el discurso que transmite. Y es innegable que son parte del proceso formativo de socialización, de aculturación y de adoctrinamiento de las nuevas generaciones.

La incidencia de los libros de texto en el currículum ha sido considerada de implícita en el oficial, sin embargo en Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang (2002, citado en Fan, Zhu & Miao, 2013, p. 636) muestran una conceptualización, realizada por el grupo de investigadores TIMSS (Third International Mathematics and Science Study), del papel de los libros de texto en el currículum (ver Figura 1), lo que refleja la relación que tiene el currículum con los libros y es que estos son parte de la vinculación entre el currículum pretendido y el implementado. Por lo que se plantea que los textos inciden directamente en un cuarto nivel que es el currículum potencialmente implementado. De aquí la importancia que tienen los libros de texto y analizarlos debido a las intenciones oficiales y a las actividades que se llevan realmente al salón de clase.

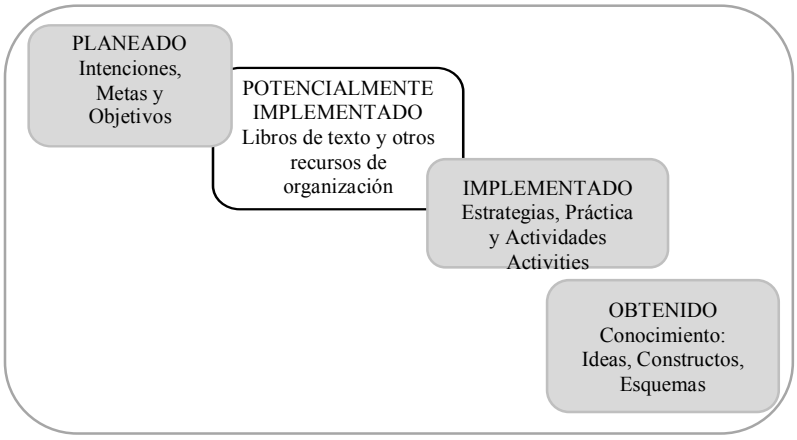


Figura 1. Conceptualización hecha por TIMSS (Fan et al., 2013, p. 636). (Traducción al español por los autores.).

Por tanto, en este artículo, exponemos algunos métodos del análisis de libros de textos en matemáticas que marcan tendencias en este tipo de investigación como parte metodológica.

Metodología cualitativa para el análisis de libros de textos

Para clasificar la literatura sobre la investigación de los libros de texto en matemáticas, Fan et al., (2013), proponen un marco teórico con base en el enfoque de la producción que analizaron (ver Tabla 1).

Tabla 1

Categorías para clasificar libros de texto.

Categorías	Descripción
Categoría 1 El papel de los libros de texto	Literatura acerca del papel de los libros de texto en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta categoría es necesaria para reflejar el enfoque y el debate de la mayoría de los artículos filosóficos o no empíricos centrados en el papel de los libros de texto de matemáticas.
Categoría 2 Análisis y comparación de los libros de texto	Estudios centrados en analizar las características pertinentes de los libros de texto de matemáticas en estudio y, en el caso de la comparación de libros de texto, comparar las similitudes y diferencias de dos o más series de libros de texto de matemáticas.
Categoría 3 Uso de los libros de texto	Estudios centrados en cómo los maestros y / o estudiantes utilizan los libros de texto; en otras palabras, cómo los libros de texto delinean la forma de enseñar y aprender matemáticas.
Categoría 4 Otras áreas	Se incluyen ampliamente todos los otros estudios, como los que tratan sobre libros de texto electrónicos y sobre la relación entre los libros de texto y el logro de los estudiantes.

Fuente: Fan et al., 2013, p. 635. (Traducción al español hecha por los autores.).

Quien realiza un análisis de texto, debe reconocer la tendencia o su propósito de aportación, y posteriormente puede recurrir a una técnica para analizar de textos. Por ejemplo, el análisis de contenido. Bardin (1986; p. 32) define el análisis de contenido como:

"[…] un conjunto de técnicas de análisis de comunicaciones, tendentes a obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes, permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/ recepción (variables inferidas) de estos mensaje."

Esta técnica también es usada para el análisis didáctico de los textos (escolares) de matemáticas. A este respecto Lupiáñez (2010), basado en Gómez (2007), Lupiáñez (2009) y Rico y Lupiáñez (2008), enfatiza que para el análisis didáctico se deben realizar tres procedimientos: el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.

Para el análisis de contenido, se podrían tener presentes preguntas como las siguientes: ¿Cuáles son las nociones básicas que considera?, ¿articulan esas nociones básicas el resto de

contenidos?, ¿se consideran los conocimientos fundamentales de cada tema?, ¿existe equilibrio entre aspectos conceptuales y procedimentales?, ¿qué sistemas de representación se emplean?, ¿alguno de esos sistemas prioriza sobre el resto?, ¿constituyen los sistemas de representación un contenido en sí mismo?, ¿se hace expresa la relación entre diferentes sistemas de representación? , ¿qué usos de las nociones matemáticas se destacan?, ¿se consideran campos de fenómenos o problemas en los que se aplican las nociones consideradas?, ¿en qué situaciones (personales, laborales/educativas, públicas o científicas) se encuadran esos fenómenos y problemas?

Para el cognitivo: ¿Qué enfoque de las matemáticas se propugna: instrumental, estructural y teórico, funcional y aplicado o integrado?, ¿se explicitan las expectativas de aprendizaje?, ¿en qué nivel se consideran (objetivos operativos, específicos, generales,...), ¿cuáles de las competencias matemáticas se enfatizan?, ¿se consideran o se destacan posibles errores o dificultades de aprendizaje?, ¿qué papel juegan esas limitaciones en el desarrollo de las lecciones o temas?, ¿se proponen tareas que sirvan para valorar el logro de expectativas o la superación de limitaciones?

Y finalmente para el de instrucción: ¿Se proponen tareas de distinta complejidad (reproducción, conexión, reflexión)?, ¿qué función desempeñan las tareas en el contexto de las lecciones (motivación, conocimientos previos, de exploración, de elaboración y construcción de significados, aplicación, ejercitación, síntesis,...)?, ¿con qué criterio se secuencian las lecciones y las tareas dentro de cada lección (desde el contenido, propuesta de enseñanza,...?, ¿se explicitan criterios o instrumentos de evaluación?, ¿se proponen tareas de evaluación?, ¿existe una relación entre los criterios, instrumentos o tareas de evaluación propuestos y la selección de contenidos y la concreción de expectativas realizada (si la hubiere)?, ¿existen indicaciones para la gestión del aula?

Otra aproximación para analizar textos, considera a las componentes de una configuración epistémica (Font & Godino, 2006, p. 69) (Figura 2), ellos mencionan que estas nociones pueden ser útiles para describir las características de los textos matemáticos de distintas épocas y orientación epistemológica. Además de que se permite investigar dos tipos de configuraciones epistémicas globales: las formales (o intra matemáticas) y las empíricas (o extra matemáticas).

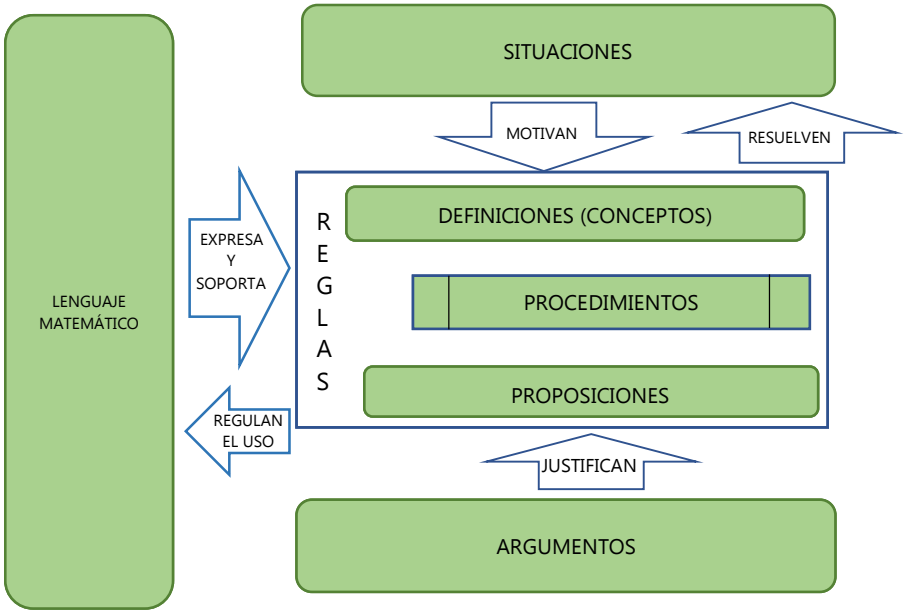


Figura 2. Componentes y relaciones en una configuración epistémica. Font & Godino (2006, p. 69).

Finalmente, otra tendencia sobre el análisis de textos es la que muestra Kuckartz (2014), quien menciona que hay tres formas distintas de análisis de texto cualitativo: el análisis temático de texto, el análisis evaluativo de texto y, análisis type-building de textos. Los cuales derivan del análisis de temático, la teoría fundamentada, el análisis clásico de contenido, entre otros.

Existen muchas más investigaciones sobre análisis de textos, pero las mencionadas en este documento fueron parte de una conferencia titulada "El análisis de textos como metodología de investigación en educación matemática" dictada en la 30 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, en Monterrey, México.

Ejemplos de metodologías diseñadas para la investigación de textos

Se presentan dos tablas en donde se muestran categorías y unidades de análisis para analizar: libros históricos (Tabla 1) y libros de texto (Tabla 2). Estos representan metodologías específicas que se usaron en una investigación que tuvo por objetivo realizar un desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales. Para detalles ver Rodríguez (2010). El objetivo de mostrarlas, es interesar al lector en la formulación de metodologías propias de investigación para analizar textos. Existe claramente una diferencia entre un libro histórico y un libro de texto. Mientras que un libro histórico es entendido, de acuerdo a Bernheim (citado en González (2002)) como el resultado de la actividad humana que por su destino o su propia existencia u otras circunstancias, son particularmente adecuados para informar sobre los hechos históricos y para comprobarlos; un libro de texto es considerado como un recurso propiamente didáctico. Por lo cual, también hay diferencias entre las metodologías de análisis de acuerdo al tipo de libro. Esto sugiere la generalización hacia metodologías para analizar libros dada su naturaleza y asimismo el tema específico.

Campo de Análisis	Unidades de Análisis		Categorización	Descripción general de los propósitos
Ficha de referencia de la obra	• Nombre del autor • Fecha de nacimiento y fallecimiento del autor • Primera edición • Edición analizada • Localización del manual utilizado		CP1	Enmarcar la obra en el momento en que fue escrita
Contextos y propósitos de la obra y el autor	• Momento histórico y lugar en que fue escrita la obra		CP1	Contextualizar y caracterizar la obra en función de los sucesos que influyeron para su divulgación
	• Contexto histórico –cultural de las matemáticas en general		CP2	
	• Formación del autor		CP3	
	• Estructura general del material	• Extensión y estructura del material • Secuenciación de los contenidos de la obra • Tipografía de la obra	CP4	
	• Objetivos generales de la obra		CP5	
	• Innovaciones introducidas por el material		CP6	
	• Otras obras publicadas		CP7	
Tipo de proceso utilizado en la resolución de ecuaciones	• Geométrico (G)	– Ejemplos de problemas – Tipos de expresiones utilizadas – Conceptos involucrados – Gráficas empleadas	PG	Explicar el tratamiento que se le dio a los métodos iterativos en distintos periodos
	• Algebraico (A)	– Ejemplos de problemas – Tipos de expresiones utilizadas – Conceptos involucrados	PA	
	• Numérico (N)	– Ejemplos de problemas – Tipos de expresiones utilizadas – Conceptos involucrados	PN	

Tabla 1. Metodología para analizar libros históricos.

Campo de Análisis	Unidades de Análisis		Categorización	Descripción general de los propósitos
Ficha de referencia del texto	• Nombre de los autores • Título del texto • 1ª. Edición (año) y editorial • Edición analizada y editorial • Localización del texto analizado		FRT	Conocer la ubicación del libro y el contexto en general
Análisis conceptual	• Conocimientos previos		ACCP	Definición y organización del concepto, tipo de representación, función de los problemas y ejercicios resueltos o propuestos
	• Conceptos	• Formal	ACCF	
		• Heurístico	ACCH	
		• Constructivo	ACCC	
	• Ejemplos y ejercicios	• De aplicación o argumentación de las definiciones o conceptos	ACEEA	
		• De la técnica de demostración de teoremas o corolarios	ACEET	
	• Representación del algoritmo iterativo	• Gráfico	ACRG	
		• Algebraico	ACRA	
		• Numérico	ACRN	
Análisis didáctico	• Objetivos e intenciones de los autores		ADOA	Mostrar los objetivos que los autores pretenden alcanzar
	• Corriente didáctica subyacente		ADCD	
	• Capacidades y habilidades que se quieren desarrollar		ADCH	
Análisis fenomenológico	• En torno a la matemática misma		AFTM	Mostrar los fenómenos que se toman en consideración con respecto al fenómeno en cuestión
	• En torno a otras ciencias		AFOC	
	• Fenómenos contextualizados		AFFC	

Tabla 2. Metodología para analizar libros de texto.

Para una explicación sucinta de ambas metodologías, se recuerda que ambas se usaron para investigar sobre el desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, por lo que se consideraron dos tiempos, el primero en donde se analizaron libros históricos de los siglos XVII, XVIII y XIX y el segundo en donde se analizaron libros de texto usados para la enseñanza del tema ecuaciones no lineales. Con base en estos dos tiempos y en su naturaleza, la primera metodología comprende el reconocimiento de la primera edición y de la edición analizada, ya que esto supone que pudo haber modificaciones del original. También comprende de entender el momento y lugar histórico de la obra y el contexto histórico y cultural de las matemáticas en general en el mismo periodo, pues esto supone de comprender los acontecimientos o factores que influyeron en la génesis del conocimiento expresado en los libros históricos. Finalmente por el tema, fue necesario clasificar, luego de un primer análisis

cualitativo, en el tipo de proceso identificado. La segunda metodología, diseñada para el análisis de libros de texto, contempla conocer la referencia general del texto, el desarrollo del concepto desde su parte conceptual, didáctica y fenomenológica.

Reflexiones finales

El análisis cualitativo de textos debe ser fundamental en educación matemática, y considerada en mayor o menor medida, por los investigadores para incidir en esta disciplina científica. Este análisis, tiene altas potencialidades de impacto tanto para los propios investigadores como objeto de estudio como para los docentes en una fase de rescate que puede ofrecer la investigación para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Particularmente, cuando se realiza un análisis de libros histórico o de texto, se vislumbra un camino para la comprensión de los conceptos pues se analiza directamente su génesis y desarrollo. Finalmente, del analizar los libros se espera una reforma en su estructura que favorezca en la comprensión en matemáticas.

Referencias y bibliografía

Begle, E. & Gibb, E. (1980). Why do research? En R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 3-19). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Choppin, A. (1998). *Los manuales escolares. Historia y actualidad*. París: Hachette

Escolano, A. (2000). Las culturas escolares del siglo XX. Encuentros y desencuentros. *Revista de Educación*, MEC, Núm. Extra, 201-218.

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education 45*(5), 633-646. doi: 10.1007/s11858-013-0539-x.

Font, V y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educ. Mat. Pesqui., São Paulo 8* (1), 67-98.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, España.

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative text analysis*. SAGE publications: London.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Rico L. & Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza.

Rodríguez, F. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, España.

Stray, C. (1994). Paradigms Regained: Towards a Historical Sociology of the Textbook. *Journal of Curriculum Studies 26* (1), 1–29.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.



Evolución del aprendizaje en matemáticas

José Vidal **Jiménez** Ramírez
Universidad Autónoma de Sinaloa
México
vidaljr@uas.edu.mx
Faustino **Vizcarra** Parra
Universidad Autónoma de Sinaloa
México
faustinovizcarra@uas.edu.mx

Resumen

En este estudio participaron cinco generaciones de estudiantes de tercer grado de bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa, con el objetivo de estudiar la evolución de cada generación después haber recibido una instrucción orientada a fortalecer las áreas de oportunidad detectadas en la primera generación de estudio. La primera generación realizó la prueba a lápiz y papel y a partir de la segunda lo hizo en línea. Una vez detectadas las deficiencias de la primera generación, se diseña una estrategia para que los docentes de matemáticas las atiendan desde primer a tercer grado, sin descuidar las fortalezas; este proceso se realiza con cinco generaciones de estudiantes. Para el análisis de las respuestas dadas por cada generación, se usa un enfoque de tipo cuantitativo descriptivo. De manera general, los resultados señalan que en los resultados de una generación a otra prevalecen las mismas deficiencias.

Palabras clave: aprendizaje, evaluación, estrategia de aprendizaje, estrategia de evaluación, nivel de logro, prueba objetiva y prueba objetiva

Introducción

En los últimos años, una de las mayores exigencias que ha planteado la sociedad mexicana, tanto al gobierno federal como al estatal y a las mismas instituciones educativas, es una educación de calidad para sus hijos. La presión para México no sólo es interna, también la evaluación externa que hace la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE, por sus siglas en inglés) mediante el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés), que en México se aplica a través del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) a una muestra de estudiantes de 15 años.

Los resultados no han sido favorables para México, así que, para atender dicha problemática y dar respuesta a las peticiones de la sociedad mexicana, la Secretaría de Educación Pública (SEP), en un primer intento de mejorar los resultados, aplica la prueba para la Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros Escolares (ENLACE), la cual ubica a los

estudiantes en los niveles de logro insuficiente, elemental, bueno y excelente (ver apéndice A), los cuales se consideran continuos. Dicha prueba fue diseñada por el Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior (CENEVAL), a solicitud de la SEP.

Los resultados obtenidos a nivel nacional del 2008 al 2014 muestran un incremento en los niveles de logro bueno y excelente, pero al haber escuelas en las que más de tres cuartos de sus estudiantes se ubican en dichos niveles, la SEP toma la decisión de reestructurar la escala de evaluación, ahora con niveles de logro I, II, III y IV que son continuos, siendo el nivel IV el de mayor jerarquía. Además, cambian de nombre a la prueba ENLACE a Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA). En su primera aplicación en el 2015, el porcentaje de estudiantes en los niveles de logro III y IV, fue muy por debajo a los niveles bueno y excelente de la prueba ENLACE 2014, y en las aplicaciones posteriores dichos porcentajes se incrementan. Cabe resaltar que la prueba ENLACE y la prueba PLANEA son la misma, lo único que cambia es la escala de los niveles de logro, como se menciona anteriormente, y en ambos casos, los dos niveles de logro de mayor jerarquía son los de interés para las instituciones educativas, pues el nivel de aprendizaje es un referente para la sociedad.

El caso particular del Bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa (BUAS), los resultados obtenidos del 2008 al 2009 muestran un estancamiento en la prueba ENLACE, es decir, dentro de los niveles en que se clasifica el nivel de logro, el 23.5% y 23.6% se ubican en los niveles bueno y excelente respectivamente. Como consecuencia de dichos resultados, la Dirección General de Escuelas Preparatorias (DGEP) implementa un plan de acción, en el sentido de mejorar el nivel de logro de los estudiantes, a través de la formación de docentes y estudiantes de alto rendimiento que fungen como asesores pares, en estrategias de cómo resolver pruebas objetivas estandarizadas optimizando el tiempo y sin el uso de calculadoras, para que éstos a su vez preparen a otros estudiantes.

Los resultados obtenidos del 2010 al 2012 muestran un incremento en los niveles de logro bueno y excelente, pero no son los esperados, así que se toma la decisión de aplicar en el 2013, los reactivos liberados de matemáticas de la prueba ENLACE 2012 previo a la aplicación nacional que hace la SEP. Los resultados muestran deficiencias similares entre los resultados de los estudiantes del año 2012 y 2013. Como consecuencia, nace el interés de estudiar las siguientes generaciones, por lo que se continúa aplicando los mismos reactivos de la prueba ENLACE 2012 a tres generaciones más, previo a la aplicación nacional que hace la SEP, con el objetivo de ver si se mantienen las mismas áreas de oportunidad (deficiencias) generación tras generación.

Marco teórico

La evaluación ha sido una de las debilidades en el ámbito educativo, pues vista desde el aprendizaje tradicional se concreta en calificar, la cual se basa en dar un número el cual regularmente se obtiene como resulta de un examen de conocimientos. Pero desde el enfoque por competencias, se da un cambio significativo respecto dicho concepto. De acuerdo con Frade Rubio (2009), la evaluación es el:

Proceso mediante el cual se hace un balance objetivo, válido, confiable, completo, integral y significativo de los logros obtenidos por los y las estudiantes en su aprendizaje, así como de los obstáculos, retos y desafíos que se presentan con vistas a tomar decisiones de cambio para mejorar (pág. 14).

Ahora, como parte del repertorio de instrumentos de evaluación, el examen es uno de ellos, en particular el examen objetivo estandarizado de opción múltiple (con una escala de niveles de logro) que se usa como diagnóstico, lo que permite hacer un análisis de la información y llegar a conclusiones que impacten en la mediación docente. Es decir, identificar los procesos de cambio mediante datos significativos desde una perspectiva que busca describir e interpretar los resultados para tomar decisiones asertivas sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El examen objetivo define en qué forma se identifica el nivel logro de los estudiantes con base a criterios establecidos, y es estandarizado, porque se califica e interpreta del mismo modo en todos los casos, sin importar dónde ni cuándo se aplique. Debido a su validez, mide con exactitud el nivel de logro de los estudiantes. Y es confiable, debido a la consistencia de la evaluación, cuando es aplicada en diferentes condiciones y contextos y se obtiene el mismo resultado (CENEVAL, 2016).

Por otra parte, como lo menciona Stobart (2008), que los usos y abusos de los exámenes llevan a ser precavidos con respecto al uso que le dan los resultados, como es el caso de esta prueba que permite conocer el nivel de logro (ver apéndice A) de los estudiantes, y partir de esto trazar las directrices que permitan la mejora continua de una generación a otra.

En cuanto a evaluaciones de esta magnitud, no se cuentan con antecedentes para el nivel bachillerato, en particular para el BUAS, así que este estudio, parte del estudio realizado con docentes y estudiantes realizado por Bonilla Ramos, Vizcarra Parra y Jiménez Ramírez (2013) y del proyecto sobre la prueba ENLACE en el BUAS realizado por Vizcarra Parra, Herrera Rios, y Meza Rivas (2014).

Objetivo

Analizar la evolución de las áreas de oportunidad de cinco generaciones de estudiantes ante un instrumento estandarizado de matemáticas.

Metodología

Enfoque metodológico de la investigación

Debido a que el BUAS no cuenta con un referente de esta naturaleza sobre sus estudiantes respecto al aprendizaje en matemáticas, se considera un enfoque de tipo cuantitativo descriptivo para estudiar las respuestas a los reactivos.

Participantes

Para los fines de este estudio, participan cinco generaciones de estudiantes (17-18 años) de tercer grado de bachillerato, de las tres fases especializadas que se ofertan en las 38 Unidades Académicas y 41 extensiones del BUAS: Ciencias Químico-Biológicas, Ciencias Físico-Matemáticas y Ciencias Sociales-Humanidades. De la primera generación participan 9496 estudiantes, de la segunda 4668 estudiantes, de la tercera 5632 estudiantes, de la cuarta 5849 estudiantes y de la quinta 6042.

Instrumento

ENLACE es una prueba objetiva y estandarizada diseñada por CENEVAL, que proporciona un diagnóstico del estudiante a nivel individual, y está alineada a todos los subsistemas del nivel medio superior a través al Marco Curricular Común (MCC), en particular a las competencias disciplinares básicas de los campos de Comunicación.

Es una prueba objetiva, estandarizada, con referencia a criterio, de aplicación censal y de bajo impacto. No fue diseñada para extraer conclusiones sobre el sistema del bachillerato, los subsistemas, las escuelas, ni sobre el desempeño de las entidades federativas. Sus condiciones de aplicación son las mismas para todos los sustentantes, su calificación no depende de la percepción subjetiva del evaluador y fue construida con una metodología que garantiza la validez y confiabilidad de los resultados. Y cabe mencionar que por ser una prueba estandarizada no es apta para aplicarse a alumnos con necesidades especiales o que usen una lengua diferente al español.

El instrumento está conformado por preguntas de opción múltiple: 50 reactivos están dedicadas al campo disciplinar de Comunicación (Comprensión lectora) y 60 al de Matemáticas (ver Tabla 1), de los cuales solo se consideran los de matemáticas para los fines de este estudio.

Tabla 1

Distribución de reactivos de Matemáticas en la prueba ENLACE 2012, por grupos de procesos a evaluar y por contenido matemático.

Contenidos	Procesos a evaluar			Total
	Reproducción	Conexión	Reflexión	
Cantidad	6	7	7	20
Cambios y relaciones	5	8	7	20
Espacio y forma	6	8	6	20
Total	17	23	20	60

Fuente: Secretaría de Educación Pública. 2012.

A continuación, en la Figura 1, Figura 2 y Figura 3 se muestra un reactivo de cada contenido que se menciona en la Tabla 1.

Para un trabajo de sociología, alumnos de secundaria investigaron el nivel de educación de los pobladores de su comunidad. Se hicieron 3 grupos y obtuvieron los siguientes datos de la escolaridad del grupo encuestado.

Escolaridad			Total de encuestados
Primaria	Secundaria	Preparatoria	
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	8%	150

Se sabe que hay un grupo de pobladores que no tienen estudios escolares.

¿Qué tabla representa el número de pobladores con su respectivo nivel escolar?

A)

Habitantes		
Primaria	Secundaria	Preparatoria
10	20	120

B)

Habitantes		
Primaria	Secundaria	Preparatoria
66	20	8

C)

Habitantes		
Primaria	Secundaria	Preparatoria
100	30	12

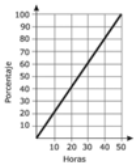
D)

Habitantes		
Primaria	Secundaria	Preparatoria
116	30	4

Figura 1. Ejemplo de un reactivo de cantidad.

En un laboratorio se estudia el moho que se desarrolla en dos panes de diferentes marcas para determinar una fecha de caducidad más exacta. Una vez que aparece el moho se cuentan las horas que tarda en cubrir 100% del pan; los registros se muestran a continuación.

Primer pan:



Segundo pan:

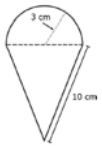
Horas	Porcentaje
10	10
20	40
30	90

¿En qué intervalo de tiempo ambos panes tienen la misma cantidad de moho?

A) 6 a 9 B) 11 a 14 C) 16 a 22 D) 26 a 29

Figura 2. Ejemplo de un reactivo de cambios y relaciones.

Guadalupe desea elaborar adornos en forma de helado, como el que se muestra en la imagen.



Puesto que requiere ponerle listón alrededor, necesitó calcular la medida del contorno de la figura y obtuvo _____ cm, considerando pi como 3.14.

A) 21.71 B) 29.42 C) 35.42 D) 38.84

Figura 3. Ejemplo de un reactivo de espacio y forma.

Proceso de la investigación

La primera generación de estudio que responde el instrumento lo hace a lápiz y las siguientes cuatro generaciones lo hacen en línea, todos bajo las mismas condiciones en un tiempo máximo de dos horas y media, sin usar calculadora o algún otro dispositivo electrónico que le evite hacer cálculos mentales.

Análisis

Se contrastan las respuestas correctas obtenidas por los estudiantes de las cinco generaciones, y se ordenan de la más a la menos compleja con respecto a los resultados de la primera generación por asignatura; con la intención de ver si hay diferencia en los resultados de una generación a otra. Para identificar los reactivos de mayor dificultad, se parte del criterio de que tengan un porcentaje menor o igual al 60%. A sí, bajo este criterio se determinan las debilidades y fortalezas de cada generación. A partir de los resultados de la primera generación, se desprende la estrategia para para la nivelación y prevención en las futuras generaciones. Al final, se realiza una descripción general del estudio, dando cuenta de los detalles más importantes que se presentan en los resultados contrastados.

Resultados

En la Figura 4, se muestran los resultados de cinco generaciones de estudiantes que resolvieron los reactivos de una prueba de opción múltiple, los cuales están distribuidos por asignatura de acuerdo con el currículum del bachillerato de la UAS.

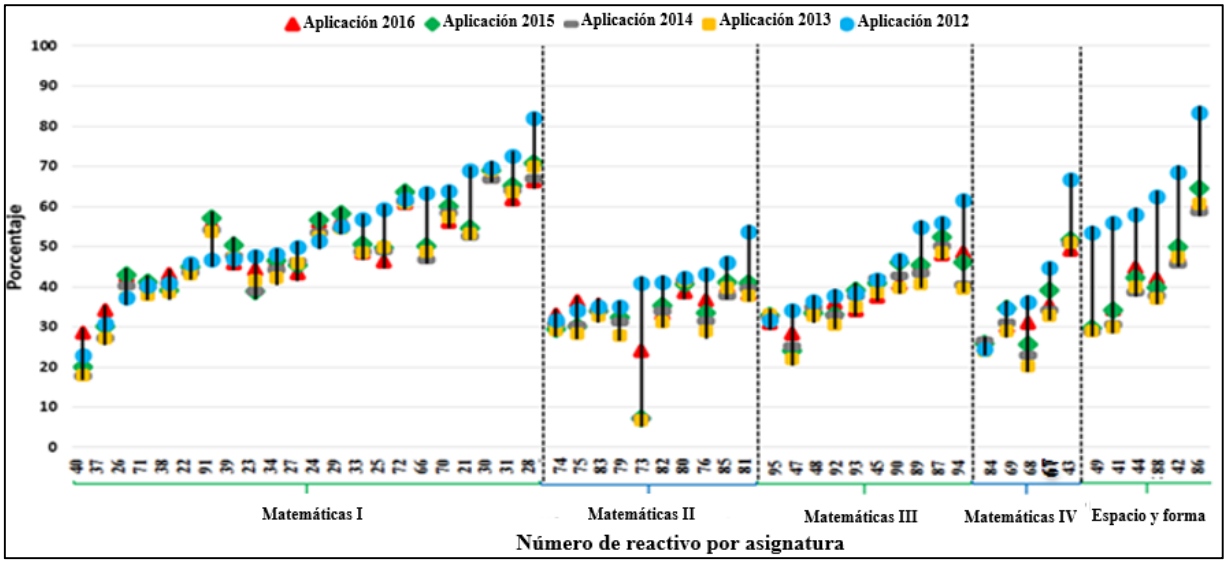
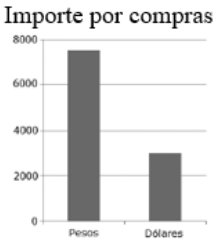


Figura 4. Porcentaje de respuestas correctas de alumnos de tercer grado de cinco generaciones de bachillerato, clasificados por asignatura; y en cada asignatura, ordenados de lo más a lo menos complejo con respecto a los resultados de la primera generación de estudio.

A continuación, se muestran los reactivos de mayor dificultad para los estudiantes en cada asignatura. En Matemáticas I, el reactivo 40 (ver Figura 5). En el cual el estudiante tiene que estimar un resultado para solucionar un problema de la vida cotidiana que implique conversión de unidades económicas y proporciones, razones o porcentajes.

Alejandra vende en su negocio artículos relacionados con la informática. Algunos de sus productos los compra en pesos y otros más en dólares. El importe de sus compras se muestra en la siguiente gráfica:



Alejandra decide abrir una sucursal de su negocio y planea incrementar sus compras; en pesos se incrementarán 35% y en dólares aumentarán 45%. Considerando el total de compras después del aumento, ¿cuánto dinero en pesos gastará en total? Considere que 1 dólar = $13.6.

A) $10,000 a $15,000 B) $35,000 a $40,000 C) $55,000 a $60,000 D) $65,000 a $70,000

Figura 5. Reactivo 40 de Matemáticas I.

En Matemáticas II, el reactivo 74 (ver Figura 6). En el cual el estudiante tiene que resolver un problema de la vida cotidiana que implique generar y resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$.

Un grupo de alumnos de bachillerato compra en $900 una licencia de software. Si se incorporan 5 alumnos más al grupo y se paga la misma cantidad por la licencia, la aportación de cada uno se reduce $9. ¿Cuántos alumnos había originalmente en el grupo?

A) 20 B) 25 C) 36 D) 45

Figura 6. Reactivo 74 de Matemáticas II.

En Matemáticas III, el reactivo 95 (ver Figura 7). En el cual el estudiante tiene que calcular el área de dos o tres caras de una figura tridimensional a partir de su representación gráfica y los valores de algunos de sus lados.

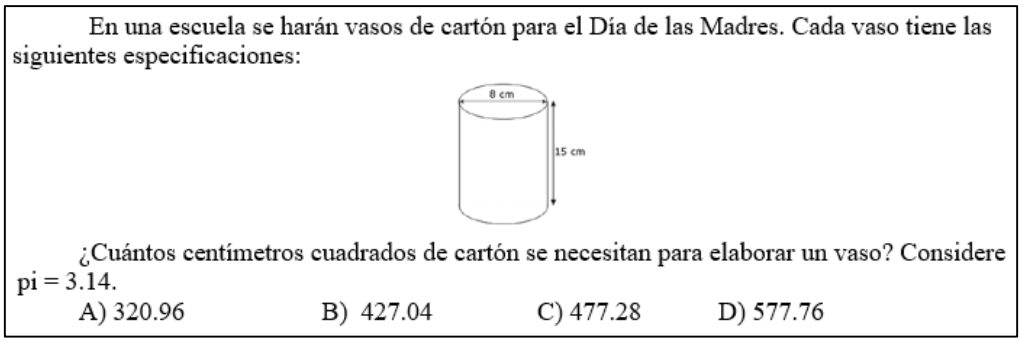


Figura 7. Reactivo 95 de Matemáticas III.

En Matemáticas IV, el reactivo 84 (ver Figura 8). En el cual el estudiante tiene que identificar la gráfica de la recta perpendicular que pasa por una ordenada al origen de una ecuación lineal.

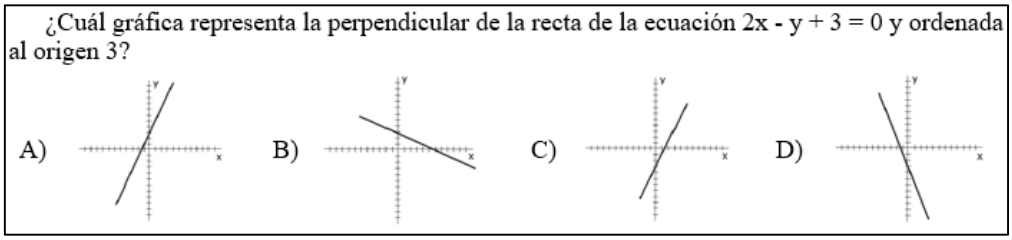


Figura 8. Reactivo 84 de Matemáticas IV.

Conclusiones

Lo primero que llama la atención en los resultados obtenidos, es que los reactivos de mayor complejidad para una generación de estudiantes prevalecen en la siguiente generación de sustentantes. Esto lleva a pensar si el docente implementa de la misma manera las estrategias de enseñanza y aprendizaje en cada generación de estudiantes, de tal forma que se tiene el mismo resultado en el aprendizaje de los estudiantes en cada generación, como que si el docente no realizara el proceso de metacongición sobre su práctiva docente. Por otra parte, los resultados obtenidos llevan a pensar en si los estudiantes tienen ganas de aprender o si van a la escuela por otros motivos.

De lo que si se está seguro, es que de una generación a otra presentan dificultades similares para resolver los reactivos propuestos. Es decir, no se observa una evolución en el aprendizaje de una generación a otra, pues cada generación presenta las mismas dificultades que la anterior y que las siguientes.

Como consecuencia de los resultados, surge el interés de observar el proceso de enseñanza y aprendizaje, y así tener una mejor comprensión del reto que significa para los estudiantes sustentar un prueba para determinar su nivel de logro al termino del bachillerato, en la cual, ponen en juego los conocimientos y habildades adquiridas durante los tres años de estudio.

Referencias y bibliografía

Bonilla Ramos, L. A., Vizcarra Parra, F., & Jiménez Ramírez, J. V. (2013). Universidad de los Andes: Evaluación de docentes y estudiantes de bachillerato mediante pruebas objetivas y estandarizadas de

matemáticas. Documento en línea: http://funes.uniandes.edu.co/4065/1/BonillaEvaluaci%C3%B3nCemacyc2013.pdf

CENEVAL (2016). PLANEA MS 2016: Manual para usuarios. Documento en línea: http://planea.sep.gob.mx/content/ms/docs/2016/manuales/Manual_usuarios_2016.pdf

Frade Rubio, L. (2009). Desarrollo de competencias en educación: desde preescolar hasta el bachillerato. México: Inteligencia Educativa.

Stobart, G. (2008). Tiempos de pruebas: Los usos y abusos de la evaluación. España:Morata.

Vizcarra Parra, F., Herrera Ríos, P., & Meza Rivas, M. (2014). El proyecto ENLACE en el bachillerato de la UAS . Akademeia, 4-14. Documento en línea: http://dgep.uas.edu.mx/akademeia/akademeia11.pdf

Apéndice A

Niveles de logro de la prueba ENLACE

Insuficiente. Eres capaz de resolver problemas simples donde la tarea se presenta directamente. Efectúas operaciones básicas con números enteros. Ejecutas operaciones aritméticas con signos de agrupación. Encuentras equivalencias entre fracciones simples. Resuelves problemas que requieren la identificación de figuras planas y tridimensionales, así como las partes que las conforman. Localizas puntos en un plano y/o determinas sus coordenadas. Encuentras relaciones gráficas o algebraicas sencillas entre dos variables y realizas cálculos con base en ello.

Elemental. Resuelves problemas relativos a porcentajes. Realizas operaciones básicas con fracciones. Sabes utilizar fórmulas y convertir unidades. Ordenas series de números. Describes el comportamiento de sucesiones numéricas y la relación entre ellas. Enuncias en lenguaje común una expresión algebraica y viceversa. Resuelves problemas geométricos bidimensionales y tridimensionales simples que involucran distintos elementos de una figura. Construyes figuras tridimensionales a partir de otras. Resuelves sistemas de ecuaciones lineales.

Bueno. Identificas la combinación de operaciones y procedimientos necesarios para resolver un problema. Traduces una relación lineal que se presenta de manera gráfica, a una expresión algebraica y viceversa. Determinas la solución de problemas que involucran unidades físicas. Realizas cálculos complicados con razones y proporciones. Aplicas el concepto de mínimo común múltiplo o máximo común divisor para resolver situaciones de la vida real. Calculas áreas y perímetros de composiciones geométricas simples. Identificas la gráfica y la expresión de relaciones cuadráticas con una o dos variables. Realizas inferencias acerca de una variable si conoces el valor de otra con la que guarda relación directa o indirecta. Resuelves ecuaciones cuadráticas con una incógnita que solucionan problemas reales

Excelente. Realizas diferentes procedimientos matemáticos y los integras para resolver problemas de la vida real, tales como conversiones, ecuaciones, análisis de gráficas y tablas, entre otros. Efectúas conversiones y estimaciones para resolver problemas reales. Identificas la gráfica de una recta a partir de condiciones dadas. Utilizas el teorema de Pitágoras para solucionar problemas geométricos. Resuelves problemas de mayor complejidad que implican el manejo de figuras, tanto planas como tridimensionales, y las propiedades geométricas de figuras incompletas. Puedes realizar cálculos a partir de dos funciones lineales o cuadráticas que se muestran de manera independiente y mediante distintas representaciones (numéricas, textuales, gráficas, entre otras).

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Presencia de habilidades propias del pensamiento matemático definidas en el curriculum chileno en ítems de elaboración cotidiana de 4º básico

Marcelo **Palacios Donoso**
Ministerio de Educación
Valparaíso, Chile
marcelo.palacios@mineduc.cl

Resumen

El propósito de la investigación es analizar la relación entre ítems que se elaboran en forma cotidiana en las escuelas y el curriculum actual de la asignatura de matemáticas, focalizado en el desarrollo de habilidades propias de la asignatura.

El proceso implicó la revisión de referentes de la política pública actual vinculados a los aprendizajes esperados para los chilenos. En esta línea aborda el actual cambio de paradigma que está viviendo el sistema escolar chileno, plasmado en la Ley General de Educación y el Curriculum nacional.

Metodológicamente se optó por realizar la investigación desde una perspectiva descriptiva-cuantitativa, utilizando la técnica de análisis de contenido temático para analizar los ítems recopilados.

El análisis muestra una baja presencia de las habilidades de la asignatura en los ítems revisados, lo que permite entregar orientaciones hacia la urgente apropiación curricular y el uso de la evaluación como instancia de aprendizaje.

Palabras clave: Evaluación, habilidades de pensamiento matemático, análisis de contenido temático, reflexión docente.

Introducción

En la actualidad, Chile está inmerso en un proceso de reforma a la educación que, entre varios puntos, busca actuar como sistema de apoyo a la mejora continua de los establecimientos que reciben subvención del estado. El curriculum escolar está evidenciando el proceso reformista desde la promulgación de la Ley General de Educación el año 2009, reglamento que surge desde las demandas de los movimientos sociales que exigían una nueva mirada país de la educación con alta presencia estudiantil secundaria ya en la primera década del presente siglo.

La Nuevas Bases Curriculares que rigen la educación básica chilena, plantean “un conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes que permitirán a los estudiantes avanzar en el

desarrollo de diversos aspectos, tanto en los ámbitos personal y social como en el de conocimiento y cultura"(Ministerio de Educación [MINEDUC], 2012, p. 27)

Para la asignatura de matemáticas los Objetivos de Aprendizaje están clasificados según los conocimientos disciplinarios, en cinco ejes fundamentales: Números y Operaciones; Patrones y Álgebra; Geometría; Medición; Datos y Probabilidades. Se establece un grupo de capacidades específicas para realizar tareas clave para los procesos lógico matemáticos, denominadas habilidades propias de la asignatura, que son: Resolver Problemas - Argumentar y comunicar – Modelar - Representar (MINEDUC, 2012). Además, entrega orientaciones para planificar el aprendizaje, destacando esta herramienta como "un elemento central en el esfuerzo por promover y garantizar los aprendizajes de los estudiantes", entregando importantes elementos de análisis y ejemplificando de manera concreta el ejercicio y necesidad de organizar los tiempos por medio de la planificación de las clases. Otra importante orientación que se entrega en los programas son las orientaciones para evaluar los aprendizajes, fundamentando para ello la evaluación como "una parte constitutiva del proceso de enseñanza...". El instrumento curricular del MINEDUC indica que, entre otros objetivos de la evaluación, se encuentran: La evaluación como fuente de información acerca de debilidades y fortalezas de los estudiantes y, como una forma de retroalimentar la acción pedagógica (MINEDUC, 2012).

Contexto

En marzo de 2017, el investigador elaboró una propuesta de trabajo con redes de docentes de matemáticas de escuelas municipalizadas, lideradas por MINEDUC en la Provincia de San Felipe de la Región de Valparaíso de Chile. En una serie de encuentros de redes cuyo objetivo principal era generar un espacio de reflexión y colaboración docente para la mejora de las prácticas, se contemplaba capacitación en didáctica de las matemáticas con foco en el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático, estrategias y trabajo colaborativo, esto basado en que grupos de docentes en constante reflexión sobre sus debilidades y fortalezas en ambientes de confianza son capaces al menos de cuestionar sus prácticas cotidianas (González-Weil y et al. 2014), de ahí la importancia y urgencia de generar los espacios para motivar dichas confianzas por parte de todos quienes forman parte del sistema escolar.

El trabajo con redes de docentes finalizó con un encuentro organizado a partir de las demandas de las redes, que fue conocer más sobre el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático. En dicha jornada participó además una académica especialista en didáctica de la especialidad, la que trabajó enfocada en la habilidad más demanda por la mayoría de los docentes participantes de las redes, La Resolución de Problemas. Surgió en conjunto la idea, en base a las confianzas adquiridas, de mirar las evaluaciones que diariamente se elaboran en las escuelas, revisar componentes que puedan dar luces de problemáticas que se puedan enfrentar y de ahí extraer elementos que permitan avanzar hacia la mejora.

La Agencia de la Calidad de Educación chilena, informó a fines del año 2016 los resultados de la prueba PISA 2015, la cual reveló que Chile está en los últimos lugares de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, siendo esta medición la que "busca evaluar en qué medida los estudiantes que se acercan al final de la enseñanza escolar obligatoria han adquirido competencias esenciales para una completa participación en la sociedad." (Agencia de la Calidad de la educación [ACE], 2016, p. 5)

El último informe de resultados SIMCE -Sistema de Medición de la Calidad de la Educación- evidencia que a nivel país los aprendizajes en la asignatura de matemáticas en 4° básico en los últimos años no han sufrido grandes variaciones, es más desde el 2011 hasta la medición 2017, éstos se mantienen constantes alrededor de los 260 puntos de un máximo de 330, lo que claramente no es un buen panorama (ACE, 2018)

Problema de investigación

A partir de lo anteriormente expuesto, la presente investigación se basa en analizar la relación existente entre los ítems que se realizan a diario en las escuelas y el curriculum nacional vigente, que pone énfasis en el desarrollo de habilidades propias de las asignaturas, estableciendo para ello la siguiente pregunta de investigación: **¿Cuál es la presencia de habilidades propias del pensamiento matemático definidas en el curriculum de la asignatura en los ítems construidos en forma cotidiana por los docentes?**

Objetivo de la investigación

Identificar la presencia de habilidades propias del pensamiento matemático definidas en el Curriculum Nacional en los ítems construidos por los docentes para evaluar los aprendizajes en la sala de clases.

Marco Referencial

En la senda de la necesaria categorización - clasificatoria del material recibido, según Rodríguez (como se citó en Schettini & Cortazzo, 2015) las normas de construcción están permanentemente sujetas a modificación en la medida en que se avanza en sumergirse en cada uno de los instrumentos, surgiendo nuevos elementos para la determinación de reglas de análisis. Para ello se usaron como referente dos documentos referenciales emanados desde la política ministerial, que son:

- Las **Bases Curriculares** vigentes, que entrega los lineamientos, énfasis, propósitos y Objetivos de Aprendizaje basales de las asignaturas.
- El **Programa de Estudio** vigente de la asignatura de matemáticas de cuarto básico, que contiene la especificidad de los Objetivos de Aprendizaje que deben ser cubiertos en el nivel mencionado.

Por lo tanto, se procedió a trabajar con categorías previamente establecidas en base a la revisión teórica y referencial del tema tratado que son las habilidades explicitadas en el programa de la asignatura de matemáticas de cuarto año básico. El proceso de categorización en este tipo de investigaciones puede caracterizarse como "un proceso clasificatorio" utilizando para ello un "conjunto de categorías preestablecidas a los datos, de acuerdo a reglas explícitas y certeras con el objetivo principal de cuantificar la frecuencia de los ítems en cada categoría" según Maxwel, (como se citó en Hemilse, 2011).

a) Concepto: Habilidades de pensamiento matemático o propias de la asignatura.
b) Categorías: Las Bases curriculares de educación básica 2012, señalan que la formación matemática se logra con el desarrollo de habilidades propias del pensamiento matemático, que se integran con los objetivos de aprendizaje y están interrelacionadas entre sí, estas

son: Modelar – Resolver Problemas – Argumentar y comunicar – Representar. (MINEDUC, 2012, p. 31) cada una con sus particularidades descritas en los referentes ministeriales.

Marco Metodológico

a) Enfoque: El tipo de investigaciòn es descriptivo con enfoque cuantitativo, puesto que se analizará la presencia o ausencia sobre los contenidos de los ítems que elaboraron los docentes. Echevarría (2016) define a los estudios de este tipo como aquellos que muestran la frecuencia con la que se presentan ciertas categorías en una investigación, lo que resulta de utilidad dentro de un tiempo y situación acotada. El enfoque cuantitativo responde a la necesidad de poder analizar los resultados que se obtengan de la revisión de la presencia en los ítems de las categorías definidas. Este enfoque "utiliza la recolección y el análisis de datos para contestar preguntas de investigación, confía en la medición numérica, el conteo y frecuentemente en el uso de la estadística para establecer patrones de comportamiento de una población" (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010, p. 5).
b) Recolección de datos: En la presente investigación utilizó el método de análisis de contenido temático, cuya técnica correspondiente se sustentó en la revisión de los ítems estableciendo para dicho análisis, categorías previamente establecidas desde los referentes teóricos que orientan el estudio, las cuales permitirán clasificar los resultados obtenidos. Respecto al concepto de análisis de contenido Andréu (2000) señala que, se centra en la búsqueda de la presencia – o ausencia - de ciertos términos o conceptos. Indica además que "las técnicas más utilizadas son las listas de frecuencias, la identificación y clasificación temática, y la búsqueda de palabras en contexto. Quizás la más frecuente consiste en buscar- y eventualmente analizar más detenidamente, con otra técnica- unidades en que aparecen una determinada temática." (Andréu 2000, p. 20)
c) Análisis de los datos: Se utilizó elementos de estadística descriptiva, ya que se busca analizar la relación entre herramientas de gestión, en particular la evaluación y el currículo mismo, esto con el fin de obtener nociones claras de la calidad de los instrumentos que se realizan en el contexto de las redes de docentes de matemáticas.
d) Objeto de estudio: Se tiene como objeto de estudio la identificación de la presencia o ausencia de las habilidades definidas tanto en el programa de estudio de la asignatura de cuarto básico de la asignatura de matemáticas, por lo cual se hace necesario establecer la clasificación en categorías para su posterior análisis. Lo anterior de acuerdo a lo expuesto por Noguero (2002), el tratamiento de los datos en clasificación como "la presencia o ausencia de ciertas reacciones, originalidad, novedad de ciertos aspectos, contenido latente de la comunicación" determinado claro está, con la necesidad de seguir pasos rigurosos orientados a un tratamiento más objetivo que en los análisis que se realizan. (Noguero, 2002, p. 173)
e) Unidad de análisis: Corresponde a los ítems que se encuentran en las diversas evaluaciones que construyeron y compartieron 10 docentes durante el año 2017. Los docentes son profesores de Educación General Básica que realizan además otras asignaturas, los que laboran en establecimientos públicos de las comunas participantes.

Resultados

La siguiente tabla, muestra los estadísticos Media y Moda aplicados a los datos obtenidos para las categorías de las habilidades propias de la asignatura de matemáticas

Tabla 1

(1) Ausencia – (2) Presencia de las 4 habilidades propias de la asignatura consignadas en las bases curriculares

	Modelación	Resolución de problemas	Argumentar y Comunicar	Representar
N Válido	110	110	110	110
Moda	(1)	(1)	(1)	(1)

Fuente: Elaboración propia vía análisis de ítems

Estos primeros resultados indican la tendencia hacia la ausencia de las 4 categorías en los 110 ítems analizados. A continuación, se muestran los porcentajes de ausencia y presencia para cada una de las categorías revisadas en los ítems analizados.

Tabla 2

Porcentaje de ausencia y presencia en los ítems de las habilidades de pensamiento matemático.

	Ausencia	Presencia
Modelación	81%	19%
Resolución de problemas	65%	35%
Argumentar y comunicar	91%	9%
Representar	90%	10%

Fuente: Elaboración propia vía análisis de ítems

Análisis por Categoría

Modelación: Con un 19% de presencia en los 110 ítems analizados, los indicadores propios de esta categoría, transitan específicamente en aplicación, selección y evaluación de modelos, patrones, fórmulas y otras, dadas o halladas por diversos procesos por parte del estudiante.

La habilidad de modelación es nueva entre los conocedores del currículo nacional y en el trabajo con las redes de docentes aparece como aquella con mayor demanda de capacitación. El proceso de modelación engloba actividades esenciales en la persecución de una construcción del pensamiento y competencias matemáticas.

- Identificar los elementos matemáticos pertinentes en relación a un problema situado en la realidad;
- Representar el problema de un modo diferente a la lengua materna, organizándolo entre otras cosas de acuerdo a conceptos matemáticos y realizando suposiciones apropiadas;

- Comprender las relaciones entre el lenguaje utilizado para describir el problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para entenderlo matemáticamente;
- Localizar regularidades y relaciones;
- Traducir el problema en términos matemáticos, es decir, en términos de un modelo matemático (MINEDUC et al., 2016)

Resolución de Problemas: Esta habilidad es la que consigna mayor presencia de las categorías de este grupo con un 35% de presencia.

Esta habilidad presenta indicadores más genéricos que sus pares, ya que sólo uno de ellos señala conceptos o ramas de aplicación como las expresiones numéricas y las geométricas. Es por esto importante explicitar y dejar en claro los elementos diferenciadores entre problemas o ítem que contengan situaciones problemas y cómo clasificarlo en esta habilidad.

Ya desde las primeras definiciones y aportes de G. Polya en 1945, la Resolución de Problemas se ha convertido en un elemento de análisis y discusión entre los docentes y curriculistas en torno a la matemática. El denominado Informe Cockcroft (1985) se expresa "La Resolución de Problemas es consustancial a las Matemáticas. Las Matemáticas sólo son útiles en la medida en que puedan aplicarse a una situación concreta...", y más adelante "todos los alumnos han de adquirir cierta experiencia en la aplicación de la Matemática, aprendida en situaciones cotidianas, a la resolución de problemas que no constituyan exactamente repeticiones de los ejercicios ya practicados". (Alonso & Martínez, 2003). En este punto cobra sentido la propuesta acerca de la didáctica de la matemática recogida por Berenguer y Martínez (2003) destacando lo realizado por Chevallard (1992) y Gascón (1994) los que proponen un proceso bajo el paradigma de la modelización.

Argumentar y Comunicar: La habilidad de argumentar y comunicar obtuvo el más bajo porcentaje de presencia entre las cuatro habilidades propias de la asignatura con sólo un 9%. Es necesario clarificar lo que se espera de un ítem cuando se quiere desarrollar dicha habilidad. De acuerdo al programa, esta habilidad se evidencia cuando el estudiante es capaz de "descubrir inductivamente regularidades y patrones en sistemas naturales y matemáticos y tratar de convencer a otros de su validez", en específico para la educación básica, se espera que los estudiantes "generen cadenas cortas de implicaciones lógicas, que les permitirán hacer predicciones eficaces en variadas situaciones concretas" (MINEDUC, 2012, p. 34).

Representar: Con presencia de un 10% de los ítems analizados, los que presentaban al menos uno de los indicadores de la categoría. Estos se centran en procesos como el uso, creación y extrapolación de situaciones que involucren tablas, esquemas, expresiones matemáticas y otros, que logren explicitar la resolución de situaciones problemáticas. De acuerdo al programa de la asignatura de 4º básico, la representación persigue el tránsito hacia niveles de abstracción derivados desde situaciones concretas, aquellas con las que estudiante esté más familiarizado. Cuando revisamos la propuesta de progresiones de la habilidad sugerida en el programa mencionado, aparece un indicador completamente ausente en los ítems analizados, que es el de crear un problema real a partir de una expresión matemática, esto pese a que el programa de matemáticas entrega propuestas claras para trabajar la habilidad. Si se piensa en los diversos estadios que se deben favorecer con esta habilidad que van desde lo concreto a lo abstracto, implica una continuidad de capacidades que deben ser abordadas.

La complejidad de esta habilidad radica en la necesidad de una visión de conciencia de la trayectoria del estudiante, esto es pensar en el logro del aprendizaje en el tiempo, trabajando desde los niveles cognitivos más bajos hacia los superiores monitoreando dicho proceso en el estudiante. La notable descodificación e interpretación a la que debe llegar una persona, para así diseñar una representación que refleje los aspectos clave de una situación de un alto grado de complejidad, es una de las principales características de dicha habilidad (Solar, 2017). Por lo que cabe preguntarnos, sí es que todos quienes enseñamos matemáticas hemos realizado ese tránsito.

En resumen, las categorías del tipo habilidades propias de la asignatura, presentan una baja presencia, ya evidenciada la Tabla 1 con el 19% de presencia contra el 81% de ausencia en los 110 ítems pertenecientes a 10 distintos docentes que compartieron su trabajo. Esto presenta un gran desafío para quienes estamos en la senda de la apropiación curricular y promoción del significado de las matemáticas escolares ya que se puede establecer un trabajo más focalizado en aquellas específicas que presentan menores porcentajes, como lo son Representar - Argumentar y Comunicar con un 10% y 9% de presencia respectivamente.

Proyecciones y sugerencias

Sugerencias:

- Focalizar los acompañamientos de los equipos de gestión curricular al interior de las entidades educativas, elaborando instrumentos que permitan observar la implementación curricular de manera eficiente y efectiva.
- Es prioritaria y urgente la apropiación del curriculum en su integralidad, ya que de esta manera se podrá realizar un acompañamiento que impacte positivamente en la práctica docente.
- Generar espacios de reflexión al interior de las escuelas, en los que se pueda no tan solo debatir sobre la acción docentes, sino que también se conviertan en un espacio en los que los profesores puedan mirarse el uno al otro, con el ojo puesto en las metodologías, planificación, evaluación y retroalimentación como instancias propicias para favorecer los aprendizajes.
- Focalizar el trabajo de las Asesorías Técnicas Externas en la comprensión y operacionalización de las habilidades propias de las asignaturas, esto es estregando capacitación y acompañamiento en las cuatro habilidades una por una y en su aplicación y comprensión conjunta por parte de los docentes.

Proyecciones:

Se adquirió un compromiso con quienes apoyaron la investigación desde sus inicios, este incorporaba la generación de instancia de retroalimentación a los sostenedores respectivos y supervisores ministeriales que participaron de la propuesta. En ese sentido los análisis obtenidos podrán llegar a los consejos de profesores y generar las instancias de trabajo que busquen la mejora en las escuelas.

Se espera que la presente investigación pueda ser utilizada por los equipos directivos, docentes y equipos técnicos de los sostenedores de las comunas involucradas u otras que accedan a la información aquí obtenida.

Los investigadores Vallejo y Molina (2014) abordan las diferentes problemáticas de la evaluación, por lo que este documento se proyecta como un elemento generador de la necesaria reflexión de los diversos actores que tienen a cargo el proceso evaluativo. Es necesario dejar de

realizar acciones desarticuladas, como destacan los autores mencionados y comenzar a mirar la evaluación como elemento de análisis de situaciones y de toma de decisiones.

Referencias y bibliografía

Agencia de la Calidad de Educación, [ACE], (2016). PISA 2015. *Programa para la evaluación internacional de estudiantes OCDE*. Recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_PISA2015.pdf

Agencia de la Calidad de Educación [ACE], (2018). *Resultados SIMCE 2017*. Recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/PPT_Conferencia_ER_2017_web_3.pdf

Alonso, I., & Martínez, N. (2003). *La resolución de problemas matemáticos. unacaracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la matemática. Revista Pedagogía Universitaria (Vol. 8).*

Andréu, J. (2000). *Las técnicas de Análisis de Contenido: Una revisión actualizada.Recuperado de http://maa.centrodeestudiosandaluces.es/biblio/imagendoc_90h0101.PDF*

Echevarría, H. (2016). *Diseños de investigación cuantitativa en psicología y educación. (Universidad Nacional de Río Cuarto, Ed.) (UniRío). Córdoba.*

González-Weil, C., Gómez Waring, M., Ahumada Albalay, G., Bravo González, P., Salinas Tapia, E., Avilés Cisternas, D., Santana Valenzuela, J. (2014). *Contribución del trabajo colaborativo en la reflexión docente y en la transformación de las prácticas pedagógicas de profesores de ciencia escolares y universitarios. Pensamiento Educativo:Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 51(2), 75–85.*

Hemilse, M. (2011). *La integración de metodologías: algunas posturas acerca de sus posibilidades y dificultades, en Contribuciones a las Ciencias Sociales.* Grupo EUMED.NET de la Universidad de Málaga.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación,* 5ta Ed.

Ministerio de Educación, MINEDUC. (2012). *Programa de Matemática 4º Básico.* Recuperdo de: https://www.curriculumnacional.cl/614/w3-propertyvalue-49369.html

Ministerio de Educación, Pedreros Matta, A., Segura, J. C., Molina Martínez, S., Santana, V., & Olivari, S. (2016). Desarrollo de habilidades: aprender a pensar matemáticamente 7° y 8° año de Educación Básica. Recuperado de: http://media.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/28/2016/09/2-habilidad-de-modelamiento-web.pdf

Noguero, F. (2002). full-text. Revista de Educación, Univeridad de Huelva ,España. Recuperado de: http://media.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/28/2016/09/2-habilidad-de-modelamiento-web.pdf

Schettini, P., & Cortazzo, I. (2015). Análisis de datos cualitativos en la investigación social. Buenos Aires. Recuperdo de: http://media.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/28/2016/09/2-habilidad-de-modelamiento-web.pdf

Solar, H. (2017). Estrategias didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas Antecedentes. Santiago, Chile: PUC. Recuperado de: http://www.accionmatematica.cl/wp-content/uploads/Seminario-CMM.pdf

Vallejo, M., & Molina, J. (2014). La Evaluación Auténtica De Los Procesos Educativos. Revista Iberoamericana De Educación, 64(1022–6508)), 11–25 (ISSN)

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Actualización de los programas de estudio de Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria: retos y horizontes

Cristina **Alvarado** Valencia
Escuela Nacional Preparatoria, Universidad Nacional Autónoma de México
México
pequeio@yahoo.com.mx

Leticia **Sánchez** López
Escuela Nacional Preparatoria, Universidad Nacional Autónoma de México
México
leticia.sanchez@enp.unam.mx

Maricela **Lugo** Zacarías
Escuela Nacional Preparatoria, Universidad Nacional Autónoma de México
México
marycielo_80@yahoo.com.mx

Resumen

Se presenta el proceso integrador de toma de decisiones que culminó en la actualización de los programas de estudio de Matemáticas de la Escuela Nacional Preparatoria. Este proceso se inscribió en un proyecto más amplio, en el que participaron los funcionarios, alumnos, exalumnos, docentes y trabajadores administrativos de la ENP, y académicos de otras Facultades y Escuelas de la Universidad Nacional Autónoma de México. El documento no es un reporte de investigación, su finalidad es ofrecer una reflexión sobre la importancia que tiene la construcción de una reforma curricular protagonizada por su propia comunidad académica, así como de los cambios que se generan en la concepción de la institución, los docentes y los estudiantes. Estos cambios deben propiciar otras formas de interacción en el salón de clases, sólo así la propuesta de actualización curricular y en específico, de las asignaturas relacionadas con las matemáticas, podrá implementarse con éxito.

Palabras clave: modificación curricular, bachillerato, educación matemática realista, modelación.

Contextualización de la Escuela Nacional Preparatoria

Antecedentes

La Escuela Nacional Preparatoria se fundó en 1867 como parte de un plan nacional liberal

de educación que pretendía contribuyera a la modernización del país. Desde ese año hasta nuestros días han transcurrido 150 años en los cuales han tenido lugar sólo cuatro reformas curriculares, la última de ellas fue aprobada en este año, 2018.

Desde sus orígenes el proyecto nacional referido estuvo arraigado a las ideas de la Ilustración, de ahí su carácter gratuito, obligatorio y laico. En la creación de la ENP tuvieron gran influencia las ideas de Gabino Barreda, quien adaptó a la realidad mexicana el positivismo de Augusto Comte. Barreda afirmaba que la educación científica debía ser a la vez enciclopédica y homogénea. Con lo enciclopédico se refería al estudio de las generalidades de las diversas ciencias, mientras que lo homogéneo se cristalizaría en la impartición de los mismos conocimientos básicos para todos, lo que sería útil para generar una uniformidad de opiniones, que se traduciría en un camino seguro hacia la paz y el orden social, que en esa época eran aún frágiles (Pérez-Monoy, 2006).

Las carreras profesionales se dividían en siete grupos. Por ejemplo, en el primero se encontraban los abogados; en el segundo los farmacéuticos, veterinarios, médicos, cirujanos, etc. y en el cuarto los ingenieros de minas, mecánicos, civiles, topógrafos, hidromensores, geógrafos e hidrógrafos. El primer plan de estudios constaba de 34 asignaturas que deberían cursarse en cuatro o cinco años dependiendo del grupo de la carrera que se elegía. Las asignaturas estaban clasificadas en nueve áreas:

- A1 Lengua y Literatura: gramática española, gramática general, literatura, poética y declamación.
- A2 Lenguas extranjeras: francés, inglés, alemán, italiano, latín y griego.
- A3 Matemáticas: aritmética, álgebra, geometría, trigonometría rectilínea, trigonometría esférica, geometría analítica, geometría descriptiva y cálculo infinitesimal.
- A4 Ciencias naturales: mecánica racional, física experimental, química general, elementos de historia natural.
- A5 Historia: cronología, historia general, historia nacional, paleografía.
- A6 Geografía: cosmografía, geografía física y política, especialmente de México.
- A7 Filosofía y moral: ideología, lógica, metafísica, moral.
- A8 Dibujo: Dibujo de figuras, de paisaje, lineal y de ornato.
- A9 Otras: taquigrafía y teneduría de libros.

Aunque en 1869 se hizo una reforma al plan de estudios debido a la manifestación de inconformidades de los estudiantes, las ideas originales del enfoque positivista se mantuvieron intactas. Los siguientes cambios estructurales en el plan de estudios se realizaron en 1964 y en 1996. En éste último, se concibe el aprendizaje bajo un enfoque en el que "el alumno se transforma en el arquitecto que construye sus propios conocimientos", en relación con la enseñanza se afirma que debe estar "centrada en el alumno", por lo que se infiere una tendencia constructivista, aunque no se declara de manera explícita.

La ENP en la actualidad

La cobertura de la educación media superior en México alcanza el 73 %. En la Ciudad de México y en el Estado de México, las escuelas con mayor demanda son la Escuela Nacional Preparatoria (9 planteles) y la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (5 planteles), ambos pertenecientes al subsistema de bachillerato de la UNAM. En el último Concurso de Asignación a la Educación Media Superior para la Zona Metropolitana y para

veintidós municipios conurbados del Estado de México participaron 311 564 estudiantes, de los cuales el 57.1% aspiraban un lugar en las aulas de la UNAM, pero sólo lo consiguieron 33 927 (Poy-Lozano, 2018, 27 de julio). En el sector metropolitano y sus periferias prevalece la idea de que es "mejor" estudiar en una preparatoria de la UNAM. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes de primer ingreso desconoce tanto el plan de estudios como los programas de estudio de las asignaturas que cursarán en su paso por esta institución.

Como ya se ha señalado, el Plan de estudios vigente de la ENP (PE-96) data de 1996. Después de veintidós años, en el presente ciclo escolar se implementa la primera actualización de los programas de estudio que lo conforman, el plan de estudios no sufrió modificaciones.

Proyecto de Modificación Curricular (PMC)

En junio del año 2012 la Dirección General de la ENP da a conocer una iniciativa llamada Proyecto de Modificación Curricular que incluye la realización de diversas acciones (Jurado-Cuéllar, 2012): la elaboración de un diagnóstico de los planes de estudio vigentes, la construcción de un modelo educativo, la formación de sus docentes para participar de este proceso de cambio curricular, la elaboración de una propuesta de planes de estudio, la elaboración de un programa de formación y actualización que permita la instrumentación de planes y programas en el aula, así como el diseño de los programas de estudio. En todas las acciones referidas se promovió y priorizó la participación de la comunidad académica de la ENP, así como de expertos en cada disciplina y en pedagogía de cada disciplina, de otras escuelas y facultades de la UNAM y también externas.

Diagnóstico del Plan de Estudios

El elemento más sobresaliente para la realización del diagnóstico fue el empleo de una *estrategia metodológica participativa*, en la cual se instruyó a los docentes para hacer una consulta a diferentes sectores de la comunidad sobre siete indicadores: institucional, docentes, estudiantes, modelo educativo, plan de estudios, programas de estudios y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. Fueron consultadas 3, 533 personas pertenecientes a 8 sectores: administrativo-Directivos ENP, administrativo-Directivos de Facultades, administrativo-Personal administrativo, académico-Profesores, académico-Estudiantes, académico- Estudiantes egresados, Investigadores en el área educativa, órganos colegiados-Consejo Técnico. La Dirección de Planeación de la ENP se encargó de generar formatos que orientaran a las comisiones de docentes durante la realización de las entrevistas: incluían el objetivo, las instrucciones y una guía de contenidos para las entrevistas, así como el instrumento de evaluación. La información obtenida se organizó en tablas en las que se separaban las fortalezas y debilidades relacionadas con cada indicador.

En el documento diagnóstico final se integraron 4 apartados: revisión del contexto institucional, nacional e internacional, revisión y análisis del plan de estudios vigente, revisión del proceso educativo a partir de algunas características socio-demográficas y finalmente la revisión del proceso educativo en términos de los indicadores de egreso de los estudiantes. Este documento fue dado a conocer a toda la comunidad docente de la ENP, además se promovieron espacios de discusión colectiva conocidos como Seminarios de Análisis de la Enseñanza Locales (SADE) en cada plantel. Se trabajó desde la base académica, en reuniones por grupos colegiados y al final del ciclo escolar 2012-2013 en un SADE General se construyó una propuesta validada por los nueve planteles de cada colegio sobre los retos de la ENP en el contexto de la educación mundial, que fue entregada y analizada por la Secretaría de Planeación. Este proceso dinámico

de comunicación es el que permitió que se fuese gestando lo que sería el modelo educativo que debería guiar los programas de estudio de cada asignatura.

Programas de estudio de Matemáticas

A continuación referiremos las acciones posteriores al Diagnóstico del Plan de Estudios específicamente para el caso de las asignaturas de Matemáticas.

Construcción de un modelo educativo

La concepción del aprendizaje que adopta la ENP es como un proceso intencionado, guiado, autorregulado, que se construye a nivel individual y colectivo; en el que los nuevos conocimientos toman sentido y significado, estructurándose con base en los ya adquiridos, siempre con el contexto social. El modelo educativo contempla enfoques participativos para el acceso al conocimiento y su integración a las demandas sociales. Las estrategias de enseñanza y de aprendizaje deben tener su origen en problemas auténticos que permitan el aprendizaje situado y significativo mediante la incorporación de elementos para el manejo inteligente de la información, potenciando el desarrollo de la creatividad, capacidades, habilidades y valores de sus estudiantes a través de métodos y técnicas como el aprendizaje cooperativo, el estudio de casos, el aprendizaje basado en problemas y en proyectos, entre otros (DGENP, 2013). Se adoptaron cinco ejes transversales como herramientas para el diseño curricular: lectura y escritura de textos para aprender y pensar, habilidades para la investigación y la solución de problemas característicos del entorno actual, comprensión de textos en lenguas extranjeras, aprendizajes y construcción del conocimiento con tecnologías de la información y la comunicación y la formación de valores en congruencia con la coyuntura de los desafíos y transformaciones del mundo actual.

Bajo este enfoque de modelo educativo, docentes que impartían las asignaturas de matemáticas de los nueve planteles de la ENP fueron convocados a participar en diversas formas y momentos, para el diseño y la revisión de una primera versión de los programas de estudio de esta disciplina. La esencia de éstos es el uso de problemas en contexto, contrastante con el modelo de los anteriores programas. El marco teórico que lo sustenta es la Educación Matemática Realista (EMR), enfoque formulado por Freudenthal. En un modelo tradicional, los problemas en contexto son presentados al final, para "aplicar" lo que aprendieron, mientras que en el marco de la EMR, los problemas en contexto y situaciones de la vida real son constitutivos de la emergencia de los conceptos matemáticos. La EMR involucra el uso de contextos, el uso de modelos, el uso de las producciones y construcciones de los alumnos y el carácter interactivo del proceso de enseñanza (HeuvelPanhuizen, 2009).

Programas de estudio de Matemáticas

La metodología adoptada para la escritura de los programas de matemáticas constó de la formación de los profesores participantes en su elaboración mediante cursos, seminarios (uno internacional en 2013), talleres y reuniones de trabajo (2014-2018). Algunos temas y cursos tratados en estos espacios fueron: fundamentos legales de la modificación curricular en la UNAM, el cambio de las teorías implícitas en la modificación de un plan de estudios (Dr. Juan Ignacio Pozo Municio), modelos de construcción del conocimiento en colaboración disciplinar en el bachillerato (Dr. Hernán Miguel), elaboración de reactivos para evaluar los contenidos de los nuevos programas de estudio (Dr. Javier Alatorre), entre otros.

Al contar con una primera versión de cada uno de los programas, éstos pasaron por una

etapa de revisión a cargo de comisiones de docentes de la ENP que se formaron vía invitación o bien por la iniciativa de los mismos docentes. Los programas también fueron revisados por investigadores de otras escuelas de la UNAM y fuera de la UNAM. También se creó una plataforma electrónica para que docentes y estudiantes conocieran las propuestas de cada asignatura de matemáticas e hicieran comentarios, sugerencias y críticas hacia los programas. Los comentarios y sugerencias producto de estas revisiones se dieron a conocer de manera oportuna y sin censura alguna a las comisiones de los docentes que elaboraron las propuestas de cada programa para considerarlas, discutirlas y en su caso, hacer las modificaciones pertinentes. Finalmente, se sometieron para su aprobación al Consejo Técnico de la ENP, órgano máximo para decidir los asuntos técnicos, académicos y legislativos que afectan a la institución.

Con relación a las asignaturas de Matemáticas, en la ENP se imparten 6 asignaturas: en el primer año Matemáticas IV, en el segundo año Matemáticas V y en el último año Matemáticas VI Áreas I y II, Matemáticas VI Área III, Matemáticas VI Área IV, Temas Selectos de Matemáticas o Estadística y Probabilidad, dependiendo del área de interés del estudiante. De manera general, los grandes cambios de los programas actualizados con respecto a los anteriores son:

- Integración de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, así como de los cinco ejes transversales (en todas las asignaturas del plan)
- Integración de contenidos relacionados con Estadística Descriptiva en las asignaturas de Matemáticas del primer y segundo año
- Vinculación de los contenidos con situaciones reales, iniciación en el desarrollo de habilidades de modelación

Presentaremos algunos elementos del programa de Matemáticas VI Área IV (Humanidades) que nos permitirán discutir en el siguiente apartado las dificultades y los retos que surgieron una vez que fueron aprobados.

El objetivo de este programa es que el alumno desarrolle habilidades de razonamiento lógico, expresión y comunicación simbólica a través de la visualizacón y reconocimiento de los elementos geométricos presentes en diversas manifestaciones artísticas de la cultura universal, enmarcadas en su contexto histórico, así como de la creación de manifestaciones propias, para promover su creatividad, imaginación y expresión mediante el uso de símbolos. Consta de tres unidades: Matemáticas en el arte (75 horas), Ideas numéricas (45 horas) y Paradojas y acertijos (30 horas). En la Tabla 1 se concentran algunos contenidos representativos de la Unidad 1.

Tabla 1

Unidad 1. Matemáticas en el arte.

Contenidos conceptuales
1.1 Razón, proporción y escala: a) Semejanza b) Homotecia c) Proporción áurea d) Escala de reducción y ampliación
1.2 Frisos y grupos de simetría:

a) Transformaciones: simetría, reflexión, traslación y rotación b) Tesela, friso y mosaico
1.3 Fractales: a) Noción de estructura fractal
1.4 Pensamiento espacial: a)Integración de un conjunto de vistas bidimensionales para representar un objeto tridmensional b) Representación bidimensional de las diferentes vistas: frontal, lateral y superior, de un objeto tridimensional
Contenidos procedimentales
1.5 Resolución de problemas que involucren la escala y la razón de proporcionalidad entre figuras y cuerpos geométricos semejantes
1.6 Trazo de figuras y cuerpos geométricos dada una razón de homotecia. Identificación y justificación de las semejanzas entre la figura original y la resultante
1.11 Identificación visual de fractales en la naturaleza
1.12 Diseño geométrico de un fractal (triángulo de Sierpinsky, curva de Koch o árbol pitagórico)
1.15 Lectura de textos históricos o literarios relacionados con la proporción áurea, la geometría fractal, los diseños de M. C. Escher, o el arte en la Alhambra.
Contenidos actitudinales
1.16 Valoración de la geometría para desarrollar procesos de abstracción, visualización y generalización
1.17 Reconocimiento de la importancia de la visualización espacial para representar el entorno

Fuente: Planes y programas de estudio dgenp.unam.mx

Formación de docentes para la implementación del programa de Matemáticas VI, Área IV

El espacio más importante que permitió el estudio, la reflexión, la discusión y la construcción de propuestas pedagógicas para la implementación de los programas actualizados fue el de los Seminarios de Análisis de la Enseñanza (SADE), que ya fueron referidos. A diferencia de otros procesos de reformas educativas en México, desde el año en que se dio a conocer la iniciativa de la modificación curricular, los temas que se trataron en los seminarios tuvieron el propósito de formar a los docentes para que fueran conociendo los avances de la misma y aportando sus críticas, dudas o cualquier tipo de observación. Al final de cada ciclo escolar, los docentes de todos los planteles y organizados por Colegios, exponen los resultados de los seminarios locales. También se diseñaron e implementaron cursos de los programas de estudio para los docentes con el propósito de conocerlos por medio de actividades didácticas. En ellos, los docentes diseñaron otras propuestas didácticas y las socializaron con el resto de los participantes. El caso de Matemáticas VI, Área IV resultó especial ya que los profesores mostraron una notable angustia por desconocer los contenidos (Tabla 1). Algunos comentarios que externaron los profesores fueron: "estos contenidos conceptuales están enfocados para una carrera de diseño de arte, pero no para el área humanística, que le serviría algo más orientado al cálculo tradicional", "la intención educativa es clara, aunque considero que se está bajando de manera grave el nivel de abstracción de los jóvenes de esta área", "me parece que han trivializado el programa de la materia, pudiendo hacer una vinculación con temas de cálculo como sucesiones, la derivada y aplicaciones". En los comentarios anteriores es clara la tendencia de los profesores a regresar al programa anterior, en éste se planteaba el estudio de temas

relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral. Este tipo de inconformidades no es exclusivo del programa de Matemáticas para el área cuatro; otros programas han sido descalificados, a veces sin argumentos bien fundamentados. En relación con los cinco ejes transversales que han sido mencionados, ponemos el ejemplo de la lectura y escritura de textos para aprender a pensar. La formación profesional de los docentes que imparten las asignaturas de matemáticas en la ENP incluye a matemáticos, actuarios e ingenieros, principalmente. Los mismos docentes expresan sus limitaciones y poco gusto por la escritura, por lo que integrar este eje a su práctica docente no fue bien visto por toda la comunidad. En los cursos de actualización, los profesores también expresaron rechazo hacia el uso de de tablas de cotejo o rúbricas para evaluar los trabajos de los estudiantes, argumentando que la carga de trabajo hacia los docentes es cada vez mayor. En este punto es importante señalar que en la ENP se llega a trabajar con grupos de setenta estudiantes.

Retos y horizontes

Actualmente en la ENP se están formando grupos de trabajo interdisciplinarios que buscan implementar de manera exitosa la modificación curricular. Uno de ellos es el *Proyecto Aleph-5*, que inició en abril de 2018 con la intención de ofrecer apoyo a los académicos para apropiarse de las premisas y de los contenidos de los programas y para desarrollar e implementar situaciones didácticas que promuevan los objetivos de aprendizajes establecidos. Este proyecto asume una perspectiva metodológica de Investigación Basada en Diseño (IBD), en el que se propone un ciclo de diseño, intervención, evaluación, rediseño y nuevamente intervención. El equipo de investigación se compone de psicólogos y once profesores de la ENP de las áreas de Educación para la Salud, Química, Matemáticas, Derecho, Lógica y Lenguas Extranjeras.

Otro proyecto es el PE105318 *Recursos didácticos para la implementación de los programas de estudio actualizados de Matemáticas de la ENP* cuyo objetivo es producir material didáctico basado en un enfoque de modelación y resolución de problemas. Este proyecto ha sido posible gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza que ofrece la UNAM.

En la Figura 1 se muestran los diseños creados por un grupo de estudiantes de área 4, producto de una de las secuencias didácticas de este proyecto. Las presentaciones de los estudiantes son el resultado de un proceso de investigación en el cual se conjugan la actividad y comunicación matemática así como la creatividad de los estudiantes.



Figura 1. Trabajo de los estudiantes. Proporción áurea y frisos

Conclusiones

La reforma curricular en la ENP fue un proceso que abarcó seis años. A diferencia de otras reformas educativas que se diseñan desde los altos escenarios, en los cuales la voz de los expertos adquiere una autoridad en ocasiones incuestionable, el proyecto de la Nacional Preparatoria buscó desde su inicio involucrar a todos los actores de su comunidad sin dejar a un lado la experiencia de otros expertos en los temas. A través de encuestas, seminarios, cursos, plataformas de opinión, etc.la institución estuvo en contacto permanente con sus docentes. La mejor muestra de que ésta ha sido una reforma no impuesta es que se están generando acciones enmarcadas en proyectos (en el documento se refirieron dos de ellos) por iniciativa de los docentes pues ellos se identifican con los programas. El producto resultante sin lugar a dudas es perfectible, por lo que un reto es continuar fortaleciéndolo a través del seguimiento de sus actores principales. Como docentes necesitamos reconocernos en los procesos de enseñanza y también en los de aprendizaje, reconocer que ignoramos, que podemos equivocarnos y que necesitamos seguir aprendiendo, pues esto es lo más natural en la construcción del conocimiento. Sería lamentable que todo el esfuerzo invertido para preparar esta reforma se difuminara y que pasaran más de veinte años para hacer los cambios pertinentes, pues las demandas contemporáneas nos deberían obligar a comprometernos más con la educación, que hasta donde se ve, es la mejor alternativa para una sociedad más justa.

Referencias y bibliografía

Domínguez-Nava, C., Oropeza-Martínez, R., Pérez-Monroy, A. (2006). En Granados-Navarrete, M. (Coord.). *Presencia y participación preparatoriana*. UNAM: México.

DGENP. (2013). *Avances del Proyecto de Modificación curriclar*. Recuperado 20 de septiembre de 2018 de http://proyectomc.dgenp.unam.mx/proyecto-de-modificacion/avances

HeuvelPanhuizen, M. (2009). *El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista*. Recuperado 20 de septiembre de 2018 de https://www.correodelmaestro.com/anteriores/2009/septiembre/incert160.htm

Jurado-Cuéllar, S. (2012). *El proyecto de modificación curricular de la ENP*. Recuperado 20 de septiembre de 2018 de http://proyectomc.dgenp.unam.mx/presentacion

Poy-Lozano, L. (2018, 27 de julio). De 31 mil 564 aspirantes, 67 mil 353 logran su primera opción. *La Jornada*, sp.

Universidad Nacional Autónoma de México. (2015). *Diagnóstico del Plan de Estudios 1996 de la Escuela Nacional Preparatoria.* UNAM: México.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Un camino hacia la resignificación del currículo de matemáticas, en relación con la multiplicación y la división

Juan David **Bedoya** Torres
Universidad de Antioquia
Colombia
juandavidb523@gmail.com
Daniel Stiven **Rojas** Zuleta
Universidad de Antioquia
Colombia
daniel.pisis65@gmail.com
Gilberto de Jesús **Obando** Zapata
Universidad de Antioquia
Colombia
gilberto.obando@udea.edu.co
Norma Lorena **Vásquez** Lasprilla
Universidad de Antioquia
Colombia
norlavasquez@gmail.com

Introducción

En este póster presentaremos los resultados del trabajo de grado de los autores. El título del trabajo es *Un camino hacia la resignificación del currículo de matemáticas, en relación con la multiplicación y la división*. El trabajo de campo se realizó en una institución educativa pública con estudiantes de grado tercero de la Básica Primaria[1], la cual se encuentra ubicada en la zona nororiental de la ciudad de Medellín.

El trabajo de grado se fundamentó en el análisis de las prácticas matemáticas de la institución educativa. El lente teórico para el análisis se localiza en la mirada curricular de Sacristán (1995) y en la teoría de la actividad (Davidov, 1988; Kozulin, 1998; Daniels, 2003), centrando una especial atención en las estructuras multiplicativas (Ministerio de Educación Nacional, 1998 y 2006; Rico, Castro y Castro, 1995; Obando, Vásquez y Vanegas, 2006; y Botero, 2006).

Eje problémico

Se planteó un eje problémico que permitiera la resignificación del currículo de matemáticas de la institución. Esto con el fin de posibilitar una reestructuración de la malla curricular de matemáticas de grado tercero, buscando una orientación de la actividad docente en la planeación y desarrollo de otro tipo de tareas, y, a su vez, permitiendo a los estudiantes

[1] La educación formal en Colombia se encuentra clasificada en Inicial (3-5 años), Preescolar (5-6 años), Básica Primaria (6-11 años), Básica Secundaria (11-15 años) y Educación Media (15-18 años).

acercarse al sentido y significado de las estructuras multiplicativas, a partir de las prácticas asociadas al isomorfismo de medidas.

Objetivo general del trabajo de grado

Analizar las prácticas matemáticas de la institución educativa relacionadas con las estructuras multiplicativas en grado tercero, para proponer herramientas curriculares que favorezcan las prácticas de enseñanza de las matemáticas, desde una perspectiva de la teoría de la actividad.

Metodología

La metodología empleada para el desarrollo del trabajo de grado da cuenta de tres ejes. El primero, la lectura crítica del plan de área de matemáticas de la institución, en particular de la malla curricular de grado tercero. El segundo, la observación y el análisis de las prácticas matemáticas de las docentes y de los estudiantes de este grado. Y el tercero, la planificación, la ejecución y el análisis de tareas matemáticas.

Resultados

La propuesta de la reestructuración de la malla curricular de matemáticas y la sistematización de las tareas, fueron los resultados que dejó el proceso de acompañamiento realizado por los autores del presente trabajo de grado. Estos resultados son herramientas curriculares que permiten fortalecer las prácticas matemáticas institucionales, relacionadas con las estructuras multiplicativas y con los Referentes Básicos de Calidad en Colombia.

Referencias y bibliografía

Botero, O. (2006). *Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Daniels, H. (2003). *Vygotsky y la pedagogía.* Barcelona, España: Editorial Paidós.

Davidov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Moscú, Rusia: Editorial Progreso.

Institución Educativa la Asunción (2016). *Plan de área de Matemáticas.* Medellín, Colombia.

Kozulin, A. (1998). *Instrumentos psicológicos*. Barcelona, España: Editorial Paidós.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá, Colombia.

Obando, G., Vásquez, N. y Vanegas, M. (2006). *Módulo 1 Pensamiento numérico y sistemas numéricos.* Medellín, Colombia: Editorial Artes y Letras Ltda.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3o y 4o de una institución educativa de la Educación Básica* (Tesis de doctorado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Rico, L., Castro, E. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* Bogotá, Colombia: Iberoamericana.

Sacristán, G. (1995). *El curriculum: una reflexión sobre la práctica.* Madrid, España: Ediciones Morata S.L.

Normas Educativas en Colombia primera mitad del siglo XX: el caso de la educación matemática

Norma Lorena **Vásquez** Lasprilla
Docente Institución Educativa Adelaida Correa, Sabaneta, Antioquia
Colombia
norlavasquez@gmail.com
Gilberto **Obando** Zapata
Universidad de Antioquia
Colombia
gilberto.obando@udea.edu.co

Resumen

En el marco de la formación de licenciados en matemáticas se espera problematizar las condiciones de posibilidad y de existencia del ser maestro, enseñante de las matemáticas en Colombia, desde una perspectiva histórica. Este artículo presenta un análisis de las principales leyes emitidas por el estado colombiano en la primera mitad del siglo XX, poniendo énfasis en la manera como en dichas leyes se presentan fundamentos pedagógicos y didácticos para la enseñanza de las matemáticas en Colombia. Igualmente se analizan los aspectos políticos detrás de dichas normas. Para ello, se emplea una metodología…Se busca con este análisis, contribuir con una mejor comprensión del estado actual de la educación matemática en Colombia para avanzar en el reconocimiento del rol del maestro de matemáticas.

Palabras clave: currículo de matemáticas en Colombia, política pública, transposición didáctica, número natural.

Introducción

En el análisis de los desarrollos curriculares de la educación matemática en Colombia no solo son importantes los estudios que muestren los elementos centrales que los estructuran conceptual y metodológicamente, sino también los aspectos de la política pública que le dan su soporte legal. Para el caso colombiano, lo que se tiene hoy en materia curricular y de política pública, es la herencia de al menos 150 años de historia, en los que se ha hecho manifiesto el interés de un estado por la enseñanza de las matemáticas, quizás, sobre la idea de que el desarrollo social, tecnológico y científico que requiere el país, tiene un pilar fundamental en las matemáticas que se enseñan (Ver, por ejemplo, Vásquez, 2010; Arboleda, 2012, Guacaneme, Obando, Garzón, & Villa-Ochoa, 2013).

Así, el análisis de los aspectos relacionados con la política pública, muestra las condiciones y necesidades históricas y culturales propias de la época y del grupo social al cual se orienta el proceso de enseñanza. Además, en torno a la selección del saber matemático y a la perspectiva de enseñanza del mismo, se plasman los intereses de diferentes grupos (políticos, económicos, pedagógicos, entre otros) y se encuentran (-de manera implícita generalmente-) los referentes de base, que asumen los docentes para orientar sus propuestas de aula.

Teniendo en cuenta lo anterior, el presente artículo muestra resultados en el marco de un problema de investigación amplio (tesis de maestría de la primera autora) sobre la transposición didáctica del concepto de número natural en el sistema educativo colombiano. El problema que orientó la investigación fue: ¿Cómo se lleva a cabo el proceso de transposición didáctica del concepto de número natural, en el contexto de la educación preescolar y el primer grado de educación básica primaria en Colombia?

La complejidad implicada en un análisis de transposición didáctica y su relación con el saber matemático de referencia, al respecto de un concepto matemático específico, se evidencia en la necesidad de realizar diferentes tipos de indagaciones, con el fin de caracterizar, el proceso transpositivo: de orden histórico-epistemológico, para dar cuenta de las instituciones productoras del saber; análisis de textos (manuales escolares y disposiciones gubernamentales), con el fin de dar cuenta de lo realizado a nivel de la noosfera; de las planeaciones institucionales, y las propuestas pedagógicas de los maestros, para comprender el saber matemático que se enseña en las instituciones educativas; y de las producciones de los alumnos, para indagar por el conocimiento matemático realmente aprendido. En particular, este artículo se retoman elementos de la Transposición Didáctica para analizar decisiones de la noosfera en torno a la política pública, en el campo de la educación matemática, emitida en Colombia durante la primera mitad del siglo XX para la formulación de conjeturas acerca de los fines de tales políticas, los aprendizajes esperados en los alumnos, y, sobre todo, ideas que nos permitan problematizar las condiciones de posibilidad y de existencia del ser maestro de matemáticas en Colombia.

Si bien, se reconoce la importancia de la Transposición Didáctica como una teoría que nos permite comprender las problemáticas relativas a los procesos de transformación y adaptación del saber implicados en los diseños curriculares, no se puede desconocer que en la literatura se encuentran numerosos estudios desde este referente, pero no se encuentran estudios que se refirieran a los procesos transpositivos en torno al número natural en el ciclo de la educación inicial en Colombia. Esta ausencia muestra la importancia de una línea de trabajo al respecto de un concepto articulador del pensamiento matemático como lo es el número natural.

Cómo se orienta el trabajo

Un análisis de transposición didáctica responde a unas necesidades contextuales, y alude, a dinámicas humanas que requieren ser descritas e interpretadas. Con el análisis interpretativo de las relaciones, las dinámicas y los significados que se construyen durante el proceso transpositivo, en torno al concepto de número natural, se pueden formular explicaciones y justificaciones acerca de la naturaleza, el sentido y la funcionalidad que se le otorga al número natural en el contexto escolar. Esto implica, como lo señala Bosch, Chevallard y Gascón (2005), "[…] reconocer que el conocimiento y la actividad matemática que se desarrolla en la escuela no puede ser analizada sin tener presente el fenómeno de su reconstrucción en el marco de una institución educativa" (p. 1256). Tal proceso requiere, tanto analizar las fuentes de dónde surge el concepto de número natural, como caracterizar las políticas públicas que orientan las diferentes estrategias que se han empleado para enseñarlo y aprenderlo en las instituciones educativas. Los resultados de estos análisis se convertirán en elementos explicativos y de validación para estudiar las construcciones institucionales que se hacen en torno a dicho concepto (Chevallard, 1999).

Aludiendo al tipo de estudio que se realiza, se plantean dos momentos para analizar el proceso transpositivo: en sentido amplio (no reportado en este artículo) y en sentido estricto. El sentido amplio abarca los análisis globales al respecto del establecimiento del saber matemático

en las instituciones productoras de saber, y la selección del saber matemático a enseñar por parte de la noosfera. El sentido estricto, se refiere al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de número natural en el marco de una institución determinada. Acorde con esta estructura, para el análisis reportado en este documento, se determina como estudio de caso la *Designación del concepto de número natural que va a ser enseñado.* La determinación del sentido del concepto de número natural que se está privilegiando en el sistema educativo colombiano, a partir de las leyes y decretos emitidas por los órganos oficiales.

A manera de preámbulo: Los años 1886 – 1900

Este periodo de tiempo se caracteriza por la promulgación de leyes y decretos que ordenan la instrucción y la escuela pública en Colombia, dado que hasta el momento la educación pública no era masificada y no todas las personas tenían acceso a ella. La educación que se brindaba era esencialmente práctica, enfocada a la religión y a la formación de ciudadanos capaces de desenvolverse en los contextos del país: en agricultura, comercio o como operarios de fábricas (Congreso de Colombia, 1904b, artículo 35, capítulo III). Según estos contextos, las escuelas se orientaban a los conocimientos básicos, en lo rural, y se profundizaba en algunos ejes, cuando la escuela era urbana. Este tipo de formación se brindaba de manera separada a niños y niñas.

Entre los primeros decretos expedidos se encuentra el decreto 595 (Congreso de Colombia, 1886), por medio del cual se organiza la Instrucción pública primaria en tres ramos: la instrucción, la inspección y la administración. Al respecto de la instrucción se plantea que:

> Las Escuelas tienen por objeto formar hombres sanos de cuerpo y de espíritu, dignos y capaces de ser ciudadanos y Magistrados de una sociedad republicana y libre, […]. La enseñanza en las Escuelas no se limitará a la instrucción, sino que comprenderá el desarrollo armónico de todas las facultades del alma, de los sentidos y de las fuerzas de cuerpo (Congreso de Colombia, 1886, Artículo 14° y 15°. Capítulo I. Título III).

Inicios del 1900

Iniciando el siglo XX, se promulga una nueva ley que introduce cambios importantes en el sistema educativo colombiano. La ley 39 de 1903 (Congreso de Colombia, 1903), presenta de forma sistemática normas centrales del sector educativo. Se destaca que la enseñanza debe basarse en la intuición y en el empleo de los procesos de observación, reflexión e invención, tendientes a la comunicación de nociones correctas y exactas. De igual forma, se resalta el mecanismo de repetición, a través de formas variadas, como medio para lograr la familiarización con el contenido aprendido. En esa medida y para cumplir con el control sobre lo que se enseñaba a nivel nacional, se suministraban libros de texto unificados para el país y se realizaban evaluaciones generales al final de cada periodo a todos los niños de la escuela.

Esta propuesta de trabajo escolar reconoce la experiencia y la intuición como principios relevantes en el proceso de aprendizaje, pero deja atados los mecanismos a través de los cuales se pueden llevar a cabo tal exploración. De igual forma, los resultados y las conclusiones a las que llegase el alumno, deberían ser las mismas que indicara el maestro, de ahí que se recurriera a la repetición como forma de fijar el conocimiento. De este marco se puede inferir que, el saber se asumía fijo, predeterminado y con unas formas de representación únicas.

El carácter rígido y estático del saber se evidencia en el plan de estudio emanado en el decreto 491 de 1904 (Congreso de Colombia, 1904a) donde se especifican los contenidos que deben ser enseñados en las diferentes escuelas colombianas. El pensum reglamentario para las escuelas al respecto de las matemáticas, se distribuirá así (Congreso de Colombia, 1904a):

> *Escuela rural*
> *Año 1*
> *Aritmética*: se hará que el niño adquiera sobre la unidad ideas ciertas y de manera objetiva, conocimientos de los dígitos y combinación de estos hasta 50. En este círculo ejercitará el maestro la inteligencia de los niños en las operaciones fundamentales.
> *De las escuelas urbanas*
> *Sección elemental de primer año*
> Aritmética – Cálculo mental y escrito comprendido entre los primeros treinta números cardinales; nociones sobre números y problemas diversos dentro del mismo círculo.
> *ESCUELA 2ª*
> *Sección elemental de segundo año*
> Aritmética – Cálculo mental y escrito relativo a los cincuenta primeros números cardinales; sistema de numeración; ejercicios y problemas orales y escritos, referentes a las cuatro operaciones con números enteros, dentro del citado círculo.

De acuerdo con lo anterior, el trabajo escolar alrededor del número natural se centraba en el reconocimiento de unidades a partir de las experiencias inmediatas: todo lo que en el mundo se pueda contabilizar e identificar de manera directa como uno, un carro, un árbol, una cama, etc. Esas ideas se constituían en la base para el conteo de elementos de una colección.

Otro aspecto señalado era el de la escritura de cantidades y la operatividad con ellas. Luego el tipo de actividades que se proponían, estaban orientadas a la aplicación de reglas para la formación de cantidades en el sistema de numeración decimal (SND), iniciando en un rango bajo, avanzando paulatinamente. La generación y abordaje de estas cantidades estaba asociada a la cardinación de colecciones. De ahí que, el aspecto privilegiado en la conceptualización del número natural era el principio de cardinalidad.

Además, dado que la única forma permitida de representar cantidades era a través del SND, ya fuera de manera oral o escrita, y que, en la reglamentación no se refiere ningún otro aspecto para ser estudiado en función del número natural, se puede concluir que el concepto de número natural era homologado por dicha representación. Esto es, el número entero –como se denominaba en esa época– era asumido como su representación numérica (número y representación eran lo mismo). Por tanto, el objetivo central de la escuela en ese primer año, y en general, de la primaria, era tener nociones sobre el número entero que se circunscribían sólo a la representación y a la solución de problemas con varias operaciones básicas (desarrollo de la inteligencia en torno al número como se menciona en el decreto).

Los años 30

Para cerrar las orientaciones curriculares promulgadas en los primeros años del siglo XX, se retoma la ley 56 de 1927 (Congreso de Colombia, 1927) que decretó la educación primaria como obligatoria para todos los niños del país y la ley 32 de 1936 (Congreso de Colombia, 1936) que destaca los principios de libertad e igualdad que debían regir en las instituciones escolares: No debe practicarse ningún tipo de discriminación ya sea por raza, religión, clase o ilegitimidad de nacimiento.

De acuerdo con ello, se nota que el trabajo de la escuela no se centraba exclusivamente en brindar información sobre las diferentes áreas de conocimiento, sino que también tenía por objeto la formación de seres integrales, a partir de tres niveles: cuerpo, mente y alma. El encargado para brindar tal formación era el maestro quien debía gozar de buen reconocimiento, prestigio y ser modelo de comportamiento dentro de su comunidad. Para complementar la formación anterior, el decreto 1790 de 1930 (Congreso de Colombia, 1930) reglamenta el

mínimo de educación obligatoria por parte de los padres o tenedores de niños. Se señala que la enseñanza mínima inicia a los 6 años y que podía brindarse en la escuela o en el hogar. Además, debía velarse para que los niños permanecieran un mínimo de tiempo en la escuela para cumplir con la responsabilidad de alfabetización básica que debía tener todo ciudadano colombiano.

En lo relativo con métodos y contenidos de las diferentes áreas, se tiene que era función del Ministro de Instrucción pública reglamentar y dictaminar los métodos que el docente debía usar en su clase; además, determinaba de manera estricta, los contenidos que se debían abordar. Desde las leyes se promovía como forma general de intervención de aula, la exposición sencilla y lógica de los contenidos, de tal forma que se estimulara el cultivo de la inteligencia y el entendimiento, en detrimento de la memorización y la repetición mecánica de los saberes (Salazar, 2008, p. 97). Además, no se da preponderancia a una materia en particular y se promueve el aprendizaje de agricultura, artes y oficios. También se reconoce la gradación de la enseñanza de acuerdo con la edad y las habilidades mentales de los estudiantes. (Salazar, 2008, p. 96).

Los años 1950 a 1968

En este espacio de tiempo se gestan en Colombia dos reformas curriculares importantes. El primer momento contempla reestructurar entre otros aspectos (Ministerio de Educación Nacional, 1950, pp. 7-8):

> Instrucción y Educación Religiosa: se hace el llamado a que no basta con dictar la clase de Religión católica, sino que el profesor debe aprovechar toda acción y situación para formar e infundir hábitos virtuosos, realizar prácticas cristianas y prevenir las malas costumbres.
> Cursos de vacaciones: se formulan espacios de capacitación docente acerca de la forma de ejecutar los programas y el sentido de dicha reforma.
> Tipos de programas: Se reforman los programas de la escuela rural en aras de brindar mayor cantidad de conocimientos a las zonas campesinas acordes con sus requerimientos y unificar el currículo nacional según los grados de instrucción.
> Finalidad de la reforma: Se aspira despertar el espíritu de los maestros por formar a sus estudiantes como seres integrales, dignos y laboriosos antes de privilegiar la mera instrucción.

Estos aspectos se explicitan a través del decreto 3468 de 1950 donde se adopta el plan de estudios de la escuela primaria urbana y rural. La escuela primaria se organiza a través de tres grados de instrucción: “Escuela Rural Alternada, de dos años de estudio; Escuela Rural de un solo sexo, de cuatro años de estudio; Escuela Urbana, de cinco años de estudio” (Ministerio de Educación Nacional, 1950, p. 9). Teniendo en cuenta la población a la cual va dirigida la enseñanza, se establecen programas donde se especifica la intensidad horaria y los contenidos que deben ser desarrollados en cada grado y año de escolaridad. Cada programa incluye, en general, religión, lectura y escritura, aritmética, labores para niñas y niños, educación cívica, urbanidad y educación física.

Para el caso de la aritmética en primer año, los programas (Ministerio de Educación Nacional, 1950, pp. 9-11) se puede ver en la tabla 1. La propuesta de trabajo escolar en torno al número natural dada en esta nueva reglamentación se concentra más en el número mismo. Si bien se menciona la intuición como principio para acercarse al número natural, se plantea un estudio un poco más sistemático sobre los principios que rigen el funcionamiento del SND como mecanismo eficiente para la representación de cantidades. Por otro lado, se continúa asumiendo la asociación número – símbolo como la base para la conceptualización del número natural. También, se retoman los ejercicios de escritura de cantidades en el círculo numérico de 1 a 100,

Tabla 1: Contenidos de matemáticas, grado primero, educación Rural Alternada

	Escuela Rural Alternada			
	Clases semanales:	4	Duración de la clase:	30 min
Contenido	Círculo de 1 a 100 Ejercicios intuitivos y variados para que los niños adquieran las nociones de cantidad, tamaño, peso y aprendan a expresar tales nociones, aplicándoles a la vida campesina. Enseñanza de los números de uno a nueve. Signos más (+), menos (-), igual (=). Ejercicios sencillos y objetivos, aplicados especialmente a la vida rural, de suma, resta, multiplicación y división con números aprendidos. Nociones de medio (1/2) y un cuarto (1/4) La decena y su escritura. Enseñanza de los números de 11 a 19. La docena Lectura y escritura de los números romanos hasta XII. Enseñar las horas en el reloj. Enseñar el número 20. Los números 30, 40, 50, etc., hasta 100. Contar, leer, escribir los números hasta 100.problemas de aplicación sacados del medio ambiente y tendiente a la moralización de las costumbres. Sumas, restas, multiplicación y división, orales y escritas, dentro de este círculo. Medidas, tales como el paso, el pie, la cuarta, la pulgada, la brazada. Vara, yarda y metro. Libra, kilo, arroba.			
	Escuela Rural de un solo sexo			
	Clases semanales:	6	Duración de la clase:	30 min
Contenido	Círculo de 1 a 100 Sígase el programa que, para este mismo año, se ha señalado en las escuelas rurales alternadas. Advertencia: cada una de las nociones aritméticas contenidas en el programa se afianzará, antes de pasar a la siguiente, con ejercicios variados y se aplicarán problemas concretos, sacados del medio ambiente que sean útiles al campesino su vida económica y moral.			

Fuente: Ministerio de Educación Nacional, 1950, pp 9-11.

pero destacando la formación de decenas y centenas como núcleos básicos del Sistema, y, por ende, del número mismo. Así, los números se obtienen a partir de la generación de la serie numérica: aumentando 1 cada vez. De ahí que el aspecto cardinal se trabaje de manera paralela con el aspecto ordinal.

En cuanto a los elementos nuevos que introduce la reglamentación, se tiene el énfasis en el reconocimiento y medición de magnitudes. Este nuevo contexto se propone como otro ámbito donde el número natural podía ser usado en función de los procesos de medida con unidades determinadas (ya fueran estandarizadas o no). Sumado a lo anterior, se presenta gran variedad de problemas de la realidad donde se requiere el uso de varias operaciones para su solución. Dicha gama de problemas promueve la generación de modelos intuitivos en torno a las operaciones. Ello permite concluir que se pretendía avanzar en la conceptualización del número natural a través de la profundización en las relaciones matemáticas presentes en los esquemas de aditivo y multiplicativo a partir del análisis y solución de problemas cotidianos.

La segunda reforma de este periodo de tiempo, es la que se plasma en el decreto 1710 de 1963 por el cual se adopta el Plan de Estudios de la Educación Primaria Colombiana. Esta reforma se gesta en función de:

> Que los actuales Planes y Programas de estudio de Educación Primaria, que rigen desde 1950, establecen un triple sistema educativo que es necesario unificar para situar la escuela primaria en un plano de igualdad, […]; Que dichos Planes y Programas deben ser actualizados y reestructurados de acuerdo con el progreso de las ciencias, las necesidades del desarrollo económico y social del país y con los avances de la pedagogía, y que en las Escuelas Piloto del Ministerio de Educación Nacional se han experimentado planes y programas de estudio que siguen las recomendaciones del Primer Plan Quinquenal de Educación en Colombia y de los Seminarios Interamericanos de Educación, cuyos resultados dan garantía para que sean acogidos (Congreso de Colombia, 1963)

Se pretendía entonces, unificar y actualizar los planes y programas de educación primaria en Colombia, en razón de los cambios dados a nivel teórico en el campo pedagógico y de las necesidades y derechos de la población colombiana (principio de igualdad). Así la educación primaria se formulaba como la etapa inicial del proceso educativo al que tenía derecho todo ciudadano a partir de los 7 años de edad. Los objetivos centrales (Congreso de Colombia, 1963) de este ciclo de educación eran, entre otros: la formación integral básica a través del dominio de conocimientos, la educación en higiene y protección de la salud y el medio ambiente, el desarrollo de la capacidad reflexiva para adoptar posturas personales acerca de la naturaleza del conocimiento, la capacitación laboral de acuerdo con las inclinaciones vocacionales, el desarrollo de la sensibilidad artística y la estimulación del espíritu de convivencia.

De acuerdo con ello, se puede decir que los fundamentos y objetivos de esta propuesta educativa para la primaria, reconocía que el estudiante debía ser formado de manera integral, incluyendo en dicha categoría, el desarrollo de capacidades para cuidarse, tomar decisiones y respetar a los demás. De igual forma, se observa que esas metas globales asumen que cada estudiante es diferente y que puede tener habilidades y vocaciones distintas a las del resto del grupo. Se decreta además que la escuela primaria será única y se harán solo adaptaciones a los programas según las necesidades del contexto (rural o urbano). Las asignaturas se organizan de manera global y dentro de ellas se agrupan las diferentes materias. Para el caso de las matemáticas en primer grado, se tiene que la misma se organiza en aritmética y geometría (intuitiva), con una intensidad horaria de 6 clases a la semana. Es de resaltar que los cambios que se mencionan en el currículo de la escuela primaria sólo se dan a nivel organizativo, pues en los decretos no se refieren cambios al respecto de los conceptos o a la forma de abordarlos.

A manera de conclusión

Al analizar los periodos señalados, a la luz de los elementos históricos epistemológicos del número natural, se puede concluir que su fundamentación sobre el objeto matemático, están:

- Para el caso de las propuestas de comienzos del siglo XX, en correspondencia con la postura de Platón (Vasquez, 2010) en lo relativo con el número numerado. Esto se evidencia en la naturaleza concreta del número, pues éste se emplea para establecer relaciones y realizar cálculos entre cantidades de cosas que se presentan en situaciones reales. También, se tiene que la unidad es relativa a los objetos sensibles y sólo puede ser dividida en función de dichas singularidades. Además, el estudio de las operaciones es un eje central y se presenta como un arte que debe ser enseñando. Así, se puede decir que el número natural es asumido como expresión de la cantidad o multitud concreta de objetos.
- Para el caso de las propuestas de mitad del siglo XX, se puede afirmar que su postura se relaciona con lo propuesto por Stevin (Vasquez, 2010), dado que el número natural ya se empieza a formalizar a través de elaboraciones mentales, a las cuales se accede mediante el uso del SND. Además, el concepto de número natural resulta de los procesos de conteo y de medición de magnitudes, por ello se asume como un elemento que permite cuantificar

cualquier magnitud, ya sea discreta o continua. Dicha conceptualización se complementa con la generación de esquemas generales para la estructura aditiva y multiplicativa, a partir del estudio de situaciones cotidianas y la aplicación de las propiedades correspondientes a las operaciones básicas.

Esto nos permite ver que las apuestas curriculares plasmadas en las normas legales colombianas tienen, la mayoría de veces, implícitas referencias epistemológicas ontológicas específicas (en relación con los objetos de conocimiento matemático) los cuales sirven de guía para las orientaciones específicas sobre el qué, cómo y por qué enseñar matemáticas en un momento determinado. Estos movimientos epistemológicos nos dejan lecciones importantes para pensar como se está organizando la enseñanza actual de las matemáticas, proyectada desde la historia vivida.

Referencias

Arboleda, L. C. (2012). Los matemáticos de la república en Colombia durante el siglo XIX. In *I Congreso de Historia Intelectual de América Latina* (pp. 1–16).

Bosch, M., Chevallard, Y., & Gascón, J. (2005). *Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics.* Paper presented at the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education IV (CERME IV), Sant Feliu de Guixols, España.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques 19(2), 221-266

Congreso de Colombia. (1886). *Decreto 595 del 9 de junio de 1886*. (595). Bogotá.

Congreso de Colombia. (1903). *Ley 39 del 26 de octubre de 1903*. (39). Bogotá Retrieved from www.mineducacion.gov.co/1621/articles-102524_archivo_pdf.pdf

Congreso de Colombia. (1904a). *Decreto 491 del 3 de junio de 1904*. (491). Bogotá Retrieved from www.mineducacion.gov.co/1621/articles-102515_archivo_pdf.pdf

Congreso de Colombia. (1904b). *Decreto Número 491 del 3 de Junio de 1904*. (491). Bogotá Retrieved from www.mineducacion.gov.co/1621/articles-102515_archivo_pdf.pdf

Congreso de Colombia. (1927). *Ley 56 del 10 de noviembre de 1927*. (56). Bogotá Retrieved from www.mineducacion.gov.co/.../article-85243.html.

Congreso de Colombia. (1930). *Decreto 1790 de octubre 22 de 1930*. (1730). Bogotá Retrieved from www.mineducacion.gov.co/1621/articles-102974_archivo_pdf.pdf.

Congreso de Colombia. (1936). *Ley 32 del 20 de febrero de 1936*. (32). Bogotá Retrieved from www.mineducacion.gov.co/1621/articles-102894_archivo_pdf.pdf.

Congreso de Colombia. (1963). *Decreto 1710 del 25 de julio de 1963*. (1710). Bogotá Retrieved from www.mineducacion.gov.co/.../article-103714.html.

Guacaneme, E. A., Obando, G., Garzón, D., & Villa-Ochoa, J. A. (2013). Informe sobre la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas : El caso de Colombia. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, *8*, 11–49.

Ministerio de Educación Nacional. (1950). *Planes y programas de la enseñanza primaria, rural y urbana*. Bogotá: Imprenta del Departamento.

Salazar, M. (2008). *El campo de saber sobre la lectura y escritura en la escuela colombiana: un recorrido por sus prácticas entre 1886 y 1968.* (Doctorado), Universidad de Manizalez, Manizales. Retrieved from http://www.umanizales.edu.co/ceanj/tesis/TesisMarthaLuciaSalazarAndica.pdf

Vasquez, N. L. (2010). *Un ejercicio de transposición Didáctica en Torno al Concepto de Número Natural en el Preescolar y el Primer Grado de Educación Básica.* (Tesis de Maestría), Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.



La enseñanza de las fracciones y sus significados en documentos oficiales de educación primaria en México. Programas de estudio 2011 y Guías para el maestro.

Ana María **Reyes-Camacho**
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos",
San Marcos, Loreto, Zacatecas.
México
anyreca0712@hotmail.com
Leticia **Sosa** Guerrero
Universidad Autónoma de Zacatecas.
México
lsosa@uaz.edu.mx

Resumen

En México, el estudio de las fracciones en los programas oficiales de educación primaria es un tema complejo, debido a sus diferentes significados: parte-todo, medida, cociente, razón y operador. En este trabajo identificamos el conocimiento matemático y didáctico que en relación con la enseñanza de fracciones y sus significados se plantea como necesario para los profesores de educación primaria, a partir de la revisión de documentos oficiales como Programas de estudio 2011 y Guías para el maestro de tercer a sexto grado de primaria, bajo el enfoque del análisis de contenido. Este estudio nos permite identificar que en las propuestas para la enseñanza de las fracciones, prevalecen conocimientos didácticos en relación con los conocimientos matemáticos; con lo anterior y otras situaciones, planteamos algunas recomendaciones generales que pueden contribuir a la mejora de estos materiales.

Palabras clave: primaria, fracciones, guías para el maestro, conocimientos matemáticos, conocimientos didácticos.

Introducción

En México, las últimas reformas en educación primaria (1993, 2011 y 2017) en el campo de las matemáticas, han despertado el interés de algunos docentes e investigadores, debido al escaso impacto favorable en el ámbito educativo (e. g. Ávila et al., 2004), mismas que están acompañadas de revisiones curriculares que dan cuenta de avances o retrocesos (Rojano-Ceballos y Solares-Rojas, 2017).

En la obra "Rutas de la Educación Matemática. 30 años de investigación en la revista *Educación Matemática*", Block (2018) destaca la importancia de abordar como objeto de estudio la enseñanza de las matemáticas en las reformas curriculares, en especial, rescata la reforma educativa de 1993, a través de la revisión de prácticas, programas y materiales para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica en México. En términos generales, Block (2018) señala que al asumir que son vigentes las bases del enfoque didáctico de los materiales de la reforma de 1993, aparecen diferentes tareas como el análisis de los conocimientos a enseñar, donde plantea como retos la organización de los contenidos del currículo, el diseño de situaciones, así como "[…] la determinación de los conocimientos matemáticos que deben considerarse en la formación de profesores, pieza angular en el concierto de factores que determinan la enseñanza" (Block, 2018, p. 317).

En este trabajo abordamos la revisión curricular de algunos materiales de educación primaria: Programas de estudio 2011 y Guías para el maestro (3º a 6º), los cuales se encuentran integrados en un mismo documento; lo anterior, con el propósito de identificar cuáles son los conocimientos matemáticos y didácticos relacionados con la enseñanza de las fracciones y sus significados, mismos que se constituyen en un referente de los conocimientos del profesor que enseña matemáticas.

Antecedentes

Las investigaciones en relación con el análisis de los currículos de matemáticas son un tema vigente y, que se actualiza, cada que emerge una nueva reforma educativa. En México, Ávila et al. (2004) se preocuparon por indagar sobre el impacto de la reforma educativa de 1993 en educación primaria. En este estudio rescataron cuáles eran las representaciones de los profesores sobre la reforma a matemáticas y cuál era el propósito de los libros para el maestro, entre otras líneas de investigación en el marco de esta reforma. En el caso de los materiales para el maestro cumplían con el propósito de brindar propuestas de enseñanza de diferentes contenidos. Sin embargo, en 2007, Block, Moscoso, Ramírez y Solares, al analizar los procesos de apropiación de la enseñanza de las matemáticas, por los maestros de primaria, destacan hace falta reforzar, en la formación de los maestros, conocimientos específicos de matemáticas y algunos aspectos relacionados con su tratamiento didáctico.

En relación con estudios sobre la enseñanza de las fracciones desde una perspectiva curricular recuperamos dos investigaciones. Aguayo (2005), señala que los diferentes significados de las fracciones generaron determinaciones didácticas que han influido en los currículos de las escuelas elementales. En este contexto recurre a Mochón (s.f.) cuando cita se observó la necesidad de "[…] poner menor énfasis en la memorización de reglas y la mecanización sin entendimiento de los algoritmos para dar cabida al desarrollo de los conceptos e ideas fundamentales que rodean la fracción […]" (p. 25). Por su parte, Ávila y Cedillo (2017) investigaron el tratamiento didáctico que se otorga al concepto de equivalencia de fracciones en los currículos oficiales de educación primaria entre 1960 y 2011. En este trabajo, los investigadores señalan tiene gran importancia el concepto de equivalencia en los materiales revisados, aunque fue cambiando su estudio, por ejemplo, "De una centración exclusiva en el sub-constructo *parte-todo*, representado mediante círculos, cuadrados o frutas, y que se enseñaba mediante trasmisión, se pasó a una propuesta donde se incorporaron diversos significados de las fracciones […]" (Ávila y Cedillo, 2017, p. 11). Además, destacan arrancó el descubrimiento como vía principal del aprendizaje.

En México y en otros países (e. g. España), existen investigaciones donde el foco de estudio es identificar cómo se abordan las fracciones y sus diferentes significados en los materiales educativos, así como cuáles son los conocimientos matemáticos y didácticos que los profesores ponen en juego cuando enseñan estos temas; tal es el caso del trabajo de Rojas (2014), quien estableció una relación teórica entre el análisis didáctico y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés). En las conclusiones de su investigación destaca que en el caso de un profesor de primaria, se identifica un fuerte componente didáctico, donde resalta conocimiento de la enseñanza y las características del aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, mencionamos las investigaciones de Valdemoros (2010) y, Bednarz y Proulx (2013), las cuales dan cuenta de los conocimientos matemáticos y didácticos, que profesores de primaria, evidencian al enseñar fracciones en un contexto de desarrollo profesional.

En los párrafos anteriores, sólo enunciamos algunas investigaciones relacionadas con el análisis de los currículos de matemáticas, el análisis de la enseñanza de las fracciones en los programas y los libros para los maestros, así como algunos estudios que pretenden identificar el conocimiento matemático y didáctico que profesores de primaria ponen en juego al enseñar fracciones. En esta comunicación, contribuimos a la identificación de los conocimientos matemáticos y didácticos relacionados con la enseñanza de las fracciones, que se establecen en los Programas de estudio 2011 y Guías para el maestro (3º a 6º) de educación primaria.

Perspectiva metodológica

Para identificar algunos elementos del conocimiento matemático y didáctico que en relación con el estudio de las fracciones y sus significados se plantean como necesarios para los profesores de educación primaria, en algunos documentos oficiales como los Programas de estudio 2011 y la Guía para el maestro (tercer a sexto grado), recurrimos a realizar un análisis cualitativo de los datos, en función del enfoque de análisis de contenido (Fox, 1981; Bardin, 1996; Flick, 2004; Franzosi, 2009), el cual se interpreta como un procedimiento para la categorización de datos con el propósito de clasificar, resumir o tabular (Fox, 1981).

El proceso del análisis de contenido está integrado por diferentes momentos donde destaca: la identificación de unidades de análisis, la definición de categorías que se van a emplear y la codificación de las unidades de análisis correspondientes a cada categoría, entre otros (Fox, 1981; Mayring, 1983, citado en Flick, 2004; Bardin, 1996).

En este trabajo, el MTSK nos proporciona las categorías de análisis para la identificación de elementos de conocimiento matemático y didáctico en los materiales que revisamos. En relación con el conocimiento matemático identificamos como categorías el conocimiento de los temas (KoT, por sus siglas en inglés): procedimientos, definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, fenomenología y aplicaciones. Además, aparece el conocimiento de la estructura matemática (KSM, por sus siglas en inglés), mismo que incluye conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares. Por último, identificamos en conocimiento de la práctica matemática (KPM, por sus siglas en inglés): jerarquización y planificación, formas de validación y demostración, papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, procesos asociados a la

resolución de problemas, prácticas particulares del quehacer matemático y, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

En los elementos del conocimiento didáctico, ubicamos como categorías de análisis el conocimiento de las características de aprendizaje de la matemática (KFLM, por sus siglas en inglés): teorías de aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con un contenido matemático e intereses y expectativas. También recuperamos el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, por sus siglas en inglés): teorías de enseñanza, recursos materiales y virtuales y, estrategias técnicas, tareas y ejemplos. Al final, retomamos el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, por sus siglas en inglés): expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y secuenciación con temas anteriores y posteriores.

La enseñanza de las fracciones y sus significados en los documentos oficiales de educación primaria

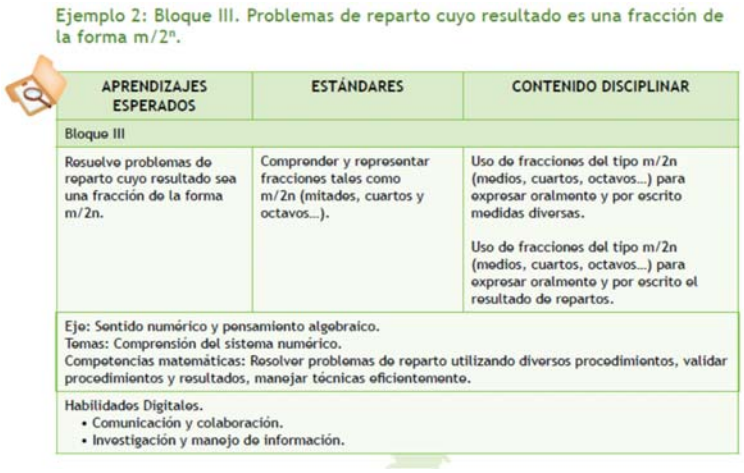
El estudio de las matemáticas en educación primaria se organizó en los materiales *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria*[1], emitidos en función de cada uno de los seis grados que se atienden; los anteriores, están organizados en dos apartados: Programas de estudio 2011 y Guía para el maestro. En esta comunicación, damos cuenta de la revisión de la Guía para el maestro de tercer a sexto grado de educación primaria que es cuando se aborda el estudio de las fracciones.

Guías para el maestro 2011. Tercer, cuarto, quinto y sexto grado.

La segunda parte del Programas de estudio 2011 de tercer grado (SEP, 2011a) está integrada por la Guía para el maestro, donde se describen algunas orientaciones pedagógicas y didácticas en relación con las diferentes asignaturas que se estudian en primaria. Este material pretende guiar el trabajo del docente. En el caso de matemáticas, la Guía para el maestro se constituye como un apoyo, algo semejante a los libros para el maestro de matemáticas que emergieron en el contexto de la reforma de 1993 en primaria (Ávila et al., 2004).

En la Guía para el maestro de tercer grado (SEP, 2011a), se aborda el estudio de las matemáticas en el campo de formación pensamiento matemático, donde se describe su enfoque, algunas sugerencias para la planificación, la organización de ambientes de aprendizaje, el desarrollo de habilidades digitales, la evaluación y orientaciones pedagógicas y didácticas de manera general y en relación con algunos contenidos. Así, en este documento, destacan *conocimientos de la enseñanza de las matemáticas* (KMT). Enseguida presentamos diferentes fragmentos donde están presentes algunos conocimientos que el profesor debe poseer y se relacionan con categorías del MTSK. A la par, agregamos recortes donde se hace evidente el estudio de las fracciones.

[1] En el año 2017, en México, se publica en el Diario Oficial de la Federación el Nuevo Modelo Educativo para Educación Básica, sin embargo, en el ciclo escolar 2018-2019 sólo se pone en marcha en primer y segundo grado de educación primaria, mientras que de tercer a sexto grado se sigue trabajando con el Plan de estudios 2011.



Ejemplo 2: Bloque III. Problemas de reparto cuyo resultado es una fracción de la forma m/2ⁿ.

APRENDIZAJES ESPERADOS	ESTÁNDARES	CONTENIDO DISCIPLINAR
Bloque III		
Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma m/2n.	Comprender y representar fracciones tales como m/2n (mitades, cuartos y octavos...).	Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos...) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas. Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos...) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos.
Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico. Temas: Comprensión del sistema numérico. Competencias matemáticas: Resolver problemas de reparto utilizando diversos procedimientos, validar procedimientos y resultados, manejar técnicas eficientemente.		
Habilidades Digitales. • Comunicación y colaboración. • Investigación y manejo de información.		

Figura 1. Propuesta de enseñanza de fracciones. Tercer grado (SEP, 2011a, p. 330).

En la Figura 1, identificamos *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS), al plantear los aprendizajes esperados, estándares, contenido disciplinar, eje, temas, competencias matemáticas y habilidades digitales. En relación con la propuesta de enseñanza que corresponde al ejemplo 2, se toma como referente una situación que emerge del diseño de Valdemoros (2004). Bajo el epígrafe "el estudio de las fracciones en la escuela", en las primeras líneas identificamos conocimientos didácticos, de manera concreta, *conocimientos de las características de aprendizaje de la matemática* en relación con algunos *intereses y expectativas* en torno al tema de fracciones:

> El estudio de las fracciones es un gran desafío para los alumnos de la escuela básica, pues es bien sabido que es un tema bastante complejo, constituyéndose en una de las áreas de mayor falla en las escuelas a nivel mundial, junto con los números decimales (SEP, 2011a, p. 334).

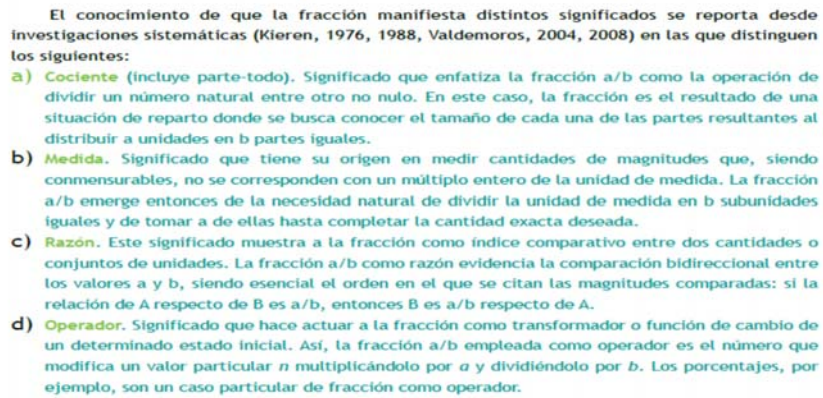
En un segundo momento, identificamos *conocimientos de las características de aprendizaje de la matemática*, pero ahora ligados a algunas *fortalezas y dificultades* (KFLM) que los alumnos enfrentan al resolver algunas situaciones relacionadas con el estudio de las fracciones:

> Para muchos, las fracciones son sólo pares de números naturales sin relación entre sí, por ello, al resolver problemas aditivos, una tendencia generalizada en algunos es el uso del modelo lineal aditivo. Otra dificultad en alumnos de cualquier edad, documentada por las investigaciones, es el ordenamiento de las fracciones o bien una fracción y un número decimal. Por ejemplo, 1/3 puede pensarse menor que ¼ porque saben que 3 < 4 (SEP, 2011a, p. 334).

Con lo anterior, identificamos dificultades en los alumnos asociadas al conocimiento que tienen de los números naturales. De ahí que al resolver problemas aditivos recurren al modelo lineal. Algo semejante ocurre al ordenar fracciones (1/3 y 1/4), donde la cantidad mayor se establece en función del conocimiento que tienen de los números naturales: 3< 4.

En otro fragmento de la propuesta identificamos conocimientos matemáticos en relación con *conocimientos de los temas* (KoT) asociados a *fenomenología y aplicaciones*, así como *registros de representación*: "[…] es importante que los alumnos "descubran" y comprendan que dependiendo de la situación, las fracciones adquieren distintos significados y que éstas, pueden

ser representadas de diversas formas" (SEP, 2011a, p. 334); los conocimientos sobre fenomenología se hacen presentes cuando se habla de los diferentes significados de las fracciones y los conocimientos ligados a los registros de representación aparecen al final, cuando señala que las fracciones pueden ser representadas de diferentes formas. Enseguida presentamos información que viene en la Guía para el maestro y nos permite profundizar en las dos categorías de conocimientos anteriores.



El conocimiento de que la fracción manifiesta distintos significados se reporta desde investigaciones sistemáticas (Kieren, 1976, 1988, Valdemoros, 2004, 2008) en las que distinguen los siguientes:

a) Cociente (incluye parte-todo). Significado que enfatiza la fracción a/b como la operación de dividir un número natural entre otro no nulo. En este caso, la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en b partes iguales.

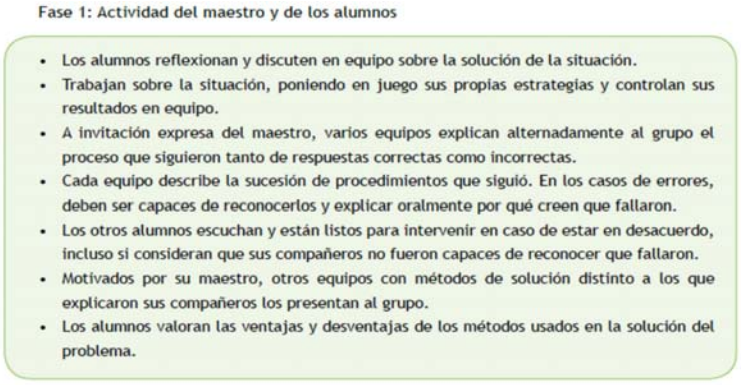
b) Medida. Significado que tiene su origen en medir cantidades de magnitudes que, siendo conmensurables, no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. La fracción a/b emerge entonces de la necesidad natural de dividir la unidad de medida en b subunidades iguales y de tomar a de ellas hasta completar la cantidad exacta deseada.

c) Razón. Este significado muestra a la fracción como índice comparativo entre dos cantidades o conjuntos de unidades. La fracción a/b como razón evidencia la comparación bidireccional entre los valores a y b, siendo esencial el orden en el que se citan las magnitudes comparadas: si la relación de A respecto de B es a/b, entonces B es a/b respecto de A.

d) Operador. Significado que hace actuar a la fracción como transformador o función de cambio de un determinado estado inicial. Así, la fracción a/b empleada como operador es el número que modifica un valor particular *n* multiplicándolo por *a* y dividiéndolo por *b*. Los porcentajes, por ejemplo, son un caso particular de fracción como operador.

Figura 2. Propuesta de enseñanza de fracciones. Significados de las fracciones. Tercer grado (SEP, 2011a, p. 335).

Después de describir lo anterior, en la Guía para el maestro se propone una tarea que atiende a situaciones de reparto (repartir 5 jarras de bebida entre 8 amigos), donde se propicia el registro de representación figural y/o numérica al completar un enunciado. Enseguida, se definen algunas actividades del maestro y alumnos, las cuales asociamos con conocimientos de las *teorías de aprendizaje* (KFLM) y *teorías de enseñanza* (KMT):



Fase 1: Actividad del maestro y de los alumnos

- Los alumnos reflexionan y discuten en equipo sobre la solución de la situación.
- Trabajan sobre la situación, poniendo en juego sus propias estrategias y controlan sus resultados en equipo.
- A invitación expresa del maestro, varios equipos explican alternadamente al grupo el proceso que siguieron tanto de respuestas correctas como incorrectas.
- Cada equipo describe la sucesión de procedimientos que siguió. En los casos de errores, deben ser capaces de reconocerlos y explicar oralmente por qué creen que fallaron.
- Los otros alumnos escuchan y están listos para intervenir en caso de estar en desacuerdo, incluso si consideran que sus compañeros no fueron capaces de reconocer que fallaron.
- Motivados por su maestro, otros equipos con métodos de solución distinto a los que explicaron sus compañeros los presentan al grupo.
- Los alumnos valoran las ventajas y desventajas de los métodos usados en la solución del problema.

Figura 3. Propuesta de enseñanza de fracciones. Ejemplo 2. Fase 1. Actividades del maestro y de los alumnos. Tercer grado (SEP, 2011a, p. 336).

En términos generales, en el apartado de la Guía para el maestro de tercer grado (SEP, 2011a), de las dos propuestas de enseñanza que se plantean, sólo una corresponde al estudio de las fracciones, donde se presentan *conocimientos de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS), *conocimientos de los temas* (KoT), *conocimientos de las características*

de aprendizaje de la matemática (KFLM) y *conocimientos de la enseñanza de las matemáticas* (KMT).

En el apartado de la Guía para el maestro de cuarto año (SEP, 2011b), se plantea el estudio de las fracciones en un ejemplo de propuesta de enseñanza cuyo aprendizaje esperado atiende a "identifica fracciones de magnitudes continuas o determina qué fracción de una magnitud es una parte dada" (SEP, 2011b, p. 362), pero a diferencia del contenido en tercer grado, esta propuesta que parte de un ejemplo que se integra por dos fases y, en tercer grado, sólo tiene una fase. De ahí que exista una mayor cantidad y diversidad de conocimientos matemáticos y didácticos que requiere un profesor que enseña fracciones en educación primaria.

En la Guía para el maestro de quinto y sexto grado (SEP, 2011c; SEP, 2011d), las propuestas de enseñanza que se plantean abordan tareas para la enseñanza de la proporcionalidad y el porcentaje; desde donde se establecen algunas relaciones con el estudio de las fracciones.

Consideraciones finales

En términos generales, en las propuestas de enseñanza de las fracciones que aparecen en las Guías para el maestro (3º a 6º), prevalecen categorías de análisis del conocimiento didáctico (KMT; KFLM; KMLS), mientras que encontramos menor cantidad de categorías del conocimiento matemático (KoT; KSM; KPM). En el Estudio comparativo que coordinaron Rojano-Ceballos y Solares-Rojas (2017), el exceso de elementos de los programas mexicanos en el ámbito de las matemáticas, en especial los que corresponden a la educación básica, hace evidente deficiencias en su diseño, "[…] lo cual, aunado a una falta de articulación entre los mismos, deriva de una comunicación poco clara del sentido y los propósitos de la enseñanza de las matemáticas en la educación obligatoria" (Rojano-Ceballos y Solares-Rojas, 2017, p. 301).

Es necesario establecer un equilibrio entre el conocimiento matemático y didáctico que acompaña las propuestas de enseñanza, pues el primero permite al profesor tomar decisiones en la gestión didáctica. Por otra parte, concluimos que no son suficientes las propuestas generales presentes para el estudio de las fracciones en los diferentes grados, se requiere de propuestas de enseñanza puntuales para las diferentes tareas que el profesor debe proponer a los alumnos. Por tanto, coincidimos con Block (2018) al dejar como una línea de investigación abierta, el estudio de la enseñanza de las matemáticas desde el diseño curricular, donde es necesario seguir buscando qué es lo que resulta más rico comunicar al docente y que él pueda adaptarlo en su trabajo.

Referencias y bibliografía

Aguayo, L. M. (2005). *La transposición del "saber didáctico". Un estudio con profesores en formación en el marco de los números racionales* (Tesis doctoral). México: UPN.

Ávila, A., Aguayo, L. M., Eudave, D., Estrada, J. L., Hermosillo, A., Mendoza, J., y Becerra, E. (2004). *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas.* México: SEP - Informe de investigación.

Ávila, A., y Cedillo, J. (2017). El concepto de equivalencia de fracciones en la educación primaria mexicana entre 1960 y 2011. En *Memoria Electrónica XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa.* México: COMIE.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Madrid: Ediciones Akal.

Bednarz, N., y Proulx, J. (2013). The (relativity of the) whole as a fundamental dimension in the conceptualization of fractions. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 844-851). Antalya, Turquía.

Block, D. (2018). "La enseñanza de las matemáticas en la reforma curricular de 1993 en México. Algunas reflexiones 25 años después" en Alicia Ávila (coord.): *Rutas de la Educación Matemática. 30 años de investigación en la revista Educación Matemáticas.* México: SOMIDEM. ISBN: 978-607-98263-0-7

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., y Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 12* (33), 731-726.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: CERME.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. A. Montes (Eds.). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: EUNSA.

Franzosi, R. (2009). Content Analysis. In M. Hardy & A. Bryman (Eds.), *Handbook of Data Analysis* (pp. 547- 565). London: SAGE Publications.

Rojano-Ceballos, M. T. y Solares-Rojas, A. (coords.) (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países.* México: INEE-CINVESTAV.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* (Tesis doctoral). Granada, España. Recuperado de Tesis%20%28VF2%29.%20Nielka%20Rojas

SEP. (2011a). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Tercer grado.* México: Autor.

SEP. (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Cuarto grado.* México: Autor.

SEP. (2011c). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Quinto grado.* México: Autor.

SEP. (2011d). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Sexto grado.* México: Autor.

Valdemoros, M. E. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7* (3), 235–256.

Valdemoros, M. E. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13 (2), 423-440.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Situación transversal como estrategia curricular de la matemática escolar en Telesecundaria

Felipe de Jesús **Santiago** Flores
Facultad de Psicología, Universidad Autónoma de Querétaro
México
jesus.santiagof@usebeq.edu.mx
Erika **García** Torres
Facultad de Psicología, Universidad Autónoma de Querétaro
México
erika.garcia@uaq.mx

Resumen

La Telesecundaria en México presenta problemáticas educativas que hace que los investigadores pongan su mirada para analizarlas, desde diversas perspectivas. Desde la Matemática Educativa, cabe indagar sobre el tratamiento que realizan los profesores con el saber que enseñan y las estrategias que usan para mejorar los aprendizajes de los estudiantes. Este estudio se encauza en diseñar e implementar una situación transversal para la enseñanza en matemáticas, así como caracterizar los saberes que construyen los estudiantes en este proceso, ya sean matemáticos o extramatemáticos. Con este diseño, se espera dar visibilidad a las actuaciones de los docentes de Telesecundaria para potenciar las características propias de la modalidad y aportar evidencia sobre la forma en que se generan procesos de aprendizaje en la matemática escolar.

Palabras clave: telesecundaria, situación trasversal, matemática escolar

Introducción

Actualmente, en el nivel secundario de México existen diversas modalidades que los adolescentes de entre once y quince años de edad pueden cursar, estos son: generales, técnicas, telesecundarias, para trabajadores e indígenas. Las dos primeras son las que atienden un número cuantioso de estudiantes debido a que tienen mayor antigüedad y la mayoría de éstas se ubican en ciudades, es decir con poblaciones mayores a 2500 habitantes. Luego surgieron otras modalidades como la de trabajadores, la cual está dirigida a personas con más de 18 años de edad y que

por lo regular acuden en horario nocturno. La Telesecundaria y la secundaria indígena, atienden a poblaciones vulnerables, es decir, a las de difícil acceso y ubicadas en un ambiente rural, empero éstas, no siempre estuvieron presentes.

El tratamiento que realizan los profesores en la enseñanza de matemática es importante de destacar, debido a que muestra cómo tienen un acercamiento con los saberes, lo cual debe impactar en el aprendizaje de los estudiantes. Este trabajo pretende dilucidar de qué manera los docentes de telesecundaria recurren a una estrategia curricular en la que tratan de reducir tiempo para cubrir los programas de estudio propuestos en el currículum nacional de México: la transversalidad.

Antecedentes

En los años 60, México enfrentaba un gran problema en el ámbito educativo debido a que pretendía dar cobertura del nivel primario para que las personas aprendieran, al menos, a leer y a escribir. Sin embargo, años más tarde, el gobierno federal se dio cuenta de que algunas personas truncaban sus estudios por falta del nivel secundario que les permitiera continuar con estudios más específicos, sobre todo en comunidades de alta pobreza y marginación. Algunos habitantes de poblaciones rurales migraban a las ciudades para proseguir con su escolaridad, sobre todo a las secundarias generales o técnicas que los preparaban para el ámbito laboral, aunque gran parte de esta población no contaba con los recursos necesarios para hacerlo.

Por lo que en 1968 se consideró necesario abrir espacios educativos que atendieran a la población rural y así responder al rezago educativo de aquella época. Para ello, se diseñó una modalidad basada en una forma de escuela de Italia -la *telescuola*- en el que un recurso fundamental era la televisión, pues las clases de las diferentes asignaturas se impartían a través de programas televisados, con la finalidad de no tener docentes especializados, pues no podrían llegar a esos contextos.

Así fue que el gobierno comenzó a contratar a personas con diferentes perfiles educativos -abogados, pedagogos, biólogos, químicos, ingenieros, entre otros- para atender a los estudiantes que se encontraban en aquellas zonas. Ya que, a diferencia de las técnicas o generales, en las telesecundarias solamente un docente cubre todo el horario de clases y debe tener conocimientos generales para guiar a los estudiantes.

De ahí que, los profesores de esta modalidad han creado características particulares que los identifican y los diferencian de otras modalidades, puesto que ellos se enfrentan al reto de impartir clases toda la jornada laboral, lo que implica que son los únicos encargados de planear, evaluar, orientar a los estudiantes y conocer sus procesos de aprendizaje. Además, identifican el contexto social y cultural en el que se encuentran y reconocen las necesidades que tiene la comunidad, para asegurar que todos los estudiantes concluyan satisfactoriamente su escolaridad.

Como puede observarse, la modalidad de telesecundaria sigue enfrentando problemáticas diversas que tienen que ver con el tratamiento que cada docente realiza en las asignaturas, debido a la diversidad de perfiles que se encuentran en las escuelas. Además, las reformas educativas actuales, no siempre consideran la diversidad de contextos en los que están inmersas las telese-

cundarias y por lo mismo, los materiales educativos están desfasados con los de otras modalidades.

Pareciera incongruente que las reformas educativas no vayan a la par con las diferentes modalidades que atiende el nivel secundario, pero es una realidad del Sistema Educativo Mexicano. Se siguen abriendo telesecundarias en diferentes puntos del país; de acuerdo con la Dirección General de Planeación, Programación y Estadística Educativa (2018) el 48% de las secundarias pertenecen a esta modalidad, las cuales atienden a un 20% de alumnos (1,433,688) del país. Estos datos son importantes y deberían ser elementos para redireccionar los esfuerzos en vías de otorgar pertinencia educativa a esta modalidad. Si se pretende dar una educación con igualdad de oportunidades, primero deberíamos pensar a la población a las que van dirigidas todas las acciones políticas y a los problemas que se enfrentan en esos contextos (Dirección General de Planeación, Programación y Estadística Educativa, 2018).

Planteamiento del problema

Los problemas antes expuestos son a nivel macro, en el nivel micro, o áulico, gran parte de quienes resuelven estos problemas son los docentes. Como ya se mencionó, existen perfiles distintos en esta modalidad por lo que cada profesor tiene un acercamiento distinto con el saber que enseña. Específicamente, en la asignatura de Matemáticas, la mayoría de los docentes imparten sesiones de 50 minutos y trata de explicar los saberes utilizando materiales del modelo de Telesecundaria como libros de texto y programas televisados.

Esta actuación se puede explicar desde la Matemática Educativa planteándose la pregunta: ¿cuál es la relación que tiene el profesor de telesecundaria con el saber matemático y qué acciones toma para enseñarlo? A la cual, García (2016) responde que el uso del conocimiento matemático se asocia con la relación que el profesor tiene con el saber, la manera en que organiza la matemática escolar le provee de un sentido de pertenencia que lo identifica como profesor en telesecundaria. Es por ello que, los maestros, enseñan la matemática escolar desde su experiencia y desde el acercamiento que tienen con los saberes matemáticos, fundamentando en ello las decisiones didácticas para impartirla.

Por otra parte, al no contar con recursos y materiales actualizados tratan de diseñar estrategias que les permita cubrir los programas de estudio, optimizar tiempo, resolver problemas específicos del contexto, tomar como ventaja que son ellos quienes imparten todas las asignaturas y que el aprendizaje de los estudiantes sea favorable.

Una de esas estrategias son las nombradas «situaciones integradoras» por García (2016) quien las define como aquellas estrategias en las que los docentes de telesecundaria resaltan elementos y construyen significados asociados a varias asignaturas y que, para ellos, es denominado como «transversalidad».

A pesar de que no hay un acuerdo de lo que significa la «transversalidad», los maestros de telesecundaria parecen tener ciertas regularidades en su definición. García (2016) trató de indagar sobre la identidad del profesor de esta modalidad y varios docentes de algunas partes del país mencionaban trabajar por transversalidad.

> "-Profesor: Estábamos viendo Español secuencia cuatro. Se ven los documentos que el muchacho va a necesitar, que ellos hagan una solicitud de empleo. Entonces ahí se pueden ver muchos detalles, entonces empieza uno platicando de la solicitud, que deben de llenar los muchachos para el futuro, entonces ahí se entrelaza Formación Cívica y Ética, Orientación y Tutoría, para el futuro de los muchachos, y luego se maneja la historia del empleo ¿cómo está ahorita la situación actual? En Matemáticas qué tanto gana uno si se prepara mucho, si se prepara poco, esto yo ahorita lo hice, sin querer me fui de lleno hasta… sabe, cuando me acordé ya estaba así [manos señalando algo grande]. Los muchachos mismos se fijan porque el mismo bloque II habla de eso, y de Inglés... todo se maneja, la transversalidad, se ve diario" (Fragmento de entrevista, García, 2016, p.7)

Sin embargo, la concepción que se tiene de transversalidad podría llevar a analizar algunas consecuencias subyacentes, a veces sin ser conscientes de éstas, tales como: banalizar los saberes matemáticos -o los que se seleccionen-, debido a que no por comparar cifras de *qué tanto gana uno si se prepara mucho o si se prepara poco*, ya se está tratando un saber matemático. Faltaría responder, ¿cómo construyen el saber los estudiantes? ¿En qué medida les dan significado? ¿Qué otros saberes favorecieron el aprendizaje de ese saber matemático?

Otras consecuencias serían no tener objetivos precisos de la actividad, ni saber qué se espera que aprendan los alumnos. Por lo que parece conveniente seguir investigando sobre aspectos metodológicos, o características de la estrategia misma, y determinar las variables que tendrían que controlarse para diseñar una situación transversal.

A lo anterior, se debe agregar que los contextos en los que se encuentran la mayoría de las telesecundarias son desfavorecidos, por lo que a veces comparten características similares tal como las bajas expectativas que los estudiantes le encuentran a sus estudios y que incluso los consideran innecesarios debido a que las prácticas cotidianas del aula se alejan de su realidad o de sus intereses.

En definitiva, los procesos de enseñanza de las matemáticas en Telesecundaria tienen particularidades que serían importante resaltarlos, debido a que son oportunidades didácticas que la misma modalidad ofrece con la finalidad de mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Además, no es que las «situaciones integradoras» sean una estrategia curricular visibles en los programas de estudio del Sistema Educativo, sino que son acciones que los profesores diseñan para contrarrestar los retos a los que encaran, por lo que se debe indagar más sobre las intervenciones docentes y proponer modificaciones para sistematizar las acciones de los maestros.

Objetivos

Con miras a hacer visible la estrategia curricular que realizan los profesores de telesecundaria y con modificaciones pertinentes para convencionalizar y dar formato pertinente a ésta, se proponen dos objetivos:

- Diseñar e implementar una situación transversal para la enseñanza de las matemáticas en Telesecundaria.
- Caracterizar los saberes involucrados de los estudiantes en una situación transversal para atribuir significado.

Marco Conceptual

Debido a que, en las situaciones integradoras emergen consecuencias no tan favorables para el aprendizaje de los estudiantes, se plantean en este estudio las situaciones transversales. Para entender la postura que se está tomando, se menciona a Velásquez (2009), quien define a la transversalidad como una estrategia curricular mediante la cual algunos ejes o temas considerados prioritarios impactan todo el currículo; es decir, están presentes en todos los proyectos y actividades que producen los estudiantes. También, agrega que lo transversal busca reconstruir la educación en un proceso integral de aprender, dando como resultado un cruce en las dimensiones de los sujetos y concediéndole integridad y sentido. Esto parece importante recalcarlo debido a que los saberes no deberían presentarse de manera dividida, sino que, para estudiarlos, es necesario fragmentar el conocimiento con fines de comprensión, mas no como conocimientos desfasados o banales.

A su vez, Magendzo (1998) hace una distinción entre tres concepciones que se tiene acerca de la transversalidad. Desde su postura, para diseñar una situación didáctica primero se debe tener un posicionamiento de cómo va a ser el tratamiento del currículum, antes de esbozar, planear y evaluar la actividad. El primer trato que menciona es el referido a una concepción académica del currículo en el que se preferencian los contenidos transversales; desde este punto de vista, tenemos como ejemplos: el medio ambiente, el tiempo, la lengua materna, el consumo, entre otros. La mayoría de la bibliografía encontrada pertenece a los argentinos.

Por otro lado, como segundo posicionamiento tenemos a una concepción tecnológica. Aquí, se considera fundamental desarrollar habilidades o competencias. Regularmente, este tratamiento se encuentra en el currículum francés y el propósito es preparar al estudiante para enfrentarse a la vida en múltiples dimensiones ciudadanas. Basándose en esta manera como temas están: aprender a aprender, pensar críticamente, resolver problemas, experimentar, abstraer, entre otras habilidades y actitudes (Magendzo, 1998).

Por último, está la concepción reconstruccionista, la cual está ligada a temas transversales, éstos hacen referencia a los problemas y conflictos de gran trascendencia que se producen en la época actual. Desde esta perspectiva, se tratan de atender a problemáticas sociales como la corrupción, el abuso infantil, la polución y se entienden como temas trasversales: la educación para la paz, la educación moral, la educación vial, la educación del consumidor, la educación sexual, entre otros

De ahí que, en la situación transversal que se propone en este trabajo se opte por la concepción reconstruccionista porque es el que aporta más características a la población de estudio específico, el cual está ubicado en un contexto rural. Al haber elegido este tratamiento, nada tiene que ver con que los otros dos -concepción académica o concepción tecnológica- generen poco

conocimiento en los estudiantes, sino que responde más a las necesidades de lo que se pretende reportar.

Por otro lado, para ir logrando los objetivos de investigación en cuanto al diseño de la estrategia se requieren características para retomarlas o modificarlas en la situación transversal que se diseñe. Para ello Palos (1998) trata de concretar elementos clave para el diseño transversal, mencionando cuatro puntos esenciales:

- Es un medio para impulsar la relación entre la escuela y el entorno sociocultural.
- Tiene una dimensión humanística que responden a demandas y problemáticas sociales y relevantes.
- Favorece la interacción entre los aprendizajes.
- Promueven visiones interdisciplinares que permiten la comprensión de fenómenos difíciles de explicar.

Por lo que se refiere a la pertinencia y relevancia que tiene el tema de transversalidad en contextos vulnerables, se sustenta en Henríquez y Reyes (2008) cuando exponen que estas situaciones se vuelven interesantes cuando se abordan contenidos culturales relevantes y valiosos, necesarios para la vida y la convivencia, que dan respuesta a problemas sociales, debido a que los jóvenes le encuentran sentido a lo que están construyendo.

De igual modo, Celorio (en Yus, 1996) señala que la transversalidad propugna una profunda renovación de los sistemas de enseñanza-aprendizaje que sea capaz de transformar las visiones tradicionales que se ofrecen del mundo y de sus interacciones; con ello se quiere decir que aunque al docente de telesecundaria se le facilita más segmentar las clases para seguir el horario, esta estrategia es una invitación para estudiar una problemática y tratar de incorporar en el aula una visión distinta a la que se ha venido haciendo.

Otro punto esencial de la transversalidad es su papel en la consideración curricular de la noción de complejidad. De modo que, es preciso organizar el conocimiento sobre temas transversales y buscar un marco interpretativo común. Esto es posible, como señalan Otano y Sierra (en Yus, 1996), los temas transversales están dotados de elementos comunes y diferenciales que obligan a compaginar un tratamiento didáctico global con la profundización en la especificidad de cada uno, con ello se procuraría no banalizar los aprendizajes, sino reconocer su complejidad y tratamiento.

Llegados a este punto, se trata de concretar que una situación transversal, a diferencia de la integradora, tiene más elementos que retomar y esto favorece al tratamiento curricular que se quiere lograr con los estudiantes, por lo que se trata de una situación compleja. Al mismo tiempo, representa una caracterización más precisa para que el docente planee situaciones en las que no se banalicen los conocimientos, sino que procure tener una elección más detallada de lo que pretende que aprendan los jóvenes.

Metodología

Al considerar que las telesecundarias están insertas en contextos rurales, indígenas o urbano marginados, este estudio se desarrolla en uno rural. La comunidad, llamada La Laborcilla,

se encuentra localizada en el estado de Querétaro, México. La escuela es pequeña debido a que sólo hay un grupo para cada grado escolar -primero, segundo y tercero-.

El grupo de estudio está conformado por 18 estudiantes de tercer grado, sus edades oscilan entre los 14 y 15 años. El docente a cargo es quien realiza esta investigación y tuvo el interés de realizar este estudio al ver que otros maestros recurrían a las situaciones integradoras mas no encontraba una conceptualización generalizada, sólo elementos en común.

Método e instrumentos

Para implementar una situación transversal en telesecundaria es imprescindible, además de hacer la revisión exhaustiva de la literatura, realizar un diseño situacional y secuencial, en el que se pongan en juego hipótesis de construcción de conocimiento de cómo tendría que darse el proceso entre las disciplinas y el conocimiento matemático. Este primer punto va a ser a manera de pilotaje para verificar si se están generando saberes matemáticos y realizar adecuaciones necesarias.

Como segundo momento, será imperioso hacer un análisis cualitativo de los aprendizajes y saberes que los alumnos van generando en la situación transversal para identificar cómo los están generando, todo ello con base en grabaciones y transcripciones de las sesiones de la secuencia didáctica.

Por último, es sustancial que la situación transversal se evalúe a partir de un producto cultural, es decir, que al final de toda la secuencia se llegue a un producto tangible en el que se vean reflejados los saberes y de no ser así, indagar más sobre los constructos que pusieron en juego para llegar a esa producción.

Resultados preliminares

Esta investigación se encuentra en etapa inicial debido a que se están retomando elementos para el diseño de la situación transversal. Se siguen haciendo revisiones bibliográficas para ver de qué manera los saberes se pueden relacionar para resolver la problemática que tienen los profesores de Telesecundaria al no tener una metodología clara y así favorecer el aprendizaje en matemáticas y en otras disciplinas.

El resultado final de esta indagación será reportar la situación transversal puntualizando las variables didácticas que se pondrán en juego para que los docentes de Telesecundaria traten de mejorar los saberes de los estudiantes en matemáticas, aunque al tratarse de una modalidad en la que imparten sesiones de otras disciplinas, no se pueden dejar de lado esos otros saberes.

Debido a que los conocimientos no se separan por asignaturas, será importante presentar como resultados aquellos saberes curriculares y extraescolares que subyacen al momento de resolver una problemática.

Simultáneamente, va a ser valioso exponer cómo la Matemática Escolar está implicada en la construcción de otras disciplinas en una situación transversal. Dicho de otra forma, de qué manera los saberes matemáticos colaboran en la construcción de otros conocimientos y cómo esos otros saberes generan conocimientos matemáticos, todo ello en la interacción que se estará generando en la situación.

Discusión

Los planes y programas de estudio mexicanos del nivel secundario están diseñados de manera generalizada y homogénea para todas las modalidades -generales, técnicas, telesecundarias, para trabajadores e indígena- con la finalidad de que la enseñanza sea igual para todos. Sin embargo, más que lograr una igualdad para todos los estudiantes se está provocando un fenómeno contrario, pues los contextos socioculturales se dejan de lado y se encuentra un abismo entre lo que se enseña en la escuela y lo que enfrenta en la vida cotidiana.

En ocasiones las reformas curriculares no llegan a todos los espacios educativos de la forma en que se planea, por lo que el docente es quien trata de subsanar acciones inconsistentes establecidas en un nivel macro, haciendo adecuaciones en un nivel micro, su aula.

Debido a que la modalidad de Telesecundaria presenta diversas problemáticas, los docentes tratan de afrontarlas de una u otra manera. Tan sólo en el ámbito académico, buscan estrategias que más se adecuen a los estudiantes, con el fin de mejorar los aprendizajes académicos de los adolescentes. Pero su búsqueda no sólo se queda en este ámbito, también optimizan tiempo, diseñan proyectos interesantes para los alumnos, incluso sienten la necesidad de convertirse en diseñadores curriculares debido a que consideran que algunos contenidos no son fundamentales para los contextos en los que están inmersos.

La estrategia curricular de situaciones integradoras o como los docentes de telesecundaria lo nombran, la transversalidad, al ser el eje de este estudio, pone al centro del debate la práctica docente situada, debatiéndose entre lo que debe ser y lo que se hace en los contextos reales. Esta investigación pretende ser un aporte sobre las diferentes estrategias que emplean los docentes para potenciarlas y seguir proponiendo formas de abordar la construcción de significados de los objetos matemáticos.

Referencias y bibliografía

Dirección General de Planeación, Programación y Estadística Educativa. (2018). *Sistema Educativo de los Estados Unidos Mexicanos, Principales Cifras 2016-2017*. México: SEP.

García, E. (2016). El uso de situaciones transversales como elemento de la matemática escolar y de la identidad del profesor de telesecundaria. En B. Anzaldúa y R. Ávila (Eds.). *Formación y profesionalización docente: Ejes transversales*, 57-69. CRETAM. ISBN: 978-607-96697-51-1: México.

Henríquez, C. y Reyes, J. (2008). 1.2 ¿Qué es la transversalidad? En *La Transversalidad: Un reto para la educación primaria y secundaria*. Costa Rica: Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, CECC/SICA.

Magendzo, A. (1998). El curriculum escolar y los objetivos transversales. En *Pensamiento Educativo*. Vol. 22. Recuperado de: http://www.pensamientoeducativo.uc.cl/files/journals/2/articles/120/public/120-315-1-PB.pdf

Palos, J. (1998). *Educar para el futuro. Temas transversales*. España: Editorial DESCLÉE DE BROUWER, S.A.

Velásquez, J. (2009). La transversalidad como posibilidad curricular desde la Educación Ambiental. En Revista Latinoamericana de Estudios Educativos [en línea], vol. 5, núm. 2, julio-diciembre. Disponible en: http://www.redalyc.org/pdf/1341/134116861003.pdf

Yus, R. (1996). Capítulo 1. Caracterización curricular de los temas transversales. En Temas Transversales: Hacia una nueva escuela. Editorial Graó: España.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Hacia una resignificación del currículo de matemáticas de la educación básica primaria, a partir de una educación matemática crítica

Mónica María **García** Quintero
Universidad de Antioquia
Medellín, Colombia
mmaria.garcia@udea.edu.co
Diana Victoria **Jaramillo** Quiceno
Universidad de Antioquia
Medellín, Colombia
diana.jaramillo@udea.edu.co

Resumen

Presentamos los planteamientos iniciales del proyecto de investigación doctoral, el cual pretende responder la pregunta: ¿cómo los maestros de la educación básica primaria, de una institución educativa de Medellín, resignifican el currículo de matemáticas, a partir de una educación matemática crítica? El objetivo que pretendemos es analizar dicha resignificación[1], por medio de un estudio basado en un paradigma cualitativo, con un enfoque crítico–dialéctico y mediante la investigación colaborativa entre once maestros. Nos apoyaremos de técnicas como la observación participante, grupo de discusión, fotolenguaje, diario reflexivo. El análisis lo realizaremos mediante la triangulación de datos. Hasta ahora, se han tenido como resultados los arrojados por la revisión de la literatura, la cual nos muestra que, aunque existen estudios acerca del currículo de matemáticas, aún no han evidenciado cómo podrían los maestros de la básica primaria resignificar el currículo de matemáticas teniendo en cuenta las prácticas sociales de la comunidad.

Palabras clave: resignificación, currículo, educación matemática crítica, investigación colaborativa, reflexión.

Planteamiento del problema

Esta investigación doctoral la realizaremos en una institución educativa[2] oficial de la ciudad de Medellín, en donde hemos venido comprendiendo el camino recorrido del diseño

[1] El término resignificar parte de la idea del reconocimiento de los significados de currículo que hemos venido construyendo a través del legado de la historia y de la experiencia. Resignificar es darle otro significado, otra orientación, otro sentido construido colectivamente.

[2] De aquí en adelante se nombrará "la institución" al establecimiento educativo en el que se desarrollará este proyecto de tesis doctoral.

curricular. Encontramos que la institución ha diseñado el plan de área de matemáticas con orientaciones curriculares locales y nacionales. Orientaciones locales, bajo los proyectos de "Recontextualización de los planes de área" en los años 2008 y 2009, y "Expedición Currículo" en el año 2014. Los dos proyectos buscaron que los maestros diseñaran el plan de área teniendo en cuenta los planteamientos de los lineamientos curriculares de matemáticas y los estándares básicos de competencias, ambos documentos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia para presentar a la comunidad educativa, lo que se espera enseñar y aprender en el campo de las matemáticas.

Luego en los años 2017 y 2018, los maestros anexaron al plan de área de matemáticas, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), los cuales fueron presentados por el gobierno nacional en las mallas de aprendizaje.[3] Los DBA son aprendizajes estructurantes que determinan lo básico y lo mínimo, que todo niño y niña de Colombia debe adquirir (Ministerio de Educación Nacional, 2017). Durante estos años, la institución también tuvo en cuenta en los procesos evaluativos, las evidencias de aprendizaje[4] definidas en la matriz de referencia. Este último documento estatal, describe lo que evalúa el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) como organismo de control, a través de las pruebas SABER y Supérate, las cuales son evaluaciones estandarizadas y externas que miden los aprendizajes de los y las estudiantes de los grados 3° y 5°, para el caso de primaria (Ministerio de Educación Nacional, 2016). Comprender el panorama anterior, nos deja ver como investigadoras dos cosas, uno que el plan de área construido sólo con orientaciones estatales puede hacer que la enseñanza de las matemáticas quede reducida a instrucción, como es dicho por Martínez, Noguera y Castro (2003): "la enseñanza se mecaniza de tal manera que pasa a ser un proceso instrumental para garantizar el rendimiento escolar, es decir, la máxima eficacia del aprendizaje" (pp. 167-168).Y, dos, que el currículo de matemáticas de la institución se materializa en el plan de área, debido a que dicho plan es la orientación que el maestro tiene para enseñar las matemáticas y donde están determinados las formas y los conceptos para aprenderlas. Al respeto Gimeno, Feito, Perrenoud y Clemente (2012) plantean que:

> En su origen, el currículo significó el territorio acotado y regulado del conocimiento que representa los contenidos que el profesorado y los centros educativos tendrán que desarrollar; es decir, el plan de estudios propuesto e impuesto en la escolaridad a profesores (para que lo enseñen) y a estudiantes (para que lo aprendan). (p. 26)

Si bien es cierto que este plan de área contiene orientaciones para el maestro, consideramos que el currículo va mucho más allá de presentar lo que el maestro debe enseñar y el alumno aprender. El diseño curricular, además de responder a los intereses del Estado (macrocontexto), también debe constituirse con las necesidades, sueños, ideas, intereses propios de la comunidad (microcontexto) (Valero y Vithal, 2012). Esta incoherencia entre lo macro y lo micro en el contexto curricular, se convierte en una de las preocupaciones de la perspectiva de la educación matemática crítica. Esta perspectiva busca que la enseñanza de las matemáticas cumpla con su

[3] Las Mallas de Aprendizaje son un "recurso para el diseño curricular de los establecimientos educativos en sus distintos niveles. Estos llevan al terreno de lo práctico los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)" (Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 2017, p. 3)

[4] Las evidencias de aprendizaje "son los productos que pueden observarse y comprobarse para verificar los desempeños o acciones a los que se refieren los aprendizajes" (Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 2016, p. 1). Estas evidencias hacen parte de las competencias que evalúa el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES).

función social al posibilitar que los sujetos desarrollen su capacidad política y democrática (Skovmose y Valero, 2012).

Definimos el contexto curricular como el conjunto de significados y de relaciones de poder que se tejen entre el diseño curricular (contexto teórico) y su acción con y en el mundo (contexto práctico); es decir, una relación coherente entre lo que está escrito en la institución y lo que se vive realmente al interior del aula. La dialéctica entre el contexto teórico y el contexto práctico del currículo es la que posibilita interactuar en él para comprenderlo y reaccionar frente a él para resignificarlo. Creemos que comprender, reaccionar y resignificar el currículo es una de las tareas políticas del maestro, puesto que es él quien vive el currículo con sus estudiantes y por ende es el que debería participar de manera democrática en su diseño. En contraste con lo anterior Martínez et al. (2003) argumenta que:

> En lo referente al maestro, su autonomía sobre el proceso de enseñanza se restringe al mínimo, pues otros son los que planifican, definen, reglamentan y controlan todo el proceso, reduciendo su papel al de un administrador del currículo. Pierde así la inteligencia del proceso en la medida en que pasa a ser ejecutor de los planes diseñados en las oficinas de planificación ministerial donde se elabora el paquete curricular de objetivos operacionales, actividades para su logro, sugerencias metodológicas e indicadores de evaluación del proceso, siempre en función del conjunto de comportamientos, habilidades y destrezas que el alumno debe adquirir al finalizar cada curso. (pp. 167-168)

Bajo estas comprensiones del contexto curricular de la institución, pensamos que, si los maestros sólo atienden a las orientaciones estatales para el diseño y desarrollo curricular, la enseñanza de las matemáticas puede responder sólo a los intereses políticos, sociales, culturales y económicos, pero del Estado. Pensar sólo en estos intereses, a nuestro modo de ver, puede invisibilizar el microcontexto, es decir la cultura propia de la comunidad. Al respecto, Montes (2017), en su estudio doctoral acerca de las mejoras que ha establecido las políticas gubernamentales en la educación básica primaria, plantea que:

> El propósito general de las políticas estudiadas tiene que ver con el mejoramiento de los resultados de la evaluación nacional e internacional. Por lo que el desarrollo de la política educativa colombiana en el ciclo básico puede resumirse en un proceso cíclico que integra tres componentes, a saber: la evaluación, el currículo estandarizado y las prácticas pedagógicas; donde la estandarización es una respuesta al campo de poder económico externo de la escuela, y su interés por universalizar los aprendizajes de los estudiantes, alineado con las tensiones ideológicas entre el neoliberalismo y neoconservadurismo. (p. 7)

Así, con Montes (2017), entendemos que el currículo estandarizado responde a la necesidad de enseñar conocimientos también estandarizados, los cuales son valorados en pruebas estandarizadas y que se convierten en un dispositivo de control para determinar la formación, la enseñanza y la evaluación. La formación promulgada en este tipo de currículo, se basa en la homogeneidad cultural que, según nuestro criterio, puede invisibilizar las prácticas sociales propias de la comunidad. Comprendemos prácticas sociales bajo los planteamientos de Valero (2011) como el conjunto de saberes, creencias, ideas, sueños, propios de una comunidad. Con respecto a las prácticas sociales, resaltamos un estudio doctoral realizado en Guatemala por Yojcom (2013) el cual trató sobre la construcción de la Epistemología de la Matemática Maya, mediante el reconocimiento de prácticas sociales e identitarias al interior de una cultura de este país. El autor argumenta lo siguiente:

> La matemática se fundamenta esencialmente en las prácticas sociales, y su explicación puede ser hallada a través de la relación que existe en los conocimientos y saberes producidos por la comunidad con los usos y la puesta en práctica de esos conocimientos en situaciones y contextos específicos. Porque solamente atendiendo esta relación del conocer-saber con saber-hacer podemos hablar de una epistemología maya que se sustenta en una cosmovisión natural, social y espiritual. (p. 159)

Conviene subrayar que, aunque este estudio se hizo en otro país, con una cultura y objeto diferente, la vinculación de las prácticas sociales posibilitó, no sólo la comprensión y la resignificación de la construcción el conocimiento de la Matemática Maya, sino también generar nuevas formas de seguir investigando las matemáticas de esta cultura. Es por ello, que en este proyecto doctoral también identificaremos, valoraremos y vincularemos las prácticas sociales, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como una opción de atender a los intereses del microcontexto. Entendemos que al interior de las prácticas sociales existen subjetividades que se constituyen en la medida en que se relacionan los sujetos con el mundo. Por lo tanto, estamos de acuerdo con los argumentos de Cadavid (2017) cuando se aproxima a la noción de subjetividad como la manera en que el sujeto, mediante el movimiento de ir y venir (experiencia) en interacción con el mundo y con los otros, se constituye para poder interactuar y tomar decisiones. Esta interacción para nosotras, no sólo es para la constitución de sujetos, sino también para la constitución de las intersubjetividades que se tejen al interior del aula de matemáticas, la cual se concibe como un espacio para democratizar el saber (Valero, 2011).

Reconocer las intersubjetividades que se constituyen al interior de las prácticas sociales, nos posibilita orientar el diseño curricular en el campo de formación de sujetos críticos, políticos y éticos capaces de interactuar, intervenir, actuar y tomar decisiones frente al currículo (Freire, 2009). Tomar decisiones democráticas frente al currículo, a nuestro modo de ver, podrían partir de la reflexión crítica y propositiva que los maestros hagan con respecto al reconocimiento y a la vinculación de las prácticas sociales y las intersubjetividades en la enseñanza de las matemáticas. Al respecto, un estudio realizado por Alberú (2009), manifiesta que la reflexión crítica por parte de los docentes sobre su propia práctica contribuye, en gran medida, a la formación continuada para transformar su entorno. En palabras del autor:

> La reflexión crítica como camino para contribuir a la formación del profesorado es viable. Además de que le permite adoptar posiciones concretas frente a la realidad en la que se encuentra y a su vez tomar decisiones que lo encaminen a acciones que le permitirán contribuir a la mejoría de la sociedad en la que se desarrolla y cumplir con ello con una parte muy importante de la formación de personas, además de aquella directamente relacionada con el conocimiento de la ciencia o disciplina que imparte. (p. 165)

En definitiva, consideramos que la reflexión crítica y propositiva por parte del maestro frente a currículo, el reconocimiento y la vinculación de las prácticas sociales y las intersubjetividades, la concepción del conocimiento matemático como construcción social, entre otros asuntos socioculturales, hacen que este trabajo investigativo, adopte una perspectiva de la educación matemática crítica, como una posibilidad para resignificar el currículo. De acuerdo con lo anterior, la pregunta que orientará este camino investigativo es: *¿Cómo los maestros de la educación básica primaria, de una institución educativa de Medellín, resignifican el currículo de matemáticas a partir de una educación matemática crítica?* Y, consecuentemente, el objetivo es *analizar la resignificación que hacen los maestros de la educación básica primaria al currículo de matemáticas a partir de una educación matemática crítica.*

Aproximación al horizonte teórico

La Educación Matemática Crítica según Skovsmose y Valero (2012) "es una perspectiva que privilegia la conceptualización del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y la investigación misma como prácticas sociopolíticas" (p. 11). Es por ello que esta perspectiva tiene como una de las tareas primordiales el estudio del currículo, puesto que es necesario que los sujetos que hacen parte activa en él, participen de manera democrática frente al mismo para tomar decisiones (Skovsmose, 1999). Nos basaremos en esta perspectiva, puesto que la educación matemática crítica tiene como objetivo:

> Promover fundamentos para interpretar y aclarar prácticas educativas. En otras palabras, es abrir la posibilidad para crear un lenguaje que haga surgir nuevas visiones sobre lo que pueden ser las matemáticas escolares, si se tiene como preocupación educativa el desarrollo de una ciudadanía crítica. (Skovsmose, 1999, p. 13)

Concordamos con este objetivo, toda vez que este proyecto tiene un interés transformador y crítico del diseño del currículo de matemáticas de la institución. Para nosotras este interés quiere decir, la posibilidad de resignificar el currículo de matemáticas a partir de una educación matemática crítica. Concebimos *Resignificar* como la posibilidad de interacción entre el significado y la acción, mediante el tejido construido por las intersubjetividades y el movimiento contextual de las realidades. Es decir, resignificar es la forma cómo le damos un nuevo significado a un asunto que ya existe en nuestra cultura, pero que requiere repensarse, redefinirse, reinventarse. En palabras de Molina (2013), la resignificación es:

> Un proceso social propio de toda interacción fundada en el lenguaje (…), derivado de comprensiones hermenéuticas, críticas y construccionistas (…), con un propósito éticamente deseable (…) de ser aclarado y explicado con mayor detenimiento (…) desde el punto de vista ético y político. Se concibe como una relación con sentido entre las prácticas sociales y el conocimiento matemático escolar, en donde convergen intereses éticos, políticos y estéticos, que determinan la manera consciente de actuar y decidir en beneficio de las intersubjetividades. (p, 60)

Así, resignificar el currículo de matemáticas significa darle otra mirada, más democrática, en donde exista una dialogía entre el macrocontexto (intereses globales) y el microcontexto (intereses individuales de la cultura) (Valero y Vithal, 2012). Consideramos que dicha dialogía debe partir del reconocimiento conceptual que se tiene del currículo de matemáticas en la institución, es decir, los sentidos y los significados que constituyeron su diseño y desarrollo durante el año 2008 hasta hoy. El diseño curricular de la institución, se basó en la conceptualización de currículo que presenta la Ley General de Educación, el cual plantea que:

> El currículo es el conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local, incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo el proyecto educativo institucional. (Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1994, p. 7)

Por lo anterior, pretendemos en este proyecto doctoral, analizar la manera cómo los maestros de la básica primaria van más allá del cumplimiento a las políticas estatales para el diseño curricular. Pensamos que una de las maneras puede ser, reconociendo en la comunidad algunas prácticas sociales, como una posibilidad de resignificar el currículo para responder a los intereses propios de la institución (microcontexto), que pueden estar plasmados en su proyecto educativo institucional. Partiendo de la idea anterior, compartimos los planteamientos de Gimeno

et al. (2012) cuando expresan que el diseño curricular se compone de los siguientes elementos: un interés de formación, la organización y secuencia de los contenidos, las formas metodológicas de enseñanza y de aprendizaje y la evaluación de dichos aprendizajes. Un interés de formación, para los mismos autores, debe centrarse en el planteamiento de objetivos contextuales que respondan a la formación ética y política que los sujetos de una cultura determinada requieren. Por ello, consideramos que son los maestros los conocedores de su cultura y, por tanto, los que deben ser los protagonistas de este diseño investigativo. Otro aspecto a considerar en el diseño curricular, bajo los mismos planteamientos de Gimeno et al. (2012) es la selección y organización de los contenidos, los cuales deben partir de los saberes propios de la cultura, en tanto que los sujetos encuentren sentido y significado a lo que enseñan y a lo que aprenden, en interacción con los otros y su realidad. De igual manera, debemos, con los maestros, pensar en las estrategias metodológicas que articulan las prácticas sociales con el conocimiento matemático escolar y, por último, la evaluación crítica y democrática en la que todos interactúan con lo planeado, lo enseñado, lo explorado y lo aprendido, con el fin de tomar acciones de resignificación tanto de los aprendizajes, la enseñanza como del currículo.

Bajo los anteriores elementos que componen el diseño curricular, concebimos el currículo a la luz de los planteamientos de Silva (2010), el cual expresa que el currículo es un proyecto cultural, un documento de identidad. Esto nos quiere decir, que el currículo es aquel documento en donde se describen las formas de vivir en la cultura y presenta a la escuela diversas maneras de seguir siendo parte de esa cultura. Esta forma de pensar el currículo, nos lleva a reflexionar sobre la importancia de las intersubjetividades y de las prácticas sociales que se tejen al interior de la cultura, para poder establecer relaciones entre el conocimiento cotidiano y el saber escolar (Jaramillo, 2011). Las relaciones entre los sujetos y los saberes (cotidianos y escolares) se tejen al interior de un espacio llamado escuela, una escuela democrática, donde no sólo el maestro enseña, sino que también aprende (Freire, 2009) y donde las clases de matemáticas democratizan el saber (Valero, 2011). Esto último quiere decir, que *el saber* se construye con la participación de todos los sujetos que habitan un espacio común y que lo legitiman mediante su uso significativo en la sociedad. Las relaciones entre el sujeto y el objeto en un contexto escolar, es decir, la dialéctica subjetiva, tiene un interés transformador en la medida en que se reconocen e intervienen en y para la realidad.

Aproximación al horizonte metodológico

En este apartado, presentaremos de manera general el camino metodológico que se pretende abordar en este proyecto doctoral. Partiremos bajo un paradigma cualitativo de la investigación en educación, puesto que se reconoce la subjetividad y las relaciones sociales que se tejen al interior de una cultura; además porque posibilita analizarlas, reflexionarlas e interpretarlas (Denzin y Lincoln, 2012). El estudio se hará bajo un enfoque crítico-dialéctico, de acuerdo a los postulados de Sánchez (1998), porque posibilita reflexionar y actuar como agente transformador de una práctica que requiere ser resignificada, en este caso el currículo de matemáticas.

Para el trabajo de campo, utilizaremos la investigación colaborativa bajo los planteamientos de Boavida y Ponte (2012), quienes la definen como una estrategia que permite alcanzar ciertos objetivos, a través del trabajo colaborativo entre personas que, mediante la negociación, la toma conjunta de decisiones, la comunicación asertiva y la construcción mutua de aprendizajes, enfrentan problemas y proponen soluciones. Dicho trabajo colaborativo se realizará con once maestros de la básica primaria de la institución, los cuales participarán de

manera voluntaria, para reflexionar, de manera crítica y propositiva, el currículo de matemáticas. También se utilizará el grupo de discusión, el cual posibilitará el entramado de intersubjetividades, donde se buscará, de forma consciente, la triangulación de los testimonios con un propósito transformador (Messina, 2008), bajo la perspectiva de la educación matemática crítica. Además, usaremos las técnicas de observación participante, para comprender y explicar la realidad, mediante la observación profunda de las experiencias y reacciones de los otros (Wood, 1987), y la técnica fotolenguaje, como la posibilidad en que las personas interactúan con fotografías de la realidad, las cuales les movilizarán imaginarios y procesos asociativos que pueden textualizar significados (Kaës,1995). Un instrumento que nos servirá para sistematizar dichas reflexiones será el diario reflexivo, propuesto por Jaramillo (2003). El análisis de los datos constituidos se realizará a través de una triangulación de datos. Esto último comprendido como el tejido entre la teoría, los datos constituidos y las voces, tanto de las investigadoras, como de los maestros participantes.

Consideraciones finales

Es de resaltar que este proyecto doctoral está es sus inicios, por lo que no pueden considerarse resultados aún, pero sí se puede expresar que la revisión de la literatura ha arrojado que aunque existen investigaciones que han cuestionado la manera cómo se diseña el currículo de matemáticas -teniendo en cuenta sólo el macrocontexto, los resultados de las pruebas externas, los libros de texto- aún no mencionan un camino de cómo los maestros, y en especial los de la básica primaria, pueden resignificar el currículo de matemáticas, teniendo como base fundamental el microcontexto, es decir, las prácticas sociales, los intereses, las necesidades propias de una comunidad. Con esta investigación se busca que, mediante el trabajo colaborativo, entre los maestros y nosotras, podamos identificar las prácticas sociales de la comunidad educativa de la institución, para resignificar el currículo de matemáticas. Y que este ejercicio pueda servir de puente para que, otros maestros, también puedan idear otras formas de resignificar otros currículos de otras áreas.

Bibliografía y referencias

Alberú, S. (2009). *Formación de profesores universitarios mediante la reflexión crítica. Una experiencia de reflexión.* (Tesis doctoral de la Universidad Autónoma Baja California, Ensenada, México)

Boavida, A., y Ponte, J. (2012). Investigación colaborativa: Potencialidades y problemas. Traducido por Diego Alejandro Pérez Galeano. *Educación y pedagogía,* 23(53), 125-135.

Cadavid, A. (2017). *Constitución de la subjetividad del sujeto maestro que enseña matemáticas, desde y para la actividad pedagógica.* (Tesis doctoral de la Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia).

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2012). *Introducción general. La investigación cualitativa como disciplina y como práctica.* En N. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), Manual de investigación cualitativa (1ª Ed.) (pp. 43–108). Barcelona, España: Graó.

Freire, P. (2009). *Cartas a quien pretende enseñar*. México: Siglo XXI Editores.

Gimeno, S., Feito, R., Perrenoud, P. y Clemente, M. (2012). *Diseño, desarrollo e innovación del currículum*. Madrid: Ediciones Morata.

Jaramillo, D. (2003). *(Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica.* (Tesis doctoral inédita, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil).

Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. *Revista educación y pedagogía* (23), 13-36.

Kaës, R. (1995). *El grupo y el sujeto del grupo, Elementos para una teoría psicoanalítica del Grupo.* Uruguay: Ed. Amorrortu

Martínez, A., Noguera, C., y Castro, J. (2003). *Currículo y Modernización. Cuatro décadas de educación en Colombia.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Messina, G. (2008). De la experiencia a la construcción de teoría. *Revista Internacional Magisterio*. Educación y Pedagogía, 23, 32 –36.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (1994). *Ley General de Educación*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf eos 21marzo18.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2016). *Matrices de Referencia*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2017). *Documento para la implementación de los DBA.* Mallas de aprendizaje. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Molina, N. (2013). Discusiones acerca de la resignificación y concepto asociados. *Revista MEC-EDUPAZ*. Universidad Nacional Autónoma de México, (3), 39-63

Montes, A. (2017). *Políticas de Calidad de la Educación Básica Primaria en Colombia (1994 - 2015). Caso de Montería (Departamento de Córdoba).* (Tesis doctoral de la Universidad de Cartagena, Colombia).

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Silva, T. (2010). *Documentos de identidade. Uma introduçäo às teorias do currículo*. Belo Horizonte: Autêntica Editora Ltda.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

Skovmose, O. y Valero, P. (2012). *Educación Matemática Crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. Bogotá: Ediciones Uniandes.

Valero, P. (2011). *La educación matemáticas como una red de prácticas sociales.* Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2011/1/Valero2012Educacion.pdf eos 21marzo18.pdf

Valero, P. y Vithal, R. (2012). *La investigación en educación matemática en situaciones de conflicto social y político.* En O. Skovsmose y P. Valero. Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (pp. 217-268). Bogotá: Uniandes.

Woods, P. (1987). *La escuela por dentro: la etnografía en la investigación educativa.* Venezuela: Editorial Paidós.

Yojcom, D. (2013). *La epistemología de la matemática maya: una construcción de conocimientos y saberes a través de prácticas.* (Tesis doctoral del Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México).

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

TRI: uma abordagem frente a TCT no processo de avaliação

Thamara Marques **Rodrigues**
Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Sistemas, Universidade Estadual de Montes Claros / MG
Brasil
thamaramarquesrodrigues@yahoo.com

Rafael Aparecido Pereira **Lopes**
Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e sistemas, Universidade Estadual de Montes Claros / MG
Brasil
rafaaplopes@icloud.com

Romulo Barbosa **Veloso**
Professor titular do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e sistemas, Universidade Estadual de Montes Claros / MG
Brasil
romulo.veloso@unimontes.br

Renê Rodrigues **Veloso**
Professor titular do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e sistemas, Universidade Estadual de Montes Claros / MG
Brasil
rene.veloso@unimontes.br

Os processos de avaliações, na maioria das vezes, são vistos como um instrumento usado para analisar o quanto o aluno aprendeu em tema de uma determinada matéria ou disciplina, determina-se com ela o nível de aprendizagem do aluno e dependendo da avaliação e de seus critérios servindo, nesses casos, exclusivamente para determinar SUCESSO ou FRACASSO do aluno ou até mesmo dos docentes. Avaliação feita desta maneira não cumpre a importante função de orientar a aprendizagem, esta limitação se deve principalmente a que muitas instituições e professores ainda usam o método da Teoria Clássica dos Testes-TCT, afinal, foram muitas décadas sendo usada para avaliar o âmbito educacional e os testes psicológicos.

Na TCT, a pontuação obtida por um respondente representa o nível de aptidão desse aluno naquele conteúdo avaliado com a adição das respostas de cada um dos itens com o mesmo valor em cada um, sem distinção de dificuldade do item. Apesar da universalidade da TCT, ela tem algumas limitações, como por exemplo: o parâmetro dos itens depende exclusivamente da amostra de sujeitos utilizadas para estabelece-los, dificultando e até impedindo que se possa comparar duas amostras distintas se os testes aplicados não forem exatamente os mesmos. A necessidade da existência de novas formas de avaliações, que permitissem avaliar a evolução

diante de novas metodologías educacionais que buscassem corrigir falhas existentes no ensino/aprendizagem era imprescindível, assim que surgiu a Teoria de Resposta ao Item-TRI, ela fornece modelos matemáticos para os traços latentes, propondo formas que vão além de representar a relação entre a probabilidade de um indivíduo dar uma certa resposta a um item ou não. Todo estudo é feito considerando o traço latente da habilidade do indivíduo e os parâmetros dos itens, na área de conhecimento em estudos, que permite que diagnostique o desempenho e habilidade dos alunos em cada item, e não na forma "um todo em geral", sendo assim, ela descreve a habilidade do aluno, através do número de acertos ao item, mas também pode ser vista pelo número de erros.

Ela vem sendo considerada hoje em dia, como uma maneira mais eficaz de avaliação por muitos doutos é vista como um conjunto de modelos matemáticos/estatístico que considera o item como uma unidade de análise e não como TCT, que é o escore total. A TRI, busca a representação do respondente dar uma certa resposta a um item como função dos parâmetros do item, dos traços latentes de cada respondente, utilizando os termos de estimação para o nível de habilidades ou calibração dos itens. A TRI tem muitas vantagens sobre a TCT, mas a que mais se destaca, é que diferentes alunos ou o mesmo aluno podem ter suas habilidades comparadas a partir de itens comuns nos testes (técnica de equalização), a estimativa de habilidades de examinandos que acertam o mesmo número de itens, porem diferentes itens é diferenciada, ou seja, dois alunos acertam a mesma quantidade de itens, mas não recebem a mesma nota na TRI, se isso ocorresse na TCT, eles receberiam a mesma nota.

Este trabalho teve como objetivo principal apresentar as vantagens e as oportunidades que a Teoria da Resposta ao Item tem a frente da Teoria Classica dos Testes, como em qualquer outra abordagem de uma modelagem matemática/estatística para leitura de dados, as vantagens dos modelos são recebidas à medida em que suas hipóteses são vistas e proporcionam análises que geralmente são feitas nas avaliações institucionais.

Referencias ebibliografia

Baker, F.B. (2001). *The basicsof item response theory*. Washington, DC: ERIC Clearinghouseon Assessment andEvaluation.

Pasquali, L. (1997). *Psicometria: Teoria e aplicações. A teoria clássica dos testes psicológicos*. Brasília: Editora UnB.

Pasquali, Luiz. *Psicometria: Teoria dos Testes na Pscicologia e na Educação*. 5ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

Luckesi, C. C. *Avaliação da Aprendizagem Escolar: estudos e proposições*. 10a . ed. São Paulo: [s.n.], 2000.

Muñiz, J. (1990). *Teoría de respuesta a losítens: Unnuevo enfoque enlaevolución psicológica y educativa*. Madri: EdicionesPirámide, S. A.

Andrade, D. R.; Tavares, H. R.; Valle, R. C. *Teoria de Resposta ao Item: conceitos e aplicações*. Minas Gerais: [s.n.], 2000.

Baker, F. *Iten Response Theory. ParameterEstimationTechnique*. New York: [s.n.], 2001.

Cunha, D. d. A. d. *A teoria de resposta ao item na avaliação em larga escala: um estudo sobre o Exame Nacional de Acesso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2014.



Uma revisão de literatura das pesquisas sobre Currículo, Avaliação em Larga Escala e Números Racionais

Alessandra Carvalho **Teixeira**
Universidade Paulista
Brasil
prof_alecarvalho@yahoo.com.br
Norma Suely Gomes **Allevato**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
norma.allevato@cruzeirodosul.edu.br

Resumo

O presente artigo tem por objetivo apresentar uma revisão de literatura realizada a partir de pesquisas referentes a avaliação em larga escala, currículo e números racionais, além de suas possíveis articulações, em três periódicos brasileiros da área de Educação Matemática. A abordagem metodológica é qualitativa. Uma quantidade significativa dos artigos traz pesquisas sobre os níveis curriculares - prescrito, apresentado, praticado e avaliado - de forma implícita, uma vez que não utilizam esses termos, nos seus resumos. Constatamos que são poucos os artigos sobre currículo que tratam do ensino e aprendizagem dos racionais, e os que encontramos referem-se aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os artigos pesquisados, segundo seus resumos, mostram uma carência de pesquisas que estabeleçam relações entre esses quatro níveis curriculares, não só no que diz respeito ao ensino dos números racionais, mas com qualquer outro subfoco.

Palavras-chave: Educação Matemática; Currículo; Avaliação em Larga Escala; Números Racionais; Revisão de Literatura.

Introdução

O presente estudo é parte das investigações que têm sido desenvolvidas para elaboração de uma pesquisa maior que pretende analisar como os níveis curriculares: currículos prescrito, apresentado e avaliado (SACRISTÁN, 2000) são compreendidos, discutidos e relacionados, no que diz respeito ao ensino dos números racionais. Essa pesquisa teve origem no trabalho de

Teixeira (2013), a qual faz uma categorização de itens e questões do Saresp 2010, indicando como uma das fragilidades de ensino e aprendizagem, no Estado de São Paulo, os números racionais quanto às suas representações e operações. O Saresp é uma avaliação externa aplicada na rede estadual de São Paulo, e tem como objetivo subsidiar a gestão da Educação Básica, os programas de formação continuada, o planejamento escolar e o estabelecimento de metas, considerando o projeto de cada escola. Essa avaliação também objetiva verificar o desenvolvimento das habilidades e competências cognitivas, as quais são propostas respeitando cada etapa de ensino-aprendizagem escolar.

Em particular, o presente artigo tem por objetivo específico mapear pesquisas referentes a avaliação em larga escala, currículo e números racionais, considerando suas possíveis articulações, em três periódicos da área de Educação Matemática - Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT e do Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEM.

Este artigo está estruturado de modo que a próxima seção é dedicada a apresentar os aspectos metodológicos que nortearam a pesquisa desenvolvida. Em seguida são constituídas duas seções com os fundamentos teóricos sobre currículo, norteadores das análises de dados. A referida análise integra uma quarta seção, após a qual apresentamos as considerações finais e as referências.

Metodologia da pesquisa

Para atender ao objetivo estabelecido para este artigo, desenvolvemos uma revisão de literatura na tentativa de oferecer uma contribuição ao cenário das pesquisas desenvolvidas sobre currículo, avaliação em larga escala e números racionais, na área de conhecimento de Educação Matemática.

Trentini e Paim (1999, p. 68) afirmam que "a seleção criteriosa de uma revisão de literatura pertinente ao problema significa familiarizar-se com textos e, por eles, reconhecer os autores e o que eles estudaram anteriormente sobre o problema". Desse modo, ao conhecer o que outros autores já pesquisaram sobre determinado assunto, pode-se delimitar melhor o problema de pesquisa a partir da revisão dessa literatura.

Nosso *corpus* de pesquisa contempla um total de 265 resumos de artigos publicados no Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT e do Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEM, de 2009 até 2017.

O BOLEMA foi criado em 1985, por iniciativa de alguns alunos de pós-graduação do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista – UNESP - Rio Claro/SP/Brasil. Tem periodicidade quadrimestral e a partir de 2014 passou a ser exclusivamente eletrônica, com acesso livre[1]. A REVEMAT é publicada pela Universidade de Santa Catarina – UFSC – Florianópolis/SC/brasil. Tem periodicidade semestral, a partir de 2010, com divulgação eletrônica e acesso livre[2]. O GEPEM é o veículo de divulgação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, vinculado ao Instituto de Educação da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ – Rio de Janeiro/RJ/Brasil, com periodicidade semestral. Em 1976 foi publicado seu primeiro número. Sua divulgação é eletrônica, também com acesso livre[3].

[1] http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema
[2] https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat
[3] http://www.gepem.ufrrj.br/

Para desenvolver o presente estudo, utilizamos como técnica a análise documental. De acordo com Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009), a pesquisa documental é um procedimento metodológico que, dependendo do objeto de estudo e dos objetivos da pesquisa, pode caracterizar-se como principal caminho de concretização da investigação ou constituir-se como instrumento metodológico complementar. Ela se propõe a produzir novos conhecimentos, criar novas formas de compreender os fenômenos e dar a conhecer a forma como estes têm sido desenvolvidos.

Tendo esclarecido essas opções e aspectos metodológicos, na próxima seção, será feita uma discussão teórica sobre os níveis curriculares para, em seguida, apresentar uma análise descritiva dos dados coletados, segundo os focos e subfocos estabelecidos.

Currículo: conceito e alguns aspectos

Nesta seção, será apresentada a definição de Currículo e dos três níveis curriculares considerados no presente artigo, quais sejam o currículo prescrito, o apresentado e o avaliado (SACRISTÁN, 2000).

O ato de se definir o currículo está associado à descrição da concretização do objetivo social da escola, o qual é diferente para cada nível de ensino. A análise do currículo é importante para entender a missão da escola. Essa análise deve ser tanto de seus conteúdos quanto de suas formas, considerando e respeitando os diferentes níveis e modalidades de ensino. O objetivo social da Educação Básica não é o mesmo, por exemplo, que o do Ensino Superior.

Uma das formas de ter acesso ao conhecimento é por meio do currículo, que não pode ter seu significado findado em algo sem movimento, estanque, dentro de cada nível de ensino, ou seja, em algo estático. Deve estar em contato com a cultura, mesmo que de forma particular, de acordo com as condições em que se realiza. Assim, o currículo é uma forma de pensar a educação e as necessidades dos alunos quanto à aprendizagem.

Ao mesmo tempo que o currículo é o contexto da práxis, ele também é contextualizado por ela. Essa prática desenvolve diálogo entre os diferentes agentes de ensino: elementos técnicos, agentes sociais, alunos, professores, etc. O autor afirma que é através das práticas que se moldam e se expressam formas e conteúdos, podendo ser estes últimos culturais ou intelectuais e formativos.

Para Sacristán (2000) é através do currículo que basicamente se realizam as funções da escola como instituição. Desse modo, o autor considera que é por consequência da consciência desse fato que existe o interesse pelos problemas que estejam relacionados ao currículo.

A adequação entre os currículos e a finalidade da escola está relacionada com as reformas curriculares e, através de sua execução, pretende-se ajustar o sistema escolar às necessidades sociais. Desse modo, o currículo é a seleção cultural estruturada para a instituição escolar, e o conteúdo é uma condição para o ensino, considerado por Sacristán (2000) como uma condição lógica. Uma vez que se esquece esses pontos, embrenha-se por uma via onde se perde de vista a função cultural do ensino e da escola.

Desse modo, podemos identificar o currículo como a interseção de diferentes práticas, convertidas em um caracterizador da prática pedagógica desenvolvida nas escolas, ao mesmo tempo em que, reciprocamente, toda prática pedagógica é orientada pelo currículo.

Além disso, a construção do currículo deve estar relacionada às condições reais em que se desenvolve. Devido a isso, as práticas políticas e administrativas devem ser notadas com atenção quando se quer entender o currículo inserido num contexto educativo. O currículo é algo que deve ser modelado. Essa modelação deve ser feita dentro de um sistema escolar concreto, em

condições reais, para que, assim, possa ser construído a partir da missão da escola e da sua função social. Caso o contexto não seja real, o currículo pode passar a ser "utópico" a partir de aspectos muito abrangentes.

Por essa razão, as teorias do currículo, em alguns casos, apresentam enfoques fragmentados, devido à sua associação com a realidade. Essa associação é considerada um processo complexo, pois o currículo faz parte de e integra vários tipos de práticas, não sendo reduzido apenas às práticas de ensino.

Uma visão que tenha como objetivo simplificar o currículo, ignora que o valor real do fenômeno curricular depende do contexto no qual está sendo desenvolvido, ou seja, do contexto em que ganha significado. E o currículo constrói seu significado concreto através das atividades que compõem as práticas de ensino.

Isto posto, na próxima seção, desenvolvemos algumas reflexões sobre os níveis curriculares.

Níveis Curriculares

A presente seção tem por objetivo conceituar os níveis curriculares, segundo Sacristán (2000), sendo eles os currículos prescrito, apresentado e avaliado, por se tratarem de objeto teórico utilizado neste artigo.

O currículo prescrito é regulado por instâncias políticas e administrativas, sendo definido para o sistema educativo e para os professores como orientações relativas às áreas do conhecimento pelo qual ele é organizado, bem como aos seus conteúdos, propriamente ditos. Como exemplo, apresentamos o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997). Entretanto, os currículos prescritos são constituídos de orientações bastante gerais, e Sacristán (2000) afirma que nem todos os professores têm ao seu alcance a possibilidade de, a partir de orientações muito amplas, planejar sua prática curricular, considerando que há muitos fatores intervenientes. Entre eles estão as condições nas quais seu trabalho é realizado, sua formação, as habilidades – muito diversas no que se refere ao conteúdo da competência profissional – e as demandas sociais e culturais às quais a escola deve responder com o currículo. Há, portanto, a necessidade de apresentar o currículo de modo mais específico, que se aproxime das práticas dos professores.

Sacristán (2000) salienta a importância da análise do currículo apresentado como referência para a reflexão sobre a própria prática, o que pode proporcionar, ao professor, fazer as adequações e as correções necessárias de forma a mediar de modo mais eficiente o processo de construção do conhecimento.

Quanto ao currículo avaliado, Sacristán (2000) destaca que tem sido o currículo mais valorizado, exercendo um tipo de pressão que faz com que a prática curricular seja modelada, ligada ao tipo de tarefas nas quais se expressa esse currículo, assim como a escolha dos conteúdos e o planejamento das atividades.

Sobre essas bases teóricas é que serão apoiadas as análises apresentadas na próxima seção.

Análise Descritiva

Para a pesquisa nos periódicos, foram utilizadas quatro palavras de busca: avaliação em larga escala, avaliação externa, currículo e números racionais. A Tabela 1 ilustra a quantidade de artigos encontrados por periódico pesquisado.

Tabela 1

Quantidade de pesquisas por periódico

	Avaliação em larga escala	**Currículo**	**Números Racionais**	**Total**
BOLEMA	39	173	24	235
GEPEM	1	12	1	14
REVEMAT	2	9	4	16
Total	42	194	29	**265**

Fonte: elaborada pelas pesquisadoras

Os artigos encontrados com as palavras avaliação em larga escala e avaliação externa foram contabilizados apenas na coluna intitulada Avaliação em Larga Escala, pois essas palavras aparecem com o mesmo significado nos resumos lidos.

Após uma triagem dos resumos, a qual foi feita considerando os artigos que apresentam as palavras de busca e relação com o objetivo da pesquisa maior que pretende analisar os níveis curriculares, foi possível selecionar 62 pesquisas, conforme consta na Tabela 2, considerando as mesmas palavras utilizadas e os artigos que estão de acordo com nosso objetivo, que é apresentar uma revisão de literatura das pesquisas referentes a avaliação em larga escala, currículo e números racionais, além de suas possíveis articulações, em três periódicos da área:

Tabela 2

Números de pesquisas, sem repetição, por palavra de busca

	Avaliação em Larga Escala	**Currículo**	**Números Racionais**	**Total**
BOLEMA	9	31	8	48
GEPEM	1	3	0	4
REVEMAT	2	4	4	10
Total	12	38	12	**62**

Fonte: elaborada pelas pesquisadoras

É importante ressaltar que, na Tabela 2, nenhum artigo analisado foi considerado em "duas células".

Após a leitura dos resumos, os 62 artigos foram categorizados conforme a Tabela 3, a seguir, de acordo com o modelo de organização de Fiorentini (1994), para o qual determinamos os focos temáticos e os subfocos a eles associados:

Tabela 3

Categorização das pesquisas por foco temático

Foco temático	Quantidade de artigos	Subfocos	Quantidade de artigos
Currículo	38	Níveis curriculares	38
		Conjuntos numéricos	8
		Níveis e Modalidades de ensino	10
		Conteúdos matemáticos	7
		Políticas públicas	3
		Formação de professores	10
Números Racionais	11	Níveis curriculares	11
		Formação de professores	9
		EJA	1
Avaliação em larga escala	12	Saresp	4
		Formação de professores	3
		Níveis curriculares	8
Total	**62**		

Fonte: elaborada pelas pesquisadoras

A quarta coluna, correspondente à quantidade de artigos de cada subfoco, não é excludente, ou seja, um mesmo artigo pode ter sido considerado em mais de um subfoco; assim, um artigo que pertence ao foco temático Currículo, subfoco Formação de Professores, também pode pertencer ao subfoco Políticas Públicas, por exemplo.

Dentro do foco Currículo, encontramos trabalhos que discutem os níveis curriculares – prescrito, apresentado, praticado e avaliado –, sendo que uma quantidade significativa analisa o currículo prescrito do estado de São Paulo, tanto em relação à sua organização, quanto à interpretação que os professores fazem do que ali está posto. Sobre o currículo apresentado, encontramos pesquisas que se apoiam no Caderno do Professor[4], mas em sua maioria tomam o livro didático como objeto de estudo, analisando, ainda, se as atividades que estão disponíveis possibilitam o desenvolvimento de estratégias cognitivas, concluindo que são poucas.

Ainda no foco Currículo, emergiu o subfoco conjuntos numéricos, com estudos sobre os conjuntos dos números racionais e irracionais. Um artigo apresenta as lacunas existentes nos materiais curriculares acerca do ensino dos números irracionais; os demais destacam o estudo dos racionais considerando suas representações, operações, relações e significados.

No subfoco Níveis e Modalidades de ensino, estão contemplados trabalhos sobre a Educação de Jovens e Adultos (EJA) e, em maior quantidade, voltados aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio.

Em relação aos conteúdos matemáticos, tanto os estudos sobre conteúdos de Geometria quanto de Estatística e Probabilidade ganham destaque. Encontramos pesquisas sobre a questão curricular do ensino de Geometria no Brasil e em Portugal.

[4] O Caderno do Professor é um material disponibilizado aos professores da rede estadual de ensino de São Paulo. As edições dos Cadernos são realizadas a partir estudos e análises que possibilitam consubstanciar a articulação entre o currículo prescrito com o currículo em ação nas salas de aula. O Caderno do Professor apresenta orientações didático-pedagógicas e traz como base o conteúdo do Currículo Oficial do Estado de São Paulo.

No subfoco das Políticas Públicas, os artigos analisam o currículo prescrito, indicando modificações curriculares, visando à melhoria da qualidade de ensino e aprendizagem.

A Formação de Professores, último subfoco do foco Currículo, relaciona teoria e prática, apresentando estudos em grupos focais, nos cursos de licenciatura, relacionando a formação de professores com as discussões sobre avaliação, tanto da própria prática quanto da aprendizagem. Um dos artigos retrata a formação de professores em contexto de reforma curricular.

Dentro do foco Números Racionais, também encontramos trabalhos que discutem os níveis curriculares, sendo que uma quantidade significativa analisa tanto o currículo apresentado no livro didático quanto o currículo avaliado.

No foco Avaliação em Larga Escala, encontramos o subfoco Saresp, o qual retrata análises didáticas dos itens e questões de diferentes edições da avaliação. São analisadas questões envolvendo conteúdos de Geometria e Álgebra. Um dos artigos aponta os conceitos que se encontram fragilizados na edição de 2010, de acordo com as questões disponibilizadas, apontando os números racionais, particularmente suas operações e representações.

O subfoco Níveis Curriculares foi percebido em trabalhos que abordam as relações existentes entre as avaliações internas/externas e os currículos prescritos, considerando o ensino de Geometria, números racionais e Álgebra.

Observamos que são poucos os artigos que trazem explicitamente, em seus resumos, os níveis curriculares. Nenhum deles tratou das relações entre os quatro níveis – prescrito, apresentado, praticado e avaliado, nem entre algum desses níveis e o trabalho com números racionais.

Considerando todos os artigos analisados, constatamos, então, que existe predominância de estudos nos anos iniciais do Ensino Fundamental, seja com formação de professores, aprendizagem dos alunos ou questões de avaliações em larga escala.

De modo geral, os artigos analisados se encontram inseridos em mais de um subfoco, como, por exemplo, níveis curriculares e conjuntos numéricos, formação de professores e conjuntos numéricos, entre outros. Segundo nossa constatação, isso se dá em virtude das relações existentes entre os focos e subfocos de pesquisa no contexto educacional.

Considerações Finais

O presente trabalho teve por objetivo mapear artigos referentes a avaliação em larga escala, currículo e números racionais e suas possíveis articulações. Para a realização da nossa pesquisa, foram consultados três periódicos da área - BOLEMA, GEPEM e REVEMAT - utilizando, conforme já comentado, quatro palavras-chave de busca: avaliação em larga escala, avaliação externa, currículo e números racionais.

Observamos que são poucos os artigos que trazem explicitamente, em seus resumos, os níveis curriculares. Nenhum deles tratou das relações entre os quatro níveis – prescrito, apresentado, praticado e avaliado, nem entre algum desses níveis e o trabalho com números racionais.

Considerando todos os artigos analisados, existe predominância de estudos nos anos iniciais do Ensino Fundamental, seja com formação de professores, aprendizagem dos alunos ou questões de avaliações em larga escala.

Nossas análises permitiram perceber, ainda, que, quando se trata dos níveis curriculares, os artigos trazem, no máximo, o estudo sobre a relação entre dois deles, em sua maioria o prescrito

e o apresentado ou o prescrito e o praticado. E, em uma quantidade significativa de trabalhos, os níveis não estão explicitados nos resumos considerando o nome que recebem, segundo Sacristan (2000): prescrito, apresentado, praticado e avaliado. Não encontramos trabalhos que articulem três ou mais níveis.

De modo geral, os artigos analisados se encontram inseridos em mais de um subfoco, como, por exemplo, níveis curriculares e conjuntos numéricos, formação de professores e conjuntos numéricos, entre outros. Segundo nossa constatação, isso se dá em virtude das relações existentes entre os focos e subfocos de pesquisa no contexto educacional. O Currículo é subdividido em níveis curriculares, de modo que os Números Racionais estão relacionados aos quatro níveis, e a Avaliação em Larga Escala ao currículo avaliado.

Finalmente, consideramos, aqui, a necessidade de ampliação de pesquisas mais concentradas nas diferentes relações entre os níveis curriculares e os conteúdos matemáticos, pois encontramos uma quantidade significativa de pesquisas relacionadas a assuntos específicos, não articulando explicitamente os níveis curriculares e o ensino de Matemática.

Referências

BRASIL. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: introdução aos parâmetros curriculares nacionais/Secretaria de Educação Fundamental. – Brasilia: MEC/SEF.

FIORENTINI, D.(1994). *A educação matemática enquanto campo profissional de produção de saber*: a trajetória brasileira. Dynamis, Blumenau, v. 1 n. 7, p. 7 – 17.

SÁ-SILVA, J. R. S.; ALMEIDA, C. D.; GUINDANI, J. F. (2009). Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. *Revista Brasileira de História e Ciências Sociais*, v. 1, p. 1-15.

SACRISTÁN, J. G. (2000). *O currículo*: uma reflexão sobre a prática. Tradução de Ernani F da Fonseca Rosa. 3. ed. Porto Alegre, RS: Artmed.

SÃO PAULO. (2010). *Currículo do Estado de São Paulo*: Matemática e suas tecnologias/Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado – São Paulo: SEE.

TEIXEIRA, A. C. (2013). Uma análise sobre a mobilização de conhecimentos matemáticos em relação aos itens e questões do Saresp 2010 do 9º ano do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática)–Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

TRENTINI, M.; PAIM, L. (1999). *Pesquisa em Enfermagem*: Uma modalidade convergente-assistencial. Florianópolis: Editora da UFSC.



Avaliação da satisfação de alunos em relação à sua instituição de Ensino Superior

Ailton Paulo de **Oliveira Júnior**
Universidade Federal do ABC
Brasil
ailton.junior@ufabc.edu.br
Thiago **Costa de Souza**
Universidade Federal do ABC
Brasil
souza.thiago@aluno.ufabc.edu.br
Pedro Rosental **Zamora**
Universidade Federal do ABC
Brasil
pedro.zamora@aluno.ufabc.edu.br

Resumo

O objetivo do trabalho foi apresentar o nível de satisfação de 134 estudantes de uma Instituição pública de Ensino Superior, São Paulo, Brasil, considerando os seguintes aspectos: (1) qualidade do corpo docente, currículo e programas e (2) infraestrutura. Utilizou-se a análise fatorial de componentes principais e rotação Varimax com normalização de Kaiser, para reforçar e configurar melhor a satisfação deste grupo de alunos em relação à sua Instituição obtendo quatro fatores: (1) Qualidade da infraestrutura física, pedagógica e serviços institucionais; (2) Importância de ambiente propício ao processo ensino e aprendizagem; (3) Adequação dos docentes à proposta pedagógica da universidade; (4) Envolvimento discente em atividades extraclasse. Os alunos consideram adequados alguns aspectos referentes à infraestrutura da instituição, tais como, prédios, salas de aulas, equipamentos e limpeza dos ambientes. Destacamos que para todos os aspectos relacionados a características pedagógicas, o que os alunos consideram importante não correspondem à qualidade oferecida pela instituição.

Palavras chave: Satisfação, institucional, pedagógica, ensino, superior, Brasil.

Introdução

O seguinte trabalho tem como objetivo apresentar o nível de satisfação de 134 estudantes que cursaram uma disciplina com elementos introdutórios da Probabilidade e da Estatística, em

2017, de uma Instituição pública de Ensino Superior, São Paulo, Brasil, considerando os seguintes aspectos: (1) qualidade do corpo docente, currículo e programas e (2) infraestrutura.

Justifica-se o estudo por sua relevância, pois, uma vez identificados os anseios dos discentes, pode-se promover uma movimentação tanto por parte da instituição como dos docentes para melhor atender a esses interesses. Isto porque a formação que o aluno recebe durante a graduação deve influenciar consideravelmente suas expectativas e escolhas profissionais futuras, assim aperfeiçoando o processo de ensino-aprendizagem.

Foi aplicado instrumento composto por 27 itens relacionados a dois diferentes domínios: (1) características da instituição (infraestrutura); (2) características pedagógicas (qualidade do corpo docente, currículos e programas). Em cada um dos itens, pede-se que sejam atribuídas duas pontuações entre zero (ruim) e 100 (excelente). A primeira representa a importância do item para a sua satisfação e a segunda representa a qualidade percebida em relação às características da instituição e às características pedagógicas. Realizou-se análise descritiva dos resultados (média e desvio-padrão), a utilização de métodos estatísticos para comparar as médias (t-Student) dos itens que estão relacionados aos domínios referentes às características da instituição e das características pedagógicas, tanto para os aspectos de importância quanto da qualidade, bem como a validação do instrumento por meio da Análise Fatorial.

Referencial Teórico

Para uma organização entregar satisfação, deve estar atenta à totalidade dos serviços, enfatizando a qualidade do ensino ofertado ao cliente, nesse caso, o aluno. Enfatizam Pereira e Gil (2006), que somente com um ensino de qualidade a instituição obterá aprovação e reconhecimento da sociedade, que não pode ser negligenciada como seu cliente. Com isso, é importante buscar a satisfação do discente no Ensino Superior através da qualidade nos serviços.

Segundo Loreto (2001), quanto ao processo de avaliação da qualidade de ensino, a avaliação tanto pode incidir sobre o ensino ministrado (qualidade da prestação), sobre a maneira como foi prestado (qualidade do fornecimento) ou sobre o modo como a sua qualidade é assegurada (qualidade da garantia da qualidade).

Alves, Corrar e Slomski (2004) corroboram a necessidade desse aperfeiçoamento quando afirmam que, dentre os objetivos de uma Instituição de Ensino Superior, certamente um dos mais importantes é a aprendizagem dos alunos. Rowley (2003) indica que o grau de satisfação que os discentes têm em relação ao curso que estão cursando influencia na forma de como eles interagem e absorvem o conteúdo repassado.

Coda e Silva (2004) pontuam que a satisfação com os cursos universitários envolve o atendimento das expectativas dos acadêmicos, sendo uma das condições determinantes da mesma a qualidade que eles possuam. Então, por causa das alternativas disponíveis no mercado de serviços de ensino superior, a própria sobrevivência das instituições pode estar afetada se a qualidade do serviço prestado não for aquela esperada.

Partindo do pressuposto que o sucesso de uma instituição de ensino está diretamente ligado ao comprometimento e condição do corpo discente e à desenvoltura dos gestores e docentes, observa-se que a satisfação estudantil é uma resposta afetiva por um período de tempo, que resulta da avaliação dos serviços pedagógicos e de apoio aos estudos ofertados aos discentes (Palácio, Meneses, & Pérez, 2002).

Concordamos com Gutiérrez e Camblor (2007) ao dizerem que alunos satisfeitos com os serviços internos da Instituição e com os cursos que ela oferece influenciam positivamente na percepção que a sociedade e futuros alunos têm a seu respeito, aumentando a demanda. Por outro lado, a percepção negativa terá efeito contrário.

Porturak (2014) assinala que identificar como os diferentes atributos das Instituições afetam a satisfação dos discentes torna-se crítico para um gerenciamento eficaz. E Awan e Rehman (2013) ressaltam que a Instituição que busca ser reconhecida como uma instituição de referência, notada pela qualidade de suas ações e resultados, tem na satisfação de seus clientes internos (os alunos) e externos (a sociedade) um dos seus principais valores.

Procedimentos Metodológicos

O instrumento foi aplicado a 134 alunos (homens e mulheres), de um total de 274 alunos (48,91%) de três turmas de uma disciplina obrigatória do quarto período voltado a conteúdos probabilísticos e estatísticos, em uma universidade federal, no estado de São Paulo, no Brasil no final do ano de 2017. As idades compreendiam entre 19 e 37 anos. A média das idades foi de 21,86 anos e desvio padrão de 2,98 anos.

Segundo Dutra, Ávila e Mattos (2017, p. 3), o instrumento utilizado neste trabalho foi baseado em estudos de Bonici e Araújo (2001) e Souza e Reinert (2010). O estudo de Bonici e Araújo (2001) considera que a satisfação discente deve ser mensurada em função de características do tutor (professor), aluno, disciplina, tecnologia, suporte e tutoria/professor. Já o estudo Souza e Reinert (2010) considera características do corpo docente, estrutura curricular, características do curso, ambiente social, infraestrutura e questões pessoais.

O instrumento é composto por 27 itens que estão relacionados a dois diferentes domínios: (1) características da instituição (itens 1, 2, 3, 4, 5, 6 7, 8, 13, 14, 16 e 17); (2) características pedagógicas (itens 9, 10, 11, 12, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 e 27). Em cada um dos itens, pede-se que sejam atribuídas duas pontuações entre zero (ruim) e 100 (excelente). A primeira representa a **importância** do item para a sua satisfação em relação ao curso e a segunda representa a **qualidade** percebida em relação ao serviço oferecido pela instituição em que o aluno está inserido.

Inicialmente foi utilizado o teste de *Kolmogorov-Smirnov* para testar a hipótese de normalidade das variáveis do estudo, ou seja, se a distribuição dos dados segue uma curva de Gauss ou Normal.

A seguir foi realizada uma análise descritiva dos resultados (média e desvio-padrão) e também a utilização de métodos estatísticos para comparar as médias (t-Student e Análise de Variância) dos 27 itens que estão relacionados aos domínios referentes às características da instituição e das características pedagógicas, tanto para os aspectos que representam a importância do item no tocante à satisfação em relação ao curso e a qualidade percebida em relação ao serviço oferecido pela instituição em que o aluno está inserido.

O método multivariado usado foi a análise fatorial (AF) onde os fatores foram extraídos pelo método de componentes principais e definiu-se a unidimensionalidade segundo o critério de Kaiser. Os itens considerados deviam ter uma correlação de no mínimo 0,7 com o fator, uma comunalidade igual ou maior do que 0,5 e a variância extraída maior que 50%.

Antes de realizar a AF foi calculado o coeficiente alfa de Cronbach para cada constructo considerado e a correlação do item com o total, conforme o procedimento sugerido por Churchill Jr. (1979).

Adicionalmente, ainda em sua componente estatística, esta pesquisa emprega o teste de Kaiser-Meyer-Olklin (KMO), definido por Oliveira Júnior e Morais (2009) como uma estatística que indica a proporção da variância dos dados que pode ser considerada comum a todas as variáveis, ou seja, que pode ser atribuída a um fator comum, então: quanto mais próximo de 1 (unidade) melhor o resultado, ou seja, mais adequada é a amostra à aplicação da análise fatorial. O teste de esfericidade de Bartlett testa se a matriz de correlação é uma matriz identidade, o que indicaria que não há correlação entre os dados. Dessa forma, procura-se para um nível de significância assumido em 5% rejeitar a hipótese nula de matriz de correlação identidade.

A análise fatorial pode identificar variáveis representativas de um conjunto muito maior de variáveis para uso em análises multivariadas subsequentes ou criar um conjunto inteiramente novo de variáveis, muito menor, para substituir parcial ou completamente o conjunto original de variáveis para inclusão em técnicas subsequentes. Em ambos os casos, o propósito é manter a natureza e o caráter das variáveis originais, reduzindo seu número para simplificar a análise múltipla a ser empregada a seguir.

Foi adotado carga fatorial de 0,50 como limite aceitável da contribuição da variável na criação do fator com o objetivo de evitar o problema da indeterminação da relação entre variáveis e fatores, considerando que a amostra se refere a mais de 120 alunos e menos de 150.

Resultados

A Tabela 1 apresenta as médias e desvios padrão do conceito (0 a 100) concedido pelos alunos aos itens de avaliação da satisfação em relação a aspectos ou características institucionais. Também apresenta a estatística t e seu p-valor comparando a importância e a qualidade para esses itens.

Tabela1

Média e desvio padrão do conceito (0 a 100) concedido pelos alunos aos itens de avaliação da satisfação em relação a aspectos ou características institucionais.

Itens	Importância	Qualidade	Estatística t (p value)
	Média (desvio)	Média (desvio)	
1. Infraestrutura física da instituição (prédios, salas de aula, laboratórios, ambientes de trabalho/estudo, auditórios).	89,79 (15,46)	87,47 (11,15)	1,617 (p = 0,108)
2. Infraestrutura física das salas de aula (cadeiras, classes, equipamentos de ventilação, paredes, pisos etc.).	89,28 (15,73)	87,68 (12,52)	1,074 (p = 0,285)
3. Recursos e equipamentos audiovisuais disponíveis na instituição (salas de aula, laboratórios e auditórios).	86,78 (18,52)	85,52 (12,90)	0,685 (p = 0,494)
4. Equipamentos e softwares oferecidos nos laboratórios de informática.	86,99 (19,66)	79,45 (18,87)	3,339 (p = 0,001)
5. Acervo disponível na biblioteca.	93,29 (11,99)	83,03 (15,18)	7,462 (p < 0,001)
6. Segurança (vigias, porteiros, iluminação...) oferecida pela instituição.	92,54 (14,49)	66,54 (20,78)	11,261 (p < 0,001)
7. Limpeza dos ambientes.	89,26 (15,41)	85,90 (17,09)	1,694 (p = 0,093)
8. Informações oferecidas pelos funcionários das secretarias da instituição.	87,60 (18,43)	76,67 (21,87)	4,425 (p < 0,001)
13. Grade curricular.	94,58 (13,07)	73,10 (20,01)	10,064 (p < 0,001)
14. Atividades extracurriculares diversificadas.	80,12 (18,78)	75,50 (23, 56)	1,913 (p = 0,058)
16. Eventos sociais que promovam confraternização entre os estudantes realizados pela instituição.	71,45 (24,95)	63,91 (24,65)	2,568 (p = 0,011)
17. Programas e serviços de apoio financeiro ao estudante oferecidos pela instituição.	89,65 (18,30)	61,06 (21,52)	11,169 (p < 0,001)

Nos itens destacados em cinza que na opinião dos alunos há diferença entre o que consideram importante e a qualidade que consideram existir. Por exemplo, no item referente à grade curricular observa-se t = 10,064 (p < 0,001), indicando que há diferença estatisticamente significativa entre a importância do oferecimento de uma grade curricular que atenda às necessidades de formação dos alunos e o que realmente é oferecido.

A Tabela 2 apresenta as médias e desvios padrão do conceito (0 a 100) concedido pelos alunos aos itens de avaliação da satisfação em relação a aspectos ou características pedagógicas. Também apresenta a estatística t e seu p-valor comparando a importância e a qualidade para esses itens.

Tabela 2

Média e desvio padrão do conceito (0 a 100) concedido pelos alunos aos itens de avaliação da satisfação em relação a aspectos ou características pedagógicas.

Itens	Importância	Qualidade	Estatística t (p value)
	Média (desvio)	Média (desvio)	
9. Concordância das referências bibliográficas com os conteúdos ministrados nas disciplinas.	92,47 (12,14)	84,09 (15,55)	5,879 (p < 0,001)
10. Ementa das disciplinas (ou conteúdo programático) adequada a sua carga horária.	95,22 (11,90)	68,72 (18,70)	13,324 (p < 0,001)
11. Adequação entre atividades (trabalhos, exercícios, ...) e conteúdos desenvolvidos nas disciplinas.	94,26 (9,40)	73,55 (18,68)	12,822 (p < 0,001)
12. Recursos pedagógicos (atividades que auxiliem a aprendizagem, como jogos, desafios, utilização de máquinas/equipamentos, ...).	86,76 (16,33)	56,84 (24,43)	12,446 (p < 0,001)
15. Envolvimento pessoal em relação ao curso (frequência, cumprimento de horários, participação em atividades não obrigatórias ...).	90,03 (15,52)	80,53 (17,04)	5,318 (p < 0,001)
18. Clareza por parte dos professores nas apresentações dos conteúdos.	97,22 (11,31)	69,19 (18,72)	14,306 (p < 0,001)
19. Comprometimento com o ensino.	97,89 (5,97)	76,05 (19,10)	13,318 (p < 0,001)
20. Relação entre e a teoria e a prática profissional durante as aulas.	93,66 (12,99)	69,54 (22,61)	10,730 (p < 0,001)
21. Qualificação profissional dos docentes.	95,00 (10,98)	89,41 (15,50)	3,479 (p = 0,001)
22. Cumprimento dos conteúdos previstos nas ementas das disciplinas.	92,97 (12,94)	81,09 (17,25)	7,847 (p < 0,001)
23. Interdisciplinaridade entre as disciplinas do curso.	85,34 (17,45)	73,53 (22,40)	6,069 (p < 0,001)
24. Incentivo a debates em sala de aula.	76,65 (23,18)	59,04 (23,73)	7,721 (p < 0,001)
25. Receptividade dos professores em relação a novas ideias e diferentes pontos de vista.	88,15 (17,86)	64,95 (24,73)	9,729 (p < 0,001)
26. Coerência nas avaliações das disciplinas.	97,14 (7,32)	70,95 (20,98)	13,619 (p < 0,001)
27. Atendimento extraclasse (professores/monitores).	91,85 (15,18)	75,20 (21,30)	7,359 (p < 0,001)

Importante destacar que em relação aos itens de avaliação da satisfação em relação a aspectos ou características pedagógicas, todos indicam que há diferença significativa entre o que os alunos consideram como importante e o que consideram estar sendo realizado na universidade.

Por exemplo, o item 18 indica que os alunos consideram importante que o professor seja claro na apresentação dos conteúdos. No entanto, esses consideram que os professores não apresentam esta habilidade (t = 14,306; p < 0,001).

Outro item que destacamos importante é o 23, onde os alunos consideram que apesar de ser importante haver a interdisciplinaridade entre as disciplinas do curso, consideram que o mesmo não tem sido realizado (t = 6,069; p < 0,001). Fator este que é essencial à instituição de Ensino Superior de origem dos alunos. A instituição expressa que na busca da promoção do conhecimento racional primário, e do direcionamento dos alunos da universidade, aplica-se uma grade de disciplinas de diferentes áreas (interdisciplinaridade), formando senso crítico criado a partir de diversas perspectivas, permitindo ainda que para a escolha da carreira, haja maior convicção e prévio conhecimento.

Após realizar a análise fatorial de componentes principais e rotação Varimax com normalização de Kaiser, obtivemos quatro fatores encontrados para a Escala de atitudes em relação à Probabilidade e à Estatística que chamamos: Qualidade da infraestrutura física, pedagógica e de serviços institucionais; Importância de um ambiente propício ao Ensino e Aprendizagem; Adequação dos docentes à proposta pedagógica; e Envolvimento pessoal em atividades extraclasse. A seguir apresentamos explicação detalhada da identificação dos quatro fatores:

1. **Qualidade da infraestrutura física, pedagógica e de serviços institucionais**: relaciona-se com a qualidade apontada do ambiente institucional abrangendo: a infraestrutura física, os serviços institucionais oferecidos, e as características pedagógicas estruturais da disciplina. É relacionado à importância da qualidade da infraestrutura disponível aos alunos e como esta interfere no aprendizado de probabilidade e estatística (itens 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8), e ao modo como a disciplina é abordada e ministrada pelo corpo docente (uso de novas técnicas e recursos pedagógicos), além da qualidade da bibliografia utilizada no curso e disponibilizada pela universidade (itens 9, 12, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 25 e 26). Itens: Q1, Q2, I2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, I9, Q12, Q13, Q14, Q17, Q19, Q21, Q22, Q25, Q26.
2. **Importância de um ambiente propício ao Ensino e Aprendizagem:** corresponde a importância medida do ambiente institucional para a aprendizagem e ensino de probabilidade e estatística. Leva em conta aspectos físicos, bem como a própria transmissão do conhecimento através da escolha da ementa e ensino em aula. É relacionado à importância da infraestrutura para que o aluno consiga estudar e praticar os conteúdos abordados na disciplina de maneira agradável e segura (itens 4, 6, 7 e 8) e às atividades extraclasse e o modo como o corpo docente aborda os conteúdos da ementa programática do curso (itens 10, 12, 13, 16, 18, 19, 20, 25 e 27). Ou seja, nesse fator estão agrupados todos os fatores de importância para bom desempenho na disciplina. Itens: I4, I6, I7, I8, I10, I12, I13, I16, I18, I19, I20, I25, I27.
3. **Adequação dos docentes à proposta pedagógica: r**eferente à qualidade da ministração da disciplina por parte dos docentes, e consequente adequação destes a estrutura do curso: a abordagem e transmissão dos conteúdos, o comprometimento e flexibilidade. Esse fator correlaciona as qualidades da ementa do curso, clareza na explicação dos conteúdos, cumprimento dos conteúdos previstos em ementa, e atividades extraclasse. Itens: Q10, Q18, Q22, Q27.
4. **Envolvimento pessoal em atividades extraclasse:** referente ao envolvimento do aluno com a disciplina quando fora do horário de aula, pois embora sejam ofertadas atividades extraclasse nem todos têm a oportunidade, necessidade de atendê-las. Esse fator correlaciona a qualidade de tais atividades, como monitoria, seminários e palestras e o envolvimento pessoal do aluno referente a essas atividades. Concernente a qualidade do envolvimento e disposição dos discentes em relação ao próprio processo de aprendizagem, bem como, com a socialização com seus pares fora do ambiente de sala. Itens: Q15, Q16.

Ao aplicarmos o teste Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) obtivemos o valor de 0,753 dos itens da escala, indicando que estes explicam significativamente a satisfação dos alunos em relação a sua instituição de Ensino Superior. Este teste indica a adequacidade da análise fatorial, considerando a proporção da variância que pode atribuída a um fator comum. Este valor varia entre 0 e 1 e quanto mais perto de 1 o resultado torna-se melhor.

O KMO indica a adequação do tamanho da amostra e: 1) valores entre 0,5 e 0,7 são considerados "medíocres"; 2) valores entre 0,7 e 0,8 são "bons"; 3) entre 0,8 e 0,9, "ótimos"; 4) acima de 0,9, "magníficos". Portanto, a adequação do tamanho da amostra é boa para identificar a satisfação dos alunos em relação a sua instituição de Ensino Superior.

O teste de esfericidade de Bartlett testa a hipótese nula de que a matriz de correlação original é uma matriz de identidade. Um teste significativo (p menor que 0,05) nos mostra que a matriz de correlações não é uma matriz de identidade, e que, portanto, há relações entre as variáveis que se espera incluir na análise.

Como salienta Pasquali (2003), quando o número de itens é pequeno, que é o caso do quarto fator, este dado deve ser relativizado, visto que neste caso o próprio item em análise afeta substancialmente o escore total a seu favor. Nesse estudo, os coeficientes de confiabilidade confirmam a consistência interna do instrumento.

Além disso, é importante tomarmos cuidado com a aplicação de qualquer instrumento de coleta de dados. Nesta escala, por exemplo, observamos para que ela reproduza de forma confiável a realidade dos respondentes. A utilização do alfa de Cronbach veio "expressar, por meio de um fator, o grau de confiabilidade das respostas decorrentes de um questionário" (Almeida, Santos, & Costa, 2010).

Segundo Nunnally (1978), pelo menos 0,70 seria um valor de confiabilidade aceitável. Neste estudo, o grau de confiabilidade das respostas foi de 0,919, o que confirma a alta consistência interna do instrumento reduzido pela análise fatorial.

Conclusões

Os estudos que consideram a qualidade do ensino em conjunto com a satisfação dos alunos com as práticas implantadas pelas instituições de ensino superior são escassos.

Na revisão da literatura acerca do assunto confirma-se que é fundamental que as Instituição de Ensino Superior – IES promovam pesquisas de satisfação junto a seus alunos. De tal maneira, poderão ser atendidas as necessidades e expectativas deles. Em particular na sua preparação e capacitação para a inserção no mercado de trabalho.

Diversas são as formas de mensurar a satisfação e, como assinalam Paswan e Yong (2002) há vários fatores que influenciam. Dentre os que esses autores mencionam os mais relacionados diretamente são o envolvimento do professor e o interesse do estudante.

Portanto, os resultados obtidos permitem concluir que ao ser o envolvimento do professor, assim como os interesses do estudante determinantes da satisfação geral dos alunos com o curso, ambos os constructos devem ser levados em consideração pelas IES para melhor definir suas funções precípuas e seu marketing educacional.

Referências

Almeida, D., Santos, M. C. R., & Costa, A. F. B. (2010). Aplicação do coeficiente Alfa de Cronbach nos resultados de um questionário para avaliação de desempenho da saúde pública. *Anais do Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, Universidade Federal de São Carlos, 30.

Alves, C. V. O., Corrar, L. J., & Slomski, V. A. (2004). docência e o desempenho dos alunos dos cursos de graduação em Contabilidade no Brasil. *Anais do Congresso USP de Controladoria e Contabilidade*, São Paulo, Brasil, 4.

Awan, A. M., & Rehman, M. A. (2013). Antecedents of higher degree students' satisfaction: a developing country perspective. *Middle-East Journal of Scientific Research*, 18(5), 651-659.

Bonici, R. M. C., & Araújo, J. C. (2011). *Medindo a satisfação dos estudantes em relação a disciplina online de Probabilidade e Estatística*. 2011. Recuperado de http://www.abed.org.br/congresso2011/cd/190.pdf.

Churchill Jr., G. A. (1979). A Paradigm for developing better measures of marketing constructs. *Journal of Marketing Research*, 16(1), 64-74.

Coda, R., & Silva, D. (2004). Sua escola de Administração é uma excelente escola para se estudar? Descobrindo dimensões da satisfação de alunos em cursos de Administração: uma contribuição metodológica. *Anais do Encontro da ANPAD*, Curitiba, Brasil, 28.

Dutra, V. B. R., Ávila, S. H., & Mattos, V. L. D. (2017). Validação de um instrumento de avaliação da satisfação dos discentes de cursos de graduação em Matemática. *Scientia Plena*, 13(4), 1-9.

Gutiérrez, S. A., & Camblor, M. P. (2007). Principales factores de satisfacción entre los estudiantes universitarios. La unidad académica multidisciplinaria de agronomía y ciencias de la UAT. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades*, 17(1), 163-192.

Loreto, P. Q. R. S. (2001). *Jornadas pedagógicas*. Recuperado de www.isec.pt.

Nunnally, J. C. (1978). *Psychometric Theory*. 2nd. ed. New York, N.Y.: McGraw-Hill Book.

Oliveira Júnior, A. P., & Morais, J. F. (2009). Validação da Escala de Atitudes de Professores de Estatística em Relação à Estatística no Ensino Superior no Brasil. *Revista Ciência & Educação*, 15(3), 581-591.

Palacio, A. B., Meneses, G. D., & Pérez, P. J. P. (2002). The configuration of the university image and its relationship with the satisfaction of students. *Journal of Educational Administration*, 40(5), 486-505.

Pasquali, L. (2003). *Psicometria:* Teoria dos testes na Psicologia e educação. Petrópolis: Vozes.

Paswan, A. K., & Young, J. A. (2002). Student evaluation of instructor: a nomological investigation using structural equation modeling. *Journal of Marketing Education*, 24(3), 193- 202.

Pereira, B. C. S., & Gil. C. (2006). A Satisfação dos Alunos de Escolas de Administração. *Anais do SEMEAD*, Seminários em Administração FEA-USP, São Paulo, Brasil, 9.

Porturak, M. (2014). Private universities service quality and student's satisfaction. *Global Business and Economics Research Journal*, 3(2), 33-49.

Rowley, J. (2003). Designing student feedback questionnaires. *Quality Assurance in Education*, 11(3), 142-149.

Souza, A. S., & Reinert, J. N. (2010). Avaliação de um curso de ensino superior através da satisfação/insatisfação discente. *Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior*, 15(1),159-176.



A importância de tópicos de matemática a serem ensinados para alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental

Lucia Arruda de Albuquerque **Tinoco**
Projeto Fundão IM-UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
luciaatinoco@gmail.com
Gilda Maria Quitete **Portela**
Projeto Fundão IM-UFRJ, Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro
Brasil
gilda@quiteteportela.com.br
Maria Palmira da Costa **Silva**
Projeto Fundão IM-UFRJ, Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro, Secretaria Estadual de Educação do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
mariapalmirasilva@gmail.com

Resumo

O presente trabalho tem por objeto consulta feita a professores da escola básica ou de instituições de ensino superior do Rio de Janeiro sobre se tópicos de matemática são altamente importantes, têm média importância ou não têm importância para a formação de alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. A pouca participação dos professores em exercício na elaboração de currículos de nível básico e a quantidade excessiva de tópicos incluídos em tais currículos serviram de motivação para o mesmo. A análise das respostas aos questionários enviados mostrou que, embora professores considerem excessiva a quantidade de conteúdos incluídos nos programas, têm dificuldade em apontar tópicos como sendo sem importância. A maioria dos motivos destacados para justificar a importância de um tópico foi condizente com as tendências do movimento de educação matemática e, em geral, com a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental, em implantação no Brasil.

Palavras chave: currículo, Matemática, Ensino Fundamental, conteúdos importantes, opinião de professores, formação matemática dos alunos.

O Projeto Fundão

Na década de 1980, havia nas universidades brasileiras forte tendência ao aprimoramento da pesquisa básica, em detrimento do desenvolvimento de estratégias de apoio à escola básica e à formação de professores. No Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM-UFRJ), um grupo de professores egressos de escolas desse nível iniciaram então um trabalho naquele sentido. Foi esta a semente encontrada no IM-UFRJ pela Professora Maria

Laura Mouzinho Leite Lopes, ao voltar à UFRJ, em 1980, depois de um exílio de 08 anos e de experiências relevantes no Brasil, fora desta Universidade.

A Professora liderou a criação do Projeto Fundão em 1983, naquele Instituto, tomando como base ideias que, mais de 10 anos depois, caracterizam os grupos de trabalho colaborativo: a de que a educação matemática tinha de ser considerada como área de pesquisa e de que qualquer material voltado para a sala de aula da escola básica deveria ser produzido por grupos formados de professores da universidade, professores da escola básica e de estudantes futuros professores. Desde então, a equipe do Projeto é composta de grupos formados de professores da UFRJ, professores da escola básica ou de outras instituições de ensino superior, e alunos de Licenciatura do IM-UFRJ que escolhem livremente um assunto a trabalhar, de interesse da escola básica, estudam, pesquisam e produzem materiais a serem utilizados em sala de aula, testando o material antes de ser divulgado à comunidade de professores. Essa divulgação, em âmbito regional, nacional e internacional, dá origem a sugestões e críticas, propiciando o aprimoramento do produto.

Essa prática mostra que o desenvolvimento de um trabalho, que integra ensino, pesquisa e extensão, em grupos colaborativos, traz muitos benefícios, tanto para o desenvolvimento individual de cada integrante, quanto para a adequação do produto dos trabalhos à realidade da escola.

A questão do tamanho da lista de conteúdos – considerações teóricas

Um grupo da equipe do Projeto Fundão, preocupado com o fato de a Matemática ser considerada a matéria mais difícil e rejeitada pela maioria dos alunos e com os baixos índices de aprendizagem dessa disciplina nas escolas brasileiras, formulou a seguinte questão: o tamanho da lista de conteúdos a ser trabalhada em um ano letivo pode ser um dos motivos responsáveis pelo baixo rendimento dos alunos em Matemática e de sua imagem junto aos mesmos?

Pires (2014) vem ao encontro da inquietação do grupo quando escreve: “Nossos currículos e, em particular, nossos livros didáticos estão certamente superdimensionados em relação ao tempo necessário para a construção de aprendizagens” (PIRES, 2014, p. 11).

O professor que é assim desafiado é, por outro lado, considerado aquele que simplesmente executa políticas estabelecidas por outras pessoas e transmitem conhecimentos selecionados também por outros. Daí a necessidade de ouvir os professores sobre a importância de ensinar um ou outro tópico. Propondo-se a isto, o grupo realizou consulta a professores de matemática do Rio de Janeiro, pedindo, inicialmente, a eles que classificassem cada um de 52 tópicos presentes em programas escolares desse Estado em uma das seguintes categorias: “alta importância”, “média importância” ou “sem importância” e, a seguir, para indicar razões para considerar um tópico em uma dessas categorias. Comentários escritos por entrevistados na pesquisa confirmam tal necessidade, salientada por Oliveira (2010), ao refletir sobre proposta curricular de EJA:

> ... são raras as ocasiões em que autoridades educacionais buscam nos seus saberes fonte de informação e de reflexão para a elaboração de novas proposições curriculares ou reconhecem nos seus fazeres, saberes curriculares a serem levados em consideração (OLIVEIRA, 2010, p. 190).

Pires (2014) comenta também sobre razões para o distanciamento dos professores relativo às mudanças curriculares.

> No Brasil, o engajamento de professores no processo de discussão curricular não é uma prática instalada. Isso se deve especialmente ao fato de que os processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular são temas ausentes na formação inicial e continuada de professores. Desse modo,]...[, sem conhecimentos sobre como os currículos são elaborados, quem os elabora, para que eles são elaborados, grande parte dos professores lida com as prescrições curriculares oficiais de forma bastante distante e desconfiada. (PIRES, 2014, p. 12)

Observa-se por outro lado que, ao serem obrigados a "ensinar" todos os tópicos dos currículos prescritos, professores acabam não tendo o tempo necessário para que o ensino dos conteúdos essenciais os torne significativos e atrativos para o aluno. O grupo contrapõe assim a necessidade de promover uma aprendizagem significativa, ou seja, aquela propiciada pela estreita ligação entre o conhecimento novo a ser apresentado e o previamente construído pelo aprendiz, com a existência de extensa lista de conteúdos a serem ensinados.

Considera-se neste sentido relevante a afirmação de Luis Santaló (2001).

> Como regra geral, pode-se recomendar que sempre é preferível saber pouco e bem, que muito e mal.,]...[Aos professores de matemática compete selecionar entre toda matemática existente, a clássica e a moderna, aquela que possa ser útil aos alunos em cada um dos diferentes níveis de educação. Para seleção temos que levar em conta que a matemática tem um valor formativo, que ajuda a estruturar todo pensamento e a agilizar o raciocínio dedutivo, porém também é uma ferramenta que serve para atuação diária e para muitas tarefas específicas de quase todas atividades laborais. (SANTALÓ, 2001, p. 16)

Ainda neste sentido, há mais de 30 anos, Usiskin (1980) afirma:

> O currículo está saturado; ainda há uma pressão e razões para aumentar a atenção aos computadores, à estatística, à probabilidade, às aplicações, às transformações, e a outras áreas e tópicos. Sem aumentar o tempo dedicado às aulas de matemática, só se pode aumentar a atenção a esses tópicos, em detrimento dos tópicos tradicionais. (tradução nossa) (USISKIN, 1980, p.423)

Considerando os aspectos mencionados, passa-se a expor e analisar alguns resultados da pesquisa realizada.

O desenvolvimento da pesquisa

Tendo como ponto de partida a análise de livros didáticos e orientações curriculares do Rio de Janeiro, a pesquisa constituiu-se de duas etapas, com o mesmo grupo de entrevistados. A primeira permitiu conhecer a opinião de um grande grupo de professores de matemática sobre a importância de trabalhar diversos conteúdos, do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. A importância questionada referia-se à formação matemática de qualquer aluno, que fará apenas o Ensino Fundamental ou que prosseguirá seus estudos.

A segunda etapa indagava sobre possíveis razões para a classificação apenas de alguns conteúdos considerados como de "alta importância" ou "sem importância", observada nos resultados da primeira etapa. Nessa etapa, não foram abordados os conteúdos considerados como de média importância.

Perfil da amostra

Em relação ao nível de formação, menos de 4% dos entrevistados não eram graduados, cerca de 43% tinham graduação em matemática ou outra, quase 40% tinham especialização e 33% possuíam grau de mestre ou doutor. Neste item, o entrevistado poderia marcar mais de uma opção. Cerca de um terço da amostra lecionava em escolas particulares e os demais se distribuíam entre escolas públicas estaduais, municipais e federais, a maioria destes em escolas estaduais e municipais. Em relação ao nível de ensino em que atuavam, mais de 70% lecionavam no Ensino Fundamental, e mais de 60% em Ensino Médio, enquanto menos de 20% atuavam em Ensino Superior. A grande maioria dos professores da amostra (mais de 63) lecionava há 5 a 30 anos, e 20%, há menos de 5 anos.

Passos de cada uma das etapas da pesquisa

A primeira etapa iniciou-se com a discussão do grupo para a seleção dos 52 assuntos que compuseram dois questionários, que se baseou na análise de propostas curriculares do Estado e do Município do Rio de Janeiro e sumários de livros didáticos brasileiros, do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

Dois questionários, com 26 tópicos cada, foram então enviados por *e-mail*, via *google docs*, para aproximadamente 1100 professores que já haviam participado de alguma ação do Projeto Fundão em um período de cerca de dez anos. Cada tópico deveria ser classificado em: de "alta importância", de "média importância" ou "sem importância" pelos consultados. Foram respondidos 346 questionários.

A segunda etapa procurava atender ao interesse do grupo em saber a opinião da mesma amostra de professores a respeito das razões pelas quais tinha sido dada ou não importância a determinados tópicos. Essa segunda consulta envolveu apenas os tópicos mais apontados na primeira como de "alta importância" ou "sem importância". Para cada tópico destes grupos, foi oferecido aos entrevistados um conjunto de motivos possíveis que poderiam justificar a classificação atribuída a ele, e pedido que indicassem três deles. Foram recebidas 245 respostas nesta segunda etapa.

Resultados obtidos na primeira etapa

Foi observado que os maiores índices de classificação de itens como sendo de "alta importância" recaíram em tópicos aplicáveis no dia a dia ou valorizados em estudos e literatura atuais, embora haja tópicos assim valorizados que não foram classificados como de "alta importância" na pesquisa. O fato de a amostra da pesquisa ser composta de professores que tiveram acesso a trabalhos de educação matemática pode ter influenciado as respostas no sentido de valorizar tópicos recomendados por educadores matemáticos atuais e em documentos oficiais, embora a experiência do grupo indique que seu ensino não seja muito presente em salas de aula. Por exemplo, a "Noção de probabilidade" foi considerada de "alta importância" em 77% das respostas e de "média importância" em 20,8% delas. Resultado semelhante foi obtido com os tópicos "Noções de dependência e variável" e "Estratégias de cálculo mental".

As Transformações Geométricas, não foram valorizadas nas respostas dos professores, embora, há décadas, haja recomendações explícitas nos documentos oficiais relativas à sua inclusão no estudo de geometria. Justifica tal afirmação o fato de as isometrias terem sido apontadas como de alta importância em 37,4% das respostas e homotetia em 25,7% delas. Talvez um dos motivos para isto seja o despreparo dos professores para ensinar tais assuntos, principalmente a homotetia. Ressalte-se que os percentuais relativos à semelhança de polígonos

quaisquer foram 53,6%, 43,2% e 3,3%, respectivamente, para alta, média e sem importância. Esse fato denota a dissociação feita entre semelhança e homotetia. Entre as transformações geométricas, as respostas diferiram; o percentual dos que apontaram as isometrias (reflexão, translação e rotação) como "sem importância" foi a metade dos que o fizeram em relação à homotetia, o que confirma a hipótese do despreparo, uma vez que as isometrias já são de certa forma familiares aos professores do Ensino Fundamental, principalmente a reflexão (simetria).

Vale também afirmar que os tópicos mais apontados como de "alta importância" estão contemplados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental, em processo de implantação no Brasil.

Por outro lado, a dificuldade dos professores em considerar um tópico como "sem importância", pode ser ilustrada pelos dados seguintes. Dos 52 tópicos, 11 deles foram apontados como de "alta importância" em 70% ou mais das respostas. No entanto, entre os tópicos indicados como "sem importância", um tópico o foi em 57,9 % das respostas (Divisibilidade por 7 e por 11), 09 outros tópicos foram assim classificados em, 20% a 36% das respostas e os demais em menos ainda. As considerações de Pires (2014), sobre a escassez de oportunidades que professores têm para refletir sobre os currículos, podem ter relação com a dificuldade apontada acima. Em alguns tópicos, o índice de classificação do mesmo como de "média importância" reforça essa dificuldade. Foi o caso de MMC de expressões algébricas, classificado em apenas 18,4% das respostas como "sem importância", mas com 48,5% delas classificando o tópico como de "média importância".

Ainda sobre tal dificuldade, vale citar Usiskin (1980) quando salienta certa "cerimônia" entre professores em relação às inovações curriculares e a crença deles em que houve propósitos relevantes para incluir os tópicos em tais propostas, e que se trata de assuntos importantes de matemática.

> Todo tópico do currículo é valorizado por alguns matemáticos ou professores de matemática. Se não houvesse uma forte razão, como o tópico iria tornar-se padrão pela primeira vez? Vemos hoje como é difícil mudar a prática. Todo tópico entrou no currículo em algum momento, no qual havia razões para incluí-lo. (USISKIN, 1980, p.413) (tradução nossa)

O fato mencionado por Oliveira (2010) de esses professores não terem uma participação efetiva na maioria das reformulações curriculares, nas quais, em geral, matemáticos e sociedades acadêmicas são chamados a opinar, tem provável influência na formação dessa crença.

Resultados obtidos na segunda etapa

Nesta parte da pesquisa, para cada um de dez tópicos dos mais bem cotados na etapa anterior como de "alta importância", ou "sem importância", foram apresentadas opções de razões para que ele tenha sido assim considerado, e uma opção "Outro". O entrevistado deveria escolher três delas, o que justifica a soma dos percentuais de escolha das opções ser sempre maior do que 100%.

Observou-se que em vários itens foram escolhidas menos de três opções. A opção "Outro" foi escolhida, na maioria dos casos, no sentido de discordar da avaliação feita anteriormente sobre o item ou fazer um comentário qualquer; pouquíssimas vezes, para apontar outra razão para a importância ou não do tópico.

A Tabela 1 apresenta as opções oferecidas, e respectivos percentuais de escolha, referentes a um tópico considerado na primeira etapa da pesquisa como "sem importância": Regras para obtenção da geratriz de uma dízima periódica.

Tabela 1

Respostas referentes às razões para "Regras para obtenção de geratriz de uma dízima periódica" ter sido considerado como "sem importância"

Opções de razões	Percentuais
O importante é a compreensão do aluno sobre o significado de uma dízima	51,3
As regras são de difícil assimilação	21,3
As regras não contribuem para a compreensão do que é um número racional	27,4
Dificilmente há a necessidade de transformar uma dízima em fração	24,4
Geralmente são mecanizadas sem compreensão	67

Fonte: dados da pesquisa.

Seguem, a título de exemplos, observações a respeito das razões selecionadas pelos entrevistados, referentes a três tópicos: um que tinha sido considerado como de "alta importância" e dois como "sem importância", ambos referentes ao ensino de álgebra.

Tradução de situações do dia a dia em linguagem algébrica

Este tópico foi classificado como de "alta importância" em 99,4% das respostas. Apesar de ter havido certo equilíbrio quantitativo entre as várias opções de razões para essa classificação, o grande número de opções escolhidas no total confirma o grau de importância que é dada pelos entrevistados ao ensino de álgebra. As três razões mais indicadas para a alta importância atribuída a esse tópico são coerentes com as atuais tendências da educação matemática: o desenvolvimento do pensamento algébrico (84,1%), compreensão da simbologia algébrica (58%) e resolução de problemas (54,7%). Nas demais opções, foi observado um equilíbrio dos aspectos relativos ao pensamento algébrico e procedimentais.

Equações irracionais e biquadradas

Esses dois tópicos encontram-se entre os cinco mais apontados na primeira etapa da pesquisa como "sem importância" (em torno de 35%). No entanto, cerca de 55% das respostas os apontam como de "Média Importância" e menos de 10%, como de "Alta Importância". Este alto índice na média importância ilustra a conclusão da pesquisa de que os entrevistados têm dificuldade em admitir algum tópico como sem importância. Em relação às razões para a classificação das equações biquadradas, a maioria das respostas da segunda etapa da pesquisa apontam a não existência de aplicações das mesmas no dia a dia e que são apenas uma aplicação das equações do segundo grau. Observe-se que o ensino de tais equações com esse enfoque pode ser útil para apresentar um procedimento de grande valia em matemática: a substituição; não como um assunto em si. Quase 20% das respostas indicam o reconhecimento de que o tópico não está presente nos concursos atuais.

Os motivos pelos quais as equações irracionais foram apontadas como "Sem Importância", foram escolhidos com certo equilíbrio entre as opções oferecidas. Mesmo assim, 50% destacaram a opção "os alunos não compreendem a necessidade da verificação das respostas" e quase 45% consideram a importância do tópico para estudos posteriores. Poucos apontaram a dificuldade com a raiz quadrada como razão para a não importância atribuída ao tópico.

Considerações Finais

Os resultados da pesquisa reforçam a percepção do grupo de que professores, em geral, têm dificuldade em propor a retirada de algum tópico dos programas, seguindo uma tendência tradicional em reformas curriculares, como salienta Usiskin (1980). Esta dificuldade se manifesta, por exemplo, como observado anteriormente, no grande número de classificações como de "média importância" atribuídas pelos entrevistados a muitos tópicos. De fato, 18 dos 52 tópicos (34%) foram classificados como de "média importância" por mais de 50% dos que responderam à entrevista, o que sugere que, em alguns casos, essa classificação foi escolhida pela resistência a classificar o tópico como "sem importância".

O segundo aspecto, já mencionado, refere-se aos percentuais de indicação dos tópicos como de "alta importância" e "sem importância". Enquanto os 10 itens mais apontados como de 'alta importância", o foram em 70% ou mais das respostas, os 10 mais apontados como "sem importância" foram assim classificados apenas em 22,7% a 36,2% das respostas, exceção feita ao tópico "Divisibilidade por 7 e por 11", que teve 57,9% de indicações desta forma. Comentários espontâneos escritos por professores na resposta à pesquisa e contatos da equipe com professores em exercício na rede municipal do Rio de Janeiro, realizados fora da pesquisa, apontam no mesmo sentido.

Vale salientar que muitos dos comentários mencionados sugerem a preocupação dos entrevistados com aspectos pedagógicos, apontando caminhos para um ensino de qualidade, e mesmo destacando a importância de certos assuntos, como no exemplo: "Gostaria de acrescentar a introdução da linguagem algébrica através da observação de regularidades de figuras e sequências numéricas bem como a aplicação da álgebra em diferentes contextos". Assuntos como proporcionalidade e geometria plana também foram espontaneamente citados como importantes. Tais comentários reforçam a ideia de que a escolha dos tópicos a ensinar não pode ser dissociada do contexto sócio-pedagógico da escola, e de aspectos culturais mais gerais. Esse tipo de preocupação é sugerido em respostas à segunda etapa da pesquisa, na escolha de aspectos referentes ao ensino dos assuntos como razões para que eles tenham sido considerados de "alta importância". Observou-se, por exemplo, que a aplicação dos assuntos no dia a dia foi muito valorizada, remetendo à importância dada à contextualização da matemática em situações reais, como também a construção de conceitos, no caso dos tópicos divisão ou função. Não menos importantes foram as referências ao desenvolvimento de raciocínios como o espacial e o algébrico. Na verdade, o fato de ser importante ou não ensinar um assunto depende muito da forma pela qual esse ensino se dá.

Ser tópico presente em recomendações oficiais ou acadêmicas, ou ainda em avaliações institucionais, não foi muito valorizado nas respostas, como sendo um motivo para um tópico ser importante, sugerindo que os que responderam à pesquisa não admitem sofrer influências externas nas suas opções.

Em conclusão, saliente-se que este trabalho aborda apenas uma parte das informações obtidas na pesquisa, que foi destacada no sentido de contribuir para o debate sobre a importante e

complexa tarefa dos professores: selecionar o que é essencial ensinar, no sentido de despertar o interesse dos estudantes e propiciar uma aprendizagem significativa.

Não menos importante é informar que sua autoria é de fato de um grupo e não apenas das autoras mencionadas no texto, o que caracteriza todos os trabalhos da equipe do Projeto Fundão. Participaram também, efetivamente, de todas as etapas do trabalho os Professores da escola básica Luciana Maria Lima da Silva, João Rodrigo Esteves Statzner e Lennon de Aguilar Pereira e o graduando de matemática Matheus Nascimento dos Santos.

Referências

Oliveira, I. B. (2010). Orientações Curriculares para a EJA: possibilidades e especificidades locais. *Orientações Curriculares: diversidades educacionais,* Cuiabá, Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso, Defanti, 183-197.

Pires, C. M. C. (2014). Reflexões sobre o Debate Curricular no Brasil. *Educação Matemática em Revista*, 43, 5 – 13.

Santaló, L. A. (2001). Matemática para não Matemáticos. Parra, C. e Saiz, I. (Org), *Didática da Matemática, Reflexões Psicopedagógicas,* Artmed, Porto Alegre, 16-23.

Usiskin, Z. (1980). What Should Not Be in the Algebra and Geometry Curricula of Average College-Bound Students? *Mathematics Teacher,* 73, 413–24.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A análise da produção escrita em matemática de estudantes para a melhoria do ensino e aprendizagem de matemática

Paulo Vinícius Pereira de Lima[1]
paulovinicius49@gmail.com
Geraldo Eustáquio Moreira [2]
geust2007@gmail.com
Regina da Silva Pina Neves[3]
reginapina@gmail.com

Resumen

Este trabalho apresenta resultados de uma investigação desenvolvida com o objetivo de analisar as produções escritas de estudantes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, no conteúdo de potenciação com números inteiros, conforme o desenvolvimento do pensamento matemático expresso em suas avaliações. O estudo considerou a literatura atual no ensino de avaliação e produção escrita em Matemática apresentada por Buriasco (2004,2016), Viola dos Santos (2007). O material de analise foi constituído pelas avaliações escritas da disciplina de Matemática do ano de 2016, realizadas em escolas particulares de Ensino Fundamental do Distrito Federal, que foram investigadas segundo a metodologia de análise de produções escritas desenvolvidas por Buriasco (2004,2015). O estudo apresenta uma amostra de como a prática do uso da análise da produção escrita em Matemática.

Palabras clave: Avaliação; análise; produção escrita.

Introdução

Pesquisas indicam que o atual modelo de formação profissional não tem oferecido aos futuros professores habilidades e competências necessárias para o enfrentamento da sua futura prática escolar, que lhes são exigidas na sociedade contemporânea. Isso tem refletido diretamente

[1]Mestrando em Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília – PPGE/FE-UnB.Linha de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática. Licenciado em Matemática.

[2]Doutor em Educação Matemática com Estágio Doutoral na Universidade do Minho/PT. Mestre em Educação. Licenciado em Matemática, Pedagogia e Ciências Naturais. Professor Adjunto da Universidade de Brasília – UnB. Pesquisador do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da UnB (Mestrado e Doutorado – Acadêmicos e Mestrado - Profissional).

[3]Doutora em Educação pela Universidade Brasília. Departamento de Matemática.

na insatisfação social com o nível de ensino proposto, sobretudo das escolas públicas, cujos indicadores educacionais das avaliações externas mostram um quadro desafiador e ainda aquém dos padrões mínimos que indiquem uma qualidade de um processo ensino-aprendizagem satisfatório.

Ademais,

> [...] a sociedade atual reivindica da escola, além de novos saberes e competências profissionais, a formação de sujeitos que sejam capazes de exercer permanentemente o seu próprio aprendizado. Os saberes e processos tradicionais de se ensinar e de aprender desenvolvidos no seio da escola se tornaram cada vez mais obsoletos e desinteressantes para os alunos. Dessa forma, o professor passou a ser intensamente desafiado a atualizar-se e a inaugurar novas formas de se ensinar, diferentes daqueles vividos em todo o seu processo de escolarização e de formação profissional (HARGREAVES, 2001 apud SANTOS, 2015).

Nesse sentido, temos desenvolvido, desde 2012, a análise da produção escrita em Matemática de estudantes em situação de dificuldade de aprendizagem[4]. Diante disso este trabalho tomou por análise a produção escrita em Matemática de estudantes que frequentam o acompanhamento escolar, assumindo como dado de investigação a avaliação escrita formal realizada por ela em sua escola regular. Tais avaliações abordavam os conteúdos de propriedade de potências e operações com frações e números inteiros.

A intervenção foi planejada e conduzida, ao longo de 4 meses, em encontros semanais com duração de 1h30, tendo como meta a construção de novas estratégias que superassem tais dificuldades, conforme defendem Fávero e Pina Neves (2012).

O objetivo principal desse trabalho foi discutir e analisar as contribuições da análise de produção escrita em Matemática para o ensino e aprendizagem de Matemática. Analisando avaliações de estudantes que cursam do 6º ao 9º ano, na tentativa de levantar hipóteses sobre a sua construção do conhecimento Matemático, propondo estratégias de intervenção que possam promover aprendizagem dos estudantes e refletir sobre o uso da análise de produção escrita em Matemática como ferramenta que auxilia a prática do profissional do professor de Matemática.

Nesse cenário investigativo são apresentadas seções a seguir que tratam da avaliação como instrumento de oportunidade de aprendizagem, a análise da produção escrita em Matemática em benefício da avaliação para a aprendizagem**.** Sequencialmente descreve-se o percurso metodológico, os resultados obtidos com as devidas análises e as considerações finais do trabalho.

Avaliação: instrumento como oportunidade de aprendizagem

A avaliação constitui-se como uma importante ferramenta a ser trabalhada dentro e fora da sala de aula que pode estender tanto para reelaboração de práticas de inclusão na evidenciação da subjetividade e das maneiras de lidar dos estudantes para a reconstrução do conhecimento, quanto pode ocasionar a exclusão no âmbito escolar, sendo ela fundamental para que o professor

[4]Situação de dificuldade: Estudantes que apresentam baixo rendimento escolar em matemática. As causas podem ter relação direta com obstáculos didáticos, epistemológicos; questões psicológicas, familiares, entre outras. No Brasil, estes estudantes, de modo geral, frequentam acompanhamentos escolares em busca de apoio especializado.

repense sobre o seu papel no processo de ensino- aprendizagem e sobre as ações que contemplam suas práticas pedagógicas.

> A avaliação é um exercício de reflexão, capacidade única e exclusiva do ser humano, de pensar os seus atos, de analisá-los, interagir não só com o mundo, mas também com os outros seres, e de influenciar na tomada de decisões e transformação da realidade. Desta forma, pode contribuir para o aluno "ter a consciência do inacabado do ser humano, impulsionando os sujeitos à invenção da existência, à criação de um mundo não natural na busca de superação dos desafios postos pela própria existência, levando-os assim à construção contínua da cultura, da história, da sociedade" (FREIRE, 2000 apud CIPRIANO, 2007, p.48).

Avaliar o rendimento de estudantes tem sido um fator preocupante dos professores, tendo em vista que tal atividade faz parte do seu contexto docente e verificar e julgar tais rendimentos acompanhando o progresso dos estudantes reflete na vigência do ensino.

> Dessa forma, o ato de avaliar não serve como pausa para pensar a prática e retornar a ela; mas sim como um meio de julgar a prática e torná-la estratificada. De fato, o momento de avaliação deveria ser um "momento de fôlego" na escalada, para, em seguida, ocorrer a retomada da marcha de forma mais adequada, e nunca como um ponto definitivo de chegada, especialmente quando o objeto da ação avaliativa é dinâmico como, no caso, a aprendizagem. Com a função classificatória, a avaliação não auxilia em nada o avanço e o crescimento. Somente com a função diagnóstica ela pode servir para essa finalidade. (LUCKESI, 2000, p. 34-35).

Acreditamos que as avaliações e os resultados que elas evidenciam, contribuem em fatores que visam investigar, analisar, compreender e propor soluções para os problemas interligados ao ensino e a formação do professor de Matemática.

A análise da produção escrita em matemática

Na tentativa de romper a barreira entre a avaliação por rendimento para a avaliação da aprendizagem no Ensino de Matemática, tendo como mecanismos a relação entre professor e estudantes sobre as suas interpretações, que tanto o estudante quanto o professor fazem a cerca das suas produções ao decorrer das aulas de Matemática durante o processo de se ensinar e aprender na escola.

A análise da produção escrita em Matemática tem se tornado uma ferramenta de análise e compreensão dos caminhos trilhados pelos estudantes, como também uma lupa em prol dos impactos das ações pedagógicas do professor em sala de aula.

Para Buriasco (2004), ao analisar uma produção escrita em Matemática, é possível discorrer sobre as respostas dadas, indagar-se sobre a sua configuração, procurar encontrar quais relações elas constituem. A produção escrita em Matemática não deixa de ser uma forma de comunicação e, como tal, deve receber atenção especial por parte dos professores, uma vez que, frequentemente, essa é a única forma de diálogo existente entre professores estudantes.

Viola dos Santos (2007) defende que o conceito de erro nos remete a julgar um estudante pela falta do saber e não pelo que eles que já sabem. Nesse sentido o autor propõe o abandono da ideia de erros para adotar a maneira de lidar, valorizando os modos peculiares de os estudantes construírem seus conhecimentos, buscando legitimá-los não como certos ou errados, mas como diferentes, possibilitando com isso interpretar e validar todas as atividades matemáticas dos estudantes buscando compreender os significados produzidos no qual o professor possa intervir e interagir.

Dessa maneira, se a análise da produção escrita em Matemática for feita de modo continuo durante as aulas, possibilita ao professor observar a evolução dos estudantes, intervindo

quando necessário, buscando maneiras diferentes de se ensinar um determinado conceito, elaborando atividades com o objetivo de superar os erros dificuldades.

Metodologia

A presente pesquisa foi realizada segundo a metodologia de análise de produção escrita em Matemática, pois, segundo Kazemi e Franke

> O uso da produção escrita dos alunos tem um potencial de influenciar o discurso profissional sobre o ensino e a aprendizagem, engajar os professores em ciclo de experimentação e reflexão e mudar o foco dos professores de uma pedagogia geral para uma particularmente conectada a seus próprios alunos. (KAZEMI E FRANKE,p.204 2004).

O cenário de pesquisa teve como objetivo as investigações de produções escritas, de 2016, de 4 estudantes que cursavam entre o 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e que frequentavam acompanhamento escolar no contra turno e encontravam em situação de dificuldades na aprendizagem Matemática. Foram coletadas algumas questões das avaliações realizadas pelos estudantes nas escolas em que eles frequentavam, a fim de compreender e interpretar os mecanismos e as consequências do ensino de potenciação com números inteiros e a maneira como o docente tem apresentado o conteúdo, além de verificar as possíveis mudanças, no ensino desse conteúdo.

Inicialmente, houve a separação das avaliações[5] e a identificação dos conteúdos destacados; no caso das avaliações, o foco da pesquisa foi os conteúdos que abordavam potenciação com números inteiros. Na escolha das questões, procurou-se identificar as convergências apresentadas em comum nos enunciados. Em seguida, todas as respostas das questões foram digitalizadas e organizadas em sequências, para análise e exploração do material. Por fim, foi realizado o tratamento dos resultados. Nele foram descritas as semelhanças apresentadas nas avaliações, elaboradas pelas diferentes escolas, as produções escritas dos estudantes e a elaboração da síntese dos resultados apresentados.

A avaliação formal escrita foi organizada com questões diretas e com poucas questões que envolvessem interpretação, com situações que mostrassem que o estudante consegue aplicar e resolver expressões que envolvem potenciação e radiciação com números inteiros.

Resultados e análises

A presente pesquisa foi realizada segundo a metodologia de análise de produção escrita. Ao analisar uma produção escrita, é possível discorrer sobre as respostas dadas, indagar-se sobre a sua configuração, procurar encontrar quais relações elas constituem. Isso porque a produção escrita não deixa de ser uma forma de comunicação e, como tal, deve receber atenção especial por parte dos docentes, sendo esta, muitas vezes, a única forma de diálogo existente entre "professores e alunos" e uma rica fonte para entender os processos de ensino e aprendizagem, bem como os procedimentos e as estratégias utilizados para resolver problemas (BURIASCO, 2004).

As analises focaram nas hipóteses sobre o processo de construção dos conceitos de potenciação, buscando estratégias de intervenção que promovam a aprendizagem dos estudantes. Buscou-se identificar particularidades de cada questão e também possíveis relações entre as

[5] Avaliações escritas e aplicadas pelas escolas particulares.

informações apresentadas, com o objetivo de conhecer essa produção escrita em Matemática e o que apresentaram do assunto.

Para apresentar as questões selecionadas das avaliações, optou-se por apresentar e comentar as questões, em especial, os tipos de padrões; modo de abordarosconteúdos das avaliações; e exposição dos acertos e erros.

A primeira questão, do Estudante A (6° ano), teve o seguinte enunciado:

QUESTÃO 1
Calcule o valor das expressões numéricas

$$\boldsymbol{a)}\ \mathbf{5}.\sqrt{\mathbf{81}}-\mathbf{8^2}:\sqrt{\mathbf{16}} \qquad \boldsymbol{b)}\ \mathbf{2^4}+\left\{\mathbf{4}+\left[\sqrt{\mathbf{49}}+(\mathbf{3}.\mathbf{5^2})\right]-\mathbf{2}\right\}-\sqrt{\mathbf{25}}$$

O estudante fez a interpretação adequada das questões obtendo sucesso ao realizar a manipulação algébrica que o levasse ao resultado final da expressão, assim demonstra ter domínio sobre o conteúdo estudado. O professor ao analisar essas questões e identificar o sucesso do estudante ao resolvê-las, pode começar a trabalhar com questão do tipo situações problemas trabalhando com o estudante o conteúdo por diversos tipos de representação Matemática baseado no seu nível de conhecimento e assim ir avançando no processo de ensino e aprendizagem.

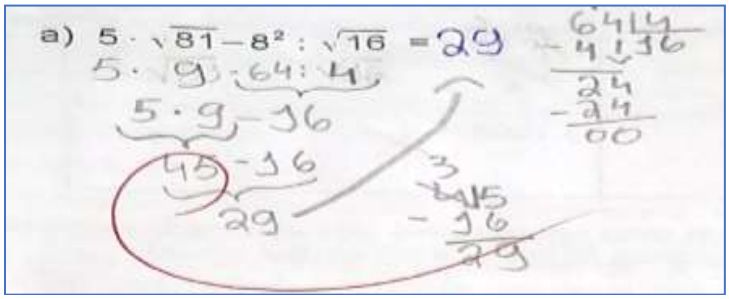


Figura 1 .Registro da resolução do Estudante A do 6º ano do Fundamental
Fonte: Dados da pesquisa

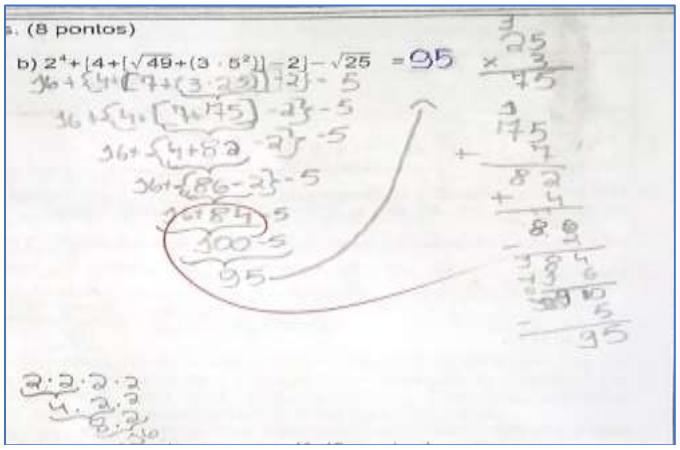


Figura 2 .Registro da resolução do Estudante A do 6º ano do Fundamental
Fonte: Dados da pesquisa

No segundo item a questão foi apresentada de forma direta, solicitando os cálculos dos valores das expressões numéricas. O estudante acertou, vê-se que nas resoluções que ele escreveu, apresentam conhecimentos das definições de potenciação e radiciação, as figuras (1 e 2) mostram, que o mesmo domina as propriedades especialmente o domínio envolvendo mais de uma operação (potência de produto ou de quociente, radiciação, adição e subtração).

A segunda questão, do Estudante B (7° ano), teve o seguinte enunciado:

QUESTÃO 2
Sabendo que $A = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3}$, calcule o valor numérico de A.

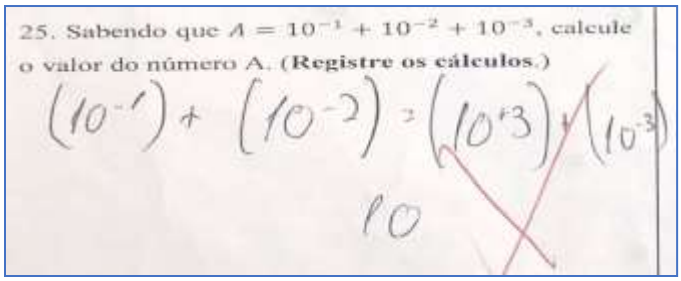


Figura 3 .Registro da resolução do Estudante B do 9º do Fundamental
Fonte: Dados da pesquisa

A questão foi abordada de modo direto, exigia do estudante conceitos de potenciação de mesma base (base dez) e potenciação com expoentes pertencentes ao conjunto dos números inteiros. Provavelmente o estudante identificou que a questão tratava de operação com potencias, mais ao resolver aplicou a propriedade "multiplicação de potencias de mesma base" não adequada, cometendo equívocos mesmo utilizando essa propriedade ao operar os expoentes, chegando a uma resposta inadequada. Percebe-se que faltou o domínio/conhecimento da propriedade de potência com expoente negativo e sua resolução.

A terceira questão, do Estudante D (9° ano), teve o seguinte enunciado:

QUESTÃO 6
Determine o valor de um produto, em reais, dado pela seguinte expressão: $\frac{8^2.4^6.2^{-7}}{2^{-1}.32^2}$

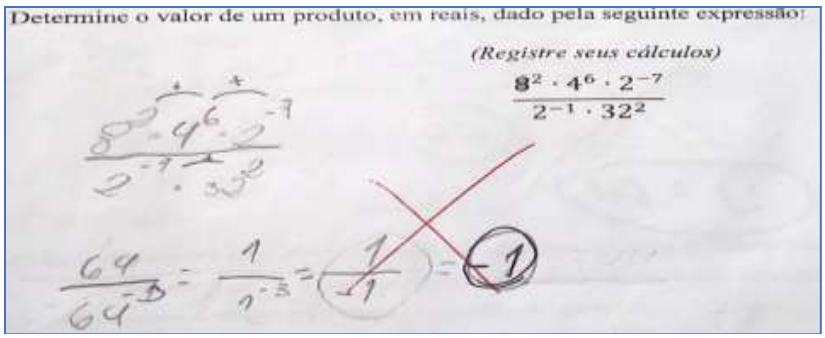


Figura 4, Registro da resolução do Estudante D do 8º ano do Fundamental
Fonte: Dados da pesquisa

A questão foi abordada de forma direta. Solicitando a determinação de um produto. Conforme resolução apresentada o estudante considera as bases maiores, opera os expoentes e multiplica o numerador da fração pelo expoente da potência, e no denominador procede do mesmo modo, resultando como potências o número 64, após ele divide ambos por 64 e eleva o denominador ao expoente -3, e opera a divisão. Observa-se que no resultado do denominador quando elevou-se a um expoente negativo, o resultado considerado é uma multiplicação por -1.

Com base nas análises feitas, que evidenciam informações tanto de dificuldades quanto de possibilidades, foi possível verificar que com a prática da produção escrita em Matemática como ferramenta o professor pode realizar intervenções que contribuem para o desenvolvimento da aprendizagem de seus estudantes. Nesse interím, entendemos que as avaliações podem nos revelar possíveis caminhos e estratégias que busquem responder e entender os processos de ensino e aprendizagem. A partir disso, acredita-se ser possível despertar no docente a curiosidade e a preocupação para repensar o proceso de ensino aprendizagem, buscando refletir sobre as atuais técnicas de ensino.

Considerações finais

Muitas informações podem ser obtidas a partir de uma análise de produção escrita em Matemática de uma avaliação de um estudante, assim a produção escrita em Matemática quando tomada como estratégia para a implementação da avaliação tem oportunizado entre muitos aspectos, e investigar como os professores e estudantes lidam com questões abertas de Matemática, evidenciando seus erros e seus acertos, suas maneiras de lidar e o papel que a avaliação reflete no contexto da sala de aula e as suas contribuições no desempenho de seus estudantes, nos fortalece a ideia de fazermos o uso dessa metodologia em sala de aula podendo assim conhecer os aspectos relacionados as atividades de Matemática dos estudantes , bem como nosso cotidiano e o processo de capacitação em relação as práticas pedagógicas a serem utilizadas em sala de aula.

Contudo não podemos afirmar que um estudante não sabe, pelo simples fato de sua avaliação não ter muitas informações a respeito de sua produção escrita em Matemática, somente podemos afirmar algo do que o estudante fez, e não do que deixou de fazer. Para isso a avaliação é para o professor um instrumento de informações a respeito das evoluções de seus estudantes diante de suas expectativas de se ensinar e aprender Matemática. É preciso compreender as maneiras de lidar de cada estudante discutindo estratégias que possam remediar as dificuldades apresentadas a partir de produções escritas de outros estudantes.

Quanto às questões analisadas, verificamos que os estudantes demonstram algum conhecimento Matemático até mesmo nos casos em que as questões foram resolvidas incorretamente. Em situações como estas cabe ao professor , no seu processo de mediação, auxiliar os estudantes para que estes tomem ciência dos seus erros e dos conhecimentos que já dominam, para que assim eles consigam se situar melhor em relação ao seu processo de aprendizagem.

Com isso devemos refletir e buscar entender cada vez mais as produções escritas dos nossos estudantes, pois uma produção pode ter diferentes interpretações e isso pode impactar nas

mudanças no modo da minha abordagem no processo de Educação Matemática. Para tal fechamos este estudo com algumas questões que possam ser continuadas em sala de aula como mais estudantes como por exemplo: Com a produção escrita em Matemática é possível fazer interferências nos saberes revelados pelos estudantes? Os erros e acertos são componentes do mesmo processo nas tomadas de intervenções dentro de sala de aula? Quais os impactos que a prática da investigação das produções escritas podem acarretar na formação docente? São reflexões importantes que ajudarão na melhor compreensão do tema.

Referências e bibliografia

Buriasco, R.L.C. de. *Análise da Produção Escrita: a busca do conhecimento escondido***.** In: XII ENDIPE- Encontro Nacional de Disática e Prática de Ensino, 2004, v.3, Curitiba. Anais... Curitiba: Champagnat, 2004. P.243-251.

Buriasco, R.L.C.de. *Análise da Produção Escrita: alguns apontamentos. Minicurso ministrado*. In: VIII Workshop de Verão em Matemática, 25-26 jan. 2016. Brasília, p. 30-31 (caderno de resumos).

Cirpiano, Emília. *Avaliação na Educação. Marcos Muniz Melo (Organizador). 2007.*

Fávero, M. H, PinaNeves, R. S. A pesquisa de intervenção psicopedagógica: evidências sobre o ensinar e aprender matemática. Linhas Críticas, vol. 18, n. 35, jan-abr, 2012, pp. 47-68. Universidade de Brasília. Brasilia, Brasil.

Kazemi,Elham, e Megan L. Franke. *Teacher Learning in Mathematics: Using Student Work to Promote Collective Inquiry*.Journal of Mathematics Teacher Education n.7, p. 203-235, 2004.

Luckesi, Cipriano Carlos. Avaliação da Aprendizagem Escolar: estudos e proposições. 10 ed. São Paulo: Cortez, 2000.

Viola dos Santos, J. R. *O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática.* 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2007.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Reflexos da prática avaliativa: uma proposta de avaliação formativa sobre a luz dos portfólios nas aulas de matemática

Paulo Vinícius Pereira de Lima[1]
paulovinicius49@gmail.com
Geraldo Eustáquio Moreira [2]
geust2007@gmail.com
Josinalva Estácio Menezes[3]
jomene@bol.com.br

Resumen

Esta pesquisa tem como proposta analisar de que maneira os portfólios podem contribuir para a aprendizagem de Matemática. Procurou-se identificar até que ponto a utilização desse instrumento em uma perspectiva de uma avaliação formativa tem contribuído para o avanço no processo de ensino aprendizagem e os seus reflexos no cenário educacional. As analises apontam que tal instrumento é uma ferramenta propulsora de aprendizagem, uma vez que a utilização dos portfólios como alternativa educacional, representa não somente um meio de se avaliar o estudante, mas, uma possibilidade de se refletir sobre sua prática bem como a aprendizagem, com espaços de organizar o que foi aprendido durante todo o processo refletindo no processo como um todo. Conclui-se que, ao se utilizar os portfólios, em especial nas aulas de Matemática, contribui para uma representação social de uma avaliação formativa capaz de romper barreiras de um ensino tradicional para um ensino transformador.

Palabras clave: Portfólio; instrumento; avaliação; ensino; transformador.

Introdução

Dentro da área da educação matemática, na contemporaneidade, tem se percebido um crescimento no que diz respeito aos debates que versem sobre a temática perspectivas de ações

[1]Mestrando em Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília – PPGE/FE-UnB.Linha de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática. Licenciado em Matemática.

[2]Doutor em Educação Matemática com Estágio Doutoral na Universidade do Minho/PT. Mestre em Educação. Licenciado em Matemática, Pedagogia e Ciências Naturais. Professor Adjunto da Universidade de Brasília – UnB. Pesquisador do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da UnB (Mestrado e Doutorado – Acadêmicos e Mestrado - Profissional).

[3]Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Mestre em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco. Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco. Professora aposentada do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. Professora tutora do Curso de Especialização em Metodologias do Ensino de Matemática pela UAB-UnB.

pedagógicas. Essas ações são orientadas pelas tendências pedagógicas que tem buscado de maneira geral, um ensino mais atrativo capaz de desenvolver capacidades e competências que não estão sendo atendidas, fazendo com que o docente, que antes era um mero transmissor de conhecimentos, passe a ter um novo papel com um leque de possibilidades pedagógicas que contemple o processo de aprendizagem.

Sobre esse aspecto (MANRIQUE; MARANHÃO; MOREIRA, 2016), considera que, quando falamos de tendências dentro do âmbito da Educação Matemática, estamos falando de formas de trabalho que expressam mudanças no contexto da educação Matemática, e que essas novas alternativas apontadas pelas tendências evidenciam novas práticas a serem utilizadas como ferramentas na busca de um

Analisando esse novo olhar sobre a elaboração de novas metodologias para o ensino de Matemática, a aplicação de jogos como recursos educativos tornou-se uma ferramenta essencial em prol da aprendizagem. Segundo (GUZMÁN, 1997), a finalidade dos jogos no cenário educacional não é exclusivamente para diversão, mas para propor desse momento assuntos que despertem o conhecimento capaz de gerar novos saberes, incentivar e propor que os próprios estudantes passem a ser autônomos em seus pensamentos.

Partindo dos pressupostos acima, esta pesquisa buscou compreender como a utilização dos portfólios pode contribuir para uma aprendizagem significativa em busca de uma avaliação formativa.

Reflexos da prática avaliativa: uma proposta de avaliação formativa

A avaliação educacional tem abrangido uma ampla proporção, no sentido de que cada vez mais docentes e estudantes repensem e orientem suas ações pedagógicas durante o seu processo de ensino e aprendizagem. De acordo com (MARTINS, M., & ALMEIDA, 2002), a avaliação deve também ser vista como uma prática de levantamento de dados, que se permeia por meio de observações, diálogos, situações problemas, relatos e experiências escritas, portfólios, bem como, de avaliações escritas de diferentes tipos. Desta maneira, ela atribui-se como função permanente presente durante todo o processo de se ensinar e aprender.

(HADJI, 1988), enfatiza que a avaliação deve ser prognóstica, formativa e cumulativa. De acordo com o autor, a avaliação prognóstica é aquela que antecede a prática de formação, também conhecida como diagnóstica ela tem o papel de propiciar uma reciprocidade entre o estudante e o docente. Já a avaliação cumulativa inicia-se depois da ação, e tem como papel averiguar se os objetivos planejados durante a formação efetivou-se. É denominada formativa pois sua finalidade é colaborar para uma boa ação da prática de ensinar. De modo consequente, é continua pois levanta dados indispensáveis a sistematização da ação de ensino aprendizagem.

Tendo clara essa concepção sobre avaliação docente, pressupõe que a ação avaliativa deve ser constante em todo o processo de ensino aprendizagem, não se esquecendo para que serve tal ação, visto que, a avaliação tem a incumbência de: a) fazer o levantamento das competências e desenvolvimento das capacidades “mensurar os conhecimentos alcançados”, o que pode ser feito através de provas de rendimento. b) diagnosticar, situar o estudante no progresso de ensino aprendizagem, dando diagnósticos sobre as suas dificuldades apresentadas ao logo do processo e propondo ações que superem esses obstáculos. c) prognostica, proporcionando ao estudante conduzir bem como o instruir na sua escolha profissional.

A avaliação formativa é imprescindível pois: evidencia ao docente os obstáculos e lacunas dos estudantes por meio de um levantamento; oportuniza um ajuste didático; por intermédio de um planejamento com uniformidade em uma metodologia com foco no estudante;

dar segurança ao estudante de modo que este esteja confortável na sua ação de aprendizagem; e torna mais fácil o processo de aprendizagem, possibilitando complementação e aperfeiçoamento.

A avaliação tem como função, colaborar em prol do aperfeiçoamento do ensino, isto é, cooperar em incumbência de desenvolver a aprendizagem. O diálogo entre docente e estudante a respeito de seus erros e acertos colabora para a percepção do que precisa ser melhorado. Tal comunicação fornece, ao estudante um maior envolvimento com as variadas formas de se avaliar, tornando-se uma familiaridade, de modo que cada vez mais estudante consiga caminhar juntamente com o docente na busca do conhecimento.

Assim sendo, a ação do ensino é uma ação formativa, seja qual for a avaliação dos estudantes,esta será também um respaldo avaliativo que resume as práticas desenvolvidas pelo docente. Nesse aspecto, não haverá significado uma avaliação de um estudante, onde o docente não aprenda.

Uma ferramenta é um instrumento de trabalho que torne mais fácil o processo de ensino aprendizagem. Para verificar a aprendizagem de estudantes, muitas vezes, utilizam-se assuntos trabalhados em repetitivos exercícios ou situações problemas com a qual o estudante será confrontado. Observar como o estudante analisa, observa e interpreta determinadas situações dentro do ambiente escolar é o que admitimos como avaliação.

A utilização do portifólio como ferramenta em prol de uma avaliação formativa

No decorre de longos anos, a ação de se avaliar constituiu-se como uma prática de autoritarismo, uma vez que era imposto aos estudantes uma avaliação somatória que muitas vezes, se restringia a classificação em notas, que tinha como base a repetição de exercícios, que eram replicados em testes. Nos dias atuais, novas metodologias têm surgido no intuito de modificar tal cenário educacional, buscando a valorização do estudante bem como sua subjetividade, preocupando-se com o processo e não somente com suas etapas.

A partir disso, uma série de mudanças com enfoque na busca de um ensino aprendizagem significativo tem ocorrido, o que tem originado diversas pesquisas na área avaliativa, em especial na Educação Matemática. Podemos citar (BURIASCO; MASSI, 1999), (HOFFMANN, 2012),(ALBUQUERQUE; GONTIJO, 2012),(JUNIOR; BURIASCO, 2012),(SANTOS; GONTIJO, 2015), algumas pesquisas emergem da necessidade de inovar o cenário educacional propondo novas práticas que tenham como caráter uma ação social que englobe todo o ambiente educacional pais, estudantes e docentes.

Uma proposta de ação que pode para o alcance de novos índices educacionais e a melhoria do desempenho dos estudantes seria abrir mão de uma prática avaliativa que tenha como foco o mensurar ou classificar, mas que de importância ao produzir em conjunto, docente e estudante caminhando lado a lado em um processo de construção e reconstrução. Nessa perspectiva, a definição de avaliação formativa nos requer um novo olhar que valorize todos os processos importantes na prática de se ensinar e aprender, como a autonomia entre docente e estudantes na constituição de saberes. Dessa maneira, perde-se o privilégio proposto por uma avaliação somativa tradicional: a incumbência de um critério de valor a sabedoria do estudante. Mediante orientação constante e diversificada, por meio da avaliação formativa, intenciona-se valorizar o desenvolvimento do conhecimento do estudante em sua integralidade, propondo também, ao docente o aperfeiçoar de sua ação pedagogia na busca de novas estratégias de ensino geradoras de novas aprendizagens (BOAS, 2004).

(ALARCÃO, 2010), enfatiza que os portfólios é um conjunto coerente de documentos planejados e selecionados, claramente discursado e metodicamente organizado e contextualizado

no seu período, de modo a revelar os caminhos percorridos dos estudantes. Nesse contexto, a utilização dos portfólios como alternativa educacional, representa não somente um meio de se avaliar o estudante, mas, uma possibilidade de se refletir sobre sua prática bem como a aprendizagem, com espaços de organizar o que foi aprendido durante todo o processo refletindo no processo como um todo. O portfólio, dentro de um processo de aprender extremamente rico e contextualizado, privilegia o raciocínio multifacetado, que revela o descoberto, percorre toda a expressividade visual e intelectiva. Portanto, não se avalia a o conhecimento nem ao menos os seus resultados como um todo, sendo uma ferramenta de avaliação em prol de uma aprendizagem que tenha como pressuposto partir do dentro para a tomada de consciência do todo, tornando-se um meio utilizado para apontar como o sujeito adquiri conhecimento.

A sistematização de um portfólio passa a ter extrema importância para que o elabora. Não haveria significado em organizar uma série de trabalhos de estudantes apenas como recurso burocrático. Sua utilização precisa ser pautada em um planejamento que abranja um grupo de conhecimentos que apresente progressos, evoluções de ideias, novas maneiras de lidar, relacionados ao desenvolvimento progressivo de cada estudante. Sua relevância encontra-se de modo preciso em consistir como um instrumento de conhecimento que possibilita a reflexão sobre o processo, tal como o desenvolvimento de autonomia, competências e práticas sobre o pensar crítico. Trata-se de oficinas onde os estudantes constroem sentidos a partir de suas experiências vividas em sala de aula, compreendendo as atividades desenvolvidas que os estudantes em processo de aprendizagem têm sintetizado provocada reflexão, denotado um breve respaldo do seu desempenho e crescimento em um delimitado período.

Caminho metodológico

Colaboraram com esta pesquisa 200 (duzentos) estudantes, 110 (cento e dez) do 8º ano e 90 (noventa) do 9º ano, ambos do Fundamental II, de uma escola pública no Distrito Federal. Os portfólios foram construídos individualmente com encontros uma vez por semana realizados nas aulas de Parte diversificada-PD, ao longo de um semestre letivo.

O portfólio foi construído em quatro etapas: 1) Apresentação da concepção de portfólio, com destaque sobre os jogos matemáticos que serão trabalhados ao longo das oficinas matemáticas realizadas a cada encontro. 2) Trajetória escolar de cada estudante, procurando descrever os seguintes aspectos " quem sou eu, qual a minha afinidade com a matemática, qual meu desempenho na disciplina e o que eu preciso fazer para ter um bom desenvolvimento. 3) Aprendendo com as oficinas: atividades desenvolvidas em grupo e mediadas pelo professor, que passava a pesquisa na aula para os estudantes e apresentava com oficinas matemáticas na aula seguinte. 4) Entrega e devolutiva semanal dos portfólios: os estudantes recebiam feedbacks do que deveria ser feito para a melhoria do trabalho bem como o que ficou bom.

Como instrumento de coleta de dados, utilizou-se a observação e um questionário contendo dez questões. Dessa forma, foi aplicado um questionário como coleta de dados, que compreendido por (GIL, 2010), como uma ferramenta de pesquisa constituída por perguntas dissertativas "[...] dispondo como finalidade o pensamento e os pontos de vistas, opiniões, compreensão, preferências, esperanças, circunstâncias etc".

O questionário, mostrado a seguir, foi elaborado com vistas a coletar as seguintes informações a respeito dos respondentes: quais os benefícios para a sua aprendizagem; a ocorrência do aspecto motivador do portfólio; um avaliação da metodologia de uso do protfólio; as opiniões sobre as atividades (jogos) escolhidos pelo pesquisador e vivenciados por eles e; as sugestões de melhoria do processo para as próximas edições.

Os três objetivos norteadores dessa pesquisa são : De que maneira os portfólios podem contribuir para a aprendizagem de estudantes? Como se dá o olhar sobre as formas avaliativas do processo ensino aprendizagem com a utilização do portfólio? O portfólio possibilita ao estudante um novo olhar sobre a aprendizagem de Matemática? Nortearam a organização desses dados com base em três perspectivas: os olhares dos estudantes frente aos benefícios da avaliação formativa presentes no portfólio e o diálogo entre docente e estudante durante o processo de construção do portfólio.

As investigações neste estudo apontam para os seguintes caminhos a partir da visão dos estudantes frente a sua utilização como instrumento de aprendizagem: simplicidade para compreensão dos conteúdos, independência, confiança, autonomia e comportamento crítico reflexivo.

Resultados: a utilização do portifólio como instrumento avaliativo transformador

Passa-se agora à análise dos dados. Optou-se por organizar as respostas a cada questão transcritas em um quadro, e analisar o conjunto das respostas.

Quanto à utilização do portfólio em uma perspectiva de avaliação formativa, foram pautados os seguintes aspectos: a importância do erro como oportunidade de aprendizagem, os feedbacks como diálogo entre estudantes e professores e a utilização de aulas mais dinâmicas com jogos numa visão de avaliação transformadora. Alguns critérios de convergências foram apontados como complicador na construção das atividades propostas e no trabalho em equipe e seu impacto como descoberta, e a sua utilização como instrumento motivador em um cenário educacional tradicionalista.

Em se tratando do processo de construção de saberes, a utilização do portfólio oportuniza o entendimento de conteúdos e valores necessários para que os estudantes do Fundamental II possam quebrar essa ruptura entre a aversão a disciplina de Matemática de modo a se sentir em um ambiente acolhedor, bem como a importância de incentivar cada vez mais o pensar sobre a pesquisa motivando nossos estudantes a ter o olhar de curiosidade não somente com o portfólio, mas sobre o mundo conforme pode ser observados pelos depoimentos dos estudantes na Tabela 2.

Tabela 2: Percepção dos estudantes sobre as contribuições do portfólio para a sua aprendizagem.

VOCÊ ACREDITA QUE A UTILIZAÇÃO DO PORTFÓLIO NAS AULAS DE PD, TROUXE BENEFÍCIOS PARA A SUA APRENDIZAGEM?
Mais ou menos, não acho que eu aprendi muita coisa, mas ainda assim acho uma boa ideia utilizar o portfólio. (E12)
Sim, é muito importante ter organização nos trabalhos escolares, todavia tem muitos custos pelo fato de muitos professores aderirem essa maneira de fazer trabalhos. (E7).
Sim, pois aprendi sobre conheci/aprendi sobre assuntos não tão falados ou conhecidos. (E2).
Sim, ajudou a interagir com outros alunos me motivou a ter curiosidade para pesquisar mais sobre os jogos matemáticos. (E3).
Sim, pois era uma aula diferente onde nos interagimos bastante e na minha opinião trouxe bastante benefícios. (E4).

Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes em sua maioria salientam a importância da utilização do portfólio nas aulas de Parte Diversificada o que nota-se uma mudança no papel do estudante no processo de ensino aprendizagem. Nos depoimentos pode-se perceber a importância da pesquisa no cenário educativo bem como a interação dos estudantes dentro desse ambiente. Nessa perspectiva observa-se uma autonomia na construção de suas atividades, bem como a manifestação de suas

opiniões, buscando aquilo que melhor representa para a elaboração de sua aprendizagem, viabilizando o caminho de autonomia e liberdade na mesma estrada da sabedoria.

Em consonância com os olhares que os estudantes tinham a respeito da utilização do portifólio, outro elemento destaque foi a percepção dos mesmos sobre os conteúdos matemáticos abordados nas temáticas da oficinas em cada encontro, dando enfa-se que é possível aprender de forma lúdica, para além da assimilação de conteúdos, expandindo olhares mais apurados de forma a perceber o conhecimento matemático que nos rodeia. (Tabela 3).

Tabela 3: Percepção dos estudantes sobre a prática do portfólio e seus impactos na disciplina de Matemática

A UTILIZAÇÃO DO PORTFÓLIO TROUXE ALGUM BENEFÍCIO OU CONTRIBUIÇÃO PARA O SEU APRENDIZADO NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA?
Sim, ajudou bastante na hora de raciocinar nos jogos como o da Mancala e aprender alguns fatos sobre os ângulos. (E12).
Sim, principalmente em ângulos que eu tinha muita dificuldade. (E9).
Sim, foi tipo uma aula de reforço, me ajudou. (E3).
Sim, por exemplo a medida da área nas peças do Tangram. (E5).
Trouxe muito aprendizado, porque, eu aprendi a medir diversos triângulos entre outros. (E6).
Sim, pois conhecemos coisas novas sobre matemática e reforçamos o que estamos aprendendo. (E18).

Fonte: Dados da pesquisa

Apesar de, a autonomia e o estimulo a criatividade estar presente durante toda a construção do portfólio, as influencias dos jogos trabalhados a cada encontro foram norteadores para uma aprendizagem marcante, visto que os estudantes em sua maioria apresentava um certo grau de dificuldade na disciplina de Matemática . É curioso, nos registros dos estudantes, a veracidade em dizer que tal prática reforçou conteúdos em que diversos momentos ele teve muita dificuldade.

Os reflexos das práticas construídas durante a confecção do portfólio, foram essencial para que alguns estudantes realizassem uma prática parecida na disciplina de Matemática, estimulando essa curiosidade discentes em buscar conceitos não entendidos em sala, em buscar novas oportunidades de se aprender por meio da pesquisa, o que traz uma ruptura para além do ensino tradicional, onde cada vez mais professores e estudantes ressignificam suas práticas em busca de instrumentos que favoreça o seu processo de aprendizagem.

Tabela 4: Os impactos do portfólio sobre a disciplina de Matemática

O PORTFÓLIO LHE MOTIVOU A ESTUDAR MATEMÁTICA?
Sim me dando mais vontade de pesquisar sobre o que o professor de matemática passava. (E8).
Tive interesse de aprender mais e a descobri que a matemática também não é tão chata. (E3).
Sim, porque cada vez estava ficando muito mais legal a matéria, com muitos jogos e aprendizados. (E6).
Motivou muito, tinha algumas coisas que eu não tinha aprendido e entendi no portfólio. (EP16).

Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes ressaltam a importância que a prática avaliativa com o portfólio lhe possibilitou uma visão mais apurada sobre a disciplina de Matemática, fazendo com que utilizassem a mesma prática nas aulas de Matemática. Todas essas colocações feitas pelos estudantes demonstram o dimensionamento bem como o impacto que o portfólio possibilita em prol de inovar as formas tradicionais de se ensinar e aprender.

O diálogo se faz presente durante todo o processo de aprendizagem, onde estudantes e professores compartilham de seus conhecimentos em busca de um saber mais significativo, que interfira na subjetividade de cada estudante. Quanto aos feedbacks deixados pelo professor em cada portifólio, as dificuldades vistas como incorreções foram percebidas como oportunidade de melhoria do trabalho. (Tabela 5). Procederam-se os seguintes apontamentos " enxergar meus erros", "aprendi a ter mais capricho e organização" e "conversas de como melhorar". A troca de diálogo entre estudantes e professor durante todo o processo avaliativo é marcada como um momento de suma importância nesse processo. Os estudantes relatam que é nessa troca de informações que há uma troca de conhecimentos que transformam o espaço de aprendizagem, oportunizando sobre tudo a autonomia e criatividade.

Tabela 5: Os feedbacks como diálogo entre professor e estudantes.

OS FEEDBACKS (MENSAGENS DEIXADAS NO PORTFÓLIO) PELO PROFESSOR, AJUDARAM A MELHORAR SEU DESEMPENHO? COMO?
Sim, porque era uma crítica re-construtiva e estava me ajudando mais. (E19).
Sim, pois faziam eu enxergar os meus erros cometidos e não errar mais. (E17).
Sim, porque o professor nem sempre tem tempo para todos os alunos com os feedbacks podíamos ter uma noção do que o professor quer passar. (E11).
Sim, mostrando o que estar bom e o que pode melhorar. (E13).
Sim, é sempre bom ter uma nova perspectiva do que fazer e como deve ser feito. (E14).

Fonte: Dados da pesquisa

Dessarte, os estudantes salientam um cenário educacional extremamente acolhedor, com clareza nos parâmetros avaliativos, de maneira estimatória e não punitiva, viabilizando um novo olhar sobre como os erros podem ser encarados no processo de aprendizagem, visto antes como uma forma meramente punitiva e agora como uma possibilidade de reconstrução do aprendizado.

A busca constante de novas práticas de ensino, que rompa barreiras de um ensino tradicional, sobretudo a respeito do ensino de Matemática, te, sido fortemente discutido no contexto contemporâneo. Buscar cada vez mais a utilização de instrumentos que priorizem um ensino mais significativo, seja ele por meio de uma atividade lúdica tem sido um fator de grande contribuição, dialogar com os estudantes em relação a como gostariam de aprender também é fundamental.

Tabela 6: Percepção de como gostaria de aprender Matemática.

COMO VOCÊ GOSTARIA DE APRENDER MATEMÁTICA NA ESCOLA?
Com jogos, vídeos, competições acho que seria bem legal. (E8).
De formas mais descontraídas, fica mais fácil e divertido de aprender. (E12).
Eu gostaria que as aulas fossem legais que nos usássemos os números com muitas brincadeiras, sem livros e explicações chatas. (E6).
Na mesma forma que em PD, com jogos e atividades em grupo. (E4).

Fonte: Dados da pesquisa

Os posicionamentos dos estudantes apontam para a necessidade de uma aula mais dinâmica e atrativa que rompa com a postura tradicional, fazendo com que cada vez mais nossos estudantes se tornem sujeitos críticos e ativos nesse processo de ensino aprendizagem de modo a contribuir para um ensino com equidade.

A partir da prática vivenciada pelos estudantes desta pesquisa, percebe-se que novos trajetos são evidenciados de formar a romper com as formas de agir e pensar sobre o ensino. O posicionamento que fica registrado dos estudantes é o desenvolvimento do olhar crítico e

reflexivo sobre o seu desenvolvimento de aprendizagem, algo que muitas vezes não é proporcionado a ele nesse cenário educacional. É nessa reflexão e criticidade que se permeia a ação do estudante enquanto sujeito ativo o que acarreta mudanças no seu modo de pensar e agir, não somente na escola como também na sociedade.

Por todos esses aspectos, o portfólio como instrumento avaliativo em busca de um processo formativo, desempenha como componente moderador de uma educação construtiva no momento que os estudantes se reconhecem responsáveis de seu próprio saber, com liberdade para pesquisar, reformular seus conceitos e argumentar de forma crítica e reflexiva, bem como possibilitando a autonomia para reconstrução de saberes.

Considerações finais

Tendo como reflexão os caminhos apresentados nesta pesquisa, está em destaque o processo de aprendizagem experienciado pelos estudantes durante a confecção dos portfólios, contribuindo para uma representação social de tal prática avaliativa no cenário educacional, retratando fatores que o viabilizam como um instrumento capaz de romper barreiras de um ensino tradicional para um ensino transformador. Nesse campo educacional onde os estudantes interagem com os demais envolvidos, pode-se perceber uma maior contribuição para a sua atuação perante a sociedade, uma vez que a integração e reflexividade são extremam entes necessários para a interpretação dos fenômenos sociais que ocorrem na sociedade contemporânea.

As práticas apresentadas pelos estudantes enfatizam um ensino que por diversos momentos tem sido regido por mensurações de notas, um cenário que viabiliza o fazer, e não o construir. Nessa visão representam a prática do portfólio como um instrumento transformador que contribui para uma aprendizagem autônoma, emancipadora, concentrada, de discernimento, assim favorece fatores para uma construção de saberes.

Vale ressaltar também que, numa perspectiva de avaliação formativa o portfólio trouxe grandes benefícios para o processo de ensino aprendizagem dos estudantes, bem como para o reflexo da prática do professor, que também aprende enquanto ensina.

Propõe-se, que outras pesquisas assim como esta, sejam desenvolvidas no cenário educacional, de modo a colaborar para fatos significativos que contribuam para transformações necessárias no cenário educacional, seja ela na reconstrução de currículos mais integralizados, seja no investimento da formação docente frete ao uso de novos instrumentos avaliativos no ensino, de modo a romper barreiras construídas ao longo de anos a respeito da disciplina de Matemática, considerando as novas possibilidades de se aprender e avaliar.

Referências e bibliografia

ALARCÃO, I. **Professores Reflexivos em uma Escola Reflexiva**. 2ª ed. São Paulo: Cortez, 2010 (Coleção questões da Nossa Época: 103).

ALBUQUERQUE, L. C. de; Gontijo, C. **Avaliação da Aprendizagem: concepções e práticas do professor de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.**165f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade de Brasília, UnB,2012.

BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em Matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GUZMÁN, M. DE. **Aventuras matemáticas**. 04. ed. Barcelona: Piramide, 1997..

HADJI, C. (1988). **A avaliação, regras do jogo – Das intenções aos instrumentos**. Porto: Porto Editora.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover.**2 ed. Porto Alegre: editora Mediação, 2012.

JUNIOR, O. P.; Buriasco, R. L. C. DE. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em matemática**. 2012. Dissertação de mestrado. Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2012.

MANRIQUE, A. L.; Maranhão, M. C. S. A.; Moreira, G. E. **Desafios da educação matemática inclusiva: práticas**. Vol. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

MARTINS, M., & Almeida, C. (2002). **Implementação de portfolios com alunos do 2º ciclo: uma experiência realizada no estágio pedagógico de matemática.** In **A**ctas do ProfMat2002 (CD-ROM). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

SANTOS, V. S. dos*;* Gontijo, C. H. **Percepções de docentes de matemática de ensino médio em relação ao processo de avaliação da aprendizagem.** 172f**.** Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade de Brasília, UnB,2015.

VILLAS BOAS, B.M.F. **Portfólio, avaliação e trabalho pedagógico.** Campinas, SP: Papirus, 2004.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enfoques en evaluación matemática a nivel escolar

Myrian Luz **Ricaldi** Echevarria
Universidad Femenina del Sagrado Corazón
Perú
myrianricaldieb@unife.pe

Resumen

Planteo una revisión sobre las perspectivas teóricas y principales enfoques aceptados por la comunidad internacional desde los años noventa hasta la actualidad en relación a la evaluación del aprendizaje de la matemática en contextos escolares. Se caracteriza la perspectiva de la evaluación como práctica escolar reflexiva, como competencia para aprender y se prioriza la necesidad de establecer contratos de aprendizaje. El tema propuesto responde a los cambios en los fines de la educación y a los nuevos desafíos para la enseñanza y el aprendizaje. En este escenario la evaluación de la matemática en contextos escolares es un aspecto sensible que todavía sigue en discusión y donde el establecimiento de modelos corresponde a una visión temporal de la práctica evaluativa.

Palabras clave: evaluación, medición, desempeño, competencia, reflexión

Introducción

El avance informático de nuestro tiempo, los cambios en todas las áreas del conocimiento así como la gran cantidad de información y la facilidad de su acceso, hacen que me pregunte si nuestros sistemas de evaluación, los instrumentos que usamos y los ítems que planteamos se están ajustando al nuevo tipo de estudiante que tenemos y si éstos realmente evalúan y estimulan el desarrollo de habilidades requeridas para esta época. Los cambios deberían resultar como consecuencia de profundas transformaciones en el tipo de actividades que se proponen al estudiante en el aula; el trabajo metodológico debe matizar diferentes estrategias que no sólo faciliten el trabajo del estudiante sino que, estimulen y actúen sobre la zona de desarrollo próximo y lo lleven a buscar soluciones creativas y lógicas usando su intuición y los conocimientos previos, también es importante transmitir implícitamente el carácter holístico y aplicativo del conocimiento matemático. La mayoría de profesores nos preocupamos por buscar nuevas formas de enseñar pero no nuevas formas de evaluar, aunque el método de enseñanza en ocasiones es novedoso, el método de evaluación es tradicional, con énfasis solo en la memoria y con poca valoración en la auto construcción del conocimiento, más bien el foco de atención es la repetición y no aprendizaje significativo. Por lo dicho anteriormente considero que el trinomio

enseñanza, aprendizaje y evaluación están íntimamente relacionados, los cambios innovadores en uno deberían traer como consecuencia natural cambios también en los otros. La evaluación de las habilidades básicas de los estudiantes, juega un rol esencial en el éxito de toda propuesta educativa. Por tanto, parece necesario analizar los diversos enfoques y teorías que sustentan determinadas prácticas evaluativas en cuanto a su evolución, puntos de encuentro y diferencias que nos permitan reconstruir una perspectiva más integral de la evaluación del aprendizaje en matemática. Al mismo tiempo, se considera importante el entendimiento conceptual de la evaluación ya que esta concepción se verá reflejada en nuestra práctica educativa. Por lo anterior, se propone sistematizar esta discusión organizándola alrededor de las siguientes perspectivas:

1. La evaluación tradicional
2. La evaluación como etapa de un proceso de diseño instruccional
3. La evaluación del desempeño
4. La evaluación como sistema de interrelaciones más allá de la medición
5. La evaluación como retroalimentación
6. La evaluación basada en competencias
7. La evaluación como práctica escolar reflexiva

Al mismo tiempo, se debe precisar que los enfoques obedecen a propuestas plasmadas en documentos curriculares y la premisa que el cambio en la acción didáctica es la evolución de la concepción de la evaluación, y no parece posible un progreso en la docencia si no hay un profundo cambio y desarrollo de ésta idea (Cáceres, 2010).

La evaluación tradicional

El proceso de evaluar es una de las formas de dar crédito sobre el conocimiento o destrezas que posee una persona frente a la demanda de brindar información o resolver una situación problemática. Bajo este enfoque el trinomio: objetivos de aprendizaje- examen- calificación es la fórmula que sustenta los procesos de formación. Es decir, la tendencia es cuantificar el saber, es una visión reduccionista de la evaluación del aprendizaje. La evaluación está centrada en el conocimiento, incluso me parece que la evaluación se asocia a la comprensión en matemática entendida como respuesta a preguntas sobre el conocimiento matemático como mera aplicación de algoritmos matemáticos. Esta visión controla el conocimiento de los estudiantes a través de sus logros, esto implica pensar que no hay otras influencias sobre lo que se dice o hace, más que lo que muestra en un examen. Esta perspectiva aún subsiste en el nivel escolar del área de matemática y corresponde a una visión reduccionista de la evaluación. La evaluación tradicional es una medida de la adquisición del conocimiento de los estudiantes, es calificadora y finalista; el alumno recuerda y reproduce los contenidos y es el examen el instrumento fundamental de evaluación. Estudios como los de Carretero, García et al (2016) corroboran este enfoque.

La evaluación como etapa de un proceso de diseño instruccional

Varios estudios revelan prácticas rígidas y focalizadas en únicos formatos de evaluación así Moreno (2009), indica que, no obstante, se disponga hoy día de enfoques de enseñanza aprendizaje más amplios e integrales, la evaluación se sigue manifestando en la práctica como algo rígido, centrada en exámenes escritos y restringida a los resultados de los alumnos. Es decir, los profesores siguen empleando la evaluación en las aulas como mecanismo de control de comportamientos, entonces, es indudable que la evaluación aún es ejercida con propósitos más

administrativos que pedagógicos y didácticos. Otras investigaciones reafirman esta perspectiva, tal es el caso de Corica y Otero (2009) quiénes encuentran coincidencias con Moreno (2009), para estas autoras la idea de la evaluación educativa aún se sigue considerando sinónimo de examen, donde por examen ha de entenderse un instrumento de medición de aprendizajes hacia el final del proceso de enseñanza aprendizaje y con énfasis en el tipo de tareas trabajadas en clases. Esto transgrede su carácter dinámico-continuo y complejo para hacerlo algo estático, simple y hasta subjetivo. Para confirmar la evaluación como etapa de un diseño instruccional los estudios enfatizan su carácter estático, es decir, establecido en determinados momentos, por ejemplo, al inicio, en algún momento del proceso o al final. Parece que esta visión se debe complementar con la respuesta a las preguntas ¿qué se evalúa? ¿Qué significa evaluar más allá de comprender? ¿Cómo evaluar en consonancia con nuestros propósitos educativos? Otras perspectivas resaltan el carácter selectivo de la evaluación, tanto por el reconocimiento de logros como por la identificación de debilidades. Así lo revelan Assis y Espasandin (2009, p. 203) para quiénes la evaluación de los estudiantes es una especie de escenario que pone de manifiesto el aprendizaje y las carencias en las formas y fines por las que se lleva a cabo una evaluación. En esta misma línea Runco (2003) menciona que la evaluación es un proceso selectivo y crítico en el que las ideas originales, creativas y potencialmente útiles deben reconocerse y preferirse por encima de aquellas repetitivas, irrelevantes e inapropiadas. Esto deja ver un carácter más pedagógico y didáctico de la evaluación, es decir, se le confina la cualidad de ser algo dinámico-continuo y complejo, que deviene de una intencionalidad y fines específicos, a saber, el disponer de información confiable y relevante para orientar y retroalimentar el proceso educativo mismo. Asimismo, Hadji (2001), citado por Assis y Espasandin (2009), resalta el carácter pedagógico de la evaluación como una práctica al servicio del aprendizaje, cuando debate sobre la importancia de nuevas formas para evaluar, pues los profesores se han apegado a la prueba como un único modelo de evaluación que muestra lo que memorizan los estudiantes o bien lo que no saben; no evalúa la evolución de sus aprendizajes ni las directrices de estudio. Creo que la evaluación debe apoyar el aprendizaje de unas matemáticas relevantes y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los propios estudiantes.

La evaluación del desempeño

La evaluación del desempeño es el tipo de evaluación que se ejerce en el modelo educativo basado en competencias. Es la valoración de las acciones y productos que realiza el estudiante durante el proceso de aprendizaje, la cual permite retroalimentar su aprendizaje y validar el desarrollo de sus competencias. En esta perspectiva los juicios se construyen bilateralmente (profesor-alumno/ entre alumnos) y se vinculan con el contexto. Los resultados son para el estudiante piezas de información más relevantes que una calificación. Además, el conocimiento no solo es valioso, sino también los procesos y la vinculación con el entorno. Por lo anterior, se hace imprescindible la aplicación de instrumentos de evaluación que busquen recolectar información para interpretar el proceso, tales como: las preguntas de reflexión, la observación de las actividades realizadas por los estudiantes, los registros anecdóticos, los diarios de clase, la elaboración de portafolios y uso de rúbricas. Algunos estudios como el de Hancock (2007) concluyen que la evaluación del desempeño involucra la observación, el seguimiento y la medición de conductas en el momento en el que se encuentran efectuando alguna acción relacionada con el proceso de aprendizaje. Tal enfoque espera que el estudiante demuestre la adquisición de conocimientos y habilidades en matemática, los productos que se generen serán las evidencias que permiten inferir el nivel de las competencias logradas al momento de la

evaluación. Es este contexto, es necesario precisar que la evaluación del desempeño es diferente a la evaluación de competencias, debido a que mientras la evaluación del desempeño valora la demostración de competencias en el estudiante durante el proceso de aprendizaje; la evaluación de competencias evalúa el perfil de egreso y el currículo, es decir, la pertinencia de las competencias que se plantean promover en el alumno. Por otro lado, en relación a la calificación numérica esta es complementaria a la evaluación de desempeño, pues es una evaluación cualitativa de procesos y de retroalimentación profunda.

La evaluación como sistema de interrelaciones más allá de la medición

El desafío actual es crear sistemas escolares en que los profesores y los directivos se organicen para asegurar que todos los estudiantes progresen en sus aprendizajes. La medición y la evaluación educacional constituyen procesos claves vinculados al proceso de enseñanza-aprendizaje y representan herramientas fundamentales para la toma de decisiones al interior de una institución educativa. A través de estos procesos es posible conocer el grado de logro de los objetivos de aprendizaje establecidos y la eficacia de las acciones realizadas. En este sentido, la evaluación como sistema de interrelaciones busca preparar a los docentes, dentro de un sistema institucional, para desarrollar instrumentos de medición válidos, confiables, relevantes y pertinentes, y para utilizar adecuadamente los resultados de las mediciones para promover el aprendizaje de los estudiantes y evaluar la efectividad de las acciones pedagógicas implementadas. La evaluación está condicionada institucionalmente, en cuanto es un proceso subjetivo, que se realiza de acuerdo con las normas creadas por una comunidad, y responde a políticas exigidas por la institución escolar. Por tal razón, como lo plantea García (2003, p: 10), "sus resultados no son objetivos, son procesos construidos, afectados por marcos axiológicos institucionales y sociales". En este sentido, Romberg (1989) reconoce que la enseñanza de las matemáticas ha empezado a cambiar, pero que aún los procedimientos de valoración son obsoletos, ya que estos requieren otra visión del conocimiento, del aprendizaje y de la enseñanza. Esto apoya la idea de que la evaluación en matemática responde a prácticas institucionales que deben ir más allá de la medición.

La evaluación como retroalimentación

Bajo esta perspectiva la evaluación debe dar la información necesaria y pertinente para retroalimentar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este escenario la evaluación en matemática no solo contribuye al desarrollo de conocimiento matemático, alejado de todo contexto real; sino que contribuye a la formación matemática con carácter exploratorio, social y analítico. La idea fundamental es que aprender y comprender matemática, no es incorporar conocimientos y mostrar destrezas y debilidades o errores, sino reconstruir y rehacer prácticas matemáticas. En esta misma línea de pensamiento, actualmente, se están dando cambios en las pruebas de admisión a las universidades, ya que varias de ellas están evaluando no solo destrezas de cálculo matemático. Por otro lado, parece que la evaluación es mucho más que la comprensión. También que comprender no es un fin en sí mismo, sino un medio que conduce a la construcción de ideas y procesos matemáticos. Como afirman algunos autores, retroalimentar es acortar las distancias entre la situación actual en la que se encuentra el estudiante y la situación ideal a la que debe llegar. De esta manera, la retroalimentación es información que permite al estudiante cerrar la brecha entre el desempeño actual y el deseado. (Ramaprasad, 1983 citado en Roos, 2014). Durante el proceso de retroalimentación, la intervención del docente es fundamental. Dependiendo de la manera como

interactúe con el estudiante, y la forma como aborde el tratamiento de sus errores y dificultades, hará que este se involucre y reflexione sobre sus propuestas y construya así sus propias estrategias o caminos de solución adecuados ante una tarea.

La evaluación basada en competencias

En un modelo basado en el estudiante, la evaluación es el medio que aporta las evidencias relevantes sobre el desempeño de los estudiantes, el profesor y el medio ambiente de enseñanza-aprendizaje, a fin de entender los procesos que se dan durante la interacción de estos tres elementos, tomando las decisiones pertinentes y mejorando esta interacción si es el caso. Ahora bien, en los últimos tiempos ha habido un interés por redefinir la evaluación y hacerla acorde con una enseñanza basada en aprendizajes o en competencias. La evaluación debe poner atención en la matemática que es importante, debe ser justa para los estudiantes, los profesores y la institución; debe fomentar el aprendizaje del estudiante, haciéndole ver qué es lo que ya sabe y qué debe aprender o qué puede hacer (Balanced Assessment Project, 2000, p. vi; Clarke, 1997, pp. 2-3). Además, la evaluación se hace a través de diferentes fuentes de información o instrumentos de evaluación, entre los que se cuentan cuestionarios con preguntas abiertas, cuestionarios de opción múltiple, conversaciones, bitácoras o diarios y portafolios (NCTM, 2000, pp. 22-24; Garrison y Ehringhaus, 2008; Gómez, 2007). Por otro lado, la noción de competencia matemática plantea que las personas nos mostramos en acciones, por medio de lenguajes y éstos están condicionados por contextos, pensamientos, emociones, etc.

La evaluación como práctica escolar reflexiva

Esta perspectiva complementa la visión de la evaluación como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje, con las interacciones sociales que acontecen en el aula. Además, de emitir juicios sobre los estudiantes a partir de medidas de logros, debe interesarse por proporcionar información para apoyar políticas y programas de toma de decisiones. Es decir, se rescata la misión orientadora y de ayuda para satisfacer demandas en el proceso educativo, no solamente dirigida a reconocer problemas de los estudiantes, sino a brindar información a todos los actores, sin desconocer la importancia de la regulación y el control necesario en la valoración del trabajo escolar. Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, la evaluación no solamente asume funciones de verificación de objetivos educativos y conocimientos alcanzado, sino que cumple diversos cometidos: social, ética y política, pedagógica y profesional (Giménez, 1997). Me parece sumamente relevante saber qué sucede en el aula, reflexionar sobre cómo se regulan los procesos de enseñar y aprender, de manera que los resultados del aprendizaje sean mejores; además de discutir sobre las decisiones que se toman ante la reflexión realizada. Al mismo tiempo, creo que es sesgado creer que la evaluación es sólo una media aritmética de resultados de notas parciales, sino que se trata de una práctica compleja.

Conclusiones

La evaluación en el contexto de la educación matemática en particular ha transitado por diversos enfoques cada uno de ellos con elementos positivos que han respondido al paradigma imperante en el momento. Nuestro contexto actual exige del docente mirar los procesos de aprendizaje en sentido integral, y por tanto a la evaluación estrechamente vinculada a una perspectiva pedagógica y a prácticas didácticas. La experiencia de trabajo como profesora me

permite afirmar que el dominio de un conocimiento matemático instruido no se traduce de manera inmediata en la comprensión completa del mismo ni en una nueva competencia o nuevo aprendizaje. Me parece que los marcos de heterogeneidad donde nos desenvolvemos implican reconocer la diversidad de estudiantes que tenemos; al mismo tiempo, es necesario analizar los factores que pueden incidir en el desarrollo y progreso matemático de cada uno: tiempo para responder, diálogo auténtico, sentido de la tarea propuesta, oportunidades de experimentación-corrección, etc. Esto también implica que estimemos que hay habilidades y destrezas que están al alcance de todos y que pueden potenciarse mediante actividades adecuadas. Por otro lado, en el proceso de trabajo en clase debe considerarse el error como fuente de aprendizaje. Además, como docentes, podemos realizar las siguientes acciones concretas: acordar criterios, elaborar regulaciones proactivas, analizar la potencialidad de las tareas y tipos de preguntas, explorar nuevas formas y formatos de evaluación, y analizar la gestión de las acciones desarrolladas en el aula. Al mismo tiempo, es importante dar sentido a los conocimientos y razonamientos matemáticos y hacer visible su potencial como herramienta para entender la realidad. Su desarrollo en la educación obligatoria se logrará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

Un aspecto relevante relacionado a la clasificación presente en este estudio es que las distintas modalidades de evaluación estimulan en los alumnos distintas formas de preparar su estudio, y por lo tanto de comprometerse con el conocimiento, como a su vez promueven distintas percepciones sobre sus capacidades

Referencias

Assis, M.; Espasandin, C. (2009). O Processo da Avaliação no Ensino e na Aprendizagem de Matemática. *Boletim de Educação Matemática 22 (33),* 189-204.

Balanced Assessment Project (2000). *Advanced High School Assessment.* New Jersey: Dale Seymour Publications.

Cáceres, M.J. (2010). *Las reflexiones que los maestros en formación incluyen en su portafolios sobre su aprendizaje didáctico matemático en el aula universitaria*. (Tesis Doctoral no publicada). Universidad de Salamanca. Salamanca, España. http://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/76373/1/DDMCE_CaceresGarciaMJ_FormacionMaestrosMatematicas.pdf

Carretero, M.; García, J, et al. (2016). *Competencias, calidad y educación superior*. Bogota, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Clarke, D. (1997). *Constructive Assessment in Mathematics: practical steps for classroom teachers*. California: Key Curriculum Press.

Corica, A. y Otero, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (3), 305- 331.

García, G. O. (2003). *Currículo y evaluación en matemáticas. Un estudio en tres décadas de cambio en la educación básica*. Bogotá: Magisterio.

Garrison, C. y Ehringhaus, M. (2008*). Formative and Summative Assessments in the Classroom*. Recuperado el 9 de abril de 2018 de http://schools.nyc.gov/NR/rdonlyres/33148188-6FB5-4593-A8DF8EAB8CA002AA/0/2010_11_Formative_Summative_Assessment.pdf

Giménez, J. (1997*). Evaluación en matemáticas. Integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.

Gómez, A. (2007). *La evaluación en actividades de aprendizaje con uso de tecnología*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Hancock, D. (2007). Effects of performance assessment on the achievement and motivation of graduate students. *Active Learning in Higher Education, 8 (*3), 219231.

Moreno, T. (2009). La evaluación del aprendizaje en la universidad. Tensiones, contradicciones y desafíos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 14*(41), 563-591.

NTCM (2000). *Principles and Standarsds for the School Mathematics*. Reston: Virginia.

Romberg, T. A. (1989). Evaluation: a coat of many colours. En robitailled (ed.). *Evaluation and Assessment Mathematics Education*. París: UNESCO.

Roos, B. (2014). *Learning and Assessment in the Knowledge Society*. Suecia: Universidad de Umea.

Runco, M. (2003). Idea evaluation, divergent thinking and creativity. In M.A. Runco (Ed.). *Critical creative processes* (pp. 69-94). Cresskill, NJ: Hampton Press, INC.



Temáticas no Currículo de Matemática do Ensino Médio

Clarissa de Assis **Olgin**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
clarissa_olgin@yahoo.com.br

Resumo

Este artigo é um recorte da tese de doutorado referente ao trabalho com temáticas no Currículo de Matemática do Ensino Médio. Como fundamentação teórica estudaram-se o Currículo de Matemática e teorias curriculares contemporâneas baseadas nas pesquisas de Skovsmose (2006), Doll Jr. (1997) e Silva (2009). O objetivo deste trabalho é apresentar quais os possíveis temas para serem trabalhados no Currículo de Matemática. A metodologia de investigação foi baseada na abordagem qualitativa, buscando argumentar a favor do desenvolvimento do trabalho com temáticas para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos. Esse estudo possibilitou a elaboração de uma classificação para os temas de interesse, os quais podem ser trabalhados no Currículo de Matemática, dando significado ao conhecimento escolar, relacionando os conteúdos formais a situações práticas ou próprias da Matemática. Além disso, a pesquisa permitiu indicar caminhos para a prática docente, com a exemplificação de duas temáticas: Contemporaneidade e Cultura.

Palavras-chave: Currículo de Matemática, Ensino Médio, Temas de interesse.

Introdução

Este artigo é resultado da investigação de doutorado referente ao desenvolvimento de temática no Currículo de Matemática do Ensino Médio. Os documentos oficiais do Brasil, colocam que nas escolas, existe um currículo dividido por disciplinas, além de serem desenvolvidas atividades que favorecem a construção a memorização e repetição de procedimentos (Rio Grande do Sul, 2009). Complementam os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM (2000) que o conhecimento escolar deve ser contextualizado, interdisciplinar e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender sozinho e coletivamente.

O objetivo deste trabalho e apresentar quais os possíveis temas para serem trabalhados no Currículo de Matemática do Ensino Médio, utilizando temáticas que permitam o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos e que sejam consideradas relevantes para a

formação dos estudantes.

Para o desenvolvimento do trabalho com temáticas, investigou-se o Currículo de Matemática, bem como, as pesquisas realizadas por Doll Jr. (1997) sobre o Currículo Pós-Moderno, Silva (2009) referente a seleção e organização do Currículo do Ensino Médio e Skovsmose (2006) sobre Educação Matemática Crítica.

Esse estudo juntamente com análise de livros didáticos do Ensino Médio, das questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e do levantamento de dissertações e teses do banco da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES) permitiu a elaboração de uma classificação para os temas de interesse que podem ser trabalhados no Currículo de Matemática, dando significado ao conhecimento escolar. Após essa fase da pesquisa indicam-se caminhos para a prática docente no trabalho com temáticas, com exemplificação de duas temáticas: Contemporaneidade e Cultura.

Procedimentos metodológicos

Este trabalho, apresenta uma pesquisa com abordagem metodológica qualitativa, que buscou por meio dos dados descritivos entender os fenômenos envolvidos para a seleção de temas que podem ser abordados no Ensino Médio para a revisão, aprofundamento ou construção de conceitos matemáticos. Através, do aporte teórico, argumentou-se a favor da necessidade de desenvolver os conteúdos de Matemática por meio de temáticas. Para isso, estudou-se o Currículo de Matemática do Ensino Médio e investigaram-se critérios para a fundamentar a seleção de temas. Em seguida, elaborou-se uma classificação dos temas de interesse. A partir dessa classificação, apresentaram-se, como propostas de alternativas metodológicas, atividades didáticas com as temáticas, Contemporaneidade e Cultura.

Investigando o Currículo de Matemática

De acordo com Pacheco (2005), Currículo advém de duas tradições distintas. A primeira caracterizada por uma perspectiva técnica de escolarização e formação. Nessa tradição, o Currículo serve para organizar a aprendizagem, estabelecendo os conteúdos e o plano de ação pedagógica. A segunda tradição remete-se ao Currículo como um projeto que é resultado das intenções educativas e de seu respectivo plano para efetiva realização. Essa tradição, baseia-se nas experiências educativas vivenciadas no ambiente escolar, com propósitos flexíveis, que estão em aberto e podem ser alterados. Na figura 1, apresentam-se os conceitos de Currículo presente em documentos da legislação brasileira.

Documento	Descrição
Lei de Diretrizes e Bases da Educação (BRASIL, 1996)	O Currículo da Educação Básica precisa ter uma Base Nacional Comum e uma diversificada que atenda às necessidades de cada região do País, considerando as características dos indivíduos que ali residem, sua cultura e economia
Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998)	O Currículo como instrumento de cidadania precisa estabelecer quais os conteúdos e as estratégias de ensino que permitem aos estudantes desenvolverem capacidades para a vida em sociedade.
Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2000)	O currículo precisa favorecer que os conteúdos sejam desenvolvidos de forma interdisciplinar, pois possibilita relacionar os conteúdos das diferentes disciplinas escolares.

Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006)	O Currículo é a representação dinâmica das intenções da escola e do sistema de ensino para o desenvolvimento dos estudantes. Ainda, menciona que o Currículo do Ensino Médio precisa incentivar o trabalho interdisciplinar e contextualizado.

Figura 1. Conceitos de Currículo na legislação brasileira.

A partir dos documentos brasileiros, percebe-se que o Ensino Médio precisa desenvolver os conteúdos de forma contextualizada, para que os alunos estabeleçam relações que possam ser utilizadas em seu cotidiano. Assim, percebe-se que desenvolver os conteúdos matemáticos relacionados a situações do cotidiano, pode viabilizar que o conhecimento construído na escola, fique próximo de suas vivências.

Dessa forma, Olgin (2015) coloca que é importante trabalhar com temas relevantes para formação dos estudantes, possibilitando ao mesmo ampliar sua rede de conhecimentos matemáticos e extramatemáticos. Para isso, o currículo de Matemática precisa ser flexível e aberto às mudanças do mundo contemporâneo, possibilitando o trabalho com um conjunto de temas; precisa permitir que a formação dos estudantes seja permeada por diferentes práticas pedagógicas, que propiciem diversidade de temas, que levem a reflexões sociais e políticas, visão crítica da sociedade, postura autônoma, desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, possibilitando uma formação integral desse sujeito.

Critérios para o trabalho com temáticas no Currículo de Matemática

Para estabelecer critérios para seleção de temáticas, pesquisou-se os trabalhos de Skovsmose (2006) sobre Educação Matemática Crítica (EMC). Para o autor, o Currículo precisa ser aberto e flexível, para que haja a participação dos estudantes, professores e comunidade escolar. Complementar o autor que para se desenvolver uma atitude democrática, através da educação, o processo de ensino e aprendizagem deve ser fundamentado no diálogo entre seus sujeitos. A partir das pesquisas de Skovsmose (2006) entende-se que para seleção de temas é preciso avaliar a aplicabilidade do tema, os interesses por detrás do tema, os pressupostos por detrás do tema, as funções sociais do tema e as limitações do teóricas e metodológicas do tema.

Já as pesquisas de Doll Jr. (1997) relacionada ao currículo pós-moderno, caracterizado como um currículo que está sempre em transformação, se utilizaria os quatro "Rs", de riqueza, recursão, relações e rigor para sua construção. O critério "riqueza" permite que professores e alunos transformem e sejam transformados, através de temas que possibilitem desenvolver diversas atividades, construir conceitos, revisar ou ampliar os conteúdos matemáticos. O critério "recursão" possibilita a escolha de temas que permitam ao aluno refletir sobre o fazer, buscando pensar e repensar sobre os caminhos adotados para a resolução das atividades. O critério "relações" permite a escolha de temas que evidenciem as possíveis conexões entre os temas e os conteúdos matemáticos. O critério "rigor" relaciona-se à escolha de temas que permitam desenvolver os conteúdos matemáticos, buscando, conforme as indicações de Silva (2009), verificar as possibilidades metodológicas e organizacionais de aplicação do tema.

Os critérios propostos por Silva (2009) para escolha e organização dos conteúdos também podem ser explorados na seleção de temas para o currículo de Matemática, pois os que serão desenvolvidos precisam apresentar aspectos relacionados à "reflexão", em que os temas podem tratar os conteúdos matemáticos a partir de assuntos relacionados à economia familiar, saneamento básico, entre outros, que também permitem desenvolver problemas locais, o que leva

aos critérios “realidade” e “responsabilidade”, pois verificar possibilidades de solução ou formas de amenizar os impactos de problemas dessa natureza, pode proporcionar aos estudantes perceber a importância da disciplina de Matemática na construção da sociedade em que vivem. Além disso, o critério “ressignificação” está presente na escolha de temas que desenvolvem os conteúdos matemáticos em novos contextos.

Portanto, a busca de critérios apoiada nas pesquisas de Skovsmose (2006), Doll Jr. (1997) e Silva (2009) fazem com que se reflita sobre a construção de atividades que relacionem os conteúdos matemáticos a temas, permitindo aos estudantes compreenderem como a Matemática pode contribuir para a sua formação integral.

Classificação das temáticas para o Currículo de Matemática do Ensino Médio

A partir dos estudos teóricos sobre o currículo e os critérios para seleção de temáticas a serem tratadas no currículo de Matemática do Ensino Médio levaram a classificação das temáticas, sendo elas um conjunto de assuntos que podem ser utilizados pelos professores de Matemática para o desenvolvimento dos conteúdos e que contemplam, uma Educação Crítica, transformadora, reflexiva, rica em contextos. Essa é uma proposta de classificação (Figura 2) dos temas considerados importantes para a formação dos estudantes do Ensino Médio, que foi sendo construída com base no referencial teórico estudado, na análise dos Livros Didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para o Ensino Médio, nas questões do Exame Nacional do Ensino Médio e nas pesquisas referentes a temas presentes no banco de teses e dissertações da CAPES.

TEMÁTICAS POSSÍVEIS	TEMAS	POSSÍVEIS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS	OBJETIVO
CONTEMPORANEIDADE	Criptografia	Aritmética Modular, Funções, Matrizes e Grafos.	Elaborar atividades didáticas que relacionem os temas os conteúdos matemáticos, visando à formação integral dos estudantes.
	Meios de Comunicação (internet)		
	Teoria dos Grafos		
POLÍTICO SOCIAL	Economia	Função, Matemática Financeira, Progressões, Estatística.	
	Educação Fiscal		
	Poluição Sonora		
	Trabalho e Consumo		
	Imposto de Renda		
	Dívida externa e interna		
	Programas Sociais		
CULTURA	Arte	Progressões, Funções e Geometria.	
	Esporte		
MEIO AMBIENTE	Fontes de Energias	Trigonometria, Estatística, Probabilidade, Funções e Geometria.	
	Radioatividade		
	Agrotóxicos		
	Água		
	Reciclagem de Lixo		
	Desmatamento		
CONHECIMENTO TECNOLÓGICO	Computação gráfica	Matrizes e Funções.	
	Ondas Sísmicas		
	GPS - Sistema de Posicionamento Global		
SAÚDE	Doenças	Estatística, Funções e Matemática Financeira.	
	Alimentação		
	Educação Sexual		
	Saneamento Básico		

TEMÁTICAS LOCAIS	Trânsito	Funções e Estatística.	
	Impactos da Mortalidade e Natalidade		
INTRAMATEMÁTICA	Números de Fibonacci	Progressões, Geometria, Funções e Equações Diofantinas Lineares.	
	Números de Ouro		
	Fractais		
	Equações Diofantinas		
	Padrões Matemáticos		

Figura 2. Temáticas de Interesse para o Currículo de Matemática do Ensino Médio.

A temática Contemporaneidade refere-se a importância do currículo de Matemática, viabilizar o envolvimento dos alunos em uma rede de assuntos que mostre a aplicabilidade dos conteúdos matemáticos na vida na sociedade atual. Já a temática Político-Social apresenta assuntos relevantes à formação dos alunos como sujeitos críticos, reflexivos e comprometidos com a sociedade. A temática Cultura permite desenvolver assuntos relacionados à arte musical, cênica, visual e ao Esporte, considerando-se os aspectos relacionados às tradições locais, nas quais os alunos estão inseridos. Ela possibilita que o Currículo de Matemática contemple os saberes relativos ao contexto sociocultural de cada região. Trabalhar com a temática Meio Ambiente, busca discutir questões relacionadas aos conflitos sociais existentes em virtude dos distintos modos de exploração dos bens ambientais. A temática Conhecimento Tecnológico, visa dar conhecimento sobre a sociedade que está na era da informação, na qual as tecnologias vêm transformando as formas de ensinar e aprender. Abordar a temática Saúde refere-se ao desenvolvimento de assuntos relacionados a prevenção e controle de doenças, cuidados na alimentação, saneamento básico, habitação adequada, qualidade do ar e da água, entre outros. Desenvolver Temáticas Locais permite relacionar os conteúdos matemáticos a assuntos da realidade na qual o estudante está inserido. Assim, propor essas temáticas é viabilizar a discussão de questões relativas às práticas sociais e conflitos locais, de forma a levar o aluno a refletir, compreender e buscar soluções para os mesmos. Também, considera-se importante desenvolver tópicos específicos da Matemática (Temática Intramatemática) que foram desenvolvidos ao longo da história, mostrando sua necessidade para o desenvolvimento, tanto dessa área do conhecimento, quanto da sua influência para o desenvolvimento de diversas áreas, como engenharia, computação, urbanismo, contabilidade, etc.

Caminhos para o desenvolvimento de atividades didáticas com temáticas

Como resultado da pesquisa, apresentam-se sugestões de atividades didáticas envolvendo as temáticas Contemporaneidade e Cultura que são exemplos que podem ser desenvolvidos no Ensino Médio.

Na temática Contemporaneidade investigou-se o tema Criptografia. Esse tema pode ser explorado no Currículo de Matemática, pois reflete os critérios elencados por Doll Jr. (1997) e Silva (2009), pois é um tema atual e permite construir atividades didáticas que relacionam o tema aos conteúdos matemáticos. Nesse tema, percebe-se o critério riqueza como uma possibilidade de recurso para o processo de ensino e aprendizagem, no qual o professor pode desenvolver atividades e jogos de codificação e decodificação com os conteúdos que são trabalhados no Ensino Médio. O critério recursão, por sua vez, pode contribuir para que o aluno reflita sobre os conteúdos desenvolvidos a partir de atividades didáticas envolvendo esse tema. O critério recursão pode ocorrer, durante o processo da ação do aluno frente à situação, na qual ele pode fazer o levantamento das informações relevantes, elaboração de hipóteses, verificação e validação das mesmas. O critério ressignificação por explorar os conteúdos de função linear,

função quadrática, função exponencial, função logarítmica e matrizes através do tema.

Um exemplo de atividade envolvendo o conteúdo de Função é o Código com Função Exponencial e Logarítmica, que permite desenvolver o conteúdo de imagem da função, domínio, contradomínio e função inversa. Além de proporcionar aos alunos o uso da calculadora científica, com o objetivo de aprender a utilizar esse recurso.

Atividade com a temática contemporaneidade: Código com Função Linear: Para cada letra do alfabeto, associa um número inteiro de 1 a 26, por exemplo, A=1, B=2, C=3, …, Z=26 e codifique a palavra "SEGREDO", sabendo que a função codificadora é $f(x) = 6x + 5$.

Resolução da atividade: pretende-se que o aluno seja capaz de realizar o cálculo da imagem da função para cada algarismo que corresponde a uma letra e utilize corretamente a calculadora. Para isso, primeiro, relaciona-se cada letra do alfabeto a um número, ou seja, a sequência numérica do texto é: 19 – 5 – 7 – 18 – 5 – 4 – 15.

Para criptografar a palavra, calcula-se a imagem da função para cada número da sequência na função determinada (Figura 3).

$f(15) = 6.15 + 5 = 95$	$f(19) = 6.19 + 5 = 119$	$f(5) = 6.5 + 5 = 35$
$f(7) = 6.7 + 5 = 47$	$f(18) = 6.18 + 5 = 113$	$f(4) = 6.4 + 5 = 29$

Figura 3. Cálculo da imagem da função.

Sendo o texto codificado, a imagem de cada algarismo encontrado na função será: 119 – 35 – 47 – 113 – 35 – 29 – 95.

Para decodificar a palavra, o receptor deverá calcular a imagem dos elementos, utilizando a função inversa, que pode ser encontrada da seguinte forma: A função inversa de $f(x) = 6x + 5$ é: $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{6}$.

Na temática Cultura optou pelo tema Arte para explorar os conteúdos de Matemática. Desenvolveram-se atividades didáticas adaptadas do livro "Descobrindo Matemática na Arte: atividades para o Ensino Fundamental e Médio", do ano de 2011, das autoras Estela Kaufman Fainguelernt e Katia Regina Ashton Nunes, na qual se propõe trabalhar os sólidos de revolução a partir da obra de articulação em metal e movimento por micromotor, de Abraham Palatnik (Olgin, 2015).

O tema Arte pode ser abordado no Currículo de Matemática do Ensino Médio, porque permite: desenvolver atividades didáticas utilizando os conteúdos matemáticos, já desenvolvidos em sala de aula pelos professores, dentro de um contexto que envolve a influência de diferentes culturas; possibilita recontextualizar um conteúdo dentro de outro tema, podendo produzir novas relações e significados, conforme os critérios riqueza, relações e ressignificação propostos por Doll Jr. (1997) e Silva (2009). O critério riqueza está em desenvolver atividades didáticas envolvendo a Arte Cinética, por meio das obras do artista Abraham Palatnik, explorando o conteúdo matemático de Geometria Espacial, utilizando recursos tecnológicos na elaboração das atividades didática, tais como, *software* GeoGebra. O critério relações pode ser percebido na obra de Palatnik, visto que favorece, por meio da Arte Cinética, o entendimento de conteúdos matemáticos, sem utilizar exclusivamente a Matemática, pois sua obra permite exemplificar os sólidos de revolução. O critério ressignificação surge pela possibilidade de relacionar os conteúdos matemáticos às diversas atividades didáticas envolvendo o tema.

Um exemplo de atividade envolvendo essa temática é Descobrindo elementos do Cone.

Atividades didáticas: A obra “Objetos Cinéticos” do artista Palatnik tem diferentes formas geométricas. Agora responda: a) Que objeto se teria ao rotacionar um triângulo retângulo em torno do eixo que contém um de seus catetos?

Utilizando o *software* GeoGebra é possível verificar a situação proposta, conforme a Figura 4.

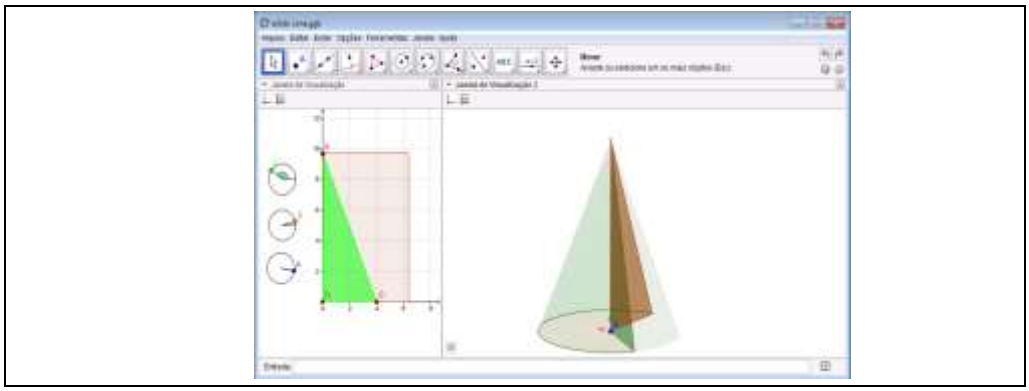


Figura 4. Exemplo de cone no *software* GeoGebra.

b) Se construirmos um triângulo retângulo que tenha como medida da hipotenusa 10 cm e medida de um dos catetos 8 cm, qual será o raio da base do cone de revolução gerado pela rotação completa desse triângulo? E qual será a sua altura?

Resolução da atividade: Para resolver a questão, utiliza-se a fórmula do volume da esfera.

c) Agora, a partir das figuras encontradas, determine a área lateral, a área da base e a área total do cone gerado pela rotação.

Resolução da atividade: Para resolver a atividade, podem-se utilizar as fórmulas da área lateral, área da base e área total.

d) Você saberia me dizer que seção plana obtém-se ao cortar um cone 14 por um plano paralelo à base? E que seção plana obtém-se ao cortar o cone por um plano perpendicular à base que contém o centro da base e o vértice do cone?

Resolução da atividade: Espera-se que os alunos observem que a seção plana obtida ao obtém-se ao cortar o cone por um plano paralelo à base será um círculo e a seção plana obtida ao contar um cone por um plano perpendicular à base que contém o centro da base e o vértice será um triângulo.

e) Qual sólido de revolução será gerado por uma rotação completa de um trapézio retângulo em torno do eixo e que contém o lado que é perpendicular às bases do trapézio?

Resolução da atividade: Espera-se que os alunos percebam que o sólido de revolução gerado será um tronco de cone. Ainda, utilizando o *software* GeoGebra, é possível verificar a situação proposta, conforme a Figura 5.

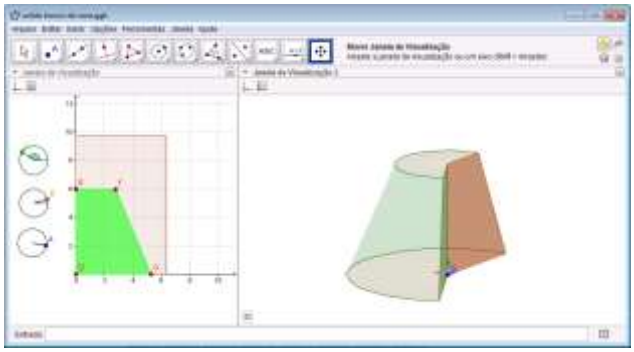


Figura 5. Exemplo de tronco de cone no *software* GeoGebra.

Considerações finais

Essa pesquisa possibilitou perceber que os documentos legais brasileiros indicam que o currículo precisa viabilizar o trabalho interdisciplinar e contextualizado dos conteúdos escolares. Bem como, a busca por critérios para a seleção de temas a serem estudados no Ensino Médio permitiram a reflexão sobre a importância de elaborar propostas de ensino as quais viabilizem, aos estudantes, a construção de um conhecimento matemático que lhes permita relacionar as teorias a sua aplicabilidade

Ainda, a classificação das possíveis temáticas oportunizou identificar os temas que vem sendo apresentados nos livros didáticos, dissertações, teses e no Exame Nacional do Ensino Médio. É preciso considerar que a classificação não é definitiva e pode ser aperfeiçoada pelos professores.

Também, buscou-se mostrar caminhos para o trabalho com temáticas, por meio da exemplificação de duas atividades didáticas, envolvendo as temáticas Contemporaneidade e Cultura que permitem contextualizar os conteúdos matemáticos e indicar possibilidade metodológica para seu desenvolvimento.

Portanto, entende-se que o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos relacionados a temas, tendo por base as teorias curriculares contemporâneas, pode auxiliar o professor no planejamento de atividades didáticas que busquem potencializar a Matemática do Ensino Médio. Considera-se importante ressaltar que a classificação indicada está aberta a novos temas e novas propostas metodológicas.

Agradecimento

Agradeço a Fundação ULBRA (FULBRA) e a Universidade Luterana do Brasil pelo apoio financeiro à participação em eventos científicos e tecnológicos para divulgação da pesquisa que vem sendo desenvolvida na instituição.

Referências

Brasil. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.* (1996). Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Recuperado em 18 de setembro, 2018, de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. (1998) Brasília: MEC/SEF.

Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio de 2000*. (2000). Bases Legais. Recuperado em 18 de setembro, 2018, de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf.

Brasil. *Orientações Curriculares do Ensino Médio.* (2006). Recuperado em 18 de setembro, 2018, de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_01_internet.pdf.

Doll Jr, W. E. (1997). *Currículo:* uma perspectiva pós-moderna. Trad. Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto alegre: Artes Médicas.

Olgin, C. A. (2015) *Critérios, possibilidades e desafios para o desenvolvimento de temáticas no Currículo de Matemática do Ensino Médio.* 2015. 265 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil. Canoas.

Rio Grande do Sul. *Referencial Curricular: Lições do Rio Grande.* (2009). Recuperado em 17 de dezembro, 2017, de http://servicos.educacao.rs.gov.br/dados/refer_curric_vol3.pdf.

Silva, M. A. (2009). *Currículo de Matemática no Ensino Médio:* em busca de critérios para escolha e organização de conteúdos. Tese de doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Skovsmose, O. (2006). *Educação Matemática Crítica:* a questão da democracia. (3. ed.). Campinas: Papirus.

Pacheco, J. A. (2005). *Escritos Curriculares*. São Paulo: Cortez.



Codificando e decodificando com os conteúdos matemáticos do Ensino Médio

Clarissa de Assis **Olgin**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
clarissa_olgin@yahoo.com.br

Resumo

Este trabalho apresenta a temática Criptografia para o desenvolvimento de atividades didáticas para o Ensino Médio. Considera-se que os conteúdos matemáticos precisam ser desenvolvidos de forma contextualizada, sendo aliado a temas atuais. A Criptografia vem sendo utilizada em diversas áreas, visando manter os dados/informações em segurança, para que possam acontecer as transações pela internet, tais como: autenticação eletrônicas de pagamento, envio de mensagens entre usuários, transações bancárias, entre outras situações. O objetivo da oficina é oportunizar o desenvolvimento de atividades didáticas que envolvam a história do tema Criptografia e suas aplicações, bem como atividades envolvendo codificação e decodificação envolvendo os conteúdos de funções e matrizes.

Palavras-chave: Currículo de Matemática, Ensino Médio, Criptografia.

Introdução

Este trabalho apresenta a Criptografia para o desenvolvimento de atividades didáticas aplicáveis ao Currículo de Matemática do Ensino Médio. Esse tema, segundo Tamarozzi (2001), permite ao professor de Matemática desenvolver atividades didáticas de codificação e decodificação, para revisar, reforçar e aprofundar os conteúdos matemáticos de funções e matrizes. A Criptografia é conhecida como a arte de escrever em códigos, de forma a permitir que somente o destinatário conheça o texto da mensagem. Atualmente, vem sendo utilizada na autenticação de ordens eletrônicas de pagamento, nos navegadores de internet, na transmissão digital, entre outras situações da vida em sociedade.

Este trabalho justifica-se porque é importante que o professor trabalhe com temas atuais. Além disso, o tema em estudo possibilita ao professor de Matemática do Ensino Médio pesquisar e elaborar atividades didáticas para exercitar e revisar conteúdos matemáticos, através de atividades de codificação e decodificação. Este trabalho apresenta o tema Criptografia para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos.

O objetivo da oficina é desenvolver atividades didáticas que envolvam a história do tema Criptografia e suas aplicações, bem como atividades envolvendo codificação e decodificação envolvendo os conteúdos matemáticos de funções e matrizes.

Procedimentos metodológicos

A metodologia utilizada para realização das atividades com o tema Criptografia é a pesquisa qualitativa. As atividades didáticas elaboradas com o tema Criptografia visam oportunizar, o desenvolvimento de uma temática relacionada a questões contemporâneas, por meio da introdução do tema com uma abordagem histórica, na qual se buscou identificar quando surgiu a necessidade de se utilizar a Criptografia, para manter o segredo de mensagens a serem enviadas. Ainda, apresenta as formas utilizadas ao longo da história para guardar o segredo de uma mensagem, o que Olgin (2015) denominou *aplicações do tema*. Esse tema também apresenta atividades envolvendo criptogramas (letras que viram números), que visam revisar os conteúdos de Aritmética, através da resolução de problemas.

Na Figura 1, apresentam-se as atividades, objetivos e conteúdos desenvolvidos na sequência de atividades com o tema Criptografia.

Atividade	Objetivo	Conteúdo
Criptograma	Aplicar os conhecimentos de Aritmética em uma situação que envolve descoberta de números representados por letras.	Aritmética
Cifra de César, Cifra do Chiqueiro, Cifra de Playfair	Conhecer aplicações do tema Criptografia ao longo da história.	-
Código com Função Linear	Revisar e aprofundar o conteúdo de funções lineares.	Função Linear
Código com Função Exponencial e Logarítmica	Revisar e aprofundar as propriedades da potenciação, equações exponenciais, cálculo da imagem de uma função exponencial e logarítmica, logaritmo mudança de base.	Função Exponencial e Logarítmica
Código com Matrizes	Revisar e aprofundar o conteúdo de matrizes, multiplicação de matrizes, operações com matrizes, matriz transposta, cálculo de matriz inversa, buscando reforçar esses conteúdos.	Matrizes

Figura 1. Atividades didáticas com o tema Criptografia.

O Currículo de Matemática do Ensino Médio e o tema Criptografia

Encontra-se, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006), que o aluno deve ser capaz de utilizar a Matemática: na resolução de problemas do cotidiano; para modelar fenômenos das distintas áreas do conhecimento; para compreender a Matemática como conhecimento social e construído ao longo da história; para entender a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

Nesse sentido, para propor atividades que viabilizem o que foi mencionado é preciso compreender o que é currículo. Para Coll (1999, p.45) o currículo é:

> [...] o projeto que preside as atividades educativas escolares, define suas intenções e proporciona guias de ação adequadas e úteis para os professores, que são diretamente responsáveis pela sua execução. Para isso, o currículo proporciona informações concretas sobre o que ensinar, quando ensinar, como ensinar e que, como e quando avaliar.

Assim, percebe-se que o currículo é a realização do planejamento curricular, tomada de decisão dos objetivos que se deseja alcançar, organização dos conteúdos, elaboração das estratégias didáticas, definição da metodologia de ensino.

Também, faz-se necessário ponderar que um dos desafios da vida moderna para os jovens do Ensino Médio são as exigências referentes à disciplina de Matemática para os futuros trabalhadores que, de acordo com Pollak apud Pires (2000, p.155), são:

> Ser capaz de propor problemas com as operações adequadas; conhecer técnicas diversas para propor e resolver problemas; compreender as implicações matemáticas de um problema; poder trabalhar em grupo sobre um problema; ver a possibilidade de aplicar ideias matemáticas tanto a problemas comuns como a complexos; estar preparado para enfrentar-se com problemas abertos, já que a maioria dos problemas reais não estão bem formulados; acreditar na utilidade e na validade da Matemática.

Dessa forma, verifica-se que é necessário preparar os jovens do Ensino Médio para o mundo do trabalho, promovendo atividades didáticas que possibilitem o desenvolvimento de habilidades e competências relacionados a inserção dos mesmos na sociedade de forma igualitária.

Entende-se que para selecionar temas a serem desenvolvidos na disciplina de Matemática no Ensino Médio deve possibilitar o uso de conteúdos de Matemática, permitindo que o aluno revise, aprofunde e exercite os conteúdos matemáticos, crie estratégias de resolução de problemas, tenha autonomia na resolução das atividades didáticas e trabalhe em grupo, buscando aprimorar a sua formação acadêmica e social.

Nesse contexto, trabalhar com o tema proposto pode permitir que o estudante desenvolva habilidades que podem ser utilizadas no ambiente de trabalho e no convívio em sociedade, pois é um tema atual, de grande utilização, aplicado a várias situações da vida moderna e adapta-se aos conteúdos do Currículo de Matemática do Ensino Médio.

Trabalhar com esse tema, aliado aos conteúdos matemáticos, pode ser uma estratégia para o professor de Matemática revisar e reforçar alguns conteúdos, possibilitando ao estudante dessa etapa do Ensino Básico conhecer um pouco da história da Criptografia e ampliar seus conhecimentos referentes aos conteúdos desenvolvidos nas atividades didáticas propostas.

Atividades didáticas com o tema Criptografia para o Ensino Médio

A oficina será desenvolvida em dois momentos, sendo o primeiro referente à história e aplicações do tema Criptografia, mostrando a evolução histórica dessa temática e exemplificando as formas de criptografar que eram utilizadas, conforme Figura 2.

Criptografia ao longo da história	Objetivo
Citale Espartano	Apresentar as aplicações do tema Criptografia ao longo da história.
Cifra de Cesar	
Cifra do Chiqueiro	

Cifra de *Playfair*	
Cifra ADFGVX	
Disco de Cifra	
Máquina Enigma	

Figura 2. História e aplicações do tema Criptografia.

Um exemplo de atividade de aplicações do tema Criptografia é a Cifra do Chiqueiro. Essa cifra de substituição monoalfabética que foi utilizada pelos maçons para guardar seus segredos (Singh, 2003). A cifra consiste em substituir uma letra por um símbolo, seguindo o padrão apresentado na Figura 3.

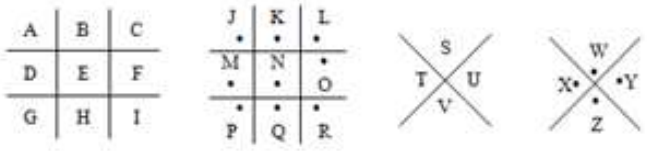
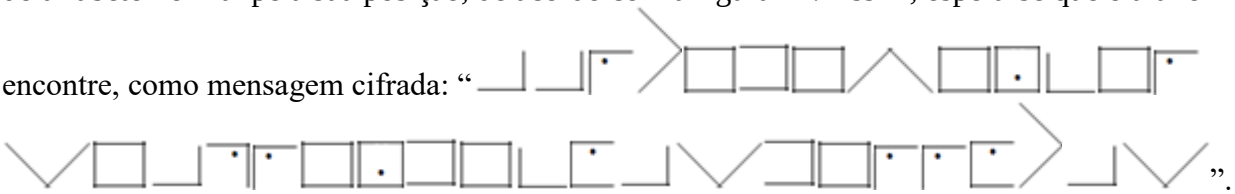


Figura 3. Exemplo do padrão de codificação da Cifra do chiqueiro.

A codificação da Cifra do Chiqueiro é realizada encontrando a posição da letra em uma das quatro grades da figura x e desenhando a porção da grade que representa a letra a ser codificada, por exemplo, a letra **E** corresponde ao símbolo  .

Considerando a figura x, codifique a frase "A arte de vencer se aprende com as derrotas.", utilizando a Cifra do Chiqueiro e envie para outro grupo decodificar.

Possível solução dos alunos: Espera-se que, nessa atividade, o aluno encontre o valor de cada letra, de acordo com o padrão utilizado pela Cifra de Chiqueiro, onde ele substituirá a letra do alfabeto normal pela sua posição, de acordo com a figura 24. Assim, espera-se que o aluno encontre, como mensagem cifrada: “  ”.

O segundo momento envolve atividades com os conteúdos matemáticos de aritmética, funções e matrizes (Figura 4).

Atividade Didática	Conteúdo Matemático	Objetivo
Criptogramas	Aritmética	Aplicar os conhecimentos de Aritmética em uma situação de descoberta.
Código ISBN	Aritmética Modular	Aplicar os conhecimentos de aritmética modular.
Código com função linear	Função Linear	Revisar e reforçar o conteúdo de função linear.
Código com função exponencial e logarítmica	Função exponencial e função logarítmica	Revisar as propriedades da potenciação, função exponencial e função logarítmica.
Código com Matrizes	Matrizes	Revisar e exercitar o conteúdo de matrizes.

Figura 4. Atividades didáticas envolvendo os conteúdos matemáticos e a temática Criptografia.

Um exemplo de atividade de codificação e decodificação envolvendo o conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas. Considere para cada letra do alfabeto um número, por exemplo, A=1,B=2, C=3,D=4, ..., Z=26 e a função cifradora $f(x) = 2^x:2^2$. Utilize a propriedade ($a^x : a^y = a^{x-y}$) na função dada e decodifique o texto "1048576/ 8192/ 1024/ 262144/ 0,5/ 65536/ 0,5/ 262144/ 65536/ 0,5/ 131072/ 8/ 2048/ 8/ 1024/ 64/ 8192/ 65536/ 32768/ 524288/ 8/ 16384/ 8/ 65536/ 4/ 8/ 65536/ 131072/ 8/ 4096/ 8192/ 2/ 0,5/ 2048/ 128/ 4096/ 64/ 8192".

Possível solução dos alunos: a) O aluno pode resolver a questão, sistematizando as informações relevantes e elaborando estratégias para resolução.

Informação relevante: A = 1, B = 2, C = 3, ... e $f(x) = 2^x:2^2$

Prevendo resultados: espera-se que o aluno realize o cálculo da função inversa e calcule a imagem para cada valor da mensagem cifrada. A função inversa de $f(x) = 2^x:2^2$ é: $\log_2 y = x - 2$

Cálculo da imagem de cada algarismo da sequência (Figura 5):

$2^{x-2} = 1048576 \rightarrow x = 22$	$2^{x-2} = 131072 \rightarrow x = 19$
$2^{x-2} = 8192 \rightarrow x = 15$	$2^{x-2} = 8 \rightarrow x = 5$
$2^{x-2} = 1024 \rightarrow x = 12$	$2^{x-2} = 2048 \rightarrow x = 13$
$2^{x-2} = 262144 \rightarrow x = 20$	$2^{x-2} = 32768 \rightarrow x = 17$
$2^{x-2} = 0,5 \rightarrow x = 1$	$2^{x-2} = 524288 \rightarrow x = 21$
$2^{x-2} = 65536 \rightarrow x = 18$	

Figura 5. Cálculo da imagem da função.

Assim, o aluno encontrará como sequência numérica descriptografada: 22 – 15 – 12 – 20 – 1- 18 – 1 – 20 – 18 – 1 – 19 – 5 – 13 – 5 – 12 – 8 – 15 – 18 – 17 – 21 – 5 – 16 – 5 – 18 – 4 – 5 – 18 – 19 – 5 – 14 – 15 – 3 – 1 – 13 – 9 – 14 – 8 – 15. Substituindo os algarismos pelas letras correspondentes, de acordo com a figura 28, tem-se que a mensagem é "Voltar atrás é melhor que perder-se no caminho.".

As atividades envolvendo o tema Criptografia possibilitam aos alunos revisarem os conteúdos matemáticos de funções e matrizes em atividades envolvendo codificação e decodificação, potencializando o processo de ensino e aprendizagem desses conteúdos, pois permitem trabalhar funções e suas inversas, bem como matrizes e matrizes inversas.

Considerações finais

As atividades desenvolvidas são exemplos de material didático que pode ser utilizado pelos professores para exercitar, aprofundar e revisar conteúdos, fazendo uso de códigos e senhas, conforme as indicações de Tamarozzi (2001).

As atividades didáticas propostas aliando o tema Criptografia aos conteúdos matemáticos

do Ensino Médio, utilizando funções e matrizes, podem ser exploradas utilizando recursos tecnológicos, como as calculadoras. Ainda, entende-se que a busca de temas de interesse a serem desenvolvidos no Currículo de Matemática devem ser incentivadas, pois o mesmo necessita abordar temas de interesse dos alunos, visando incentivá-los ao estudo dos conteúdos. Também deve proporcionar a compreensão do uso da Matemática em assuntos da vida moderna. Fatores, que podem ser observados no tema Criptografia.

Agradecimento

Agradeço a Fundação ULBRA (FULBRA) e a Universidade Luterana do Brasil pelo apoio financeiro à participação em eventos científicos e tecnológicos para divulgação da pesquisa que vem sendo desenvolvida na instituição.

Referências

Brasil. *Orientações Curriculares do Ensino Médio.* (2006). Recuperado em 18 de setembro, 2018, de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_01_internet.pdf.

Olgin, C. A. (2015). *Critérios, possibilidades e desafios para o desenvolvimento de temáticas no Currículo de Matemática do Ensino Médio.* 2015. 265 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil. Canoas.

Coll, C. (1999). *Psicologia e currículo: uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar*. São Paulo: Ática.

Pires, C. M. C. (2000). *Currículo de Matemática: da organização linear à idéia de rede.* São Paulo: FTD.

Singh, S. (2003). *O Livro dos Códigos: A Ciências do Sigilo - do Antigo Egito à Criptografia Quântica*. Rio de Janeiro: Record.

Tamarozzi, A. C. (2001). *Codificando e decifrando mensagens*. Revista do Professor de Matemática, nº 45, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estudo de regressão para análise da proficiência em Matematica no SAEB 2015

Carlos Augusto **Aguilar Júnior**
Colégio Universitário Geraldo Reis, Universidade Federal Fluminense
Brasil
carlosaugusutobolivar@hotmail.com
Maria Isabel Ramalho **Ortigão**
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
isabelortigao@terra.com.br

Resumo

Neste presente trabalho relatamos estudo empírico com os dados levantados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, referentes aos estudantes brasileiros de escolas públicas matriculados no 9º ano do ensino fundamental e que realizaram a Prova Brasil 2015. A análise considerou as respostas dos estudantes ao questionário contextual e a proficiência em Matemática e Língua Portuguesa de cada aluno. A estatística descritiva revela que somente 1,7% dos mais de 1,8 milhão de estudantes do 9º ano se encontra nos níveis de proficiência considerados adequados pela equipe técnica do Ministério da Educação. Nosso estudo de regressão considerou variáveis contextuais/explicativas contruídas com base nos conceitos de capitais de Bourdieu e Coleman. Os resultados apontam que maiores níveis socioeconômicos, culturais e do ambiente escolar favorável à aprendizagem matemática escolares influenciam favoravelmente no comportamento da proficiência em Matemática.

Palavras-chave: Prova Brasil 2015; proficiência em Matemática; abordagem empírica; regressão linear; variáveis explicativas.

Introdução

As discussões travadas no campo da educação matemática levantam a questão da aprendizagem como crucial para o desenvolvimento dos educandos para não apenas adquirirem os conhecimentos necessários ao prosseguimento nos estudos, mas também para instrumentalizar o estudante com competências e habilidades necessárias para sua atuação crítica e autônoma na sociedade e no mundo do trabalho em constante transformação.

Em especial sobre a necessidade de se formar com qualidade os futuros cidadãos que irão atuar no mundo do trabalho, organismos internacionais, como a OCDE, atuam em contextos de influência, como define Bowe e Ball (1992, apud MAINARDES, 2006), para promover ou

estimular que os países periféricos adotem políticas de reforma curricular que se pautam, esencialmente, pela centralização curricular, avaliação em nível nacional e procesos meritocráticos de metas a serem alcançadas através do controle do trabalho docente.

A Prova Brasil é uma avaliação nacional das escolas públicas brasileiras e é realizada e conduzida pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP, vinculado ao Ministério da Educação (MEC). Tipicamente, tal avaliação faz uso de dois instrumentos de coleta de dados: os testes, ou instrumentos cognitivos e os questionários, ou instrumentos contextuais. Os primeiros são as provas de Matemática (foco em resolução de problemas) e Língua Portuguesa (foco em leitura), aplicadas aos alunos. Cabe observar que a partir de 2011 a avaliação englobou também a área de Ciências e os estudantes fizeram os três testes. Já os instrumentos contextuais são os questionários, aplicados aos estudantes, seus professores e os diretores de suas escolas. Ambos os instrumentos são construídos levando-se em consideração pressupostos da Teoria da Resposta ao Item – TRI, que consiste em um conjunto de modelos estatísticos que tornam visíveis os traços latentes de um indivíduo. No contexto da avaliação educacional, os traços latentes são as competências cognitivas dos alunos, ou seja, suas proficiências. A TRI representa um avanço em relação à teoria clássica, principalmente, por possibilitar a comparabilidade entre diferentes grupos de interesse (comparação ao longo do tempo e entre anos escolares, por exemplo). Os itens que compõem as provas são elaborados a partir das Matrizes de Referência.

Os (micro)dados da Prova Brasil de 2015 são disponibilizados na Internet, na página do INEP, para que direções de escolas e pesquisadores em avaliação educacional possam baixar seu conteúdo. A leitura dos arquivos com os dados dos questionários contextuais somente são lidos por softwares de análise estatística de dados. Para tanto, utilizamos em nosso estudo o IBM SPSS 20. Através dele realizamos algumas estatísticas descritivas de variáveis, construímos tabelas correlacionando dados e empreendemos o estudo de regressão linear.

Um primeira abordagem com os microdados referentes ao questionário contextual do aluno foi elaborar uma estatístíca descritiva para localizar a distribuição dos estudantes na escala de proficiência em Matemática. O gráfico a seguir apresenta as informações referentes a essa distribuição.

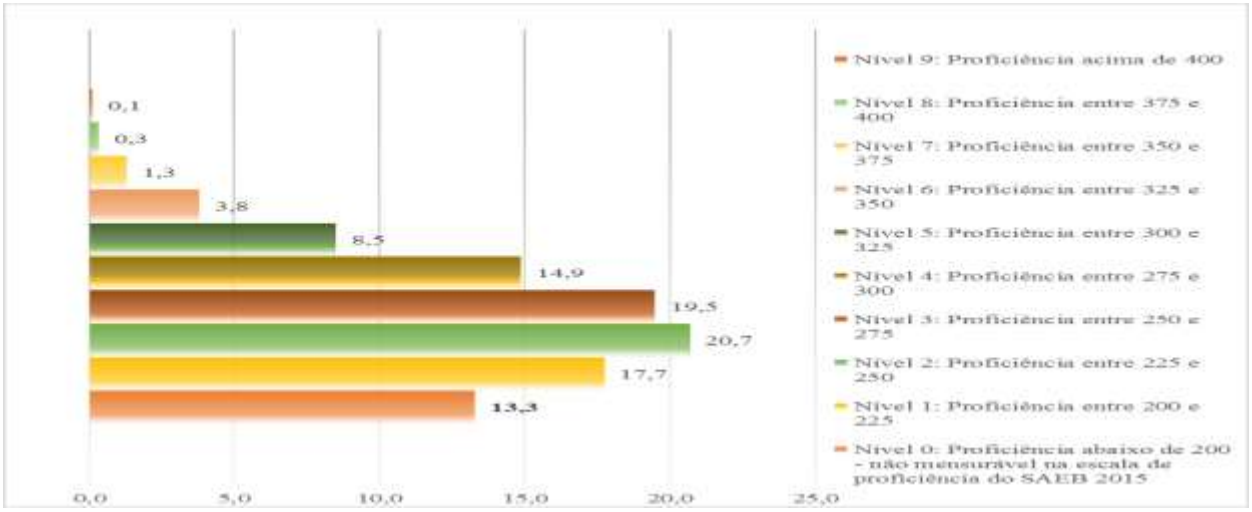


Figura 1: Distribuição percentual dos estudantes do 9º do ensino fundamental na escala de proficiênci de Matemática - SAEB 2015.

Na Figura 1 vemos a distribuição pelos níveis de proficiência contidos na escala SAEB 2015 dos mais de 1,8 milhão de dados válidos de estudantes participantes desta edição da Prova Brasil. De acordo com a Secretaria de Educação Básica do MEC (SEB/MEC), alunos que se localizam na escala nos níveis entre 0 e 3 apresentam nível de proficiência Insuficiente, de 4 a 6, Básico; e nos demais níveis, Adequado. Pelos dados apresentados, verificamos que 71,2% dos estudantes estão em níveis insuficientes de proficiência em Matemática, enquanto apenas 1,7% dos estudantes apresenta conhecimentos e competências adequadas em Matemática nesta fase final da escolarização.

A proficiência em Matemática apresenta diferenças que são motivadas por gênero e raça/cor declarada, sendo as meninas e as pessoas pretas ou pardas as que sempre apresentam piores desempenhos em Matemática, como a literatura aponta (MADEIRA & RODRIGUES, 1998; ANDRADE et al, 2003; ANDRADE et al, 2015; ANDRADE et al., 2017; BOURDIEU & PASSERON, 1975; ORTIGÃO e AGUIAR, 2013; FRANCO et al, 2004; ALBERNAZ et al., 2002).

Considerando, portanto, este resultado frustrante do desempenho em Matemática de nossos estudantes, decidimos realizar uma investigação empírica para verificar se o desempenho em Matemática, medido pela proficiência, sofre influência de determinados fatores relativos à origem socioeconômica e familiar do estudante, bem como características específicas da escola em relação à aprendizagem matemática.

Este texto conta, além desta introdução, com outras 3 seções, sendo a próxima dedicada à revisão da literatura com o objetivo de constituir o quadro de referência teórico-metodológico, seguida da seção que trata da análise dos resultados do estudo de regressão e finalizando com algumas considerações.

Referencial Teórico-Metodológico

Para realizar nosso estudo, baseamo-nos teórica e metodologicamente sob duas perspectivas básicas: o referencial teórico dos capitais de Bourdieu e Coleman e estudos empíricos que utilizam a técnica estatística da regressão linear de modo a observar a correlação entre uma variável preditora ou dependente e variáveis contextuais ou explicativas. Essa análise considerará o valor do R^2 e do coeficiente de inclinação da reta que melhor aproxima os dados e utilizaremos para realizá-la o software IBM SPSS 20.

Como citamos em nossa introdução, realizamos um estudo empírico de regressão linear de modo que pudéssemos estabelecer relações entre a variável contínua da proficiência em Matemática na prova Brasil 2015 – 9º ano do ensino fundamental – com variáveis contextuais relacionadas aos capitais sociais, econômicos e culturais. Esta inspiração se deve ao trabalho de Bourdieu (1980), Bourdieu e Passeron (1975) e Coleman (1988).

Nos anos 1960, os países centrais, como Estados Unidos, França e Inglaterra, promoveram políticas públicas de expansão e de democratização do acesso da população à escolarização. Havia um certo entusiasmo com o processo de democratização do acesso, que cedeu lugar a um pessimismo oriundo dos resultados de estudos em larga escala, que evidenciavam a distribuição desigual da aprendizagem sob influência das características dos diversos grupos sociais. De certa forma, para os grupos sociais mais desfavorecidos do ponto de vista econômico, cultural e social, a escola parecia não funcionar como espaço para aprendizagem e superação das dificuldades.

Inspiraram-nos do ponto de vista metodológico os trabalhos de Trompieri Filho (2007), Alves e Soares (2007), Caprara (2013) e Mazulo (2015), que se utilizaram do modelo de regressão linear múltipla para estudar o comportamento da proficiência em Matemática frente às escalas criadas. Utilizamos a regressão linear para realizar as discussões a respeito das correlações entre o desempenho da proficiência em Matemática com as variáveis/escalas contínuas Nível socioeconômico (NSE), Nível de Envolvimento Familiar com os assuntos escolares (NEF), Nível do Ambiente Escolar para Aprendizagem em Matemática (NAEAM) e o Nível Cultural do estudante (NC).

A construção das variáveis é melhor descrita na tabela a seguir. Nela levamos em consideração os referenciais dos capitais discutidos por Bourdieu e Coleman, e que são referenciados em diversas pesquisas empíricas (ORTIGÃO, 2006; FRANCO, ORTIGÃO e ALVES, 2007; BONAMINO et al., 2010; BONAMINO, AGUIAR & VIANA, 2012; LOUZANO, 2013; ORTIGÃO e AGUIAR, 2013; FRANCESCHINI, 2015; FRANCESCHINI, MIRANDA-RIBEIRO e GOMES, 2016; ANDRADE, BRANDÃO e MARTINS, 2017) que se utilizam desses conceitos ou realizam algumas aproximações deles. As escalas criadas se constituíram a partir de dados de variáveis do questionário contextual do aluno que se relacionavam com as ideias de capitais referenciados na literatura especializada, utilizando-se da técnica da análise de fatores, que gerou uma variável escala, precedida de uma análise da consistência da escala pela estimação do alfa de Cronbach.

Tabela 1

Descrição das variáveis contínuas utilizadas no estudo de regressão e medida de confiabilidade

ESCALAS	DESCRIÇÃO	α de Cronbach
Nível socioeconômico (NSE)	Variável construida a partir das respostas do estudante ao questionário do aluno. Foram considerados itens que revelem o nível econômico da família por meio da análise de fatores (posse de bens, estrutura da residência do estudante, familiares na mesma residência e nível de instrução dos pais). Esta escala/variável foi construída a partir das ideias de *background familiar*, de Coleman (1988), e capital social, de Bourdieu (1979).	0,731
Envolvimento Familiar com assuntos escolares (NEF)	Variável construida a partir das respostas do estudante ao questionário do aluno. Foram considerados itens relacionados à noção de envolvimento e nível de interesse da família em relação às questões escolares. Esta escala/variável foi pensada a partir do conceito de capital social no interior da família, de Coleman (1988).	0,613
Ambiente Escolar Favorável à Aprendizagem Matemática (NAEFAM)	Variável construida a partir das respostas do estudante ao questionário do aluno a questões referentes ao ambiente escolar que favorece a aprendizagem matemática, como aplicação e correção de tarefas por parte do professor de Matemática, além do gosto por esta disciplina. A variábel foi obtida via análise de fatores, tomando por base as discussões presentes em Bonamino, Aguiar e Viana (2012) e Pereira (2012).	0,653

Nível cultural (NC)	Variável construida, por meio da análise de fatores, a partir das respostas do estudante aos itens do questionário do aluno relativos a questões culturais contidas no questionário do aluno. Em especial, considerou itens que perguntam sobre frequência a museus, cinemas, teatros e hábitos de leitura. Esta variável/medida encontra lastro na discussão de capital cultural de Bourdieu (1979).	0,694

Com as variáveis discretas gênero, cor declarada e trabalho infantil fora de casa, realizamos uma análise exploratória dos dados, relacionando a média da proficiência com o gênero informado, a raça/cor declarada e o contexto de trabalho infantil, que serão apresentadas e discutidas também na seção a seguir.

Análise dos resultados do estudo de regressão linear múltipla

No estudo ora apresentado, foi construído um modelo de regressão linear múltipla para compreender como se comporta a proficiência em Matemática do SAEB 2015 em face de variáveis explicativas que foram construídas partindo dos conceitos teóricos dos capitais trazidos por Bourdieu e Coleman.

Contudo, motivados pela literatura especializada, quisemos antes correlacionar a proficiência média em Matemática com as variáveis discretas gênero (ALVES & SOARES, 2007; SIMÕES & FERRÃO, 2005; TROMPIERI FILHO, 2007), raça/cor declarada (ORTIGÃO & AGUIAR, 2013; BONAMINO et al., 2007) e contexto de trabalho infantil (ALBERTO et al., 2011), realizando uma análise exploratória desses dados.

Sobre a média da proficiência, os dados do SAEB 2015 confirmam a desigualdade de gênero verificada em estudos correlatos : a média das meninas foi de 246,61, enquanto a média dos meninos, 255,51. Também constatamos que as desigualdades motivadas pela questão da raça/cor declarada é reproduzida em termos de proficiência em Matemática: enquanto a média dos estudantes autodeclarados brancos foi de 259,73, a média verificada entre os pretos e pardos foi de 247,82, uma redução de quase 12 pontos percentuais (ou 4,5% da proficiência). Com respeito ao contexto de trabalho infantil, verifica-se que os estudantes que não trabalham fora apresentam proficiência média acima daqueles que realizam alguma atividade laboral fora de casa, com valores respectivos de 251,84 e 246,80.

Na sequência analisamos os resultados encontrados na regressão linear múltipla. Nesta análise, levamos em consideração os coeficientes obtidos em cada variável explicativa. Com o auxílio do software IBM SPSS 20, aplicamos a técnica stepwise para inserção das variáveis e analisamos também o valor do R^2 encontrado. Na tabela seguinte apresentamos as informações consolidadas para os 4 modelos estudados.

Tabela 2

Dados referentes à análise de regressão múltipla

Modelo		Coeficientes não estandartizados		R	R^2	p-valor
		B	Erro-padrão			
1	Constante	250,357	0,040	0,194	0,038	0,000
	NSE	8,726	0,040			0,000
2	Constante	250,357	,039	0,245	0,060	0,000
	NSE	8,739	,040			0,000
	NAEAM	6,605	,039			0,000
3	Constante	250,363	,039	0,246	0,060	0,000
	NSE	8,800	,040			0,000
	NAEAM	6,731	,040			0,000
	NEF	-,750	,040			0,000
4	Constante	250,224	,039	0,265	0,070	0,000
	NSE	9,024	,040			0,000
	NAEAM	7,494	,040			0,000
	NEF	,173	,041			0,000
	NC	4,633	,041			0,000

Fonte: Elaboração própria – adaptação do output do SPSS.

Da tabela acima, verificamos que o p-valor para os coeficientes é 0.000, indicando que os valores encontrados na análise para os valores de B em cada modelo são estatisticamente significativos e os resultados dialogam com a literatura, no sentido de que maiores níveis socioeconômico e cultural, bem como a existência de um ambiente favorável à aprendizagem Matemática impactam positivamente na medida da proficiência. Embora os valores do R^2 sejam baixos em todos os modelos, constatamos que os coeficientes das variáveis explicativas são todos positivos, indicando que, à medida que os valores destas variáveis crescem, o valor da variável predita/dependente proficiência em Matemática também cresce.

A única variável que apresenta comportamento inverso é a escala que mede o nível de envolvimento da família com as questões da escola, no modelo 3. O valor de B a ela associada é -0,750, indicando que, ao aumentar o NEF, a tendência será de diminuição da proficiênica em Matemática, contrariando o que a literatura apota sobre o envolvimento da família com os assuntos escolares.

Nos modelos estudados, percebemos que a variável NSE apresenta o mais elevado coeficiente associado (modelo 1 = 8,726, modelo 2 = 8,739, modelo 3 = 8,800 e modelo 4 = 9,024), indicando uma influência maior sobre a medida da proficiência em relação às demais variáveis construídas.

Estes resultados permitem inferir que a proficiência em Matemática dos estudantes do 9º ano das escolas públicas que participaram do SAEB/Prova Brasil 2015 sofre influência direta das escalas relacionadas aos capitais sociais. Sigamos, agora, para nossas conclusões sobre este estudo.

Considerações finais

Com o presente estudo se pretendeu verificar o comportamento da proficiência em Matemática de estudantes de 9º do ensino fundamental das escolas públicas frente a questões relacionadas ao gênero/sexo, raça/cor declarada, presença do trabalho infantil fora de casa, além da influência das medidas de escalas criadas com base nos conceitos de capitais de Bourdieu e Coleman.

Das análises realizadas, reiteramos resultados da literatura educacional que apontam uma desigualdade entre os gêneros, pendendo sempre para o lado dos estudantes do sexo feminino os resultados mais rebaixados. O mesmo acontece em termos de raça/cor declarada, em que os alunos autodeclarados pretos ou pardos possuem média de proficiência até 12 pontos menor do que aqueles que se delcararam brancos.

Embora as análises de regressão linear múltipla dos 4 modelos estudados tenham apresentado baixo valor para R^2, os p-valores dos coeficientes associados às variáveis explicativas são iguais a 0.000, indicando se tratar de um resultado estatisticamente significativo. À medida que aumentamos o valor do NSE (Nível socioeconômico), do NAEAM (Nível de ambiente escolar favorável à aprendizagem matemática) e do NC (Nível cultural do estudante), verifica-se que existe uma tendência de a variável proficiência em matemática acompanhar esse crescimento. A variável contínua NEF (Nível de envolvimento familiar com os assuntos escolares), ao ser adicionada no modelo 3, apresentou coeficiente negativo, indicando que, à proporçao que o NEF cresce, a proficiência descresce e vice-versa, efeito esse neutralizado no modelo 4, quando é inserida a variável NC.

As análises exploratórias também revelam dados inquietantes em relação à proficiência em Matemática: apenas 1,7% dos mais de 1,8 milhão de estudantes se localiza nos níveis 7, 8 e 9 da escala de proficiência, considerados como adequados para esta fase da escolarização. Em uma associação com os resultados da análise de regressão, evidencia-se que existem fatores externos, como nível socioeconômico e nível cultural, e internos, como um nível de ambiente escolar para aprendizagem da Matemática, que afetam de maneira direta o rendimento escolar, uma vez que na análise de regressão os coeficientes para estas variáveis, em todos os modelos estudados, apresentavam valor positivo, à exceção da variável nível de envolvimento familiar, que apresentou valor negativo – o que significa dizer que à medida em que o nível de envolvimento familiar aumeta, a proficiência em matemática diminui e vice-versa. Embora fatores externos à escola sejam difíceis de serem neutralizados pelas ações pedagógicas, o fato de despertar o gosto pela disciplina e de corrigir rotineiramente os exercícios e atividades aplicadas potencializa uma melhora na proficiência em Matemática.

Referências e bibliografia

Albernaz, A.; Ferreira, F. & Franco, C. (2002). Qualidade e equidade no ensino fundamental brasileiro. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, Rio de Janeiro, v. 32, n. 3. Disponível em: http://ppe.ipea.gov.br/index.php/ppe/article/viewFile/139/74. Acesso em 25 set. 2018.

Alberto, M. F. P.; Santos, D. P.; Leite, F. M.; Lima, J. W. & Wanderley, J. C. V. (2011). O trabalho infantil doméstico e o processo de escolarização. *Psicologia & Sociedade*, Nº 23 (2), p. 293-302, Belo Horizonte. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/psoc/v23n2/a10v23n2.pdf. Acesso em 12 ago. 2018.

Alves, M. T. G. & Soares, J. F. (2007). As pesquisas sobre o efeito das escolas: contribuições metodológicas para a sociologia da educação. *Sociedade e Estado*, Brasília, v. 22, n. 2, p. 435-473. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/se/v22n2/07.pdf. Acesso em 22 set. 2018.

Andrade, D.; Brandão, B. M. S. & Martins, A. B. T. (2017). Características comuns entre os alunos com baixo desempenho em matemática na Prova Brasil 2011: um estudo logístico. *RPEM (Revista Paranaense de Educação Matemática)*, v.6, n.10, p.204-222, jan.-jun, Campo Mourão. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1558/pdf_219. Acesso em 5 set. 2018.

Andrade, D.; Neves, K. C. R. & Brandão, B. M. S. (2015). Comportamento do aluno com atividades escolares de matemática e os contratos didático e social e a prova Brasil. *International Journal of Knowledge Engineering and Management*, v. 4, p. 166-184.

Andrade, M.; Franco, C. & Carvalho, J. P. de (2003). Gênero e desempenho em matemática ao final do ensino médio: quais as relações? *Estudos em Avaliação Educacional*, São Paulo, n. 27, p. 77-96. DOI: http://dx.doi.org/10.18222/eae02720032178. Acesso em 24 set. 2018.

Bourdieu, P. & Passeron, J. C. (1975). A Reprodução. Elementos para uma teoria do sistema de ensino. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves S.A.

Bourdieu, P (1979). Le trois états du capital culturel. *Actes de la recherche en sciences sociales*, vol. 30, pp. 3-6. Disponível em: https://www.persee.fr/docAsPDF/arss_0335-5322_1979_num_30_1_2654.pdf. Acesso em 13 ago. 2018.

Bourdieu, P (1980). Le capital social. *Actes de la recherche en sciences sociales*, vol. 31, pp. 2-3. Disponível em: https://www.persee.fr/docAsPDF/arss_0335-5322_1980_num_31_1_2069.pdf. Acesso em 13 ago. 2018.

Caprara, B. M. (2013) A influência do capital cultural no desempenho estudantil: reflexões a partir do SAEB 2003. 141 f. Dissertação (Mestrado em Sociologia) – Programa de Pós-graduação em Sociologia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/78192/000896705.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em 25 set. 2018.

Coleman, J. S (1988). Social capital in the creation of human capital. American Journal of Sociology, v. 94, p. S95-S120, The University of Chicago Press. Disponível em: https://faculty.washington.edu/matsueda/courses/587/readings/Coleman%201988.pdf. Acesso em 23 jul. 2018.

Franco, C; Ortigão, M. I. R. & Alves, F. (2007). Origem social e o risco de repetência: interação Raça-Capital econômico. *Cadernos de Pesquisa*, v. 37, n. 130, p. 161-180. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/cp/v37n130/08.pdf. Acesso em 12 set. 2018.

Madeira, F. & Rodrigues, E. (1998). Recado dos jovens: mais qualificação. In: JOVENS acontecendo na trilha das políticas públicas. Brasília, DF: CNPD, v. 2, p. 428-499.

Mainardes, J (2006). Abordagem do ciclo de políticas: uma contribuição para a análise de políticas educacionais. *Educação e Sociedade*, vol. 27, n. 94, p. 47-69, Campinas. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/es/v27n94/a03v27n94.pdf. Acesso em 18 set. 2018.

Mazulo, E. S. (2015). Análise da proficiência em Matemática por meio de Regressão Linear Múltipla. *Revista Intersaberes*, vol.10, n.21, p.613-625. Disponível em: https://www.uninter.com/intersaberes/index.php/revista/article/view/664/539. Acesso em 27 set. 2018.

Ortigão, M. I. R. & Aguiar, G. (2013). Repetência escolar nos anos iniciais do ensino fundamental: evidências a partir dos dados da Prova Brasil 2009. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, v. 94, p. 364-389, Brasília. Disponível em http://www.scielo.br/pdf/rbeped/v94n237/a03v94n237.pdf. Acesso em 29 ago. 2018.

Simões, F. & Ferrão, M. E. (2005). Competência percebida e desempenho escolar em Matemática. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 16, n. 32, p. 25-42. Disponível em: http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/eae/article/view/2134/2091. Acesso em 25 set. 2018.

Trompieri Filho, N. (2007). Análise dos resultados do SAEB/2003, via regressão linear múltipla.. 99f. Tese (Doutorado em Educação Brasileira) – Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/3146/1/2007_Tes_NTFilho.pdf. Acesso em 25 set. 2018.



Análise da produção escrita das crianças como estratégia de Avaliação

Alessandra Silva de Souza
Programa de Pós-graduação da Universidade Federal de Mato Grosso Brasil
ped.alessandrass@gmail.com
Camile de Araujo Aguiar
Programa de Pós-graduação da Universidade Federal de Mato Grosso Brasil
camilearaujo2009@gmail.com
Mariana Honório de Alencastro Teles
Programa de Pós-graduação da Universidade Federal de Mato Grosso Brasil
mari-alencastro@hotmail.com

Resumo

O presente artigo apresenta dados de uma pesquisa em andamento que objetiva analisar a produção escrita de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola do Município de Cuiabá – MT ao resolverem problemas matemáticos. A compreensão do que a criança diz e produz propicia a realização de um processo avaliativo que leve em consideração as peculiaridades de cada criança ao resolver as situações problemas. Neste sentido, buscamos identificar quais estratégias foram utilizadas pelas crianças na resolução de situações problema envolvendo ideias de subtração. A opção metodológica escolhida foi a abordagem qualitativa, tendo como procedimentos e instrumentos de produção de dados: observação, caderno de campo, produções escritas e as narrativas das crianças. Neste sentido, os resultados apontam que as crianças ao serem incentivadas, escrevem e narram como resolvem problemas de subtração, o que pode oportunizar ao professor intervir para que a criança avance em sua aprendizagem em matemática.

Palavras-chave: Produção escrita, Avaliação, Subtração, Situações problemas, Crianças.

Avaliação no contexto escolar

O processo de avaliação é assunto constante no âmbito da educação em termos de elevação dos índices nacionais. Entretanto, quando se pensa no contexto escolar no que tange à aprendizagem das crianças, este tema não é discutido em sua totalidade sobre os seus fins, fundamentos e potencialidades para a prática pedagógica de ensino.

Sendo assim, questionamentos são assinalados sobre os mecanismos, instrumentos e enfoques utilizados no processo de avaliar o que as crianças produzem no âmbito escolar. Em nosso contexto atual, quando pensamos em avaliação, em muitos momentos são anunciadas no sentido de selecionar, elevar e dar destaque ao que correspondem positivamente aos seus requisitos propostos. Nesse viés**,** a avaliação em muitos contextos é tida como um instrumento

para medir as competências entre os erros e acertos. (BUORO, TORTELLA, 2015, p.509) elucidam que "A escola reproduz o que a sociedade impõe, como valores, comportamento, competição e submissão".

Desse modo, quando se pensa o processo de aprendizagem, principalmente quando se trata dos anos iniciais, a avaliação não considera as singularidades das crianças e é utilizada como etapa de atribuição de notas e classificação de alunos. Em razão disso, concordamos com Luckesi (2008) quando estabeleceu uma discussão sobre a pedagogia do exame, por meio da qual, a escola e seus participantes têm suas atenções centradas na promoção do aluno.

Nesta perspectiva, Moura e Palma (2008) também ressaltam que:

> A avaliação tem um lugar natural na escola, como se o ato de ensinar aprender ficasse mutilado sem a aplicação desse processo. As três dimensões ensinar-aprender-avaliar são consideradas indissociáveis no âmbito do ensino escolar. A cultura escolar não sabe descrever a aprendizagem do aluno sem passar pela avaliação (Moura, Palma, 2008, p 13).

Desta forma, a ausência de discussões sobre as produções das crianças, e a atenção direcionada aos erros e acertos presentes nas avaliações impulsionam atividades mecânicas que passam a ganhar destaque em ambientes que privilegiam somente o acerto.

Neste sentido, compreendemos que, medir e comparar as crianças entre seus pares baseando-se em erros e acertos cometidos numa avaliação, nega os saberes que a criança possui. A avaliação pode se configurar em um importante instrumento de análise e reconhecimento das percepções dos alunos, se for acompanhada de um olhar interpretativo sobre as respostas das crianças. Concordamos com Luckesi (2000, p.95) quando propõe que, "a avaliação do aproveitamento escolar seja praticada como uma atribuição de qualidade aos resultados da aprendizagem dos educandos [...]".

Produção e registros escritos da criança

É perceptível que as práticas e experiências que envolvem a produção escrita da criança no processo de ensino e aprendizagem, na maioria das vezes estão imbricadas a uma etapa avaliativa que ganha destaque nas discussões quando se pensa sobre o aprendizado da criança. Entretanto, o que um aluno demonstra saber numa prova pode não revelar verdadeiramente o que ele pensa, mas sim, indicar caminhos para que o professor possa intervir. Concordamos com Nagy, Buriasco (2008) quando ressaltam que:

> Analisar a produção escrita de alunos em questões de matemática contribui, entre outras coisas, para que o professor busque interpretar e entender as respostas apresentadas e o porquê das estratégias escolhidas. Essa atitude investigativa propicia ao professor (re)

> conhecer que conhecimentos os alunos já possuem e quais ainda estão em construção (p.35).

Neste sentido, entendemos que a análise da produção escrita da criança deve ser compreendida como processo pedagógico imbuída num conceito de diagnóstico para mediação da aprendizagem conceitual da criança. Em razão disso, a análise da produção escrita das crianças no contexto escolar pode ser considerada como etapa de diagnóstico, bem como uma estratégia de ensino assim como pondera Santos, Buriasco (2010).

> Qualquer produção, seja aquela que apenas repete uma resolução-modelo, seja a que indica a criatividade do estudante, tem caraterísticas que permitem detectar as maneiras como o estudante pensa e, mesmo, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal. Assim, analisar as produções é uma atividade que traz, para o professor e para os alunos, a possibilidade de entender, mais de perto, como se dá a apropriação do saber pelos estudantes. (CURY, 2017, p.15).

Portanto, cabe aos sujeitos envoltos no processo de análise das produções, buscarem caminhos para perceberem o porquê de tais construções dos alunos, bem como intervenções para uma aprendizagem mais significativa.

Caminhos metodológicos

Nossa pesquisa foi realizada em uma escola da Rede Municipal de Educação de Cuiabá, no estado de Mato Grosso - Brasil onde atende o 5º do Ensino Fundamental, situada em um bairro que tem como uma de suas características a vulnerabilidade social.

Para o desenvolvimento da pesquisa escolhemos a abordagem qualitativa por considerarmos a concepção de González Rey (2012, p.102) que esclarece “o dado como evidência incontestável da realidade existe, no entanto seu significado é sempre uma produção humana”. Desse modo, para o desenvolvimento do presente trabalho, nossos dados foram produzidos tendo como participantes principais as crianças e contexto escolar, os participantes tiveram papel ativo, de modo que puderam expressar o por meio da fala e escrita às estratégias que utilizaram.

Concordamos com as ideias de Lanner de Moura (1995) quando elucida que pesquisas desenvolvidas em ambientes escolares a postura do pesquisador não se define apenas como observador, mas também como participante do processo, por meio do qual, os dados serão produzidos. Para a produção dos dados, desenvolvemos uma situação problema com 6 crianças em idade de 11 anos. Com isso, salientamos que inserir crianças no campo da pesquisa pressupõe uma prática que compreende nossos participantes enquanto protagonista.

Nesse sentido, compreender o que se passa no íntimo de uma criança é desafio aos pesquisadores. Dar voz às crianças, fazendo-as protagonistas de pesquisas, proporciona meios para que possam expressar suas vontades, desejos e opiniões. Esse movimento requer do investigador sensibilidade ao analisar o contexto e a aproximação com a criança. Neste sentido, Altino e Barbosa (2010) nos alertam sobre o respeito às peculiaridades que são próprias da infância,

> Destacamos a importância de construirmos mecanismos e estratégias metodológicas que nos aproximem das crianças pequenas, elaborando recursos férteis e procedimentos de interlocução entre as duas lógicas geracionais – dos adultos e das crianças – as quais são muito diferentes entre si, mas que estão entrelaçadas pela cultura e a produção da própria história. (Barbosa, 2010, p. 12).

Analisar o que a criança produz e registra, nos permite compreender a criança em sua totalidade, oportuniza o direito de se manifestarem, respeitando sua infância, sua cultura e entendê-la como um participante ativo da pesquisa enquanto produtora de conhecimento. Desse modo, organizamos os dados por meio das produções escritas e narrativas das crianças, que puderem expressar acerca de suas estratégias utilizadas no registro da resolução das situações problema.

Propusemos uma situação problema envolvendo o conceito de subtração com a ideia de retirar, e de modo individual buscaram a solução do problema matemático. Em seguida explicaram para a pesquisadora como pensaram o processo e quais estratégias utilizaram.

Depois, realizamos a leitura e análise dos registros das crianças com intuito de conhecer o sentido que atribuíram às questões, por meio das narrativas, suas expressões e estratégias utilizadas para obterem tais respostas. Para as discussões e análises dos dados, identificamos as crianças com as siglas A1, A2, A3, A4, A5 e A6 com intuito de preservar a identidade dos participantes de nossa pesquisa.

Análise dos dados

Resolver situações problema no contexto escolar é uma proposta imprescindível para aprendizagem das crianças, a qual possibilita a apropriação de esquemas mentais para o desenvolvimento do pensamento matemático da criança a partir de acontecimentos e situações do nosso cotidiano.

A estratégia utilizada pelos alunos A5 e A4, conforme figura 3 e figura 4, para subtrair foi a utilizado o algoritmo tradicional da subtração, uma disposição da dezena de maior

quantidade sobre a de menor quantidade, com os seus valores posicionais alinhados, ou seja, dezenas com dezenas e unidades com unidades. É o resultado de um processo já consolidado onde elabora e cumpre atividade independente sem a necessidade de ajuda. No contexto escolar consideramos que é um conhecimento que a criança já domina.

O nosso sistema de numeração decimal possui algumas características dentre elas o valor posicional que é composto por dez símbolos de zero a nove, o suficiente para registrar qualquer ordem de grandeza. Tendo em vista que, o nosso sistema de numeração foi sendo adequado no decorrer de nosso contexto histórico. Desde a antiguidade o homem aprendeu a contar utilizando pedras, pedaços de madeiras e partes do corpo. A contagem é uma invenção histórica e cultural com características próprias, praticada desde a era primitiva a partir da necessidade de quantificar.

Ao compreendermos sobre esses conhecimentos que foram produzidos desde os primatas. Em nossa sociedade atual, em muitos momentos não conseguimos respeitar os diferentes princípios lógicos que as crianças utilizam para quantificar. Quando aplicado os saberes individuais das crianças às técnicas matemáticas sistematizadas culturalmente será possível ampliar essa habilidade nas crianças por meio de um pensar matematicamente. Assim, diante desse processo, "A maioria das pessoas aceitariam que na aprendizagem da matemática há princípios lógicos e há invenções culturais, e que as crianças têm que dominar ambos os aspectos." (NUNES; BRYANT, 1997, p. 28).

Entretanto, percebemos que o aluno A6, conforme a figura 2 ficou constrangido ao realizar o cálculo utilizando como suporte técnica a contagem nos dedos, tendo em vista que em muitos momentos, as estratégias pessoais que a crianças decidem adotar não são bem aceitas, e assim, passam a ser treinados para realizarem uma única convenção.

1) José está organizando uma excursão de barco no rio Cuiabá. No barco cabem 84 pessoas, porém, José conseguiu vender somente 48 ingressos. Quantos ingressos não foram vendidos?

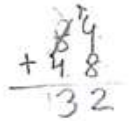


Figura - 1 Registro da Aluna A1.

Assim, conforme figura 1, diante da situação problema, A1 demonstrou dúvida na resolução da questão, questionou a pesquisadora se a questão era de mais ou de menos, em seguida colocou-se a pensar e logo afirmou: *Há já sei é de mais a conta.*

De acordo com a estratégia adotada por A1, podemos pensar que a aluna não compreendeu o enunciado da questão ou ficou em dúvida, primeiro realizou uma operação de adição, porém, apagou a resposta e iniciou uma operação de subtração ainda com o sinal de adição. Disse para pesquisadora que 4 não dá para 8, então, emprestaria 1 do vizinho. Sendo assim, pelo modo como alcançado o resultado, criamos a hipótese de que A1 não compreendeu o que estava sendo pedido e, como consequência disso, em sua estratégia de resolução utilizou inadequadamente as operações aritméticas de adição e subtração, não conseguindo resolver o problema.

Dessa forma, A6 usou a ideia de completar, disse para pesquisadora que pegou a menor dezena e foi acrescentando até chegar à maior dezena. Para a resolução o aluno utilizou um registro por meio de risquinhos e somou nos dedos, para isso, o aluno escondeu as mãos embaixo da mesa e começou a contar nos dedos.

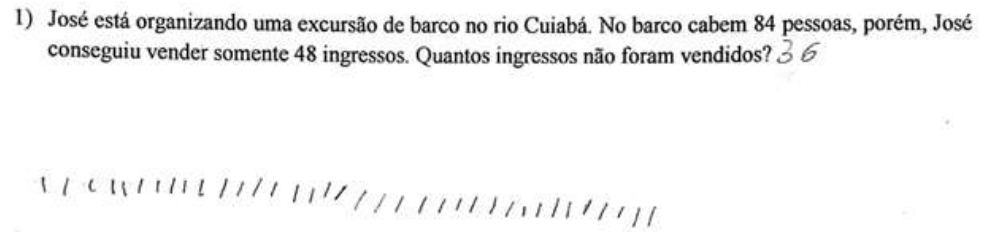
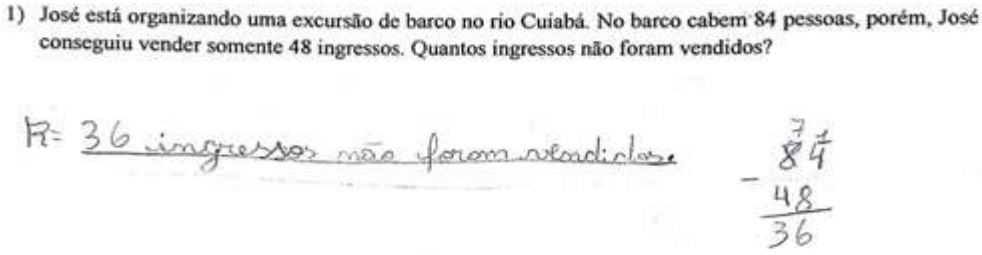

1) José está organizando uma excursão de barco no rio Cuiabá. No barco cabem 84 pessoas, porém, José conseguiu vender somente 48 ingressos. Quantos ingressos não foram vendidos? 36

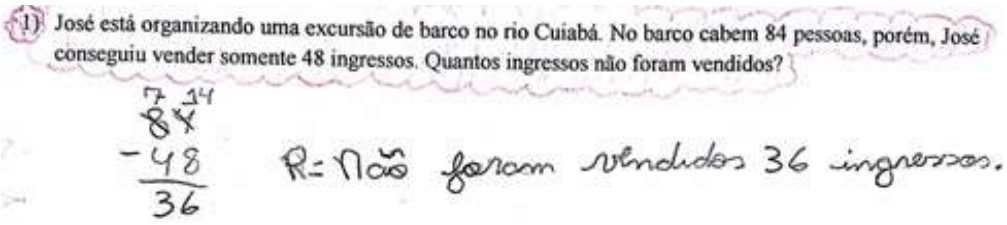
Figura - 2 Registro do aluno A1.

A aluna A5 não consegue utilizar uma linguagem matemática para explicar os procedimentos realizados. Ela assim, se manifestou: *Coloquei o maior número sobre o menor, mas 4 não tira 8, por isso, emprestei do vizinho e ficou 14, 14-8 é igual a 6. O 8 virou 7, então 7-4 é igual a 3. A resposta é 36.*


1) José está organizando uma excursão de barco no rio Cuiabá. No barco cabem 84 pessoas, porém, José conseguiu vender somente 48 ingressos. Quantos ingressos não foram vendidos?

R= 36 ingressos não foram vendidos.

Figura - 3 Registro do Aluno A4.


1) José está organizando uma excursão de barco no rio Cuiabá. No barco cabem 84 pessoas, porém, José conseguiu vender somente 48 ingressos. Quantos ingressos não foram vendidos?

R= Não foram vendidos 36 ingressos.

Figura - 4 Registro do Aluno A5.

Buriasco (2008) elucida que, ao analisar os registros escritos dos alunos, é relevante que o professor busque o maior número de formas possíveis de compreendê-los. Diante disso, ao analisarmos o que os alunos produziram pudemos perceber as diferentes estratégias que os alunos utilizaram, ao serem considerados no processo avaliativo, esses procedimentos distintos, podem auxiliar o professor a planejar suas próximas aulas de modo que possa mediar a aprendizagem de seus alunos a partir do que as próprias crianças apresentaram.

É evidente que na resolução de situações problemas envolvendo a subtração, as crianças participantes da pesquisa associaram a operação à ideia de retirar conforme o teor da situação. Para além, excluíram outras opções na resolução dizendo que a estratégia que utilizaram era a correta. Outro aspecto suscitado é que as crianças não utilizaram termos convencionais para explicar seus procedimentos, ou seja, são comuns as expressões “emprestar um do vizinho”, “vai um”, sem a compreensão do processo de decomposição e valor posicional que os números ocupam.

Concluímos que o problema apresentado não foi tão complexo levando em consideração a faixa etária das crianças que frequentam o 5º ano do Ensino Fundamental. Nesse sentido, consideramos que os alunos deveriam ter demonstrado mais segurança ao narrarem sobre o processo de resolução, bem como apresentado estratégias mais elaboradas e diversificadas ao resolverem e explicarem a produção escrita.

Algumas considerações

Enquanto pesquisadoras, nosso intuito foi direcionar nosso olhar sobre os fins e fundamentos acerca da avaliação entre os diferentes contextos que ela se apresenta. Compreendemos que a análise da produção escrita e a narrativa das crianças nos processos avaliativos do contexto escolar podem potencializar as práticas avaliativas que podem ser consideradas como etapa de diagnóstico da aprendizagem.

Ante esse precedente, cabe aos sujeitos envoltos no processo da avaliação e análise das produções, buscarem caminhos para perceberem o porquê de tais construções dos alunos, bem como intervenções para uma aprendizagem mais significativa. Por meio de nossas análises pudemos perceber que algumas das dificuldades apresentadas nas respostas dos alunos fazem parte de uma ausência conceitual que podem se revista a partir da intervenção do professor.

Constatamos que as crianças não estão acostumadas a falar sobre como resolvem os problemas, a descreverem procedimentos. Infelizmente socializar o que pensam, o que produzem e com quais procedimentos utilizam, não é uma atividade presente nas aulas de matemática o que

impossibilita que as crianças desenvolvam não só as estratégias cognitivas, mas também as metacognitivas.

Referências

ALTINO, J. M.; BARBOSA, M.C.S. **Metodologias de pesquisas com crianças**. Revista Reflexão e Ação, Santa Cruz do Sul, v.18, n2, p.08-28, jul./dez. 2010.

BUORO, E.; TORTELLA J. C. B. **Avaliação para promoção ou para reprovação?** Compreensões de estudantes, professores e gestores de uma rede municipal**.** R. Educ. Públ. Cuiabá v. 24 n. 57 p. 507-523 set./dez. 2015.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Avaliação e educação matemática.** org. Recife: SBEM, 2008.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 2º ed. Reimp. Belo Horizonte. Autêntica, 2017.

GONZÁLEZ REY, F.L. **Pesquisa qualitativa e subjetiva:** os processos de construção da informação. São Paulo: Cengage Learnig, 2015.

LANNER DE MOURA, A. R. **A medida e a criança pré-escolar.** (Tese de doutorado). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1995.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar**: estudos e proposições/ Cipriano Carlos Luckesi. ed.19 – São Paulo: Cortez, 2008.

MOURA, A, R, L. PALMA, R, C, D**. A avaliação em matemática: lembranças da trajetória escolar de alunos de pedagogia**. In. Avaliação e educação matemática/ Regina Luzia Corio de Buriasco, org.-Recife: SBEM, 2008..

MELLO, E. M. **A análise de dificuldades de alunos com algoritmo da subtração.** (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo 2008.

NAGY- SILVA, M, C. BURIASCO, R, L**. A análise da Produção Escrita em Matemática: possível contribuição**. In. Avaliação e educação matemática/ Regina Luzia Corio de Buriasco, org.-Recife: SBEM, 2008.

NUNES, T. BRYAN,P. **Crianças fazendo matemática.** trad. Sandra Costa. — Porto Alegre Artes Médicas, 1997.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Atitudes de alunos do Ensino Fundamental em relação à Matemática

Vera Cristina de **Quadros**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Brasil
vera.quadros@cnp.ifmt.edu.br
Luiza de Souza **Oliveira**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Brasil
luizabcao@hotmail.com

Resumo

Este trabalho objetiva socializar a pesquisa realizada sobre as atitudes que os alunos do Ensino Fundamental apresentam em relação à Matemática. A pesquisa quantitativa foi realizada no segundo semestre de 2017, com 135 alunos dos 5º, 7º e 9º anos de uma escola pública no interior do estado de Mato Grossso/Brasil. Como instrumento, utilizou-se um questionário e a escala de atitudes em relação à Matemática. Os resultados obtidos apresentam crescentes índices de atitudes negativas na proporção em que os alunos avançam no tempo de vida escolar. Tendo em vista que as atitudes resultam das experiências e que é do professor a responsabilidade de propiciar essas experiências, considera-se que a construção de atitudes positivas nos alunos deva ser um objetivo dos professores de Matemática, mediante a adoção de metodologias contextualizadas e participativas.

Palavras-chave: ensino de matemática, ensino fundamental, escala de atitudes, experiências, processo de ensino e de aprendizagem.

Durante as práticas e os estágios curriculares supervisionados do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (IFMT) foi possível perceber que vários alunos demonstravam pouco interesse em aprender Matemática.

Via-se alunos que temiam conhecer conteúdos matemáticos por pensar que eram difíceis, inacessíveis. Eles traziam uma história negativa de convívio com a Matemática. Se considerar que o ensino de Matemática implica em ir além do conteúdo e da metodologia, que demanda despertar o gosto por essa ciência e o interesse por conhecê-la, parece que o desintesse em aprender é algo que vem sendo construído durante a vida escolar desses alunos.

Mas será que a maioria dos alunos não gostam de Matemática? Nesse contexto, emergiu o interesse em investigar quais as atitudes que os alunos do Ensino Fundamental apresentavam em relação à Matemática, junto a uma escola pública no interior do estado de Mato Grosso (MT), no Brasil.

Atitudes em relação à Matemática

Conforme Moura e Crepaldi (2010, p. 391), na atualidade, "o estudo das atitudes transformou-se num campo frutífero de investigação, principalmente dos educadores e psicólogos sociais, preocupados com o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem".

Estudos sobre o desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à Matemática vem ocupando cada vez mais espaço, pois parte-se do pressuposto de que a atitude positiva favorece o aprendizado e permite maior eficiência e criatividade por parte do aluno (Gonçalez, 2000).

Existem vários significados atribuídos ao termo atitude. Adota-se aqui a definição de atitude proposta por Brito (1996, p. 11), de que a "atitude é uma disposição pessoal peculiar de cada um, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo".

Para muitos, o termo atitude é compreendido como sinômino de comportamento e motivação, porém esses termos expressam fenômenos diferentes. Afinal, as "atitudes são componentes dos estados internos dos indivíduos e o comportamento é a manifestação desse estado" (Brito, 1996, p.13).

As atitudes não são gerais e possuem sempre um referente, ou seja, é sempre *atitude em relação a* e, sendo um evento interno, aprendido, com componentes cognitivos e afetivos que variam em intensidade, é dirigida a um objeto específico.

A atitude constitui-se numa condição psicológica necessária para que o indivíduo realize uma tarefa com sucesso. Segundo Araújo (1999), as atitudes se formam a partir das experiências. Assim, "as atitudes em relação à matemática influenciam e são influenciadas pelo ensino dessa disciplina, pela maneira como ela é trabalhada na escola, pela forma como os primeiros conceitos básicos são adquiridos" (Araújo, 1999, p. 45). Além da relação com a forma como é ensinada a Matemática, a atitude também tem relação com o desempenho escolar, ao sucesso ou insucesso na aprendizagem. Por isso, para essa pesquisadora, o desempenho matemático "não pode ser desassociado do desenvolvimento de habilidades próprias e da formação de atitudes positivas em relação à Matemática e ao seu ensino" (Araújo,1999, p.14).

Considerar que as atitudes se formam a partir das experiências e que o desempenho depende das atitudes formadas implica na compreensão de que a atitude pode ser desenvolvida, que não é estável, que pode ser transformada de negativa para positiva. E isso é fundamental para o trabalho do professor, pois se seu trabalho for voltado para o desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à escola e às disciplinas, aumentará a probabilidade de que seus alunos desenvolvam atitudes mais positivas.

Sobre isso, Brito (1996, p. 13) afirmou que "compreender as atitudes em relação à Matemática significa buscar as experiências que o indivíduo teve com relação a essa disciplina e compreendê-las dentro do contexto dessas experiências". As modificações nas atitudes dos alunos, forjadas pelas experiências escolares, foi constatada por Brito (1996). Ela identificou que os alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental gostavam da Matemática, mas, com o avanço das séries, esse sentimento ia ficando confuso, até chegar a repulsa.

De lá para cá pouco mudou. Os indicadores de desempenho escolar têm mostrado que os alunos do Ensino Fundamental estão tendo mais dificuldades para aprender Matemática com o passar dos anos. Segundo Mansutti (2003), nas séries iniciais os professores respeitam mais as descobertas dos alunos, trabalham de uma forma mais intuitiva e se interessam pela atividade matemática. Porém, com o avanço dos anos escolares, o ensino mecânico passa a preponderar e tem por resultado uma queda no desempenho dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Considerando que as atitudes ocupam um papel central em todo ato de aprendizagem e englobam componentes do domínio cognitivo, afetivo e comportamental, seria importante que, durante a atividade pedagógica, o professor estivesse atento aos conhecimentos e crenças que seu aluno já possui sobre o assunto.

Um dos caminhos metodológicos para se desenvolver atitude positiva no aluno pode ser a utilização da História da Matemática. Assim, o aluno pode perceber a importância da Matemática na sociedade e discutir sua aplicação nas diferentes carreiras profissionais e na própria sociedade contemporânea. Outras possibilidades são: utilizar técnicas de grupo, atividades lúdidas, atividades desafiadoras que estimulem os alunos a criarem, questionarem, argumentarem, resolverem problemas, investigarem a Matemática.

Outro ponto importante para a aquisição de atitudes positivas é o ambiente amistoso, prazeroso e desafiador da sala de aula e as relações entre professor e alunos. Importa que o professor possua sentimentos favoráveis com relação à disciplina, demonstrando coerência entre suas teorias, sua prática e sua atitude. Importa também que o professor valorize e reconheça qualquer e todo progresso dos alunos, contribuindo para elevar a autoestima deles.

Metodologia

Para investigar quais as atitudes que os alunos do Ensino Fundamental apresentam em relação à Matemática, definiu-se por realizar uma pesquisa de abordagem quantitativa.

Em virtude do objetivo da pesquisa, propô-se uma pesquisa descritiva, buscando descrever as atitudes de um determinado grupo, utilizando técnica padronizada de coleta de dados (questionário). Segundo Gil (2010), este tipo de pesquisa se presta para estudar características de grupo como levantamento de opiniões, atitudes, crenças de uma população.

Triviños (1987) destaca que há estudos descritivos que se denominam ‘estudos de casos’, cujo objetivo é aprofundar a descrição de determinada realidade e, por isso mesmo, os resultados são válidos apenas para o caso que se está estudando.

Nessa perspectiva, definiu-se por realizar um estudo de caso na Escola Municipal Jardim das Palmeiras (Escola JP), em Campo Novo do Parecis/MT/Brasil. O campo de pesquisa foram as turmas de 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental da Escola JP e os sujeitos foram todos os alunos dessas turmas. A escolha desses anos letivos foi porque o 5º ano encerra os anos iniciais e o 9º encerra os anos finais do Ensino Fundamental; e o 7º ano, por ser intermediário desses dois (5º e 9º anos), além de encerrar um ciclo escolar (6º/7º anos).

Dos 212 alunos, participaram da pesquisa 135 alunos. O questionário foi aplicado no período de 04 a 08 de dezembro de 2017, no horário de aula. Nos dias de aplicação, alguns alunos faltaram. Assim, responderam ao questionário 69 alunos do 5º ano, 52 alunos do 7º ano e 14 alunos do 9º ano.

Quanto aos meios, utilizou-se o levantamento de dados, através de questionário. Como

buscou-se investigar atitudes, o levantamento permitiu interrogar diretamente os sujeitos. Então, definiu-se pela aplicação de um questionário, por ser um instrumento de investigação útil para recolher esse tipo de informação (atitudes) do público-alvo constituído (alunos do Ensino Fundamental), além de possibilitar interrogar um elevado número de alunos num espaço de tempo relativamente curto.

Adotou-se um questionário do tipo misto, utilizando questões abertas e fechadas. Nas questões fechadas, adotou-se a escala de atitudes em relação à Matemática que foi traduzida, adaptada e validada por Brito (1996, 1998) e é do tipo Likert, com 21 proposições (10 positivas e 11 negativas), que tentam expressar o sentimento que cada indivíduo possui em relação à Matemática (vide Apêndice A). Essa escala foi escolhida por ser frequentemente utilizada nas pesquisas que buscam verificar os sentimentos que cada indivíduo apresenta com relação à Matemática.

É uma escala do tipo Likert, que permite medir as atitudes e o grau de conformidade do sujeito com a afirmação proposta. Nesse questionário, embora os sujeitos revelem se concordam ou não com afirmações pré-estabelecidas, permite que expressem com detalhes a sua opinião, já que as categorias de resposta servem exatamente para capturar a intensidade dos sentimentos dos respondentes.

Nesse caso, nenhuma proposição foi considerada certa ou errada, pois apenas refletiam as expressões dos sujeitos quanto ao sentimento que experimentavam frente a cada um dos enunciados.

Cabe esclarecer que essa escala mede a direção do sentimento dos alunos com relação à disciplina de Matemática, mas em uma única dimensão – sentimento de gostar (gosta ou não gosta). Os demais componentes que podem interferir nessa dimensão, como o professor, o método de ensino, o ambiente escolar, a relação com os outros alunos, não são negados, apenas não foram objeto de investigação nesse trabalho. Cabe destacar também que não se investigou as causas dos sentimentos revelados pelos alunos, mas sim quais os sentimentos revelados.

Resultados

A atitude, por ser um construto, não pode ser medida diretamente. Por isso, faz-se necessário utilizar instrumentos que possam medir as variáveis secundárias que estão relacionadas com este construto.

Segundo Brito (1996), as atitudes em relação a uma determinada disciplina podem ser medidas por meio de escalas do tipo Likert, que são compostas de itens que contemplam uma ou mais dimensões das atitudes (afetiva, cognitiva, valor frente a disciplina, utilidade, etc). Então, avaliando as dimensões é possível indentificar se as atitudes dos alunos são mais positivas ou mais negativas, conhecendo-se assim o comportamento dos mesmos em relação à uma disciplina.

A escala utilizada, adaptada por Brito (1996), composta por 21 itens do tipo Likert, sendo 10 afirmativas positivas (itens 3, 4, 5, 9, 11, 14, 15, 18, 19, 20) e 11 negativas (itens 1, 2, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 16, 17, 21), mediu a direção do sentimento dos alunos com relação à disciplina de Matemática, mas em uma única dimensão da atitude, a afetividade, expressa pelo sentimento de gostar (‘gosta’ ou ‘não gosta’).

O questionário foi aplicado aos alunos das oito turmas do 5º, 7º e 9º anos dos períodos matutino e vespertino. São quatro turmas de 5º anos, três turmas de 7º anos e apenas uma turma de 9º ano. Responderam 135 (cento e trinta e cinco) alunos, sendo 63 meninos e 72 meninas.

Nessa escola, a grande maioria estava no ano escolar adequado para sua idade cronológica: 10 a 11 anos no 5º ano, 12 a 13 anos no 7º ano e 14 a 15 no 9º ano. Apenas um aluno tinha mais de 15 anos e era um aluno especial, cursando o 7º ano.

Escala de atitudes em relação à Matemática

Para a análise, considerando que estatisticamente a média é muito afetada pelos valores extremos, optou-se por verificar a frequência de pontos obtidos pelos alunos.

No 5º ano, a maioria dos estudantes apresentou uma atitude positiva em relação à Matemática, pois: 84,06% escolheram a opção concordo ou concordo totalmente para as afirmações *03 - Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática* e *05 - A Matemática me faz sentir seguro(a)* e 78,26 % para o item *04 - A Matemática é fascinante e divertida e é, ao mesmo tempo, estimulante.* Também nas assertivas *09 - O sentimento que tenho com relação à Matemática é bom, 14 - Eu gosto realmente da Matemática* e *20 - Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: eu gosto e aprecio essa disciplina,* somadas as opções concordo ou concordo totalmente, o percentual foi acima de 80%.

Esses alunos revelaram apreço, denotando um vínculo afetivo positivo para com a Matemática, julgando-a interessante, fascinante e divertida. Considerando que as atitudes são formadas a partir das experiências, parece-nos que esses alunos têm experienciado um ensino de Matemática que lhes agrada e produz significados. Muito provavelmente, experiências determinadas por uma prática pedagógica mediadora do professor.

A afirmação *21 - Não tenho um bom desempenho em Matemática* foi incluída por Brito (1996) com o objetivo de verificar a respeito do próprio desempenho em Matemática. No 5º ano, apenas 21,74% dos alunos acreditavam não ter bom desempenho em Matemática. Isso parece revelar que, além da atitude favorável em relação à Matemática, esse grupo de alunos tem elevada autoestima em relação à sua aprendizagem, considerando-se como alunos que apresentam bom desempenho em Matemática.

Nas respostas dos alunos do 7º ano, os dados indicam que os resultados médios de todas as proposições tendem mais para resultados negativos que positivos. A maioria apresentou uma atitude positiva em relação à Matemática, mas em percentuais menores que os identificados com os alunos do 5º ano (nenhum chegou ao patamar de 80%). Demonstram maior atitude positiva nas seguintes proposições: *03 - Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática*, com 75% de concordância (entre as opções concordo ou concordo totalmente); *9 - O sentimento que tenho com relação à Matemática é bom,* com 71,15%; *14 - Eu gosto realmente da Matemática*, com 65,39%; *11 - A Matemática é algo que eu aprecio grandemente* e *20 - Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: eu gosto e aprecio essa disciplina*, ambos com 63,46%.

A assertiva negativa que obteve acima de 50% de indicação dos alunos foi a 6 - "Dá um branco" na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo Matemática (51,92%), seguida da número 1 - Eu fico sempre sob uma terrível tensão na aula de Matemática, com 50%. Depois, com 46,16% de concordância, ficaram as proposições 7 – Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática, 10 – A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída e 13 – Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz em Matemática.

A incidência dessas atitudes negativas em um grupo onde predominam as atitudes positivas parece ser decorrente de experiências escolares centradas nos resultados, ou seja, aulas de Matemática com ênfase no treinamento, na repetição de exercícios onde o erro não é aceitável, onde o sucesso na aprendizagem tem estreita relação com o êxito nas resoluções, em detrimento do processo.

No 9º ano, o quadro sofreu alterações, aumentando o percentual de atitudes negativas em relação à Matemática. Suas respostas tendem às atitudes positivas mas nenhum aluno tem na Matemática a disciplina preferida, sendo que 50% dos alunos revelaram ter um sentimento de aversão quando ouvem a palavra Matemática.

Parece que nessa turma havia dois grupos distintos: os que gostavam e os que não gostavam de Matemática. Há consistência nas respostas, quase sempre foi o mesmo quantitativo que demonstrou concordância com as atitudes positivas e discordância com as atitudes negativas.

Cabe destaque que mesmo entre aqueles que revelaram gostar de Matemática, há indícios de que a metodologia centrada no paradigma do exercício é a causadora de angústia e sofrimento, pois 64,29% sente-se nervoso em pensar sobre a obrigação de resolver um problema.

Os resultados obtidos apresentaram crescentes índices de atitudes negativas na proporção em que os alunos avançam no tempo de vida escolar. Tal constatação dá indícios de que a metodologia e o vínculo afetivo experenciados nos primeiros anos escolares não se mantém, e essa mudança acaba sendo determinante para modificar as atitudes dos alunos em relação à Matemática.

Nesse sentido, constata-se a similaridade entre os resultados dessa pesquisa e os resultados de Brito (1996), Araújo (1999) e Mansutti (2003). Inferi-se que, com o avanço dos anos escolares, o ensino mecânico passou a preponderar, resultando em uma queda no desempenho dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e, por conseguinte, numa oscilação na atitude, ficando mais negativa.

Talvez esses alunos (dos 7º e 9º anos) foram deixando de perceber a utilidade da Matemática, experienciando frustração, desinteresse e desmotivação. Aí, a queda no desempenho, o sentimento de angústia e de incapacidade tiveram espaço, minando a alta autoestima que tinham quando menores, nos primeiros anos escolares.

Considerando que as atitudes ocupam um papel central em todo ato de aprendizagem, os resultados acendem um sinal de alerta, de que algo não vai bem e precisa ser visto, modificado. É mais uma pesquisa a confirmar a necessidade de mudança nas práticas pedagógicas dos professores educadores matemáticos, já que a aquisição de atitudes positivas dependem de um ambiente amistoso, prazeroso e desafiador e das relações afetivas constituídas entre professor e alunos.

Considerações

Os resultados mostraram que os alunos dos sétimos anos e, em especial, do nono ano, apresentam maiores índices de atitudes negativas em relação à Matemática do que os alunos do quinto ano.

A primeira consideração a se fazer é sobre a validade da escala de atitudes utilizada. Mesmo em contexto histórico e social diverso, os resultados obtidos nessa pesquisa são bastante próximos dos obtidos em outras pesquisas.

A segunda consideração é sobre o que os resultados indicam. Parecem indicar que algo não vai bem no ensino da Matemática. Algo ocorre que resulta na mudança de atitudes dos alunos, em uma mudança para pior, pois os índices de atitudes positivas apresentadas nos anos iniciais não são mantidos nos anos finais do Ensino Fundamental. Embora as atitudes não sejam estáveis e podem ter vários condicionantes (pessoais, familiares, culturais, escolares, de ensino e de aprendizagem), não se pode negar a importância do ambiente de ensino e de aprendizagem proporcionado pelo professor de Matemática.

As atitudes resultam das experiências e é do professor a responsabilidade de propiciar essas experiências que podem resultar em atitudes positivas. Cabe-lhe ser competente pedagogicamente, estanto atento à sua prática pedagógica e ao seu próprio comportamento com relação à Matemática, testemunhando atitudes positivas não só à sua disciplina, mas também à escola que trabalha. Afinal, a construção de atitudes positivas nos alunos deve ser um objetivo dos professores que pretendem romper com o paradigma do exercício no ensino da Matemática. mediante a adoção de metodologias contextualizadas e participativas que propiciem essa construção.

Referências

Araújo, E. A. (1999). *Influência das habilidades e das atitudes em relação à Matemática e a escolha profissional.* 232 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Brito, M. R. F. (1996). *Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º Graus*. 339 p. Tese (Livre-Docência). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Brito, M. R. F. (1998). Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à Matemática. *Zetetiké*, Campinas, v. 6, n. 9, p. 109-162.

Gil, A. C. (2010). *Como elaborar projetos de pesquisa*. 5ª ed. São Paulo: Atlas.

Gonçalez, M. H. C. C. (2000). *Relações entre a família, o gênero, o desempenho, a confiança e as atitudes em relação à Matemática*. 171 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Mansutti, M. A. (2003). Matemática para a vida. *Diário do Grande ABC*, São Paulo, 7 nov. 2003.

Moura, G. R. S., & Crepaldi, M. V. L. (2010). As atitudes em relação à matemática dos estudantes da 3ª e 4ª séries do ensino fundamental e dos licenciandos em pedagogia. *Atos de Pesquisa em Educação*, v. 5, n. 3, p. 390-408, set./dez.

Triviños, A. N. S. (1987). *Introdução à pesquisa em Ciências Sociais: apesquisa qualitativa em educação*. São Paulo: Atlas.

Apêndice A

Escala de atitudes em relação à Matemática

Instruções: Cada uma das frases abaixo expressa o sentimento que cada pessoa apresenta com relação à Matemática. Você deve comparar o seu sentimento pessoal com aquele expresso em cada frase, assinalando um dentre os quatro pontos colocados ao lado de cada uma delas, de modo a indicar com a maior exatidão possível, o sentimento que você experimenta com relação à Matemática.

Frases:		Discordo totalmente	Discordo	Concordo	Concordo totalmente
1	Eu fico sempre sob uma terrível tensão na aula de Matemática.				
2	Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazer essa disciplina.				
3	Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.				
4	A Matemática é fascinante e divertida.				
5	A Matemática me faz sentir seguro(a) e é, ao mesmo tempo, estimulante.				
6	"Dá um branco" na minha cabeça e não consigo pensar claramente quanto estudo Matemática.				
7	Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.				
8	A Matemática me deixa inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente.				
9	O sentimento que tenho com relação à Matemática é bom.				
10	A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.				
11	A Matemática é algo que eu aprecio grandemente.				
12	Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.				
13	Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz em Matemática.				
14	Eu gosto realmente de Matemática.				
15	A Matemática é uma das disciplinas que eu realmente gosto de estudar.				
16	Pensar sobre a obrigação de resolver um problema estatístico me deixa nervoso(a).				
17	Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que me dá mais medo.				
18	Eu fico mais feliz na aula de Matemática do que na aula de qualquer outra disciplina.				
19	Eu me sinto tranquilo(a) em Matemática e gosto muito dessa disciplina.				
20	Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: eu gosto e aprecio essa disciplina.				
21	Não tenho um bom desempenho em Matemática.				

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Luz e Cores: uma abordagem investigativa envolvendo Física, Matemática e Biologia na EJA

Juliana Dias de **Moraes**
Universidade Federal de Uberlândia
Brasil
julianadimoraes@hotmail.com
Rogério Fernando **Pires**
Universidade Federal de Uberlândia
Brasil
rfpires@ufu.br

Resumo

O presente estudo tem por objetivo apresentar os resultados de uma investigação que visou abordar na Educação de Jovens e Adultos – EJA a temática Luz e Cores a partir de uma sequência didática utilizando o ensino investigativo; a fim de que essa metodologia pudesse proporcionar um aprendizado concreto e garantir a efetiva participação dos alunos em todas as etapas de construção do conhecimento. O estudo, de caráter qualitativo, foi realizado em uma escola pública no munícipio de Araguari no Estado de Minas Gerais. Os resultados mostram que ao final do processo os estudantes mudaram a visão que tinham da disciplina de Física centrada em grandiosos cálculos matemáticos e passaram entende-la como uma ciência cujos conhecimentos necessitam de ferramentais de outras áreas como, a Matemática e a Biologia.

Palavras chave: luz, cores, física, matemática, biologia, didáctica, educação de jovens e adultos.

Introdução

A Educação de Jovens e Adultos – EJA, é uma modalidade de ensino assegurada por lei que, a partir da Constituição de 1988, artigo 208, ficou estabelecido que o Estado tem o dever de garantir "Ensino Fundamental, obrigatório e gratuito, inclusive sua oferta gratuita para todos os que não tiveram acesso na idade própria". Em 11 de novembro de 2009, por meio da Emenda Constitucional nº 59, esse artigo sofreu alterações, prevalecendo o inciso I do Art. 208, que passou a assegurar "Educação básica obrigatória e gratuita dos 4 (quatro) aos 17 (dezessete) anos de idade, assegurada inclusive sua oferta gratuita para todos os que a ela não tiveram acesso na idade própria". Dessa forma, além do Ensino Fundamental, a oferta do Ensino Médio também passou a ser um dever do Estado, inclusive para os jovens e adultos; sendo necessário

ser maior de quinze anos para ingressar no Ensino Fundamental, e maior de dezoito anos para o Ensino Médio (Brasil, 1988).

Para Kurmmenauer, Costa e Silveira (2010), um dos principais problemas da EJA está relacionado com os expressivos índices de evasão escolar. Grande parte dos alunos, ingressantes nessa modalidade de ensino, passaram vários anos sem frequentar a escola, portanto apresentam dificuldade de caráter cognitivo, com notável dificuldade para compreender diversos conteúdos, principalmente, a Física e a Matemática. A ausência de conhecimentos anteriores, considerados conhecimentos prévios, contribui para o aumento dessa dificuldade. Além disso, o uso de metodologias descontextualizadas também contribui para o aumento dos índices de evasão, pois os alunos não conseguem estabelecer relações entre o que é estudado e o que é observado em seu cotidiano; aumentando a abstração temática e dificultando a compreensão dos conteúdos, fazendo com que abandonem o curso novamente.

De acordo com Azevedo (2004), o modo isolado com que as aulas – teóricas, práticas e resolução de problemas, são desenvolvidas, contribui para que os alunos tenham uma visão equivocada da Física e da Matemática, deixando-a cada vez mais distante de sua realidade e, chegando muitas vezes a considerar que a Matemática utilizada na Física é diferente daquela aprendida nas aulas de Matemática. Por outro lado, os alunos apresentam um bom desenvolvimento e uma melhor compreensão conceitual quando participam de processos investigativos propostos pelo professor e quando a abordagem relaciona o estudo com suas observações cotidianas. Portanto, o planejamento dessas duas disciplinas necessita privilegiar atividades investigativas, acompanhadas de situações problemas que possibilitem relacioná-las e favoreça a efetiva participação do aluno no processo de ensino e aprendizagem, tornando-o capaz de debater, levantar hipóteses, defender suas ideias e aplicar seus conhecimentos, podendo assim desenvolver novas habilidades e, principalmente, aprender de fato o que está sendo estudado.

O uso de *softwares* educacionais, aliado ao ensino investigativo, contribui para a compreensão dos conteúdos, minimizando a abstração temática e proporcionando uma melhor visualização de processos, esquemas e imagens. Proporciona também a interação entre o aluno, peça chave da ação educativa, e seu professor, orientador da ação; bem como a interação do aluno com o recurso tecnológico, objeto de estudo, deixando a aula mais interessante, motivando o aluno e agregando valor e sentido ao estudo. Entretanto, apesar do grande desenvolvimento tecnológico e da considerável acessibilidade aos diversos tipos de recursos tecnológicos, principalmente, computadores e celulares, observa-se um uso irrisório desses recursos nas escolas, em que apenas o livro didático, o quadro negro e o giz são utilizados (Gregório; Oliveira & Matos, 2016).

Enquanto os alunos se mostram fascinados pela tecnologia e usuários de diversos aparatos tecnológicos, os professores ainda encontram obstáculos e dificuldades para inserir esses recursos em suas práticas. O processo formativo dos professores, as condições de trabalho e a informatização das escolas, estão entre os principais fatores que precisam de um olhar especial, pois, só assim, o professor terá condições de fazer um bom uso desses recursos; com preparo, material suficiente e espaço adequado para a realização de suas atividades. Estamos vivendo em um mundo cada vez mais tecnológico, portanto, o ensino não pode continuar sendo fundamentado em métodos reprodutivistas e conteudistas; a escola precisa acompanhar esse processo evolutivo (Macêdo, Dickman & Andrade, 2012).

Diante do que foi mencionado até aqui, elaboramos uma sequência didática para o tema "Luz e Cores", utilizando como base o uso de vídeos e imagens, e, aliado a esses recursos,

fundamentamos nossa proposta no ensino investigativo. Para isso, utilizamos a seguinte pergunta de pesquisa: Como o ensino investigativo pode contribuir para que o aluno da EJA participe ativamente de todas as etapas da aplicação da sequência didática e da construção de um conhecimento que vá além da simples memorização de conceitos e fórmulas?

O ensino investigativo

O ensino investigativo, segundo Ferraz e Sasseron (2013), é uma metodologia de ensino que proporciona a interação entre os alunos e as especificidades da Ciência, promovendo também as interações argumentativas; em que os alunos participam ativamente do processo de construção do conhecimento, levantando hipóteses e defendendo suas concepções, prévias ou não, a fim de solucionar situações problemas propostas pelo professor, que atua como orientador e não como o único detentor do saber. O ensino investigativo favorece a argumentação, a interação entre os envolvidos e o conhecimento, promovendo o desenvolvimento de habilidades necessárias para a compreensão dos temas e conceitos científicos.

Pesquisas sobre o ensino investigativo mostram que, como o aluno é levado a participar ativamente dos processos investigativos, essa metodologia vem sendo bastante utilizada nos programas de ensino de diferentes áreas do conhecimento. Portanto, para se obter sucesso com o uso dessa metodologia, é fundamental que o aluno se sinta motivado a participar das investigações, fazendo com que a atividade se torne prazerosa e proporcione um aprendizado satisfatório. Sasseron (2015, p. 58) "denota a intenção do professor em possibilitar o papel ativo de seu aluno na construção do entendimento sobre os conhecimentos científicos. Por esse motivo, caracteriza-se por ser uma forma de trabalho que o professor utiliza na intenção de fazer com que a turma se engaje com as discussões e, ao mesmo tempo em que travam contato com fenômenos naturais, pela busca de resolução de um problema, exercitam práticas e raciocínios de comparação, análise, e avaliação, bastante utilizadas na prática científica".

Esse processo contribui tanto para a aprendizagem da Física, quanto da Matemática, uma vez que ao observar fenômenos naturais e resolver problemas provenientes da Física, os estudantes utilizam ferramentas matemáticas para explicar os fenômenos e validar hipóteses, construindo assim, os conceitos físicos e matemáticos ao mesmo tempo.

Ainda segundo Sasseron (2015), as atividades investigativas não se resumem a uma única estratégia intrínseca, podendo ser apresentadas na forma de testes empíricos, experimentos de pensamento, análise e avaliação de dados, elaboração de hipóteses, embate de informações e diversas formas de investigações, o que é a base para a construção do conhecimento não só na Física, mas também na Matemática.

Metodologia de pesquisa

Este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, cujo objetivo é observar a interação dos alunos com os recursos utilizados, analisando o desenvolvimento e a compreensão da temática estudada. A pesquisa qualitativa, segundo Silveira e Córdova (2009), tem o intuito de elucidar a razão de ser das coisas, sem se preocupar com o valor numérico da amostra; na qual o único objetivo é gerar informações que independem da quantidade, mas que forneçam novas informações sobre o que se pretende analisar. Ainda de acordo com Silveira e Cordova (2009, p. 32) "a pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com os aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das

relações sociais. [...] a pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis".

Durante a realização da sequência didática, buscamos observar a interação dos alunos com os recursos utilizados, a fim de analisar como esses materiais podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem. Para promover o processo investigativo e registar as informações, elaboramos questões problematizadoras, que disponibilizamos em formato de questionários; nos quais retiramos os dados necessários para verificar todo o processo de desenvolvimento do aprendizado.

Para organizar e analisar os dados obtidos com a aplicação dos questionários, utilizamos a Análise de Conteúdo, a fim de verificar as percepções e o desenvolvimento dos alunos ao longo da aplicação. A análise de conteúdo (AC) é uma metodologia de pesquisa que envolve métodos diversificados, que buscam descrever e interpretar, sistematicamente, o conteúdo de mensagens, possibilitando também que o pesquisador faça inferências acerca dos dados obtidos (Cavalcante, Calixto& Pinheiro, 2014). Portanto, buscamos identificar, nas respostas, informações relevantes para analisar o processo de aprendizagem, evidenciando a presença ou não de novas informações, a fim de verificar quais conhecimentos prévios se firmaram e quais conhecimentos foram acrescentados.

Etapas da construção da sequência didática

Na primeira etapa de construção da sequência didática, escolhemos a temática a ser estudada: "Luz e Cores". A partir daí, fizemos um estudo na proposta curricular de Física do Ensino Médio das escolas públicas da rede estadual de Minas Gerais; a qual estabelece, por meio dos Conteúdos Básicos Comuns (CBC), os temas e tópicos que devem ser estudados, estabelecendo também as habilidades e as competências que devem ser adquiridas pelos estudantes da educação básica.

Com base nesse estudo, elaboramos a parte conceitual da sequência didática de acordo com as competências e habilidades estabelecidas:

i. Saber explicar a dispersão da luz branca gerando um conjunto de cores;
ii. Conhecer o efeito dos filtros na luz branca;
iii. Compreender como objetos coloridos aparecem sob a luz branca e outras cores.

Na segunda etapa, elaboramos as questões problematizadoras, a fim de promover os processos investigativos e motivar o estudo. O primeiro questionário foi elaborado com o intuito de analisar os conhecimentos prévios dos alunos e tratava da percepção das cores:

i. Por que enxergamos as cores?
ii. Como a luz interfere na percepção das cores? Ela interfere?
iii. E os nossos olhos, como interpretam as informações captadas através da visão, diferenciando as cores, as formas e outras características das imagens?

Para responder essas questões, os alunos usaram seus conhecimentos empíricos e foram motivados com um vídeo do efeito "Stroop", o qual aparece o nome de diversas cores, porém essas palavras são pintadas com outras cores e é solicitado que diga a cor da palavra e não o nome da cor.

Juntamente com as questões problematizadoras, selecionamos imagens que pudessem contribuir para que o aluno relacionasse o estudo com suas observações cotidianas, suas

vivências fora da escola, podendo assim instigar e motivar a investigação. Buscamos incrementar as explicações com vídeos curtos, baixados da Internet, através do You Tube; a fim de aproximar o estudo da realidade, diminuir a abstração temática e apresentar um novo olhar sobre o estudo do tema.

Análise e discussão dos resultados

Nesta parte do trabalho, evidenciaremos as principais observações feitas durante a aplicação da sequência didática e, com base nas respostas dadas nos questionários, verificaremos o desenvolvimento dos alunos perante tudo o que foi estudado.

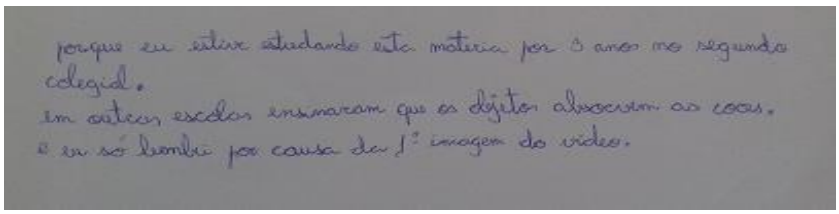
O primeiro fato que nos chamou a atenção foi o envolvimento dos alunos que participaram da aplicação, vários deles demonstraram curiosidade a respeito do tema e da dinâmica das aulas, já que estavam acostumados com aulas teóricas e resolução de problemas. A troca de sala, da sala de aula para a sala de recursos, não atrapalhou o desenvolvimento da aplicação e, no decorrer das aulas, os alunos já se organizavam rapidamente para realizar essa troca.

Apenas sete alunos participaram da primeira aula, o restante faltou nesse dia. Os alunos se acomodaram e começamos a apresentação do conteúdo exibindo o vídeo do efeito *"Stroop"*. Observamos que o vídeo conseguiu impressionar e motivar os alunos, pois, como eles não conseguiam cumprir a tarefa de dizer a cor que estava colorindo a palavra, ficaram intrigados, buscando estratégias para realizar o que era solicitado no vídeo; um aluno apresentou como estratégia olhar apenas para a primeira letra da palavra, evitando a leitura completa. Acreditamos que esse primeiro momento foi muito importante para o desenvolvimento da aula, já que, além de possibilitar a participação dos alunos, gerou um clima de descontração que raramente acontece nas aulas de Física e nem nas aulas de Matemática.

Logo após esse momento, apresentamos o primeiro processo investigativo da sequência, em que as perguntas foram entregues para cada aluno em uma folha impressa, na forma de questionário; apresentadas também em slides, acompanhadas por imagens chamativas relacionadas ao questionamento. Os alunos usaram seus conhecimentos prévios para responder os questionamentos e tiveram dificuldades para elaborar as respostas, talvez pelo fato de nunca terem parado para pensar nesse assunto ou por não estarem acostumados com esse tipo de atividade investigativa.

Na primeira questão os estudantes levaram em consideração levaram em consideração apenas os conceitos biológicos, referentes às estruturas do olho humano, mas não mencionaram quais estruturas e como ocorre esse processo. Um aluno também mencionou a percepção através dos olhos, entretanto, disse que "qualquer cor diferente do branco será percebida pelos olhos"; fato que deixou transparecer a ausência de conhecimento acerca das características da luz, mais precisamente a cor da luz, sua reflexão e absorção.

Ao ler a resposta dada por um dos alunos: "porque os objetos absorvem todas as cores que estão na luz e reflete apenas aquela que vemos."; ficamos intrigados com a clareza e a presença de conceitos como reflexão e absorção da luz. Ao conversar com o aluno, ele relatou


porque eu estive estudando esta materia por 3 anos no segundo colegial.
em outras escolas ensinaram que os objetos absorvem as cores.
e eu só lembrei por causa da 1ª imagem do video.

que era a terceira vez que que estava cursando o segundo ano, mas que uma das imagens utilizadas na apresentação fez com que ele se lembrasse do que já havia estudado em outras ocasiões; então pedimos que relatasse em seu questionário o que o levou a responder corretamente a primeira pergunta:

*Figura 1***.** Justificativa da resposta dada no primeiro questionário

Com base no primeiro questionário, observamos que, na ausência de certos conhecimentos, os alunos tiveram algumas dificuldades, principalmente, na formulação das respostas, levando um tempo considerável para responder e finalizar a atividade; aparentando ansiedade e inquietação. Houve troca de informações entre os participantes, gerando um momento de discussão, em que vários fatos relacionados com o cotidiano foram mencionados, levando-nos a perceber a importância desse tipo de atividade para o processo de ensino e aprendizagem, pois favorece o diálogo entre os alunos, proporcionando momentos de reflexão e troca de experiências e conhecimentos.

Foi possível perceber que as atividades propostas causaram estranheza em boa dos estudantes, uma vez que muitos estavam acostumados com as aulas que priorizavam a Matemática que era apresentada nas aulas como fórmulas preestabelecidas que eran palicadas a partir das informações numéricas que eran dadas nos problemas apresentados. No decorrer da realização das atividades foi possível perceber que alguns alunos conseguiram establecer algunas relações matemáticas, como, por exemplo, foi muito interesante o depoimento de um estudante que disse que: “a luz é refletida e existe um ângulo de reflexão e que esse ângulo não pode ser diferente daquele em que a luz é projetada”. Em outras palavars, o estudante quis dizer que o ângulo de reflexão (R) é sempre igual ao ângulo de incidencia (I). Isso mostra que por meio da investigação o conceito foi sendo construido.

Essa resposta levantou uma discussão sobre a reflexão da luz e a visão através de lentes que foi algo que não era esperado no momento da preparação da sequência didática. Nesse momento a professora/pesquisadora falou sobre os espelhos concavos e convexos e, o que chamo mais a atenção dos estudantes foram os espelhos côncavos pela aproximação das lentes utilizadas em óculos. Isso despertou a curiosidade deles em saber como as imagens se formam nessa lente, conforme mostra a figura a seguir.

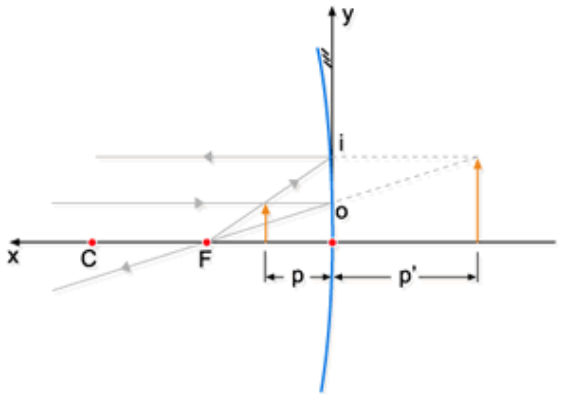


Figura 2. Posição da imagen em espelhos côncavos

A professora/pesquisadora mostrou para os estudantes como se determina a posição da imagen conhecendo a distância focal e a posição do objeto, contudo sem establecer uma fórmula Matemática que foi aos poucos sendo construida coletivamente nas discussãoes com a turma, chegando a equação de Gauss $\frac{1}{F} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p\prime}$.

Ao final dos encontros, os alunos relataram que as aulas foram diferentes, pois os conceitos

de Física inicialmente eram apresentados independentes da Matemática e mais ligados à aspectos biológicos. No entanto, ao longo das discussões e investigações os conceitos matemáticos foram sendo integrados aos conceitos físicos e biológicos, o que caracteriza a construção do conceito em sua plenitude.

Isso fez com que os estudantes olhassem para a Física não mais como uma disciplina difícil que envolve cálculos matemáticos gigantestos, mas sim uma Ciência que se utiliza de ferramentas de outras áreas do conhecimento como a Matemática e a Biologia. Isso só foi possível graças ao ensino investigativo que de acordo com Ferraz e Sasseron (2013) possibilita o desenvolvimento de habilidades necessárias para a compreensão dos temas e conceitos científicos.

Assim na sequência didática desenvolvida com esses alunos da Educação de Jovens e Adultos foi possível a professora/pesquisadora não ensinar apenas Física, mas fazer com que eles compreendessem que o proceso de construção do conhecimento científico não é limitado ao campo de uma única disciplina, mas sim interdisciplinar.

Considerações finais

Além da evasão escolar, outro problema, enfrentado nas turmas da EJA dessa escola, está relacionado com a frequência dos alunos, o que acabou inviabilizando uma análise mais criteriosa do desenvolvimento individual dos participantes; sendo necessário realizar todas as atividades em grupo.

O ensino investigativo favoreceu a interação dos alunos com os objetos de aprendizagem e com o tema de estudo, proporcionando momentos ricos em discussões e reflexões. O trabalho em grupo fluiu muito bem e, mesmo estando em grupos diferentes, os alunos se ajudaram, trocando ideias para responder as situações propostas. Na EJA, os alunos, normalmente, apresentam mais maturidade, são menos competitivos e buscam ajudar os colegas em suas dificuldades.

O ensino tradicional, além de não garantir a efetiva participação do aluno na construção do conhecimento, compromete o desenvolvimento de outras habilidades, como pôde ser observado durante a aplicação deste trabalho. Os alunos são treinados a responder apenas o que já foi ensinado pelo professor e, muitas vezes, simplesmente repetem o que foi explicado, sem compreender de fato o que estão transcrevendo. Quando são convidados a refletir, sobre algo que ainda não foi estudado em sala, eles demonstram inquietação e dificuldade para organizar as ideias e colocá-las no papel.

As imagens e os vídeos contribuíram para diminuir a distância entre o tema e o mundo real, agregando valor e sentido ao estudo; conectando as perguntas aos fatos e fenômenos que podem ser observados e vivenciados pelos alunos; ativando a memória e contextualizando a abordagem.

O estudo de um conteúdo de Física, sem a presença inicial de cálculos matemáticos, chamou a atenção dos alunos, que consideraram o ensino mais significativo e próximo da realidade. Porém, os cálculos são indispensáveis para o estudo da óptica e, de acordo com o CBC, esses tópicos também devem ser estudados pelos alunos. Portanto, consideramos que essa sequência didática, ou parte dela, também pode ser utilizada com o intuito de aproximar o estudo da óptica e o cotidiano, diminuindo a abstração temática, promovendo a participação e interação dos alunos com outros recursos e, principalmente, verificando a relação entre a Física, a Biologia e a Matemática, em que a abordagem intedisciplinar é fundamental para a compreensão efetiva do tema de estudo.

Consideramos que foi importante proporcionar esses momentos de reflexão e promover as discussões, já que os alunos, nem sempre, conseguem compreender o que é meramente recitado pelo professor; que simplesmente ouvir, memorizar e repetir informações não gera aprendizado. É preciso levar o mundo que existe fora da escola para dentro da sala de aula, pois nosso aluno vive nesse mundo; um mundo cada vez mais dinâmico, não o mundo estático e monótono em que o conhecimento é apresentado de maneira fragmentada, disposto em "caixinhas" intituladas de disciplinas.

Referencias y bibliografía

Azevedo, M. C. S. (2004). Ensino por investigação: problematizando as atividades em sala de aula. *Ensino de Ciências: unindo a pesquisa e a prática,* (pp.19-33). São Paulo: Pioneira.

Brasil. (1988). Ministério da Educação, Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade: Diretoria de Políticas de Educação de Jovens e Adultos

Cavalcante, R. B., Calixto, P., Pinheiro, M. M. K. (2014). Análise de Conteúdo: considerações gerais, relações com a pergunta, possbilidades e limitações do método. (pp. 13-18). João Pessoa: Educação & Sociedade.

Ferraz, A. T., Sasseron, L. H. (2013). Dualidade Argumentativa: Os productos da argumentação em aulas investigativas. *Atas do IX Enpec*. (pp. 1-8).

Gregório, E. A., Oliveira, L. G., Matos, S. A. (2016). Uso de simuladores como ferramenta no ensino de conceitos abstratos de Biologia: Uma proposição investigativa para o ensino de síntese proteíca. (pp. 101-125). Belo Horizonte: Experiências em Ensino de Ciências.

Krummenauer. W. L., Costa, S. S. C., Silveira, F. L. (2010). Uma experiencia de ensino de física contextualizada para a educação de jovens e adultos (pp. 69-82). Belo Horizonte: Revista Ensaio.

Macêdo, J. A., Dickman, A. G., Andrade, I. S. F. (2012). Simulações computacionais como ferramentas para o ensino de conceitos básicos de eletricidade. (pp. 562-613). Florianópolis: Caderno Brasileiro de Ensino de Física.

Sasseron. L. H. (2015). Alfabetização Científica, Ensino por Investigação e Argumentação: Relações entre Ciências da Natureza e Escola. (pp. 49-67). Belo Horizonte: Revista Ensaio.

Silveira, D. T., Cordóva, F. P. (2009). A pesquisa Científica (pp. 31-42). Porto Alegre: Editora da UFRGS.



Tecnologias Assistivas no processo de aquisição do conceito de número: estudo na perspectiva da deficiência visual

Maria Adelina Raupp **Sganzerla**
PPGECIM, Universidade Luterana do Brasil
Brasil
maria.sganzerla@ulbra.br
Marlise **Geller**
PPGECIM, Universidade Luterana do Brasil
Brasil
Marlise.geller@ulbra.br

Resumo

Este artigo apresenta um recorte da tese de doutorado que investiga o uso das Tecnologias Assistivas na aquisição do conceito de número e princípios da contagem por deficientes visuais. O relato refere-se a uma aluna cega, cursando o ensino fundamental, inserida em uma classe inclusiva, pertencente a uma escola da Grande Porto Alegre, com a qual se desenvolveu atividades relativas à contagem. A metodologia perpassa por um estudo descritivo por meio de observações em campo e intervenções pedagógicas, em que buscamos analisar, a partir de alguns dos princípios da contagem, as estratégias empregadas por essa aluna e seu desenvolvimento em três anos de observações. Dessa análise, observamos o uso de procedimentos que potencializam os sentidos remanescentes desses alunos, bem como a evolução na contagem.

Palavras Chaves: Tecnologias Assistivas, Ensino de Matemática, Deficiência Visual, Inclusão.

Introdução

A inclusão escolar no Brasil iniciou com os princípios da Declaração de Salamanca em 1994, confirmando-se na Constituição Federal de 1998 (Brasil, 1998), que determina a igualdade de condições a matricula na escola para todos, independentemente de sua condição física ou intelectual e, também, a oferta de Atendimento Educacional Especializado (AEE), preferencialmente no ensino regular. Diante do desafio da inclusão, surgem a necessidade de

estudo e a busca por recursos voltados a esses alunos, sendo uma das possibilidades o uso de TA (Tecnologias Assistivas) como forma de auxilio nos AEE.

O presente artigo trata-se de um recorte de uma tese de doutorado inserida na área de inclusão do Curso de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PPGECIM, em que relatamos algumas das experiencias de um dos sujeitos da pesquisa, aluna cega cursando o ensino fundamental, que apresenta algumas dificuldades na questão da contagem. Tal análise deu-se a partir de alguns dos princípios da contagem propostos por Gelman (1978) e, também, empregados por Kamii (2012). Relatamos três momentos, com três Tecnologias Assistivas distintas: Material Dourado, Contátil e Math, realizando atividades nas quais foi possível explorar a contagem, além de estratégias utilizadas pela aluna para resolver os problemas propostos.

Tecnologias Assistivas na área da Matemática para cegos

O termo Tecnologia Assistiva pode ser definido como "o acesso a todo o arsenal de recursos que necessitam e que venham favorecer uma vida mais independente, produtiva e inclusiva no contexto social geral" (Bersch; Tonolli, 2008, p. 2).

O processo de aprendizagem dos alunos cegos, nas escolas inclusivas, se constitui a partir dos sentidos remanescentes, sendo eles: tato, audição, olfato e paladar, exigindo, assim o uso de materiais que facilitem a discriminação e/ou identificação do tamanho, textura, volume, peso, além da necessidade de sons variados, despertando assim curiosidade e vontade de aprender. Para a representação gráfica/escrita é utilizado o Sistema Braille[1]. A discriminação tátil é uma habilidade básica que deve ser desenvolvida pela criança cega, pois, dessa forma ela será capaz de elaborar as informações sobre tamanho, forma, peso, consistência, espessura, densidade, textura, dentre outras propriedades dos objetos, fazendo com que crie a representação mental necessária para a abstração da contagem.

O uso da TA tem sido importante, pois algumas dessas barreiras estão sendo quebradas, como os leitores de tela, a reglete e a punção para escrita, a bengala para a locomoção entre

[1] *Sistema Braille: é um código universal de leitura tátil e de escrita, usado por pessoas cegas, inventado na França por Louis Braille, um jovem cego. É constituído por 64 sinais em relevo cuja combinação representa as letras do alfabeto, os números, as vogais acentuadas, a pontuação, a notas musicais, os símbolos matemáticos e outros sinais gráficos.*

outras. Dentre as TA, destacamos as três utilizadas durante as interações com a aluna cega: o Material Dourado, a Contátil e a Math.

O Material Dourado, idealizado e utilizado por Maria Montessori, uma médica e educadora italiana, para auxiliar no ensino de crianças que apresentavam distúrbios de aprendizagem na aritmética (Silva; Araujo, 2011). Este é constituído por cubinhos que representam as unidades, barras representando as dezenas, placas compondo as centenas e o cubo que forma o milhar. Com o auxílio dos cubos, das barras e das placas é possível compreender, por meio de atividades, o sistema de numeração decimal, valor posicional e métodos para efetuar as operações fundamentais (algoritmos).

A Contátil, contar + tátil, consiste na (re)adaptação e mecanização do material dourado, surgiu a partir das inquietações do grupo pesquisa Lei – Laboratório de Estudos de Inclusão, onde verificamos a necessidade de uma TA voltada ao ensino de cegos. A pesquisa teve como questão básica: "Quais as potencialidades e limitações de uma Tecnologia Assistiva implementada para o ensino de conceitos básicos de Matemática considerando a deficiência visual?" (Sganzerla, 2014), sua implementação fez parte do Trabalho de Conclusão de Curso em Ciência da Computação (Marques, 2015).

Já a TA, Math Touch objetiva possibilitar ao aluno cego uma maior interação na entrada de dados, tornando o aluno mais ativo no processo da sua aprendizagem. Prototipada em um Trabalho de Conclusão de Curso em Ciência da Computação (Moeller, 2016), no qual computacionalmente apresenta uma atividade matemática e monitora sua solução pela posição de um conjunto de botões acionados, que representará um número, solução desta atividade. Esses botões estão dispostos na forma de uma matriz 5 x 5, à disposição do usuário para interação.

As TA voltadas para o ensino de Matemática ainda são escassas, necessitando de pesquisas e implementações para que possamos realmente ter uma educação inclusiva de qualidade.

Metodologia

O referido relato é parte integrante de uma pesquisa de doutorado[2], inserida na linha de Inclusão no Ensino de Ciências e Matemática, originando-se das inquietações do mestrado

[2] *Aprovada pelo Comitê de Ética sob protocolo número CAAE: 66101616.5.0000.5349*

(Sganzerla, 2014) e das discussões no grupo de estudos LEI, articuladas em um projeto sobre TA (aprovado no Edital de Apoio a Projetos de Tecnologia Assistiva – CNPq/MCTIC/SECIS Nº 20/2016).

A pesquisa tem por objetivo investigar as TA como recursos para a aquisição do número por deficientes visuais. Para tanto foi constituído um grupo de 5 alunos do Ensino Fundamental. Neste artigo, o recorte da pesquisa envolve o relato de observações e intervenções pedagógicas com a aluna Maria (nome fictício), envolvendo estratégias da contagem, com uma abordagem metodológica qualitativa (Moreira; Caleffe, 2006). A opção da escolha da aluna, participante da pesquisa, ocorreu por apresentar muitas dificuldades na contagem, um dos fatores é o grau elevado de proteção familiar. Com o intuito de buscar as impressões e saberes desta participante da pesquisa, foram apresentadas atividades matemáticas relacionadas a contagem e reconhecimento dos números, com intervenções que ocorriam no contra turno de seu horário de aula regular, foram gravadas em áudio e vídeo, com a devida permissão dos responsáveis, possibilitando assim, manter os registros com todas as expressões faciais e corporais, entonações e emoções ao longo da filmagem.

Aplicação dos testes e discussão dos resultados

A partir dos dados coletados durante as entrevistas e observações das atividades com a Maria ao longo de 3 anos, apresentamos algumas discussões relacionadas aos princípios da contagem.

Para a atividade de contar, não basta que as crianças recitem oralmente a sequência numérica, é necessário que compreendam a lógica das relações entre seriação, classificação e correspondência biunívoca envolvidas nesse ato. Além disso, torna-se relevante a compreensão de cinco importantes princípios de contagem, descritos inicialmente por Gelman e Gallistel (1978), retomados por Nunes e Bryant (1997): Primeiro: correspondência um para um: deve-se contar cada objeto uma vez e corresponder com o nome de um numeral; Segundo: ordem estável: recitar os números em uma ordem constante ao contar, não se pode contar 1, 2, 3 em um momento e em outro 1, 3, 2; Terceiro: cardinalidade: o último número que você conta é o número de itens do conjunto; Quarto: irrelevância da ordem: a ordem que você contar os objetos

(da direita para esquerda, da esquerda para a direita, do meio para os extremos) não faz diferença; Quinto: abstração: objetos de qualquer tipo podem ser agrupados e contados.

A correspondência um para um, refere-se a contar cada objeto uma vez correspondendo com o nome de um numeral. Para observar tal princípio, foi solicitado a aluna que contasse os cubos do material dourado primeiramente e depois interagisse com as TA Contátil e Math, salientamos que essas interações foram realizadas em diferentes etapas escolares, todas no ambiente do AEE juntamente com a professora responsável pelo atendimento.

A construção mental é dada por etapas, onde a criança passa por um processo de formação e aquisição do conceito de número, formando assim o conhecimento lógico-matemático, pois

> ao coordenar as relações de *igual*, *diferente* e *mais*, a criança se torna apta a deduzir que há mais contas no mundo que contas vermelhas e que há mais animais do que vacas. Da mesma forma é coordenando a relação entre "dois" e "dois" que ela deduz que 2 + 2 = 4 e que 2 x 2 = 4 (Kamii, 2012, p. 19).

Para Maria, a contagem, nessa etapa de escolaridade (6º ano do Ensino Fundamental), ainda está em processo, pois apresenta dificuldades tanto na organização do material, quanto na correspondência um para um. Conforme relatado pela supervisora da escola, a aluna apresenta uma superproteção da família em relação a sua deficiência, não sendo incentivada a vivenciar situações cotidianas da matemática do dia a dia, ficando assim essa tarefa somente para a escola, o que muitas vezes se torna um processo demorado.

Na pesquisa, uma das atividades propostas para Maria consistia em separar uma dezena de cubinhos do Material Dourado. A primeira interação da aluna foi separá-los no canto oposto, logo após arrastando um a um foi recitando em voz alta a sequência numérica até dez. Ao ser questionada se havia uma dezena, ficou em dúvida e pegou os cubinhos separados na mão deixando dois para trás e inicia novamente a contagem, tirando um a um da mão e colocando novamente no meio da caixa. Esse processo de contagem repetiu-se várias vezes, sempre que conferia, faltavam cubinhos e então iniciava novamente a contagem. Os fatores que observamos é que o espaço pareceu ainda amplo para sua organização, pois cada vez que era necessário contar, algum cubinho ficava na caixa, por não estar ao alcance de suas mãos.

Então esse processo foi refeito com um delimitador (caixa) menor. Observamos que o fato de estarmos trabalhando com um espaço menor facilitou a junção dos cubinhos, porém a aluna a cada vez que era questionada sobre a quantidade, voltava a contar por insegurança. Essa questão foi comentada pela professora do AEE, afirmando que praticamente em todas as

situações que envolviam contagem ela apresentava a mesma atitude, tanto no AEE como na sala de aula regular.

Retornando aos conceitos, a contagem requer uma aptidão, envolvendo a lógica posicional, agrupamento e a conservação do número. Quando os alunos organizam objetos em fileiras para a contagem, eles devem saber que a quantidade continua a mesma ao organizar os mesmos objetos em um grupo. Essa etapa é considerada como a conservação do número, não importando a organização ou as propriedades (Kamii, 2012). Para realizar a contagem os alunos utilizam estratégias de tal forma a não contarem um objeto como sendo dois ou mais, o que talvez seja um dos problemas da Maria, a falta de uma estratégia para a contagem, ou até mesmo desorganização por conta do espaço amplo.

Em outros momentos da pesquisa, retornamos ao princípio da correspondência com o auxílio da Contátil. Solicitamos que contasse o valor representado na TA. Apresentamos três dezenas, como é possível observar na Figura 1, deixando as unidades e centenas sem valores, pois queríamos verificar se a Maria conseguia abstrair que existiam três dezenas agrupadas.



Figura 1. Aluna interagindo com a Contátil

Piaget e Szeminka (1971) relatam que a construção do número acontece em conjunto com o entendimento cardinal e ordinal e que, a partir da união das classes e das relações de ordem. Iniciando a interação, a aluna contou os dez primeiros cubinhos dispostos na primeira barra, então perguntamos qual a quantidade, prontamente veio a resposta: dez; continuamos “dez cubinhos formam uma...”, esperávamos que a resposta fosse uma dezena, mas a aluna não compreendeu a pergunta, então tivemos que usar outra estratégia, perguntando quantos objetos precisamos para formar uma dezena, dessa forma ela chegou à conclusão que a barra era uma dezena.

Continuando a interação, questionamento quantas dezenas estavam sendo representadas. Para a nossa surpresa ela contou novamente os dez cubinhos da barra e desceu os dedos, tateando a segunda barra que estava agrupada a primeira, e continuou contando e assim com a terceira

barra, não se dando conta que se haviam três barras e cada barra era composta por dez cubinhos, então teríamos três dezenas, ou seja, trinta cubinhos.

Fazendo uma reflexão com a aluna sobre os valores contidos em uma dezena, percebemos que seu entendimento ainda estava em processo, pois sempre que solicitado 10 cubinhos ela buscava ou os cubinhos que representam as unidades, ou contava os valores da barra.

O fato de utilizar uma TA que movimentava os blocos despertou seu interesse e fez com que continuássemos com as atividades. Solicitamos que ela inserisse valores numéricos via teclado e depois conferisse com o tato. Primeiramente foram valores unitários, ficando assim em sua zona de conforto, então começamos a inserir valores na casa das dezenas. A conferência iniciava sempre contando toda a barra até ter certeza que existiam dez cubinhos. Depois de várias atividades, a aluna conseguiu tatear as barras agrupadas e efetuar o cálculo mental das dezenas.

Após mais um ano, quando a aluna está concluindo o Ensino Fundamental (9º ano), retornarmos as atividades numéricas com o auxílio da Math. A proposta foi semelhante as demais atividades, porém o fato de utilizar esta TA interessou a aluna, pois ela podia verificar quantas vezes desejasse a quantidade solicitada. Perguntamos qual seria a quantidade máxima a ser representada, então iniciou a contagem selecionando os botões. Ao final, a aluna afirmou que existiam dezenove botões, então solicitamos que ela conferisse se esse valor estava correto, iniciou-se uma nova contagem e a resposta foi diferente: “tem vinte e cinco botões, está correto agora?”, “sim” foi a resposta. Analisando o porquê da primeira resposta ter sido equivocada, inferimos que alguns botões não foram pressionados, pois a sua estratégia de contagem foi aleatória, não seguindo uma ordem lógica, como colunas ou linhas. Já na segunda verificação, foi utilizada uma estratégia: seleção dos botões por ordem das linhas, dessa forma uma das mãos ia verificando se existia ainda objetos e a outra mão realizava a contagem com o tato, Figura 2.



Figura 2. Aluna interagindo com a Math

Confirmado o universo numérico da Math, os desafios foram sendo executados, a cada pergunta da TA a aluna inseria o resultado e a mesma apresentava se estava correto ou ainda

deveria tentar novamente. Na maioria das vezes obteve sucesso na primeira tentativa, pois estava focada e achou as atividades diferentes por serem solicitadas pela TA e não pela professora.

Com a análise dos dados, percebemos que a aluna obteve um acréscimo na contagem, e que as restrições físicas, no caso a cegueira, não são empecilhos na realização da contagem e reconhecimento dos números, principalmente quando utilizamos TA para auxiliar.

Considerações Finais

Para que os cegos construam a compreensão do número é necessário que lhes ofereça condições de acesso a esse conhecimento, levando em consideração a sua restrição física, onde o tato e o áudio devem ser oferecidos de forma a suprir sua restrição, dando assim condições de um aprendizado, nessa etapa as TA são importantes, pois elas oferecem uma gama de possibilidades. As TA utilizadas durante o processo foram de fundamental importância, pois possibilitaram que a aluna pudesse desenvolver suas estratégias de contagem, além de auxiliar no entendimento da contagem.

Podemos observar com os dados coletados que o entendimento numérico da aluna foi gradual, houve um crescimento em seu reconhecimento dos números, porém ainda é necessário um grande avanço para acompanhar o conteúdo da sala de aula regular.

Referencias y bibliografía

Bersch, R; Tonollo, D. (2008). Introdução à tecnologia assistiva. Disponível em: *http://www.assistiva.com.br/Introducao_Tecnologia_Assistiva.pdf.* Acesso 20 jan. 2018.

Brasil. (1998). Constituição da República Federativa do Brasil de 1988. Disponível em: *http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm*. Acesso em 01 de set. de 2018.

Brasil. (2008). Atendimento Educacional Especializado. Disponível em: *http://www.pmpf.rs.gov.br/servicos/ geral/files/portal/AEE_Apresentacao_Completa _01_03_2008.pdf.* Acesso 20 de maio de 2017.

Gelman, R.; Gallistel, C.R. (1978). The child´s understanding of number. *Cambridge, MA: Harvard University Press.*.

Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. *Cognition*, 13(3), 343-359. http://dx.doi.org/10.1016/0010-0277(83)90014-8.

Kamii, C. (2012) A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos. 39ª ed. Campinas: Papirus.

Marques, C. M. (2015). Contátil: A matemática na ponta dos dedos. *Monografia de Conclusão de Curso de Ciência da Computação.* Ulbra – Universidade Luterana do Brasil – Campus Gravataí. Gravataí.

Moeller, J. D. (2016). Math Touch – Uma Alternativa à Visão. *Monografia de Conclusão de Curso de Ciência da Computação*. Ulbra – Universidade Luterana do Brasil – Campus Gravataí. Gravataí.

Nunes, T; Bryant, P. (1997). Crianças Fazendo Matemática. Porto Alegre: *Artes Médicas*.

Piaget, J. E Szeminska, A. (1971). A Gênese do Número na Criança. Editora *Zahar Editores*: Rio de Janeiro.

Sganzerla, M. A. R. (2014). Contátil: potencialidades de uma Tecnologia Assistiva para o ensino de conceitos básicos de matemática. *Dissertação* (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil.

Silva, S. A. da; Araujo, J. A. A. de. (2011). Maria Montessori e a criação do material dourado. UEMS. Campo Grande. Disponível em: *http://www.uems.br/eventos/semana/arquivos/31_2011-09-05_14-28-02.pdf*. Acesso em: 20 jul. 2018.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Um estudo de multicorreção com professores de matemática

Rafael Filipe Novôa **Vaz**
Instituto Federal do Rio de Janeiro
Brasil
rafael.vaz@ifrj.edu.br
Lilian **Nasser**
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
lnasser.mat@gmail.com

Resumo

As provas ou exames se constituem como o principal instrumento avaliativo em matemática nos diferentes níveis de ensino. Os alunos são submetidos a exames para "aferir" o conhecimento, sendo que essa aferição está associada à crença de que o conhecimento de um indivíduo pode ser medido que os testes são instrumentos precisos, justos e imparciais, concepções positivistas. Os primeiros estudos de multicorreção realizados com licenciandos em matemática indicaram que a atribuição de notas não é tão objetiva. A mesma prova gerou notas distintas e com grande amplitude de resultados, ao ser corrigida por pessoas diferentes. Na fase seguinte, a investigação foi realizada com professores a fim de verificar se a experiência poderia de algum modo reduzir a amplitude de notas. Os resultados forneceram novos indícios do grau de subjetividade existente na correção de provas de matemática e colocaram em "xeque" a crença na precisão, justiça e imparcialidade.

Palavras chave: avaliação escolar, matemática, multicorreção, subjetividade.

Introdução

A avaliação está naturalmente presente em nossas ações diárias, avaliamos um produto em uma loja, avaliamos uma roupa, um carro e uma casa, avaliamos professores, pais, amigos e alunos. Avaliar algo ou alguém pode ser considerada uma característica intrínseca ao ser humano. No entanto, a avaliação escolar possui um caráter diferenciado ao assumir um papel social. Ao avaliar e emitir um resultado, representado por uma nota ou um conceito, o professor legitima um processo que "mede o conhecimento" dos estudantes. Classifica, julga, atribui um parecer de apto ou não apto a passar para o próximo nível de escolaridade. A avaliação escolar é programada, ocorre em um espaço artificial, está associada ao sentimento de dever cumprido, de obrigação e julgamento.

Nas aulas de matemática, é muito comum, pelo menos no Brasil, a utilização de testes (ou exames) como o principal e, às vezes, o único instrumento avaliativo. Buriasco, Ferreira & Ciani (2009) defendem que a avaliação escolar é composta por um rito e um mito. De acordo com essas pesquisadoras, "o rito de avaliar – aplicar uma prova ou um teste escrito e converter as resoluções e respostas de cada estudante a um valor numérico" (p.70) está associado ao mito de "medir e classificar de maneira precisa os alunos" (p.71).

Os exames escolares possuem, predominantemente, as seguintes características: são individuais, escritos, sem consulta, com tempo delimitado, esporádicos, intermitentes e breves, possibilitam a ausência de convivência como exigência para avaliar, oferecem tratamento genérico a todos os alunos com a pretensão de ser neutra (Raphael, 1998). Esse modelo avaliativo é fundamentado em uma visão positivista, em que é desprezada a subjetividade do professor que corrige a prova, que tem seus pilares na neutralidade e imparcialidade. Segundo Morgan (2000, p. 225-226), tais concepções estão presentes nos três pressupostos básicos que sustentam o pensamento geral na avaliação:

- presume-se que os indivíduos possuem atributos (como conhecimento, compreensão, habilidade, etc.) que são detectáveis e mensuráveis;
- o objetivo principal da avaliação é descobrir e medir esses atributos;
- o processo de avaliação e seus resultados são considerados fundamentalmente benignos ou mesmo benéficos (embora efeitos colaterais infelizes possam ser reconhecidos e tentativas feitas para melhorá-los).

Este trabalho relata uma investigação sobre a imparcialidade e subjetividade da correção de questões discursivas em provas de Matemática. Nas três fases da pesquisa são investigados dois aspectos da multicorreção. Por um lado, é questionada a existência de um efeito "*halo*" (Kahneman, 2012), em que o desempenho nas primeiras questões influencia o professor na atribuição de notas às demais questões. Por outro lado, é observada a ampla variação das notas atribuídas por grupos de licenciandos e de professores ao corrigir uma mesma prova. Os resultados apontam na direção de que a aplicação de testes não pode ser encarada como um instrumento justo e objetivo de avaliação.

Uma breve síntese da história das avaliações escolares

Guba e Lincoln (2011) apontam quatro gerações de avaliações escolares ao longo da história: geração da mensuração; geração da descrição e do juízo de valor, amparadas pelo paradigma científico e a avaliação de quarta geração, denominada por Fernandes (2000) como geração da negociação e construção.

Na primeira dessas concepções, ocorrida prioritariamente no início do século XX, a avaliação era entendida como uma medida e que, através de testes bem construídos, era possível medir com rigor e isenção as aprendizagens escolares dos alunos. Para Fernandes (2000), foi influenciada por alguns fatores históricos como a evolução da gestão científica na economia que procurava tornar o trabalho mais eficiente e os marcantes sucessos da Matemática e das Ciências Experimentais que ocorreram no final do século XVIII e no início do século XIX. Algumas das perspectivas mais marcantes dessa fase perduram até hoje, tais como as concepções de que: a avaliação é um instrumento para a classificação, seleção e certificação; que os conhecimentos são o único objeto da avaliação; os alunos não participam do processo avaliativo; a avaliação é

descontextualizada; a avaliação busca a objetividade e neutralidade do professor e é referida a uma norma ou padrão, por isso os resultados dos alunos são comparados.

A geração da descrição, nos anos 30 e 40, tentou superar algumas limitações da primeira. Enquanto na geração anterior o sistema educacional era avaliado a partir do desempenho dos estudantes, nesta perspectiva outros fatores foram, como por exemplo, os curriculares. A avaliação não se limitava a medir, ela passou a descrever até que ponto os alunos atingiam determinados objetivos. "A mensuração então deixou de ser tratada como equivalente à avaliação, sendo, porém, definida como um dos vários instrumentos que poderiam ser empregados a seu serviço" (Guba & Lincoln, 2011, p.35). Essa geração foi influenciada pelos estudos de Ralph Tyler, um pesquisador norte americano considerado o pai da avaliação educacional, que inovou ao propor objetivos comportamentais associados à avaliação e apresentava uma concepção diferenciada de currículo, caracterizado por "um conjunto ampliado e formulado de experiências formativas que ocorriam na escola" (Fernandes, 2000, p.47).

Nas décadas de 60 e 70 surge a terceira geração que, de modo análogo à segunda, tentou superar os pontos fracos das gerações anteriores. Os avaliadores acrescentaram à função descritiva das avaliações o papel de juízo de valor. É nessa geração, também denominada de Idade do Desenvolvimento, que os conceitos de avaliação escolar se tornam mais sofisticados. Surge em 1967, por intermédio de Michael Scriven, o conceito de "avaliação somativa, mais associada à prestação de contas, à certificação e à seleção, e o conceito de avaliação formativa, mais associada ao desenvolvimento, à melhoria das aprendizagens e à regulação dos processos de ensino e de aprendizagem" (Fernandes, 2000, p. 49). A geração da avaliação como juízo de valor é caracterizada por novas ideias, tais como as recomendações de que a avaliação deve induzir e/ou facilitar a aprendizagem; a coleta de informações deve ir além dos resultados dos testes; a avaliação deve envolver alunos, professores, pais, ... e os contextos de ensino devem ser considerados.

A quarta geração proposta por Guba e Lincoln, a avaliação como uma negociação e construção, constitui uma ruptura epistemológica. Essa nova concepção avaliativa, de raízes construtivistas, baseia-se em uma ideia de diálogo entre todos os pares do processo avaliativo. (como citado em Fernandes, 2000). Nesta concepção,

- os professores devem partilhar o poder de avaliar com os alunos e outros atores e devem utilizar uma variedade de estratégias e instrumentos avaliativos;
- a avaliação deve ser integrada no processo de ensino-aprendizagem;
- a avaliação formativa deve ser privilegiada em detrimento da avaliação somativa;
- o feedback se constitui como um indispensável elemento no processo;
- a avaliação assume uma função mais de suporte à aprendizagem do que de julgamento e classificação;
- a avaliação passa a ser interpretada como uma construção social do conhecimento;
- deve-se privilegiar métodos qualitativos aos métodos quantitativos. (Fernandes, 2000).

Por considerar que este método é, de fato, uma ruptura epistemológica, Fernandes (2000) alerta para as dificuldades e barreiras em uma possível implementação de tais concepções: "poderemos nos interrogar se os sistemas educativos e, mais concretamente, as pessoas que nele trabalham, aguentam certo tipo de modificações" (p.53). Talvez por esse motivo, as avaliações atuais ainda apresentam características predominantes das três primeiras gerações.

O paradigma psicométrico da avaliação (escolar)

Na predominância desse modelo positivista de avaliação escolar configura-se o que Fernandes (2009) denomina de *paradigma psicométrico de avaliação*. Segundo este autor, há uma tendência de a avaliação centrar-se mais nos resultados ou nos produtos do que no processo de aprendizagem. As três características principais do paradigma são:

> é possível determinar exatamente o que os alunos sabem e são capazes de fazer;
> as aprendizagens dos alunos constituem uma realidade que pode ser avaliada de forma objetiva, neutra e sem quaisquer inferências valorativas;
> testes de naturezas diversas – cientificamente construídos e, como tal, objetivos e neutros – permitem a quantificação das aprendizagens dos alunos. (Fernandes, 2000, p.81-82)

Há alguns anos, diversos estudos realizados por pesquisadores, em lugares e em contextos distintos contestam a concepção positivista presente na avaliação escolar (Pacheco, 1998; Morgan, 2000; Hadji, 2001; Fernandes, 2009; Buriasco et al., 2009; Santos; Pinto, 2018; Vaz; Nasser, 2018).

> via de regra, negligencia-se que o quantitativo advém do qualitativo, e, no caso da avaliação, a nota atribuída não emerge de maneira pura e unívoca dos instrumentos utilizados, mas é produzida pelo avaliador, que, para fazê-lo, pode se valer de instrumentos. Por fim, o rito de avaliar se constitui numa prática que confere uma validade ilusória ao mito da possibilidade do exercício da precisão e da justiça. (Buriasco et al, 2009, p.72)

Segundo Hadji (2001), o julgamento do avaliador é "sempre infiltrado por elementos provenientes do contexto escolar e social, desde a carga afetiva e a dimensão emocional devido à presença efetiva dos alunos" e, geralmente, "ignora que se baseia em parte em uma representação construída do aluno e em convicções íntimas que nada tem de científicas" (p.32). Para esse autor, a avaliação não é uma medida, porque "o avaliador não é um instrumento e porque o que é avaliado não é um objeto no sentido imediato" (p.34).

Fischer (2008) realizou uma pesquisa com professores universitários que atuam em cursos de licenciatura, a fim de investigar suas concepções em relação à avaliação. Neste trabalho, foi constatado que os professores formadores associam a objetividade na avaliação escolar à clareza, à uniformidade nos critérios de avaliação e à neutralidade no campo da matemática. A autora cita a fala ambígua de um professor que diz privilegiar "a exatidão do conteúdo, mas valoriza, na correção, o desenvolvimento apresentado pelo aluno" (p.85) e conclui que a pesquisa realizada

> mostrou que os professores de matemática ainda refletem, em suas práticas avaliativas, muitas das concepções acerca do conhecimento matemático e de seu ensino construídas com base no discurso de modernidade. As características apontadas como constituintes do *habitus* desse professor, como a busca pela objetividade, a concepção positivista de rigor no trato dessa ciência e de seu ensino, um certo descrédito do fazer pedagógico e a adoção de uma postura pouco flexível, têm fortes marcas desse paradigma de ciência. (Fischer, 2008, p.96)

Mesmo com tantos estudos que contestam o paradigma psicométrico da avaliação escolar, as mudanças de tais concepções no meio escolar e no meio acadêmico parecem não ter se fortalecido a ponto de romper o forte bloqueio na crença nesse paradigma. Este trabalho foi inspirado no desafio de romper esse bloqueio.

A pesquisa de multicorreção

Esta investigação faz parte de um estudo de multicorreção em provas de matemática, que se iniciou em 2017 e está em sua terceira fase. Nas fases iniciais foi investigada a subjetividade presente na correção realizada por futuros professores (alunos de licenciatura em matemática). O objetivo específico na fase inicial da pesquisa, mais especificamente, foi investigar se, e como, o ordenamento das questões influenciaria a correção dos avaliadores. Na terceira fase o objeto de estudo passou a ser o professor de matemática formado e já atuante, com o objetivo de verificar a possível amplitude de notas atribuídas por professores em exercício na correção de uma mesma prova eram compatíveis com a grande amplitude observada na Fase 2. As três fases estão relacionadas ao objetivo geral de investigar o papel da subjetividade na correção de provas e exames.

Fase 1

O efeito *halo* consiste "no julgamento do todo a partir de características obtidas inicialmente e, se apresenta quando uma impressão é formada a partir de uma característica inicial influenciando múltiplos julgamentos ou classificações de fatores não relacionados" (Vaz & Nasser, 2018). Na correção de provas, o efeito halo induziria o professor a corrigir de modo distinto as provas de seus alunos a partir das respostas às primeiras questões, ou seja, caso o efeito halo aconteça, as resoluções das questões iniciais dos estudantes influenciarão o corretor durante a correção das questões seguintes.

A primeira investigação foi realizada com 40 alunos da Licenciatura em Matemática do IFRJ, uma instituição pública, federal, localizada no estado do Rio de Janeiro, Brasil sobre a ocorrência do efeito halo na correção de provas. Os estudantes foram divididos em dois grupos: A e B. Cada aluno corrigiu uma prova contendo 4 questões discursivas sobre a resolução de equações do 2º grau e atribuiu uma nota de 0 a 10. O valor de cada questão foi estipulado em 2,5, ficando a cargo de cada corretor atribuir outros valores a respostas parcialmente incorretas. Havia uma diferença entre o ordenamento das questões contidas nas duas provas: no teste A, a primeira questão continha uma solução correta enquanto que a última apresentava uma solução incorreta. No teste B, questões e soluções eram reposicionadas na ordem inversa, para verificar se os licenciandos atribuiriam notas semelhantes às provas dos tipos A e B. Em ambos os testes, as questões intermediárias apresentavam resoluções parcialmente corretas.

Os resultados desta fase sugeriram a existência do efeito halo. No teste A, a média, a moda e a mediana das notas foram menores do que no teste B. A conclusão desta fase é que, possivelmente, os futuros professores tentaram realizar uma compensação ao corrigir o teste B, em que a solução da primeira questão estava incorreta, sendo mais benevolente ao atribuir notas às questões seguintes.

Tabela 1. *Medidas de tendência central - fase 1*

	Teste A	Teste B
Média	6,43	7,17
Moda	6,25	7,25

Mediana	6,5	7,25

Fonte: Vaz & Nasser (2018).

Fase 2

A segunda fase da pesquisa utilizou dois campi do IFRJ, diversificando a amostra e ampliando-a ligeiramente (45 estudantes). O objetivo era retificar ou ratificar os resultados da fase 1 a partir de um novo teste com 5 questões, versando sobre áreas de figuras planas. Todos os avaliadores (licenciandos em Matemática) receberam um teste para ser corrigido a partir de um gabarito. De modo análogo, seria atribuída uma nota de zero a dez, cada questão "valendo" 2 pontos. Novamente a pontuação parcial ficou a cargo dos corretores.

Nesta fase não ficou configurada a existência do efeito *halo*. o entanto, a objetividade na correção pode ser questionada a partir da imensa amplitude entre as notas atribuídas. A mesma avaliação obteve desde a nota 2,5, por arbitrada por dois avaliadores, até a nota 7,0, estipulada por um terceiro avaliador. A figura 1 mostra a frequência das anotas atribuídas pelos licenciandos na fase 2 da pesquisa.

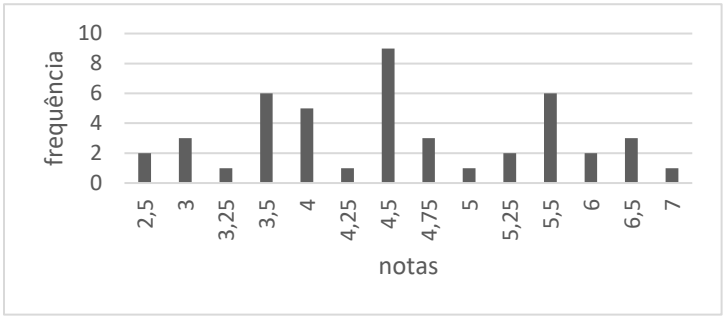


Figura 1. Notas atribuídas na fase 2.
Fonte: Vaz & Nasser. 2018

De modo geral, o que se constatou nas duas primeiras fases, em que os licenciandos corrigiram as provas, é que há um teor de subjetividade inerente ao corretor. Tal resultado, redirecionou a pesquisa ao seguinte questionamento: essa amplitude seria observada caso essa avaliação fosse corrigida por professores formados? Para responder a essa pergunta, iniciou-se a terceira fase: a investigação da multicorreção com professores de Matemática em exercício.

Fase 3

Com o objetivo de alcançar uma amostra de professores experientes, atuando em diversos tipos de escolas, nos diferentes níveis de ensino, a fase 3 foi aplicada a professores participantes de um projeto de extensão. Por facilidade de acesso, foi escolhido o Projeto Fundão, um grupo colaborativo de pesquisa e extensão da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Os professores participantes desse projeto foram convidados a corrigir o mesmo teste aplicado na fase 2. Cada um dos 14 professores presentes na data da aplicação recebeu uma cópia do teste respondido. A correção deveria ser realizada com amparo de um gabarito fornecido, com a informação de que cada questão valia 2,0 pontos, mas sem critérios para a atribuição de notas parciais.

Foi constatada uma redução da amplitude das notas do teste corrigido por professores (fase 3) se comparado ao mesmo teste corrigido por licenciandos (fase 2). Anteriormente, as notas

oscilaram entre 2,5 e 7,0, com uma variação de "4,5 pontos". Já com os professores, a oscilação foi de "3,5 pontos", de 4,0 a 7,5. Essa diferença é significativa. Supondo, por hipótese, que em uma escola a nota mínima exigida para aprovação é 6,0 (um padrão nas escolas brasileiras), esse estudante fictício seria habilitado para aprovação por 6 professores corretores, enquanto para os outros 8 professores, seu desempenho estaria aquém do desejado.

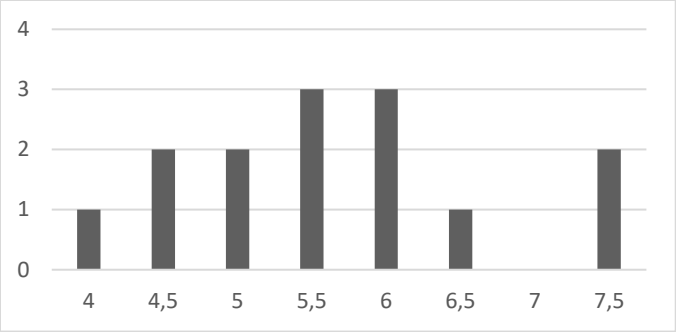


Figura 2. Notas atribuídas na fase 3
Fonte: os autores

A amplitude das notas atribuídas a uma mesma prova é um indício relevante do forte grau de subjetividade na correção de testes escolares. Mesmo considerando a hipótese que o conhecimento de alguém possa ser mensurado, que os professores sejam absolutamente neutros em sua atuação profissional e que todos os testes fossem construídos com embasamento científico de neutralidade e objetividade, a crença na possibilidade de usar o teste para "medir" de alguma forma o conhecimento também é questionada a partir desses resultados.

Uma das questões propostas para a correção apresentava uma solução de um estudante fictício, do nono ano do ensino fundamental, que comete um erro ao realizar uma divisão na segunda parte da solução (em três partes). Alguns professores atribuíram a esta questão pontuação de 1,8 ou valores próximos, enquanto outros professores atribuíram 1,0 ponto.

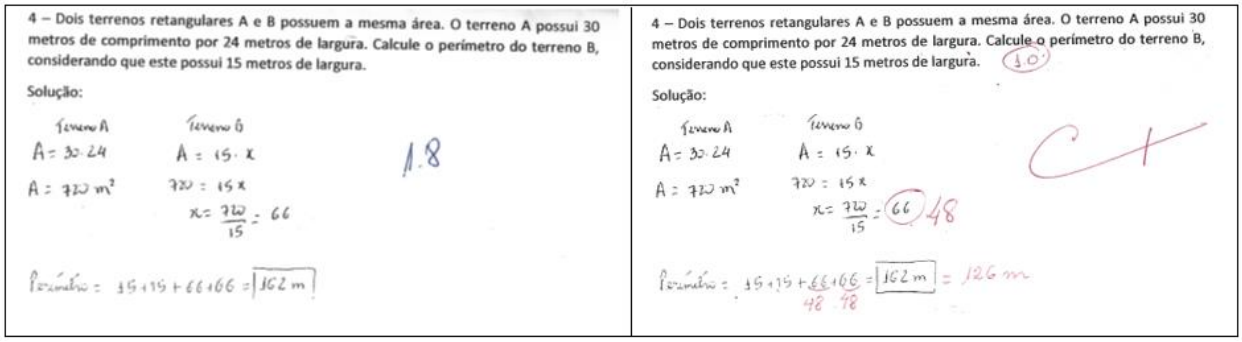


Figura 3. Comparativo de correção
Fonte: os autores

Observe que na solução da direita mesmo identificando que o estudante cometeu um único erro no procedimento (720/15), o professor atribui a metade da pontuação ao estudante (1,0), enquanto na solução da esquerda o professor desconta apenas 10% da pontuação na questão (1,8). Se a nota da prova se configura em uma medida, como justificar que o mesmo objeto pode ser associado a medidas distintas?

Considerações Finais

Os resultados descritos neste estudo evidenciam que há uma problemática na utilização de testes escolares: a correção. Corrigir o teste e atribuir a nota definitivamente não pode ser encarado como sinônimo de medir o conhecimento de alguém sobre algo, como se achava durante o início do século passado na geração da medida. (Guba & Lincoln, 2011). A ideia de associar a nota de um teste a uma medição é, definitivamente, um mito. O teste está muito mais próximo de uma leitura do que de uma medida. Uma leitura não somente da aprendizagem, mas também do ensino. A variação de notas atribuídas por licenciandos e professores ao corrigir uma mesma prova indica diferentes leituras, estruturadas na subjetividade do corretor.

A partir daí, é necessário que os testes devem ser ressignificados no meio escolar e acadêmico, abandonando o papel de único instrumento avaliativo (comumente utilizado na disciplina de Matemática). As avaliações escolares devem ser mais diversificadas, pois mais instrumentos podem oferecer uma melhor leitura do ensino-aprendizagem, respeitando mais as peculiaridades de cada estudante. A avaliação como uma negociação e construção, descrita por citada por Fernandes (2000), se constitui uma ruptura epistemológica difícil, mas necessária para modificar a filosofia positivista que acompanha as concepções sobre a avaliação escolar.

Referências y bibliografia

Buriasco, R. L. C., Ferreira, P. E. A., & Ciani, A. B. (2009). Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). *Boletim de Educação Matemática*, 22 (33), 69-96.

Fernandes, D. (2009). *Avaliar para aprender: fundamentos, práticas e políticas.* São Paulo, BR: Unesp.

Fischer, M. C. B. (2008) Os formadores de professores de matemática e suas práticas avaliativas. In: Valente, W. R. (Org.). *Avaliação em matemática: história e perspectivas atuais***.** Campinas: Papirus. p. 75 -100.

Guba, E. G, & Lincoln, Y. S. (2011) Avaliação de quarta geração. Campinas, BR: Editora Unicamp.

Hadji, C. (2001). *Avaliação desmistificada*. Porto Alegre, BR: Artmed Editora.

Kahneman, D. *Rápido e devagar*: duas formas de pensar. 1. ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2012. 608 p.

Morgan, C. (2000). Better assessment in mathematics education? A social perspective. In: Boaler, J. (Org.). *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*. Westport, AblexPublishing, 225-242

Pacheco, J. A. (1998). A avaliação da aprendizagem. In: Almeida, L. S.; Tavares, J. (Org.). *Conhecer, aprender, avaliar*. Porto: Porto Editora, 111-132.

Santos, L., & Pinto, J. (2018). Ensino de conteúdos escolares: A avaliação como Fator estruturante. In: Veiga, F. H. (Org.). *O Ensino como fator de envolvimento numa escola para todos.* Lisboa: Climepsi Editores, 503-539.

Vaz, R. F. N., Nasser, L. (2018). Avaliação em matemática: um estudo sobre multicorreção. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 7., **Anais...**Foz do Iguaçu: SBEM.



Uma análise da estrutura de questões de múltipla escolha: um exercício de validação

Osmar **Pedrochi Junior**
Universidade Pitágoras Unopar
Brasil
ojpedrochi@yahoo.com.br
Diego Fogaça **Carvalho**
Universidade Pitágoras Unopar
Brasil
diegofocarva@gmail.com
Fátima Aparecida da Silva **Dias**
Universidade Pitágoras Unopar
Brasil
fatimadias.consultoria@gmail.com

Resumo

Este trabalho decorre de um pedido de um professor na busca de validação da estrutura das questões de múltipla escolha de uma prova de Cálculo Diferencial Integral. Para embasar essa validação, os autores buscaram responder o seguinte questionamento: o que faz de uma prova um bom instrumento de avaliação? As questões foram analisadas de acordo com as orientações de um documento do Ministério da Educação do Brasil, que tem por objetivo orientar a elaboração e validação de questões de múltipla escolha. Das três questões analisadas apenas uma apresentou problema em sua estrutura que poderia interferir das respostas dos alunos. As outras duas questões estavam bem elaboradas do ponto de vista da sua estrutura, porém sem grande amplitude de complexidade.

Palabras clave: Educação Matemática, avaliação, Cálculo Diferencial e Integral, múltipla escolha, estrutura das questões.

A busca por validação

Este trabalho decorre de um pedido de um professor para que as questões de sua prova fossem analisadas. Em busca de validação para suas questões, o professor recorreu a um dos autores deste trabalho com a proposta de que a estrutura de suas questões de Cálculo Diferencial

e Integral fossem analisadas e discutidas. Depois da análise e discussão, o professor foi convidado para escrever este trabalho junto com os autores, e portanto, é um de seus autores.

A busca por um bom instrumento de avaliação

O que faz de uma prova um bom instrumento de avaliação? Para ser um bom instrumento de avaliação uma prova precisa levantar informações a respeito do que os alunos são capazes de fazer. (Pedrochi Junior, 2012). Para isso, segundo Vianna (1978), pode-se considerar algumas condições:

- ✓ mostrar indícios do que se quer ver com as questões;
- ✓ ter diferentes níveis de complexidade;
- ✓ cada questão deve deixar claro para o estudante o conteúdo que está sendo tratado, e o comando do que ele deve fazer ou a pergunta que ele deve responder.

Cada questão que compõe a prova tem um motivo referente a uma intenção de quem avalia, assim, ao ser resolvida, cada uma das questões deve evidenciar algum aspecto que interessa ao avaliador.

Ter diferentes níveis de complexidade é condição para obter informações fidedignas a respeito do que os alunos são capazes de fazer. Uma prova apenas com questões simples deixa de recolher informações dos alunos capazes de resolver questões mais complexas. E uma prova apenas com questões complexas deixa de recolher informações a respeito dos alunos que não conseguirem resolver questões de tal nível de complexidade. Quanto maior a variabilidade a respeito da complexidade das questões, maior será a amplitude das informações possíveis de serem levantadas por meio do instrumento de avaliação (De Lange, 1999).

Sob pena de não levantar informações a respeito do que se deseja, justifica-se a importância da clareza das questões. A clareza das questões é importante para fidedignidade das informações obtidas por meio do instrumento de avaliação. Questões dúbias ou confusas deixam incertezas, em caso de erro, se o que provocou o erro do estudante foi a dubiedade ou falta de clareza da questão, ou um outro motivo, que pode ser exatamente o que o avaliador queria ver ao selecionar a questão para compor a prova. Quanto mais clara a questão, mais fidedignas serão as informações que elas revelarão (Hadji, 1994).

Levando em conta as condições listadas e justificadas anteriormente. O professor elaborador seguiu, as orientações do “Guia de elaboração e revisão de itens” do Ministério da Educação do Brasil elaborado em 2010. Segundo o Ministério da Educação (2010) as questões de múltipla escolha devem conter:

- ✓ texto base; para situar o estudante, relembrar detalhes ou esclarecer de que conteúdo trata a questão;
- ✓ comando claro e objetivo;
- ✓ apenas uma alternativa correta;
- ✓ alternativas que não destoem do tema e que sejam esteticamente parecidas.

O texto base serve para situar o estudante, relembrar detalhes ou esclarecer de que conteúdo trata a questão. A intenção é que o esquecimento de algum detalhe não prejudique o

rendimento do aluno.

> Esta parte inicial do item deve apresentar as informações necessárias para a resolução da situação-problema proposta, suprimindo-se elementos de caráter meramente acessório, que possam conferir ambiguidade à interpretação da tarefa a ser realizada ou que demandem dispendioso tempo de leitura. Deve-se evitar a exigência de informações simplesmente decoradas, como fórmulas, datas, termos, nomes, enfim, detalhes que não avaliam a habilidade, mas privilegiam a memorização. (Ministério da Educação, 2010, p.10).

"No enunciado, inclui-se uma instrução clara e objetiva da tarefa a ser realizada pelo participante do teste." (Ministério da Educação, 2010, p.11). O comando claro e objetivo tem a intenção de que o estudante saiba exatamente o que é esperado que ele faça na questão, para que o erro, se existir, não seja por não ter compreendido o que deveria fazer.

Ter apenas uma alternativa correta diminui as chances de acerto em caso de "chute". Sem perder de vista que os erros são também formas de levantar informações e identificar lacunas nas aprendizagens dos estudantes, é importante que as alternativas incorretas forneçam algum tipo de informação para o avaliador. Para isso, pode-se, por exemplo, utilizar alternativas que representem erros esperados àquela questão, ou alternativas que representem uma resolução incompleta.

Alternativas que não destoem do tema e que sejam esteticamente parecidas, evitam que sejam eliminadas por absurdo pelos estudantes sem que seja necessário conhecimento e resolução.

> A utilização de erros comuns observados em situação de ensino-aprendizagem costuma aumentar a plausibilidade dos distratores. Por outro lado, aqueles que retratam erros grosseiros ou alternativas absurdas, dentro ou não do contexto do item, tendem a induzir a identificação da alternativa correta. (Ministério da Educação, 2010, p.11).

Diante do exposto vamos analisar algumas questões objetivas utilizadas em uma prova por um professor de um Curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição privada brasileira.

Análise da Questão 01

É de extrema importância, no estudo de funções de n variáveis, que se conheça o domínio da função, com o objetivo de interpretar seu comportamento.
Diante dessa necessidade, considere a seguinte função de R^2 em R, definida pela seguinte lei: $f(x,y) = \frac{1}{y^2-x}$.
Analise as afirmações apresentadas na sequência:
I – O domínio de $f(x,y)$ trata-se de todo R^2.
II – O domínio de $f(x,y)$ é todo o R^2, exceto a origem.
III – O domínio de $f(x,y)$ é o conjunto $D(f)=\{(x,y)$, que pertence a $R^2 | y \neq \mp\sqrt{x}\}$

a) Somente as afirmativas I e II estão corretas.
b) Somente a afirmativa I está correta.
c) Somente a afirmativa II está correta.
d) Somente a afirmativa III está correta.
e) Somente as afirmativas II e III estão corretas.

Figura 01. Questão 01.

No texto base o elaborador explicita a importância de conhecer o domínio de uma função e deixa claro qual o tema tratado na questão: domínio de funções de n variáveis.

O enunciado da questão apresenta uma função bem definida, com domínio, contradomínio e lei de formação, porém tem uma falha no comando, pede apenas para analisar as afirmativas apresentadas na sequência e não pede para marcar a alternativa correta.

As afirmativas também apresentam um problema para o tipo de questão escolhido pelo elaborador, são mutuamente exclusivas. Dessa forma, mesmo sem saber qual é a resposta certa pode-se eliminar duas alternativas (alternativas *a* e *e*) apenas lendo as afirmativas I, II e III. Outro ponto que pode ser apresentado como um possível problema de elaboração é quanto a estética da afirmativa III. Foi a única que apresentou o domínio com linguagem formal simbólica. Esse fato poderia ser amenizado nas afirmativas I e II com as escritas:

I – O domínio de $f(x,y)$ é o conjunto $D(f)=R^2$.

II – O domínio de $f(x,y)$ é o conjunto $D(f)=R^2-\{0,0\}$.

Na Questão 01 o professor utilizou uma estrutura específica de questões de múltipla escolha, que exige do aluno análise de afirmativas para depois analisar e assinalar a alternativa correta. Cabe destacar que a questão apresenta apenas uma resposta correta, e não deixa margem para interpretações dúbias.

Análise da Questão 02

No contexto das derivadas parciais de funções de duas variáveis, $f(x,y) = z$, podemos compreender as derivadas parciais como sendo a variação de z em relação a uma das variáveis, enquanto a outra se coloca fixa. Seja a função de duas variáveis reais, de R^2 em R definida pela seguinte lei $f(x,y) = 6x^2 + 4yx - 3y^5$.

Assinale a alternativa que apresenta a derivada parcial de segunda ordem de $f(x,y)$ em relação a x duas vezes.

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x$

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3y^5$

e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24$

Figura 02. Questão 02.

No texto base da Questão 02, o professor explicita que tratará de derivadas parciais de funções de duas variáveis reais, esclarecendo o conteúdo que trata a questão. Em seguida, relembra brevemente a relação entre as variáveis em uma derivada parcial de duas variáveis, como a variação de uma em relação a outra enquanto a terceira permanece fixa (atuando como uma constante).

No enunciado tem-se uma função bem definida, com domínio, contradomínio e lei de formação. O comando é claro, pois não deixa margem para outra interpretação, e é objetivo, pois pede diretamente para assinalar a alternativa correta. O comando também não traz negativas (não marque, ou marque a incorreta) o que pode trazer dúvidas aos alunos.

As alternativas são esteticamente parecidas, e não dão pistas da resposta correta. No caso específico dessa questão, o aluno deve derivar duas vezes em relação a variável *x* para resolver a questão. Caso o estudante não saiba ou tenhas dúvidas para realizar a derivada segunda, as alternativas, ainda assim, não dão pistas da resolução correta. As alternativas garantem que a questão seja completamente resolvida para que se marque a alternativa correta com segurança.

Análise da Questão 03

Na Questão 03 o texto base tem uma característica diferente da Questão 02, pois o professor elaborador não adicionou na Questão 03 nenhuma informação que relembra ao aluno como resolver a questão. Ele apenas justifica que o vetor gradiente de uma função contribui para estudar o comportamento da função em relação à sua direção e sentido. Essa informação não dá

pistas para o aluno de quais cálculos deve realizar para encontrar o vetor gradiente.

O vetor gradiente de uma função de n variáveis contribui para que possamos estudar a direção e o sentido que a variação da função é máximo. Dessa forma, considere a seguinte função de duas variáveis reais, de R^2 em R, definida pela seguinte lei, $f(x,y) = 3x^2y + 6xy^3 - y^3$, assinale a alternativa que apresenta o vetor gradiente de f(x, y).

a) $\nabla f(x,y) = (6xy + 6y^2; 3x^2 - 3y^3 + 18xy^2)$

b) $\nabla f(x,y) = (6xy + 6y^3; 3x^2 - 3y^2 + 6xy^2)$

c) $\nabla f(x,y) = (6xy + 6y^3; 3x^2 - 3y^2 + 18xy^2)$

d) $\nabla f(x,y) = (12xy + 9y^3; 3x^2 - 3y^2 + 18xy^2)$

e) $\nabla f(x,y) = (6xy + 6y^3; 3x^2 - 5y^2 + xy^2)$

Figura 03. Questão 03.

O enunciado da questão também não dá pistas de quais cálculos realizar. No enunciado a função está bem definida com domínio, contradomínio e lei de formação. O comando é claro, assinalar a alternativa que apresenta o vetor gradiente da função definida no enunciado.

As alternativas não contêm indicativo de resposta, os textos tratam do assunto da questão e são esteticamente parecidos, eliminando qualquer chance de descobrir a resposta correta sem resolver a questão.

A falta de informação ou pistas de como resolver a questão, exige mais do aluno em relação a memória, mas não altera o nível de complexidade da questão que pode ser resolvida, assim como a na Questão 02, pelo cálculo de derivadas parciais.

O que o professor esperava com essas questões?

Depois de cada questão a prova do professor apresentou um campo chamado “comentário”, em que ele dá um indicativo do que espera que o aluno faça para resolver cada uma das questões.

Comentário:

Para resolver essa questão devemos considerar:

$$y^2 - x \neq 0$$

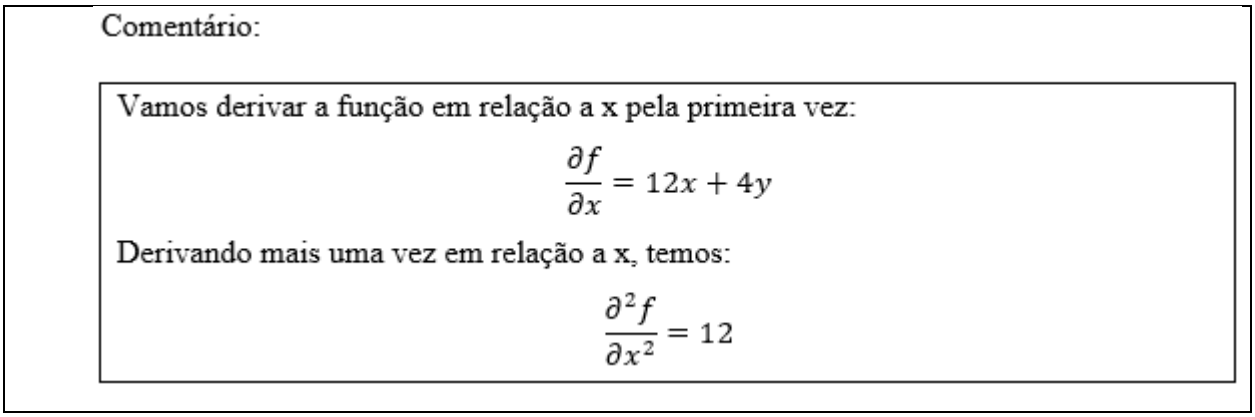
$$y^2 \neq x$$

$$y \neq \mp\sqrt{x}$$

Figura 04. Comentário da Questão 01.

No comentário a respeito da Questão 1 o professor indica o cálculo matemático que deve

ser considerado para responder a questão. No entanto, não escreve a afirmação como colocou na questão para indicar a resposta certa.


Comentário:

Vamos derivar a função em relação a x pela primeira vez:

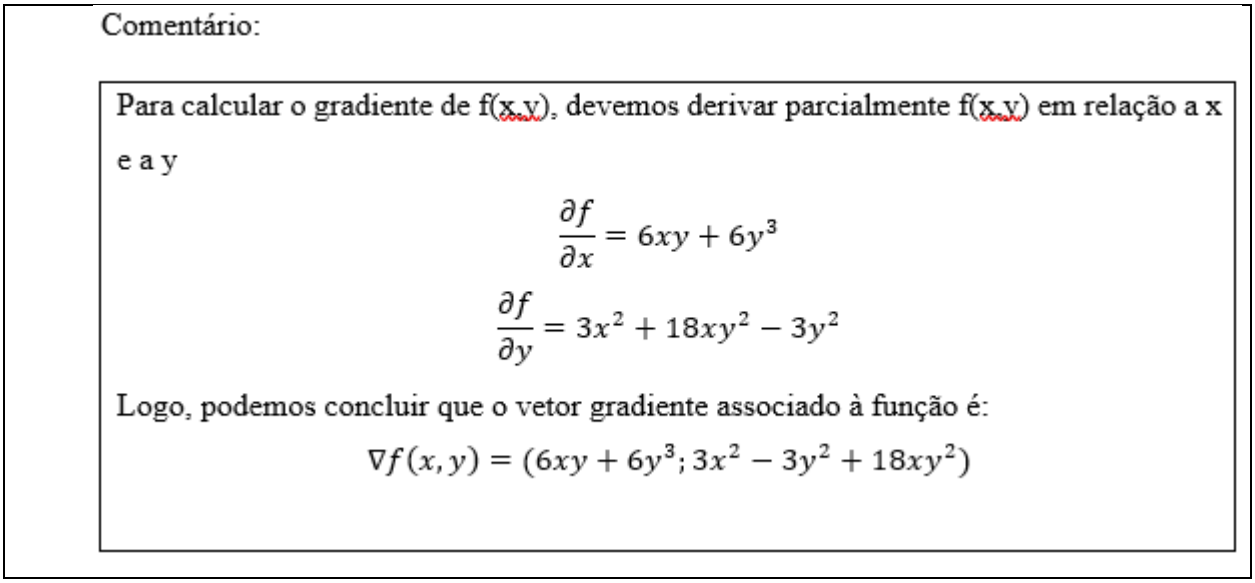
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x + 4y$$

Derivando mais uma vez em relação a x, temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12$$

Figura 05. Comentário da Questão 02.

No comentário da Questão 02, o professor indica os cálculos para se resolver a questão. Nessa questão, o professor finaliza com uma equação, utilizando símbolos matemáticos, idêntico à resposta do exercício. Mas não indica a alternativa correta.


Comentário:

Para calcular o gradiente de f(x,y), devemos derivar parcialmente f(x,y) em relação a x e a y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 6y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 18xy^2 - 3y^2$$

Logo, podemos concluir que o vetor gradiente associado à função é:

$$\nabla f(x,y) = (6xy + 6y^3; 3x^2 - 3y^2 + 18xy^2)$$

Figura 06. Comentário da Questão 03.

No comentário da Questão 03 o professor indica os cálculos necessários para se resolver a questão. Finaliza com um texto idêntico à resposta do exercício, utilizando símbolos matemáticos, e novamente, não indica a alternativa correta.

Considerações finais

Das questões analisadas, nota-se que o professor sempre espera que os alunos façam algum cálculo antes de responder. Nessas questões, o objetivo do avaliador mostra-se saber se o aluno é

capaz de realizar os cálculos solicitados nos comandos presentes nos enunciados. Dessa forma, as questões satisfazem a primeira condição para um bom instrumento de avaliação: mostrar indícios do que se quer ver com as questões.

Quanto ao nível de complexidade. As três questões analisadas têm níveis de complexidade muito parecidos, já que exigem que o aluno conheça o assunto e realize cálculos matemáticos, que podem ser feitos em poucas linhas, para se chegar na resposta correta. Não pedem apenas informações memorizadas, que seria um nível mais baixo de complexidade, e não exigem análise de outros materiais ou relações com outros assuntos, o que poderia ser considerado um nível de complexidade mais elevado.

Todas as questões são claras, com textos base informativos, enunciados objetivos e sem informações desnecessárias. Apenas a Questão 01 apresentou uma estrutura diferente das demais, e alternativas que podem influenciar nas respostas dos alunos.

Referências e bibliografía

De Lange, J. (1999). *Framework for classroom assessment in mathematics*. Madison: WCER.

Hadji, C. (1994). *A Avaliação, Regras do Jogo: Das Intenções aos Instrumentos*. Porto: Porto Editora.

Ministério da Educação (2012). *Guia de elaboração e revisão de itens*. (vol. I) Brasília, DF: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2010, abril).

Pedrochi Junior, Osmar. (2012). *Avaliação como oportunidade de aprendizagem.* (Dissertação). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil.

Vianna, Heraldo Marelim. (1978). *Testes em educação*. (3ª ed.) São Paulo, Brasil.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ideas para valorar el nivel de complejidad de un problema: una experiencia costarricense

Ricardo **Poveda** Vásquez
Ministerio de Educación Pública.
Escuela de matemáticas. Universidad Nacional
Costa Rica
ricardopovedav@gmail.com

Johanna **Mena** González
Ministerio de Educación Pública.
Escuela Educación. Universidad Estatal a Distancia
Costa Rica
menajohanna22@gmail.com

Resumen

El dominio de conocimientos o el desarrollo de habilidades, aunque necesarios no son suficientes para avanzar en la competencia matemática. El desarrollo preciso de las habilidades se construye a través de la mediación pedagógica, mediante procesos que colocados en tareas matemáticas de diversos niveles de complejidad (reproducción, conexión y reflexión) permiten el desarrollo de capacidades superiores. Para este taller se propone la aplicación del modelo simplificado de Ruiz (2017) a una tarea matemática. El objetivo es que los participantes puedan vivenciar una manera para valorar los niveles de complejidad de una tarea matemática a partir de los procesos matemáticos: razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, comunicar y representar.

Palabras clave: currículo, resolución de problemas, capacidades cognitivas superiores, procesos matemáticos, niveles de complejidad.

Antecedentes

En mayo del 2012 el Consejo Superior de Educación de Costa Rica aprueba nuevos programas de estudio para la asignatura de matemáticas en primaria y secundaria. Este currículo es cualitativamente diferente a los anteriores: no se trabajan objetivos y contenidos; sino el propósito principal es el desarrollo de capacidades cognoscitivas superiores, que parten de habilidades asociadas a conocimientos (áreas matemáticas). Además, se propone la Resolución de Problemas (RP) como estrategia metodológica principal, que busca potenciar las competencias y capacidades matemáticas de los estudiantes.

Resolución de Problemas y valoración de capacidades superiores

Se sabe que se puede lograr un aprendizaje mediante la RP, donde esta posición trasciende la habilidad para resolver problemas y el estudio de estrategias para el mismo fin (Alfaro y Barrantes, 2008; 2015). Esta posición es asumida por los programas de estudio de Matemáticas costarricense, los cuales proponen un estilo para la organización de las lecciones.

Clase mediante la RP

Según el MEP (2012) la clase de matemática debe plantearse a través de dos fases llamadas: el aprendizaje de conocimientos y movilización y aplicación de los conocimientos.

Para la primera fase, se propone que el docente trabaje en cuatro momentos:

- propuesta de un problema,
- trabajo estudiantil independiente,
- discusión interactiva y comunicativa,
- clausura o cierre

Una vez finalizada esta etapa se debe trabajar en una segunda fase que consiste en la apropiación y fortalecimiento de las habilidades que han sido propiciadas a través del problema, esto implica utilizar los conocimientos en contextos diferentes o novedosos.

Chaves (2018) plantea que es necesario la utilización de problemas matemáticos de diferente nivel de complejidad: reproducción, conexión y reflexión; es decir, se debe considerar un nivel creciente en la demanda cognitiva de las áreas matemáticas que se proponen en la clase.

Este currículo asume como su objetivo principal la búsqueda del fortalecimiento de las capacidades cognoscitivas para abordar los retos de una sociedad moderna, donde la información, el conocimiento y la demanda de habilidades y capacidades mentales son invocadas con fuerza (MEP, p. 13).

Capacidades cognoscitivas superiores y los procesos matemáticos

Para lograr capacidades cognitivas superiores en los estudiantes, la mediación pedagógica de la clase de matemática debe incorporar procesos matemáticos que son:

> …formas de acción cognitiva que pueden generar capacidades. La selección y conceptuación de estos procesos ordena y define el papel que se desea dar a las capacidades matemáticas (por ejemplo asociar estrechamente la resolución de problemas y la modelización), y facilitan la implementación en la acción de aula de acciones cognitivas transversales de alto nivel. (MEP, 2012, p. 14)

Los procesos matemáticos estipulados en el currículo costarricense son:

Razonar y argumentar: son actividades mentales que buscan la deducción, inducción, comparación, generalización entre otras.

Plantear y resolver problemas: se refiere a la búsqueda de estrategias para la resolución de problemas de diversos contextos. También busca el planteo de problemas a través de situaciones matemáticas dadas.

Conectar: pretende la conexión de las diferentes áreas matemáticas y de otras áreas del saber a través de problemas.

Comunicar: busca que el estudiante se comunique matemáticamente, de acuerdo a su nivel, con su docente o sus compañeros. Esta comunicación puede ser verbal, escrita o visual.

Representar: se refiere al uso y elaboración de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos de cada área.

De acuerdo con Ruiz (2017), el cómo y en qué grado intervienen estos procesos matemáticos en un problema establecen el grado de dificultad de la tarea matemática. Los niveles de complejidad (reproducción, reflexión y conexión) sintetizan la intervención de los procesos; es decir, los procesos son el punto de partida para identificar el nivel de demanda cognitiva de una tarea matemática. Visto de este modo basta con identificar el grado de intervención de los procesos en una determinada tarea matemática o problema para definir el nivel de demanda cognitiva del mismo.

Estructura de Intervención de los Procesos en los Problemas (EIPP): Modelo simplificado

Ruiz (2017) establece 61 criterios o indicadores que definen operativamente la interacción de cada uno de los procesos matemáticos en una tarea. La lista de criterios clasificada en los cinco procesos matemáticos define un modelo completo que permite determinar el nivel de complejidad de un problema o tarea matemática. Sin embargo, dada la complejidad de implementar los 61 indicadores Ruiz (2017) diseñó un modelo simplificado, con 30 indicadores, que permite identificar el nivel de complejidad de una manera más simple. A continuación se detalla el modelo simplificado propuesto por Ruiz (2017).

Tabla 1
Indicadores de grados de procesos de acuerdo al modelo simplificado de Ruiz (2017).

Procesos	Grado 1	Grado 2	Grado 3
Razonar y argumentar	RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?). RA1.4 Efectuar razonamientos directos o realizar interpretaciones que se extraen literalmente de los resultados en la aplicación de un procedimiento.	RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto. RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y amerita mayor argumentación (por ejemplo: ¿cómo hallamos? ¿qué tratamiento matemático damos? ¿qué puede o no puede pasar y por qué? ¿qué sabemos? ¿qué queremos obtener?).	RA3.1 Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o describir situaciones (matemáticas o de contexto real) no estudiados y complejos. RA3.4 Realizar razonamientos matemáticos donde se muestra que se comprende la amplitud y los límites de los objetos matemáticos usados y de los procedimientos desarrollados.
Resolver y plantear	PRP1.1 Resolver problemas con datos	PRP2.1 Plantear una estrategia correcta para	PRP3.1 Resolver problemas que no han sido estudiados

problemas	sencillos y enunciados de manera explícita que sólo admiten una única solución. PRP1.2 Resolver problemas que involucran la utilización de algoritmos, fórmulas, procedimientos, propiedades, o convenciones elementales.	resolver problemas que no han sido estudiados donde se identifiquen con claridad los procedimientos a utilizar. PRP2.2 Resolver problemas que no han sido estudiados a partir de una situación dada (matemática o de contexto) donde se ejecuten acciones secuenciales descritas con claridad.	donde se seleccionen, comparen y evalúen diferentes estrategias. PRP3.3 Plantear problemas a partir de una situación matemática o de contexto que implique diferentes estrategias de solución o que sean de solución abierta.
Conectar	C1.1 Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas. C1.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos distintos dentro de una misma área matemática en la resolución de problemas.	C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados. C2.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más áreas matemáticas diferentes en la resolución de problemas.	C3.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos. C3.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más asignaturas o disciplinas cognoscitivas diferentes en la resolución de un problema.
Comunicar	COM1.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal). COM1.4 Comunicar en forma breve mediante representaciones matemáticas (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) resultados de procedimientos rutinarios (por aplicación de algoritmos o propiedades, fórmulas, convenciones elementales, o un modelo que ya ha sido estudiado) que se desarrollan en la resolución de un problema ya estudiado.	COM2.2 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos, que usan conceptos o procedimientos matemáticos estudiados (expresados de manera oral o escrita) en la resolución de un problema. COM2.4 Comunicar conclusiones mediante lenguaje natural en torno a acciones, razonamientos y resultados que ha desarrollado en la resolución de un problema.	COM3.1 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos no estudiados y complejos. COM3.3 Comunicar sus argumentos en la resolución de un problema o la realización de una prueba, usando relaciones más abstractas entre conceptos, métodos o resultados matemáticos (en especial relaciones lógicas).

Representar	R1.2 Usar solo una representación matemática para resolver o para modelar situaciones matemáticas o de un contexto real que han sido estudiadas. R1.3 Identificar dos más representaciones de objetos matemáticos en una situación dada. 10 indicadores Grado 1	R2.1 Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada. R2.4 Usar dos representaciones matemáticas en la resolución de problemas estudiados. 10 indicadores Grado 2	R3.2 Usar tres o más representaciones matemáticas para aplicar en la resolución de problemas en contextos reales o matemáticos que no han sido estudiados y son complejos. R3.5 Evidenciar con claridad que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación en la resolución de problemas. 10 indicadores Grado 3

Fuente: Ruiz (2017, pp. 142-144)

Como se puede observar en la Tabla 1, si se lee por filas, en estas se establecen los indicadores de cada proceso matemático aumentando el grado de intervención del mismo en el problema matemático. Mientras que si la tabla se lee por columna, se visualiza como esta presente el Grado 1, Grado 2 y Grado 3 en cada uno de los procesos matemáticos. La simbología previa a cada indicador ayudará en el trabajo del taller.

Para realizar el análisis de intervención de los procesos es necesario, en primera instancia resolver el problema dado. Posteriormente, se realiza un barrido por cada uno de los procesos y por cada uno de los indicadores para determinar cuál de ellos está presente en la resolución de la tarea. Puede que algunos procesos no estén presentes. Después de realizar este razonamiento, se desea conocer el nivel de complejidad del problema. La Tabla 2 nos da la fórmula para decidir esto.

Tabla 2
Criterio simplificado para valorar niveles de complejidad

Criterio	
Nivel de Complejidad Simplificado1 (NCS1)	**Nivel de Complejidad Simplificado2 (NCS2)**
Cuando en un problema hay al menos 3 indicadores de un grado N en los procesos se valorará el nivel de complejidad del problema de la siguiente manera: N=1, nivel de complejidad *reproducción*. N=2, nivel de complejidad *conexión.* N=3, nivel de complejidad *reflexión*.	Cuando no se cumple NCS1 (de los 3 indicadores): se debe valorar la situación especial y tomar una decisión con base en los indicadores que se juzguen más decisivos para establecer el nivel de complejidad; por ejemplo, cuando en un problema no sea posible identificar 3 indicadores de un grado N.

Fuente: Ruiz (2017, p. 146).

Para explicar la Tabla 1 y Tabla 2 se planteará un problema y se analizará por completo la intervención de los procesos matemáticos, para luego decidir el nivel de complejidad del mismo.

Análisis de un problema A

A continuación se presenta un contexto, con base en este se plantea un problema, una posible resolución del mismo, se identifican las habilidades y posteriormente se expone el análisis del procedimiento desarrollado a través del EIPP Simplificado.

Porcentaje de Grasa Corporal

La ecuación de Deurenberg permite el cálculo del porcentaje de Grasa Corporal (%GC) a partir del índice de Masa Corporal (IMC) para personas mayores a 15 años utilizando la fórmula:

$$\%GC = (1{,}2 \cdot IMC) + (0{,}23 \cdot edad) - (10{,}8 \cdot sexo) - 5{,}4$$

Donde, en la variable sexo se coloca 0: Mujeres y 1: Hombres, la varible edad debe ser dada en años y el IMC es el índice de masa corporal, que se calcula con la fórmula $\text{IMC} = \frac{\text{peso}}{\text{estatura}^2}$, con peso en kilogramos y estatura en metros.

Según la Organización Mundial de la Salud, las diferentes categorías para el %GC son:

Tabla 3

Categorías según el %GC

Porcentaje de Grasa corporal %GC		
Categoría	**Mujeres**	**Hombres**
Grasa esencial	10-13	2-5
Deportistas	14-20	6-13
En forma	21-24	14-17
Valor normal	25-31	18-24
Obesidad	Más de 32	Más de 25

Fuente: Organización Mundial de la Salud

Daniel desea comenzar un programa de entrenamiento diario para mejorar su condición de salud. Para ello necesita conocer su %GC. Si Daniel tiene 38 años, una estatura de 1,76 metros y un peso (masa) de 88 kilogramos:

¿Puede usted ayudar a Daniel a identificar en qué categoría de %GC de acuerdo a OMS se encuentra?

Solución

Primero se debe hallar el IMC pare ello procedemos a sustituir los valores dados:

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso}}{\text{estatura}^2} = \frac{88}{1{,}76^2} = 28{,}41$$

Una vez calculado el IMC procedemos a determinar el %GC, para ellos sustituimos cada una de las variables en la ecuación de Deurenberg:

$$\%\text{GC} = (1{,}2 \cdot \text{IMC}) + (0{,}23 \cdot \text{edad}) - (10{,}8 \cdot \text{sexo}) - 5{,}4$$

$$\%GC = (1{,}2 \cdot 28{,}41) + (0{,}23 \cdot 38) - (10{,}8 \cdot 1) - 5{,}4$$

$$\%GC = 26{,}63$$

De acuerdo a la clasificación de la OMS sobre el %GC, Daniel está en la categoría de obesidad.

Estructura de Intervención de procesos en un problema (EIPP).

Razonar Argumentar

Al efectuar el problema se debe interpretar la información brindada en el contexto "Porcentaje de Masa Corporal", es decir, comprender que la ecuación de Deurenberg permite calcular el índice de masa corporal, para ello se deben sustituir los valores dados en cada una de las variables

proporcionadas en la ecuación (valor numérico de una expresión algebraica). Luego, el estudiante se debe percatar que primero debe calcular el IMC para poder sustituir ese valor en la ecuación de Deurenberg junto con los otros valores que son dados directamente. Por último, hay que interpretar el valor obtenido de acuerdo a la tabla brindada por la OMS. Indicador RA1.4

Plantear y resolver problemas
El estudiante debe visualizar que primero se debe calcular el IMC para ser sustituido con los otros valores en la ecuación de Deurenberg. Note que el cálculo del valor numérico de una expresión algebraica es un procedimiento rutinario para el estudiante. Indicadores PRP1.2; PRP1.2

Conectar
Una vez realizada la sustitución de valores en la ecuación de Deurenberg (valor numérico de una expresión algebraica), queda determinada una operación con números racionales que el estudiante debe resolver. Luego se debe determinar una interpretación del valor encontrado de acuerdo a la tabla de la OMS (comparando números racionales). Existe la interacción de dos áreas matemáticas (Números y Relaciones y álgebra) con un contexto real. Indicadores C2.2; C2.1

Comunicar
Hay que identificar e interpretar la información matemática dada en el contexto para determinar una estrategia de solución. Luego se debe proporcionar una respuesta que interprete el valor encontrado después de calcular el valor numérico. Indicadores COM1.1; COM 1.4

Representar
Se deben identificar los datos presentes en el contexto suministrado. Indicador R1.2

Resumen de estructura de intervención de los procesos:
RA1.4; PRP1.2; PRP1.2; C2.2; C2.1; COM1.1; COM 1.4; R1.2

Nivel de complejidad: Al existir seis indicadores de Grado 1 y solamente dos de Grado 2 entonces se utiliza el criterio NCS1 de la Tabla 2, por lo que el problema es de reproducción

Consideraciones finales

- La metodología de Resolución de Problemas permite que las clases de matemáticas sean más dinámicas y con mayor aprendizaje significativo, sin embargo esto trae una serie de retos para los profesores de primaria y secundaria: uno de estos retos es diseñar problemas que propicien capacidades cognitivas superiores.
- Elaborar la solución o posibles soluciones es fundamental para poder valorar la intervención de los procesos matemáticos, asimismo, se debe considerar la solución que el docente considera la más natural de acuerdo con los conocimientos previos de los estudiantes. Sin embargo, debe estar anuente a considerar soluciones alternativas y valorarlas con la EIPP.
- El análisis del nivel de complejidad de los problemas es fundamental para las actividades que se proponen en la clase pero también en las evaluaciones sumativas.
- En caso de dudas sobre la intervención de los procesos matemáticos en la resolución de un problema, se puede recurrir al modelo completo propuesto por Ruiz (2017) debido a que se exponen otros indicadores que permiten identificar algunas acciones que el simplificado omite con el objetivo de ofrecer un recurso más práctico.

Referencias bibliográficas

Alfaro, C. y Barrantes, H. (2008) *¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense.* Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática 3(4), 83-98.

Alfaro, C y Barrantes, H (2015). ¿Qué es un problema matemático? [pptx]. Universidad de Costa Rica, Facultad de Educación. Escuela de Formación Docente. FD0531 Metodología para la Enseñanza de la Matemática. Recuperado de: https://docs.google.com/presentation/d/1Mtf2KVI6tmpUuDoOQJoKmkhqOMiTs00fNiRcdV0hDa8/edit - slide=id.p3

Carbajal, A. (2017). *Manual de Nutrición y Dietética.* Departamento de Nutrición. Facultad de Farmacia. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de: https://www.ucm.es/data/cont/docs/458-2013-07-24-cap-2-composicion-corporal55.pdf

Chaves, E. (2018). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica: 2010-2017. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Costa Rica. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/34371

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor. Recuperado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Ruiz, A. (2017). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial, octubre. ISSN 1659-2573. Costa Rica. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/31916/31622

Estadística y Probabilidad

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A apreensão de conceitos básicos de Probabilidade considerando abordagens históricas para o Ensino Fundamental

Ailton Paulo de **Oliveira Júnior**
Universidade Federal do ABC
Brasil
ailton.junior@ufabc.edu.br
Karoline Marcolino **Cardoso**
Universidade Federal do ABC
Brasil
karoline.cardoso@aluno.ufabc.edu.br
Nilceia **Datori** Barbosa
Universidade Federal do ABC
Brasil
niceiadatori@gmail.com
Natália Galvão Simão de **Souza**
Universidade Federal do ABC
Brasil
natalia.galvao@aluno.ufabc.edu.br

Resumo

Apresenta-se a fundamentação teórica utilizada para a criação de problemas no processo ensino e aprendizagem de conteúdos probabilísticos do 1° ano do Ensino Fundamental, seguindo os princípios da Teoria Antropológica do Didático – TAD na organização praxeológica didática e matemática (probabilidade) e a Equivalência de Estímulos para elaborar pequenas unidades de ensino, descrevendo um repertório simples a ser ensinado e progressivamente ir aumentando a complexidade. Partindo desse pressuposto trazemos a elaboração de problemas abordando a identificação de experimentos aleatórios e determinísticos associado à nova Base Nacional Comum Curricular – BNCC publicada em 2017 no Brasil, que fazem parte do jogo com base na TAD, composto por situações problema ou *tarefas*, constituída de uma sequência de subtarefas, que podem ser realizadas utilizando diversas *técnicas* justificadas pela *tecnologia* que se utiliza de teorias relacionadas à Probabilidade como objeto de estudo, favorecendo a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções.

Palavras chave: Probabilidade, aleatório, história, ensino, fundamental, Brasil.

Introdução

Ao empregar pressupostos históricos é fundamental compreender quais os acontecimentos, mecanismos e fatos que convergiram para produzir determinado conhecimento, bem como relacionar as necessidades sociais que impulsionaram tais descobertas.

Consideramos que a história possui grande valor cultural e social. Esse valor deve ser trabalhado em sala de aula, pois permite mostrar aos alunos que os conteúdos não são um campo de conhecimento estático e pronto, mas que está em constante mudança de acordo com as necessidades de cada povo e de cada região ao longo da história.

Uma abordagem desse tipo poderia auxiliar o aluno a perceber o que motivou determinada sociedade na elaboração de determinados conhecimentos e de como a formalidade vai ganhando espaço, não para complicar ou selecionar indivíduos, mas para facilitar a compreensão de fenômenos de maneira cada vez mais generalizada.

Além disso, o estudo da ocorrência da Probabilidade na história fornece uma forma de conhecimento do mundo que, além de fornecer um conjunto de técnicas, resultados e teoremas, fornece compreensão do progresso da humanidade nesta área e que passou pela evolução da ciência, a organização dos estados e o governo do estado. Portanto, além de oferecer uma função utilitária, contribuem para o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos sujeitos.

O objetivo do trabalho foi apresentar a fundamentação teórica utilizada para a criação de problemas no processo ensino e aprendizagem de conteúdos probabilísticos do 1° ano do Ensino Fundamental, seguindo os princípios da Teoria Antropológica do Didático – TAD na organização praxeológica didática e matemática (Probabilidade) e a Equivalência de Estímulos para elaborar pequenas unidades de ensino, descrevendo um repertório simples a ser ensinado e progressivamente ir aumentando a complexidade.

Fundamentação Teórica

Nas últimas décadas, os currículos de matemática têm, progressivamente, incluído a probabilidade desde as primeiras idades, para responder à necessidade de contar com cidadãos probabilisticamente alfabetizados, "capazes de lidar com uma ampla gama de situações do mundo real que envolvam a interpretação ou geração de mensagens probabilísticas, bem como a tomada de decisões" (Gal, 2005).

É necessário considerar que o ensino de probabilidade pode ser promovido na educação primária, permitindo o desenvolvimento da alfabetização probabilística.

A alfabetização probabilística corresponde à capacidade de acessar, utilizar, interpretar e comunicar informações e ideias relacionadas à probabilidade, a fim de participar e gerenciar efetivamente as demandas de funções e tarefas que envolvem a incerteza (Gal, 2005).

É dessa perspectiva que Gal (2005) caracteriza a alfabetização probabilística a partir de elementos cognitivos, como: (1) Grandes ideias: variação, aleatoriedade, independência, incerteza; (2) Como calcular probabilidades; (3) Idioma para comunicar o acaso; (4) Contexto; (5) Questões críticas.

Coutinho (2007) discutiu o papel da história da Probabilidade na escolha de contextos para apresentação dos primeiros conceitos probabilísticos no Ensino Fundamental. Limitou-se a

descrever a apreensão do acaso em relação ao contexto no qual está inserido, considerando os resultados possíveis de manipulações de um gerador de acaso, como os jogos de azar (manipulação de moedas, dados, etc.), além dos fenômenos sensíveis que traduzem o efeito macroscópico das causas ínfimas, tal como o contexto das previsões meteorológicas.

Fernandes e Santos Júnior (2015), apresentam-se resultados de uma pesquisa que objetivou analisar as contribuições que uma sequência de ensino pode trazer para o ensino de Estatística e Probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental, utilizando como recurso didático a contextualização envolvendo a História da Matemática. Ao analisar os resultados advindos do desempenho dos alunos durante a execução dessa proposta pedagógica, percebeu-se um avanço significativo quanto à aquisição dos conteúdos envolvendo as questões históricas com relação aos conhecimentos de Estatística e Probabilidade.

Procedimentos Metodológicos

Tomaremos como base teórica a Teoria Antropológica do Didático - TAD, de Chevallard (1996) e Chevallard, Bosch e Gascón (2001), que será utilizada para a elaboração dos problemas ou questões, contribuindo para o processo ensino e aprendizagem dos conteúdos probabilísticos do 1° ano do Ensino Fundamental, que será composto por situações problema ou tipos de tarefa, que identificaremos por (T), constituída de uma sequência de subtarefas (t), que podem ser realizadas utilizando diversas técnicas (τ) justificadas pela tecnologia (θ) que se utiliza da teoria (Θ) da Probabilidade como objeto de estudo.

Segundo Bittar (2017, p. 367), o modelo praxeológico proposto para descrever qualquer atividade, matemática ou não, é composto por: tipo de tarefas T; técnicas (τ) que resolvem as tarefas desse tipo; tecnologia (θ) que justificam a técnicas e garantem sua validade, e, finamente, a teoria (Θ) que justifica a tecnologia. Esse quarteto praxeológico é denotado [T, τ, θ, Θ], sendo que o bloco [T, τ] é denominado de prático-técnico, ou bloco do saber-fazer; e o bloco [θ, Θ] é denominado bloco tecnológico-teórico ou bloco do saber.

Para Chevallard (1999) entende-se por tecnologia, um discurso racional sobre a técnica. Tal discurso tem por objetivo justificar racionalmente a técnica utilizada. Por sua vez a teoria, é um nível mais avançado de justificativa, isto é, a justificativa da tecnologia.

Consideramos que a Teoria Antropológica do Didático (TAD) fornece recursos para que se possam elaborar problemas ou questões utilizando a resolução de problemas de um jogo pedagógico no processo ensino e aprendizagem dos conteúdos probabilísticos do 1° ano do Ensino Fundamental. Por essa razão, este trabalho será baseado na noção de organização matemática (probabilística) para elaborar os problemas ou questões do jogo pedagógico.

Consideraremos ainda como base metodológica a Equivalência de Estímulos (Sidman, & Tailby, 1982), fornecendo critérios operacionais, empiricamente verificáveis, para especificar comportamentos com características simbólicas. O modelo distingue relações entre pares associados (i.e., relações condicionais do tipo se..., então...) de relações de equivalência, potencialmente simbólicas.

Segundo Carmo e Galvão (2000, p. 51), a Equivalência de Estímulos é um modelo teórico que permite prever que, para um indivíduo, um estímulo passa a pertencer a uma classe de estímulos equivalentes na qual estes são substituíveis uns pelos outros, a partir de relações condicionais arbitrariamente estabelecidas entre ele e um ou alguns membros dessa classe.

Carmo (2012) apresenta a estrutura de um programa de ensino de conceitos e habilidade matemáticas contendo dois aspectos fundamentais: (1) princípios educacionais para um ensino eficaz; (2) unidades curriculares de ensino.

Resultados

As atividades curriculares elaboradas pela proposição de problemas têm seu processo de criação considerando os conteúdos propostos na proposta curricular da nova BNCC para os anos iniciais do Ensino Fundamental, Brasil (2017), de forma a possibilitar aos alunos a compreensão de conceitos básicos de probabilidade (Quadro 1).

Quadro 1

Objetivos e Habilidades dos conteúdos probabilísticos propostos na nova Base Nacional Comum Curricular – BNCC do 1° do Ensino Fundamental.

OBJETIVOS	Noção de acaso.
HABILIDADES	Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como "acontecerá com certeza", "talvez aconteça" e "é impossível acontecer", em situações do cotidiano.

Fonte: Brasil (2017, p. 276-277).

Neste trabalho, trazemos a elaboração de problemas para auxiliar na apreensão do conceito de aleatório, focando, inicialmente, nos jogos de azar que historicamente abriu portas para o desenvolvimento da Teoria da Probabilidade e a seguir a indicação de conceitos relacionados a experimentos aleatórios e determinísticos.

Apresentamos problemas, figura 1, que compõem as atividades focadas nos princípios da TAD na organização praxeológica didática e matemática (probabilística).

Godino, Batanero e Cañizales (1996) apontam uma razão do tipo social para defender a educação da intuição probabilística na escola básica, que é tornar os alunos conscientes da natureza probabilística de distintos jogos de azar (loterias, máquinas caça-níqueis, bingos etc.), jogos que são magníficos negócios para aqueles que os promovem e um risco desproporcional de perder dinheiro para aqueles que apostam. Os autores questionam se é racional um homem ou uma mulher expor seus bens a uma casualidade tão pouco favorável para si.

Os jogos de azar são aqueles em que a perda ou o ganho dependem mais da sorte do que do cálculo, ou somente da sorte. Estes jogos estão muito ligados às probabilidades. Alguns dos seus exemplos são: a roleta, o bingo, jogos de baralhos de cartas, a Mega-Sena, etc.

Partimos do fato histórico do interesse do homem em estudar os fenômenos que envolviam possibilidades e que fizeram surgir a Probabilidade. Alguns indícios alegam que o surgimento da teoria das probabilidades teve início com os jogos de azar. Esse tipo de jogo é comumente praticado através de apostas, também utilizado no intuito de antecipar o futuro.

Além disso, os jogos de azar existem desde os primórdios das civilizações. O termo azar é usado como sinônimo de aleatório, ou seja, um evento que pode ser parcialmente ou totalmente ditado pela casualidade. Assim, jogar é um desafio e os desafios envolvem riscos. E os riscos envolvem incerteza que envolvem perdas ou ganhos.

Desde os tempos mais antigos, as pessoas usam jogos de sorte e azar para se divertir ou até mesmo tomar decisões. Um simples par ou ímpar pode ajudar a fazer algumas escolhas em várias situações, assim como uma partida de jogo da velha.

Uns dos mais antigos jogos de azar são dados que foram criados para prever o futuro, e os resultados dependiam da vontade dos deuses. O mais antigo dado encontrado é do ano 1000 a.C. e foi feito de cerâmica.		
A partir deste aspecto da história da probabilidade, responda aos seguintes problemas:		
1. O Jogo de Cara-ou-Coroa é um jogo de azar? 		
2. O Jogo da Velha é um jogo de azar? 		

Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 1. Proposta de problemas versando sobre a diferente entre os conceitos de experimentos aleatórios e determinísticos.

O Quadro 2, apresenta as atividades ou problemas apresentados na figura 1, tomando como base a TAD e refere-se ao bloco denominado de prático-técnico, ou bloco do saber-fazer.

Quadro 2

Descrição do bloco prático-técnico ou saber-fazer referente à TAD das atividades da figura 1.

Tarefa 1 (T_1)	Subtarefas		Técnicas	
Consiste em determinar, a partir da apresentação de alguns tipos de jogos conhecidos, se é possível afirmar que os mesmos são, ou não, jogos de azar. E a partir desta concepção, começar a desenvolver intuitivamente o conceito de aleatório.	t_1	Consiste em determinar, a partir de uma narrativa inicial de elementos históricos se o jogo "Cara ou Coroa" é um jogo de azar e consequentemente trabalhar com o conceito intuitivo de aleatório.	τ_1	De acordo com a situação proposta configura-se em decidir, se o jogo se caracteriza como um jogo de azar, figura 1, Problema 1.
	t_2	Consiste em determinar, a partir de uma narrativa inicial de elementos históricos se o jogo da Velha é um jogo de azar e consequentemente trabalhar com o conceito intuitivo de aleatório.	τ_2	De acordo com a situação proposta configura-se em decidir, se o jogo se caracteriza como um jogo de azar, figura 1, Problema 2.

O jogo "cara ou coroa", é um jogo para duas pessoas que pode ser usado como jogo de azar. Em cada lançamento da moeda não sabemos se sairá a face "Cara" ou a face "Coroa", portanto, caracteriza-se como um jogo de azar. E o jogo da velha é um jogo de regras e configura-se como um jogo de azar, pois o jogador deve ser o primeiro a fazer uma sequência de três símbolos iguais, seja em uma linha, coluna ou diagonal. Um jogador joga com o círculo (O) e outro com o xis (X). Cada jogador, na sua vez, desenha (ou coloca a peça), numa lacuna que esteja vazia. Quando um jogador conquista o objetivo, costuma-se riscar os três símbolos. Quando há empate costuma-se dizer que o jogo "deu velha".

O Quadro 3, apresenta as atividades ou problemas apresentados na figura 1 e tomando como base a TAD e refere-se ao bloco denominado bloco tecnológico-teórico ou bloco do saber.

Quadro 3

Descrição do bloco tecnológico-teórico/ do saber referente à TAD das atividades da figura 1.

Técnicas	Tecnologia θ_1	Teoria Θ_1
τ_1 e τ_2	Permite justificar e explicar as técnicas (τ_1 e τ_2) pode ser descrita, ao considerar a recuperação da história dos jogos de azar que consiste em trilhar pelos caminhos percorridos pela humanidade, observando seus contextos, entendendo a maneira de ser e estar presente no mundo em determinado momento. Entendendo que tais atividades nem sempre foram específicas de crianças ou de adultos, mas de todo o grupo social dentro do qual ocorriam as interações, a socialização, a aprendizagem dos costumes e as práticas religiosas e educacionais.	Explica e justifica a tecnologia θ_1 pode ser explicitada segundo Batanero (2015) que lembra que o conceito de aleatoriedade não é simples e que ao longo da história, teve diferentes significados e está associado a discussões filosóficas. Pode-se encontrar definições diferentes atualmente e na sala de aula geralmente é definida através de algumas propriedades como "imprevisibilidade", "possibilidade de vários resultados", "incontrolável" e mais avançado "com frequência relativa estável em uma longa série de experiências".

Considerando ainda a Equivalência de Estímulos e o currículo proposto pela nova BNCC, Quadro 1, trazemos outro fato histórico, atividade 3, ou seja, trazemos Laplace como autor de um dos mais importantes livros sobre probabilidades de todos os tempos, o *Teoria Analítica da Probabilidade (1812)*, e que claramente defendeu o ponto de vista de Demókritos (Figura 2), apresentado na atividade 2.

Laplace foi autor de um dos mais importantes livros sobre probabilidades de todos os tempos, o *Teoria Analítica da Probabilidade (1812)*, onde muito claramente defendeu o ponto de vista de Demókritos, levando-o a um extremo, dizendo: **"se imaginarmos uma inteligência capaz de conhecer todas as forças que animam a Natureza e conhecer o estado de todas as partes da qual ela é composta - uma inteligência suficientemente grande para analisar todos esses dados - então ela seria capaz de numa fórmula expressar o movimento dos maiores corpos do universo, bem como o dos menores átomos. Para tal inteligência nada seria incerto e o futuro, bem como o passado, estariam abertos a seus olhos".**		
A partir destes aspectos da história da probabilidade, considere as seguintes situações ocorridas na natureza e classifique-as como determinista ou aleatória:		
3 – Jogar uma pedra que temos na mão e verificar se "a pedra cai". 	**DETERMINÍSTICO** 	**ALEATÓRIO** 
4 – Tentar advinhar quantas ervilhas cabem numa determinada embalagem e vidro. 	**DETERMINÍSTICO** 	**ALEATÓRIO** 

Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 2. Proposta de problemas versando sobre a diferente entre os conceitos de experimentos aleatórios e determinísticos.

O Quadro 4, está associado às atividades ou problemas apresentados na figura 2 e tomando como base a TAD e refere-se ao bloco denominado de prático-técnico, ou bloco do saber-fazer.

Quadro 4

Descrição do bloco prático-técnico ou saber-fazer referente à TAD das atividades da figura 2.

Tarefa 2 (T_2)	Subtarefas		Técnicas	
Consiste, a partir de fato histórico, determinar, considerando situações diárias, se é possível afirmar ou prever o que acontecerá (situações determinísticas) ou que não se pode prever (situações aleatórias).	t_3	consiste em determinar, se a situação diária "Jogar uma pedra que temos na mão e verificar se a pedra cai" é um experimento determinístico ou aleatório.	τ_3	De acordo com a situação proposta configura-se em decidir, se caracteriza uma situação determinística ou aleatória, ou seja, quando lançamos uma pedra que temos na mão e esta cai no chão, como na figura 3, Problema 1, caracteriza-se como uma situação em que se pode prever, antes do experimento ser concretizado, o que irá determinar, portanto, um fenômeno determinístico.
	t_4	consiste em determinar, se a situação diária "Verificar quantas ervilhas cabem numa determinada embalagem de vidro" é um experimento determinístico ou aleatório.	τ_4	De acordo com a situação proposta configura-se em decidir, se caracteriza uma situação determinística ou aleatória, ou seja, ao verificar ou predizer o número de ervilhas que há dentro do vidro, figura 3, Problema 2, caracteriza-se como uma situação em que não se pode prever, antes do experimento ser concretizado, o que irá acontecer, portanto, um fenômeno aleatório.

O Quadro 5, está associado às atividades ou problemas apresentados na figura 2 e tomando como base a Teoria Antropológica do Didático - TAD e refere-se ao bloco denominado bloco tecnológico-teórico ou bloco do saber.

Quadro 5

Descrição do bloco tecnológico-teórico/ do saber referente à TAD das atividades da figura 2.

Técnicas	Tecnologia θ_2	Teoria $\Theta 2$
τ_3 e τ_4	Permite justificar e explicar as técnicas (τ_5 e τ_6) sendo descrita, segundo Kataoka, Rodrigues e Oliveira (2007, p. 1), ao considerar que a construção do conceito de probabilidade deveria ser feita a partir da compreensão de três noções básicas: percepção do acaso; ideia de experiência aleatória; e noção de probabilidade.	Explica e justifica a tecnologia θ_1 explicitada por Batanero e Godino (2002) que traçam algumas orientações sobre como ajudar as crianças no desenvolvimento do raciocínio probabilístico, dentre elas de proporcionar variedade de experiências que permitam observar fenômenos aleatórios e diferenciá-los dos deterministas.

Conclusões

Consideramos que é preciso que o conteúdo probabilístico trabalhado na sala de aula seja contextualizado para que possa ganhar sentido; mas também é preciso que o professor conduza o aluno a um processo de análise, de modo que este enxergue claramente que o conhecimento envolvido pode ser usado em diferentes situações.

Um dos movimentos presentes na aula de matemática que aborda conteúdos probabilísticos deve ser o que vai da contextualização à descontextualização; e que vai transformando manejo, estratégias, conclusões, respostas de problemas, conhecimento localizado, ou seja, em um saber probabilístico, de caráter universal, pode servir em novos problemas, situações e contextos.

Por fim, estabelecer relações de equivalência entre diferentes formas de apresentação dos problemas probabilísticos, tendo o cuidado de variar situações do cotidiano do aluno, pode ser uma maneira de o professor levar esse a aprender que o comportamento (estratégia de resolução) apresentado em uma situação pode ser usado em situações que são semelhantes, isto é, resolver com a mesma estratégia problemas que tem mesma forma (estrutura), e aprender que as mesmas estratégias são aplicáveis em situações nas quais os mesmos problemas são apresentados em diferentes formatos (estruturas diferentes).

Referências

Batanero, C., & Godino, J. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros: Proyecto Edumat-Maestros*. Granada: Universidade de Granada. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf

Batanero, C. (2015). Understanding randomness. Challenges for research and teaching. *Proceedings of Congress of European Research in Mathematics Education*, Praha, Czech Republic, 9.

Bittar, M. (2017). A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké*, 25(3), 364-387.

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf.

Carmo, J. S., & Galvão, O. G. (2000). Aquisição do conceito de número em crianças pré-escolares através do ensino de relações condicionais e generalização. In Carmo, J. S., Silva, L. C. C., & Figueiredo, R. M. E. (Org.). *Dificuldades de aprendizagem no ensino de leitura, escrita e conceitos matemáticos. (*pp. 50-87). Belém, Universidade da Amazônia.

Carmo, J. S. (2012). Aprendizagem de conceitos matemáticos em pessoas com Deficiência Intelectual. *Revista DI*, 3, 43-48.

Chevallard,Y. (1996). *Conceitos fundamentais da Didáctica: perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica*. In Brun, J. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique du didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage-Édtions, 19(2), 221-265.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). *Estudar Matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas.

Coutinho, C. Q. S. (2007). *Conceitos probabilísticos:* Quais contextos a história nos aponta. *REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 2(3), 50-67.

Fernandes, R. J. G., & Santos Júnior, G (2015). História da matemática: uma estratégia contextualizada para o ensino de estatística e probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Imagens da Educação*, 5(2), 25-35.

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In: Jones, G.A (ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning. (pp. 39-63). USA: Springer.

Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1996). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntese s.

Kataoka, V., Rodrigues, A., & Oliveira, M. (2007). Utilização do conceito de Probabilidade Geométrica como recurso didático no ensino de Estatística. Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte: UFMG, 9.

Sidman, M., & Tailby, W. (1982). Conditional discrimination vs matching to sample: an expansion of the testing paradigm. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 37, 5-22.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desarrollo de las ideas estadísticas fundamentales en la práctica profesional

Daniel Eudave Muñoz
Departamento de Educación, Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
deudave@correo.uaa.mx
Margarita Carvajal Ciprés
Departamento de Educación, Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
mcarvaja@correo.uaa.mx
David Alfonso Páez
Departamento de Educación, Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
dapaez@correo.uaa.mx

Resumen

Los conocimientos estadísticos son cada vez más necesarios, tanto para el ciudadano común como para los profesionistas universitarios. Sin embargo, cada campo profesional enfrenta diferentes tipos de demandas laborales que configuran comprensiones estadísticas específicas. El objetivo del presente estudio es conocer los contextos y tareas del entorno laboral que permiten el desarrollo de las ideas estadísticas fundamentales desde la práctica. Se realizaron entrevistas a 10 profesionistas para identificar las actividades laborales que realizan de manera habitual y en donde la estadística es un componente indispensable. Del análisis de las actividades realizadas, fue posible identificar los conceptos estadísticos fundamentales que les dan sustento, así como el contexto y las situaciones que dan cuerpo a las mismas. Es notoria la distancia entre la estadística que ponen en práctica en sus trabajos y aquella que estudiaron en la universidad, según declaran los mismos entrevistados.

Palabras clave: educación estadística, conceptos estadísticos fundamentales, educación superior, formación para el trabajo.

Antecedentes

En el recientemente publicado International Handbook of Research in Statistics Education (Ben-Zvi, Makar & Garfiel, 2018), Wild, Utts y Horton señalan: "En el mundo de hoy, rico en datos, todas las personas educadas deben entender las ideas y conclusiones estadísticas, para enriquecer su vida profesional y personal" (2018, p. 16). Con los avances tecnológicos en materia de informática y comunicación, que propician la disponibilidad de una gran cantidad y variedad de datos, estamos ante una impostergable necesidad de incrementar y mejorar la formación estadística, y más aún, reorientarla a los nuevos retos y posibilidades en el manejo de la información (Tishkovskaya y Lancaster, 2012).

La enseñanza de la estadística como disciplina requerida para las profesiones universitarias, en especial para las ciencias sociales, tiene que ser revisada a la luz de las exigencias actuales. Con frecuencia, los estudiantes de este campo pierden interés por la estadística al no identificar los nexos que tiene con otros campos disciplinares y con su quehacer profesional, debido a que se les ofrece una estadística ajena a sus intereses y por lo general centrada en un conjunto de técnicas y medidas sin contextualización adecuada en las aplicaciones sustantivas de sus campos (Carter, Brown & Simpson, 2017). Es por eso que en la *Guía para la evaluación y la instrucción de la Educación Estadística* (GAISE, por sus siglas en inglés), dirigida a los estudios universitarios de pregrado, se sugiere que la formación estadística debe centrarse en el desarrollo del pensamiento estadístico, lo que implica por un lado enseñar la estadística como un proceso investigativo de resolución de problemas y de toma de decisiones, y por otro, el ofrecer a los estudiantes experiencias de pensamiento multivariado. El GAISE también sugiere enfocarse a la comprensión conceptual, en integrar datos reales con un contexto y un propósito, fomentar el aprendizaje activo, aprovechar la tecnología para explorar los conceptos y analizar los datos, y usar la evaluación para mejorar y valorar el aprendizaje de los estudiantes (Carver, et al., 2016, p. 3).

Coincidimos con Harraway y Barker (2005) en que una manera de caracterizar las necesidades estadísticas de diferentes entornos laborales es analizando la naturaleza de los modelos y técnicas estadísticas utilizadas en los diferentes campos. El objetivo del presente estudio es conocer los contextos y tareas del entorno laboral que permiten el desarrollo de las ideas estadísticas fundamentales desde la práctica. A mediano plazo, con estos resultados se espera buscar acercamientos entre las aulas y el mundo laboral.

Marco Conceptual

La enseñanza convencional de la estadística enfocada a desarrollar habilidades en el manejo de métodos estadísticos sin saber cómo aplicarlos y cuál es su significado, resulta poco favorable ante los retos que los ciudadanos y profesionistas deberán enfrentar ahora y en las próximas décadas. Se necesita desarrollar el pensamiento estadístico de los estudiantes y para ello se tienen que involucrar en experiencias de aprendizaje donde se trate con problemas y situaciones de la vida real (Pfannkuch & Wild, 2004). Hay diferentes formas de concebir el pensamiento y el razonamiento estadístico, pero hay una coincidencia en la importancia de reconocer los procesos cognitivos implicados en el tratamiento de los modelos y las ideas básicas de la estadística (Jones, Langrall, Mooney & Thornton, 2004).

Según Wild y Pfannkuch (1999), para lograr la formación de un razonamiento estadístico se requiere que los estudiantes se involucren en procesos de investigación que abarquen todo un ciclo, desde el planteamiento del problema, la definición de un plan, la obtención y procesamiento de los datos, el análisis de los datos y la presentación de conclusiones. Este ciclo investigativo debe complementarse, señalan estos autores, con un ciclo interrogativo (que comprende actividades como generar ideas, buscar información, interpretar, criticar y juzgar), con ciertas disposiciones o actitudes (como escepticismo, imaginación, curiosidad, apertura, perseverancia, y compromiso) y, finalmente, desarrollar las ideas estadísticas fundamentales (reconocimiento de la necesidad de datos, transnumeración[1], variación, modelos estadísticos, e integración de la estadística en un contexto).

Partiendo del modelo de Wild y Pfannkuch (1999), Burrill y Biehler (2013) desarrollan con mayor amplitud la definición e importancia de las ideas estadísticas fundamentales, que someramente puede caracterizarse como se señala a continuación:

> 1) Datos: incluyendo diferentes tipos de datos, métodos de recolección, mediciones, considerando que los datos son números en un contexto;
> 2) Variación: la identificación y medición de la variabilidad para predecir, explicar y controlar. El término "variabilidad" se utiliza para el fenómeno de cambio y el término "variación" para describir el efecto del cambio;
> 3) Distribuciones: incluyendo las nociones de índices de tendencia central y dispersión que son los cimientos del razonamiento sobre las variables estadísticas a partir de las distribuciones empíricas, las variables aleatorias y las distribuciones teóricas.
> 4) Representaciones: representaciones gráficas u otras representaciones que revelan el origen de los datos, incluyendo la noción de transnumeración;
> 5) Asociaciones y modelos de relación entre dos variables: naturaleza de las relaciones entre variables estadísticas según sean categóricas o numéricas, incluyendo regresión para modelar asociaciones estadísticas;
> 6) Modelos probabilísticos: modelamiento de las relaciones estructurales hipotéticas generadas a partir de la teoría, simulación o aproximaciones de un gran conjunto de datos, cuantificación de la variabilidad en datos que incluyen estabilidad a largo plazo;
> 7) Muestreo e inferencia: la relación entre las muestras y la población y cómo es que los datos deben ser recolectados para sacar conclusiones con un cierto grado de certeza. (Burrill & Biehler, 2013, p. 9)

Una propuesta curricular de esta naturaleza, nos dicen Burrill y Biehler (2013): "puede proporcionar a los maestros los recursos que necesitan para ayudar a los estudiantes a obtener la base estadística para todas las facetas de sus vidas futuras y sus estilos de vida" (p. 16). Experiencias en la formación de profesionistas de las ciencias sociales muestran que la enseñanza con datos del mundo real, contextualizada por problemas sociales sustantivos, junto con la extensión de ese aprendizaje al lugar de trabajo (mediante un esquema similar a las prácticas profesionales), brinda una oportunidad para comprender mejor cómo los estudiantes aprenden sobre la aplicación de habilidades cuantitativas (Carter, Brown & Simpson, 2017, p 82). Pero para establecer los puentes entre el mundo escolar y el mundo laboral hace falta

[1] El término "transnumeración" se utiliza para referirse a las diferentes formas de representar un conjunto de datos, con el fin de resaltar ciertos aspectos o tendencias.

conocer cuáles son las necesidades, prioridades y exigencias de este último, y por tanto obliga conocer cómo es que desde la acción y mediante prácticas social e institucionalmente delimitadas se van configurando las exigencias para un razonamiento estadístico en la práctica profesional. Sobre este aspecto esperamos hacer un aporte.

Metodología

Se realizaron entrevistas a 10 profesionistas (5 Comunicólogos y 5 Sociólogos). Los profesionistas entrevistados laboraban en instituciones del sector público, ya fueran dependencias federales o estatales. Con excepción de uno de los entrevistados que tenía 3 años de haber egresado de la universidad, el resto tenía entre 10 o 20 años de experiencia laboral. Las actividades y tareas mencionadas como relevantes en cuanto al uso de las estadísticas, tenían que ver con su empleo actual y con otros previos, por lo que sus respuestas dan cuenta de su trayectoria laboral. Las entrevistas fueron semiestructuradas y se realizaron con base en una guía de entrevista. Las preguntas se centraron en la descripción de las principales actividades y tareas que los entrevistados realizan en sus trabajos y que están vinculadas con el uso de la estadística. Todas las entrevistas se grabaron y se transcribieron para su análisis.

Para la clasificación y análisis de las respuestas de los entrevistados, se recurrió a una *matriz agrupada conceptualmente* (Miles, Huberman, & Saldaña, 2014), en la que las filas corresponden a cada uno de los casos (profesionistas entrevistados) y las columnas a las categorías de análisis, considerando, entre otras cosas: el contexto de las tareas; el tipo de tareas, sus procedimientos, sus propósitos y productos; los conceptos estadísticos fundamentales presentes, de manera explícita o implícita; los procedimientos o métodos estadísticos utilizados y los productos generados en la quehacer profesional. Este recurso permite obtener una documentación y análisis sumativos de un vistazo. Las categorías con las que se definieron las columnas de la matriz se obtuvieron tanto deductivamente (a partir de las categorías de la guía de entrevista) como inductivamente (como categorías emergentes a partir de lo expresado por los entrevistados).

Resultados

El primer elemento a resaltar es que todos los profesionistas entrevistados usan la estadística de manera habitual en sus trabajos, aunque con diferente frecuencia y profundidad. Los usos de la estadística que reportan son variados y dependen de las características y exigencias de cada puesto y de cada institución, pero aun así identificamos ciertas coincidencias en cada uno de los campos profesionales estudiados.

Todas las actividades mencionadas por los entrevistados se insertan dentro del ciclo investigativo: planteamiento del problema, definición de un plan, obtención y procesamiento de los datos, análisis y presentación de conclusiones (Wild y Pfannkuch, 1999). Esto quiere decir que las diferentes tareas que los entrevistados realizan son parte de procesos complejos y colectivos, delimitados según ciertas demandas y necesidades a cubrir, en la que participan diferentes actores en los diferentes momentos del proceso. Los profesionistas entrevistados comentan que en algunos casos han participado a lo largo de todo el proceso, aunque es más común que sólo se involucren en una fase del ciclo, aunque son conscientes que su óptimo

desempeño implica el conocimiento de todo el ciclo y el reconocimiento de la importancia que cada fase tiene en el conjunto. Así tenemos, por ejemplo, que quienes sólo se encargan de recuperar datos de diferentes fuentes, son conscientes del impacto que puede tener la forma como se obtuvieron (propósitos que los originaros, procesos de medición, muestreo, etc.), y por lo tanto, las repercusiones que esto puede tener en las conclusiones que se expresen a partir de los mismos.

Una fase de este proceso que Wild y Pfannkuch (1999) mencionan muy someramente, es la difusión de la información a diferentes usuarios, siendo una tarea a la que todos los entrevistados tienen que recurrir, y que en sus entornos laborales resulta ser una actividad muy variada, delicada y compleja, tanto por sus componentes estadísticos y metodológicos, pero sobre todo por los relativos a factores de comunicación social y políticos.

En cuanto a las ideas estadísticas fundamentales, en las tareas reportadas por los entrevistados aparecen la mayoría de las referidas por Burril y Biehler (2013), con excepción de los modelos probabilísticos, lo que nos muestra una práctica centrada en el manejo de los datos pero con una escasa o nula vinculación con modelos teóricos (que de usarlos, seguramente les ayudaría a realizar análisis de mayor alcance).

A continuación se presentan las ideas estadísticas fundamentales que más presencia tienen dentro de las actividades de los profesionistas entrevistados, así como la naturaleza de las tareas y exigencias laborales que a su vez permiten configurar el sentido de la estadística en cada contexto laboral.

Sociólogos:

- Planeación, seguimiento y evaluación de programas sociales: estas actividades que engloban el ciclo investigativo, parten de la definición de parámetros y variables que permitan caracterizar una problemática social, a partir de la cual se puedan establecer acciones susceptibles de ser monitoreadas y evaluadas en sus diferentes fases. Los indicadores cuantitativos son necesarios tanto para determinar el nivel de logro como para orientar las acciones a tomar en consecuencia de dichos logros (aunque dichas decisiones no dependen únicamente de los valores numéricos, pues también pueden influir otros factores pragmáticos, económicos o políticas).
- Evaluación de políticas públicas. De manera muy similar al punto anterior, para determinar el avance de diferentes acciones gubernamentales, se requiere de la determinación de indicadores que puedan medirse periódicamente (previa definición de cómo se medirán) y de diferentes acciones de recopilación de información. Esta tarea por lo general se complementa con información generada por diferentes fuentes, como las estadísticas del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) o del sector salud, lo mismo que con información cualitativa.
- Investigación social aplicada (orientada a la toma de decisiones). Una gran variedad de problemáticas sociales requieren de un estudio sistemático para poder comprenderlas y abordarlas: violencia intrafamiliar y de género, adicciones, migración, desempleo, etc. Una nota particular es el énfasis en la necesidad de generar información que sirva para toma de decisiones. Los profesionistas entrevistados en su mayoría les ha correspondido

el acopio y análisis de la información y sólo en unos casos intervenir directamente en la toma de decisiones.

Comunicólogos:

- Evaluación institucional: definición de indicadores, medición de la opinión de usuarios, procesamiento y validación de los datos, elaboración de reportes para la toma de decisiones. Análisis cuantitativo y cualitativo de la información publicada en diferentes medios.
- Medición de audiencias y medición del impacto de programas y proyectos sociales y culturales, mediante encuestas o el análisis de redes sociales en Internet.
- Difusión institucional, mediante notas de prensa y en redes sociales, en las que se muestran datos estadísticos sintetizados sobre algún fenómeno social.
- Definición y jerarquización de necesidades sociales a atender a partir de indicadores estadísticos (lo que implica la obtención, tratamiento y sistematización de información estadística generadas por diversas fuentes).

La idea estadística que más importancia tiene para estos profesionistas es la de *datos* y todo lo que esta implica: su definición conceptual, su construcción empírica (operacionalización), los procesos de obtención (sea mediante observaciones, encuestas, etc.), y todos los procedimientos para la conformación y manipulación estadística de las bases de datos. Hay que enfatizar el hecho de que el "dato" tiene una naturaleza estadística y social (refleja una realidad social concreta) y que con frecuencia los procesos de medición dependen de las exigencias y condicionantes institucionales.

Otra idea que está presente en las tareas de los entrevistados es la de *variabilidad*. Hay un reconocimiento explícito de que para explicar complejos fenómenos sociales, es necesario identificar las variaciones en las variables y las variaciones conjuntas (posibles asociaciones o correlaciones). Estas reflexiones llevan a algunos profesionistas a perfeccionar sus procesos analíticos para poder hacer cruces de variables o conglomerados en las bases de datos para comparar efectos de diferentes variables. En el caso de los sociólogos, recurren a análisis de correlación, análisis de varianza, o análisis de regresión, entre otros.

Un concepto clave es el de *representación* y el asociado de *transnumeración*, con un énfasis especial en la necesidad de lograr una mejor comunicación de los datos. Las representaciones deben atender desde un punto de vista estadístico, una necesidad analítica y comunicativa, pero al mismo tiempo deben cubrir con exigencias de comunicación social y manejo político de la información (en el buen sentido de la palabra, como la comunicación de los resultados y/o retos de programas y proyectos sociales).

También la idea de muestreo está presente, con dos orientaciones: como posible factor de sesgo de los datos (asociado a la noción de *dato*); o como método para la selección de las muestras de las encuestas que algunos tienen que realizar. Varios de los entrevistados han tenido que hacer muestreos, pero todos deben considerar al menos el tipo de muestra de la que se extrajeron los datos con los que se trabaja.

Los ejemplos anteriores muestran los principales usos y contextos de la estadística en estos dos campos profesionales, así como las principales ideas estadísticas involucradas, pero conviene hacer la aclaración que la mayoría de estas tareas y conceptualizaciones se han desarrollado a lo largo de la experiencia profesional y que poco deben en su desarrollo a lo aprendido en las aulas. Dos de los entrevistados nos dice:

> *"Cuando estaba en la universidad yo recuerdo que eran fórmulas que me las aprendí así de memoria y ejercicios así muy parecidos a los que vienen en los libros (…), pero aplicarla en la vida diaria y sobre todo interpretarla como lo tengo que hacer ahora, no"* (María, Comunicóloga).

> *"[Es necesario] que los estadísticos y la gente que imparte la metodología la baje a la parte práctica, que el sociólogo pueda visualizar desde el ámbito de la licenciatura la importancia del dominio de estas herramientas, que para mí son fundamentales para hacer la diferencia en la toma de decisiones, la diferencia en impactar realmente en la sociedad (...). El sociólogo debe convertirse en un investigador de praxis, de realidades, y nos lo deben inculcar desde la universidad"* (Alondra, Socióloga).

Adicionalmente, los entrevistados hacen referencia a diferentes recursos tecnológicos que utilizan de manera habitual en sus labores, como las hojas de cálculo (Excel), programas estadísticos (SPSS) y diferentes sistemas informáticos para el registro, procesamiento y obtención de datos (diseñados en cada institución), y que han tenido que aprender a usar en sus diferentes trabajos, ya que su enseñanza universitaria se limitaba a cálculos manuales o con calculadora.

Conclusiones

En este breve recuento de los contextos y tareas del entorno laboral que permiten el desarrollo de las ideas estadísticas fundamentales desde la práctica, vimos cómo es que a su vez estas tareas se van configurando a partir de los conceptos estadísticos, pero junto con otros conceptos propios de las disciplinas sociales y a partir de las exigencias laborales.

En el mundo laboral no es fácil separar lo propiamente estadístico de las actividades y procedimientos que atienden exigencias del contexto, tampoco es fácil separar lo académico o científico de lo administrativo y político. Los profesionistas tienen que saber compaginar saberes de distinta naturaleza y atender criterios y exigencias desde varios frentes. Sin embargo, este diálogo entre lo que parecieran dos mundos diferentes, es parte de la estadística misma:

> *La investigación estadística se usa para expandir el cuerpo del conocimiento en "contexto". Por lo tanto, el objetivo fundamental de la investigación estadística es el aprendizaje en la esfera del contexto. El aprendizaje es mucho más que recolectar información, involucra la síntesis de nuevas ideas e información con ideas existentes e información en una comprensión mejorada*. (Wild y Pfannkuch, 1999, p. 225)

No obstante, este reconocimiento de la naturaleza contextualizada de la estadística, es necesario lograr mejores y mayores acercamientos entre el aula y el mundo laboral, y evitar una enseñanza de la estadística inerte, fragmentada y sin sentido. Por el contrario, se requiere una estadística viva, contextualizada, pertinente y relevante. Y en el mundo laboral, resultaría más

provechoso si los conceptos fundamentales y los métodos que dan cuerpo al razonamiento estadístico se ponen en primer plano, de manera explícita, de tal suerte que su actualización y adecuación sea consciente y permanente. De la interacción entre aula-trabajo, creemos que ambos entornos se verán favorecidos: el aula con situaciones reales; el mundo laboral con profesionistas con una mejor preparación estadística.

Referencias y bibliografía

Carver, R., Everson, M., Gabrosek, J, Horton, N., Lock, R., Mocko, M., Rossman, A., Rowell, G.H., Velleman, P., Witmer, J., & Wood, B. (2016). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) college report 2016*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Online: www.amstat.org/education/gaise

Carter, J., Brown, M. & Simpson, K. (2017). From the Classroom to the Workplace: How Social Science Students are Learning to do Data Analysis for Real. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 80-101, http://iase-web.org/documents/ SERJ/SERJ16(1)_Carter.pdf

Ben-Zvi, D., Makar, K. & Garfiel, J. (Eds.) (2018). *International Handbook of Research in Statistics Education*. Gewerbestrasse, Switzerland: Springer

Burrill, G., y Biehler, R. (2013). Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. *Statistique et Enseignement,* 4(1), 5-24.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008) Developing Students' Statistical Reasoning. Connecting Research and Teaching Practice. Springer

Harraway, J.A. & Barker, R.J. (2005). Statistics in the workplace: a survey of use by recent graduates with higher degrees. *Statistics Education Research Journal*, 4 (2), 43-58.

Jones, G.A., Langrall, C.W., Mooney, E.S., & Thornton, C.A. (2004) Models of Development in Statistical Reasoning. En Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (2004). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Miles, M.B., Huberman, A.M., & Saldaña, J. (2014). *Qualitative Data Analysis. A Methods Sourcebook* (3° ed.). Thousand Oaks, CA: Sage

Pfannkuch, M. & Wild, C. (2004). Towards an uderstanding of statistical thinking. En Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (2004). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Tishkovskaya, S., & Lancaster, G.A. (2012). Statistical Education in the 21st Century: a Review of Challenges, Teaching Innovations and Strategies for Reform. *Journal of Statistics Education*, 20 (2), disponible en: www.amstat.org/publications/jse/v20n2/tishkovskaya.pdf

Wild, C.J., Utts, J.M., & Horton, N.J. (2018). What Is Statistics?. En Ben-Zvi, D., Makar, K. & Garfiel, J. (Eds.) (2018). *International Handbook of Research in Statistics Education*. Gewerbestrasse, Switzerland: Springer

Wild, C.J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*. 67, pp. 223-265

Agradecimientos

La presente investigación se realizado dentro del Programa de Investigaciones Educativas de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México, PIE 17-6. Agradecemos la colaboración de Martha Cinthia García Gaytán y María Guadalupe Capetillo Plascencia.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Una experiencia en aula desde la experimentación y la simulación para la enseñanza de la probabilidad frecuentista y clásica

Michelle **Penagos** Vargas
Universidad Nacional de Colombia
Colombia
mapenagosv@unal.edu.co

Resumen

En la actualidad, la enseñanza de la probabilidad es de gran importancia para la formación de ciudadanos críticos. Esta comunicación quiere presentar la experiencia en aula desarrollada por medio de una serie de actividades que, a partir del uso de juegos de dados y urnas, y por medio de actividades experimentales y de simulación, se introdujo a estudiantes de 9° grado de educación básica colombiana al estudio de los conceptos de probabilidad frecuentista y clásica. El proceso de enseñanza planteado en este documento resulta ser similar al proceso en el que se construye la teoría de la probabilidad desde aspectos disciplinares e histórico-epistemológicos. De igual forma, estas actividades permiten que estudiantes que no hayan estudiado probabilidad previamente reconozcan elementos de aleatoriedad, brindando herramientas para la resolución de problemas donde la aleatoriedad esté presente a partir de argumento no subjetivistas.

Palabras clave: probabilidad frecuentista, probabilidad clásica, simulación, experimentación.

Introducción

La enseñanza de la probabilidad se ha convertido en parte especial dentro de la enseñanza de las matemáticas, puesto que, como lo reseña Batanero (2002), la probabilidad posee una utilidad después de la vida escolar por las aplicaciones que tiene en otras ciencias, además de desarrollar el pensamiento crítico a partir de la observación de evidencia objetiva. En el caso colombiano, la enseñanza de la probabilidad está incluida en el desarrollo curricular propuesto por el Ministerio de Educación Nacional en los Estándares Básicos de Competencia. A pesar de este hecho, hay instituciones educativas donde estos procesos de enseñanza se han descuidado. Este fue el caso del Instituto San Ignacio de Loyola, colegio ubicado en Bogotá, en donde se encontró un problema de este tipo; según los resultados mostrados en la Prueba Saber 9°-2016, los estudiantes presentaban dificultades al afrontar problemas donde la aleatoriedad estuviera presente, puesto que no reconocían la posibilidad o imposibilidad de eventos aleatorios, no usaban modelos ni estrategias para definir la probabilidad de un evento y no usaban conceptos de probabilidad para discutir conjeturas sobre experimentos aleatorios. Una de las posibles razones de este problema pudo ser que, según la estructura curricular del colegio, el primer contacto con

las temáticas relacionadas con la probabilidad era en grado 9°.

Esta fue una de las razones que llevó al diseño de una secuencia didáctica, cuyo objetivo fue introducir a los estudiantes al estudio de la probabilidad desde los enfoques frecuentista y clásico[1] utilizando como mediaciones pedagógicas el juego, la experimentación y la simulación. Para el planteamiento de las actividades de la secuencia se tuvieron en cuenta tres aspectos importantes: la fundamentación disciplinar de la teoría de la probabilidad, el desarrollo histórico-epistemológico del concepto de la probabilidad y elementos extraídos de la didáctica de la probabilidad. Así, esta comunicación muestra los elementos más importantes que se tuvieron en cuenta de cada uno de estos aspectos, seguido por una breve descripción de las actividades desarrolladas y los resultados obtenidos con estas actividades.

Marco de Referencia

Aspecto teórico

Se tuvieron los elementos teóricos disciplinares, tomando como referencia las definiciones básicas de la teoría de probabilidad mostradas por Blanco, Arunachalam y Dharmaraja (2012). Es importante notar que estos no son los conceptos que se le enseñaran como tal a los estudiantes, dada a su complejidad, sino que son los conocimientos básicos que debe tener el profesor a la hora de asumir la enseñanza de la probabilidad. Las definiciones que se tuvieron en cuenta se muestran en la Figura 1.

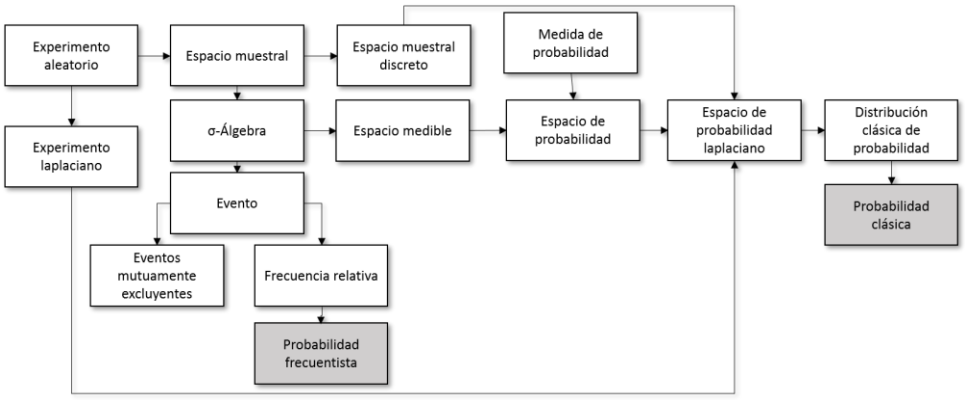


Figura 1. Red conceptual

Aspecto histórico-epistemológico

Para el diseño de la secuencia didáctica se tuvo en cuenta el desarrollo del concepto de probabilidad a lo largo de la historia. La teoría de la probabilidad tiene sus inicios con los juegos de azar. Ejemplo de esto es que, según registros hallados del tiempo del emperador romano Augustus (63 a.C.-14 d.C.), los juegos de azar eran comunes. Se han encontrado que culturas antiguas como los sumerios y los asirios utilizaban dispositivos similares a los dados, muy posiblemente para tomar decisiones al azar. Evidencias similares se han encontrado en la cultura egipcia, quienes llevaban registros escritos del uso de este tipo de dados. Esto demuestra que desde hace bastante tiempo se manejaba alguna noción de probabilidad (Blanco et al., 2012;

[1] Esta experiencia es parte del desarrollo del trabajo final de grado, realizado para obtener el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Disponible en http://bdigital.unal.edu.co/63667/

Vega-Amaya, 2002).

En la Edad Moderna se retoma la noción de probabilidad que subyacía en los juegos de azar. Girolamo Cardano (1501-1576) y Galileo Galilei (1564-1642) escribieron sobre estudios realizados sobre juegos con dados, constituyendo un inicio al estudio de la probabilidad desde el enfoque clásico (Vega-Amaya, 2002). Más adelante, Jacob Bernoulli (1654-1705) escribió el libro *Ars Conjectandi*, recogiendo el trabajo realizado por Christiaan Huygens (1629-1695) sobre los juegos de azar, adicionando comentarios, demostraciones y combinatoria. Considera problemas relacionados con juegos de azar y trabaja en aplicaciones de la teoría (Burton, 2006).

En la Edad Contemporánea Pierre Laplace (1749-1827) hace una primera formalización de la teoría clásica de probabilidad. En su obra *Théorie Analytique des Probabilités* presenta la solución de casi todos los problemas que habían surgido relacionados con probabilidad, al tiempo que sistematizaba y extendía los saberes obtenidos por matemáticos anteriores a él. (Burton, 2006). En el siglo XX, Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) fue el matemático que más aportes hizo a la teoría de la probabilidad, al crear un fundamento axiomático de la misma haciendo uso de la teoría de la medida, en la obra *Fundamentos de la Teoría de Probabilidades* publicada en 1933 (Blanco et al., 2012; Chaumont, Mazliak, & Yor, 2007).

Aspectos didácticos

Borovcnik y Peard (1996) realizan una clasificación de diversas estrategias para enseñar probabilidad. Dos de estas clasificaciones son las estrategias que buscan simplificar las relaciones matemáticas, donde se incluye la simulación, y las estrategias que reúnen la integración de las aplicaciones a la enseñanza, donde se incluyen estrategias como la experimentación y el juego.

La simulación. Una simulación es una reproducción artificial de un modelo teórico de una situación, que analiza su comportamiento y planea las consecuencias de cambios similares dentro de un contexto real. Según Biehler (1991), citado por Borovcnik y Peard (1996), la simulación tiene dos papeles dentro de la enseñanza de la probabilidad: la simulación como método para resolver problemas, ya que permite saltar grandes cálculos, y como antecedente empírico para la probabilidad, ya que brinda una base operacional carente en la probabilidad. Aun así, se debe tener en cuenta que hacer uso de éstas no da una explicación del cómo o por qué la solución brindada realmente resuelve el problema. A pesar de que no hay investigaciones con resultados concluyentes, los puntos de vista intuitivos del aprendiz pueden dificultar el uso de simulaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje, por lo que se sugiere iniciar el estudio con simulaciones con material concreto, para después comparar los resultados con simulaciones computarizadas (Borovcnik & Peard, 1996). El uso de simulaciones puede tener algunas desventajas. Una de ellas es que puede sustituir la forma en la que se piensa la solución de un problema, así como tampoco da explicación a intuiciones erradas. Lo que sí puede hacer las simulaciones es indicar en dónde puede estar un error de estas intuiciones erradas (Borovcnik & Peard, 1996). Considerando la simulación como un antecedente empírico para la probabilidad, Freudenthal (1991), citado por Borovcnik y Peard (1996), afirma que “las simulaciones usuales de la ‘convergencia' empírica de las frecuencias relativas hacia la probabilidad desconocida se enfoca en una serie progresiva de frecuencias, mostrando como se estabiliza" (p. 263).

La experimentación. En los procesos de enseñanza de la probabilidad se han privilegiado estrategias basadas en el enfoque clásico. Con el desarrollo del análisis de datos, la enseñanza de la probabilidad ha optado por actividades experimentales y empíricas, favoreciendo el enfoque

frecuentista (Chaput, Girard, & Henry, 2015). Nilsson (2014) afirma que la realización de experimentos en el proceso de enseñanza de la probabilidad sirve como contexto para explorar e ilustrar aspectos críticos de este proceso, usando los datos empíricos producidos por los estudiantes. Citando a Cobb (1990) y a Shaughnessy (2003), recalca la importancia de la enseñanza de la probabilidad por medio de la recolección de datos, que permita la discusión en el aula de clase sobre conceptos de probabilidad. Aun así, señala que la experimentación puede que no siempre motive lo suficiente a los estudiantes para que reflexionen sobre el uso de los datos que se recolectan o que no la vean como evidencia para hacer predicciones probabilísticas sobre algún evento. Para llevar a cabo un experimento, en probabilidad, se examina un evento aleatorio de interés efectuando acciones específicas y observando los resultados, realizando intentos en repetidas ocasiones. Lee y Mojica (2007) dan los pasos que debería tener un experimento probabilístico para ser usado en el proceso de enseñanza de un concepto.

Los juegos. La historia muestra la importancia de los juegos de azar en el desarrollo de la teoría de la probabilidad. Además, los juegos de azar son uno de los primeros elementos que permiten a las personas tener contacto con situaciones de aleatoriedad, iniciando el proceso de concientización de la imprevisibilidad y estimación los resultados, lo que conlleva a que se pueda adquirir conocimientos probabilísticos antes de una introducción formal al tema (Cañizares, Batanero, & Serrano, 1999). Según Cañizares et al. (1999) la investigación sobre el uso y la implicación del juego para la enseñanza de conceptos probabilísticos es poca, pero se encuentran bastantes experiencias de aula., que fueron base para el planteamiento de las actividades de la secuencia. Conocer la historia de una idea matemática puede ayudar a su comprensión, ya que da una guía para enmarcar dicha idea en los problemas que fueron motivo para su surgimiento o en las razones por las cuales se decidieron estudiar (de Guzmán, 1992), y en el caso de la probabilidad, los juegos de azar fueron parte importante. Así, el conocimiento de la historia de las ideas matemáticas permite conocer las dificultades que pueden tener los estudiantes al abordar el tema, puesto que probablemente esas mismas dificultades estuvieron presentes cuando surgieron dichas ideas. Asi mismo, el proceso de evolución histórica puede asemejarse al proceso de aprendizaje del estudiante (de Guzmán, 1992).

Propuesta metodológica

La secuencia didáctica contiene 5 actividades. La aplicación de estas actividades se hizo con un grupo de 30 estudiantes de 9° grado de educación básica colombiana, con edades entre los 14 y los 16 años, organizados en grupos de 5 personas. Las actividades se describen a continuación.

Actividad 1: Urnas.

A cada grupo se le da una urna con cierta cantidad de fichas plásticas de colores, cada una con una distribución diferente de fichas por color. Los estudiantes, sin conocer la cantidad de fichas que hay, deben hacer extracciones sin reemplazo para recoger datos que permitan concluir en cuál de las urnas es más probable encontrar una ficha azul y a partir de los datos hacen una conjetura, iniciando una discusión a partir de estas sobre cómo se puede decidir cuál sería la urna con más posibilidad de encontrar una ficha azul. La discusión se guio de tal forma que los estudiantes entendieran que para poder determinar de mejor manera la urna con mayor probabilidad se debe tener en cuenta el número de veces que una ficha azul fue extraída de cierta urna y el número de extracciones que se realizaron, y que la razón entre estas dos cantidades es una forma de medir la probabilidad del evento. Al finalizar la actividad se espera que los

estudiantes identifiquen la frecuencia relativa como medida de probabilidad.

Actividad 2: Carrera de caballos.

En una carrera corren 12 caballos, cada uno de ellos identificado con un número del 1 al 12. La pista de carreras tiene un número determinado de casillas, en las que los caballos pueden avanzar a partir del lanzamiento de un par de dados (de 6 lados cada uno). Se lanzan los dados y la suma de los resultados obtenidos determina que caballo puede avanzar de posición, avanzando una casilla cada vez que se lancen los dados. Cada uno de los jugadores deberán apostar por un caballo. Gana el caballo que primero complete un número de casillas determinado. Para esta actividad se utilizó un tablero de cinco casillas, que representó la pista de carreras, por lo que para ganar se tenía que completar 5 casillas. A cada grupo de estudiantes se les entregó un tablero, un par de dados y un marcador para llenar el avance de la carrera. Cada grupo debía completar una tabla de resultados, donde registraban lo sucedido en el juego, para luego hacer un consolidado con los datos de todos los grupos. Según estos datos, se les preguntó por el caballo por el que apostarían en una próxima carrera y el porqué de su elección, propendiendo para que sus respuestas incluyeran el cálculo de frecuencias relativas para determinar la probabilidad que ellos escogieran. Para terminar esta actividad se comprobó la hipótesis planteada por los estudiantes realizando una última carrera.

Actividad 2: Carrera de caballos simulada

Partiendo de la actividad anterior, se planteó la posibilidad que la pista de carreras fuera más larga, necesitando completar más casillas para ganar. Si esto se realiza con material manipulable, se torna dispendioso de hacer, por lo que se usó de una aplicación móvil (disponible en https://goo.gl/xDYcMB), o en su defecto, un aplicativo web (disponible en https://goo.gl/wyGbxu), que simula una carrera a partir del número de casillas que se necesitan para ganar. Con la simulación se debía realizar 10 carreras diferentes. Para la recolección de datos cada integrante de cada grupo registraba en una tabla los resultados de cada una de las simulaciones realizadas de tal forma que cada uno se encargara de completar la información de una posición especifican de la carrera. Luego de hacer un consolidado con los datos del curso se analizó la primera posición de la carrera, y por qué al parecer el Caballo 7 tiene mayor probabilidad de ganar a medida que la carrera se hace más larga. La discusión giró en torno a la revisión del espacio muestral del evento, guiando a los estudiantes a considerar todas las posibles combinaciones resultantes al lanzar un par de dados, observando que, 6 de 36 posibles combinaciones favorecerán al Caballo 7, formulando en lo posible una relación parte-todo entre estas dos cantidades. Así, se haría un primer acercamiento al concepto de probabilidad desde el enfoque clásico.

Actividad 4: Urnas (Parte 2)

Ya con la idea del enfoque clásico se retoma la Actividad 1. En esta ocasión los estudiantes podrán determinar cuál de las urnas era la que realmente tenía mayor probabilidad de extraer una ficha azul. Se les entrega a los estudiantes las urnas con la posibilidad de que cuenten las fichas de cada color y puedan calcular la probabilidad real de obtener una ficha para cada color. Una vez calculados estos valores de probabilidad se comparan con los valores de probabilidad obtenidos con la frecuencia relativa, dando paso a la discutir la comparación entre los dos enfoques, preguntando por la manera en que la probabilidad frecuentista pueda acercarse más a la probabilidad clásica.

Actividad 5: Dados cargados

En las Actividades 2-3 se han realizado lanzamientos con dos dados de seis caras y se ha llegado a la conclusión que el resultado de suma con mayor probabilidad es el número 7. Se propone un cambio a esta situación, cargando uno de los dados con los que se realizan los lanzamientos. Cada grupo recibe un par de dados de seis caras cada uno, distinguibles por color, de tal forma que uno de los dados estuviera cargado. El objetivo de esta actividad experimental es, por medio del cálculo de frecuencias relativas, examinar cual es el resultado más probable de obtener con el par de dados cargados y comparar los resultados con par de dados sin carga. Para esta actividad se utilizaron dados de espuma con dimensiones de 4 cm cargados en la cara 5, en la esquina contigua a las caras 6 y 4, con dos balines de acero de 1/8 de pulgada cada uno. Para obtener los datos de los lanzamientos de los dados sin carga se utilizó una simulación alojada en un aplicativo web (disponible en https://goo.gl/98yxQa). La recolección de los datos experimentales se hizo por medio de tablas de frecuencia, que después se consolidaron en una hoja de cálculo, para comparar los datos experimentales (de los lanzamientos de los dados cargados) con los datos simulados (de los dados sin carga). Utilizando las herramientas que ofrece la hoja de cálculo se realizó una discusión, utilizando cálculos de probabilidad y gráficas para comparar el uso de cada uno de los enfoques.

Resultados y Conclusiones

A lo largo de la aplicación de las actividades se llegaron a algunos resultados interesantes. En las actividades relacionadas con urnas, la mayoría de estudiantes se inclinan por hacer decisiones basadas en frecuencias absolutas sin tener en cuenta el total de extracciones, y aunque algunos relacionan frecuencias absolutas con total de extracciones para comparar probabilidades, no utilizan la frecuencia relativa en primera instancia. En la discusión se ve la importancia de los preconceptos relacionados con las relaciones parte-todo, puesto que fue desde esta idea que se da la idea de frecuencia relativa como medida de probabilidad. Adicionalmente los estudiantes identifican que esta probabilidad no es "real" por diferencias en las extracciones entre grupos. Con la Actividad 4 se soluciona este problema al darle la oportunidad a los estudiantes de conocer el material de las urnas, empezando a intuir que a mayor número de repeticiones la probabilidad se acerca más a la real.

Con respecto a la Actividad 2, los estudiantes decidieron apostar para una última carrera por el Caballo 7, según los resultados obtenidos y probabilidades calculadas (Figura 2). Cuando se comprobó la hipótesis de los estudiantes realizando una nueva carrera surgieron dos opciones: hacer los lanzamientos con dados físicos o con dados virtuales. Estas dos opciones surgieron porque los estudiantes desconfiaban de la parcialidad de los resultados que se podían obtener; por un lado, los lanzamientos con dados físicos dependen de factores humanos (fuerza, superficie, etc.), mientras que los dados virtuales generan desconfianza por qué no pueden garantizar que los números generados son realmente aleatorios. Esta última situación resulta interesante, puesto que permite comprobar lo mencionado Borovcnik y Peard (1996), ya que los resultados brindados por las simulaciones computarizadas son pseudo-aleatorios y los puntos de vista intuitivos de los estudiantes pueden ocasionar problemas con sus procesos de aprendizaje, lo que dificulta el uso de computadores.

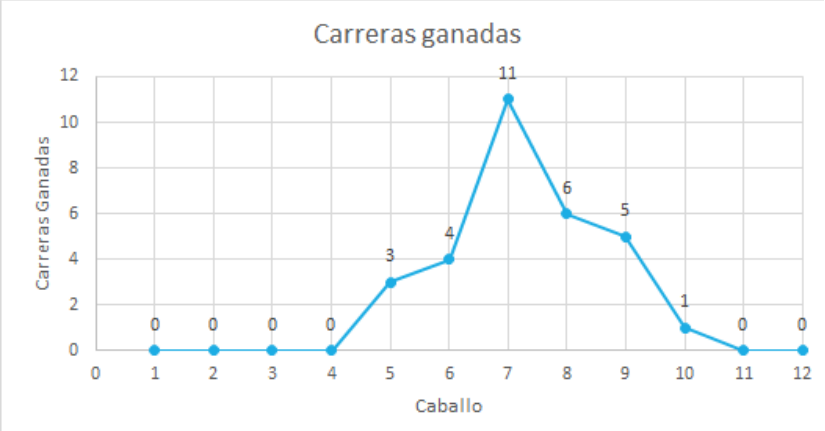


Figura 2. Resultados obtenidos por los estudiantes en Actividad 2

Con respecto a la Actividad 3, para definir el modelo matemático del enfoque clásico de la probabilidad fue de provecho las ideas que tenían los estudiantes sobre el enfoque frecuentista —basadas en uso de porcentaje y relaciones parte todo— ya que los estudiantes relacionaron estas ideas para calcular la probabilidad en este caso, tomando el número de casos que favorecían al Caballo 7, con el total de casos posibles en un lanzamiento de dos dados. Dado a que se basaron en las ideas del enfoque frecuentista se aclararon diferencias entre las dos formas de calcular probabilidades, radicadas en la forma en la que se aborda un problema: si se hacen el experimento cierto número de veces y se observa cuantas veces ocurre cierto evento se tiene en cuenta un enfoque frecuentista, pero si se analiza los posibles resultados que puede tener un experimento y se toma en cuenta el total de veces que favorecen al evento a analizar se tiene en cuenta el enfoque clásico.

En la Actividad 5 los estudiantes concluyeron que con los dados cargados el número con mayor probabilidad de salir es el 7, los valores menores que 7 aumentaron su probabilidad de ocurrencia, mientras que los que eran mayores que 7 disminuyeron su probabilidad, esto en comparación con los datos obtenidos en las actividades previas y la simulación realizada, viéndose más el cambio en los valores 6 y 10. Cuando se calcularon los valores de probabilidad se hizo más notorio que los lanzamientos con los dados cargados favorecían en mayor medida a los números menores que 7, y mientras los valores aumentaron en estos valores, la disminución de la probabilidad de los valores mayores se dio casi que en la misma medida en como aumentaban los primeros (Figura 3).

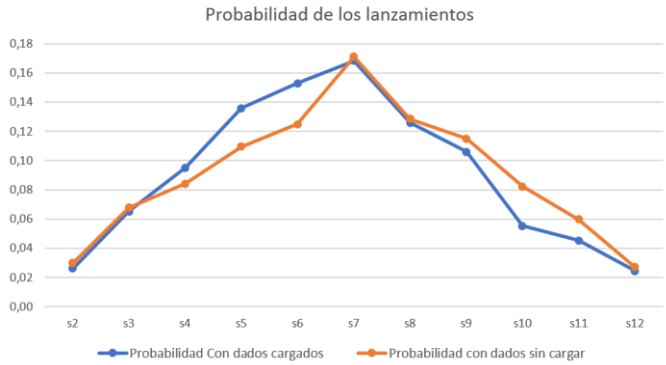


Figura 3. Valores de probabilidad obtenido en Actividad 5

Dado a que en la planeación de la actividad no se tuvo en cuenta la comparación con los valores de probabilidad clásica, se les planteó a los estudiantes la situación en la que los datos experimentales no fueran los de los dados cargados sino los que nos arrojan la simulación. Se les preguntó si era posible que de alguna forma el valor de la probabilidad experimental se acercara a la probabilidad real y ellos identificaron que entre más lanzamientos se realizaran, estos dos valores de probabilidad se iban a parecer cada vez más. Se puede ver entonces que con estas actividades los estudiantes identificaron que la probabilidad frecuentista, al aumentar el número de repeticiones en las que se realiza un experimento, tiende al valor de la probabilidad clásica.

A forma de conclusión, el proceso de aprendizaje y enseñanza propuesto en la secuencia didáctica guarda parecido a la forma como se construye la teoría formal de la probabilidad y al proceso histórico-epistemológico del concepto de probabilidad, partiendo del uso de juegos de azar para encaminar a una formalización de la teoría. La secuencia parece efectiva para introducir a los estudiantes al estudio de la probabilidad y, a pesar de no lograr formalizar conceptos, da herramientas para abordar problemas de aleatoriedad, contribuyendo en la toma de decisiones fundamentada en argumentos no subjetivistas. Aunque la secuencia fue creada para solucionar un problema encontrado en grado 9°, puede ser adaptada para su aplicación en grados inferiores, de tal forma que pueda responder en mayor medida al cumplimiento de lo que plantean los Estándares Básicos de Competencia colombianos.

Referencias y bibliografía

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estádistica. En *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística.* Buenos Aires.

Blanco, L., Arunachalam, V., & Dharmaraja, D. (2012). *Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications*. John Wiley & Sons, Inc.

Borovcnik, M., & Peard, R. (1996). Probability. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbooks of Education* (pp. 239–287).

Burton, D. (2006). *The History of Mathematics: An Introduction* (6°). McGraw Hill.

Cañizares, M., Batanero, C., & Serrano, L. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, *37*, 37–55.

Chaput, B., Girard, J.-C., & Henry, M. (2015). Frecuentist Approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 85–95). Springer.

Chaumont, L., Mazliak, L., & Yor, M. (2007). Some aspects of the probabilistic work. En É. Charpentier, A. Lesne, & N. Nikolski (Eds.), *Kolmogorov's Heritage in Mathematics* (pp. 41–66). Berlin: Springer.

de Guzmán, M. (1992). Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Recuperado de https://goo.gl/qqDg6Z

Lee, H. S., & Mojica, G. F. (2007). Teachers' Use of Experiments and Simulations in Middle School Probability Lessons. En T. de Silva & L. Wiest (Eds.), *29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Exploring Mathematics Education in Context* (pp. 437–440). Recuperado de https://goo.gl/wyHuic

Nilsson, P. (2014). Experimentation in Probability Teaching and Learning. En E. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting plural perspectives.* (pp. 509–532). Springer.

Penagos, M. (2017). *Secuencia didáctica para la enseñanza de la probabilidad frecuentista y clásica para estudiantes de grado noveno*. Universidad Nacional de Colombia.

Vega-Amaya, O. (2002). Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad. *Apuntes de Historia de Las Matemáticas*, *1*(1), 54–62. Recuperado de https://goo.gl/ScU5uJ

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Construcción del significado de la volatilidad en estudiantes de pregrado en ciencias administrativas.

Carenne Ludueña Cronic.
Universidad Jorge Tadeo Lozano.
Colombia
carennec.ludenac@utadeo.edu.co
Miguel Andrés Díaz O.
Universidad Antonio Nariño.
Colombia
migueld@uan.edu.co
Fernando Pérez Duarte.
Universidad Antonio Nariño
Colombia
luisfperez@uan.edu.co

Resumen

La expansión de la estadística como disciplina de investigación, ha sido significativa en las últimas décadas, y parte de ese proceso surge de la preocupación del ser humano por obtener más información contenida en los datos que le permitan mejorar su capacidad de toma decisiones. Para esto es de suma importancia mejorar la formación estadística a los futuros profesionales. En esta investigación se propone un modelo didáctico, que tiene como objetivo favorecer la construcción del significado de volatilidad estadística, basado en simulaciones financieras y esquemas lúdicos, como mediadores; que fomente la construcción de dicho significado por medio de simulaciones computacionales en los estudiantes de carreras administrativas. En la investigación se analizan principalmente variables cualitativas, donde se determina el nivel de apropiación de los conceptos necesarios estadísticos para tomar decisiones financieras cuantitativamente apropiadas; el modelo demostró que los estudiantes mejoran sus habilidades de tomar decisiones frente situaciones económicas de incertidumbre.

Palabras clave: Volatilidad, Educación estadística. Simulación, Modelos financieros, Gamificación

Introducción

Es indiscutible que la abundancia, la gratuidad de los datos y el acceso fácil de cualquier persona que se lo proponga a ellos, hace que quienes adquieran la habilidad de interpretarlos correctamente obtienen una ventaja competitiva clara frente a los demás actores del mercado en el entorno empresarial y esto favorece que la estadística sea una disciplina de gran expansión en

los últimos años. Sin embargo, aunque los datos están disponibles, aún existe una limitante en cuanto al análisis, ya que los métodos aplicados para la enseñanza de la estadística en muchos casos están diseñados para aplicarse en condiciones ideales de aula y teniendo en cuenta que tales condiciones pocas veces son propicias para la aplicación de estos modelos, la estadística se queda en el salón de clases con aplicaciones cortas. El uso de la estadística y sus aplicaciones son fundamentales en cualquier profesión, como señala Batanero, "… La educación sin estadística se ha vuelto inconcebible, ya que los ciudadanos que no pueden interpretar correctamente los datos cuantitativos son, en este día y edad, analfabetos funcionales." Batanero, C. (2011).

Uno de los motivos fuertes de esta investigación fue diseñar estrategias pedagógicas que permitan la comprensión de conceptos estadísticos y matemáticos abstractos tal como la volatilidad y las métricas que permiten su evaluación, en base a aplicaciones concretas financieras mediante el uso de técnicas de enseñanza asistidas por el computador, donde la utilidad de la estadística en toma de decisiones financieras sea eje central mediante la aplicación de la matemática realista y la gamificación. Otra de las razones de trabajar en este tema proviene del poco énfasis que tiene en el currículo universitario para los estudiantes de carreras administrativas el concepto de volatilidad y que es de tan alto impacto en la vida cotidiana de los profesionales en estas áreas; en este sentido, se cita el trabajo previo de Díaz, M. (2014), "Una de las dificultades observadas en los estudiantes de ciencias económica es la ausencia de correlación entre los objetos propios de las asignaturas de probabilidad y matemáticas financieras, así como los temas que se desarrollan en estos cursos."

La volatilidad como concepto, está íntimamente asociado a la valoración de activos, imprescindible en la formación de los estudiantes de carreras económicas, quienes en su ejercicio profesional tendrán que conocer las fluctuaciones del mercado y por ende su varianza a través del tiempo con el fin de tomar decisiones más inteligentes basados en modelos de riesgo ya conocidos. Todo esto se debe llevar al aula de estadística de una manera amable, sencilla, pero sin perder el rigor de la interpretación correcta de los datos.

Al trabajar con el estudiante en una herramienta sencilla como lo es la hoja de cálculo aplicada a modelos de inversión, el estudiante fortalece la capacidad de decisión ante las posibles fluctuaciones del mercado y acercará al futuro profesional en áreas económicas a un conocimiento mucho más aplicado y reconocido mundialmente, la teoría del riesgo.

Con este propósito, se utilizan modelos para la valuación de activos financieros como por ejemplo el Modelo de Black-Scholes Black, F., Scholes, M. (1973) que, sin pormenorizar en las complejidades propias de este tema y mediante herramientas sencillas como las hojas de cálculo y simulaciones asistidas por computadora, se ponen al alcance de un estudiante de estadística con el fin de que se apropie del concepto de volatilidad estadística y algunas herramientas para su medición.

Por lo que se plantea el problema ¿Cómo desarrollar e incentivar el pensamiento estadístico, en particular en relación con el tema de la volatilidad estadística, promoviendo la construcción del significado de volatilidad en los estudiantes de las carreras de ciencias contables y económicas mediante la simulación asistida por computadora con modelos financieros?

Marco teórico

Los referentes teóricos del problema son divididos en dos: Una es la parte de educación matemática y la otra respecto a los referentes disciplinares. En la primera parte tenemos como pilares importantes:

Teoría de resolución de problemas.

Para esta investigación se toma como base los planteamientos de: Bransford J.D., Stein B.S. (1987), que propone su método **IDEAL,** para la solución de problemas.

Educación matemática realista.

Esta teoría fue desarrollada por Hans Freudenthal (1905-1990) y tiene por objeto, la enseñanza de las matemáticas desde escenarios de la vida cotidiana, donde el estudiante manifieste sus potencialidades aplicadas a problemas reales, ya que la metodología se basa en la simulación y análisis de bases de datos robustas provenientes de la Bolsa de Valores de Colombia, (en adelante BVC).

Aprendizaje Significativo.

Teoría desarrollada por Ausubel, D. (1983), para él son muy importantes los conocimientos previos del estudiante, la idea de realizar una serie de actividades basadas en la experimentación es que el estudiante cree un ambiente familiar con aplicaciones que a él le sea de agrado, donde reconozca la importancia y pertinencia de los temas a desarrollar en el aula de estadística. El contexto significativo consiste en toda la plataforma tecnológica de simulación donde se realiza para generar un ambiente competitivo de aprendizaje.

Gamificación en la Educación.

En el argot de la educación matemática, el término "gamificación" es relativamente nuevo, pero encaja perfectamente a el proyecto investigativo, debido que una parte fundamental de éste es la enseñanza de la estadística a partir de un juego llamado "La bolsa millonaria" de la BVC. Huang, W. H. Y., & Soman, D. (2013), definen una serie de etapas para aplicar la gamificación en el aula y hacen avances en la caracterización de la teoría en algunas definiciones que se utilizan en este trabajo.

Modelos en educación.

Para la investigación se realiza una consulta de las diferentes definiciones de modelos, caracterizando cada una de ellas e identificando aspectos esenciales y cómo representan la realidad de forma simplificada. Escalona (2007) aduce que: "… un modelo didáctico es una abstracción del proceso de enseñanza-aprendizaje, o parte de éste, que fundamentado teóricamente permite interpretarlo y establecer nuevas relaciones en función de lograr perfeccionar dicho proceso". Para la investigación, se toma esta definición como referente.

En cuanto a los componentes disciplinares, se cuenta con la teoría estadística que se dictan generalmente en los cursos de estadística, además de ello se debe profundizar en los temas:

Volatilidad.

La volatilidad en el mercado financiero es una medida de la dispersión de la serie de los log- retornos de un determinado activo. Típicamente, se mide usando la desviación estándar o la varianza de la serie de los log-retornos, pero existen otras métricas que pueden ser usadas como el número de cruces de la media. Si se considera el porcentaje de variación relativa, puede considerarse una aproximación a la probabilidad de que se produzcan movimientos imprevistos

en el precio del activo a corto plazo en un lapso determinado.

Distribución log normal.

Debido a que en la volatilidad de activos se trabaja con los log-retornos, la distribución que mejor se acomoda a estos datos es la distribución log-normal y curiosamente, en la etapa del diagnóstico del problema, se muestra que muy pocos de los expertos encuestados dictan tal temática en los cursos regulares de estadística.

Acciones y Opciones.

Las aplicaciones estadísticas que se llevaron al aula mediante simulación son precisamente en acciones y opciones, sin embargo, los estudiantes del nivel en donde se aplican las actividades aún no están completamente familiarizados con tales temáticas, de ese modo es necesario hacer un resumen de los conceptos: Acción, Modelo de Black-Scholes, Derivados financieros, Opción, Operaciones call, Operaciones put, Opciones europeas, Opciones americanas, Activo subyacente.

Simulación con hoja de cálculo.

Una de las tareas investigativas es que los contenidos de la asignatura deben ser llevadas a la hoja de cálculo y simular las condiciones ideales e ir variando parámetros, en distintas situaciones.

Resultados

El modelo didáctico que se propone en esta investigación tiende a favorecer la construcción del significado de volatilidad y conlleva a un desarrollo de pensamiento estadístico, mediante la simulación asistida por computadora con modelos financieros, a través de la resolución de problemas matemáticos. Las etapas del modelo permiten constatar el estado de los estudiantes en relación con los conocimientos que poseen en torno a los conceptos tratados. En el modelo se definen dos etapas significativas, una primera etapa donde se da el sustento teórico y práctico, otra es la salida del modelo. La primera etapa se subdivide en tres sub etapas así:

- Orientación: Sustenta el modelo en su parte teórica, filosófica, sicológica.

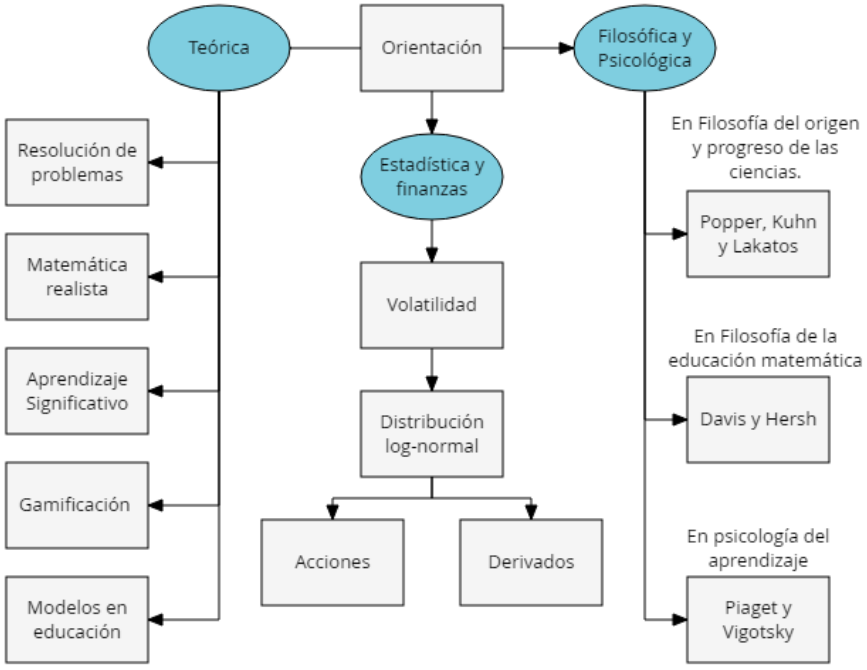


Figura1. Desarrollo de la subetapa 1 del Modelo: Orientación

- Concreción: Determina la contradicción interna y externa del problema de la enseñanza de la volatilidad.

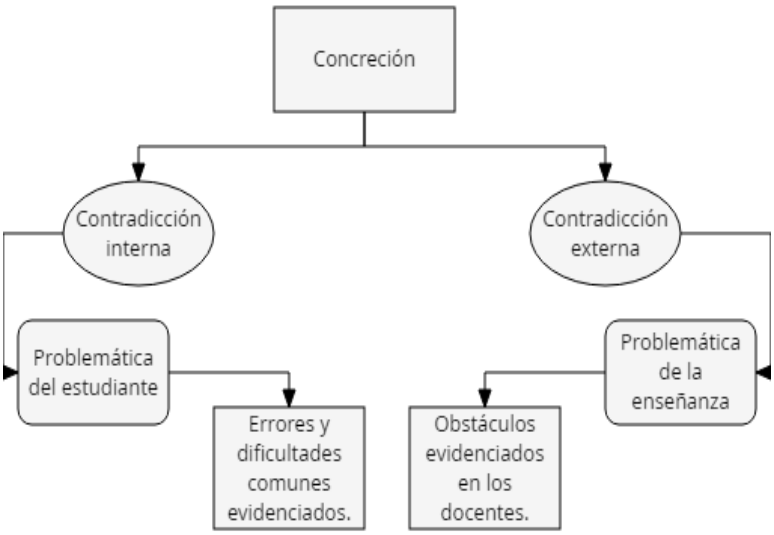


Figura 2. Desarrollo de la subetapa 2 del Modelo: Concreción

- Diagnóstico: Determina el estado actual de la enseñanza de la estadística en ciencias administrativas.

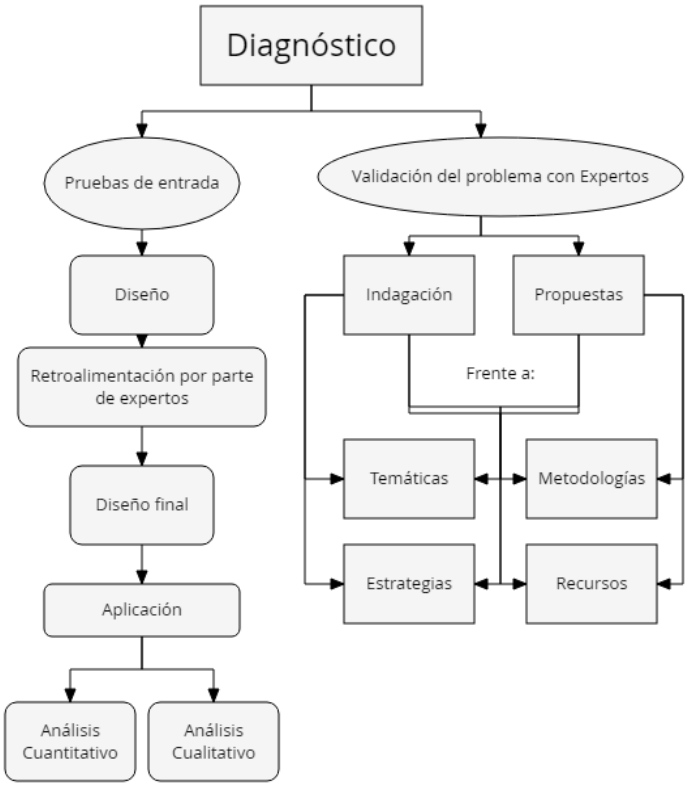


Figura 3. Desarrollo de la subetapa 3 del Modelo: Diagnóstico

Una segunda etapa que es la salida del modelo, donde intervienen los mediadores del conocimiento: La integración, la motivación, la solución de problemas, preevaluación, ampliación y la evaluación; que conllevan a la construcción del significado de volatilidad. Estos mediadores se desarrollan en forma de espiral en la propuesta didáctica, promoviendo un mayor grado de asimilación de los conceptos, generando pensamiento estadístico crítico en los estudiantes. A continuación, se esquematiza el modelo en su totalidad.



Figura 4. Diagrama del modelo en su totalidad.

Propuesta didáctica

La propuesta didáctica se aplica en el segundo curso de estadística y está basada en ocho actividades que están desarrolladas bajo la metodología de resolución de problemas, donde interviene en todo momento la volatilidad estadística. Cada actividad se estructuró de manera secuencial de tal forma cada una permite el desarrollo de la siguiente y además facilitan el desarrollo progresivo hacia la construcción del significado de volatilidad, lo que permite crear redes conceptuales de los elementos que intervienen en la estadística, las finanzas y la matemática. Las temáticas propuestas en cada una de las guías se muestran a continuación y son dividas en 3 fases.

FASE 1. GENERALIDADES.

En esta fase, se hace un recorrido por los conceptos del primer curso de estadística y otros elementos nuevos como la log-normal y el movimiento browniano, que necesita el estudiante para el buen desarrollo de las sesiones, y como el estudiante ya conoce parte de estos conceptos; es tarea del profesor encargado hacer hincapié en las aplicaciones financieras de estos conceptos y pormenorizar en las aplicaciones. La construcción del significado de volatilidad tendrá sus bases en la medida que el estudiante comprenda de manera suficiente y en contexto, los temas a impartir en estas 3 sesiones, a saber: Sesión 1: Conceptos previos (Distribución Normal). Sesión 2: Distribución Log-normal. Sesión 3: Simulación (Movimiento Browniano).

Al finalizar esta fase se observa que el estudiante es capaz de proponer soluciones estadísticas a problemas financieros, además de ello se enfrenta con suficiencia a problemas de envergadura como es el movimiento browniano, esto se evidencia en las pruebas evaluativas que contienen problemas reto.

FASE 2. PREPARACIÓN PARA EL CONCURSO.

En esta fase se pretende que el estudiante comprenda el significado del mercado bursátil desde el punto de vista estadístico; claramente cada acción es tratada como una variable aleatoria a la que se le hace un tratamiento estadístico suficiente con el fin de que sea absolutamente contextualizado, cumpliendo así con los principios de la educación matemática realista de Freudenthal. Posterior a ello el estudiante está en la capacidad e idoneidad para cumplir con los objetivos del concurso "La bolsa millonaria" de la BVC; esta gamificación en el aula de estadística es un magnífico escenario para la construcción del significado de volatilidad, además de la aplicación de simulaciones ricas en contenidos probabilísticos. Se planearon dos sesiones así: Sesión 4: Acciones I. Sesión 5: Acciones II. En esta fase los estudiantes a través del juego de "La bolsa millonaria" miden sus capacidades frente a contendores en su aula y en otras universidades en la toma de decisiones de compra y venta de acciones basados en modelos estadísticos donde intervienen los conceptos de: variabilidad, volatilidad, medias móviles entre otras.

FASE 3. MODELOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES.

En esta fase, ya el estudiante tiene el suficiente conocimiento para aplicar correctamente con su significado propio de volatilidad y de manera fácil a modelos de valoración de opciones, que serán de gran utilidad para formar un pensamiento estratégico basado en decisiones estadísticas bien fundamentadas. Para esta fase se destinan dos sesiones así: Sesión 6. Modelo de Black Scholes I. Sesión 7: Modelo de Black Scholes II. En esta fase, el estudiante está en capacidad de tomar decisiones de compra de activos subyacentes a la opción, teniendo en cuenta todos los elementos estadísticos necesarios relacionados con los conceptos financieros, esto se evidencio en la resolución de problemas en contexto real donde los estudiantes calculan acertadamente las simulaciones pretendidas.

La octava sesión se destina a la evaluación final del curso. A continuación, se muestra el esquema de la propuesta:

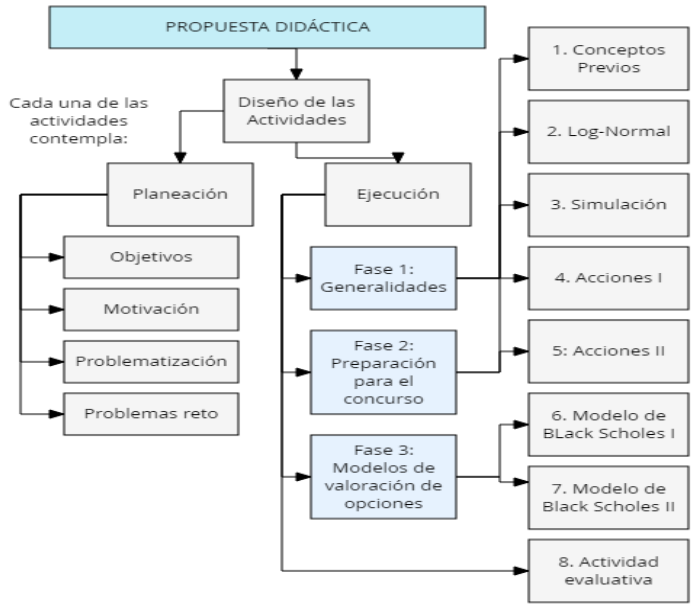


Figura 5. Desarrollo de la propuesta didáctica.

Conclusiones

Los modelos aplicados a la enseñanza de la matemática robustecen la comprensión del estudiante acerca de las temáticas que el modelo involucra, en este caso, sin necesidad de llegar al tema en particular de volatilidad, el estudiante va construyendo su significado personal paso a paso dentro de unas actividades programadas para que él llegue a una construcción propia.

Gracias a la simulación y a la gamificación en el aula, los estudiantes objeto de estudio aceleran el proceso de enseñanza y los contenidos se abarcan con mayor celeridad en todas las etapas del proceso, queda mostrado que los contenidos propios del segundo curso de estadística, no son reemplazados por otros nuevos que deseamos impartir para la construcción del significado de volatilidad; los temas nuevos son una amalgama que unifican todo el proceso de enseñanza y la simulación es su acelerador.

La motivación hacia la estadística y las aplicaciones que se pueden obtener de ella, se fortalecen, esto se verifica con escalas de medición de las actitudes hacia la asignatura y los resultados propios de las evaluaciones aplicadas.

Los estudiantes objeto de estudio son un ejemplo de que el modelo elaborado en esta investigación fortalece la aprehensión del estudiante hacia la estadística y las aplicaciones en su área de formación.

Referencias y bibliografía

Ausubel, D. (1983). *Teoría del aprendizaje significativo*. Fascículos de CEIF, 1

Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study*: *The 18th ICMI study*. In New ICMI study series: Vol. 14. Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V.

Black y Scholes, (1973). *The Pricing of options an corporate liabilities*. Fischer Black and Myron Scholes. Journal of Political Economy Vol. 81, No. 3 (May - Jun., 1973), pp. 637-654 The University of Chicago Press.

Bransford, J. D., Sherwood, R. D., & Sturdevant, T. (1987). *Teaching thinking and problem solving*. WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co.

Díaz, M. (2012) *"Una propuesta de enseñanza de la probabilidad basada en aplicaciones financieras para estudiantes de ciencias administrativas, económicas y contables"* (Tesis de Maestría). Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia

Escalona, M. (2011). *El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior. Su concreción en las carreras de ingeniería en la Universidad de Holguín.* Revista Iberoamericana de Educación, 56(4), 1-13.

Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1).

Huang, W. H. Y., & Soman, D. (2013). *Gamification of education*. Research Report Series: Behavioural Economics in Action, Rotman School of Management, University of Toronto. P. 17

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estatística como aproximação entre ensino e pesquisa das demais ciências

Janilson L**otério**
Instituto Federal de Santa Catarina –IFSC
Brasil
janilson.loterio@ifsc.edu.br
Marluse Castro **Maciel**
Instituto Federal Catarinense–IFC
Brasil
marluse.maciel@ifc.edu.br

Resumo

O presente trabalho busca debater a relação da matemática, através da estatística com as demais áreas do conhecimento, destacando a ciências humanas. Incialmente é apresentado uma breve discussão sobre os conceitos de o que é estatística. Posteriormente são apresentadas duas situações realizadas em aulas da área de ciências humanas, relacionadas com a produção agrícola e dados sobre o suicídio, as quais usando dados de pesquisas estatísticas, fazem o debate dos temas. As conclusões revelavam que é através da estatística que muitos fenômenos sociais podem ser debatidos e compreendidos.

Palavras chaves: estatística, sociologia; matemática; ciências humanas.

Primeiras Palavras

A relação e utilização da estatística como instrumento de organização política das sociedades data da antiguidade. Entre 5000 a. C e 2000 a. C, os governos egípcios realizavam censo para quantificar a população. Porém, nos séculos XVIII e XIX d. C., os governos absolutistas retomaram a importância censitária com intuito de regulamentar a cobrança de impostos. O mais famoso foi o de Luis XIV utilizou a estatística na reforma do dízimo real. No entanto, neste século, por haver incentivo à pesquisa estatística trouxe à ciência um ganho considerável

Atualmente a estatística auxilia a ciência humanas no que tange os índices de desigualdade social, pesquisas eleitorais, índices de suicídio, etc., oferecendo suporte para uma gama de análises. A sociologia neste caso vai além da análise quantitativa dos dados, apontando para

questões qualitativas que a leitura dos resultados permite.

Os dados estatísticos adentram a sala de aula quando abordam temas referentes à realidade permitem que o estudante conheça o mundo em que vive a partir da perspectiva científica e não de censo comum.

Conceitos como interdisciplinaridade, multisciplinariedade, aparecem como forma de uma educação mais holística, aberta e emancipadora. E a matemática, como todas as outras, está nesse universo. A interdicisplinaridade entre matemática e outras disciplinas torna-se possível diante desta ótica.

Neste sentido, o objetivo deste trabalho é demonstrar como os dados estatísticos podem auxiliar os debates e resultados à temas pulsantes na sociedade. Por meio de dados que podem ser utilizados nas aulas, foi possível perceber a relação interdisciplinar entre a estatística e demais disciplinas, principalmente as da área de humanas.

Estatística: conceitos e definições

Existem várias definições para estatística. Percebemos que muitas delas apresentam alguns pontos em comum. Nos livros a origem da palavra estatística vem do latim status, que significada estado. Segundo Triola (1999) a primitiva utilização envolvia compilações de dados e gráficos que descreviam vários aspectos de um estado ou pais. Foi em 1662, com Jonh Graunt, a primeiras publicações sobre informes estatísticos sobre nascimentos e mortes. Percebemos, porém, que com a evolução da humanidade, tanto a sua utilização como o seu conceito modificou-se. Para Moore (2006) A estatística é a ciência de coletar, organizar e interpretar fatos numéricos que chamados de dados, nota-se que segundo o autor, a Estatística tem um caráter de método científico. Crespo (1999) segue pela mesma linha; Estatística é uma parte da matemática aplicada que fornece métodos para coleta, organização, descrição, analise e interpretação de dados e para a utilização do mesmo em tomadas de decisões. A diferença que encontramos entre eles é que Crespo(1999), apresenta o fato da estatística ser importante na tomada de decisões. Uma definição um pouco mais divergentes é apresentada por Wallis (1964)- Estatística é um conjunto de métodos que se designa a possibilitar a tomada de decisões acertadas em face às incertezas. A questão da incerteza, mostra um lado da estatística, as vezes desprezado, mas que acreditamos ser um dos principais objetivos dela, enxergar na escuridão. Outro autor, Paulo Sá (1960) , define estatística como ; o estudo dos fenômenos quantitativos que se repetem muitas vezes com valores diversos com a finalidade de representá-los resumidamente e com o intuito de verificar como variam ou de procurar as relações que entre eles possam existir.”.

Como percebemos existe alguns vários conceitos sobre estatística, mas todos seguem o caminho de métodos e decisões/analises. Alguns apresentam a discussão das incertezas. Logo não é uma tarefa fácil ter uma definição soberana sobre o tema. O que podemos compreender é que diferente de outros segmentos da matemática, a estatística, não pode ser restringir a apenas a dados organizados, eles precisam ser analisados e principalmente aplicados para terem valor. É necessária mais de uma etapa para que possamos ter uma reposta de um problema, pois é fundamental compreender o universo do problema, resolve-lo usando os elementos estatísticos, analisar os resultados e por fim tomar decisões. Tudo isso, trabalhando ao lado da incerteza, do imprevisto. Citando Lopes (1998), podemos justificar nossa visão:

Dessa forma percebemos a necessidade de refletir que o ensino da Estatística não poderia

> veicular-se a uma definição restrita e limitada, a simples coleta, organização e representação de dados, pois não viabilizaria a formação de um aluno com pensamento crítico desenvolvido. É preciso que a coleta de dados tenha um sentido, ou seja, que parta de uma problemática, já que a Estatística investiga os processos de obtenção de dados. Uma amostra se define a partir do problema que temos que analisar. Com isso, há sentido em organizar dados e buscar uma representação gráfica que seja mais adequada à visualização desses dados para posterior análise. (LOPES 1998)

Concluímos que Estatística vai além, da organização formal e racional. Necessitamos sempre prever os acontecimentos futuros, faz parte do ser humano desejar, muitas vezes acertamos e outras não temos a mesma sorte. Porém é a através desse desejo que os cientistas elaboram suas hipóteses, resultando em uma pesquisa cientifica. A Estatística, tem como ponto de origem o nascimento do primeiro homem com a necessidade de contar, enumerar, prever. A Estatística não é um fim, é um meio, um instrumento importante e crescente em quase todos os campos do conhecimento humano.

Estatística como aproximação entre ensino e pesquisa

Compreendendo um pouco dos conceitos de estatística não fica difícil entender porque ela é importante e tão usada nas diversas áreas do conhecimento. Se ocorrer alguma situação, onde necessitamos tomar uma decisão, podemos envolver estatística para auxiliar na escolha. Faz sentido então que quando vamos discutir educação estatística, trabalhamos com situações reais do cotidiano no acadêmico, torne-se um bom caminho. Não que usar dados fora da sua realidade seja um caminho ruim, mas pode-se perder a essência da situação. No Brasil, os trabalhos de Paulo Freire (1997), são fundamentais para essa compressão. Sabemos que aspectos sociais, políticos, econômicos e culturais que influenciam na postura dos professores o que interfere diretamente em sala de aula e no comportamento dos alunos. Nesse sentido encontramos cenários, onde o professor passa uma série de conceitos e atividades e os alunos tentam absolver os ensinamentos, com outros onde a dialogicidade está presente. Sabemos que o ambiente de sala de aula é um conflito de interesse entre alunos e professores, o que proporciona cenários variados, mas ambos necessitam encontrar um ponto de equilíbrio.

Na busca dessa compreensão, as reflexões de Freire (1987; 1997), em relação à educação progressista libertadora, colabora para entender a ligação do sujeito aluno com a sociedade, além de estar norteada por vários aspectos, entre os quais a problematização e dialogicidade. A forma pela qual a educação era desenvolvida nas décadas de 60 a 80, foi fruto da indignação de Paulo Freire que propõe nova concepção da ligação entre sujeito e mundo. Freire, durante toda sua trajetória, deu destaque à alfabetização de jovens e adultos, iniciando em 1946, no Recife. Em 1962, realizou com sua equipe as primeiras experiências de alfabetização popular que levariam à postura progressista libertadora. Seu grupo foi responsável pela alfabetização de 300 cortadores de cana em apenas 45 dias. Durante toda sua vida, inclusive no exílio, Freire buscou apresentar novas possibilidades para o ato de ensinar. Suas inquietações produziram inúmeros livros os quais são referências quando se fala de educação. Vivendo em momentos muito tumultuados da história política do Brasil, Freire sempre defendeu uma mudança de postura dos governantes, dos alunos e, principalmente, dos educadores.

Porém, os dados por si apresentam algumas respostas, mas não aprofundam os motivos pelos quais determinadas situações acontecem na sociedade. Estes dados são importantes para desmistificar ideias de censo comum como por exemplo: na favela só há bandidos. Os dados

estatísticos vão mostrar que não, e a sociologia vai utilizar para dizer porque este tipo de pensamento está presente na sociedade.

Freire (1987) pensava a educação como uma situação gnosiológica (gnose= conhecimento, sabedoria), cujo processo de construção visa à conscientização, que une sujeito e objeto, trabalhando intrinsecamente com a problematização e a dialogicidade. A problematização está relacionada com a educação problematizadora que segundo Freire (1987, p.96) propõe aos indivíduos dimensões significativas de sua realidade, cuja análise crítica lhes possibilite reconhecer a interação de suas partes. Sendo assim percebemos que a problematização é a análise crítica por parte dos educandos de problemas que envolvam sua realidade, mas percebemos que nela fazem parte, e como tal busquem meios de mudá-la.

Já dialogicidade não é um diálogo qualquer entre duas pessoas, onde um fala e a outro escuta ou vice-versa. A dialogicidade que desejamos deve ser aberta, necessita:

> [...] estimular a pergunta, a reflexão crítica sobre a própria pergunta, o que se pretende com esta ou aquela pergunta em lugar da passividade em face das explicações discursivas do professor, espécies de respostas a perguntas que não foram feitas [...] é fundamental é que professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve. (FREIRE, 1997, p. 96)

Essa dialogicidade não ocorre dentro apenas da sala de aula, mas sim em todos os momentos, dentro e fora do espaço escolar. Freire (1987) ainda pondera que as relações com o mundo e a ciência se dão simultaneamente, o que se relaciona à necessidade de a escola estar em consonância com a sociedade contemporânea. Nesse sentido, é, portanto, um desafio criarmos outras possibilidades que possam auxiliar no processo continuado de aquisição do conhecimento. O professor encontra na dialogicidade e na problematização caminhos para compreender e refletir a relação com o mundo ao seu redor, assumindo-se como sujeito e não apenas objeto de transmissão do conhecimento.

Dessa forma, Freire apresenta a necessidade da educação assumir a concepção problematizadora e libertadora. Uma educação através da qual, na prática da liberdade, busca-se a reflexão sobre os homens em suas relações com o mundo. Quando Freire fala em leitura do mundo, está falando da sociedade na qual o sujeito está inserido, no mundo que o rodeia.

Nesta perspectiva, a educação libertadora de Freire, conhecer o mundo significa passar da curiosidade ingênua para curiosidade epistemológica.

O fato de me perceber no mundo, como o mundo e com os outros me põe numa posição em face do mundo que não é de quem nada tem a ver com ele. Afinal, minha presença no mundo não é de quem a ele se adapta, mas a de quem nele se insere. É a posição de quem luta para não ser apenas objeto, mas sujeito também da história. (FREIRE, 1997, p.59)

Essa concepção da ligação sujeito mundo em que os sujeitos, professor e aluno, percebam-se como parte do mundo torna-se imprescindível na construção de atividades educacionais, inclusive matemáticas.

Alguns dados

Seguem nesta parte do texto alguns dados trabalhados em sala de aula para conhecer a realidade. No curso técnico em agropecuária do IFC foram utilizados os dados do Instituto Nacional de Colonização e Reforma agraria (INCRA) para compreender como se dá a produção e comercialização dos agricultores familiares da região de Abelardo Luz. Os dados mostram a porcentagem que a família produz para a venda e para consumo próprio o que gera economia para a família.

Tabela 01

Produção agrícola: Cultivos agrícolas/Canais de comercialização em de Aberlado Luz 2015/2014 .

Principais Cultivos	2014		2015	
	Comercio %	Produção total	Comercio %	Produção total
Raízes e tubérculos	4%	650.817	9%	624.969
Horta	6%	99.667	12% [1]	67.625
Baraços	6%	137.915	12%	140.705
Pomar	3%	85.068	3%	94.173
Policultivos	3%	191.669	3%	211.989
Milho	32%	7.868.560	23%	8.548.610
Feijão	70%	371.796	74%	365.081
Amendoim	37%	6.405	25%	4.280
Pipoca	4%	970	22%	1.355
Soja	94%	4.153.090	99%	5.194.414
Fumo	100%	755.025	100%	789.975

Fonte: Sigra/Incra 2015.

[1] Os cultivos que tiveram aumento na comercialização foram raízes e tubérculos, horta e pomar, em torno de 6%

Este tema pode ser debatido em sala de aula e depois os alunos quantificaram o que proporciona economia de compra de alimentos. Assim de um dado estatístico coletado temos um debate sobre como as famílias podem organizar suas finanças. Deixamos de ter um simples dado para transformamo-lo em um indicador. Outros dados também mostram que o forte da produção nesta região é o Leite.

Tabela 02

Produção animal: Destino da Produção Leite na Região de Aberlado Luz 2014-2015.

Principais Cultivos	2014		2015	
	Produção total (litros)	Produção total (litros) %	Produção total (litros)	Produção total (litros) %
Autoconsumo	270592	1,61%	259.780,50	1,36%
Uso no Lote	435288,5	2,59%	490139	2,57%
Processado	320865	1,91%	339840	1,78%
Venda na Propriedade	240	0,00%	6450	0,03%
Indústria	551600	3,28%	503000	2,63%
Cooperativas	15241059	90,61%	17505204	91,63%
Produção Total	16.819.644,50	100,00%	19.104.413,50	100,00%

Fonte: Sigra/Incra 2015.

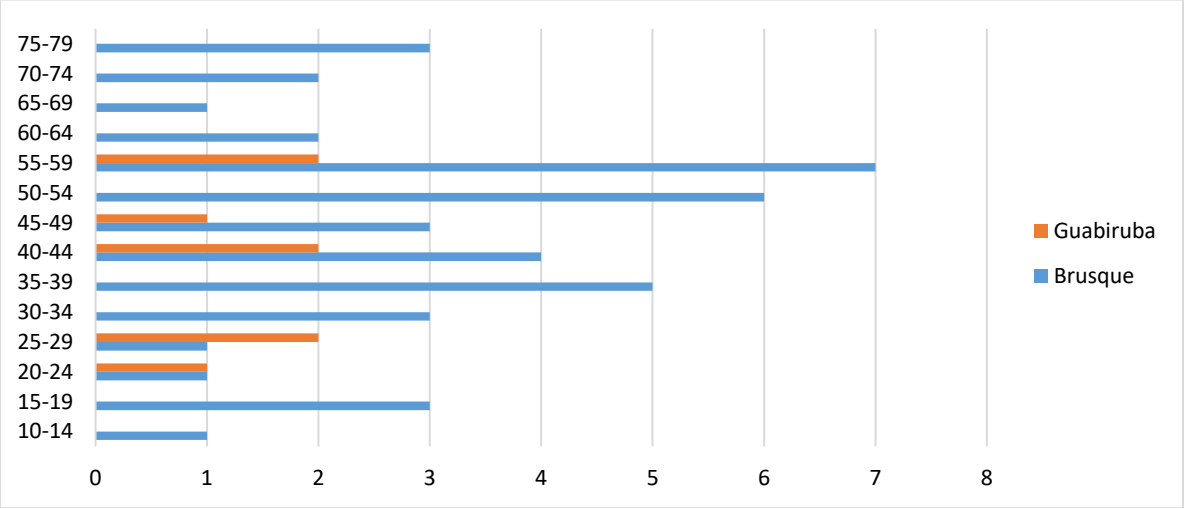
Em sala de aula foi possível conversar e perceber sobre a importância deste tipo de produção e os impactos no desenvolvimento local. Aqui, vemos o que Freire fala da leitura do mundo, os jovens se veem como produtores e conseguem perceber a importância do trabalho da sua família.

Diferentemente dos dados da produção, outros dados também podem ser trabalhados em sala de aula. Os índices de suicídio, proporcionando o diálogo com intuito da prevenção deste problema que atualmente atinge muitas pessoas. Dentro das ciências sociais, o suicídio é visto como consequência das pressões que as pessoas sofrem relacionadas à discriminação, homofobia, xenofobia, etc…

Os dados da OMS (2016) falam em torno de 800 mil casos por ano do mundo, 1 suicídio a cada 40 segundos. No Brasil, essa é a terceira causa de óbitos por fatores externos, sendo 5,3 a taxa média por 100 mil habitantes. Numa pesquisa realizada em 2016, na comarca de Brusque/SC, foram analisados dados de 2012 e 2015, conforme os gráficos abaixo

Gráfico 01

Idade Suicídio em Brusque e Guabiruba 2012-2015

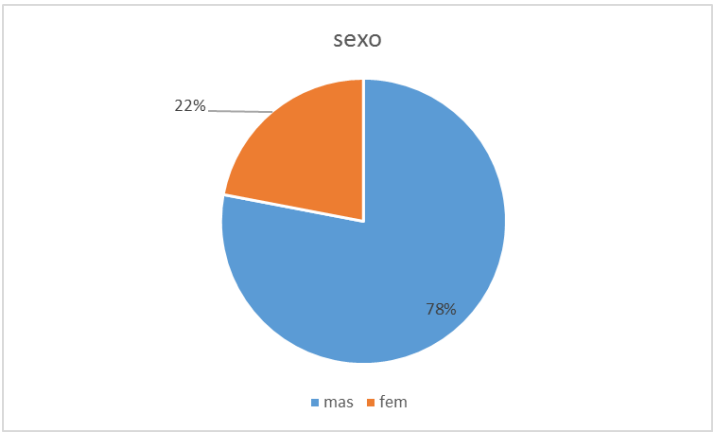


Fonte: Marcolla, F. A., Silva, P. M., Loterio, J., & Cigognini, M. A. 2016

Os dados demonstrar qual a faixa etária em que as pessoas comentem suicídio. Com os estudantes é possível discutir porque pessoas entre 50 e 60 anos comentem mais suicídio: desemprego? Desalento? Desilusão? A pesquisa pode seguir de maneira qualitativa sendo fomentado pelos dados estatísticos. Outros dados interessantes foram referentes à gênero:

Gráfico 02

Suicidio por Sexo: Guabiruba e Brusque 2012-2015



Fonte: Marcolla, F. A., Silva, P. M., Loterio, J., & Cigognini, M. A. 2016

Porque os homens se suicidam mais? Temos que nos atentar que os dados só demonstram os suicídios que foram efetivos. A tentativa de suicídio entre homens e mulheres podem ser iguais, para os métodos utilizados pelos homens tornam-se mais efetivos.

Os dados mostram que a região tem um índice de 15,29 suicídios por 100 mil habitantes. Três vezes mais que a taxa nacional. Através das ciências humanas, como a sociologia, é possível compreender as causas desse fenômeno. Trouxemos dois exemplos bem diferentes de como a estatística pode contribuir para análise social e aproximar ensino e pesquisa, pois muitos destes dados estão disponíveis em sites oficiais o que facilita o trabalho do professor.

CONCLUSÃO

Ao trabalhar esses dados com o estudante, busca-se fazer com que o mesmo possa se ver nessa realidade, como um sujeito em seu mundo. Nosso trabalho buscou debater a relação da matemática, através da estatística nas ciências humanas, apresentando casos usados em aulas dessa área. A estatística é fundamental para a compreensão dos aspectos sociais, e para tanto acreditamos que se desenvolvimento em sala de aula, passe pela pesquisa, aproximando o ensino, a temas relevantes na sociedade, deixando de ser apenas dados, para serem instrumentos capazes de auxiliar na compreensão dos fenômenos da sociedade.

Referencias e bibliografia

Crespo, A. A., Estatística fácil. 17. Ed. São Paulo: Saraiva 1999. 224p, il.

Freire, P. Pedagogia da autonomia. 6. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1997.

_____ Pedagogia do oprimido. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

Lopes, C. A. E. A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular. Campinas – SP. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. (Dissertação de Mestrado). 1998. pgs. 5-6)

Martin, O,. (2001) *Da estatísitica política à sociología estatística: transformações da análise estatítica* da sociedade nos séculos XVII-XIX. Revista brasileira de história. São Paulo, v. 21, nº 41 p. 13-14.

https://nacoesunidas.org/oms-suicidio-e-responsavel-por-uma-morte-a-cada-40-segundos-no-mundo/

Moore, D. G., *A prática da estatística empresarial: como usar dados para tomar decisões*. São Paulo: LTC, 2006. xxxiv, 952 p, il. +, 1 CD-ROM.

Marcolla, F. A., Silva, P. M., Loterio, J., & Cigognini, M. A. 2016 *Perfil Sociodemográfico e Clínico das Vítimas de Suicídio na Comarca de Brusque,* Santa Catarina, Brasil, entre 2012 e 2015 http://www.furb.br/_upl/files/especiais/fiepe/Pesquisa.pdf?20181029204938

Paulo. S., *Elementos de estatistica*. 2. ed. Rio de Janeiro : Globo, 1960. 182p, il. (Biblioteca vida e educação).

Triola, M. F., *Introdução à estatística*.7. ed. Rio de Janeiro : LTC, c1999. xviii, 410p, il.

Wallis, W. Allen; ROBERTS, Harry V. *Curso de estatística.* Rio de Janeiro : Fundo de Cultura, 1964. 2v,

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Software R aplicado na educação superior

Thamara Marques **Rodrigues**
Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Sistemas, Universidade Estadual de Montes Claros / MG
Brasil
thamaramarquesrodrigues@yahoo.com

Rafael Aparecido Pereira **Lopes**
Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e sistemas, Universidade Estadual de Montes Claros / MG
Brasil
rafaaplopes@icloud.com

Romulo Barbosa **Veloso**
Professor titular do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e sistemas, Universidade Estadual de Montes Claros / MG
Brasil
romulo.veloso@unimontes.br

Renê Rodrigues **Veloso**
Professor titular do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e sistemas, Universidade Estadual de Montes Claros / MG
Brasil
rene.veloso@unimontes.br

A estatística está presente no currículo da maioria dos cursos superiores, pois é reconhecidamente uma área de grande contribuição na tomada de decisão, sendo corroborado este cenário com o advento da era da informação e do conhecimento. Os modelos estatísticos revolucionaram a ciência, segundo Stigler (1986) eles foram desenvolvidos com base científica, lógica e tecnológica para a solução e investigação de problemas em várias áreas do conhecimento. Para a execução desses modelos estatísticos de grandes massas de dados, temos softwares estatísticos que impulsionam a pesquisa, trazendo dinamismo e reduzindo significativamente o tempo até a análise dos resultados e tomada de decisão, entretanto tais softwares apresentam custos elevados, afastando o pesquisador com poucos recursos, mais ainda os estudantes. Neste sentido que softwares gratuitos são importantes, pela promoção irrestrita financeiramente do acesso à tecnologia.

Foi criado nos anos de 1990 por Ross Ihaka e Robert Gentleman uma linguagem de programação chamada R, junto com um ambiente de mesmo nome, gratuita e de código fonte aberto. A partir de então, o R se tornou uma ferramenta estatística de grande alcance, conforme Souza; Pertenelli; Mello (2014) atua na análise e manipulação de dados, com testes paramétricos

e não paramétricos, modelagem linear e não linear, análise de séries temporais, análise de sobrevivência, simulação e estatística espacial, elaboração de gráficos com alta autonomia do pesquisador entre outros, permitindo ainda o surgimento de materiais didáticos importantes para o uso acadêmico em diversas línguas.

O R se apresenta como uma alternativa muito interessante para utilização de software no ensino da estatística nos cursos superiores, além de ser gratuito, é um programa disponível para os principais sistemas operacionais de computadores e possui uma gama de colaboradores criando rotinas de cálculos com novas funcionalidades, fazendo do R um programa estatístico de alta performance nos mais variados modelos matemáticos existentes. Além disso, o R trabalha através de linguagem de programação, outra ciência cada vez mais comum nos currículos dos cursos superiores, pois assim como a estatística, a programação vem revolucionando a ciência no que tange a resolução de problemas, atuando em todos setores da sociedade.

Portanto, visando um desenvolvimento na aprendizagem dos acadêmicos através do uso de softwares, modelo já bem aceito nas práticas pedagógicas, conforme diz Weiss e Cruz (1999) influencia positivamente na construção do conhecimento, desenvolvimento do raciocínio lógico, flexibilidade do pensamento, estímulo a curiosidade, fortalecimento da curiosidade e desenvolvimento da leitura informativa. E também, na introdução dos alunos na programação, o R cumpre todos requisitos para sua utilização dentro da sala de aula nos cursos superiores.

Referencias bibliográficas

Ignácio, S. E. (2010). *Importância da Estatística para o Processo de Conhecimento e Tomada de Decisão*. Recuperado em http://www.ipardes.gov.br/ojs/index.php/revistaparanaense/article/view/89.

Landeiro, V. L., Baccaro, F. B. (2015). *Introdução ao uso do programa R*. Recuperado de http://www.academia.edu/download/42572258/Introduo_ao_uso_do_programa_R20160211-26487-y4v6uj.pdf

Machado, L. B., Becher, E. L. *Aprendendo estatística com o software R*. Recuperado em http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6345_2685_ID.pdf.

Salsburg, D. (2009). *Uma senhora toma chá...: como a estatística revolucionou a ciência no século XX* / David Salsburg; tradução José Maurício Gradel; revisão técnica Suzana Herculano-Houzel. - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

Stigler, S. M. (1986). *The historyofstatistics: themeasurementofuncertaintybefore 1900*. Cambridge, USA: The Belknap Press of Harvard University Press.

Weiss, A. M. L., Cruz, M.L.R.T. (1999). *A informática e os problemas escolares de aprendizagem*. Rio de Janeiro: DP&A Editora. 2ª edição.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Niveles de comprensión: tablas y gráficas estadísticas en grado 5º de básica primaria

David Fernando Méndez Vargas[1]
Grupo de investigación EDUMATH Universidad de Antioquia
Colombia
davidmendezvargas@gmail.com

Pedro Vicente Esteban Duarte[2]
Grupo de investigación EDUMATH Universidad de Antioquia
Colombia
pesteban@eafit.edu.co

Resumen

El presente documento tiene como fin compartir una experiencia investigativa en el campo de la estadística, cuyo objetivo es describir el proceso mediante el cual estudiantes de grado quinto (5°) de Básica Primaria, desarrollan comprensión en lectura e interpretación de información presentada en tablas y gráficas estadísticas, mediante descriptores para cada uno de los niveles propuestos por la Enseñanza para la Comprensión, se parte de la necesidad de fortalecer este campo desde la básica primaria y proponer nuevas formas de abordar este tipo de estudio al interior del aula de clase.

Palabras clave: Pensamiento estadístico, análisis de datos, tablas y gráficos estadísticos, interpretación, Enseñanza para la Comprensión

[1] Docente tutor, Apartado, Antioquia.
[2] Profesor de tiempo completo, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT.

Introducción

El presente documento se origina a partir de los resultados obtenidos en el trabajo investigativo que se realizó en el marco de la maestría en regiones, orientado por la universidad de Antioquia, el cual se desarrolló entre los años 2013 y 2016, en el municipio de Apartadó. Este tiene sus orígenes en la reflexión realizada como docentes, frente al desafío de la educación matemática para fomentar "la comprensión de tablas y gráficas estadísticas en estudiantes de grado quinto de básica primaria" con el ánimo de propiciar estudiantes críticos ante la toma de decisiones que requieren del uso de este tipo de conocimiento, tal como lo plantea el National Council of Teachers of Mathematics (1989). Este desafío surge por la evolución que ha tenido la Estadística a través de la historia y su utilidad en diferentes disciplinas del saber, como la psicología, el deporte, la medicina, entre otras. Para Watson, (2006), Godino, & Batanero (2002), entre otros, teniendo en cuenta que gran parte de la información que hoy invade la vida cotidiana, es publicada por los diferentes medios de comunicación utilizando la Estadística.

Descripción del problema

Los lineamientos curriculares y estándares básicos de matemática MEN, (2006) sostienen que la matemática debe abordarse a partir de cinco pensamientos, siendo uno de ellos, Aleatorio y Sistemas de datos, en este se encuentran establecidas las competencias que los estudiantes deben alcanzar en cada conjunto de grado, para el caso específico de grado quinto, en este pensamiento los estudiantes deben:

- Representar datos usando tablas y gráficas (de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares)
- Comparar diferentes representaciones del mismo conjunto de datos.
- Interpretar información presentada en tablas y gráficas (de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares)

A pesar de estar planteado por los referentes curriculares, la realidad al interior del aula de clase es otra, en la mayoría de las instituciones educativas del municipio de Apartadó este pensamiento se deja para abordarlo en el último periodo, por lo que en algunos casos no se alcanza a estudiar, lo que implica que los estudiantes queden sin ver esta competencia.

Por otra parte, se hizo un análisis a las pruebas saber grado 5° de los años 2014 y 2015 y se encontró que gran parte de estas se relacionan de alguna manera con el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, especialmente con la interpretación de tablas y gráficas, es de anotar que no sólo en el área de matemática, también, en el área de ciencias naturales donde se encontraron preguntas que requieren la interpretación de tablas y gráficas. Al confrontar este tipo de preguntas con los conocimientos de los estudiantes se evidenció que en su mayoría no comprendían información presentadas en tablas y gráficos.

Estas ideas ponen en consideración, la necesidad de iniciar un proceso de enseñanza y aprendizaje desde la básica primaria que apunte a la lectura e interpretación de información presentada mediante tablas y gráficas estadísticas, con procedimientos que partan del contexto y permitan a los estudiantes comprender lo aprendido, ya que "comprender no es sólo albergar conocimientos, es también la habilidad para utilizar este conocimiento en el mundo real de forma creativa y competente en el momento oportuno" (Ottaviani 1999. p. 75).

Con la intención de contribuir al estudio de la estadística desde la educación escolar, específicamente en lo relacionado con la comprensión de información presentada a través tablas y gráficas estadísticas, se formula la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo comprenden estudiantes de grado quinto (5°) información presentada en tablas y gráficas estadísticas?

Marco teórico

Después de una reflexión frente a las distintas formas en que se puede abordar un proceso investigativo en Estadística, consideramos la Enseñanza para la Comprensión (EpC) como marco teórico para desarrollar este proyecto, haciendo uso de sus características que determinan a lo largo del proceso enseñanza y aprendizaje las funciones que deben cumplir tanto el profesor como el estudiante, se precisan los momentos de intervención, los trabajos y acciones que deben realizar, así como los niveles de comprensión que pueden alcanzar los estudiantes de acuerdo a su desempeño, Blythe (1998). El marco EpC nace en la Escuela de Posgraduados de Educación de la Universidad Harvard. Blythe y Perkins, (1998) dieron origen a un nuevo modelo metodológico de la Educación. Este se crea a partir del proyecto Zero, el cual estaba centrado en la enseñanza de las artes, pero su eficacia a lo largo del tiempo ha hecho que su interés se extienda a otras disciplinas en el campo de la Educación.

La Enseñanza para la Comprensión en su parte estructural está conformada por dimensiones (Contenidos, Métodos, Praxis, Forma de Comunicación) y elementos (Hilo conductor, Tópicos generativos, Desempeños de comprensión, Valoración continua). Este último valora el aprendizaje de los estudiantes en cuatro niveles; Ingenuo, Novato, Aprendiz, Experto. Estos recursos permitirán al docente consolidar la propuesta de aula, sobre todos los desempeños de comprensión quienes orientan las acciones o actividades que los estudiantes deben desarrollar para demostrar que han comprendido el concepto en cuestión, Blythe (1999). A continuación, se esbozan los desempeños en sus tres fases:

- **Desempeños exploratorios:** son las actividades o acciones que deben realizar los educandos con el objetivo de detectar cuales son las ideas previas que tienen frente a las metas que se han planteado.
- **Desempeños de investigación guiada:** se refiere aquellas acciones donde los estudiantes reciben la orientación del profesor y en conjunto llegan a la construcción y comprensión de un nuevo conocimiento.
- **Final de síntesis:** son las acciones que los estudiantes realizan, en la cual, demuestran que han comprendido lo que se planteaba en las metas de comprensión, reflejándose en su creatividad y flexibilidad para aplicar lo aprendido.

Para Stone, M. (2003), la comprensión se presenta cuando los estudiantes pueden pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que sabe, por el contrario, cuando un estudiante no puede ir más allá de la memorización, repetición de acciones rutinarias, es un indicio de falta de comprensión.

A partir del modelo de la EpC, se diseñaron tres instrumentos con el fin de recolectar información útil para alcanzar nuestro objetivo de investigación. Estas herramientas fueron; los organizadores de unidad como base de la planeación del docente, la guía de actividades como instrumento de trabajo para los estudiantes, y los portafolios como evidencia y seguimiento del

proceso.

Metodología

La presente investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, en el campo educativo, los estudios de este tipo son aquellos que buscan desarrollar objetivos de comprensión de diversos fenómenos socioeducativos y transformación de la realidad. Por tanto, la investigación puede dirigirse a la comprensión, transformación, cambio y tomas de decisión. Sandín, (2003). Se implementó un estudio de caso instrumental Stake (1999), el cual manifiesta que a través de este caso se busca comprender las acciones de los participantes cuando se involucran aspectos nuevos. Además, de permitir trabajar con un colectivo, pero de allí tomar una muestra para ser analizada a profundidad.

La investigación se desarrolló en el colegio americano del municipio de Apartadó en grado quinto con una población de 70 estudiantes de los cuales se tomó una muestra de 10 para analizarlos a profundidad, la recolección de los datos se realizó durante los meses de febrero a junio de 2016.

Recolección de información

El proceso investigativo al interior del aula de clase, se desarrolló a partir de la observación e implementación de la guía de actividades diseñada desde los parámetros establecidos por la EpC. Ésta contempla tres momentos: fase de Exploración, fase de Investigación Guiada y fase del Proyecto Final de Síntesis.

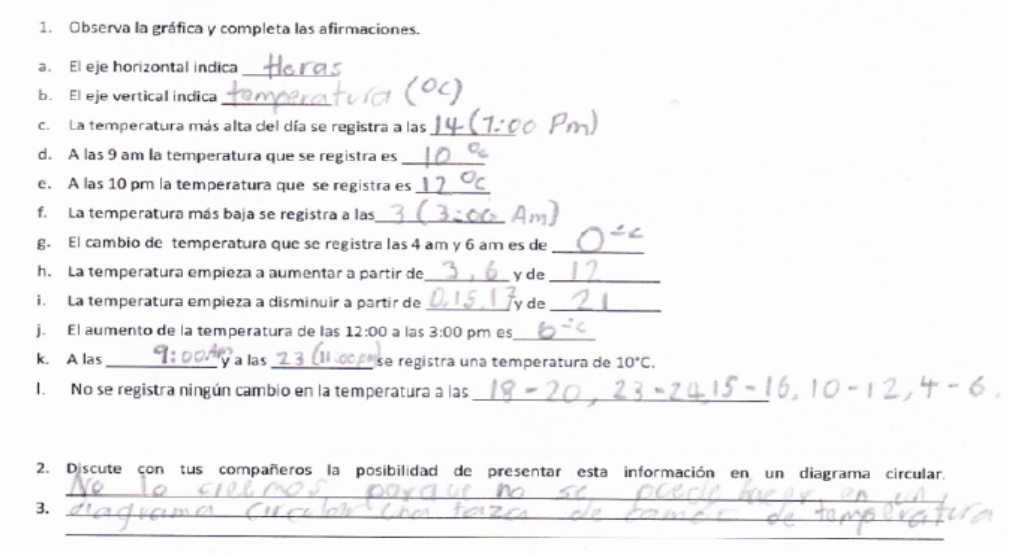
- **Exploración:** las actividades de esta fase están enfocadas al reconocimiento de diversos tipos de gráficos estadísticos, el lenguaje de la disciplina, la utilidad de la estadística en las diferentes ciencias, esto con la intención de obtener un diagnóstico preliminar de los participantes y acercarlos al objeto de estudio. A continuación, se muestra imagen correspondiente al reconocimiento de gráficos y la utilidad de estos.



Imagen 1. Foto fase de exploración.

Se puede observar como los participantes exploran diferentes tipos de gráficos y luego enuncian sus apreciaciones a partir de preguntas orientadoras.

- **Investigación Guiada**: Esta fase contempla actividades de interacción entre docente y estudiantes en relación al objeto de estudio, se presentan actividades como; relación de tablas y gráficas, preguntas interpretativas a partir de un gráfico o tabla de frecuencia dada, construcción de tablas y gráficas a partir de información recolectada en el entorno, todo ello con el fin de recoger información que nos permitiera dar cuenta de cómo los participantes interactúan con el objeto de estudio. A continuación, imagen de esta fase.



1. Observa la gráfica y completa las afirmaciones.

a. El eje horizontal indica Horas
b. El eje vertical indica temperatura (oc)
c. La temperatura más alta del día se registra a las 14 (1:00 Pm)
d. A las 9 am la temperatura que se registra es 10 oc
e. A las 10 pm la temperatura que se registra es 12 oc
f. La temperatura más baja se registra a las 3 (3:00 Am)
g. El cambio de temperatura que se registra las 4 am y 6 am es de 0 oc
h. La temperatura empieza a aumentar a partir de 3, 6 y de 12
i. La temperatura empieza a disminuir a partir de 0, 15, 17 y de 21
j. El aumento de la temperatura de las 12:00 a las 3:00 pm es 6 oc
k. A las 9:00 Am y a las 23 (11:00 pm) se registra una temperatura de 10°C.
l. No se registra ningún cambio en la temperatura a las 18 - 20, 23 - 24, 15 - 16, 10 - 12, 4 - 6.

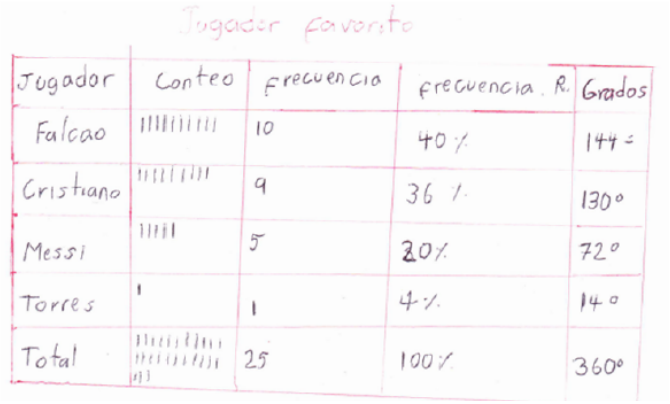
2. Discute con tus compañeros la posibilidad de presentar esta información en un diagrama circular.
3. No lo creemos porque no se puede hacer en un diagrama circular con tazas de temperatura

Imagen 2. Foto fase de investigación guiada.

En la actividad anterior se puede observar como a partir de una gráfica el estudiante realiza algunas interpretaciones que dan cuenta de la información contenida en esta.

- **Final de Síntesis:** En esta fase se les propuso a los participantes que plantearan una situación de su interés, donde de forma creativa mostraran lo comprendido. Esta actividad involucró los distintos momentos desarrollados por los estudiantes (diseño de pregunta, recolección de la información, construcción de tabla y gráfica, interpretación de la información), permitiendo mostrar los avances y las comprensiones del tópico generativo durante el proceso de intervención del guía de actividades.

El siguiente participante indagó por la preferencia de jugador de futbol, tomando a sus compañeros como muestra. Estos son sus resultados.



Jugador favorito

Jugador	Conteo	Frecuencia	Frecuencia R.	Grados
Falcao	IIIIIIIIII	10	40 %	144 °
Cristiano	IIIIIIIII	9	36 %	130°
Messi	IIIII	5	20%	72°
Torres	I	1	4%	14°
Total	IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIII	25	100%	360°

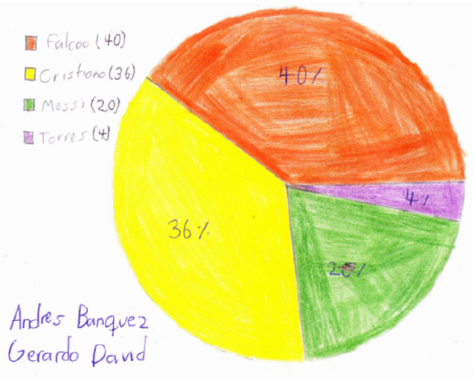


Imagen 3 y 4. Foto fase de final de síntesis.

Una vez aplicados los tres momentos, exploración, investigación guiada y final de síntesis, se procede analizar la información haciendo triangulación entre; la observación, la teoría y los resultados obtenidos.

Análisis y resultados

Para el análisis de la información recolectada, se diseñó una Matriz de Evaluación. Esta permite categorizar los desempeños mostrados por los participantes en los ejercicios propuestos en la guía de actividades, de acuerdo a los aspectos afianzados en cada dimensión, lo que nos permitió diseñar descriptores para los niveles de comprensión en cada una de las categorías. Todo ello teniendo en cuenta: lo propuesto por el marco EpC para la construcción de los niveles; lo expuesto por la literatura correspondiente a la cultura estadística, Gal, I. (2002), Wallman (1993) y Watson (1997), especialmente la investigación realizada por Batanero, C. y Godino, J. (2002) quienes establecen cuatro niveles de comprensión de los gráficos Lectura literal (leer los datos); Hacer una inferencia (Leer más allá de los datos); Valorar los datos (Leer detrás de los datos), la observación y las actividades desarrolladas por los participantes en cada uno de los desempeños, esta información se triangula con la ayuda de Excel y a partir de allí se generan los descriptores para cada una de las dimensiones que pretenden mostrar cómo avanzan los participantes en la comprensión de información presentada en tablas y gráficas estadísticas.

A continuación, compartimos las matrices que muestran los niveles de comprensión para la dimensión de Método, Praxis y comunicación.

Matriz de niveles: dimensión de método

CATEGORIA	INGENUO	NOVATO	APRENDIZ	EXPERTO
Construcción de gráficas estadísticas	Construye gráfica de barra sin tener en cuenta los elementos básicos para ellos, como el título, rotulación de los ejes.	Construye gráfica de barra teniendo en cuenta elementos como el título, rotulación de los ejes, color de las barras.	Construye gráfica circular por intuición, es decir, relacionando la frecuencia absoluta con el sector circular, a mayor frecuencia, mayor sector circular.	Construye gráfica circular a partir de la relación coherente (proporcionalidad) entre la frecuencia y el sector circular, haciendo las conversiones correspondientes entre los colores y la información que este representa.
Construcción de tablas de frecuencia (variable cualitativa)	establece las columnas necesarias para la variable, el conteo, la frecuencia y la frecuencia relativa. ubica el conteo y la frecuencia absoluta.	realiza las divisiones entre la frecuencia y el tamaño de la muestra, para hallar la frecuencia relativa.	realiza las divisiones entre la frecuencia y el tamaño de la muestra, y la multiplica por 100 para hallar la frecuencia relativa.	establece las frecuencias relativas y comprende cada uno de los porcentajes.

Tabla 1

Fuente: investigación 2016

Tabla 2

Matriz de niveles: dimensión de praxis

CATEGORIA	INGENUO	NOVATO	APRENDIZ	EXPERTO
Exploración de situaciones a partir de tablas y gráficas estadísticas	Explora información presentada en tablas y gráficas estadísticas asociadas a una situación en particular.	Averigua de forma textual información presentada en tablas y gráficas estadísticas asociadas a una situación en particular.	Indaga por información presentada en tablas y gráficas estadísticas para sustentar explicaciones de estas.	Indaga por información presentada en tablas y gráficas estadísticas para sustentar explicaciones de estas, hacer conjeturas y generar nuevo conocimiento.
Asociación de tablas y gráficas	Asocia las tablas y gráficas con el uso que pueden tener únicamente en el área de matemáticas.	Además de Asociar las tablas y gráficas con el área de matemáticas, propone un nuevo campo de acción como los negocios.	Reconoce el uso de tablas y gráficas en otras áreas distintas a las matemáticas, medicina, educación, economía, entre otras.	Reconoce el uso de tablas y gráficas en otras áreas distintas a las matemáticas, considerándola que se puede utilizar en cualquier disciplina, es decir, transversal a otras áreas del conocimiento.

Fuente: investigación 2016

Tabla 3

Matriz de niveles: dimensión de comunicación

CATEGORIA	INGENUO	NOVATO	APRENDIZ	EXPERTO
Apropiación de lenguaje estadístico	Reconoce algunos términos propios de la disciplina relacionados con los diagramas.	Reconoce términos de la disciplina asociados con los diagramas y las tablas de frecuencias, como frecuencia, relativa	Reconoce términos de la disciplina asociados con los diagramas, las tablas de frecuencias y las medidas de tendencia central	Reconoce términos de la disciplina asociados con los diagramas, las tablas de frecuencias, medidas de tendencia central, además sostienen un dialogo acerca de la información expuesta en una tabla o gráfico

Fuente: investigación 2016

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos podemos concluir que los estudiantes de grado quinto de primaria desarrollan comprensión de tablas y gráficas estadísticas cuando:

Relacionan información presentada en un gráfico con su diario vivir, como es el caso de la consulta por la preferencia de los futbolistas.

Asocian el sector circular con porcentajes o valores, es decir, a mayor tamaño del sector, mayor porcentaje o valor.

Relacionan la información de los ejes con las barras del gráfico.

Perciben que un gráfico estadístico permite una mejor comprensión de la situación indagada.

Ampliación del vocabulario estadístico por parte de los participantes

Precisan la frecuencia relativa en una tabla de frecuencia, cuando el participante expresa que el 36% de sus compañeros manifiesta que Ronaldo es el jugador favorito

Comprenden que el uso de la estadística es útil en otras ciencias que requieran resumir y presentar información de forma más comprensible para las personas.

Extraen información acertada presentada en un gráfico ejemplo; en la figura 3, el participante expresa que la temperatura a las 9 am es de 10º (fase de investigación guiada)

Comprenden que hay gráficos apropiados para presentar información específica, dependiendo de la naturaleza de los datos, sin embargo, el diagrama de mayor uso es el de barra

Representan información en dos tipos de gráficas, que pueden ser; de barra-circular o de barra y lineal, indistintamente.

A partir de lo anterior, se puede concluir el alcance de la pregunta, durante el proceso investigativo se puede evidenciar como estudiantes de grado quinto comprenden información presentada en tablas y gráficas estadísticas, el hecho de que los estudiantes sean los

protagonistas, impone una disminución de los contenidos del currículo, en beneficio de los procesos constructivos, que permitan la conceptualización en lugar de la algoritmia. Esto permitió que existiera una motivación diferente respecto a los procesos anteriores. Los desempeños de los estudiantes se ven, influenciados por las interacciones que se dan en al interior del aula de clase. Es en la discusión de los grupos, donde surgen las mejores interpretaciones y conclusiones entre los estudiantes e incluso donde el profesor encuentra mejores elementos para promover el análisis. Gracias al ambiente de aprendizaje, los instrumentos usados y al tipo de tareas propuestas, se fue logrando un clima favorable para la generar la participación y apropiación de una cultura estadística en los estudiantes.

Con el desarrollo del presente trabajo investigativo se fortaleció la comprensión de información presentada en tablas y gráficos estadísticos en estudiantes de grado quinto de primaria, se evidencia la importancia del contexto cuando este se involucra en situaciones propuestas por el estudiante, este le encuentra un mayor sentido a lo que hace, se pude decir, que aprende sin darse cuenta.

Referencias y bibliografía

Arteaga, P. (2011). Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Batanero, C. y Godino, J. (2002). Estocástica y su Didáctica para maestros: Síntesis. [Versión electrónica]. http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros fecha de consulta.

Batanero, C. y Godino, J. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. En R. Luengo (Ed.), Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas (pp. 203-226). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. CD ROM.

Blythe, T. y Perkins, D. (1998). *La enseñanza para la comprensión*. Paidós, Argentina.

Blythe, T. (1999). *Enseñanza para la comprensión: Guía para el Docente*. Paidós, Buenos Aires.

Gal, I. (2002). Adults statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1):1–25.

Ministerio de Educación Nacional. (2006) *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá Ministerio de Educación

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathmatics. Reston, VA: Author.

Ottaviani, M. (1999). "A note on developments and perspectives in statistics education. Conferencia plenaria en el IV Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística", 26 - 30 Julio de 1999, Mendoza, Argentina.

Sandín. M.P. (2003). Investigación Cualitativa en Educación. Fundamentos y Tradiciones. Madrid: McGraw Hill.

Stake, R. (1999) investigación con estudios de casos. Ediciones Morata S.L Madrid.

Wallman, K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, 88(421):1–8.

Watson, J. (2006). Statistical Literacy at School. Mahwah, New Jersey. Lawrence Erlbaum Associate0073.

Wiske, Martha Stone (Comp.). (2003). La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica. Trad.: Cristina Piña. Buenos Aires, Argentina: Paidós

Apéndice A

Actividades fases de Exploración

A continuación, se muestran actividades de la fase de exploración.



Imagen 1. Foto reconocimiento de gráficos



Imagen 2. Observando el Vídeo que es la estadística

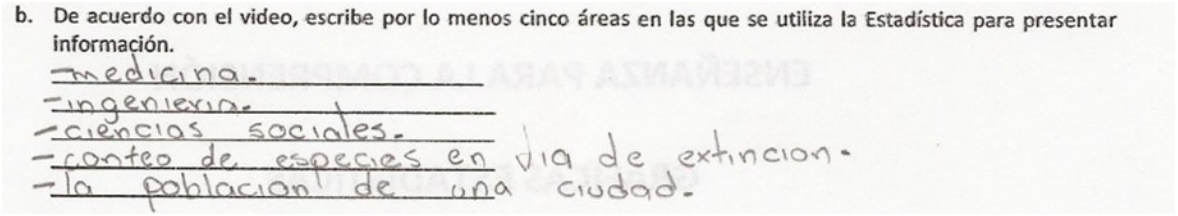


Imagen 4. Respuesta de participante

Imagen 5. Respuesta de participante

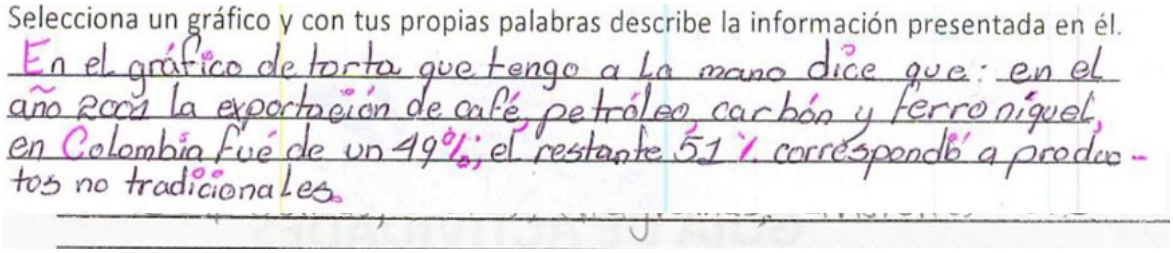


Imagen 6. Respuesta de participante

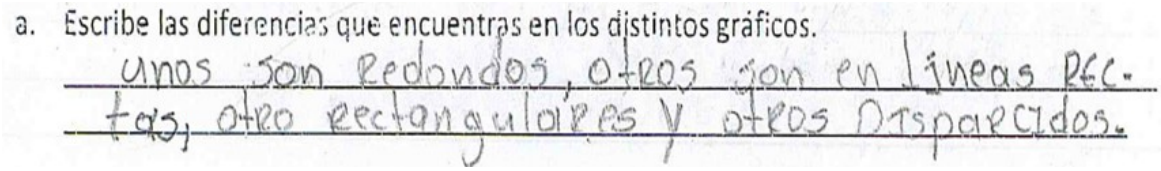


Imagen 7. Respuesta de participante

Apéndice B

Actividades fase de Investigación Guiada



Imagen 8. Foto recolectando datos

2. Una vez diligenciada la tabla, clasifica la información con las siguientes características.
a. La información que se puede medir (expresar con números)
b. La información que indica una cualidad (no se pueden expresar con números)

INFORMACIÓN QUE SE PUEDE MEDIR	INFORMACIÓN QUE INDICA UNA CUALIDAD
edad	Deporte favorito
N° Hermanos	mes de cumpleaño
estatura en cm	programa de tv favorito
Peso	Materia preferida
Dinero para el descanso	signo zodiacal
edad padre	gaseosa preferida

Imagen 9. Respuesta de participante, clasificación de variables

3000 $
2000 $
5000 $
5000 $
3000 $
1006 $
5000 $
3000 $
1000 $

Dinero en $	Conteo	Frecuensia	Frecuencia R
3000	☐	4	20 %
2000	☒	5	25%
5000	☒I	6	30%
1000	L	2	10%
4000	I	1	5%
0	I	1	5%
10000	I	1	5%

Imagen 10. Respuesta de participante, tabulando datos

Apéndice C

Actividades fase de Final de Síntesis

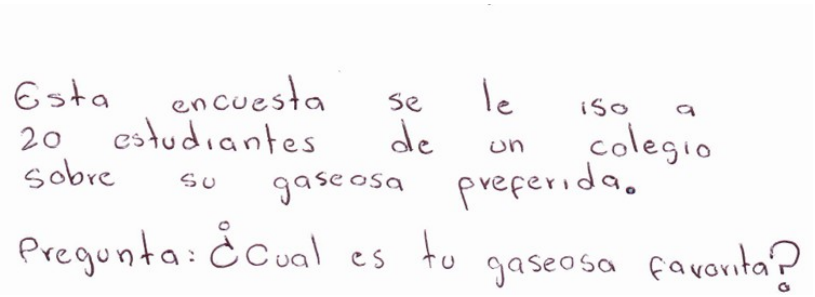


Imagen 11. Pregunta originada por un participante



Imagen 12. Tabulación del participante

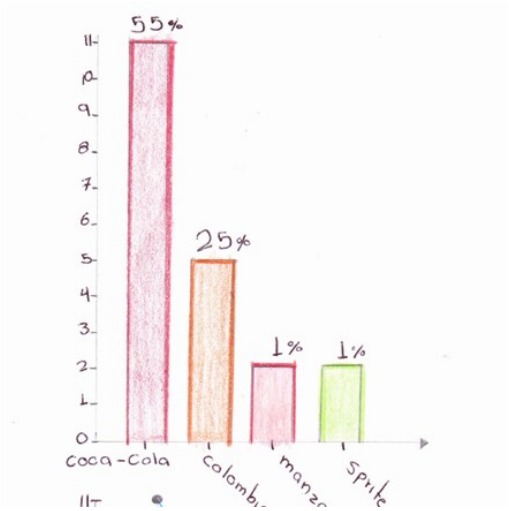


Imagen 13. Gráfica del participante

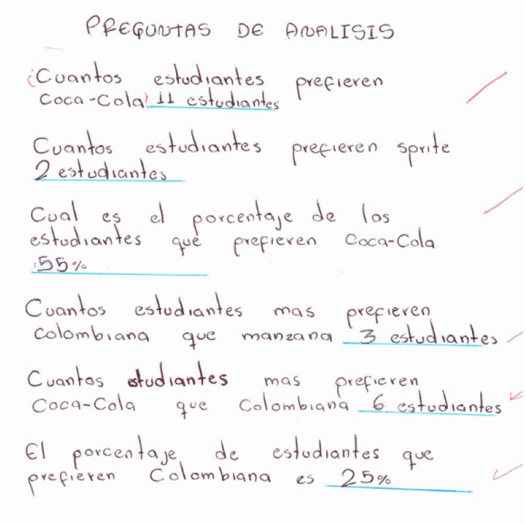


Imagen 14. Preguntas del participante, para el análisis de la información

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Comprensión de datos estadísticos para la toma de decisiones: proyecto de emprendimiento con estudiantes de grado quinto

Enith Cristina **Ortiz** Sarrazola
Universidad de Antioquia
Colombia
encosa@hotmail.es
Zaida Margot **Santa** Ramírez
Tecnológico de Antioquia
Colombia
zaida.santa@tdea.edu.co
Diego Alejandro **Castrillón** Osorio
Universidad de Antioquia
Colombia
diegocastrillonosorio@gmail.com

Resumen

La presente investigación centra su atención en la necesidad de avanzar en los procesos de comprensión de datos estadísticos, en relación con los requerimientos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). El estudio de la estadística se motiva a través de un proyecto de emprendimiento, en el que el estudiante pueda tomar decisiones teniendo en cuenta la interpretación crítica que haga de los datos recolectados y analizados. Se propone el diseño y evaluación de una unidad didáctica, enmarcada en la Enseñanza para la Comprensión, a partir de situaciones cotidianas y llamativas para estudiantes de quinto de básica primaria, con miras a la formación de ciudadanos estadísticamente cultos. La metodología se fundamenta en un enfoque cualitativo, a través de un estudio de casos que posibilita la descripción e interpretación del fenómeno en cuestión, en este sentido, es posible integrar la estadística y el emprendimiento.

Palabras clave: datos estadísticos, Enseñanza para la Comprensión, proyecto de emprendimiento, toma de decisiones.

Planteamiento del problema

Un alto porcentaje de estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Julio Restrepo, de Salgar, Antioquia (Colombia), presentan un nivel bajo en el área de matemáticas;

esta situación se refleja en los resultados de las Pruebas Saber, cuya información es presentada por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES), cada año.

Al realizar un análisis del informe proporcionado por el ICFES, para el grado quinto, en el año 2017, es posible determinar que, dentro del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, se especifican algunas dificultades centradas en los siguientes indicadores:

- "El 49% no describe ni interpreta datos relativos a situaciones del entorno escolar" (ICFES, 2017, p. 10)

- "El 17% no clasifica ni organiza la presentación de datos" (p. 10).

- "El 63% no resuelve problemas que requieren representar datos relativos al entorno usando una o diferentes representaciones" (p. 11).

- "El 10% no resuelve problemas que requieren encontrar y/o dar significado a la medida de tendencia central de un conjunto de datos" (p. 11).

Esta información se verificó con la aplicación de dos actividades exploratorias; la primera se diseñó con ejercicios generales de representación de datos, interpretación de gráficas y solución de problemas a partir de dichas representaciones. La segunda se aplicó con el fin de hacer un mayor énfasis en la representación de información a través de gráficos estadísticos y la identificación de la toma de decisiones, partiendo de situaciones de emprendimiento empresarial, en el contexto escolar de los mismos estudiantes.

Al analizar los resultados de los ejercicios de exploración de saberes previos, se pudo identificar una dificultad para representar información en gráficas estadísticas, interpretarla y tomar decisiones con base en los datos obtenidos. También, se observa que al momento de resolver problemas o construir estrategias para la toma de decisiones partiendo de la información que brinda un gráfico, los estudiantes dan respuestas que no tienen relación con la información presentada; de hecho, tienden a dar opiniones personales, creencias sociales o, incluso, apreciaciones que no guardan relación con la situación presentada.

Lo anterior da cuenta de la necesidad de fortalecer procesos de comprensión de conceptos estadísticos, entendiendo la comprensión como una habilidad para pensar y actuar a partir de lo que se sabe, mediante desempeños flexibles, es decir, actuaciones que den cuenta de lo que se comprendió en un contexto determinado (Stone, 1999). En este sentido, Batanero (2004) afirma que la estadística juega un papel primordial en el desarrollo de la sociedad humana, ya que favorece la habilidad para analizar la variabilidad de una situación y apreciar los aportes que el pensamiento estadístico puede hacer en nuestra toma de decisiones, tanto en el ámbito personal como profesional. Por esta razón, la enseñanza de la estadística debe fundamentarse desde las exigencias que requiere el mundo actual, es decir, posibilitar desde el aula de clase la construcción de procesos de comprensión, a través de la aplicabilidad de los contenidos, mediante ejercicios de experimentación que vinculen las situaciones del contexto inmediato; al respecto, Méndez y Vargas (2013) precisan:

> Uno de los retos de la enseñanza es poder conectar lo que sucede al interior del aula de clase (teoría) con la realidad que vive el estudiante fuera de ella. Esta conexión entre escuela y vida cotidiana bien puede llevarse a cabo haciendo uso de la estadística y más específicamente con la utilidad de las tablas y gráficas, donde el estudiante le encuentre sentido a lo que aprende, resolviendo situaciones que sean de interés para él. (p.145)

Por lo tanto, es necesario trascender las estrategias y metodologías a situaciones del contexto, a través de la integración de diferentes áreas del conocimiento en aras de fortalecer procesos de razonamiento, resolución de problemas y formas de comunicación; en este caso, se deben incluir necesidades contemporáneas como el desarrollo de la creatividad, la innovación, las competencias ciudadanas y laborales, y la preparación para la productividad, las cuales son necesarias para la formación en emprendimiento. Esta última actitud se define, desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2012), como:

> […] la disposición personal a actuar de forma proactiva frente a cualquier situación de la vida. Esta actitud genera ideas innovadoras que pueden materializarse en proyectos o alternativas para la satisfacción de necesidades y solución de problemáticas. Así mismo, propicia el crecimiento y la mejora permanente del proyecto de vida. (p. 13)

En este escenario, la estadística, además de posibilitar la interpretación de datos, fortalece la toma de decisiones en circunstancias particulares, en este caso, un proyecto de emprendimiento que parte de las ideas propias o necesidades de los estudiantes y es desarrollado a través de la recolección e interpretación de datos estadísticos para, posteriormente, propiciar la toma de decisiones basadas en inferencias e hipótesis sustentables en información real. De acuerdo con lo anterior, con el estudio se pretende responder la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo la comprensión de datos estadísticos propicia la toma de decisiones en un proyecto de emprendimiento con estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Julio Restrepo?

Objetivo general

Analizar de qué manera la comprensión de datos estadísticos propicia la toma de decisiones en un proyecto de emprendimiento con estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Julio Restrepo.

Objetivos específicos

- Describir cómo los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Julio Restrepo, comprenden datos estadísticos para la toma de decisiones, a partir de una rúbrica por niveles, desde el marco de la Enseñanza para la Comprensión.

- Diseñar una unidad didáctica cuyo propósito sea la creación de un proyecto de emprendimiento con estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Julio Restrepo, que permita la comprensión de datos estadísticos para la toma de decisiones.

- Evaluar si la unidad didáctica diseñada permite la comprensión de datos estadísticos para la toma de decisiones, en estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Julio Restrepo.

Marco Referencial

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, se revisan algunos referentes relacionados con la comprensión de datos estadísticos, la toma de decisiones, la cultura del emprendimiento y el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

Aproximación teórica sobre los datos estadísticos

Actualmente, es evidente la presencia de la estadística en nuestra sociedad; su utilidad debe permitir la posibilidad de hacer análisis de la información y tomar decisiones adecuadas en

situaciones de incertidumbre (Batanero, 2004). Por esta razón, los procesos de educación han puesto especial atención a la formación de una cultura estadística desde temprana edad, implementando su enseñanza en el currículo; al respecto, Holmes (1980, citado en Batanero, 2004), justifica esta idea, argumentando que los futuros ciudadanos necesitan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos, dado que es útil para el desarrollo personal, pues permite fomentar un razonamiento crítico; además, ayuda a comprender los temas restantes del currículo.

De esta manera, la interpretación de datos en gráficos estadísticos hace parte de la consolidación de ciudadanos estadísticamente cultos; en este caso, dichas representaciones "son un potente instrumento para comunicar información y para resumirla en forma eficiente" (Cazorla, 2002, citado por Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011). De hecho, dentro de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, se especifica que algunas de las competencias que debe alcanzar un estudiante para el ciclo de grados de cuarto y quinto, son las siguientes "represento datos usando tablas y gráficas […], interpreto información presentada en tablas y gráficas […] y resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos" (MEN, 2006, p. 38). Dichas competencias reiteran la importancia de orientar el trabajo de clase hacia la interpretación crítica de datos estadísticos, mediante trabajos experimentales, propios del contexto del estudiante.

Aproximación teórica sobre la toma de decisiones

El pensamiento aleatorio y sistemas de datos propicia en el estudiante la comprensión de fenómenos reales, a través de la recolección, representación e interpretación de información, la cual le posibilita hacer conjeturas y tomar decisiones; en este sentido, su enseñanza se debe abordar en contextos significativos para este, donde la presencia de problemas abiertos con cierta carga de indeterminación, permita exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones (MEN, 2006).

Una de las formas en las que se puede contextualizar la estadística, es a través del trabajo con proyectos; en este caso, los estudiantes podrían identificar un tema de estudio y, con base en este, formular preguntas, coleccionar datos relevantes para el tema de estudio, analizar los datos e interpretar los resultados teniendo en cuenta la pregunta planteada y, luego, escribir un informe final (Batanero y Díaz, 2004).

Aproximación sobre la cultura del emprendimiento

La cultura de emprendimiento pretende integrar las diferentes áreas del conocimiento como apoyo y complemento para el desarrollo de actitudes desde el ser y el saber hacer; se plantean objetivos específicos, que además de contribuir con la creación de negocios, también puedan propiciar la solución de problemas en contextos determinados (MEN, 2012).

Un ejemplo claro, es la relación que desde el aula de clase se puede establecer entre el emprendimiento y las matemáticas, a través de una correspondencia entre una y otra, es decir, el emprendimiento es uno de los vehículos para dar aplicación a los conocimientos estadísticos, y la estadística da significado a cuestiones que parecen abstractas en el momento de llevar a cabo ideas de emprendimiento. Por lo tanto, hacer de la escuela un espacio de integración de áreas, no es solo una opción, se debe convertir en una necesidad, para que el estudiante desarrolle habilidades para la vida, especialmente en lo relacionado a la solución de problemas y a la toma de decisiones.

Aproximación al Marco Conceptual de Enseñanza para la Comprensión

La Enseñanza para la Comprensión es un marco conceptual en el que la comprensión es el eje central de la educación, llevando al estudiante a un proceso en el que no solo sea capaz de repetir conceptos y teorías, sino que, también, sea capaz de pensar y actuar. La noción de comprensión que se plantea desde este marco conceptual, está basada en una idea constructivista; sin embargo, difiere del modelo habitual en dos elementos básicos: qué se construye y cómo procede la construcción (Stone, 1999). En términos generales, la comprensión es "la capacidad de desempeño flexible" (Perkins, 1999, p. 70), es decir, pensar a partir de lo que se sabe, poder aplicar ese conocimiento en un desempeño que no siempre es predecible, pues podría ser una situación que sucede y ante la cual se debe actuar, demostrando eso que se ha comprendido. En este sentido, los estudiantes deben ser capaces de comprender la naturaleza del conocimiento para resolver problemas, buscar soluciones, tomar decisiones y transformar el mundo que los rodea (Stone, 1999).

El proceso de la comprensión considera unos ejes centrales que parten de cuatro preguntas generadoras: ¿qué tópicos realmente vale la pena comprender?, 2) ¿qué aspectos de los tópicos son los que deben ser comprendidos?, 3) ¿cómo se puede promover la comprensión?, 4) ¿cómo podemos saber lo que se está comprendiendo? (Stone, 1999). Para dar respuesta a estos interrogantes, se consideraron cuatro elementos: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua, en los cuales se establece una ruta de comprensión desde la planeación, hasta la verificación de lo que el estudiante ha comprendido (Stone, 1999); también se consideraron unas cualidades, las cuales se enfocan desde unas dimensiones y unos niveles, es decir, aspectos específicos de cada área del conocimiento: el contenido, los métodos, los propósitos y las formas de comunicación; en cada una de estas dimensiones, el estudiante puede alcanzar un nivel determinado, clasificado en ingenuo, novato, aprendiz y maestría (Boix y Gardner, 1999).

Es así como la Enseñanza para la Comprensión se convierte en un marco conceptual propicio para fortalecer procesos flexibles; en este escenario, la teoría y la práctica guardan una relación íntima, favorecida por una planeación pensada en los intereses y motivaciones del estudiante, con actividades que involucran la construcción colectiva y la participación activa de los actores del proceso de educación (Stone, 1999). En el caso de la comprensión de datos estadísticos, esta no solo se demuestra con la interpretación de datos y gráficos en situaciones propuestas por el docente; uno de los desempeños que se debe evaluar continuamente, está centrado en la aplicabilidad de su significado en actuaciones propias del contexto, como lo es la toma de decisiones justificadas y evaluadas en información recogida por el mismo estudiante; estos procesos están encaminados hacia la comprensión.

Metodología

Para alcanzar el objetivo de esta investigación, es preciso tener claridad respecto al diseño metodológico, el cual se encuentra direccionado hacia la comprensión de datos estadísticos, que puede propiciar la toma de decisiones, desde un proyecto de emprendimiento. A continuación, se presenta el enfoque, el tipo de estudio, los participantes y las técnicas e instrumentos para recolectar información relacionada con el tema de estudio.

Enfoque metodológico

Esta investigación está orientada hacia un enfoque cualitativo, tomando como referencia la concepción de Hernández, Fernández y Baptista (2006), en la que establecen que "las investigaciones cualitativas se basan más en una lógica y proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas)" (p. 9). En este sentido, la observación, descripción, análisis y reflexión son acciones que determinan los resultados, las conclusiones o las hipótesis que surgen después de un contacto directo con los investigados, por medio de vivencias e interacciones a través del lenguaje verbal o no verbal (Hernández et al., 2006).

En este estudio, el trabajo de campo se convierte en el factor principal para hacer procesos de interpretación, con una observación encaminada al análisis de la comprensión que presentan los estudiantes en relación a los datos estadísticos. En la investigación, el ambiente natural es el aula de clase, en el que se contextualiza la comprensión a través de un proyecto de emprendimiento; para esto, será importante escuchar las opiniones de los estudiantes, interactuar con ellos en las actividades que desarrollan y hacer descripciones y análisis objetivos en relación al proceso.

Tipo de estudio

De acuerdo con las características del enfoque cualitativo, el tipo de estudio con el cual se desarrollará este proyecto de investigación, será un estudio de casos de un grupo de cinco estudiantes del grado quinto de Básica Primaria. Se parte de la idea de que un estudio de casos es una herramienta valiosa de investigación, cuya fortaleza está centrada en la medición y registro de la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado (Martínez, 2011), con el fin de dar explicaciones desde múltiples perspectivas, pero teniendo en cuenta las actuaciones individuales de cada estudiante, debido a que cada uno es un caso particular; de esta forma, se obtiene así un conocimiento más amplio del fenómeno, que es la comprensión de datos estadísticos y la relación directa con la toma de decisiones. Para obtener un conocimiento amplio de dicho fenómeno, se hace necesario investigarlo desde su contexto real, a través de múltiples fuentes de evidencia (Yin, 1984).

Participantes

Para el desarrollo de la propuesta de investigación, se eligen cinco estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Julio Restrepo, ubicada al suroeste del departamento de Antioquia, Colombia. Esta selección se realiza teniendo en cuenta los siguientes criterios: dificultad en la interpretación y análisis de datos estadísticos, motivación e interés por el área de matemáticas y participación activa en los diferentes procesos desarrollados en el área de emprendimiento. Con anterioridad, se solicita el consentimiento de los padres de familia para poder llevar a cabo las diferentes actividades y, de ser necesario, trabajar en horarios extra clase.

Métodos de recolección y análisis de la información

La información se analiza desde tres técnicas diferentes: la observación, la entrevista y el material del estudiante, las cuales se describen a continuación.

La observación sirve de guía para describir paso a paso lo que ocurre durante cada una de las actividades y para obtener datos relevantes que tengan relación con el objetivo de la investigación, teniendo en cuenta que esta "conduce al investigador a una mejor comprensión del caso" (Stake, 1998, p. 60); la entrevista tiene como principal objetivo conocer abiertamente aspectos característicos de los participantes de la investigación, a través de preguntas y

respuestas que favorezcan una comunicación clara y la construcción colectiva de significados con respecto a un tema específico (Janesick, 1998, citado por Hernández et al., 2006); el material del estudiante se utiliza como insumo para describir y analizar con detalle los avances conceptuales y procedimentales que adquieren los estudiantes a través de la aplicación de las actividades propias del trabajo de campo.

Resultados esperados

Para responder a la pregunta de investigación, es necesario dar consecución a los objetivos planteados. En este sentido, se espera realizar un trabajo integrado entre áreas del conocimiento, específicamente la estadística y el emprendimiento, con el fin de avanzar en procesos de comprensión de datos estadísticos, a través del uso de métodos o de procedimientos y la aplicabilidad en el contexto. Es decir, la habilidad de comprensión será evaluada en la medida en que los estudiantes contextualicen los conocimientos estadísticos a través de actividades propias relacionadas con la creación de un proyecto de emprendimiento, que implique la generación de ideas empresariales desarrolladas con ayuda de la interpretación y el análisis de la información; posteriormente, se espera que los estudiantes estén en la capacidad de tomar decisiones sustentadas en datos y situaciones reales.

De igual forma, se busca trascender en los estudiantes de quinto de Básica Primaria, la lectura literal de los datos estadísticos, a una lectura dentro y más allá de los datos, con el fin de interpretar, integrar, realizar comparaciones, operaciones, predicciones e inferencias a partir de estos. Por tanto, los datos se convierten en un componente significativo en la consolidación de ciudadanos estadísticamente cultos, pues deben partir de un contexto conocido por los estudiantes, a fin de que su lectura e interpretación pueda ser crítica y enfocada en una situación específica donde, además de leerlos, los estudiantes puedan estar en la capacidad de recolectar información, posteriormente, representarla en el gráfico que mejor se adecúe a sus necesidades y, finalmente, tomar decisiones con base en dicha información.

Referencias y bibliografía

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 76, 55-67.

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, *1*(1), 27-37.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: ICE.

Boix, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 215-256). Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Méndez, D. y Vargas, L. (2013). *Comprensión de información presentada en tablas y gráficas estadísticas desde la EpC* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Martínez, P. C. (2011). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista científica Pensamiento y Gestión*, (20) 165-193.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-propertyvalue-55269.html.

Ministerio de Educación Nacional. (2012). *Guía N° 39. La cultura del emprendimiento en los establecimientos educativos.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-287822_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2017*). Informe por colegio pruebas saber 3°, 5°, y 9°.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: https://diae.mineducacion.gov.co/siempre_diae/documentos/2017/Institucion_Educativa/105642000019.pdf

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la comprensión*. *Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 69-95). Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Stone, M. (1999). *La Enseñanza para la comprensión*. *Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Yin, R. (1994). Investigación sobre estudio de casos. *Diseño y métodos. Applied Social Research Methods Series*, *5*(2), 2-35.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La influencia del pensamiento absoluto en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades con el modelo de urna

Maribel **Aguas** Hidalgo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav-IPN)
México
aguashidalgomm@yahoo.com.mx
Ricardo **Quintero** Zazueta
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav-IPN)
México
quintero@cinvestav.mx

Resumen

En este trabajo se estudia la influencia del pensamiento absoluto y su pertinencia en la toma de decisiones en situaciones que implican la comparación de probabilidades. Para ello, se diseñaron situaciones de probabilidad clásica con el modelo de urna. En cada situación se plantearon dos urnas con extracción simple, que implican o no relaciones de proporcionalidad, a estudiantes de tercer grado de educación secundaria. El análisis se realizó a través de la categorización de los resultados con base en las relaciones que se establecen entre los componentes de las urnas (casos favorables, desfavorables y posibles). El estudio arrojó que las características de la tarea así como la extrapolación del conocimiento influyen en la toma de decisiones.

Palabras clave: relaciones de proporcionalidad, situaciones de probabilidad, modelo de urna, pensamiento absoluto.

Antecedentes y planteamiento del problema

Los razonamientos proporcional y probabilístico guardan una estrecha relación, por ejemplo, al contrastar la definición de razonamiento proporcional de Lesh, Post y Behr (1988) con lo que Landín y Sánchez (2010) proponen respecto a las implicaciones del razonamiento probabilístico, se identificó que ambos razonamientos requieren de un análisis cuantitativo y cualitativo, así como de la inferencia y la predicción de resultados. De esta manera, ambos razonamientos no se limitan a comparaciones numéricas, y aunque algunos investigadores han intentado distinguir entre sí a estos conceptos (véase por ejemplo Hoemann y Ross, 1971); el trabajo que aquí se expone no se centra en distinguirlos sino en incorporarlos, para extraer y analizar aquellas estrategias influenciadas por el pensamiento absoluto para la toma de decisiones, considerando como medio el modelo de urna.

Tanto en el Libro para el maestro de educación secundaria (Alarcón *et al.* 1994) como en investigaciones de Piaget e Inhelder (1951), Fischbein (1975), Green (1988), Falk (1980),

Alatorre (1994), Aguas (2014), entre otros, han planteado situaciones con dos urnas. No obstante que existen situaciones que pueden ser modeladas con ellas, las urnas en sí mismas son un contexto rico para trabajar temas de probabilidad u otros de las matemáticas siempre y cuando estos no sean vistos como prerequisitos para comprenderla, sino un contexto donde interactúan y se apoyan mutuamente.

En cuanto al estudio de las estrategias empleadas por los estudiantes al resolver situaciones de urnas, como lo señala Alatorre (1994), ya han sido trabajadas por autores como: Piaget e Inhelder (1951), Maury (1984, 1986), Lecoutre (1984), Fischbein *et al.* (1970), y Thornton y Fuller (1981). De acuerdo a la investigadora, en cada estudio se especificaron distintas estrategias, algunas comunes y otras no, en gran medida, porque las categorías definidas dependieron de lo que cada investigador se proponía observar o de lo querían enfatizar. En las categorías definidas por Alatorre (1994), la cantidad y la calidad de las clases de elementos que entran en juego en una estrategia lleva a una jerarquización de las estrategias por nivel de complejidad, es decir: a) Estrategias simples, b) Estrategias compuestas y c) Estrategias y mecanismos primitivos. Por su parte, Piaget e Inhelder (1951) identificaron en su estudio las siguientes siete estrategias al aplicar diez situaciones de urnas, elección del lado donde hay: 1) más casos favorables, 2) hay menos casos favorables, 3) hay sólo un caso favorable, 4) hay más casos posibles, 5) hay menos casos posibles, 6) es mayor la diferencia de casos favorables y desfavorables, y 7) donde la probabilidad es mayor.

Las primeras cinco estrategias de acuerdo a Piaget e Inhelder (1951) son propias de la primera etapa del desarrollo cognitivo, la seis se presenta en la segunda etapa y la siete hasta la tercera. Sin embargo, aunque los autores señalan algunos indicadores del porqué y cómo se realizaron las elecciones en cada una de las etapas, queda la incertidumbre qué otras relaciones establecen los alumnos para realizar su elección, así como si se pueden presentar otro tipo de elecciones distintas a las comentadas por estos investigadores o si las estrategias que en un momento no fueron funcionales pueden serlo en otro momento o viceversa, lo que sería interesante indagar. Por ejemplo, en la segunda etapa dadas las probabilidades $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$ se realizan elecciones correctas con base en las comparaciones de las diferencias de los casos posibles y los favorables o los posibles y los desfavorables. Esta estrategia es funcional al estar relacionada con una situación de una variable donde los casos posibles son iguales. Si esta misma estrategia se hubiera empleado en la situación de dos variables donde las probabilidades son $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, las diferencias encontradas serían iguales lo que podría llevar al estudiante a no saber cuál elegir o a determinar que se tiene la misma probabilidad, es así como la extrapolación de una estrategia funcional, con un razonamiento absoluto que fue funcional en un primer momento puede no serla en otra situación.

De esta manera, ahora lo que se propone es analizar las relaciones que se establecen entre el razonamiento proporcional y probabilístico. Para ello se consideró conveniente hacer una clasificación de las estrategias para profundizar en los procesos que los estudiantes siguen para establecer algún resultado. Es decir, identificar los elementos (casos) favorables, desfavorables o posibles que se consideren, el tipo de elecciones que se realicen con base en las relaciones que se establezcan y analizar las particularidades de estas relaciones, que para este estudio son fundamentales, porque lo que se pretende es obtener indicios de cómo el pensamiento absoluto influye en el probabilístico en la toma de decisiones, en un contexto de urnas. Así, para orientar el estudio, se plantea la siguiente pregunta y propósito de investigación.

Pregunta de investigación: ¿De qué manera el pensamiento absoluto influye en la toma de decisiones ante situaciones de comparación de probabilidades?

Propósito: Identificar y analizar las estrategias que siguen estudiantes de tercer grado de educación secundaria al resolver situaciones de probabilidad clásica contextualizadas con el modelo de urna para clasificarlas, centrando la atención en aquellas estrategias que implican un pensamiento absoluto y ver de qué manera influyen en la toma de decisiones.

Marco interpretativo

Para el análisis de los resultados se estudiaron y establecieron previamente las posibles relaciones que podrían surgir a partir de los elementos proporcionados en las hojas de trabajo. Como resultado de ese proceso se identificaron dos tipos de comparaciones cuando se relacionan los elementos contenidos en dos urnas. Una comparación es la multiplicativa —por medio de un cociente—, considerado como razón o fracción. Y la otra comparación es aditiva —por medio de una diferencia— y representada por veinte expresiones (véase el Cuadro 1), siendo esta última la que interesa ilustrar en este documento. A continuación se muestra, en el Cuadro 1, las expresiones identificadas al comparar los elementos de dos urnas, donde B representa bolas Blancas y a su vez el número de casos favorables y N bolas Negras y también el número de casos desfavorables. Donde además $B + N$ corresponde al número de casos posibles.

Cuadro 1

Expresiones que se pueden establecer cuando se compara por diferencia.

Punto de referencia B	Punto de referencia N	Punto de referencia B	Punto de referencia N
Expresión i	Expresión ii	Expresión iii	Expresión iv
Minuendo B_1 Sustraendo B_2	Minuendo N_1 Sustraendo N_2	Minuendo B_2 Sustraendo B_1	Minuendo N_2 Sustraendo N_1
Parte con parte			
Punto de referencia urna 1	Punto de referencia urna 2	Punto de referencia urna 1	Punto de referencia urna 2
Expresión v	Expresión vi	Expresión vii	Expresión viii
Minuendo $B_1 + N_1$ Sustraendo $B_2 + N_2$	Minuendo $B_2 + N_2$ Sustraendo $B_1 + N_1$	Minuendo $N_1 + B_1$ Sustraendo $N_2 + B_2$	Minuendo $N_2 + B_2$ Sustraendo $N_1 + B_1$
Todo con todo			
Expresión ix	Expresión x	Expresión xi	Expresión xii
Minuendos B_1 y B_2 Sustraendos N_1 y N_2	Minuendos B_2 y B_1 Sustraendos N_2 y N_1	Minuendos N_1 y N_2 Sustraendos B_1 y B_2	Minuendos N_2 y N_1 Sustraendos B_2 y B_1
Parte y parte con parte y parte			
Expresión xiii	Expresión xiv	Expresión xv	Expresión xvi
Minuendos B_1 y B_2 Sustraendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$	Minuendos B_2 y B_1 Sustraendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$	Minuendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$ Sustraendos B_1 y B_2	Minuendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$ Sustraendos B_2 y B_1
Parte y todo con parte y todo		Todo y parte con todo y parte	
Expresión xvii	Expresión xviii	Expresión xix	Expresión xx
Minuendos N_1 y N_2 Sustraendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$	Minuendos N_2 y N_1 Sustraendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$	Minuendos $B_1 + N_1$ y $B_2 + N_2$ Sustraendos N_1 y N_2	Minuendos $B_2 + N_2$ y $B_1 + N_1$ Sustraendos N_2 y N_1
Parte y todo con parte y todo		Todo y parte con todo y parte	

En la comparación por diferencia que se muestra en el Cuadro 1, se pueden presentar, durante las relaciones que se establecen con los elementos que las conforman (Parte con parte, Todo con todo, Parte y parte con parte y parte, Parte y todo con parte y todo, Todo y parte con todo y parte), las siguientes estrategias para compararlas (véase el Cuadro 2), donde en la relación parte-parte a y c son las partes favorables, y b y d son las partes desfavorables; en la relación todo-todo $a+b$ y $c+d$ son los todos. Y las demás relaciones se derivan de éstas.

Cuadro 2

Estrategias para comparar las relaciones que se establecen en el Cuadro 1.

1ra.- Estrategia: Relación entre (Parte con parte o Todo con todo): Se presenta de forma aditiva entre los elementos de una misma clase o entre los elementos totales de dos conjuntos. *Diferencia de casos favorables:* Cuando se tiene $a-c$ o $c-a$, donde $a \geq c$ o $a \leq c$. *Diferencia de casos desfavorables:* Cuando se tiene $b-d$ o $d-b$, donde $b \geq d$ o $b \leq d$. *Diferencia de casos posibles:* Cuando se tiene $(a+b)-(c+d)$ o $(c+d)-(a+b)$, donde $a+b \geq c+d$ o $a+b \leq c+d$.
2da.- Estrategia: Relación dentro (Parte y parte con parte y parte; Parte y todo con parte y todo; o Todo y parte con todo y parte): Se presenta de forma aditiva entre los elementos de diferente clase o entre los elementos de una misma clase con los elementos totales de dos conjuntos. *Diferencia de casos favorables y desfavorables:* Cuando se tiene $(a-b)-(c-d)$ o $(c-d)-(a-b)$, donde $a-b \geq c-d$ o $a-b \leq c-d$ o $c-d \geq a-b$ o $c-d \leq a-b$. *Diferencia de casos desfavorables y favorables:* Cuando se tiene $(b-a)-(d-c)$ o $(d-c)-(b-a)$, donde $b-a \geq d-c$ o $b-a \leq d-c$ o $d-c \geq b-a$ o $d-c \leq b-a$. *Diferencia de casos favorables y posibles:* Cuando se tiene $[a-(a+b)]-[c-(c+d)]$ o $[c-(c+d)]-[a-(a+b)]$, donde $a-(a+b) \geq c-(c+d)$ o $a-(a+b) \leq c-(c+d)$ o $c-(c+d) \geq a-(a+b)$ o $c-(c+d) \leq a-(a+b)$. *Diferencia de casos posibles y favorables:* Cuando se tiene $[(a+b)-a]-[(c+d)-c]$ o$[(c+d)-c]-[(a+b)-a]$, donde $(a+b)-a \geq (c+d)-c$ o $(a+b)-a \leq (c+d)-c$ o $(c+d)-c \geq (a+b)-a$ o $(c+d)-c \leq (a+b)-a$. *Diferencia de casos desfavorables y posibles:* Cuando se tiene $[b-(a+b)]-[d-(c+d)]$ o$[d-(c+d)]-[b-(a+b)]$, donde $b-(a+b) \geq d-(c+d)$ o $b-(a+b) \leq d-(c+d)$ o $d-(c+d) \geq b-(a+b)$ o $d-(c+d) \leq b-(a+b)$. *Diferencia de casos posibles y desfavorables:* Cuando se tiene $[(a+b)-b]-[(c+d)-d]$ o$[(c+d)-d]-[(a+b)-b]$, donde $(a+b)-b \geq (c+d)-d$ o $(a+b)-b \leq (c+d)-d$ o $(c+d)-d \geq (a+b)-b$ o $(c+d)-d \leq (a+b)-b$.

Aunque en las expresiones anteriores se utilizó el signo menos $(-)$ para representar las estrategias que se emplean cuando se compara por diferencia, las diferencias también pueden establecerse utilizando el signo más $(+)$, por ejemplo, $a-b=z$, donde la diferencia entre a y b es z, o bien $a+z=b$, donde la diferencia entre a y b es z. De aquí que cuando se habla de problemas aditivos, están implicadas sumas y restas.

Cuando se analizan situaciones binarias es posible identificar dos tipos de comparaciones: Comparación por diferencias de cocientes, donde se utilizan estructuras multiplicativas y Comparación por diferencia de enteros donde se emplean estructuras aditivas. Aunque en ambas comparaciones se trabaja con diferencia, en cada una de ellas están involucrados distintos tipos de pensamiento, en la primera se presenta el relativo y en la segunda el absoluto, descritos por Lamon (1999). Así, para hacer referencia a las primeras comparaciones, desde un inicio se han nombrado *comparación por cociente* y a las segundas *comparación por diferencia*.

Método

El trabajo de investigación que aquí se reporta es de tipo cualitativo con un caso instrumental (Stake, 1999) porque interesó profundizar en el análisis de las estrategias de

razonamiento absoluto que estudiantes de educación secundaria siguen al trabajar situaciones de probabilidad en un contexto de urna. El caso lo conforma un grupo de 35 alumnos que cursaba el tercer grado de educación secundaria de la Ciudad de México, se eligió porque se consideró que los alumnos de este último grado ya tendrían antecedentes de los contenidos que interesó analizar de acuerdo con los *Programas de estudio 2011* (SEP, 2011), lo que ayudaría a obtener una mayor variedad de estrategias de resolución para analizar. Para el diseño de las actividades, además de incluir el modelo de urna, se analizaron los tipos de problemas de razonamiento proporcional. En cuanto a la clasificación de Lamon (1993), los problemas diseñados corresponden a los de Parte-parte-todo —que Özgün-Koca (2009) incluye en su estudio dentro de los de comparación numérica— porque la mayoría de los problemas que se plantearon pueden asumirse como conjuntos discretos donde un todo corresponde a los casos posibles y los subconjuntos de ese todo a los casos favorables y desfavorables, respectivamente.

Análisis de los resultados

Comparación cuantitativa por diferencia. Relaciones que se establecen con una o más variables (véase el Cuadro 1). Se especifican numéricamente las comparaciones por diferencia (mayor que, menor que, más que o menos que y se precisa por cuánto) que se realizaron con las variables que se implicaron: casos favorables, casos desfavorables o casos posibles. Y una vez establecidas las relaciones se trabaja con una estrategia de solución "dentro" o "entre" para hacer la elección (véase el Cuadro 2). En el Cuadro 3 se ejemplifica la comparación cuantitativa por diferencia y sus implicaciones.

Cuadro 3

Ilustración del tipo de elección, las estrategias y la relación de orden identificada en la comparación cuantitativa por diferencia.

Comparación cuantitativa por diferencia · Consideración de casos favorables · Consideración de casos favorables y casos desfavorables		
Elección	Estrategia	Relación de orden
Mayor número de casos favorables	Relación entre Parte con parte	Favorables ⟷ Favorables
Diferencia mayor Diferencia menor Diferencia igual	Relación dentro Parte y parte con parte y parte	Favorables ⟷ Desfavorables Favorables-Desfavorables Desfavorables-Favorables

Consideración de casos favorables. Se comparan por medio de diferencia los casos favorables de cada conjunto (véanse las expresiones i y iii del Cuadro 1) y se realiza la elección con base en su mayor, menor o igual número.

Elección con base en el mayor número de casos favorables
Estrategia: Relación entre Parte con parte.
Relación de orden: Favorables ⟷ Favorables.

Esta estrategia se presentó en: VI-1-A14, VI-1-A25 y VII-A25. Señalan los casos favorables y la diferencia específica para realizar su elección con base en el mayor número de casos favorables. Donde el número de situación planteada se identifica con números romanos, aquí por ejemplo, VII es el número de situación; los números 1 o 2 que le siguen corresponden al número de pregunta cuando la situación presenta dos preguntas (si la situación contiene sólo una pregunta, esta numeración se omite, como sucede en la descripción de la figura 1) y al final se

incluye la nomenclatura A1, A2,…, o A35 que refiere al número de alumno que ofreció la respuesta.

> VII-A25 Máquina A. Porque en general tiene 21 pelotas la máquina A y la B tiene 14 pero de esas 21, 6 son blancas y, en la máquina B son 14 pero sólo hay 4 blancas y tiene 2 oportunidades más de obtener una pelota blanca.

Figura 1. Respuesta de VII-A25 que elige el mayor número de casos favorables. Compara por diferencia (favorables-favorables) y explicita la diferencia.

Decidir comparar y elegir por medio de diferencia puede ser correcto o no, pues esto dependerá del tipo de situaciones que se trabajen, por ejemplo, si en las expresiones i y iii (véase el Cuadro 1) se compara por diferencia y se elige con base en el mayor número de casos favorables, esto será correcto si en la situación se presenta el mismo número de casos desfavorables o posibles.

Consideración de casos favorables y casos desfavorables. Se comparan por medio de diferencia los casos favorables y desfavorables de cada conjunto (véanse las expresiones ix, x, xi y xii del Cuadro 1) y se realiza la elección con base en su mayor, menor o igual número.

Elección con base en la diferencia mayor
Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.
Relación de orden: Favorables ⟷ Desfavorables.

Donde se presentó esta estrategia fue en: II-1-A11, II-1-A34, V-A35, IX-A4, IX-A9, IX-A22, IX-A32 y IX-A35, en la figura 2 se ilustra.

> II-1-A11 Urna. Porque en la urna hay 5 bolitas blancas y 4 bolitas negras y por 1 bolita blanca es la diferencia y puedes ganar por las posibilidades.

Figura 2. Respuesta de II-1-A11 que elige la diferencia mayor. Compara por diferencia (favorables-desfavorables) y explicita la diferencia.

Quienes utilizaron esta estrategia señalan el número de casos favorables y desfavorables en un conjunto e indican la diferencia específica entre ambos para hacer su elección con base en el mayor número de los primeros. Esto quizá puede tener su origen en el diseño de la situación II ya que presenta una mayor diferencia de favorables y desfavorables en el segundo conjunto y en el primero no la hay, por lo que se puede deducir que es nula. Las situaciones V y IX fueron diseñadas con proporcionalidad y en comparación con la situación II, la diferencia de los casos favorables y desfavorables de ambos conjuntos no es nula. En la situación V se presentan estos datos y en la IX no se proporcionan.

Elección con base en la diferencia menor
Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.
Relación de orden: Desfavorables-favorables.

Donde se presentó esta estrategia fue en: VII-A31, VII-A32, VII-A35, VI-1-A1, VI-1-A11, VI-1-A21, VI-1-A32 y VI-1-A35. En la figura 3 se ejemplifica.

> [B] $\begin{array}{r} 10 \\ -\ 4 \\ \hline 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 15 \\ -\ 6 \\ \hline 9 \end{array}$ [A] VII-A31 La máquina B. En la máquina A hay menos probabilidades que salga la pelota blanca y en la máquina B puede que salga la pelota blanca.

Figura 3. Respuesta de VII-A31 que elige la diferencia menor. Compara por diferencia (desfavorables-favorables) y explicita la diferencia.

En esta estrategia se señalan los casos desfavorables y favorables, además de la diferencia específica de cada conjunto para ser comparadas y elegir con base en la menor.

Elección con base en la diferencia igual
Estrategia: Relación dentro Parte y parte con parte y parte.
Relación de orden: Favorables ⟷ Desfavorables.

Quien presentó esta estrategia fue un alumno (véase la figura 4).

> IV-1-A5 Ambas cajas. Yo elegiría las dos cajas porque en las dos cajas es casi lo mismo de insectos, sólo la diferencia es de dos en la caja chica y en la caja grande, y en cualquiera de las dos es la misma probabilidad.

Figura 4. Respuesta de IV-1-A5 que elige la diferencia igual. Compara por diferencia (favorables-desfavorables) y explicita la diferencia.

En la situación IV se proporcionan los casos favorables y desfavorables, además se presentan dibujos que ilustran la situación pero donde no se distinguen los casos favorables de los desfavorables. IV-1-A5 realiza su elección considerando que en cada conjunto la diferencia de favorables y desfavorables es la misma, y aunque no indica las cantidades involucradas en su comparación, sí refiere la diferencia numérica específica que se da entre unos y otros, en este caso es 2. Es de señalar que, por el diseño de la situación, respecto a las cantidades proporcionadas la estrategia utilizada lleva a una elección incorrecta.

Las expresiones ix, x, xi y xii (véase el Cuadro 1) son convenientes para realizar elecciones sólo cuando en las situaciones la diferencia de casos favorables y casos desfavorables o viceversa es nula. De ser así, los conjuntos que se presentan son equiprobables y entonces se puede hacer una elección correcta con base en la igualdad que estos casos representan. Esta aseveración puede llevar a que en conjuntos donde exista una misma diferencia mayor o menor a cero también se consideren equiprobables, hecho que no se puede generalizar.

Consideraciones finales

En las expresiones ii y iv (véase el Cuadro 1) al comparar por diferencia se elige con base en el menor número de casos desfavorables, esto será correcto si en la situación se presenta el mismo número de casos favorables o posibles. De presentarse la elección con base en la igualdad de favorables, esta será correcta si en la situación existe igualdad en los desfavorables o posibles. Las características de las situaciones pueden ser notadas explícita o implícitamente por quien resuelve la situación. Sin embargo, las situaciones con igualdad de casos favorables, igualdad de casos desfavorables o igualdad de casos posibles, señaladas anteriormente no demandan un razonamiento proporcional porque llevan a que se involucre sólo un pensamiento absoluto y no un relativo.

En las expresiones i, ii, iii y iv (véase el Cuadro 1), con base en los argumentos que se expusieron en el documento, existen fundamentos matemáticos que llevan a que la comparación por diferencia sea una estrategia correcta en situaciones con una variable como es la igualdad de casos favorables, desfavorables o posibles. No así cuando se trabaja con situaciones donde existe diferencia entre el número de casos favorables, desfavorables y posibles con o sin proporcionalidad. En las expresiones v, vi, vii y viii expuestas en el Cuadro 1, cuando se comparan los elementos totales de un conjunto con los elementos totales de otro conjunto, es necesario tener presente que aunque se muestren evidencias numéricas que denoten la diferencia

entre estos elementos, este tipo de comparación no es una estrategia conveniente para realizar elecciones, debido a que las elecciones pueden ser correctas sólo por el diseño de la situación, donde se podría contemplar que la mayor probabilidad estaría determinada por el conjunto que presente mayor o menor número de casos posibles o conjuntos cuyo número de casos posibles sea igual. Algo parecido ocurre con las últimas ocho expresiones xiii, xiv, xv, xvi, xvii, xviii, xix y xx, que corresponden a comparar los casos favorables o desfavorables con los posibles.

Realizar elecciones correctas con base en la comparación por diferencia puede llevar a que los alumnos construyan intuiciones correctas (para determinadas situaciones) basadas en un pensamiento absoluto. Sin embargo, al ser extrapoladas a otras situaciones podrían ya no ser funcionales, corriendo el riesgo de convertirse en un obstáculo para resolver la situación de manera adecuada. Por lo que en ese momento sería conveniente replantear las situaciones para que contradigan a esas intuiciones primarias y con esto se modifiquen o se construyan otras intuiciones, que favorezcan un pensamiento relativo para afrontar las nuevas tareas.

Referencias

Aguas, M. (2014). *Situaciones de probabilidad clásica y el modelo de urna como medios para favorecer el desarrollo simultáneo de los razonamientos proporcional y probabilístico*. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México, 2014.

Alarcón, J.; Bonilla, E.; Nava, R.; Rojano, T. y Quintero, R. (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria.* México: SEP.

Alatorre, S. (1994). *Respuestas intuitivas de adultos a problemas de probabilidad. Algunas aportaciones metodológicas.* Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional, México, 1994.

Falk, R. (1980). Comportamientos de elección en situaciones de probabilidad. *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics.* Vol. II. University of Sheffield 9-13 August 1982.

Fischbein, E (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Green, D. R. (1988). Children's understanding of randomness: Report of a survey of 1600 children aged 7-11 years. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. Victoria, B. C.: University of Victoria.

Hoemann, Harry W. y Roos, Bruce M. (1971). Children's understanding of probability concepts. *Child Development,* 42, 221-236.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. En Lester, F. K. (Ed). *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(1), pp. 41-61. USA: NCTM.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). *Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial.* Educação Matemática Pesquisa, 12 (3). [Recuperado el 15/01/13 de: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842]

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En Hiebert, J. y Behr, M. (Eds). *Number Concepts an Operations in the Middle Grades. Research Agenda for Mathematics Education.* Vol. 2. The United States of America: Lawrence Erlbaum Associates.

Özgün-Koca, S. A. (2009). An investigation of proportional reasoning skills of middle school students. En Schimittau, J. (Ed). *Investigations in Mathematics Learning,* 2(1), pp. 26-48. USA: RCML.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2011). *Programas de estudio 2011. Educación Básica. Secundaria.* México: SEP.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Ediciones Morata.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Competencia estadística: metodología *seis sigma* en el proceso de investigación

Jesús **Vilchez** Guizado
Universidad de Huánuco, Perú
jjevilchez17@gmail.com
Julia Ángela **Ramón** Ortiz
Universidad de Huánuco, Perú
angelaramonortiz@gmail.com

Resumen

La presente comunicación tiene como objetivo compartir la implicancia de la inserción de la estadística a la gestión de la calidad, teniendo como herramienta de procesamiento de datos y presentación de resultados mediados por el software estadístico. El proceso metodológico empleado en el estudio fue de investigación-acción participativa, con implementación de aprendizaje interactivo con datos, mediado por el software Minitab centrado en las etapas de la metodología Seis Sigma. La experiencia se realizó con estudiantes de maestría en gestión educativa, asignatura de estadística aplicada a la investigación; en los tópicos abordados durante las clases, centrado en el análisis e interpretación de los datos provenientes de las variables de investigación para la tesis. Los resultados obtenidos reflejan, que los participantes se empoderaron del uso del software estadístico para el tratamiento de datos, mostrando habilidad en la interpretación de los resultados obtenidos, desarrollando y fortaleciendo en forma significativa su competencia estadística.

Palabras clave: pensamiento estadístico, competencia estadística, competencia tecnológica, metodología Seis Sigma, minitab.

Introducción

La estadística es inseparable de sus aplicaciones, y su justificación final es su utilidad en la resolución de problemas de la realidad y de la propia estadística. Por otro lado, hay que diferenciar entre conocer y ser capaz de aplicar un conocimiento. La habilidad para aplicar los conocimientos estadísticos es frecuentemente mucho más difícil de lo que se supone, porque requiere no sólo conocimientos técnicos (tales como elaborar un gráfico o calcular un promedio), sino también conocimientos estratégicos (saber cuándo hay que usar un concepto o gráfico dado). En la mayoría de los casos, los problemas y ejercicios que se tratan durante el estudio de la estadística son conocimientos técnicos, mientras que los proyectos incluyen también conocimientos estratégicos, y aumentan la motivación del estudiante (Anderson y Loynes, 1987).

El aprendizaje de la estadística siempre está ligado al contexto de los datos y a la atención de los requerimientos para la toma de las decisiones basadas en información confiable y de

calidad. La estadística muestra su importancia en el estudio de datos cualitativos y cuantitativos provenientes de variables educativas y de gestión, que son abordados por los investigadores y especialistas que cuentan con formación estadística. Por ello, esta comunicación se presenta, como parte de un estudio de caso sobre aprendizaje y evaluación del uso de técnicas estadísticas orientadas al estudio de la calidad, basado en distintos datos, el uso del conocimiento estadístico y el desempeño del estudiante de maestría en el manejo de datos y producción de información. Se muestra que el contexto es significativo para el aprendizaje y aplicación de la Estadística.

El potencial de las nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje es uno de los retos actuales con que cuenta la educación matemática y más precisamente la educación estadística; con estas nuevas herramientas tecnológicas se vislumbran los beneficios que ofrecen las calculadoras, computadoras, software, internet, entre otras debido a que permiten un almacenamiento, procesamiento y transmisión de información (Hitt, 2009). Actualmente, la información se constituye en insumo fundamental para el desarrollo de la sociedad, teniendo como sustento el proceso de tratamiento, procesamiento y análisis adecuado de datos, que conducen a la obtención de resultados y a la toma de decisiones basadas en evidencias aunado a una complejidad conceptual que involucra a los procesos relacionados con el pensamiento estadístico, a través de la determinación de variables, la obtención de datos y el análisis de los mismos utilizando herramientas estadísticas, con el uso pertinente de recursos tecnológicos que permiten realizar cálculos y representaciones gráficas de fácil interpretación.

En los estudiantes de posgrado se percibe ausencia del uso de técnicas estadísticas en la realización de trabajos referidos a la gestión de calidad y la investigación, pues, no realizan un análisis apropiado a la información disponible y utilizan inapropiadamente la estadística. Por ello, el presente trabajo está orientado en determinar la importancia que tiene para los estudiantes de posgrado el desarrollo de competencias estadísticas en procesos de calidad mediante el uso de herramientas tecnológicas, y responder la siguiente pregunta: ¿Qué impacto tiene la implementación de la metodología *seis sigma* mediado por el *minitab* en el desarrollo de competencias estadísticas en estudiantes de la maestría en gestión de la educación en el proceso de ejecución de su proyecto de tesis? En respuesta a la interrogante, el estudiante de posgrado debe estar capacitado para usar correctamente el lenguaje estadístico y tener habilidades para construir argumentos estadísticos basados en datos, y que tengan una actitud positiva sobre la utilidad de la estadística, su trascendencia y su alcance, a través de la aplicación de recursos tecnológicos para el procesamiento de datos y producción de información en la ejecución de la tesis.

Marco de referencia

La estadística es la herramienta principal para el estudio de los datos y la producción de información, busca explicar las correlaciones y dependencias de un fenómeno físico o natural, de ocurrencia en forma aleatoria o condicional. Actualmente, es de uso generalizado en los procesos de gestión y búsqueda de calidad, utilizar recursos tecnológicos para el procesamiento de información de manera novedosa, que facilitan la toma de decisiones y la búsqueda de respuestas apropiadas.

Razonamiento estadístico

El razonamiento estadístico puede ser definido como la manera en la cual las personas razonan con ideas estadísticas y el sentido que le dan a la información estadística, lo cual implica hacer interpretaciones basadas en conjuntos de datos y sus representaciones; conectando un

concepto con otro y combinar ideas sobre datos y el azar; en suma, razonar estadísticamente significa entender y explicar los procesos estadísticos e interpretar completamente los resultados estadísticos (Garfield, 2002). De esta forma, el razonamiento estadístico acerca de trabajos estadísticos en las distintas etapas de la metodología Seis Sigma se basa en la interpretación de los resultados obtenidos a partir de los datos en concordancia con los conceptos estadísticos. Detrás del razonamiento estadístico subyacen la comprensión de ideas estadísticas como: distribución, centralidad, dispersión, correlación, aleatoriedad, muestreo, intervalo de confianza, significancia, confianza, límites de control, etc. (Fernández et al, 2008).

Pensamiento estadístico

Pensamiento estadístico, implica la comprensión del por qué y de cómo se realizan las investigaciones estadísticas. Esto incluye reconocer y comprender el proceso investigativo completo (desde la pregunta de investigación a la recolección de datos, así como la selección de la técnica para analizarlos, probar las suposiciones, etc.), entendiendo cómo se utilizan los modelos para simular los fenómenos aleatorios, a través de producción de datos para estimar las probabilidades, reconocimiento de cómo, cuándo, y por qué los procedimientos deductivos se pueden utilizar, y ser capaz de entender el contexto de un problema para emitir conclusiones y planear investigaciones (Garfield, 2002).

El pensamiento estadístico es importante y necesario para el desarrollo de una cultura estadística e investigativa, pero se torna más importante con el uso de los recursos tecnológicos en el tratamiento de datos. Según Gutiérrez (2009) este pensamiento se desarrolla bajo tres principios: el primer principio está referido a procesos interconectados para enfatizar que los procesos no operan de manera aislada, más bien, interactúan con el resto del sistema; el segundo principio reconoce que los resultados de todos los procesos son variables; y, el tercer principio está referido a reducir la variabilidad hasta lograr el nivel de calidad Seis Sigma. Por ello, el gran reto actual es que las empresas u organizaciones logren profundizar el pensamiento estadístico, ya que le ayudará a conocer la realidad (con variación), pero también le permitirá dirigir más adecuadamente sus esfuerzos de mejora sustentado en datos.

Competencia estadística

La actividad estadística es parte de la formación cultural del individuo, por ello es fundamental el desarrollo de la competencia estadística en los estudiantes. Según Jiménez (2010) la competencia estadística es el proceso mediante el cual se implementan métodos y procedimientos para recolectar, sistematizar y analizar diferentes tipos de datos, así como para comprender y abordar fenómenos probabilísticos y realizar inferencias estadísticas que sirvan como instrumentos de juicio en la toma de decisiones y en la comprensión de los fenómenos económicos, políticos, sociales y del ejercicio profesional. En términos de cobertura, cumplimiento, interpretabilidad, oportunidad, transmisión de datos y metadatos para abordar aspectos del marco de calidad sustentado en actividades estadísticas.

Por ello, poseer competencia estadística, implica utilizar apropiadamente los símbolos estadísticos, comprender los conceptos y herramientas de utilidad, entender y explicar los procesos estadísticos y los resultados estadísticos, reconocer y seleccionar adecuadamente los niveles de precisión y estimadores, tener conciencia de la variedad de interpretaciones posibles de los resultados al procesar los datos para sustentar o rechazar un argumento, reconocer y comprender el proceso estadístico investigativo, completo, saber formular la hipótesis estadística, ser capaz de seleccionar la técnica estadística apropiada para la recolección y

procesamiento de los datos, usar con pertinencia los recursos tecnológicos para el procesamiento, análisis e interpretación de datos, utilizar el contexto de un problema para emitir conclusiones y planear investigaciones.

Competencia tecnológica

Según Freeman, (1993, citado por Castellanos, 2009), las competencias tecnológicas se constituyen como parte del capital intelectual, su valoración constituye un factor clave para determinar el impacto real del aprendizaje tecnológico y se adquiere por cuatro vías excepcionalmente importantes: (1) la educación de numerosos profesionales de la ingeniería; (2) la promoción de una amplia gama de actividades técnicas y científicas en el comercio y la industria; (3) el aprendizaje tecnológico al interior de las empresas productivas y de servicio, asociaciones de investigación, oficinas de patentes, oficinas de redes científicas y técnicas para la innovación; (4) el aprendizaje continuo a través de la integración horizontal de las actividades de investigación y desarrollo, diseño, producción y comercialización, entre otras. Así, actualmente la competencia tecnológica, se plantea como el requisito para generar y gestionar cambios tecnológicos en el trabajo con datos durante el proceso de investigación e innovación, en la búsqueda permanente de la calidad, haciendo uso pertinente de la estadística.

Metodología Seis Sigma

Seis Sigma, es un enfoque de gestión que mide y mejora la calidad, ha llegado a ser un método de referencia para, al mismo tiempo, satisfacer las necesidades de los clientes y lograrlo con niveles próximos a la perfección a partir de los datos, es una metodología de *mejora de procesos*, centrada en la reducción de la variabilidad de los mismos, reforzando y optimizando cada parte de proceso consiguiendo reducir o eliminar los defectos o fallos en la entrega de un producto o servicio al cliente, diferente de otros enfoques ya que también corrige los problemas antes de que se presenten. Más específicamente se trata de un esfuerzo disciplinado para examinar los procesos repetitivos de las empresas u organizaciones.

Minitab

El minitab es un programa de computadora diseñado para ejecutar funciones estadísticas básicas y avanzadas a partir de datos cualitativos y cuantitativos. Es amigable y versátil para el estudio de la estadística descriptiva e inferencial. Facilita el análisis de datos y la construcción de gráficas, tanto para variables cualitativos como cuantitativos, también posibilita relacionar dos o más variables, así como la medición de la calidad de proceso.

Tabla 1

Competencias esperadas en la metodología Seis Sigma.

Sesión	Etapa 6 Sigma	Competencia estadística esperada
02	Medir	-Realiza cálculo de medidas estadísticas descriptivas. -Elabora Diagrama de Pareto, Causa y Efecto. -Asimila métodos de muestreo estadístico. -Mide la capacidad del sistema de medición.
03	Analizar	-Interpreta la correlación y regresión lineal y no lineal. -Realiza pruebas de hipótesis. -Realiza pruebas de análisis de varianza (ANOVA).
04	Mejorar	-Interpreta el análisis de experimentos (DOE). -Determina el diseño factorial -Métodos de superficies de respuesta
		-Elabora cartas y plan de control.

05	Controlar	-Elabora gráficos de control de la media y la varianza.

Fuente: texto de gestión de la calidad de Camisón y otros, 2006.

Metodología de investigación

El presente estudio es de corte cualitativo, utilizando el método de Investigación-Acción participativa, a un nivel descriptivo, exploratorio e interpretativo. Los sujetos de investigación fueron los estudiantes de maestría en gestión de la educación (24 estudiantes) de la universidad de Huánuco (Huánuco-Perú), inscritos en la asignatura de estadística aplicada a la investigación. Para recopilar la información cualitativa, se utilizó las técnicas de observación participante y la entrevista semiestructurada. Mientras que para la recolección de datos cuantitativos, la técnica de la encuesta a través de una prueba de conocimientos.

Durante el proceso investigativo se aplica una entrevista a los sujetos de la investigación, referido al manejo y conocimiento de los conceptos fundamentales de estadística descriptiva e inferencial, la misma que fue reforzada; luego se aplica la lista de cotejo para evaluar el proceso didáctico implementado a través de actividades interactivas y el uso del software *minitab*; tambien se administra una prueba de conocimientos para evaluar el aprendizaje logrado de tópicos desarrollados dentro de las cuatro etapas de la metodología Seis Sigma, sustentado en resultados numéricos y gráficos obtenidos con el *minitab*; finalmente, se administra un cuestionario de satisfacción sobre la experiencia didáctica implementada. Los ítems de los tres instrumentos fueron validados cualitativa y cuantitativamente, previo a su aplicación.

El análisis e interpretación de los resultados se hizo con el software estadístico *minitab*; para los datos categóricos provenientes de la observación participante y el cuestionario de satisfacción, se utilizaron gráficas; y para los resultados de la prueba de conocimientos, estadísticas descriptivas.

Resultados

Los resultados obtenidos de la lista de cotejo**,** referido al logro de competencias estadísticas y tecnológicas durante las actividades interactivas mediadas por el *minitab* en las cuatro etapas de la metodología Seis Sigma, se muestran en la figura 1.

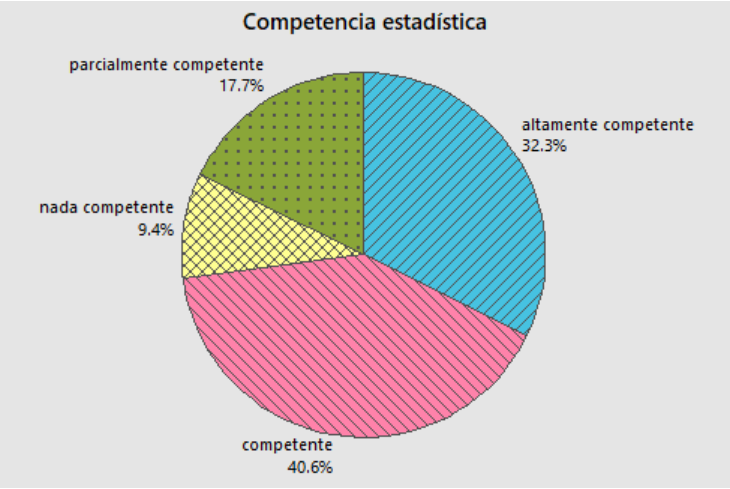


Figura 1: Nivel de competencias estadísticas logradas por los participantes

La lista de cotejo se aplicó, bajo los indicadores: nivel de motivación para el estudio, habilidad para manejo de datos con el *minitab,* obtención e interpretación de los resultados obtenidos y el proceso de comunicación estadística, cuyos resultados mostrados en la figura 1, indican que el desarrollarlo de competencias estadísticas de la mayoría de los participantes fueron aceptables, de acuerdo a los indicadores considerados pare este rubro.

La prueba cognitiva se administró después del desarrollo de cada etapa de la metodología Seis Sigma se tuvo los resultados siguientes: En la etapa *medir* la media del grupo fue de 16,165, con coeficiente de variación de 7,83%, el cual indica un promedio alto y un aprendizaje relativamente homogéneo. En la etapa *analizar* la media del grupo fue de 15,042, con coeficiente de variación de 11,68%, el cual indica un promedio aceptable y un aprendizaje relativamente homogéneo, pero inferior lo obtenido en la etapa medir. En la etapa *mejorar* la media del grupo fue de 13,583, con coeficiente de variación de 16,09%, el cual indica un promedio bajo pero aceptable y un aprendizaje relativamente heterogéneo. En la etapa *controlar* la media del grupo fue de 14,625, con coeficiente de variación de 12,72%, el cual indica un promedio aceptable y un aprendizaje relativamente homogéneo, tabla 2 y figura 2.

Tabla 2

Medidas estadísticas de aprendizajes logrados según etapas de Seis Sigma.

	Media	Desv.Est.	CoefVar	Mínimo	Q1	Q3	Máximo	Rango
Medir	16.125	1.262	7.83	14.000	15.000	17.000	18.000	4.000
Analizar	15.042	1.756	11.68	12.000	13.250	16.750	17.000	5.000
Mejorar	13.583	2.185	16.09	9.000	12.000	15.000	18.000	9.000
Controlar	14.625	1.861	12.72	11.000	13.000	16.000	17.000	6.000

Fuente: prueba administrada al final de cada etapa de la metodología Seis Sigma.

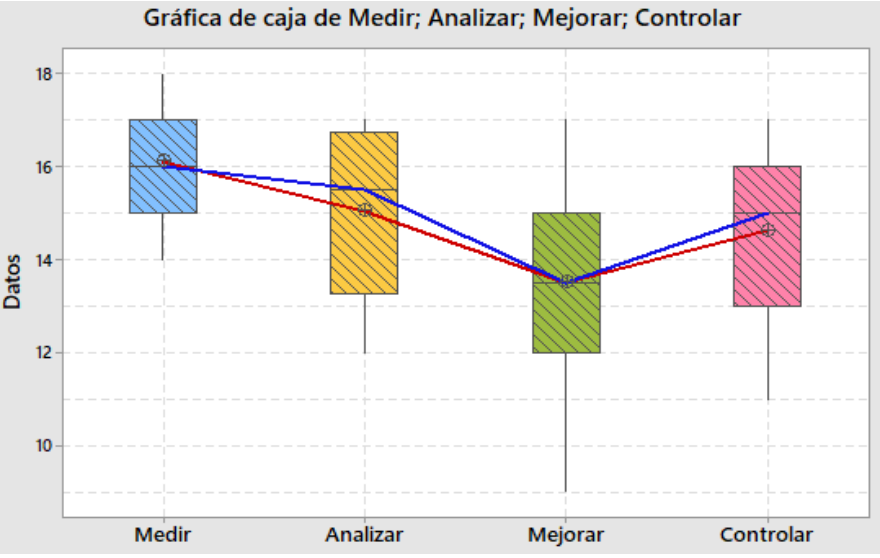


Figura 2. Comparación gráfica de los logros de aprendizaje en las etapas del Seis Sigma.

La obtención de mejores resultados en las etapas de medir y analizar, de la prueba administrada, podría obedecer a que en estas dos etapas se abordan contenidos de la estadística descriptiva e inferencial que es de conocimiento por la mayoría de los participantes; mientras que

en las etapas mejorar y controlar se abordan conceptos y temas nuevos para el participante, y su asimilación conceptual y procedimental requiere de más estudio y tiempo.

Respecto al nivel de satisfacción de las actividades interactivas realizadas y el desarrollo de sus competencias estadísticas más del 73% de los participantes se muestran satisfechos o muy satisfechos con los logros obtenidos en la etapa de medición, mientras más del 80% de los mismos manifiestan estar muy satisfechos o satisfechos, con sus logros en la etapa analizar, siendo mínimo el nivel de insatisfacción con las actividades realizadas, figura 3.

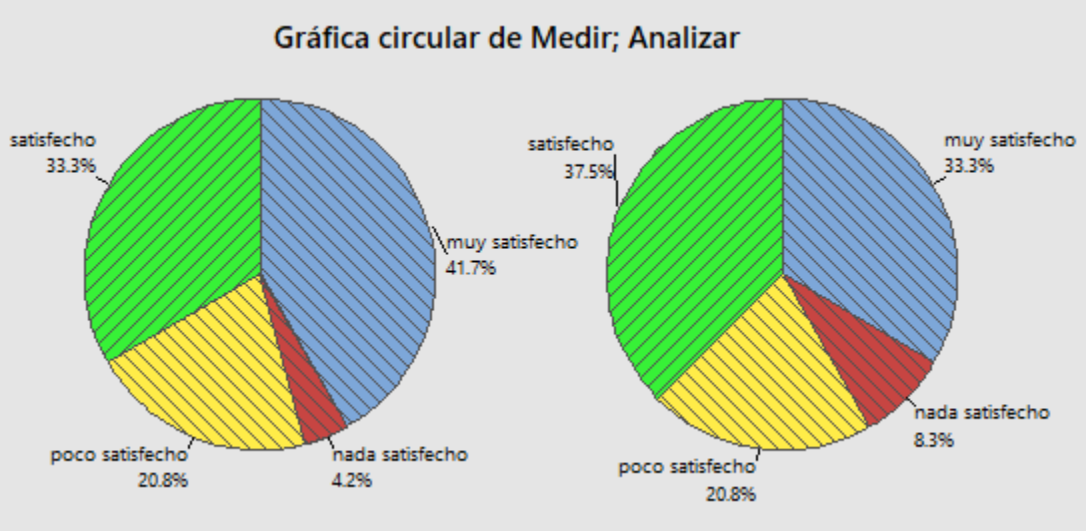


Figura 3. Nivel de satisfacción sobre las actividades realizada en las etapas Medir y Analizar de M6S.

Con respecto a los logros obtenidos etapa mejorar, más del 72% de los participantes se sienten muy satisfechos o satisfechos, mientras con lo desarrollado en la etapa controlar el 79,2% manifiestan estar satisfechos o muy satisfechos, figura 4.

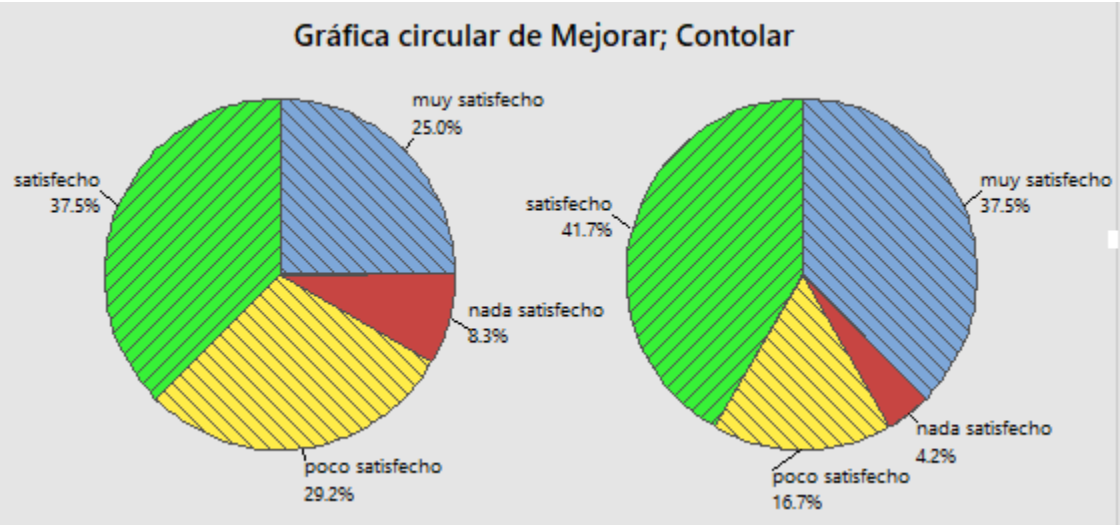


Figura 4. Nivel de satisfacción sobre las actividades realizada en las etapas Mejorar y Controlar de M6S.

En resumen, según los resultados que se muestran en las figuras 3 y 4, las actividades desarrolladas en cuatro etapas de la metodología Seis Sigma, a través de ejercicios interactivos mediado por el *minitab*, tuvieron una aceptación mayoritaria de los estudiantes de la maestría en

educación, pues permiten que el desarrollo de su capacidad de cálculo, análisis en interpretación de resultados de investigación con argumentos estadísticos.

Conclusiones

El desarrollo de la competencia estadística de los estudiantes de posgrado en educación queda fortalecido con el uso de las etapas de metodología Seis Sigma en el trabajo con datos, la misma que repercute en el desarrollo de una cultura estadística y razonamiento estadístico, permitiendo reconocer y comprender el proceso investigativo en su integridad, las mismas que facilitan la emisión de conclusiones valederas y planear nuevas investigaciones.

La aplicación del software estadístico con fines educativos e investigativos fortalece el desarrollo del razonamiento y pensamiento estadístico de los estudiantes de la maestría en gestión educativa, pues permite el logro de aprendizajes significativos, a través de la realización de actividades interactivas y dinámicas; propiciando motivación intrínseca para el aprendizaje de la teoría estadística a través del procesamiento, análisis e interpretación de resultados, acordes a los objetivos de investigación previamente establecidos, desarrollando de manera eficiente su competencia estadística.

Desde los resultados obtenidos, se pudo evidenciar que el software estadístico es un recurso imprescindible para generar escenarios de trabajo con datos provenientes de las variables de investigación, que son ingresados en el programa y procesados para la obtención de resultados numéricos y gráficos, conjugando la teoría y práctica estadística en el proceso de interpretación de los resultados de medición, análisis, mejora y control, valorando la importancia de la estadística en estudios de calidad, dentro de la sociedad plural y tecnológica.

Referencias y bibliografía

Anderson, C. W. y Loynes, R. M. (1987). *The teaching of practical statistics*. New York: Wiley.

Camisón, C. Cruz, S. y Gonzales, T. (2006). *Gestión de la calidad: Conceptos, enfoques, modelos y sistemas. Madrid: Pearson, Prentice Hall.*

Castellanos, O.; Jiménez, C. y Domínguez, K. (2009). Competencias tecnológicas: bases conceptuales para el desarrollo tecnológico en Colombia. Revista ingeniería e investigación VOL. 29 No. 1, Abril de 2009 (133-139)

Fernández, F., Sarmiento, B. y Soler, N. (2008). *Estadística y Probabilidad en la escuela secundaria.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Garfield, J. (2002). The Challenge of Developing Statistical Reasoning. *Journal of Statistics Education 10(3).* Recuperado de http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html, abril 2018.

Gutiérrez, H y De la Vara, R. (2009). *Control estadístico de calidad y seis sigma*. México D.F. McGrawHill Educación.

Hitt, F. y Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelación matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 10(1), 1-30.

Jiménez, M. (2010). *Competencias en matemática y estadística.* Santiago: INACP. Recuperado de https://www.inacap.cl/tportal/portales/tp4964b0e1bk102/ uploadImg/File/competenciasMatematicasEstadistica.pdf

Pfannkuch, M. y Wild, C. (2002). Statistical Thinking Models.The University of Auckland. NewZealand. ICOTS6.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estatística para a leitura de mundo

Irene Mauricio **Cazorla**
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
icazorla@uol.com.br
Eurivalda Ribeiro dos Santos **Santana**
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
eurivalda@hotmail.com

Resumo

Neste artigo analisamos as influências do Ensino de Estatística em cursos de Licenciatura que formam professores para a Educação Básica, utilizando o Ciclo Investigativo – PPDAC e os princípios do letramento estatístico e da Matemática Crítica, visando a formação de professores capazes de ler o mundo. O Ciclo inicia com a formulação de um problema (P), delineia procedimentos (P), coleta (D) e analisa (A) os dados, extraindo conclusões (C), gerando novas perguntas de investigação. Os temas trabalhados são os que afligem a população mundial e que se encontram nos livros didáticos de Ciências e Geografia neste nível de ensino. Para isso, usamos formulários online, gerando banco de dados, que são analisados com o Geogebra e tabelas dinâmicas, minimizando o impacto dos cálculos, focando a compreensão das informações contidas nos dados. Os estudantes tomam consciência do seu papel na formação de cidadãos capazes de se situar e ler o mundo.

Palavras-chave: educação estatística, formação de professores, ciclo investigativo, pensamento estatístico, educação matemática crítica, leitura de mundo.

Introdução

No Brasil, os conteúdos de Estatística na Educação Básica foram oficialmente inseridos há quase 30 anos e ratificados recentemente. Esses conteúdos fazem parte do componente curricular de Matemática, mas é nos outros componentes, especialmente na Geografia, Ciências da Natureza e Ciências Socias, onde são utilizados em contexto. Esses conteúdos também fazem parte dos cursos de Licenciatura que forma os professores da Educação Básica e, embora o Brasil mostre significativos avanços na Educação Estatística, percebemos que ainda a Estatística é ensinada focando o conteúdo matemático sem que essas ferramentas ajudem aos estudantes a compreender o mundo que estão inseridos.

Ensinar Estatística em contexto para leitura de mundo é complexo, pois requer a

compreensão dos fenômenos da natureza e os fatos sociais, visto que não basta saber calcular as estatísticas ou construir tabelas e gráficos, se não se tem a compreensão do contexto em que emergem esses dados. Além disso, também não se pode continuar a ensinar estatística com poucos dados, artificiais, onde tudo dá certo.

Ensinar Estatística visando a leitura de mundo desafia romper com a disciplinaridade, com a neutralidade do conhecimento científico e com a passividade dos estudantes. Com esses pressupostos estamos construindo, testando e aperfeiçoando Sequências de Ensino (Cazorla e Santana, 2010), e incorporamos as ferramentas disponíveis e gratuitas na internet que podem auxiliar na coleta e tratamento dos dados, minimizando a parte trabalhosa da Estatística. Assim, estamos adaptando e construindo novas sequências de ensino, utilizando os Formulários do Google para a coleta e organização dos dados, as tabelas dinâmicas de planilhas eletrônicas para a geração das tabelas simples e de dupla entrada e o Geogebra, para construir o diagrama de pontos e o da caixa, muito útil para a compreensão da distribuição dos dados, as medidas de tendência central, posição e dispersão.

Neste trabalho, analisamos o potencial da Sequência de Ensino "Planeta Água" em duas turmas de Licenciatura uma em Matemática e a outra em Ciências Sociais.

Estatística, o Ensino de Estatística na Educação Básica e nos cursos de Licenciatura

A Estatística é a ciência que disponibiliza ferramentas que permite a coleta, tratamento e análise de dados, extraindo informações que nos permitem tomar decisões em condições de incerteza. Sua importância reside na capacidade de síntese de dados evidenciando relações e padrões, subsidiando a compreensão do fenômeno em estudo.

No Brasil, a inserção dos seus conteúdos no Ensino Fundamental foi oficializada com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, no componente curricular Matemática, como um dos quatro blocos, denominado de "Tratamento da Informação". No Ensino Médio é um dos três eixos, denominado "Análise de dados". Essa inserção foi ratificada nas orientações da Base Nacional Curricular Comum – BNCC (Brasil, 2017). A finalidade é que os estudantes aprendam a coletar, organizar e comunicar dados; resumir os dados em tabelas, gráficos e medidas de tendência central e dispersão, esperando-se que os estudantes possam ir além da leitura de informações e pensem criticamente sobre seu significado.

Nessas orientações, o ensino dos conteúdos Estatística é de responsabilidade dos professores de Matemática; já nos outros componentes curriculares, em especial em Geografia, Sociologia, Ciências e Biologia, há uma forte recomendação de seu uso, não apenas para a leitura e compreensão dos dados, mas também para o seu uso em contexto, incentivando a coleta e tratamento dos dados nas suas respectivas áreas de conhecimento.

No ensino superior, a Estatística está presente em quase todos os cursos de graduação que formam os professores da Educação Básica, que são os cursos de Licenciatura, sendo que a de Matemática teria a responsabilidade de formar o professor de Matemática para seu ensino na Educação Básica, nas Licenciaturas de Ciências Humanas, para a compreensão dos fatos sociais e, as de Ciências da Natureza para a compreensão dos fenômenos da natureza.

Viali (2010) analisou as disciplinas de Estatística na estrutura curricular de 125 dos 564 cursos de Licenciatura em Matemática, no Brasil em 2017, para verificar se os futuros professores estavam adquirindo um conhecimento mínimo para atender as orientações dos PCN na Educação Básica. Seu estudo mostra que a maioria dos cursos só tem uma disciplina de 60 ou 75 horas ou no máximo duas; onde o futuro professor é exposto a uma abordagem essencialmente algorítmica e com exemplos muito distantes de seus interesses, com pouca ou

nenhuma relação com o que vai ensinar no futuro. Esses cursos costumam apresentar metodologia ultrapassada baseada em Estatística como um curso de Matemática e não uma abordagem metodológica que apresente o estocástico como recurso para análise empírica e teste de modelos, que serve de suporte à todas as ciências. Também, constata que não existem diretrizes para a abordagem didática da Estatística.

Paradoxalmente, o ensino de Estatística nos cursos de Licenciatura em Ciências Humanas, notadamente Geografia e Sociologia, que trabalham e debatem os grandes problemas da sociedade, os estudantes tem pouca familiaridade com o ferramental matemático subjacente aos procedimentos estatísticos que seu ensino se torna um pesadelo para o professor e para os estudantes. Em geral, a reprovação nestes cursos é alta e muitos estudantes criam aversão à disciplina. Isto é menos grave nas licenciaturas ligadas às Ciências da Natureza.

Pensamento e letramento estatístico, ciclo investigativo e Educação Matemática Crítica

Para Gal (2002) podemos ensinar Estatística, para além do contexto de leitura de dados, focando também o contexto da produção, promovendo o desenvolvimento do pensamento estatístico, que está fortemente atrelado à compreensão da tomada de decisão, em condições de incerteza nas diversas fases do Ciclo Investigativo – PPDAC (Wild e Pfannkuch, 1999).

Entendemos por pensamento estatístico como a capacidade de utilizar a Estatística na compreensão do fenômeno ou questão de investigação, onde a variabilidade e a aleatoriedade são onipresentes, na necessidade de gerar e tratar dados, e a tomada de decisões, baseados nas informações geradas nesse levantamento.

Isto é possível, pois o método estatístico não se resume apenas ao tratamento de dados, mas ao contrário, inicia com a compreensão do fenômeno em estudo, as relações imbricadas entre os fatores que o condicionam, passando pela definição do problema, planejamento, coleta, organização, processamento e análise de dados, para diante das novas evidências, gerar novas questões de investigação.

Wild e Pfannkuch (1999) sistematizaram as etapas do método estatístico e propuseram o Ciclo Investigativo PPDAC, que é constituído por cinco fases: Problema (P), que diz respeito ao conhecimento do contexto dos dados, definição do problema a ser investigado; Planejamento (P), que inclui a definição das ações para a investigação; Dados (D), que inclui o processo de coleta de dados; Análise (A) que diz respeito ao tratamento e análise dos dados e a Conclusão (C), que encerra a investigação com um posicionamento crítico, reflexivo, com a comunicação dos dados e geração de novas ideias, novos questionamentos.

Para Gal (2002) é preciso desenvolver o letramento estatístico para a leitura de mundo. O letramento estatístico vai além do domínio dos procedimentos estatísticos, é a competência do cidadão para discutir ou comunicar sua compreensão a respeito das informações, emitir opiniões sobre suas implicações e tecer considerações sobre as conclusões elaboradas. Este autor propõe um modelo formado por dois componentes: o cognitivo e o atitudinal. O componente cognitivo é composto de cinco elementos: letramento, conhecimento estatístico, conhecimento matemático, conhecimento de contexto e capacidade de formular questões críticas; e, o atitudinal, é composto de dois elementos: postura crítica, crenças e atitudes.

Mas, o que significa formular questões críticas e postura crítica. A capacidade de elaborar questões críticas diz respeito a capacidade do estudante questionar se aquele procedimento utilizado é adequado ou se poderia ter sido utilizado um outro, como por exemplo, em uma negociação salarial utilizar a média ou a mediana dos salários; ou ao invés de utilizar os valores absolutos, utilizar os valores em porcentagem, ou ainda utilizar um gráfico ao invés de uma

tabela (Cazorla & Castro, 2008).

A postura crítica diz respeito a capacidade de se posicionar diante dos resultados da investigação. O cidadão precisa saber que toda pesquisa estatística tem um lado científico, comercial ou político. Precisa saber que as pesquisas e as informações veiculadas respondem aos interesses dos que o financiaram e, portanto, não são neutras, há uma intenção, a de formar opinião, vender produtos ou promover políticos (Crossen, 1996). O cidadão também tem que tomar consciência de suas crenças e atitudes e que essas moldarão sua forma de ver o mundo.

Nesse contexto, ensinar Estatística que permita o cidadão a leitura de mundo, a promoção do pensamento estatístico e do letramento estatístico não é suficiente, é preciso pensar em um ensino para a justiça social e equidade (Gutstein, 2003).

Nesse sentido recorremos as premissas postuladas pela Educação Matemática Crítica, quanto ao papel sociopolítico, a competência matemática para agir democraticamente e a dinamização das potencialidades do sujeito (Bennemann & Allevato, 2012), a fim de empoderar os estudantes com conhecimento, habilidades e disposição necessários para criar comunidades democráticas abraçando a justiça social (Aslan-Tutak, Bondy & Adams, 2011).

Assim, com o desafio de ensinar Estatística para a promoção do pensamento estatístico, o letramento estatístico e a Matemática Crítica desenvolvemos sequências de ensino possibilite ensinar para o empoderamento da Matemática na leitura de mundo.

Percurso metodológico

Participaram da pesquisa duas turmas, uma do curso de Licenciatura em Matemática com 30 estudantes e outra do curso de Ciências Sociais com 37 estudantes. Os de Matemática estavam cursando a disciplina "Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio" e os de Ciências Sociais "Estatística aplicada às Ciências Socias II". Alguns estudantes de Matemática já haviam cursado uma disciplina Estatística, outros não. Os estudantes de Ciências Sociais já haviam cursado Estatística Descritiva e Amostragem. Nessas disciplinas os estudantes realizaram as aulas em salas comuns sem acesso ao computador e nem à softwares para tratamento de dados.

Para este estudo as aulas foram desenvolvidas em um laboratório de Informática com 50 computadores, com acesso à internet e Datashow. Nos computadores estavam disponíveis o Geogebra, a Planilha EXCEL e acesso ao Formulário do Google.

A Sequência de Ensino "Planeta água" foi adaptada de Nagamine, Silva & e Santana (2010) e foi desenvolvida em dois momentos, papel e lápis e ambiente virtual. Esta escolha metodológica tem como objetivo que os estudantes "sintam os dados" e saibam quão trabalhoso é organizar e tratar todos os dados de uma pesquisa. Para isso, solicitamos aos estudantes que trouxessem a conta de água de sua residência, contendo 12 meses.

No ambiente lápis e papel os estudantes preencheram o instrumento que tem duas partes. A primeira intitulada "Quão consciente você é do consumo de água" composta por uma escala de Likert de 3 pontos com 4 itens (Anexo A), sendo que hábitos de desperdício água tem 0 pontos, hábitos de economia 2 pontos e, para um hábito intermediário, 1 ponto. Isto é, os itens da escala são variáveis ordinais que transformamos em números. A pontuação na escala é resultado da soma dos pontos nos itens, que varia de 0 a 8 pontos; e com base nessa pontuação criamos níveis de consciência: Pouco consciente (0 a 2 pontos), medianamente consciente (De 3 a 5 pontos) e consciente (De 6 a 8 pontos). Isto é, ao somar geramos uma variável discreta e ao recategorizar, uma variável ordinal. A segunda parte coletava os dados do consumo mensal, número de pessoas que moram na residência e o tipo de residência (casa ou apartamento, com ou sem hidrómetro

individual) e solicitava que calculassem a média e mediana, o desvio padrão e o coeficiente de variação do consumo mensal; o consumo per capita diário e a construção do gráfico de barras e, por fim, se solicitava que interpretassem o seu consumo individual e depois comparando com o consumo de outros três colegas.

No ambiente virtual, foi realizado no Laboratório de Informática, os estudantes preencheram com seus dados no formulário online do Google, que era um espelho do instrumento em papel. Assim que terminaram de preencher o formulário, o Formulário do Google gera um banco de dados na planilha EXCEL, que disponibilizamos a todos os estudantes. Foi solicitado que calculassem e gerassem um relatório com as estatísticas por estudante e por mês. Para a construção do diagrama de pontos (dotplot) e do diagrama da caixa (boxplot) demos instruções para a utilização do Geogebra.

Além disso, foi solicitado aos estudantes que pesquisassem a situação da água no contexto mundial, brasileiro e da região em que residem; a água na produção de alimentos, no corpo humano, dentre outros aspectos relevantes, que deveriam ser apresentados em slides, para todos os estudantes.

Principais resultados

Iniciamos a SE Planeta Água com a pergunta "Quão consciente você é do consumo de água?", "o que é consciência?" e "como podemos medir a consciência?". Os estudantes responderam sobre hábitos contra o desperdício: "Não lavar a calçada", "Reutilizar a água da máquina de lavar roupa" etc. Alguns estudantes que moram nas periferias da cidade, em especial nos morros, onde mesmo em condições de normalidade a água é racionada, relataram as dificuldades das famílias nessa condição.

Essa problemática estava muito presente no imaginário dos estudantes, pois a região sofreu dois anos seguidos com a escassez de água, fruto de uma longa estiagem no nordeste brasileiro. Os estudantes lembraram episódios da água salobra que tomou conta da água potável, sabiam que a água da cidade vem de outra bacia geográfica e que com a baixa vazão dos rios, a água do mar invadiu os rios. Essas respostas sinalizaram que os estudantes tinham conhecimento da problemática.

Refletimos com os estudantes sobre a distribuição de água na cidade, onde o centro e bairros mais nobres estão mais perto da central de distribuição de água, sendo os primeiros a serem abastecidos e, mesmo em períodos de escassez quase não sofrem, pois, a maioria das residências possuem reservatório e possuem sistema de bombeamento. Se esses moradores economizassem água implicaria em ter mais água para as periferias. Um dos estudantes fez o seguinte comentário: "Eu nunca tinha parado para pensar nisso, nunca poderia imaginar que se eu economizasse água, poderia estar beneficiando alguém dos bairros mais pobres".

Com essa reflexão retomamos a pergunta "O que é consciência do uso da água?" e "Como poderíamos medi-la?". Percebemos, que a maioria dos estudantes, não estavam entendendo o que estávamos pretendendo com a pergunta. Então, perguntamos: o que é a altura de uma pessoa e como medimos essa altura? A resposta foi uníssona "é o tamanho da pessoa e medimos com fita métrica". Perguntamos: qual é a diferença entre a altura da pessoa e a consciência e, assim, perceberam que enquanto a primeira a definição era única e que havia um instrumento de medida, a segunda dependia do entendimento da pessoa e não havia um único instrumento para medi-la.

Nesse contexto, apresentamos e discutimos o que é uma variável conceitual (Cazorla, Silva & Santana, 2018) e como podemos medi-la. Discutimos sobre a construção de escalas para medir

as variáveis conceituais e apresentamos a escala do "Planeta água".

Na segunda parte trabalhamos as variáveis empíricas: tipo de imóvel (nominal), quantas pessoas moram na residência (discreta genuína) e o consumo mensal (em m^3), que embora seja contínua é registrada em números inteiros. Discutimos com os estudantes a natureza das variáveis e seu tratamento. Usando a calculadora disponível em seus celulares, eles calcularam o consumo médio mensal, a mediana, o desvio padrão e o coeficiente de variação e *per capita* diário em litros.

Na variável "Tipo de imóvel" classificamos morar em casa ou em apartamento (prédio), com ou sem hidrômetro individual. Refletimos sobre a conta de água do condomínio ser dividida em partes iguais pelo número de condôminos, isto é, pela média e perguntamos aos estudantes se eles achavam isso justo. A maioria achou injusto: "Se há uma família com dois moradores e outra com seis, as duas vão pagar o mesmo valor, e isso é injusto" (Estudante D); "Todos em casa trabalhamos e comemos fora, só vamos para casa para dormir, é injusto pois tem outras famílias que ficam a maior parte do tempo em casa" (Estudante H), essa reflexão foi rebatida por outro estudante "Isso significa que vocês estão consumindo água em outros lugares, onde vocês não pagam a conta, então elas por elas" (Estudante T). Outro estudante ponderou "Na nossa realidade tem casas que tem "gato[1]"(Estudante P), ou não tem acesso à água encanada, principalmente nos bairros mais pobres e periféricos" (Estudante R), outro estudante ponderou "Quando a família tem um consumo abaixo do mínimo ele tem uma taxa fixa e o estudante pode não querer mostrar sua conta para não ser rotulado de pobre" (Estudante M).

Essas falas trazem indícios que os estudantes tinham conhecimento da realidade social, então, lançamos a seguinte questão: "Como futuros professores abordariam essa situação em sala de aula sem causar constrangimento e evitar o Bullyng[2]?". Os estudantes ficaram um pouco perplexos, mas alguns que atuam como professores, relataram situações de sala indicando que é preciso sair da "posição de ser apenas professor de Matemática" e "dar aula de cidadania".

No cálculo do consumo per capita alguns estudantes dividiram o consumo médio mensal da família por 30 (dias por mês) e pelo número de pessoas e multiplicaram por 1000 para converter m^3 em litros. Uma estudante dividiu o consumo anual por 365 dias e pelo número de pessoas e multiplicou por 1000, e perguntou qual das duas formas era a correta. A maioria dos estudantes concordou que essa forma de cálculo era exata e a outra aproximada, pois dividia por 360 dias (12x30). Solicitamos que cada um calculasse da forma que achava certo e que depois iriamos conferir no ambiente computacional.

Para construir o gráfico de barras disponibilizamos o arcabouço, precisava calibrar a escala. Solicitamos a todos os alunos que falassem qual era o mínimo e o máximo valor de suas contas. Um estudante tinha 30 m^3, que é alto para a realidade da região, mas como queríamos que os estudantes comparassem seus resultados, foi decidido que a turma inteira utilizasse esse valor. Essa escolha teve um impacto nos gráficos, pois a maioria dos estudantes tinha consumo abaixo de 10 m^3, a maioria dos gráficos ficaram em um terço do espaço destinado aos mesmos.

Na interpretação dos resultados, uma estudante manifestou sua insatisfação, pois para ela seu nível de consciência era alto e pela escala ela foi categorizada como "medianamente consciente", foi ela quem questionou a escala, já que utiliza a água da máquina de lavar roupa para lavar a área de serviço, além de outros hábitos conscientes. A maioria dos estudantes comparou o consumo per capita com o recomendado pela ONU que é 110 litros/por pessoa/dia e

[1] Ligação clandestina ao sistema da rede de água

[2] Bullyng se refere a agressões físicas ou psicológicas, intencionais e repetidas, praticadas por uma pessoa ou um grupo contra uma vítima que tem menos condições de se defender, em uma relação desigual de forças.

como estavam abaixo, ficaram tranquilos. Outros fizeram reflexões sobre as causas que explicariam o fato de que alguns meses o consumo foi mais alto, tentado compreender para evitar que isso se repita no futuro, vejamos algumas respostas.

O Estudante A toma consciência sobre o consumo de água, indicando a sua displicência e pouca preocupação a respeito com o problema da água que se agrava no mundo (Figura 1). Na perspectiva do Letramento com Gal (2002) esse é um despertar da postura crítica e um repensar de suas atitudes.

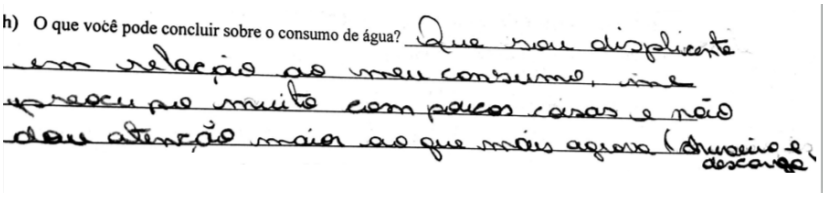


Figura 1 - Reflexão do Estudante A sobre a tomada de consciência.

O Estudante B só toma consciência quando realiza a atividade proposta com o PPDAC e quando compara seu consumo com os dos colegas, conforme Figura 2.

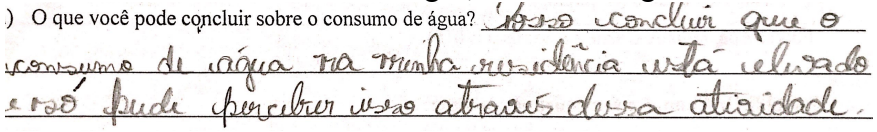


Figura 2 - Reflexão do Estudante B sobre o papel do PPDAC.

No ambiente computacional, os estudantes ingressaram seus dados e puderam acompanhar online a formação do banco de dados. A planilha com os dados de todos os estudantes foi disponibilizada, e o próprio Formulário Google gera os gráficos para as variáveis qualitativas. A limitação desse software é o tratamento das variáveis quantitativas, que as trata como qualitativas. Assim exportamos a planilha para o Excel e disponibilizamos para todos os estudantes.

Os estudantes revisaram seus dados e seus cálculos das medidas estavam corretos. Alguns verificaram os erros e concertaram e todos recalcularam a média, mediana, desvio padrão e coeficiente de variação, para todos os estudantes da turma, apenas arrastando os comandos. Todos ficaram impressionados com a facilidade do tratamento dos dados.

O uso do Geogebra utilizado para construir o diagrama de pontos (dotplot) e o diagrama da caixa (boxplot).de quatro estudantes permitiu a compreensão do conceito de variação, do significado do desvio padrão e do coeficiente de variação.

Para concluir a SE Planeta Água, os estudantes divididos em grupos de três fizeram uma pesquisa na internet com a problemática da escassez da água no contexto mundial (África, Oriente Médio e na Califórnia, USA); no contexto brasileiro (Amazônia; Nordeste brasileiro e São Paulo); e na Região explorando os impactos ambientais da barragem recém construída para amenizar o problema da escassez de água da região. Outros temas: a quantidade de água se gasta para produzir um alimento; a água no corpo humano; a poluição das águas; o uso da água nas indústrias. Os grupos levantaram dados na internet e apresentaram na aula, utilizando slides no PowerPoint. Esta atividade tinha como objetivo mostrar aos estudantes que o problema não é local, nem individual, mas diz respeito ao desenvolvimento de uma consciência civilizatória, vejamos alguns depoimentos dos estudantes.

- Estudante C: “Com essa atividade foi possível ver o problema da água no mundo e compreender como e onde a água potável é gasta”.

- Estudante F: "Nessa atividade aprendi coisas que nem imaginava. Além de fazer os cálculos, pude ver como os conceitos estatísticos e matemáticos estão em diferentes contextos. O trabalho com a água nos proporcionou pensar sobre o consumo da água, o problema da escassez da água no mundo".

Considerações finais

Esses resultados trazem indícios das influências promissoras do ensino da Estatística na perspectiva do PPDAC, do letramento e pensamento estatístico e da Matemática Crítica para a aprendizagem de conceitos estatísticos.

O uso combinado do ambiente papel e lápis e o virtual possibilitou aos estudantes perceber como a parte mais trabalhosa do tratamento dos dados pode ser minimizada, potencializando diversas comparações e assim ter uma visão holística dos dados, compreender a natureza dos dados e os dados de seus colegas, que ao socializar suas conclusões passam a ter padrões de referência.

A escolha da problemática conectada com o conhecimento do contexto do estudante o atinge e o motiva, desafiando-o a refletir sobre dados oriundos de sua realidade; engajando-o numa visão de mundo global; despertando uma consciência crítica, pois o leva a refletir sobre a sua postura e atitudes diante da problemática exposta. Assim neste contexto as estatísticas passam a ser ferramentas úteis que lhe permitem se situar nesse contexto, que não é apenas local e individual, mas global e comunitário, tomando consciência de como a Estatística é uma ferramenta poderosa para a busca da justiça social, para a equidade.

Por fim, temos consciência das limitações de reprodução desta SE na escola pública onde não se tem condições computacionais, mas formar os futuros professores nessa perspectiva poderá contribuir na formação de pessoas mais humanas, mas solidárias.

Referências

Aslan-Tutak, F., Bondy, E. e L. Adams, T. (2011). Critical pedagogy for critical mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 42. 65-74.

Bennemann, M. & Allevato, N. S. G. (2012). Educação Matemática Crítica. Rev. Prod. Disc. Educ. Mat., São Paulo, v1, n.1, pp.103-112.

Brasil (2017). *Base Nacional Comum da Educação.* Brasília: MEC (3ª versão).

Cazorla, I. M. & Castro, F. C. (2008). O papel da Estatística na leitura do mundo: o letramento estatístico. Publicatio UEPG. Ciências Humanas, Ciências Sociais Aplicadas, Linguística, Letras e Artes, v. 16, p. 45-53.

Cazorla, I. M. & Santana, E. (Orgs.) (2010). Do tratamento da informação ao letramento estatístico. Itabuna: Via Litterarum.

Cazorla, I. M. & Silva, A. V. Jr. & Santana, E. (2018). Reflexões sobre o ensino de variáveis conceituais na Educação Básica. *REnCiMa*, v.9, n.2, p.354-373.

Crossen, C. (1996). *O Fundo falso das pesquisas: a ciência das verdades torcidas*. Rio de Janeiro: Ed. Revan.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. In: *International Statistical Review.* Israel, 2002. p. 1-25.

Gutstein, E. (2003). Teaching and Learning Mathematics for Social Justice in an Urban, Latino School. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 34, No. 1 (Jan.).

Nagamine, C. M. L, Silva, C. B. & Santana, E. (2010). Planeta água. In Cazorla, I. M.; Santana, E. (Orgs.). *Do tratamento da informação ao letramento estatístico*. Itabuna: Via Litterarum, p. 45-79.

Viali, L. (2010). The teaching of statistics and probability in mathematics undergraduate courses. In Reading (Ed.), Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics, Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: *International Statistical Institute*.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. In: *International Statistical Review*, v. 67, n. 3, p. 223-265.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O problema da amostragem no contexto da Educação Estatística Crítica

Celso Ribeiro **Campos**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
crcampos@pucsp.br
Cileda Queiroz e Silva **Coutinho**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
cileda@pucsp.br

Resumo

Este artigo é concebido no contexto do universo das pesquisas eleitorais. Nosso objetivo é investigar o processo de amostragem de um instituto de pesquisa e discutir seus conceitos no âmbito da Teoria da Amostragem. Na linha da Educação Estatística Crítica e do letramento estatístico, vamos complementar esta investigação com uma proposta de atividade pedagógica acerca do tema de amostragem, fazendo uso da estratégia didática da modelagem matemática. Investigamos uma pesquisa do instituto IBOPE, um dos maiores do Brasil. Constatamos alguns problemas metodológicos: equívoco na informação da margem de erro; estágio não probabilístico (amostragem por quotas); e falta de informação sobre os não respondentes. A atividade pedagógica sugerida contém uma pesquisa a ser feita pelos alunos e um debate sobre a problemática da metodologia e sobre os aspectos políticos das eleições presidenciais.

Palavras chave: metodologia de pesquisa, letramento estatístico, educação estatística crítica, modelagem matemática, eleição presidencial.

Introdução

O período eleitoral no Brasil é costumeiramente uma época de debates, de apresentação de propostas de melhorias para o país, de discussões ideológicas e de, principalmente, acusações, disputas e animosidades entre os políticos e entre os eleitores. O que deveria ser um momento profícuo para discussão de ideias passa a ser palco para veiculação de notícias falsas, de acusações sem provas e até, como no caso recente da eleição presidencial de 2018 no Brasil, tentativa de homicídio de um dos candidatos ao cargo maior da nação.

Outro item que parece ser um combustível para essa fogueira eleitoral são as pesquisas de intenção de voto, que na reta final das eleições protagonizam intensas discussões, definem estratégias e encaminham acordos para um hipotético segundo turno das eleições.

As pesquisas são igualmente objetos de acaloradas discussões e acusações de viesamento ou falseamento de resultados. Na medida em que um candidato se vê desfavorecido no resultado de uma pesquisa, parece ser mais fácil culpar o agente pesquisador do que refletir sobre seu comportamento e/ou suas estratégias.

É nesse contexto que concebemos este artigo, ou seja, o universo das pesquisas eleitorais. Nosso objetivo é investigar o processo de amostragem de um grande instituto brasileiro de pesquisas e discutir seus conceitos e metodologia no âmbito da Teoria da Amostragem.

Na linha da Educação Estatística Crítica e do letramento estatístico, entendemos que esta investigação poderá compor um material profícuo para o trabalho em sala de aula, na medida em que vamos complementar o trabalho com uma proposta de atividade didática acerca do tema de amostragem, fazendo uso da estratégia pedagógica da modelagem matemática.

Quadro teórico estatístico

Segundo Witte & Witte (2005, p. 154), "Qualquer conjunto completo de observações (ou potenciais observações) pode ser caracterizado como uma população". Qualquer subconjunto de observações obtidas com base em uma população pode ser caracterizado como amostra.

> Em aplicações típicas da estatística inferencial, o tamanho da amostra é pequeno em relação ao tamanho da população. Menos de 1% de todos os domicílios dos EUA estão incluídos na pesquisa mensal do *Bureau of Labor Statistics* para estimar a taxa atual de desemprego. Embora cerca de 4.000 eleitores, no máximo, tenham sido selecionados em uma pesquisa eleitoral para candidatura à presidência da república, recentemente realizada pelo Gallup, as previsões têm se mostrado supreendentemente precisas [...] (WITTE & WITTE, 2005, p. 155).

Existem várias técnicas de amostragem, que podem ser classificadas em probabilísticas e não probabilísticas. Para que seja possível utilizar técnicas da estatística inferencial para a análise dos resultados de uma pesquisa, é necessário que a amostragem seja probabilística. Entre as diversas modalidades de amostragem probabilística, vamos destacar quatro: a amostragem aleatória simples (AAS), a amostragem estratificada, a amostragem por conglomerados e a amostragem sistemática.

Witte & Witte (op. cit.) destacam que "uma amostra é aleatória se, em cada estágio da amostragem, o processo de seleção garantir que todas as observações remanescentes na população possuem iguais chances de virem a ser incluídas na amostra".

Quando a população é dividida em grupos (subpopulações), que em relação ao objeto pesquisado têm comportamento homogêneo dentro de si e heterogêneo entre os grupos, então é recomendável que a amostragem seja feita por meio de um critério de estratificação. As subpopulações representam os extratos, que devem ser quantificados como proporções da população. A amostra deve ter representantes de todos os estratos, na mesma proporção em que eles ocorrem na população. A seleção dos elementos dentro de cada estrato deve ser aleatória.

Embora alguns países desenvolvidos adotem a AAS para suas pesquisas de intenção de voto, no Brasil predomina a estratificação devido à grande desigualdade social da população. Os estratos comumente utilizados nas pesquisas de intenção de voto são: gênero, idade, nível de instrução, renda e região geográfica.

Quando a população é dividida em subpopulações (conglomerados) que apresentam comportamento homogêneo entre si, é possível sortear um conglomerado e fazer a pesquisa toda ali. Também é possível sortear diversos conglomerados e neles fazer uma estratificação.

Quando a população já se encontra ordenada, é possível estabelecer um intervalo de seleção aleatório, isto é, se, digamos, queremos uma amostra com 10% da população, então devemos selecionar um em cada 10 indivíduos.

Métodos não probabilísticos correspondem a amostragens em que há uma escolha deliberada dos elementos da amostra. Em geral, nesses casos não é possível generalizar os resultados das pesquisas para a população. Existem basicamente dois tipos de amostragem não probabilística, a intencional (por conveniência) e a acidental (por quotas).

A amostragem é intencional quando se faz a inferência com grupos que estão mais acessíveis, mais à mão, tais como pessoas da vizinhança, do trabalho, família e amigos, pessoas provenientes de listas de *mailing* e grupos de redes sociais, por exemplo.

A amostragem é acidental quando se infere pessoas que passam pelo pesquisador em um determinado local e um determinado momento. Normalmente esse tipo de pesquisa pode ser feito com a divisão da população em estratos, compondo quotas para o pesquisador preencher. Desse forma, a amostragem acidental é disfarçada de amostragem estratificada e, como as pessoas são abordadas na rua sem uma seleção específica, é também disfarçada de aleatório, embora não o seja. Sobre esse tipo de pesquisa, More et al. (2016) afirma que sempre redunda em um estudo viesado que, sistematicamente, favorece determinados resultados,

Os resultados de uma pesquisa não probabilística são locais, ou seja, são válidos para o universo pesquisado e não podem ser generalizados para a população como um todo.

Moore (op. cit., p. 163) aponta a melhor forma de fazer a amostragem:

> Em uma amostra de resposta voluntária, as pessoas escolhem se respondem. Em uma amostra de conveniência, o entrevistador faz a escolha. Em ambos os casos, a escolha pessoal produz viés. A solução do estatístico é deixar que o acaso impessoal escolha a amostra. Uma amostra escolhida ao acaso não permite nem favoritismo por quem faz a amostra, nem autosseleção por parte de quem responde. Escolher uma amostra ao acaso ataca o viés, atribuindo a todos os indivíduos a mesma chance de serem escolhidos. Rico o pobre, jovem ou velho, negro ou branco, todos têm a mesma chance de estar na amostra.

Outra questão levantada por Moore (op. cit.) é a porcentagem de não resposta, ou seja, de indivíduos selecionados para participar da pesquisa e que se recusam a responder. Tal porcentagem, se alta, segundo o autor, pode provocar viés nos resultados da pesquisa.

Em resumo, os principais problemas relacionados aos resultados de pesquisas amostrais estão ligados à metodologia adotada, ou seja, amostra voluntária, acidental ou de conveniência, além de viés de não resposta. Os problemas relacionados à confiabilidade dos resultados de pesquisas feitas por meio de amostragens não se resumem a isso, mas esses casos já são suficientes para as análise que vamos tecer sobre as pesquisas eleitorais do Brasil.

Segundo Levine at al. (2016), sendo π a proporção desconhecida da população, sua estimativa é a proporção amostral p, tal que a estimativa do intervalo de confiança de π é dada por:

$$\pi = p \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Nessa equação, α é o nível de significância correspondente ao nível de confiança de $(1-\alpha)\%$. Nesse caso, $\alpha/2$ é a proporção em cada cauda da curva normal que fica fora do nível de confiança. Em pesquisas de intenção de voto, costuma-se utilizar um nível de confiança de 95%, que corresponde a um $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$, conforme a tabela da curva normal (LEVINE et al., op. cit.).

Como a proporção amostral p pode variar, p.(1 – p) pode assumir diferentes valores. As pesquisas de intenção de voto costumam adotar o valor máximo possível para esse produto, que ocorre quando p = 0,5. Assim, se considerarmos uma amostra de tamanho n = 2000, temos a seguinte margem de erro ao nível de confiança de 95%:

$$ME = 1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}5.(1-0{,}5)}{2000}} = 1{,}96\times 0{,}01118 = 0{,}0219$$

Esse resultado corresponde aproximadamente a uma margem de erro de 2,2%. Para obter exatos 2% de margem de erro, é necessário que a amostra seja de 2.401 observações. Essa margem de erro (2%) é a que é comumente adotada pelos institutos de pesquisa.

Quadro teórico de Educação Estatística

A ideia de letramento estatístico nos remete à noção de alfabetização funcional em Estatística, ou seja, a capacidade de ler, escrever, interpretar criticamente os conceitos e os resultados estatísticos, argumentar usando terminologia própria, explicar seus pontos de vista, etc. Gal (2002) advoga que:

> [...] é proposto que o termo 'letramento estatístico' se refere amplamente a dois componentes inter-relacionados, principalmente (a) a capacidade das pessoas de interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, argumentos relacionados a dados ou fenômenos estocásticos, os quais podem ser encontrados em contextos diversos e quando relevante; (b) sua capacidade de discutir ou comunicar suas reações a tais informações estatísticas, tais como sua compreensão do significado da informação, suas opiniões sobre as implicações dessa informação ou suas preocupações quanto à aceitabilidade de dados e conclusões (GAL, 2002, pp. 2-3)

Em Coutinho e Campos (2018), defendemos que o letramento pode ser estimulado nos estudantes por meio de exemplos de atividades contextualizadas que favoreçam o engajamento dos alunos, a mobilização de conhecimentos, habilidades e atitudes. Esses exemplos devem ser extraídos da realidade e construídos com base em notícias veiculadas na mídia ou a partir de temas de interesse dos alunos, tais como, levantamento de preços, dados relativos a esportes, dados populacionais, etc.

Em Campos et al. (2011, pp. 25-26), destacamos uma forma de estimular o desenvolvimento do letramento estatístico:

> Dar aos estudantes a oportunidade de produzir os próprios dados e encontrar os resultados básicos ajuda-os a tomar as rédeas de seu próprio aprendizado. Também promove a habilidade de assumir a responsabilidade de resolver seus problemas, como eles terão que fazer em seu ambiente de trabalho. É possível solicitar aos estudantes que não apenas coletem os seus dados, mas, igualmente, elaborem as variáveis que irão compor seus questionários. Isso os ajuda a descobrir ou determinar métodos e técnicas por si próprios.

Assim, pretendemos construir uma atividade didática para favorecer o desenvolvimento do letramento estatístico por meio do uso da Estatística como evidência para assuntos e argumentos encontrados em sua vida diária como consumidores de informações veiculadas pelas diversas mídias. Essa atividade que vamos mostrar está ligada à problemática das pesquisas de opinião a respeito das eleições no Brasil.

Sobre a educação estatística crítica

Os princípios da Educação Crítica e da Educação Matemática Crítica, apresentados nos trabalhos de Freire (1970), Giroux (1997) e Skovsmose (2004), foram adaptados por Campos (2016), que compôs a chamada educação estatística crítica, cujos princípios são:

i) Contextualizar os dados de um problema estatístico, preferencialmente utilizando dados reais;
ii) Encorajar a interpretação e análise dos resultados obtidos;
iii) Inserir os assuntos tratados em um contexto social/político e promover discussões sobre os problemas levantados.

Além disso, em Campos (2016) encontramos outras características importantes da educação estatística crítica, tais como: a promoção de uma educação problematizadora, dialógica e que estimula a criatividade e a reflexão do aluno; a valorização dos aspectos políticos envolvidos na educação, tanto em relação ao processo educativo como em relação aos conteúdos disciplinares; o desenvolvimento dos relacionamentos sociais, o combate às posturas alienantes dos alunos e a defesa da ética e da justiça social; a democratização do ensino; etc.

Com isso, defendemos que devemos conjugar a ideia de ensinar Estatística sempre acompanhada de um objetivo maior de promover a criticidade e o engajamento dos estudantes em questões políticas, sociais, econômicas ou ambientais que fazem parte de sua realidade como cidadãos, de modo a encorajar o desejo de justiça social em um ambiente democrático e desalienado.

Metodologia

Neste trabalho de investigação, vamos analisar uma pesquisa de intenção de voto para presidente da república do Brasil, realizada pelo instituo IBOPE. Nossa intenção é investigar sua metodologia, comparando-as com o que foi exposto no nosso quadro teórico de Estatística.

Adicionalmente, a atividade didática que vamos sugerir segue a estratégia da modelagem matemática, que se articula bem com as ideias de letramento estatístico e de educação estatística crítica.

Resultados

A pesquisa analisada foi feita pelo IBOPE entre os dias 22 e 24 de setembro. Os resultados são mostrados na figura 1.

Sobre a metodologia da pesquisa, encontramos as seguintes informações:

> O modelo de amostragem utilizado é o de conglomerados em 3 estágios.
> No primeiro estágio os municípios são selecionados probabilisticamente através do método PPT (Probabilidade Proporcional ao Tamanho), tomando os eleitores que votaram nas últimas eleições (votantes) como base para tal seleção.
> No segundo estágio são selecionados os conglomerados: setores censitários, com PPT (Probabilidade Proporcional ao Tamanho) sistemático. A medida de tamanho é o número de votantes dos setores.
> Finalmente, no terceiro estágio é selecionado em cada conglomerado um número fixo de votantes segundo cotas de variáveis [...]
> Foram realizadas 2000 entrevistas em 126 municípios. A margem de erro máxima estimada é de 2 pontos percentuais para mais ou para menos sobre os resultados encontrados no total da amostra. O nível de confiança utilizado é de 95% (IBOPE, 2018, p. 2)

O método PPT não é descrito em nenhuma das fontes que consultamos. Em uma busca na internet, encontramos referências no website do INPAD (2012) (Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia para Políticas Públicas do Álcool e Outras Drogas). Vimos que a probabilidade

proporcional ao tamanho (PPT) é um método de seleção aleatória no qual são atribuídos pesos a cada município de acordo com a sua população, de forma que se um município A tem população x e outro município B tem população 2x, a chance de o município B ser selecionado é duas vezes maior que a do município A. Isso compõe o primeiro estágio da pesquisa do IBOPE. No segundo estágio, são designados os conglomerados ou setores censitários, ou seja, regiões dos municípios selecionados no primeiro estágio. Considerando a ponderação chamada de PPT, a seleção das regiões a serem pesquisadas é feita pelo método sistemático. O terceiro estágio é o mais sensível, no qual dentro de cada conglomerado é selecionado um número fixo de votantes segundo cotas de variáveis. As variáveis, nesse caso, são os estratos, que o IBOPE discrimina como sexo, idade, instrução e renda.

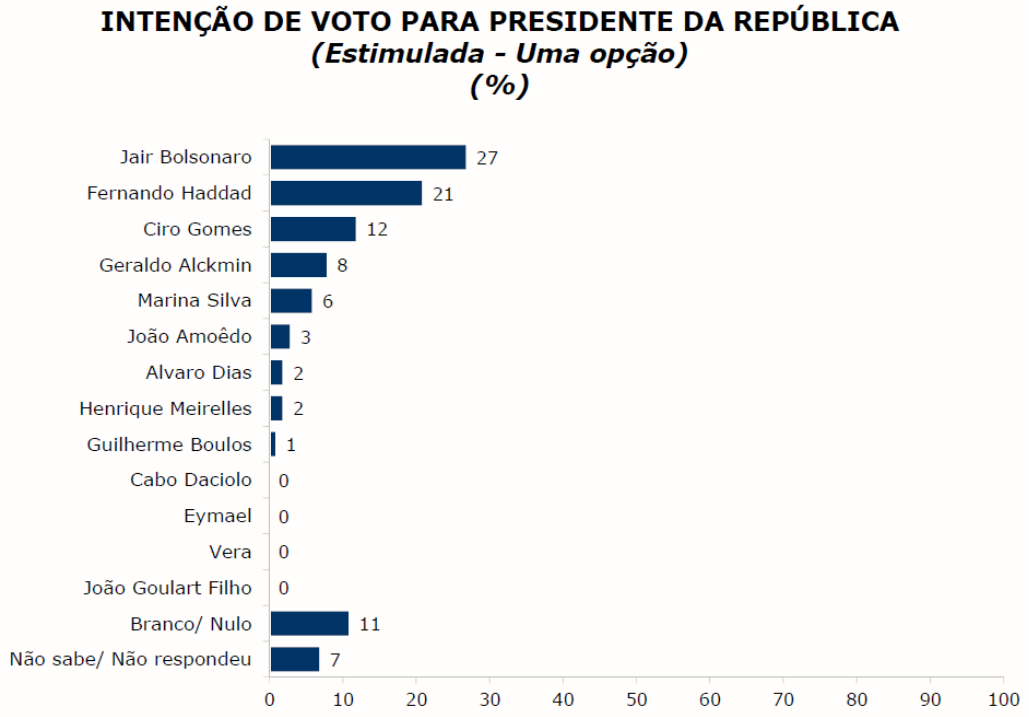


Figura 1: Resultado geral da pesquisa estimulada divulgada em 26/09/2018. Fonte: IBOPE (2018)

Não há qualquer informação no documento do IBOPE sobre como é feita a abordagem ao eleitor pesquisado. Como não há um estágio de sorteio de residências, podemos supor que o pesquisador aborda pessoas na rua, buscando preencher suas quotas. Esse tipo de amostragem compõe um estágio não probabilístico de pesquisa, no qual o pesquisador escolhe quem vai pesquisar, produzindo naturalmente um viés. Como já dissemos no quadro teórico (MOORE et al., 2016), tanto no caso em que o pesquisador faz a escolha de quem entrevistar quanto na situação em que a pessoa escolhida decide se quer responder ou não, há um viés de resposta que pode comprometer o resultado da pesquisa.

A pesquisa do IBOPE falha principalmente nos seguintes aspectos: não compõe amostras probabilísticas em seu terceiro estágio ao fazer o levantamento por quotas; não divulgam a correta margem de erro, que é de 2,2% ao invés de 2% e não informa a porcentagem de não resposta.

De acordo com Moore (2016), o levantamento por quotas corresponde a um planejamento amostral ruim que resulta em um erro sistemático, gerando viés nos resultados. Talvez o viés não

seja tão dramático (e possivelmente o instituto de pesquisa aposte nisso) dado que as duas primeiras etapas do processo de amostragem são feitas com métodos probabilísticos.

Proposta didática

No âmbito do assunto tratado neste artigo, pensamos em propor uma atividade didática baseada na modelagem matemática para trabalhar o tema de pesquisas de intenção de votos.

Nossa sugestão é válida tanto para o ensino fundamental como para o ensino médio e o superior. A ideia é dividir a classe em grupos (os próprios alunos formam os grupos) e pedir para eles obterem dados a respeito da intenção de voto junto a pessoas próximas, ou seja, família, amigos, vizinhos, etc. Depois de obtidos os dados, o grupo deve preparar um relatório descrevendo a amostra e contendo uma tabela e um gráfico com os resultados obtidos. Posteriormente, na data combinada para a entrega do relatório, o professor, com a ajuda dos alunos, junta todos os relatórios e mostra um resultado unificado. Aos alunos pode ser atribuída uma meta de entrevistar 20 pessoas cada. Se assim for feito, uma sala de 40 alunos produzirá uma amostra de 800 pessoas.

Sugerimos comparar os resultados unificados com as pesquisas publicadas pelos institutos para começar a discutir os princípios de metodologia de pesquisa. É esperado que o resultado dos alunos apresente um viés causado pela amostragem por conveniência (não probabilística), o que deve ser evidenciado pelo professor.

Por fim, a atividade pode gerar uma conversa sobre política e o professor pode pedir para os alunos fazerem campanha para seus candidatos ou até simular um debate. Isso é uma oportunidade para discutir quais são os problemas do país e quais são as propostas dos candidatos para enfrenta-los.

Evidentemente, essa atividade é indicada para períodos próximos a eleições, que no Brasil ocorrem a cada dois anos. Em épocas outras, poderá ser difícil encontrar pesquisas de opinião que fomentem tal debate político na mídia.

Considerações finais

Neste artigo, tínhamos estabelecido como objetivo investigar o processo de amostragem de uma pesquisa eleitoral e discutir seus conceitos à luz da teoria da amostragem estatística. Examinamos a metodologia, comparando os procedimentos adotados com o que nosso quadro teórico sugeria e notamos três problemas, a saber: equívoco na designação da margem de erro; adoção de um estágio não probabilístico na pesquisa; e omissão sobre não respondentes.

Outro objetivo deste estudo era propor uma atividade didática sobre o tema, o que fizemos adotando a estratégia da modelagem matemática. Sugerimos comparar os resultados dos alunos com pesquisas publicadas na mídia para evidenciar a problemática da amostragem. Por fim, tratamos de valorizar a Educação Estatística Crítica quando propusemos um debate político sobre os candidatos mencionados nas pesquisas.

Acreditamos que tal atividade didática favorece o desenvolvimento do letramento estatístico na medida em que sugerimos avaliar criticamente as informações das pesquisas, discutir e comunicar as interpretações (GAL, 2002), além de se trabalhar uma atividade contextualizada, favorecendo o engajamento dos estudantes (COUTINHO & CAMPOS, 2018).

Desta feita, acreditamos ter contribuído para a disseminação de conhecimentos relevantes para a compreensão da realidade brasileira em um momento importante de definição política caracterizado pela eleição presidencial.

Bibliografia

Campos, C. R. (2007). *Educação estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da Estatística em cursos de graduação*. 242 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro: UNESP.

Campos, C. R. (2016). *Towards critical statistics education – theory and practice*. Saarbrücken/Alemanha: Lambert Academic Publishing.

Campos, C. R.; Wodewotzki, M. L. L.; Jacobini, O. R. (2011). *Educação estatística – teoria e prática em ambientes de modelagem matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Coutinho, C. Q. S.; CampOS, C. R. (2018). Perspectivas em didática e educação estatística e financeira: reflexões sobre convergências entre letramento matemático, matemacia, letramento estatístico e letramento financeiro. In: G. P. Oliveira (org.), *Educação Matemática – epistemologia, didática e tecnologia*, pp. 143-180. São Paulo: Livraria da Física.

Freire, P. *Pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1970.

Gal, I. (2002). Adult's Statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Giroux, H. A. (1997). *Os professores como intelectuais: rumo a uma pedagogia crítica*. Trad. Daniel Bueno. Porto Alegre: Artes Médicas.

IBOPE. (2018). *Pesquisa de opinião pública sobre assuntos políticos/administrativos* - Job 1152. Registro no TSE: BR-04669/2018 Ibope Inteligência. Disponível em: http://www.ibopeinteligencia.com/noticias-e-pesquisas/jair-bolsonaro-mantem-lideranca-e-diferenca-de-6-pontos-percentuais-com-relacao-a-fernando-haddad/. Acesso em 29/09/2018.

INPAD. (2012). II LENAD – *Levantamento Nacional de Álcool e Drogas*. Disponível em: https://inpad.org.br/lenad/sobre-o-lenad-ii/metodologia/. Acesso em 29/09/2018.

Levine, D. M.; Stephan, D. F.; Szabat, K. A. (2016). *Estatística – teoria e aplicações*. Rio de Janeiro, LTC.

Moore, D. S.; William, I. N.; Fligner, M. A. (2016). *A Estatística básica e sua prática*. 6ª ed. Rio de Janeiro, LTC.

Skovsmose, O. (2004). *Educação Matemática Crítica – A Questão da Democracia*. 2ª ed. Campinas: Papirus.

Witte, R. S.; Witte, J. S. (2005). *Estatística*. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC.'

Geometría

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Recursos para la gestión de problemas de modelaje en clases de geometría

Patricio **Herbst**
University of Michigan
Estados Unidos
pgherbst@umich.edu

Resumen

Esta comunicación se enmarca dentro del estudio de la gestión del enseñante. Se identifican situaciones de construcción y de demostración presentes en la enseñanza típica de cursos de geometría en escuelas secundarias en Estados Unidos. Y se muestra como las mismas pueden servir como recursos para que un maestro gestione el trabajo de sus estudiantes en un problema de modelaje geométrico. Se propone la noción de que tales situaciones pueden servir para contextualizar o enmarcar el trabajo de los estudiantes de manera tal que ellos puedan usar las normas de las situaciones de construcción y demostración como soporte para pensar en las demandas de una tarea nueva.

Palabras clave: educación, matemática, ciencias, didáctica, pedagogía, formación.

La noción de modelaje matemático ha cobrado interés en la comunidad de investigadores en educación matemática en los últimos veinte años. Kaiser y Sriraman (2006) describieron una variedad de perspectivas sobre el uso del modelaje, entre ellas la que ellos llaman la perspectiva epistemológica, en la que tareas de modelaje se utilizan como instrumento para construir conocimientos matemáticos. Autor y Colegas (2017) utilizan esta noción de modelaje como marco de una propuesta de investigación y desarrollo en la enseñanza de la geometría en secundaria. La presente comunicación se basa en esa perspectiva y examina los recursos disponibles para la gestión del docente en tales tareas de modelaje, utilizando como caso una lección sobre triángulos observada en tres clases de geometría en los Estados Unidos.

El modelaje geométrico y la gestión didáctica

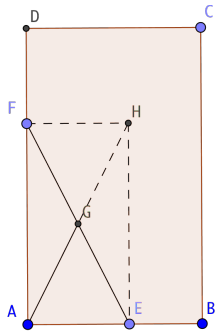
Nuestra pregunta de investigación concierne la gestión didáctica. Desde el punto de vista del aprendizaje, tareas de modelaje permiten a los estudiantes ver las conexiones entre la matemática y la vida real, involucran al estudiante en la traducción de aspectos del contexto en términos de

representaciones matemáticas, y permiten el uso del sentido común como recurso para la resolución de problemas. En la medida que esas tareas incluyen aquellos elementos de la vida real que apoyan al razonamiento, es posible utilizarlas, a pesar de su novedad, para desarrollar la comprensión de conceptos nuevos: El estudiante puede abordar el problema y tomar decisiones aún si los conceptos matemáticos en juego están en curso de ser descubiertos como resultado del modelaje. Desde el punto de vista de la gestión del maestro, sin embargo, hace falta saber qué tipo de acciones del maestro proveen suficiente apoyo para asegurar que el estudiante participe en aquellas tareas sin disminuir su nivel cognitivo (Hennigsen y Stein, 1997). La investigación sobre la gestión didáctica ha documentado tensiones y dilemas que los maestros deben de manejar cuando involucran a los estudiantes en este tipo de tareas nuevas, sean éstas tareas de modelaje o puramente matemáticas (Ball, 1993; Lampert, 1990). Nuestro trabajo contribuye a esta tradición, no solamente identificando tensiones sino también caracterizando recursos disponibles al maestro. En lo que sigue describimos primeramente la tarea utilizada y cuál es su objetivo de enseñanza. Luego describimos la metodología usada en el análisis de la gestión didáctica.

Una tarea de modelaje geométrico: El problema de la piscina

La tarea propuesta a los estudiantes fue una variación de lo que llamamos el problema de la piscina. Se les dice a los estudiantes que tres nadadores van a zambullirse en una piscina rectangular desde tres lugares distintos: uno de ellos desde una esquina y los otros dos desde lugares a lo largo de los bordes de la piscina que son adyacentes a aquella esquina. Los nadadores competirán nadando hacia un premio ubicado en un lugar en la piscina (sujeto a un lugar mediante un ancla). Los estudiantes deben investigar si es posible anclar el premio de tal manera que la competencia sea justa.

Debe notarse que salvo la mención verbal de la forma rectangular de la piscina el problema no les da a los estudiantes ninguna representación geométrica. Sin embargo, si ellos representaran la piscina como un rectángulo y a los nadadores como puntos a lo largo de los lados del rectángulo, el problema podría conceptualizarse en términos de encontrar un cuarto punto que sea equidistante de los tres puntos dados. Varias estrategias pueden llevar a los estudiantes a la conjetura de que el punto medio del segmento entre los puntos que representan a los dos nadadores que no están en la esquina es también equidistante del vértice del rectángulo que representa la esquina donde el tercer nadador se ubicara. En efecto, el trabajo en este problema da origen a la conjetura de que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices del triángulo. La prueba puede verse en la Figura 1. El problema formulado en términos de nadadores a lo largo de los lados de la piscina, contiene una fuente importante de generalidad con respecto al resultado geométrico que se busca introducir: El triángulo rectángulo con el que trabajarán no depende de una figura particular ya que sus catetos están definidos por posiciones arbitrarias de los nadadores ubicados en los lados de la piscina. En ese sentido, el problema ilustra como al presentar el problema en el contexto de una situación real es posible hacer cargo al estudiante de tratar con el problema en general.



Si consideramos el rectángulo *AEFH* determinado por las posiciones de los tres nadadores (*F*, *A*, y *E*), se puede probar primero que las diagonales *AH* y *EF* son congruentes y se intersectan en su punto medio. Por consiguiente, los segmentos *GF*, *GA*, y *GE* son congruentes.

Figura 1. Demostración de la proposición

Obviamente, es posible para el maestro producir una representación como la de la figura 1 y luego demostrar que el punto G es el punto deseado. Sin embargo, si el maestro hiciera eso reduciría dramáticamente la oportunidad de que los estudiantes modelen el problema usando geometría. Por otra parte, la mera presentación del problema en términos de la piscina no provee ninguna garantía de que los estudiantes harán un modelo geométrico. Si la selección del problema responde a la necesidad de enseñar un teorema geométrico, y no solamente a la decisión de involucrar a los estudiantes en la resolución del problema, se presenta aquí una tensión posible para el maestro. Esta tensión podría describirse en términos de los siguientes extremos. Por una parte, el maestro puede limitarse a presentar el problema sin presionar para que los estudiantes utilicen ningún modelo en particular, aceptando como válida cualquier estrategia que los alumnos utilicen, y de esa manera arriesgarse a que los conocimientos geométricos que llevaron a la selección del problema no puedan encontrarse en esta ocasión. Por otra parte, el maestro puede proveer, además del problema dado, representaciones e instrucciones que aseguren que los conocimientos en juego sean encontrados en la manera deseada. Haciendo eso, el maestro podría arriesgarse a limitar el nivel cognitivo de la tarea del alumno. Nuestro trabajo consiste en identificar posibles recursos para la gestión del maestro que le permitan, en particular, manejar aquella tensión sin necesariamente reducir las demandas cognitivas.

Recursos para la gestión didáctica

Nos interesa aquí destacar los recursos disponibles al maestro para apoyar a los alumnos al hacer ellos mismos la tarea. En las clases de geometría en Estados Unidos existen dos casos de las que hemos llamado *situaciones de instrucción* (Autor y Colegas, 2010) que podrían ser útiles al maestro para incorporar este problema a su práctica: Las situaciones de construcción y de demostración.

Llamamos *situaciones de instrucción* a especificaciones del contrato didáctico (Brousseau, 1997) que permiten realizar transacciones particulares de conocimientos. Las actividades de estudiantes y su maestro en clase se pueden describir como transacciones en las que lo que los alumnos hacen en una tarea (tal vez con algo de ayuda del maestro) sirve de evidencia para que el maestro pueda decir que ellos conocen o no ciertos saberes que están en juego: Son transacciones simbólicas entre un tipo de representación del saber (como acción contextualizada en una tarea) y otro tipo de representación del saber (como conocimientos a ser aprendidos, formulados en el contexto más amplio del curso de estudios). En el caso del problema bajo consideración, existe una transacción posible entre las actividades que los estudiantes hagan en respuesta al problema de la piscina y la proposición que describe la propiedad del punto medio de la hipotenusa de

cualquier triángulo rectángulo. Tal transacción no es inmediata, a juzgar por los posibles extremos de la tensión mencionada más arriba: Los estudiantes podrían hacer trabajo que no dé evidencia de que conozcan la proposición en juego, o tal vez la evidencia esté presente pero su existencia no dependa tanto del trabajo del alumno como de las decisiones tomadas por el maestro.

Está claro que la posibilidad de que el maestro pueda efectuar tal transacción favorablemente depende de que los estudiantes tomen una serie de decisiones correctas, lo que no es inmediato. Por ejemplo, los estudiantes podrían mantener el problema en la escala de la piscina y del tamaño de los nadadores (lo que Berthelot y Salin, 1998, llamaron el mesoespacio), representándolos con ubicaciones en distintos lugares del salón de clase, y producir estimaciones del lugar donde ubicar el premio que fueran aproximadas mediante contar pasos, jamás dándose cuenta que el punto obtenido está en uno de los lados de un triángulo. O podría ser que luego de construir un modelo geométrico a una escala más pequeña (lo que Berthelot y Salin, 1998, llamaron el microespacio) los estudiantes pudieran visualizar el triángulo y encontrar el punto en la hipotenusa, pero que no vieran más necesidad para confirmar su ubicación que simplemente hacer algunas mediciones. Aquí es donde la noción de situación de instrucción se vuelve útil para describir los recursos disponibles para el maestro.

En trabajos anteriores (Autor y Colegas, 2010) hemos descripto situaciones de construcción y de demostración en términos de las normas que regulan la división del trabajo entre el estudiante y el maestro. Cada situación se desarrolla alrededor de tareas canónicas en las que se provee al estudiante de una meta particular y de ciertos recursos y se espera que el estudiante ejecute la tarea usando ciertas operaciones. En la situación de construcción, las tareas suelen identificar como meta construir una figura particular y proveen como recursos la regla y el compás (o alternativamente un software de geometría dinámica como GeoGebra) además de algún objeto geométrico que se debe de usar como dado al hacer la construcción. Los estudiantes no solamente deben de producir la figura deseada sino también dejar visible las líneas auxiliares que les permitieron arribar a la construcción deseada (Schoenfeld, 1986). En la situación de demostración, las tareas suelen identificar la proposición a probar, enunciándola en términos de su representación en un diagrama, dándole a los estudiantes un diagrama con todas las construcciones auxiliares hechas y sus puntos etiquetados, y proveyendo además los enunciados que se pueden usar como premisas. Los estudiantes deben de escribir una serie de enunciados que describan la figura dada, justificándolos con teoremas y definiciones que han sido estudiadas con anterioridad y que conecten las premisas con la conclusión (Autor y colegas, 2009). En una clase donde estas situaciones han sido establecidas, podría ser posible para el maestro gestionar el trabajo en el problema de la piscina mediante transformarlo en dos tareas sucesivas, enmarcadas cada una de ellas en distintas situaciones. La figura 2 muestra como podría el maestro reducir el problema de la piscina utilizando las situaciones descriptas.

Tarea 1	Tarea 2

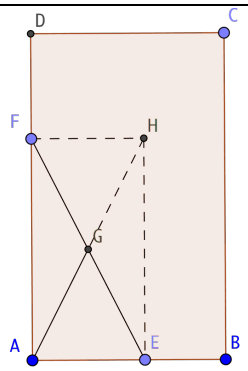
Construye un rectángulo. Ubica puntos en dos lados consecutivos del rectángulo y luego encuentra un punto equidistante de aquellos dos puntos y del vértice donde se intersectan aquellos lados.	Dado que *ABCD* es un rectángulo, demuestra que $GA \cong GF \cong GE$	

Figura 2. Reducción del problema de la piscina a las situaciones de construcción y demostración

Nótese que mientras esta reducción del problema a dos tareas canónicas podría producir trabajo más cercano a la validación del teorema en juego, haría tal cosa a costa de que el maestro tome muchas de las decisiones en lugar del alumno. Esto está particularmente claro en el caso de la tarea de demostración, donde es el maestro quien provee las construcciones auxiliares necesarias para hacer la demostración. Al hacer eso, el maestro reduce la probabilidad de que otras demostraciones originales puedan ofrecerse, que otras líneas auxiliares se usen, etc. Por ejemplo, hemos observado estudiantes trazar una circunferencia con centro en el punto medio de la hipotenusa y ocuparse de argumentar que el vértice del rectángulo está también en la circunferencia. Tal construcción sería poco probable de observar en una clase donde el maestro hubiera provisto la Tarea 2 (Figura 2). Más aún, la separación del problema en estas dos tareas reduce las oportunidades de discusión entre los estudiantes, las cuales podrían dar lugar a la participación de más estudiantes en la resolución del problema.

Aun si las situaciones de construcción y de demostración parecen transformar radicalmente al trabajo de los estudiantes en el problema de la piscina, es importante notar que esas dos situaciones, y tal vez otras situaciones como las de exploración o de cálculo, son recursos sociotécnicos disponibles para el maestro. Sus usos posibles van más allá de la mera transformación de la tarea; pueden también servir de recursos para establecer nuevas maneras de interactuar—para negociar un contrato didáctico ad-hoc que sirva para el trabajo en esta tarea nueva.

El rol de las situaciones de instrucción en la gestión didáctica

Este tipo de uso de los recursos sociales es corriente en la vida diaria. En efecto, nuestras interacciones en sociedad frecuentemente se apoyan en esquemas compartidos de acción en sociedad (Goffman, 1959). Consideremos tres tipos de cenas compartidas: Cena de trabajo, cena familiar, y cena íntima, son distintos tipos de cenas cuyos esquemas promueven ciertas acciones y el uso de símbolos y tecnologías particulares. Esos esquemas condicionan cómo nos vestimos para la ocasión, qué vocabulario usamos, cuanto compartimos de nuestra vida privada con nuestros acompañantes, etc. Esos tipos de cenas no agotan las posibilidades de una cena compartida. Pero esos esquemas nos ayudan a pensar en como manejar problemas nuevos: Una cena familiar en la que también estará presente un pariente lejano que es un posible empleador nos presentará con un problema nuevo en el que dos de los esquemas mencionados más arriba (la cena familiar y la cena de trabajo) podrán ser usados como recursos para decidir como usar el tiempo, como vestirnos, como hablar, etc.

En la enseñanza de las matemáticas, las situaciones de instrucción instaladas en un curso de

estudios son recursos sociotécnicos que pueden servirle al maestro y a los estudiantes para facilitar sus transacciones de conocimientos aún en el caso de problemas que no se ajustan directamente a las tareas canónicas de esas situaciones. Decimos que esas situaciones son recursos sociotécnicos porque combinan normas y recursos sociales (e.g., dados los participantes presentes, a quién le toca hacer cada cosa) con recursos y normas técnicas (e.g., dados los recursos matemáticos disponibles, qué se puede o debe de hacer con ellos).

Entonces el problema de la gestión didáctica en lo que concierne al problema de la piscina se puede reformular como sigue. Ante la oportunidad de involucrar a los estudiantes en el descubrimiento de un teorema (e.g., el que caracteriza al punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo) mediante un problema formulado en lenguaje de la vida real, ¿cómo pueden las situaciones de construcción y de demostración proveer recursos para que el maestro gestione una transacción de conocimientos en la que los estudiantes hagan el trabajo matemático deseado en el período disponible?

Observando el problema de la piscina en tres clases de geometría

Hemos observado el uso del problema de la piscina en tres clases paralelas de geometría, ofrecidas durante el mismo día en una escuela secundaria. Los estudiantes estaban en la gran mayoría de los casos en el décimo grado (15 años). La lección fue planeada en conjunto con la maestra a quien referimos como Megan. Durante nuestras reuniones de planificación compartimos con Megan y otros docentes los ejemplos de situaciones de instrucción mencionados más arriba (construcción y demostración); también hicimos saber que nuestro interés en la investigación era explorar en qué medida esas situaciones proveen de recursos al docente para gestionar el trabajo de los estudiantes en tareas nuevas.

A través de las observaciones en tres clases paralelas en el curso del día hemos visto como Megan hizo pequeñas modificaciones a la lección que le permitieron, llegado el final del día, hacer posible una variedad de objetivos relacionados con el uso del problema de la piscina para estudiar la propiedad del punto medio de la hipotenusa. Durante la primera lección del día, Megan presentó su versión del problema—básicamente la misma citada arriba, a la que Megan le agregó elementos de color local incluyendo el premio por el cual los alumnos iban a competir. Luego de discutir el enunciado, Megan les pasó computadoras portátiles a los alumnos y les dijo que usaran GeoGebra para construir un modelo de la piscina y luego ubicar el punto. Si bien los estudiantes habían utilizado GeoGebra con anterioridad, observamos que los estudiantes dedicaron más de la mitad de período de clase a la tarea de construcción del rectángulo. En muchos casos sus dificultades radicaban en recordar como construir perpendiculares usando los menús del programa. Algunos de ellos no habían logrado ir más allá de construir un rectángulo para representar la piscina cuando Megan llamó la atención a toda la clase para escuchar algunas de las soluciones. Otros estudiantes lograron construir el rectángulo y pudieron utilizar dinámicamente la posición arbitraria de los dos nadadores ubicados a lo largo de los lados del rectángulo para desarrollar la intuición de que las distancias de los tres vértices a un punto cerca del punto medio de la hipotenusa se mantendrían iguales entre sí a pesar de que cambiaran de valor para distintas posiciones de los nadadores. Sin embargo, la ubicación de tal punto no resultó por lo general de utilizar una construcción dinámica; resultó de arrastrar el punto hasta que las distancias fueran iguales. Un grupo de estudiantes tuvo la idea de construir un círculo, ajustarlo en tamaño, y moverlo sobre la pantalla para que pasara por los tres vértices, luego eligió el centro de tal círculo como punto equidistante propuesto. Luego de que la clase discutiera las distintas soluciones propuestas, no hubo tiempo para volver a trabajar sobre la prueba del

teorema. Al final de la clase Megan les hizo notar a los estudiantes el enunciado del teorema y la clase terminó.

Durante el segundo período, Megan hizo disponibles las computadoras sin insistir que los estudiantes las usaran. En lugar de ello, Megan invitó a los estudiantes a *esbozar* (en inglés, *sketch*) el contexto del problema. Si bien un par de grupos echó mano a las computadoras, otros prefirieron hacer diagramas en papel, a los que les agregaron marcas para indicar segmentos congruentes. El tiempo que anteriormente se había dedicado a construir el rectángulo inicial fue ahorrado en todos los casos—los estudiantes parecían entender que el rectángulo inicial era de poca importancia. Muy pocos estudiantes exploraron mas de una ubicación posible para los dos nadadores en los lados del rectángulo. Sin embargo, la generalidad de la solución pudo observarse cuando los estudiantes compartieron soluciones—los triángulos se veían claramente distintos a pesar de todos ellos ser triángulos rectángulos, y en todos los casos la solución propuesta fue la misma—el punto medio de la hipotenusa. Hubo tiempo para que Megan hiciera que los estudiantes dediquen tiempo a buscar un argumento que justifique el teorema. Hacia el final de la clase se observó algunos estudiantes proveyendo un argumento similar al ofrecido más arriba (usando las diagonales de un rectángulo). No hubo tiempo para dedicar mucha atención a estos argumentos, sin embargo.

Durante el tercer período, Megan introdujo el problema y similarmente dirigió a los estudiantes a esbozar un diagrama, pero no hizo referencia a posibilidad de construirlo con GeoGebra. En discusiones con los estudiantes, sin embargo, Megan les preguntó qué habían hecho para determinar la ubicación del punto. Fue así que un estudiante (hablante del castellano, con poca facilidad en inglés) describió los pasos que siguió para encontrar una solución distinta a la de muchos otros. Este estudiante encontró lo que serían las mediatrices de estos lados del triángulo e identificó al punto de intersección de las mediatrices como el punto deseado. La figura 3 muestra la solución de ese estudiante al problema de encontrar el punto. Si bien el diagrama es claramente un esbozo y no una construcción precisa, el diagrama deja ver cuales fueron los pasos seguidos para determinar el punto. El uso de esbozos en lugar de construcciones sirvió además para justificar la desconfianza de las mediciones y la necesidad de un argumento. Luego de discutidas las distintas construcciones, hubo oportunidad para que la clase construya un argumento de por qué tanto el punto medio de la hipotenusa como la intersección de las mediatrices de los lados perpendiculares resultarían ser el mismo punto. El argumento construido, sin embargo, fue un argumento oral en el cual algunos de las expectativas de la situación de demostración no se presentaron: Por ejemplo, mientras que en la situación de demostración se espera que los enunciados se escriban y se lean usando las letras que designan a los objetos representados en el diagrama, en esta lección la discusión se mantuvo al nivel de los conceptos representados en el diagrama y de gestos indexicales a los objetos diagramáticos.

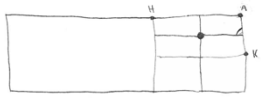


Figura 3. La solución de un alumno

Discusión y conclusión

Una observación general, importante para nuestros propósitos, es que, si bien las situaciones de construcción y de demostración fueron útiles para Megan, el uso que ella les dio no fue canónico. En la primera lección del día observamos que Megan intentó organizar la primera parte de la

tarea utilizando una reducción del problema a la situación de construcción, pero en las lecciones subsiguientes el uso de la situación de construcción fue mucho más sutil. De manera similar, la situación de demostración no fue utilizada para reformar la tarea. La situación de demostración proveyó algunos elementos que contextualizaron la tarea original, permitiéndoles a los alumnos llegar a algo que se asemejaba a una prueba del teorema. En lugar de utilizar las situaciones de construcción y demostración para cambiar la tarea, Megan las utilizó a esas situaciones de manera metafórica y como marcos o contextos para que los estudiantes hagan partes de la tarea. Este fenómeno que llamamos en inglés *framing* y que podría traducirse al castellano como *enmarcado* o *encuadrado*, consiste en hacer presentes algunas claves que sugieren la pertinencia de las normas de aquellas situaciones (de construcción y de demostración) sin necesariamente requerir a los estudiantes que cumplan con todas las normas de tales situaciones.

Una importante ventaja de usar de marea metafórica estas situaciones ha sido la posibilidad que la maestra tuvo de controlar mejor el tiempo que la clase dedicó a encontrar el punto buscado, lo que hizo posible dedicar tiempo a la búsqueda de un argumento. Desde el punto de vista del contrato didáctico, éstas observaciones enfatizan la importancia de la negociación permanente del contrato, además del valor de algunas situaciones de instrucción que sirvan de puntos de partida para tal negociación.

Las normas de las situaciones de instrucción pueden jugar un rol heurístico para los estudiantes. El uso de la palabra *esbozar* (en inglés, *sketch*) en lugar de *construir*, por ejemplo, no impone la necesidad de usar GeoGebra o regla y compás, pero sí sugiere que el estudiante deberá de decidir sobre qué elementos creará como parte de su esbozo y la secuencia con la cual los creará. Tales decisiones podrían ser objeto de preguntas más adelante que pongan en juego consideraciones sobre las condiciones de posibilidad de cada construcción. De la misma manera, la situación de demostración podría ser usada metafóricamente para encuadrar la tarea—claves como *justifique* o *provea razones* pueden servirle al maestro para hacer a los alumnos responsables de construir un argumento que vaya más allá de haber obtenido una solución efectiva. Si bien *justificar* hace un llamado metafórico a la noción de demostración, por ejemplo, sugiriendo cuales podrían ser las justificaciones (teoremas, definiciones, etc.), tal palabra no requiere que se cumpla con todas las normas de la situación de demostración (véase Autor y Colega, 2009).

Por supuesto, para que esbozar y justificar puedan cumplir con aquél rol heurístico, es necesario que las situaciones de construcción y de demostración existan de antemano. El punto es importante en el contexto de las reformas educativas, y sirve enfatizarlo como una conjetura general. Si bien las tareas de modelaje, y las tareas nuevas en general, pueden dar lugar a comportamientos muy interesantes de parte del alumno, es previsible que el maestro tendrá que apoyar estos comportamientos de alguna manera. La utilización metafórica de situaciones de instrucción anteriores, enmarcando la tarea a realizar, puede servir para que los alumnos se den una idea de qué es lo que pueden hacer, sin que esto implique ni cambiar la tarea ni decirles explícitamente cómo resolver el problema.

Referencias y bibliografía

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The elementary school journal*, *93*(4), 373-397.

Berthelot, R., & Salin, M. H. (1998). The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. In C. Mammana & V.Villani, (Eds.) Perspectives on the teaching of geometry for the

21st century: An ICMI study (pp. 71-77). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des Mathematiques 1970-1990*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Goffman, E. (1959). The presentation of self in everyday life. *New York*: Anchor DoubleDay.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American educational research journal*, *27*(1), 29-63.

Schoenfeld, A. H. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 225-264). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estudo dos sólidos geométricos por meio do gênero literário popular "cordel": uma abordagem interdisciplinar nas aulas de Matemática

Ana Nonato **Trigueiro**
Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Brasil
aninha2014n@hotmail.com

Rodiney Marcelo Braga **dos Santos**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Brasil
marcelllobraga@hotmail.com

Resumo

Esta pesquisa objetiva apresentar uma experiência na formação inicial do professor de Matemática para o ensino da Geometria com o suporte do recurso literário cordel. Balizada na expressão literária popular, quais as potencialidades do cordel para a promoção de um ambiente de aprendizagem comprometido com um fazer Matemática interdisciplinar? A tipologia da pesquisa compreende uma abordagem qualitativa e exploratória do tipo aplicada. Os sujeitos participantes passaram a se apropriar de conhecimentos, com os quais criaram relações sociais constituídas de sensibilidade, criatividade, autonomia e criticidade, características essenciais para transformação da realidade em que estão inseridos. Contudo, a abordagem interdisciplinar demanda aprofundamento teórico e metodológico, bem como ressignificação do planejamento em virtude da demanda do público-alvo que compreende o campo de atuação. Trata-se de uma estratégia de ensino potencial que a partir de suas especificidades e ampliação do olhar comprometido com uma práxis contextualizada pode corroborar para a aprendizagem significativa da Matemática.

Palabras chave: ensino, geometria, interdisciplinaridade, recurso didático, literatura de cordel.

Introdução

O presente texto objetiva apresentar uma experiência na formação inicial do professor de Matemática para o ensino da Geometria, dada ênfase ao estudo dos sólidos geométricos, com o suporte do recurso literário cordel realizada durante a disciplina de Pesquisa aplicada ao ensino

de Matemática II, do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública. A referida disciplina reservou espaço em seu programa para a inserção de recursos didáticos e pedagógicos literários como estratégia de ensino. Com efeito, aqui trataremos de aspectos observados no momento da prática de ensino a partir de uma abordagem interdisciplinar entre as áreas de Matemática e Linguagens e Códigos desenvolvida em uma escola pública de educação básica estadual situada no sertão paraibano, por representar uma seara fértil para pôr em prática a construção desse conhecimento.

É sabido que no processo educacional, desde o passado, vem ocorrendo constantes mudanças em busca de melhorias e conquistas para a díade ensino e aprendizagem da Matemática. São inúmeros os obstáculos que o aluno de hoje enfrenta para se apropriar do conhecimento escolar de forma robusta. Souza et al. (2007, p. 68) sugerem que, por vezes, as dificuldades encontradas pelos estudantes brasileiros no aprendizado de Matemática decorrem das estratégias de ensino utilizadas por seus professores. A fim de mudar tal realidade, propõe-se neste trabalho mostrar que por meio da literatura de cordel e numa perspectiva interdisciplinar é possível viabilizar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática escolar, isso por que o ensino mediante essa visão pedagógica torna-se mais atrativo e interessante. Arriscamos novas linguagens nas aulas de Matemática para que, do ponto de vista da aprendizagem significativa, sejam mais interessantes.

Neste contexto, sinaliza-se nossa questão de investigação: balizada na expressão literária popular, quais as potencialidades do gênero literário cordel, enquanto recurso didático e pedagógico, para a promoção de um ambiente de aprendizagem comprometido com um fazer Matemática interdisciplinar?

O cordel é uma cultura popular brasileira e tem uma grande representatividade no Nordeste do país. Para Araújo (2007, p. 17), o cordel se torna um recurso didático quando "Ao ser articulado à educação, o cordel, por tratar de conteúdos culturais e de aprendizagem, pode enriquecer o ato educativo, nas situações de ensino-aprendizagem, ampliando a compreensão sociocultural nordestina, por parte do educando". Assim, o trabalho pedagógico a partir da sua utilização pode potencializar a prática interdisciplinar em virtude do gênero literário abordar temáticas acerca dos problemas sociais. Outrossim, conforme Amorim (2008, p. 191):

> Pelas suas lições, a literatura de folheto apresenta larga aplicação dentro do ambiente escolar. Ela se presta a estudos em diversas disciplinas e em vários níveis. Alguns de seus empregos são óbvios; outros, nem tanto. Na área da linguagem, a lista estender-se-ia desde os mais simples conceitos da poética – como as noções de metrificação, rima, verso, estrofe, enfim, tudo ou quase que se faz geralmente com a poesia canônica – até as reflexões e críticas proporcionadas pelo próprio conteúdo de um folheto.

Conforme as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento de competencias, habilidades e atitudes para resolver problemas práticos do cotidiano. À guisa de exemplificação, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.

Por meio do estudo dos cordelistas da região que comprende nosso campo empírico da pesquisa, bem como dos aspectos que constituem a produção da literatura de cordel foram abordados tópicos referentes ao cálculo da área e do volume dos sólidos geométricos. A abordagem interdisciplinar da estratégia de ensino deu-se através da integração da produção do conhecimento das áreas da Matemática, Língua Portuguesa, Literatura Brasileira e Artes. Para Fazenda (2011, p. 73), a interdisciplinaridade é:

> [...] é um termo utilizado para caracterizar a colaboração existente entre disciplinas diversas ou entre setores heterogêneos de uma mesma ciência [...]. Caracteriza-se por uma intensa reciprocidade nas trocas, visando a um enriquecimento mútuo. Não é ciência, nem ciência das ciências, mas é o ponto de encontro entre o movimento de renovação da atitude diante dos problemas de ensino e pesquisa e da aceleração do conhecimento científico.

Diante do exposto, este trabalho tem como base para a discussão o eixo "Ensino de Geometria, a interdisciplinaridade e o gênero literário cordel". Sendo detalhado o percurso metodológico e a experiência a partir do uso do cordel nas aulas de Matemática. Dessa maneira, o trabalho tem uma grande relevância em virtude da valorização da cultura popular, bem como do estudo das potencialidades desse recurso didático e pedagógico.

Referencial teórico: Ensino de Geometria, a interdiciplinaridade e o gênero literário cordel

O conhecimento matemático é inerente à atuação de um sujeito protagonista no meio o qual está inserido, bem como em seu entrono. A Matemática compreende subáreas, quais sejam: Aritmética, Álgebra e Geometria; que por sua vez estão dispostas de forma desarticulada e/ou excludentes, ou seja, são tratadas de forma que uma apresenta-se em detrimento da outra (FILHO ARCANJO; TAVARES, 2015). Outrossim, os autores destacam que o ensino de Geometria não tem sido priorizado por parte dos professores de Matemática. Assim, assumindo o segundo plano de um planejamento que demanda sua apropriação em virtude da articulação necessária para formação desse sujeito. Segundo Ferreira (1999, p. 983):

> é ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos" ou ainda "um ramo da matemática que estuda as formas, plana e espacial, com as suas propriedades, ou ainda, ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria Plana) e dos sólidos (geometria no espaço).

O ensino de Geometria se justifica pelo fato de suas especificidades para o aperfeiçoamento e ampliação de competências para a aprendizagem da Matemática, bem como para o auxílio às outras áreas do conhecimento. Nesse sentido, Kaleff (2003, p.14) cita os estudos de Van Hiele em que "a visualização, a análise e a organização informal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito". À título de ilustração, destaca-se Lorenzato (1995, p. 5):

> Na verdade, para justificar a necessidade de ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

Diante do exposto, a interdisciplinaridade pode potencializar o desenvolvimento de competências, habilidades e atitudes necessárias para a apropriação dos conceitos geométricos no cotidiano do sujeito em processo de formação. Segundo Sommerman (2006), o termo interdisciplinaridade é bastante controverso e que historicamente há aparições que datam antes do século XX, bem como sua consolidação se deu na década de 70 do século passado no I Seminário Internacional sobre a Pluridisciplinaridade e a Interdisciplinaridade, realizado na França. Ademais, Silva e Rodrigues (2009, p. 1) destaca que "O interesse pela interdisciplinaridade, que não é novo, tem suas raízes na Grécia Antiga, nas idéias de Platão e

Aristóteles. No decorrer da história, há, em determinados momentos, a busca por um saber unitário, com vistas a uma visão global de Universo".

Ser professor sempre foi desafiador. No escopo da sua atuação na área de Matemática o desafio parece ser exaustivo quanto à falta de interesse por parte dos alunos e o déficit da aprendizagem dos conteúdos da referida disciplina. De forma generalista, para promover um ambiente de aprendizagem convidativo, bem como significativo é imprescindível ter como ponto de partida todas as situações possíveis do cotidiano com as quais se pode deparar e a reexploração do conhecimento escolar para tentar minimizar os impasses existentes. A partir do nosso objeto de estudo, destaca-se a falta de leitura que reflete no ato de interpretar e compreender conceitos. Também, os alunos têm uma tendência a só ler o que o professor escreve, sem assumir uma postura protagonizadora, ou seja, não buscam descobrir novas formas e sensações promovidas pelo hábito da leitura. Para Nogueira (2009, p. 4):

> Por serem essenciais na formação escolar a leitura e a escrita merecem atenção específica dos professores das diversas áreas. A escola deve criar um círculo virtuoso em que esses dois segmentos melhorem e ajudem na aprendizagem global do aluno. É de suma importância, não somente a leitura de materiais que se encontrem na sala de aula, é preciso ir mais longe, é preciso, como dizia Paulo Freire, uma leitura de mundo para que se possa compreender a própria realidade onde se está inserido.

Assim, enfatiza-se que a interrelação da área de Linguagens e Códigos com a Matemática pode potencializar a compreensão de conteúdos matemáticos. Para que a interdisciplinaridade possa ser introduzida no ambiente escolar é preciso partir de um modelo construtivista, em que se objetiva que o ser humano nasce com capacidade de aprender e esta se desenvolve em interação com o mundo: "Com nova concepção de divisão do saber, frisando a interdependência, a interação e a comunicação existentes entre as disciplinas e buscando a integração do conhecimento num todo harmônico e significativo" (ANDRADE, 1995, p. 23).

Segundo Cereja e Magalhães (2005, p. 11), "o ser humano dispõe de diferentes linguagens para se comunicar com o mundo e com as pessoas". No tocante a poesia, sua prática de reescrever passa a ser do próprio aluno o que o torna capaz de ser, ele mesmo, o produtor dos cordéis, com suas ideias e criatividade fixando o processo de aprendizagem. Para ZÓBOLI (1998, p. 56) a "poesia é um instrumento educativo que gera imagens e visões poéticas fictícias, estimula a motivação e inflama, aguça, a imaginação de quem aprende passando a adquirir novas atitudes".

Quanto ao gênero literário cordel, sua historicidade, remonta à Grécia antiga e no Império Romano quando os artistas populares já versejavam animando os saraus da alta nobreza período medieval. No Brasil foi introduzido pelos portugueses em meados do século XVIII e transformado em linguagem popular a partir das bases lusitanas. Os primeiros poetas cordelistas declamadores surgiram no interior do Nordeste, mais precisamente no sertão paraibano, bem como um dos momentos de auge da literatura de Cordel foi entre 1950 e 1980, quando ocorreram os grandes festivais de repentistas e declamadores nas principais cidades nordestinas (GALVÃO, 2001). Segundo Curran (1998, p. 17), a literatura de cordel:

> é uma poesia folclórica e popular com raízes no Nordeste do Brasil. Consiste, basicamente, em longos poemas narrativos, chamados "romances" ou "histórias" que falam de amor, sofrimento ou aventuras, num discurso heróico de ficção [...] exibe métricas, temas e performances da tradição oral.

Este gênero literário pode expressar a situação socioeconômica de uma determinada região e/ou público-alvo, bem como outros temas de ordem. Ademais, este viés revela a linguagem

como manifestação cultural, muito utilizada como ponto de articulação dos processos ideológicos e dos fenômenos linguísticos. Assim, essa literatura engajada à realidade transforma-se em um recurso interdisciplinar para o ensino e para educação quando amplia conhecimentos em forma de diálogo do cotidiano.

Um dos grandes desafios enfrentados pelos professores de Matemática é despertar o interesse do aluno pelo conteúdo abordado em sala. No âmbito das dificuldades enfrentadas pelos alunos nas aulas de Matemática, a literatura de cordel apresenta uma oportunidade para que os alunos tenham acesso a textos com uma linguagem mais acessível o que corroborar para a construção do conhecimento matemático de forma mais significativa.

Metodologia

A tipologia da pesquisa compreende uma abordagem qualitativa e exploratória do tipo aplicada. O período desta experiência compreendeu o semestre letivo 2018.1, de acordo com o calendário acadêmico da graduação da instituição de ensino. Tendo como tomada de partida o uso do gênero literário cordel, buscou-se a exploração de algumas obras dos principais cordelistas da região, bem como a proximidade da cultura popular e a produção da literatura de cordel a partir da compreensão dos elementos constitutivos do referido gênero literário, dada ênfase ao estudo do cálculo da área e do volume dos sólidos geométricos.

Quanto ao percurso metodológico, inicialmente, foi realizada a ambientação dos alunos participantes acerca dos conceitos preliminares sobre os sólidos geométricos e as características que compreendem a literatura de cordel necessárias para sua elaboração, quais sejam: ritmo, estrofe, métrica e rima. Em seguida, foi realizado um breve levantamento e estudo acerca dos principais cordelistas nordestinos e/ou paraibanos, desde sua biografia até o conteúdo das respectivas obras selecionadas. Sendo formado 10 grupos de 06 alunos de turmas do 1º, 2° e 3° ano do Ensino Médio. Cada grupo teve a autonomia de escolha das obras. Por fim, os cordéis foram confeccionados e expostos em uma atividade de culminância das obras produzidas.

A abordagem interdisciplinar deu-se por meio da produção textual que pode compreender um contexto histórico, social, filosófico, religioso, cultural e político. Outrossim, por meio da identificação, leitura, representação e utilização da linguagem poética para representação dos conteúdos matemáticos que foram abordados em forma de versos e que refletiram no estreitamento de uma ampla integração e socialização dos conhecimentos da Matemática e os da Língua Portuguesa, pois, como afirma Veloso (1997), “a frase, o texto, o enredo, o verso e, sem dúvidas, sobretudo o verso, é que podem lançar mundos no mundo (...)”.

Resultados

A linguagem de cordel apresentou-se como uma forma bem humorada, com um ritmo próprio, de se estudar Matemática. Trabalhou-se com diversas possibilidades para expressar está linguagem poética aplicada ao ensino de Matemática o que foi verificado na produção dos versos elaborados pelos alunos participantes. Na perspectiva da não linearidade dos conhecimentos foi promovido um ambiente de aprendizagem irreverente e contextualizado dos saberes matemáticos. A ludicidade foi potencializada em virtude da efetivação de uma proposta na forma de brincandeira com relações matemáticas e produção textual.

O discurso de uma prática de ensino contextualizada e efetiva é emergente para a aprendizagem da Matemática. O estreitamento das relações sociais dos alunos foram identificados nos versos elaborados que enfatizaram temas de urgência social a partir da utilização da linguagem matemática e suas relações com os objetos em seu torno.

A literatura de cordel está presente no cotidiano do paraibano, suas raízes originaram-se em parte por este estado. Seu uso como recurso no ensino de Matemática promoveu a compreensão de temas que são discutidos no dia-a-dia do aluno na escola como no convívio em seu contexto social. A partir da prática escolar, alunos e professores carregam consigo experiências vividas que fazem parte de sua vivencia e que devem ser levadas em consideração quando é realizado o planejamento de ensino.

Foi delimitado o cálculo da área e do volume dos sólidos geométricos em virtude da demanda diagnosticada no nosso campo empírico da pesquisa. As Figuras 1-2 ilustram exemplos da produção de temas acerca do cálculo dos sólidos geométricos em formatos de folheto de cordel:

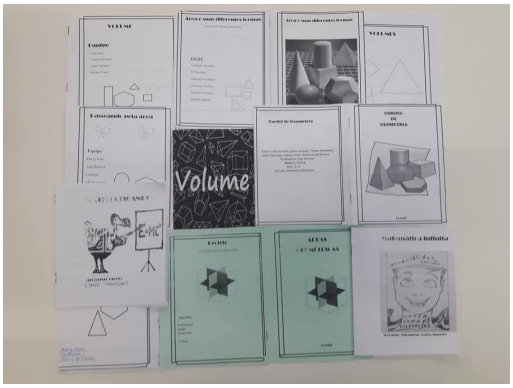


Figura 1. Cordéis produzidos.



Figura 2. Mostra dos cordéis produzidos.

Constatou-se, que a produção da literatura de cordel assistiu de forma significativa o déficit dos alunos quanto ao conteúdo matemático, ou seja, surge como recurso didático pedagógico táctil, cotidiano e nítido. Identificado na fala dos alunos, o ensino de Geometria não é interessante pelo fato da falta de compreensão de sua aplicabilidade e o modo de que são abordados os conteúdos nas aulas de Matemática. Com a dinâmica de utilização deste recurso, os alunos mostraram-se mais produtivos e motivados nas aulas, ou seja, contribuiu para melhora da aprendizagem quanto aos conteúdos objeto de estudo. Todavia, as dificuldades dos alunos surgem com mais frequência quando as conversões são representações de registros diferentes, ou seja, a transposição da linguagem escrita para a linguagem geométrica e vice-versa. Quanto às produções, as Figuras 3-4 expressam a simplicidade de um grupo dos alunos participantes adaptarem o conteúdo a poesia, escrevendo seu próprio verso:

PASSEANDO PELA ÁREA

Área é um conceito matemático
Mas não é nada anormal
Consiste na quantidade
De um espaço bidimensional

Existem várias unidades de medida
Para que o cálculo seja realizado
Mas a que é mais comum
É a do metro quadrado

Para calcular a área do retângulo
Não é peleja tão dura
Basta lembrar-se da fórmula
Da base vezes a altura

Para calcular a área do triângulo
Não deixo pra depois
Multiplico a base pela altura
E divido tudo por dois

Para calcular a área do trapézio
Veja que não tem frescura
Base maior mais base menor
Multiplicado pela metade da altura

Para calcular a área do quadrado
Parece até engraçado
Basta que multipliquemos
Lado vezes lado

Para calcular a área do losango
Não deixe para depois
Faça o produto das diagonais
E divida tudo por dois

Vou terminar por aqui
E espero que tenha aprendido
Guarde tudo na memória
E não se faça de esquecido.

Figura 3. Cordel "Passeando pela área".

VOLUME

Estudar volume é massa
É um assunto fenomenal
Medir coisas é sobrenatural
O que o faz ainda mais sensacional

Volume é importante
Apesar de ser um cubo
Só precisa da aresta ao cubo
Pra seu volume encontrar

No paralelepípedo retangular
Tem que saber a fórmula correta
Multiplicar todas as dimensões
Para seu volume encontrar

Trata-se de figuras geométricas
Geralmente com coisas dentro dela
É uma matemática seria
Mas não é tão difícil de calcular

Muitos sólidos existem
Na vertical, em linha reta
Para que possamos saber
Como vamos calcular

Mostro esse cordel
Que retrata bem o assunto
E apesar de pequeno
Nos é de bom uso

Só basta saber as fórmulas
Pois cada sólido geométrico
Carrega as medidas certas
Para você não errar

E está sempre presente
Na vida de muita gente
Pois até um copo d'água
Tem volume por calcular.

Figura 4. Cordel "Volume".

A abordagem interdisciplinar despertou não somente a motivação por outras áreas do conhecimento, como pelas Artes, Literatura e Língua Portuguesa em suas diferentes formas, mas potencializou competências e habilidades que compreendem está área do conhecimento (Linguagens e Códigos), quais sejam: analisar, interpretar e aplicar os recursos expressivos das linguagens, relacionando textos com seus contextos, mediante a natureza, função, organização, estrutura das manifestações, de acordo com as condições de produção e recepção e compreender e usar os sistemas simbólicos das diferentes linguagens como meios de organização cognitiva da realidade pela constituição de significados, expressão, comunicação e informação.

Assim, os alunos passaram a se apropriar de conhecimentos, com os quais criaram relações sociais constituídas de sensibilidade, criatividade, autonomia e criticidade, características essenciais para transformação da realidade em que estão inseridos.

Outrossim, constatou-se que a prática de ensino na perspectiva da interdisciplinaridade demanda aprofundamento teórico e metodológico, bem como ressignificação do planejamento em virtude da demanda do público-alvo que compreende o campo de atuação.

Considerações

O presente trabalho teve como objetivo nuclear relatar uma prática de ensino de Matemática dos sólidos geométricos a partir da apropriação do gênero literário cordel na perspectiva da interdisciplinaridade. Para isso foi desenvolvida uma estratégia de ensino em uma escola de educação básica pública no sertão paraibano.

Os resultados obtidos são indicativos de que a literatura de cordel pode despertar maior interesse por parte dos alunos e promover a eficiência da aprendizagem da Matemática. Assim, aponta-se a relevância de uma prática de ensino dessa natureza por agregar valor pedagógico potencial para melhora da qualidade de ensino da Matemática. Contudo, depreende-se que é um exercício árduo, porém passível de realização. Portanto, demanda-se por parte do sujeito professor propriedade quanto ao entendimento de uma prática interdisciplinar, bem como da apropriação de recursos didáticos e pedagógicos para o ensino de Matemática.

Referências

Amorim, M. S. (2008). *A permanência de aspectos orais no romance de folheto.* 227p. Tese (Doutorado em Letras) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Andrade, R. M. C. (1995). *Interdisciplinaridade:* um novo paradigma curricular. *Revista Dois Pontos*.

Araújo, P. C. A. (2007). *A cultura dos cordéis:* território(s) de saberes. 257p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

Brasil. (2006). Secretaria de Educação Básica. *Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*, v. 2, Brasília: MEC/SEB, 135p. - (Orientações Curriculares para o Ensino Médio).

Cereja, W. R.; Magalhães, T. C. (2005). *Gramática Reflexiva:* texto, semântica e interação. São Paulo: Atual.

Curran, M. (1998). *História do Brasil em Cordel.* São Paulo: EDUSP, 288p.

Fazenda, I. C. A. (2011). *Integração e Interdisciplinaridade no Ensino Brasileiro*: efetividade ou ideologia. 6. ed. São Paulo: Loyola, 113p.

Ferreira, S. M. M. (2007). *Os recursos didáticos no processo de ensino-aprendizagem:* estudo de caso da Escola Secundária Cónego Jacinto. 69p. Monografia (Graduação em Pedagogia) – Universidade Jean Piaget de Cabo Verde, Cidade da Praia.

Filho Arcanjo, M.; Tavares, A. H. C. (2015). O ensino de geometria numa perspectiva interdisciplinar como iniciativa para uma abordagem transdisciplinar. *Revista Ensino Interdisciplinar,* v. 1, n. 3, p. 277-286. doi:10.2192/recei.v1i3.1699

Galvão, A. M. O. (2001). *Cordel:* leitores e ouvintes. Belo Horizonte: Autêntica, 240p.

Kaleff, A. M. M. R. (2003). *Vendo e entendendo poliedros:* do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 209p.

Lorenzato, S. (1995). Porque não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista,* São Paulo, v. 3, n. 4, p. 3-13.

Nogueira, A. M. (2009). *Origem e características da literatura de cordel.* Ariquemes: FIAR. Disponível em:< http://livros01.livrosgratis.com.br/ea00709a.pdf>. Acesso em: 03/08/2018.

Silva, O. S. da.; Rodrigues, M. A. (2009). *A Interdisciplinaridade na visão de professores de Química do Ensino Médio*: concepções e práticas. In: Anais do VII Enpec, Florianópolis. Disponível em: <http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viienpec/pdfs/781.pdf. Acesso em: 03/08/2018.

Sommerman, A. (2006). *Inter ou transdisciplinaridade?* Da fragmentação disciplinar ao novo diálogo entre os saberes. São Paulo: Paulus, 78p.

Souza, M. F. C.; Castro Filho, J. A de.; Pequeno, M. C.; Barreto, D. C.; Barreto, N. C. (2007). Desenvolvimento de habilidades em tecnologias da informação e comunicação (TIC) através de objetos de aprendizagem. In: Prata, C. L.; Nascimento, A. C. A. A. (Orgs). *Objeto de aprendizagem:* uma proposta de recurso pedagógico. (2007). Brasília: MEC/SEED, p. 161.

Veloso, C. Livros. (1997). In: _____. *Livro.* (1997). Rio de Janeiro: Polygram, 1 CD, faixa 2.

Zóboli, G. (1998). *Práticas de ensino:* subsídios para a atividade docente. São Paulo: Ática, 149p.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Recreando el triángulo de Pascal

Luís Eduardo **Guerra** Betancourt
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
Lewisedward1984@gmail.com
Yannely Del Valle **Núñez** Ruiz
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
Yanunez2@gmail.com

Resumen

Este taller está orientado a la presentación y estudio de ciertos referentes teóricos geométricos (semejanza y simetría) y estrategias didácticas circunscritas al Triángulo de Pascal, permitiendo un aprovechamiento algebraico, desde diversos análisis provenientes de investigaciones recientes como la de Usón y Ramírez (2006) que enriquecen su estudio con relaciones geométricas, entre otras, que surgen a partir de las discusiones generadas en el aula. Además, se observan ilustraciones, propuestas en diversos textos, que muestran dicho triángulo con aplicaciones diversas, en cuadrículas, en fractales, y otras opciones didácticas que de forma amena revelan nuevas relaciones y series numéricas asociadas a las formas geométricas, en lo histórico se revisa la biografía de este matemático, anécdotas y otros personajes vinculados a la época. Las herramientas que serán proporcionadas, facilitarán la visualización de aspectos teóricos de este objeto matemático y la generación de problemas atendiendo la contextualización intra y extra matemática (fractales).

Palabras clave: Triángulo de Pascal, Contextualización, Didáctica, Geometría.

Introducción

El Triángulo de Pascal, constructo matemático vinculante en diversas áreas de esta disciplina, es un elemento fascinante y enriquecedor desde el punto de vista didáctico, donde se puede mostrar en diversas opciones como material de trabajo fundamentado en los conceptos geométricos y algebraicos que contemplan las asignaturas relacionadas con el área. El estudio de este tema permite dinamizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría plana con una perspectiva que haga aflorar la creatividad en los actores involucrados en esta tarea, con la inclusión de los conceptos de la geometría fractal entre otras áreas de las matemáticas.

Con el taller se han planteado una serie de objetivos tales como: dar a conocer ciertos referentes teóricos donde es aplicable el Triángulo de Pascal, hacer un análisis de tópicos geométricos en relación con el Triángulo de Pascal, visualizar la integración de este constructo matemático en relación con otras áreas de las matemáticas, presentar recursos didácticos

referentes al Triángulo de Pascal en relación con diversas áreas de las matemáticas, reconstruir ciertos conceptos geométricos a partir del estudio del Triángulo de Pascal.

Para alcanzar los objetivos planteados, se presentarán diversas actividades que permitirán la articulación e integración de diversos referentes teóricos y didácticos de las Matemáticas en relación con el Triángulo de Pascal.

Pretendiendo así, generar un aula taller, en la que se aspira que cada participante construya y descubra sus propios alcances de aprendizajes, dándole espacio al asombro de generar la novedad en lo que se realiza, para ello se propone un plan de acción donde se busca: a) Complementar cada construcción geométrica con los patrones numéricos sugeridos, b) Resaltar las observaciones que emergan de la discusión sobre los triángulos ya elaborados, c) Constrastar las relaciones con lo fractálico y d) Presentar las construcciones realizadas y su aprovechamiento didácticos.

Referentes teóricos

Son diversos los matemáticos a los que se les acuña el descubrimiento del triángulo aritmético, presentado en la época del renacimiento, que, aunque lleva el nombre del genial matemático Pascal, fue usado anteriormente por otros como Tartaglia, Stifel y Stevin (Ruíz, 2009), luego existió la expansión para $(a+b)^n$ con n entero, que es el llamado teorema del binomio, relacionado con el triángulo, el cual también era conocido por los árabes del siglo XIII. Es por esto que en diversas ocasiones a este aporte matemático se le conoce con el nombre de triángulo de Tartaglia o triángulo de Pascal

El matemático italiano, Nicola Fontana, que nació en el año 1499, conocido como Tartaglia (por su tartamudez) adquirió una reputación de matemático prometedor. A este matemático se le vincula con el estudio de este triángulo aritmético, debido a que según diversos acontecimientos históricos y primeramente en 1535, se dio una competencia entre Tartaglia y Fior, este último un estudiante de Del Ferro que cuando estaba en el lecho de muerte le informó a su pupilo como resolver una ecuación cúbica. Fior confiado por la información que su maestro le había transmitido, sometió a Tartaglia a una serie de preguntas acerca de estas ecuaciones y en menos de dos horas Tartaglia pudo resolverlas. Fior perdió la competencia. Cardano, que presenció la competencia, le solicitó a Tartaglia su solución para incluirla en su libro, a lo que Tartaglia se negó. En 1539, viajó a Milán a visitar a Cardano y en esta ocasión le reveló la solución. Tiempo después, Cardano junto a su asistente Ferrari publicarón las fórmulas y otras derivaciones de éstas y se acreditó a Del Ferro y a Tartaglia el descubrimiento (Ruiz, 2003 y Rey Pastor y Babini,1997).

Pascal es un matemático, cofundador junto a Fermat en el siglo XVII de la teoría matemática de probabilidades, considerada como uno de los cinco progresos progresos principales en el origen de la matemática moderna (Bell, 1949), a parte de dar aportes posteriores junto a Desargues hacia la Geometría Proyectiva Sintética, para su invención, la cual se atenuó hasta principios del siglo XIX, él fue un matemático de grandes alcances, aunque al igual que a Descartes y Leibniz se le recuerde popularmente por otras cosas, pero Pascal fue aún más genuinamente precoz que este último. De muchacho no fue una simple esponja que absorbiera el saber de los demás, sino un matemático creador. A los doce años redescubrió y demostró para sí mismo varios de los teoremas más sencillos de la geometría elemental, por lo cual es de visualizar que su aporte hacia el triángulo aritmetico podría contener enriquecimiento geométrico.

Inmerso dentro de la didáctica, se ha buscado predominar, dentro del ámbito escolar, la contextualización de los contenidos presentes en el triángulo de Pascal, ya sea desde lo intramatemático como lo extramatemático, resaltando comunmente los contenidos algebráicos y aritméticos (Carrrera, 2010), pero desde un enfoque social y natural podria adaptarse al campo geométrico, su desarrollo externalista en proximidad, está dado en el uso de las combinaciones en la vida cotidiana, aunque desde el punto de vista de la naturaleza y el acercamiento de este contenido a lo fractálico, es posible la visualiación del mismo a través de estos ámbitos teóricos.

El triángulo de Pascal es una construcción aritmética partiendo de la suma en donde se consideran los siguientes pasos:

Se inicia colocando el número uno (1) en la fila cero (0)

1 ⟵ fila 0

Luego, debajo, se coloca en la siguiente fila dos uno (1) a los lados del superior

1

1 1 ⟵ fila 1

En las siguientes filas escribimos un 1 en cada extremo y cada número interior es obtenido sumando los dos que están encima de él

1

1 1

1 2 1 ⟵ fila 2

Así sucesivamente se va continuando, hasta obtener el famoso triángulo de Pascal o Tartaglia que se aprecia en la figura 1.

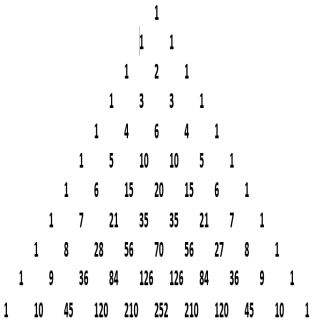


Figura 1. Triángulo de Pascal o Tartaglia

En Iran este triángulo se le conoce como el triángulo de Khayyan (1048-1131), en china se le conoce con el nombre de triángulo de Yang Hui (1238-1298), pero las referencias existentes desde hace 200 años, hacen ubicar al mismo en el renacimiento, otorgándole esta originalidad a Pascal y Tartaglia (Duarte A., Moya A. y otros; 2014b).

Otro concepto vinculante en la presente investigación es lo referente al termino fractal, que fue acuñado por Beniot Mandelbrot, en 1975, para describir formas complejas y este proviene del adjetivo latino fractus que significa “interrumpido”, “irregular” o “fraccionado” y en cierta forma los objetos provenientes de la naturaleza poseen esta característica (Carrera, 2010), en si un fractal es una figura geométrica en la que un patrón se repite pero siempre disminuyendo la escala. Es por esto que los fractales son semejantes entre sí, entre los más

conocidos están, el pentágono de Durero, el árbol de Pitágoras, la esponja de Menger, la alfonbra, el triángulo y tetraedro de Sierpinski. (Mandelbrot, 1996 y Martínez, 1994)

Metodología del taller

El desarrollo del taller se hará en dos partes, la primera basada en un recuento histórico de la generación de este famoso triángulo y los personajes a los cuales se refiere, segundo se propondrán una serie de actividades vinculantes a diversas formas de apreciar el triángulo de Pascal dentro de las matemáticas, desde la parte aritmética, pasando por la algebraica hasta llegar a la geométrica, buscando que las personas participantes conozcan y ejecuten diversas propuestas de trabajar este constructo matemático dentro de su abundante enriquecimiento en problemas y curiosidades, propicios para la generación de una didáctica integrativa de lo intramatemático

Actividades sugeridas

Actividad 1. Triángulo y Cuadrados de cifras de uno (1)

En esta actividad se apreciará las curiosidades presentes entre las cantidades resultantes de los cuadrados de cifras de 1, primero observese bien la construcción de los siguientes cuadrados:

Fila	Potencia	Resultado
0	1^2	1
1	11^2	121
2	111^2	12321
3	1111^2	1234321
4	11111^2	123454321
5	111111^2	12345654321
6	111111^2	1234567654321

En el desarrollo de estas potencias se evidencia una distribución, que es una de las curiosidades de los números, simétricos entre sí, denominados palíndromos, los mismos pueden leerse bien de derecha a izquierda como de izquierda a derecha, esta relación que se presenta también se observa en el triángulo de Pascal pero con cifras desvinculadas (Ver figura 3).

Actividad 2. Triángulo de Pascal, los Números y sus formas

En esta actividad se busca observar las cantidades presentes en cada diagonal con la denominación de los números triangulares y cuadrados, como también otras cantidades que se evidencian en el triángulo.

Los números triangulares o cuadrados, conocidos como guijarros (García, 2006) son aquellos que se les denomina por la forma de agruparse ya sea en forma de triángulos (triangulares) o en forma de cuadrados, los griegos se dieron cuenta que en los primeros se obtenían con sumas de números naturales consecutivos. Los números cuadrados resultan de los cuadrados perfectos pero los griegos se dieron cuenta debido a la forma en que se distribuían las piedras para formar un cuadrado.

Número Triangulares

1, 3, 6, 10, 15, 21 ....



Números Cuadrados

1, 4, 9, 16, 25, 36....



Apreciando el triángulo de Pascal, es posible observar la disposición de los números triangulares, en forma diagonal a partir de la segunda fila en dicho triángulo y los cuadrados son los resultantes de sumar dos de estos números triangulares consecutivos, dispuestos en la misma diagonal.

Números triangulares

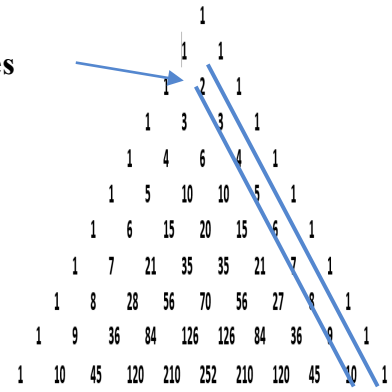


Figura 2. Triángulo de Pascal o Tartaglia y números triangulares

Números Cuadrados

1, 1+3 = 4, 3+ 6 = 9, 6+10 = 16.....

Estas no son las únicas clases de números que podemos encontrar en el análisis interno del Triángulo de Pascal, también podemos encontrar números naturales, tetraédricos, entre otros, formas que dependen de figuras bidimensionales y tridimensionales (Usón y Ramírez, 2006).

Actividad 3. Triángulo de Pascal y el Fractal.

En esta actividad se busca apreciar la relación de este triángulo con algunos contenidos geométricos, tales como la simetría, geometría fractálica, resaltando ciertas cantidades presentes en el triángulo.

Primeramente podemos apreciar en el triángulo de Pascal la existencia de un eje de simetría vertical (Ver Figura 3), término matemático muy utilizado en la naturaleza y en la geometría (Weyl, 1975).

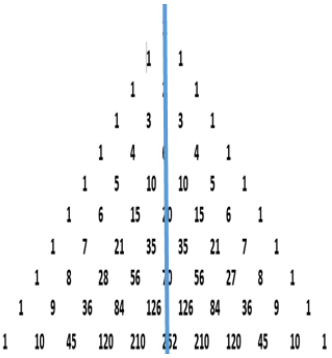


Figura 3. Eje de simetría sobre el Triángulo de Pascal

Para esta actividad, es necesario ubicar los números pares e impares en el triángulo, a los impares le asignaremos el número uno (1) y a los pares el número cero (0), tal como se aprecia en la Figura 4.

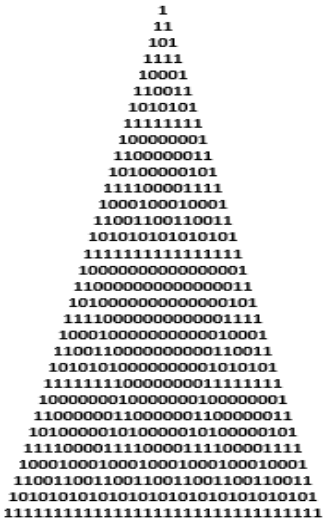


Figura 4. Triángulo en ceros y unos

Se resalta en la distancia ciertos triángulos formados por los ceros (0), de diversos tamaños, pero semejantes entre si.

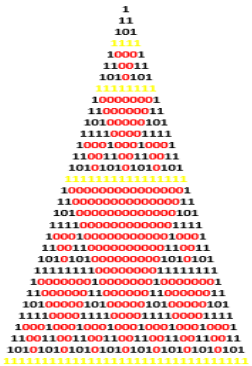


Figura 5. Triángulo de Pascal en ceros y unos (coloreado)

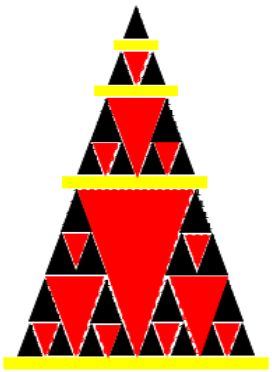


Figura 6. Generación del Triángulo de Sierspinski

Este triángulo que se ha formado (ver figura 6) es semejante al popular Triángulo de Sierspinski, fractal que se puede construir a partir de un triángulo equilátero, generando

triángulos interiores cuyos vértices están en el punto medio de los lados. En este momento de aprovechar para el estudio en geometría fractálica de temas como semejanza, proporcionalidad y congruencia.

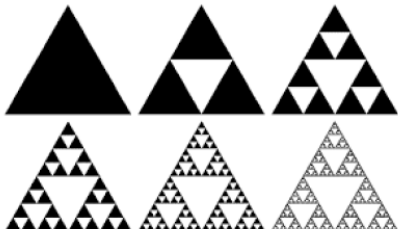


Figura 7. Triángulo de Sierspinski

En la anterior construcción sobre el triángulo de Pascal, se podría decir que la transformación de los impares a uno (1) y los pares a cero (0) es el resultado de dividir cada elemento entre 2 y sustituirlo por el resto de la división. Caso interesante seria seguir haciendo estas divisiones de las cantidades del triángulo de Pascal a ver que sucede, por lo cual se procede a estudiar el caso en que la división sea entre tres (3) y cada valor del triángulo sea sustituido por el resto de la división (ver figura 8). En el mismo se observa la relación de autosemejanza de un fractal (ver figura 9) evidenciada en parte en similitudes existente de acuerdo a las cantidades.

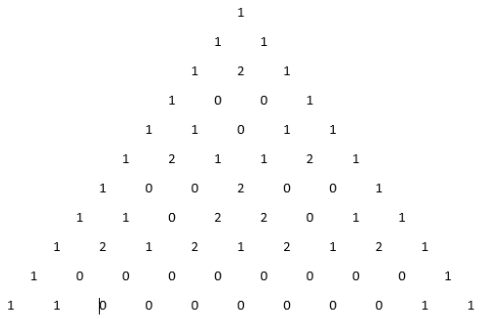


Figura 8. Triángulo de Pascal en cociente

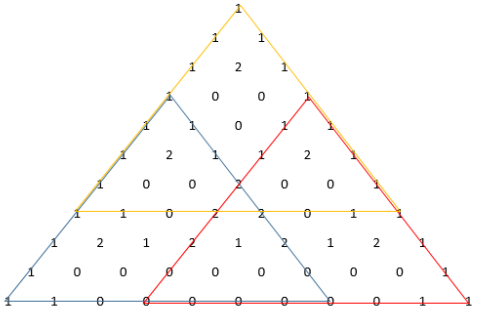


Figura 9. Triángulo de Pascal en cociente 3 autosemejanza

Actividad 4. Triángulo de Pascal y Geometría.

En esta actividad se busca apreciar dentro del triángulo de Pascal las diversas cantidades de rectas y diagonales de polígonos presentes en n puntos.

Observemos primero las rectas que pasan por n puntos no colineales, distribuidos exactamente de manera de obtener un polígono regular y las diagonales presentes.

Número de puntos	Número de rectas	Número de Diagonales en el polígono
1	infinitas	0
2	1	0
3	3	0
4	6	2
5	10	5
6	15	9

7 21 14

En el triángulo de Pascal, si observamos detenidamente aparece esta relación. Cuando se observa en los elementos seleccionados que el valor de la izquierda corresponde a el número de puntos y el de la derecha (ver figura 10) a las rectas que pasan por él, y si ejecutamos la sustracción entre los mismos nos darán el número de diagonales del polígono determinado por dichos puntos.

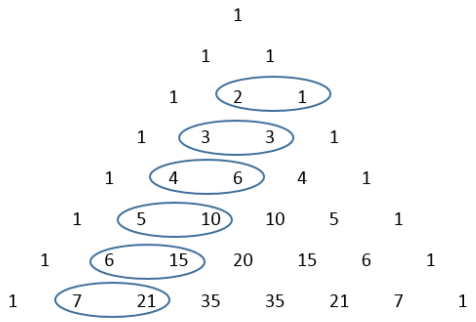


Figura 10. Triángulo de Pascal resaltando relación de rectas y puntos

Consideraciones finales

Son diversas las contribuciones de este constructo hacia las áreas de las matemáticas, más que todo en la probabilidad, con aportes a la teoría combinatoria (Brett, 2003), en el álgebra, visto hacía el desarrollo de los productos notables, y en la combinación de ambas, durante el estudio del binomio de Newton y los Multinomios (Rodríguez, 1995). Dentro del área de la geometría su desarrollo ha sido a través de los aportes con los números y sus formas, las líneas en los polígonos y los fractales, que están presentes en situaciones cotidianas generalmente a través del arte y la naturaleza. Son muchos los aportes que hacia la construcción de nuevas actividades en torno a este constructo se pueden hacer, pero para el tiempo requerido es necesario la adecuación acertada de ciertas actividades concretas.

Referencias y bibliografía

Bell E. (1985). *Historia de las matemáticas*. Traducido de Ortiz R. 2da ed. México: FCE.

Brett,E. (2003). *Actividades de Matemática II* Cs. C.D. JOHNEVE; Caracas.

Brook, F. (1995). El triángulo de Pascal una fuente de inspiración (I). *Revista Números* 26; 27-36.

Carrera I. (2010). Matemática Maravillosa. Caracas: Fundación Polar.

Duarte A., Moya A. y otros (2014a). Naturaleza Matemática 4to año. *Colección Bicentenario*. Caracas.

Duarte A., Moya A. y otros (2014b). La Matemática y el vivir bien 5to año. *Colección Bicentenario*. Caracas.

García L. (2006). *La sonrisa de Pitágoras*. Barcelona: Debolsillo.

Mandelbrot, B. (1996). *Los Objetos Fractales*. Matatemas 13. Libros para Pensar La Ciencia. 4ta. Edición. Barcelona - España.

Martínez, J. (1994). Los Conjuntos de Mandelbrot, de Julia y la Familia de Transformaciones No Lineales. *II^as Jornadas Andaluzas de Didáctica de las Matemáticas*. Epsilon Nº 2. 81-88.

Rey Pastor y Babini (1997). *Historia de la Matemática* Vol. II.. España: Editorial Gedisa.

Rodríguez J. (1995). *El arte de contar*. Mérida: Kariña Editores.

Ruiz A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. Costa rica. EUNED.

Usón, C. y Ramírez A. (2006). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La ambición de trascender las propias limitaciones (VI). *Revista Suma*. 53; 53-60

Weyl, H. (1975). *La Simetría*. Barcelona. España: Promoción Cultural, S.A.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Sobre el teorema de Pompeiu

Geovanni **Figueroa** Mata
Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
gfigueroa@tec.ac.cr

Resumen

Se generaliza el teorema de Pompeiu a triángulos isósceles y escalenos. Se presenta la deducción de la desigualdad que describe la región $\mathcal{R}$ del plano xy compuesta por los puntos P que satisfacen dicho teorema. Además, se caracteriza dicha región para triángulos isósceles y se presentan gráficas que ilustran los diferentes casos analizados. Para ello se usaron scripts implementados con las herramientas GeoGebra y/o Mathematica que permiten visualizar y validar los resultados obtenidos.

Palabras clave: Teorema de Pompeiu, geometría plana, ley de cosenos, lugares geométricos, GeoGebra.

Introducción

En 1936 el matemático rumano Dimitrie Pompeiu (1873-1954) publicó su conocido teorema de la geometría plana (Pompeiu, 1936):

Teorema de Pompeiu

> Dado un triángulo equilátero ABC y un punto P cualquiera del plano, si P no pertenece al círculo Γ circunscrito al triángulo ABC entonces con los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}$ y $\overline{CP}$ se puede formar un triángulo.

La mayoría de los textos de geometría plana no incluyen este interesante resultado, pero existen muchas demostraciones y una gran cantidad de resultados se han propuesto alrededor de dicho teorema (Bényi y Casu, 2009; Sándor, 2005).

Observe que si el punto P pertenece al círculo Γ, entonces la medida de uno de los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}$ o $\overline{CP}$ es igual a la suma de los otros dos. Sin embargo, para un triángulo que tenga al menos dos sus lados con longitudes diferentes, podemos escoger un punto P tal que las medidas de los Segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}$ y $\overline{CP}$ no correspondan a las medidas de los lados de un triángulo. Para lograr esto basta elegir un punto P "*tan cerca*" como sea necesario del punto A de forma que $|\overline{CP}| > |\overline{AP}| + |\overline{BP}|$, como se muestra en la *Figura 1*.

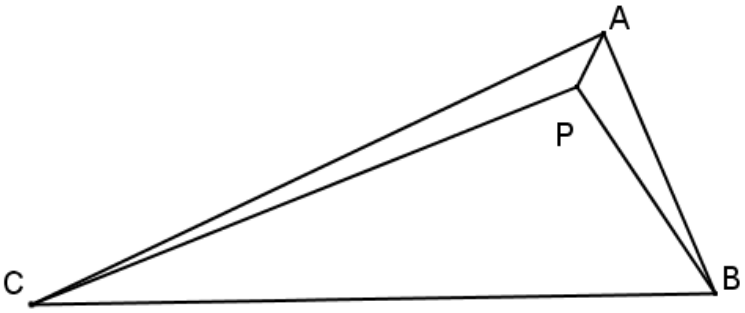


Figura 1. Punto P tal que los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}\ y\ \overline{CP}$ no forman un triángulo.

Esto nos lleva a plantear la siguiente pregunta: ¿Para cuáles puntos *P* del plano xy los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}\ y\ \overline{CP}$ forman un triángulo? Sea $\mathcal{R}$ la región del plano xy que contiene a estos puntos y sea $\mathcal{R}^C$ el complemento, es decir, el conjunto de puntos P para los cuales los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}\ y\ \overline{CP}$ no forman un triángulo.

En el presente trabajo deducimos una desigualdad que describe de forma general la región $\mathcal{R}$ y caracterizamos dicha región para el caso de triángulos isósceles. El trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2, se deduce la desigualdad que describe de forma general la región $\mathcal{R}$, en la sección 3 se deduce la desigualdad que describe la región $\mathcal{R}$ para triángulos isósceles y en la sección 4 se caracteriza la región $\mathcal{R}^c$ para este tipo de triángulos y por último, en la sección 5 se describe gráficamente algunos casos de la región $\mathcal{R}^c$ para triángulos escalenos.

Caracterización de la región $\mathcal{R}$

Dado un triángulo CAB y un punto *P* cualquiera en el plano, como se muestra en la *Figura 2*, los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}\ y\ \overline{CP}$ forman un triángulo si y sólo si

$$|\overline{BP}| + |\overline{CP}| > |\overline{AP}| \quad (1)$$
$$|\overline{AP}| + |\overline{CP}| > |\overline{BP}| \quad (2)$$
$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| > |\overline{CP}| \quad (3)$$

Por comodidad denotemos las longitudes de los lados del triángulo por: $|\overline{AB}| = c,\ |\overline{AC}| = b,$ $|\overline{BC}| = a$.

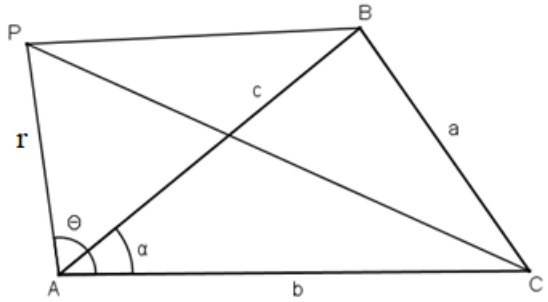


Figura 2. Los segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}\ y\ \overline{CP}$ forman un triángulo.

Sean $\measuredangle ACB = \alpha$, $\measuredangle PCB = \theta\ y\ \ |\overline{CP}| = r$ (como se muestra en la *Figura 2*), al aplicar la ley de cosenos al triángulo CPB obtenemos

$$|BP|^2 = |\overline{CP}|^2 + |\overline{CB}|^2 - 2|\overline{CP}||\overline{CB}|Cos(\theta) = r^2 + a^2 - 2ar\ Cos(\theta)$$

De igual forma, al aplicar la ley de cosenos, pero al triángulo CPA obtenemos

$$|\overline{AP}|^2 = |\overline{CP}|^2 + |\overline{CA}|^2 - 2|\overline{CP}||\overline{CA}|Cos(\theta - \alpha) = r^2 + b^2 - 2br\ Cos(\theta - \alpha)$$

Con lo cual las desigualdades (1), (2) y (3) se transforman respectivamente en

$$r + \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)} > \sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos(\theta - \alpha)} \quad (4)$$
$$r + \sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos(\theta - \alpha)} > \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)} \quad (5)$$
$$\sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos(\theta - \alpha)} + \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)} > r \quad (6)$$

Se puede comprobar que cada una de estas desigualdades, al eliminar los radicales, conducen a la desigualdad (7). A manera de ejemplo, tomando cuadrados a ambos lados de la desigualdad (5) obtenemos

$$r^2 + b^2 - 2br\cos(\theta - \alpha) > r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta) - 2r\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)} + r^2$$

Simplificando

$$2r\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)} > r^2 + a^2 - b^2 + 2br\cos(\theta - \alpha) - 2ar\cos(\theta)$$

Tomando de nuevo cuadrados a ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos

$$4r^2(r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)) > (r^2 + a^2 - b^2)^2 + 4r(r^2 + a^2 - b^2)(b\cos(\theta - \alpha) - \mathrm{a}\cos(\theta)) + 4r^2(b\cos(\theta - \alpha) - \mathrm{a}\cos(\theta))^2 \quad (7)$$

Así, la región $\mathcal{R}$ queda determinada por los puntos $P = (r, \theta)$ que satisfacen la desigualdad (7).

Región $\mathcal{R}^C$ para triángulos isósceles

Si el triángulo CAB es isósceles, $|BC| = a = |AC| = b$ la ecuación (7) se transforma en

$$4r^2(r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)) > r^4 + 4r^3a(\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta)) + 4r^2a^2(\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta))^2$$

Que simplificando obtenemos

$$r^2(3r^2 - 4ra(\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta)) - 4a^2((\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta))^2 - 1)) > 0 \quad (8)$$

Por lo tanto, para que la desigualdad (8) se satisfaga es suficiente que

$$3r^2 - 4ra(\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta)) - 4a^2((\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta))^2 - 1) > 0 \quad (9)$$

Con lo cual la región $\mathcal{R}$ para triángulos isósceles queda determinada por los puntos $P=(r,\theta)$ que satisfacen la desigualdad (9).

El caso de igualdad en (9) corresponde a una ecuación cuadrática que podemos resolver para determinar la frontera de la región $\mathcal{R}$. Calculando el discriminante de dicha ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta &= 16a^2(\cos(\theta-\alpha)+\cos(\theta))^2+16a^2\cdot 3((\cos(\theta-\alpha)-\cos(\theta))^2-1)\\
&= 16a^2\begin{pmatrix}cos^2(\theta-\alpha)+2cos(\theta-\alpha)\cos(\theta)+cos^2(\theta)+3cos^2(\theta-\alpha)\\ -6cos(\theta-\alpha)\cos(\theta)+3cos^2(\theta)-3\end{pmatrix}\\
&= 16a^2(4cos^2(\theta-\alpha)-4cos(\theta-\alpha)\cos(\theta)+4cos^2(\theta)-3)\\
&= 64a^2\left(cos^2(\theta-\alpha)-cos(\theta-\alpha)\cos(\theta)+cos^2(\theta)-{}^3\!/_4\right)\\
&= 64a^2\left(cos^2(\theta-\alpha)-cos(\theta-\alpha)\cos(\theta)+\frac{cos^2(\theta)}{4}+\frac{3cos^2(\theta)}{4}-{}^3\!/_4\right)\\
&= 64a^2\left(\left(cos(\theta-\alpha)-\frac{\cos(\theta)}{2}\right)^2+\frac{3}{4}cos^2(\theta)-\frac{3}{4}\right)\\
&= 64a^2\left(\left(cos(\theta-\alpha)-\frac{\cos(\theta)}{2}\right)^2-\frac{3}{4}sen^2(\theta)\right)\\
&= 64a^2\left(cos(\theta-\alpha)-\frac{\cos(\theta)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}sen\,(\theta)\right)\left(cos(\theta-\alpha)-\frac{\cos(\theta)}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}sen\,(\theta)\right)\\
&= 64a^2\left(cos(\theta-\alpha)-cos\left({}^\pi\!/_3-\theta\right)\right)\left(cos(\theta-\alpha)-cos\left({}^\pi\!/_3+\theta\right)\right)\\
&= 64a^2\left[-2sen\left(\frac{\theta-\alpha+{}^\pi\!/_3-\theta}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\theta-\alpha-{}^\pi\!/_3+\theta}{2}\right)\cdot -2sen\left(\frac{\theta-\alpha+{}^\pi\!/_3+\theta}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left.\cdot sen\left(\frac{\theta-\alpha-{}^\pi\!/_3-\theta}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

De donde

$$\Delta = -256a^2\cdot sen\left(\frac{{}^\pi\!/_3-\alpha}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{{}^\pi\!/_3+\alpha}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{2\theta-\alpha-{}^\pi\!/_3}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{2\theta-\alpha+{}^\pi\!/_3}{2}\right)$$

Con lo cual las soluciones de dicha ecuación cuadrática están dadas por:

$$\begin{aligned}
r_1(\theta) &= \frac{2a(cos(\theta-\alpha)+\cos(\theta))+8a\sqrt{\mathrm{T}(\theta)}}{3}\\
r_2(\theta) &= \frac{2a(cos(\theta-\alpha)+cos(\theta))-8a\sqrt{\mathrm{T}(\theta)}}{3}
\end{aligned} \tag{10}$$

donde

$$T(\theta) = -sen\left(\frac{{}^{\pi}/_{3} - \alpha}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{{}^{\pi}/_{3} + \alpha}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{2\theta - \alpha - {}^{\pi}/_{3}}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{2\theta - \alpha + {}^{\pi}/_{3}}{2}\right) \quad (11)$$

Cuando el triángulo CAB es equilátero se tiene que $\alpha = \frac{\pi}{3}$, con lo cual $T(\theta) = 0$, por lo que la ecuación cuadrática asociada a la desigualdad (9) sólo tiene una solución, dada por:

$$r_1 = \frac{2a}{3}(cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta))$$
$$r_1 = \frac{4a}{3} \cdot \cos\left(\theta - {}^{\pi}/_{6}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (12)$$
$$r_1 = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot cos\left(\theta - {}^{\pi}/_{6}\right)$$

Observe que la expresión (12) es la ecuación de un círculo de radio $\frac{a}{\sqrt{3}}$ que pasa por el origen con centro en $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{6}\right)$, el cual corresponde al círculo Γ circunscrito al triángulo CAB. Por otro lado, dado que la desigualdad (9) en este caso se reduce a $(r - r_1)^2 > 0$, todo punto $P = (r, \theta)$ del plano que no esté en Γ satisface dicha desigualdad (*Figura 3*), tal y como lo afirma el teorema de Pompieu.

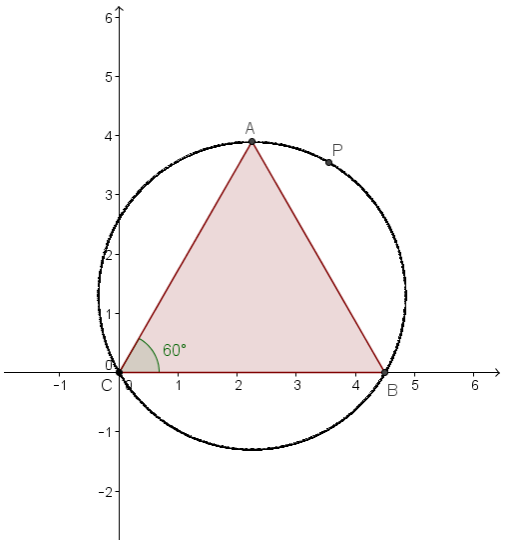


Figura 3. Región $\mathcal{R}^c = \Gamma$ para triángulos equilátero, $\alpha = {}^{\pi}/_{3}$.

Caracterización de la región $\mathcal{R}^c$ para triángulos isósceles

Las ecuaciones en (10) describen la frontera de la región $\mathcal{R}$, lo cual nos permite obtener su representación gráfica. Para esto, observe que $T(\theta)$ puede reescribir de la siguiente forma:

$$T(\theta) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \cos(\alpha)\right)\left(\frac{1}{2} - \cos(2\theta - \alpha)\right)$$

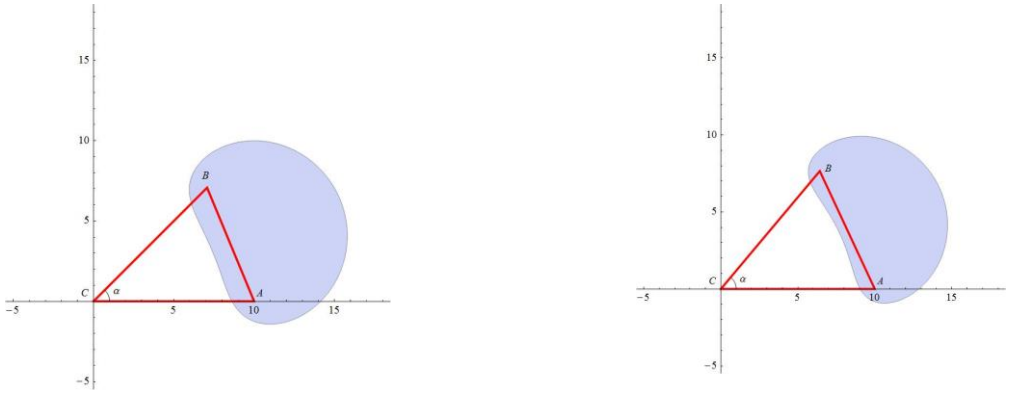
Con lo cual el signo de $T(\theta)$ queda determinado por la expresión $\frac{1}{2} - \cos(2\theta - \alpha)$ ya que

- Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, entonces $\frac{1}{2} - \cos(\alpha) < 0$
- Si $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$, entonces $\frac{1}{2} - \cos(\alpha) > 0$

Esto no permite determinar para un valor dado de α, el dominio de $T(\theta)$ y así poder graficar la frontera de la región $\mathcal{R}$ usando las ecuaciones dadas en (10). Esto nos lleva a distinguir dos tipos de regiones, según sea el valor del ángulo α.

Regiones $\mathcal{R}^c$, con $\alpha \in]0, \frac{\pi}{3}[$

La *Figura 4*, muestran la región $\mathcal{R}^C$ para los casos $\alpha = 45°$ y $\alpha = 55°$ y $a = 10$. Observe que este tipo de regiones tienen una forma semejante a la de un "*riñón*".

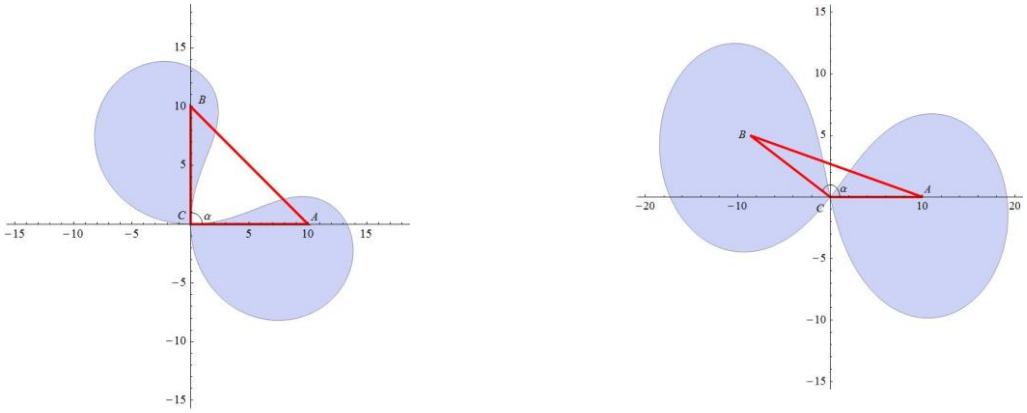


(a) $a = 10$ y $\alpha = 45°$. (b) $a = 10$ y $\alpha = 55°$.

Figura 4. Región $\mathcal{R}^c$ tipo "*riñón*", $\alpha \in]0, \frac{\pi}{3}[$.

Regiones $\mathcal{R}^c$, con $\alpha \in]\frac{\pi}{3}, \pi[$

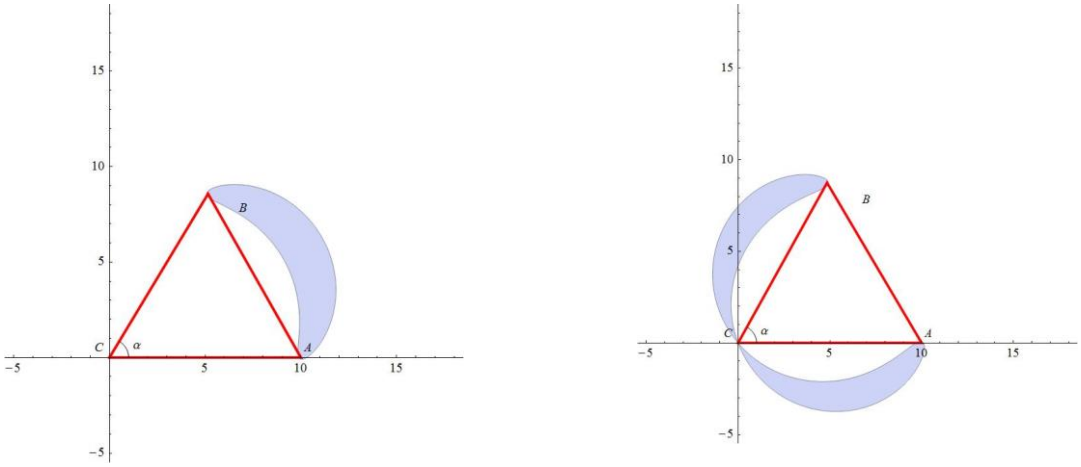
La *Figura 5*, muestran la región $\mathcal{R}^c$ para los casos $\alpha = 90$ y $\alpha = 150°$ y $a = 10$. Observe que este tipo de regiones tienen una forma similar a una "*lemniscata*".



(a) $a = 10$ y $\alpha = 90°$. (b) $a = 10$ y $\alpha = 150°$.

Figura 5. Regiones $\mathcal{R}^c$ tipo "*lemniscata*", para $\alpha \in]\frac{\pi}{3}, \pi[$.

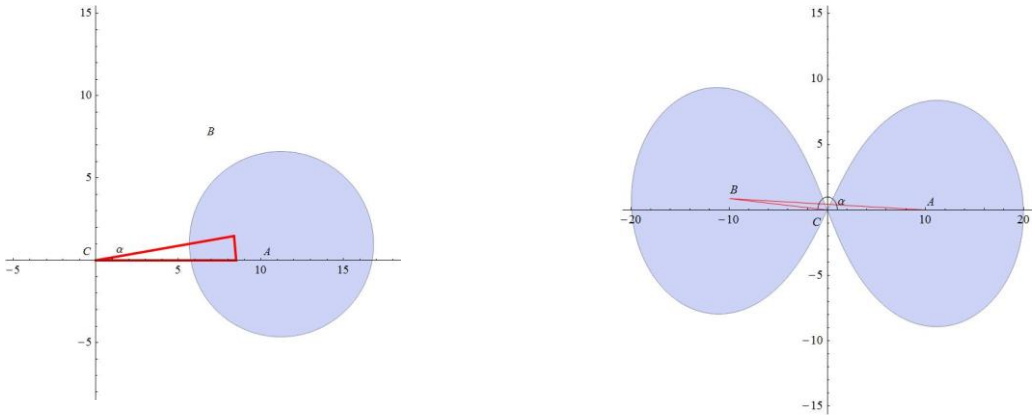
Es interesante analizar el comportamiento de la región $\mathcal{R}^c$ para valores frontera de α, es decir, valores cercanos a $0, \frac{\pi}{3}$ y π. Por ejemplo, cuando $\alpha \to \frac{\pi^-}{3}$ las regiones son similares a una lúnula, como se muestra en la *Figura 6a*. Cuando $\alpha \to \frac{\pi^+}{3}$ las regiones se asemejan a un par de lúnulas como se muestra en la *Figura 6b*. Estas regiones conforme $\alpha \to \frac{\pi}{3}$ convergen al círculo Γ circunscrito al triángulo CAB.



(a) $a = 10$ y $\alpha = 59°$. (b) $a = 10$ y $\alpha = 61°$.

Figura 6. Regiones $\mathcal{R}^c$ cuando $\alpha \to \frac{\pi}{3}$.

Por otro lado, cuando $\alpha \to 0^+$ las regiones son casi circulares como se muestra en la *Figura 7a* y cuando $\alpha \to \pi^-$ la región $\mathcal{R}^c$ es ‘‘casi’’ una lemniscata como se observa en la *Figura 7b*.



(a) $a = 8.5$ y $\alpha = 10°$. (b) $a = 10$ y $\alpha = 175°$.

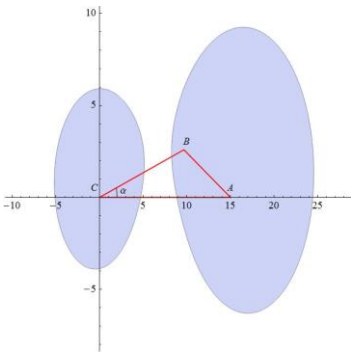
Figura 7. Regiones $\mathcal{R}^c$ cuando $\alpha \to \pi$.

Representación gráfica de la región $\mathcal{R}^c$ para triángulos escalenos

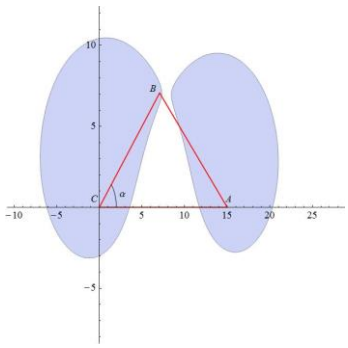
Caracterizar la región $\mathcal{R}^c$ para el caso de triángulos escalenos resulta mucho más complejo que para el caso de triángulos isósceles, pues la desigualdad (7)

$$4r^2(r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta)) > (r^2 + a^2 - b^2)^2 + 4r(r^2 + a^2 - b^2)(b\cos(\theta - \alpha) - a\cos(\theta)) + 4r^2(b\cos(\theta - \alpha) - a\cos(\theta))^2$$

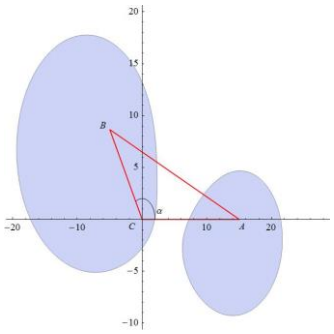
que describe dicha región depende de un parámetro más, a saber b, la longitud del lado $|\overline{BC}|$. Pero, aun así, podemos describir gráficamente algunos casos que nos permiten tener una idea de la posible forma de la región $\mathcal{R}^c$, como se muestra en la *Figura 8*. Pareciera que en este caso la región $\mathcal{R}^c$ siempre es disconexa, pero es parte de las cosas que queda por investigar.



(a) $a = 15, b = 10, \alpha = 15°$.



(b) $\mathrm{a} = 15, \mathrm{b} = 10, \alpha = 45°$.



$\mathrm{a} = 15, \mathrm{b} = 10, \alpha = 120°$.

Figura 8. Región $\mathcal{R}^c$ para triángulos escalenos.

Conclusiones

Se obtuvo una desigualdad que describe de forma general la región $\mathcal{R}$ compuesta por los puntos P del plano xy para los cuales las longitudes de los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CP}$ corresponden a las medidas de los lados de un triángulo, en este sentido se generaliza el teorema de Pompeiu para cualquier tipo de triángulo. En particular se logra caracterizar la región para triángulos isósceles y se presentan algunas gráficas que ilustran la región para el caso de triángulos escalenos. En el desarrollo de esta investigación ha sido fundamental el uso de herramientas como GeoGebra, Octave y/o Mathematica que permitieron visualizar y validar los resultados obtenidos, esto reafirma la importancia de incorporar este tipo de herramientas en el quehacer académico.

Referencias

Bényi, Á., Casu, I. (2009). Pompeiu´s theorem revisited. *College Mathematics Journal, 40*(4), 252-258.

Pompeiu, D. (1936). Une identité entre nombres complexes et un théorème de géometrie élémentaire. *Bull. Math. Phys*. École Polytechnique Bucarest 6, 6-7.

Sándor, J. (2005). On the Geometry of Equilateral Triangles. *Forum Geometricorum*, 107-117.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A beleza da matemática

Maria José **Cáceres** Garcia
USAL - ES
Espanha
majoca@usal.es
Ademir **Basso**
CEPACS - PR
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br

A experiência ora exposta ocorreu por ocasião da I EXPO CEPACS – Exposição de Trabalhos e Produções Científicas, Literárias e Quantitativas, ocorrida no CEPACS – PR (CEPACS, 2018). O objetivo era mostrar à comunidade "A beleza da Matemática" em suas mais variadas formas, deixando claro sua importância no cotidiano e em todas as ciências. Os estudantes proponentes são do 3º ano do Ensino Médio (~ 17 anos) e o público que participou voluntariamente das experiências tinham as mais variadas idades já que eram, em sua maioria, alunos do Colégio, pais de alunos e membros da comunidade. O envolvimento dos estudantes proponentes fui singular, enquanto alguns explicavam os conceitos, outros efetuavam as medidas e outros com a calculadora, encontravam os resultados da beleza da matemática. Acredita-se que o conhecimento trabalhado ocorreu da melhor forma possível.

Neste contexto, a beleza da Matemática foi demonstrada, em uma de suas partes, através de medidas e cálculos como uma pessoa pode constatar sua beleza. Neste caso, a beleza tem um valor, que é simbolizado por B, comparado com o valor de ϕ (*fi*), o número de ouro, com valor aproximado de 1,618. Para se chegar ao número de ouro ou aproximar-se dele, os estudantes proponentes do trabalho, determinavam a razão/divisão da medida da altura (h) da pessoa pela medida da altura do umbigo (u) até o solo do voluntário. A equação/fórmula é:

$$B = \frac{h}{u}$$

É possível com esta fórmula, apenas mudando as incógnitas, descobrir se a pessoa tem um rosto bonito. Nesse caso, divide-se a medida do queixo da pessoa até o início de seus cabelos na testa pela medida de uma orelha à outra em linha reta, o resultado deve se aproximar do número de ouro. Outras medidas do corpo do homem podem ser feitas, usando a mesma fórmula, para descobrir se essa pessoa é bonita matematicamente. Nesse sentido, dividir a distância entre o joelho e o umbigo pela distância entre o joelho e o solo é uma delas, dividir a distância da base do nariz até o queixo pela distância dos olhos até a base do nariz é outra (Smole & Diniz, 2005).

De maneira geral todos os voluntários apresentavam medidas muito próxima à razão áurea, o que os deixavam felizes.

Em outra parte do trabalho, a Matemática mostrava a questão da saúde do ser humano, através de duas medidas matemáticas, uma delas o IMC – Índice de Massa Corporal e a G% - Porcentagem de Gordura. Os cálculos eram feitos com as respectivas fórmulas/equações:

$$IMC = \frac{m}{h^2} \qquad \text{e} \qquad \%\text{G} = \frac{circunferência\ do\ quadril\ (cm)}{h\ .\sqrt{h}\ (m)} - 18$$

Iniciando com o IMC, os estudantes responsáveis pela experiência mediam e calculavam baseados na massa (m) e na altura (h) do colaborador voluntário. Quanto à porcentagem de gordura, os cálculos foram efetuados levando-se em consideração a circunferência do quadril (cm) e a altura (m) do indivíduo participante. Aos voluntários que se distanciavam das medidas "ideais", os estudantes proponentes mostravam uma tabela com as implicações para a saúde.

Noutra parte do trabalho, os estudantes mostraram que a Matemática explica inclusive qual é a idade ideal para uma pessoa se casar, baseando-se no matemático Dennis Lindley (2007) que criou uma pequena equação para descobrir essa idade. Os estudantes calcularam a idade ideal para se casar (M) daqueles que tinham interesse em descobrir (maiores de 16 anos), baseando-se em uma relação entre a expectativa da pessoa (x) somada com a experiência particular no amor (y) com a colaboração da constante de Euler (e). A idade ideal é calculada pela equação/fórmula:

$$M = y + \frac{(x - y)}{e}$$

Por fim, o ciclo do trabalho fechou com um jogo baseado no "Passa ou Repassa", famoso "torna na cara", com questões que envolviam Matemática. O jogo necessitava de dois jogadores que competiam entre eles, a questão era realizada por um estudante mediador, ao término da questão, o jogador que acreditava saber a resposta, apertava um dispositivo e acertando, o adversário levava torna na cara, se não acertasse, ele seria castigado com a torta na cara.

O ambiente onde ocorreu todo o ciclo que mostrava toda a beleza da matemática estava "decorado" com frases que aludiam a esta beleza, que lembrava também da importância que esta ciência teve e tem na evolução da humanidade e inúmeras frases mostrando o humor nesta disciplina (Baroni, Giolo & Pourrat, 2012).

O que se quer apresentar é que nestas cinco etapas da experiência, mostrou-se a beleza da Matemática aos estudantes e demais participantes da I EXPO CEPACS, a beleza pessoal, a beleza proveniente da saúde do indivíduo, a beleza do casamento e por fim, a beleza de conhecer Matemática e perceber que a mesma está imersa em toda atividade humana desde seu nascimento até o final. A participação do público foi excelente, não faltaram elogios ao trabalho, ficando claro a importância da Matemática.

Referências e bibliografia

Baroni, I., Giolo, L.F. & Pourrat, P. (2012). *Piadas nerds*: as melhores piadas de matemática. Campinas.

Cepacs. (2018). *1ª Exposição de Trabalhos e Produções Científicas, Literárias e Quantitativas* - I EXPOCEPACS. Mariópolis - PR: CEPACS.

Lindley, D. (2007). *Idade ideal de casamento*. 2007. Disponível em: http://www.profcardy.com/calculadoras/aplicativos.php?calc=10. Acesso em: 10/10/2011.

Smole, K.S. & Diniz, M.I. (2005). *Matemática*: ensino médio. 5. ed. São Paulo: Editora Saraiva.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área

Melissa Denisse **Castillo** Medrano
Pontificia Universidad Católica del Perú, Maestría en Enseñanza de las Matemáticas.
Perú
melissa.castillo@pucp.edu.pe
Jesús Victoria Flores **Salazar**
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
jvflores@pucp.pe

Resumen

Desde nuestra práctica docente podemos ser testigos que los estudiantes presentan dificultades con el concepto área. Según diversos autores, esto se debe a la forma mecánica en la que se presenta dicho concepto en las aulas, asociado siempre al uso de fórmulas. En esta investigación se utilizó aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica como marco teórico y aspectos de la Ingeniería Didáctica como marco metodológico. Este taller tiene como propósito analizar la reconfiguración que realizan estudiantes de segundo grado de educación secundaria (13 y 14 años de edad) para determinar la medida de área de polígonos. En la primera parte mostraremos cómo se aborda la reconfiguración a través del tangram y la malla cuadriculada. En la segunda parte, se presentará la reconfiguración que realizaron estudiantes de segundo grado de secundaria y cómo esta les permitió determinar la medida de áreas de polígonos.

Palabras clave: reconfiguración, área como magnitud, registro de representación semiótica, aprehensiones.

Introducción

En el Perú menos del 50% de estudiantes a nivel nacional puede responder correctamente problemas vinculados al cálculo de la medida de área según el Ministerio de Educación del Perú (2016). Diversos autores (Douady & Perrin-Glorian (1987), Corberán (1996), Herendiné (2016)) mencionan que estas dificultades responden a la forma de enseñanza que se da en la escuela, enfocada más en la manipulación numérica y algebraica mediante la aplicación de fórmulas, en vez de la exploración de las relaciones geométricas que proporciona la figura.

Frente a esta realidad, surgen otras alternativas para abordar el concepto de área en el aula como la descomposición y composición. Según Duval (2012b), es posible hallar la medida del

área de un polígono a partir de su reconfiguración. Asimismo, existen otras variables que favorecen la operación de la medida del área, como el uso de la malla cuadriculada (Pessoa, 2010). Esto quiere decir que los estudiantes podrían determinar el área de un polígono, como el trapecio por ejemplo, mediante la reconfiguración y la malla cuadriculada sin hacer uso de la fórmula. (Borja, 2015).

En esta investigación nos focalizamos en analizar la reconfiguración para determinar la medida de área de polígonos, realizada por dos estudiantes de segundo grado de educación secundaria (aproximadamente entre 13 y 14 años de edad. Asimismo, analizamos los tipos de aprehensiones que utilizan durante la aplicación de la actividad.

Teoría de Registro de Representación Semiótica

Utilizamos aspectos de la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Duval como marco teórico, centrándonos en el registro figural y en la aprehensión operatoria de reconfiguración. Para Duval (2011) es esencial que en la actividad matemática se puedan movilizar muchos registros de representación semiótica. Según el autor existen cuatro tipos de registros: el registro de lengua natural, el algebraico, el figural y el gráfico. En esta investigación, nos enfocaremos en el registro figural. Según Duval (2004) las figuras juegan un papel fundamental en la comprensión de problemas de Geometría ya que forman un soporte intuitivo para las actividades mediante la exploración.

Duval (2012b) considera a la figura como una aprehensión cognitiva y menciona que existen cuatro maneras diferentes de aprehender el registro figural, según su rol estas son: aprehensión perceptiva, operatoria, discursiva y secuencial; cada una de ellas independiente de las otras. En esta investigación trabajaremos con tres de ellas las cuales describiremos a continuación. La aprehensión perceptiva es la que permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático en el plano o en el espacio. La aprehensión discursiva es aquella que corresponde a la explicación desde las propiedades matemáticas de la figura a las indicadas por la leyenda o por la hipótesis. Y la aprehensión operatoria tiene que ver con las modificaciones o transformaciones que podemos hacer a las figuras para lo cual se distingue tres tipos: la modificación mereológica, la modificación óptica y la modificación posicional (Duval, 1994).

Duval (2012a) menciona que la reconfiguración es un tipo de modificación mereológica que consiste en la descomposición en unidades figurales de la misma dimensión que la inicial, para luego ser recombinadas en otra nueva figura. En la operación de reconfiguración, toda figura geométrica puede ser dividida en sub-figuras de diferentes formas como se observa en la Figura 1.

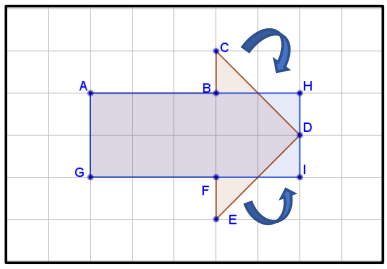


Figura 1. Tratamiento en el registro figural por reconfiguración (Castillo, 2018)

Existen además tres tipos de reconfiguración: estrictamente homogénea, homogénea y heterogénea. La primera se da cuando las sub-figuras de la descomposición tienen la misma forma que la figura inicial; la segunda, cuando las sub-figuras tienen la misma forma entre ellas pero diferente a la inicial; y la tercera, cuando las sub-figuras tienen diferente forma entre ellas y diferente forma a la inicial.

Área como magnitud

Douady y Perrin-Glorian (1987) también mencionan que las dificultades observadas en relación con el concepto medida de área están relacionadas con la introducción prematura de un acercamiento a la medida del área mediante el uso de fórmulas, es decir un enfoque del área como número.

Por esta razón los investigadores proponen la necesidad de construir la noción de área como magnitud. En ese sentido, Da Silva (2011) adopta una organización conceptual para el área en tres cuadros y presenta un esquema inspirado en las investigaciones de Douady y Perrin-Glorian (1987) como se muestra en la Figura 2.

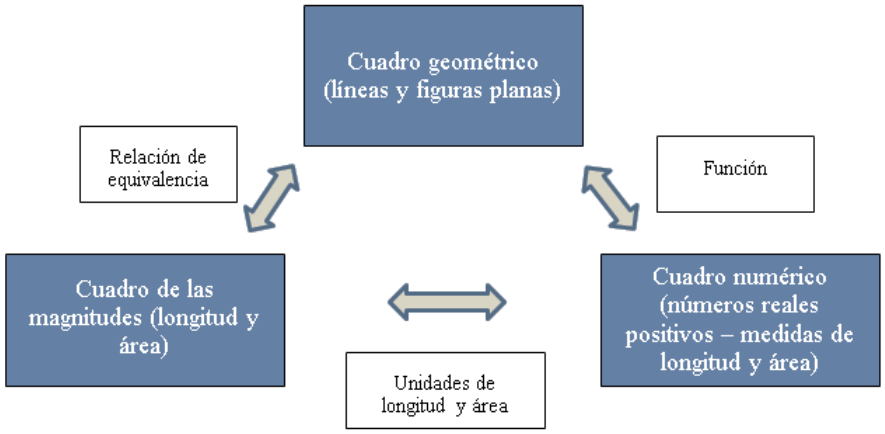


Figura 2. Organización conceptual de referencia del campo de las magnitudes longitud y área, y sus medidas (Da Silva, 2011)

Según Ferreira y Bellemain (2016), el cuadro geométrico está constituido por las superficies planas (cuadrado, rectángulo, triángulo, paralelogramo, trapecio, etc.) y sus propiedades; el cuadro numérico está constituido por las medidas de área de las superficies planas que pertenecen a los números reales positivos; y el cuadro de las magnitudes está constituido por las clases de equivalencia de figuras de la misma área.

Los cuadros están constituidos por objetos que pertenecen a diferentes ramas de la matemática, las relaciones entre los objetos, sus formulaciones y sus imágenes mentales. Es por ello, que consideramos que un estudio del área como magnitud implica establecer distinciones entre el área y la figura, y entre el área y el número. En la distinción entre área y figura, la operación de la reconfiguración juega un papel importante, pues a partir de una figura inicial se puede producir otra figura por la descomposición y recomposición de sus partes, obteniendo así una nueva figura que mantiene la misma medida de área.

Metodología

En cuanto a la metodología, este estudio es de tipo cualitativo y como método utilizamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) pues como nuestro interés es analizar los

procesos que realizan los estudiantes cuando trabajan en situaciones que involucran la medida del área de un polígono mediante la reconfiguración, consideramos que la Ingeniería Didáctica es la más idónea para nuestra investigación.

Como parte de la metodología, se creó dos actividades cada una con cierta cantidad de ítems que promovían en los estudiantes la comparación de áreas de figuras y la reconfiguración de diferentes polígonos para determinar su medida de área. En la Tabla 1 mostramos la organización de la secuencia de actividades y el tiempo utilizado en cada una de ellas:

Tabla 1

Descripción de la secuencia de actividades

Actividad	**Descripción**	**Tiempo**
1. Trabajemos con el Tangram	Realizar reconfiguraciones mediante el uso del Tangram para comparar las áreas de figuras de forma diferente.	80 min
2. Hallemos la medida del área de polígonos	Determinar la medida del área de polígonos usando lápiz y papel mediante el uso de la malla cuadriculada. Movilizar los conocimientos de reconfiguración.	40 min

El propósito de la Actividad 1 fue analizar las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva que realizan los estudiantes mediante el uso del Tangram, pues con esta actividad se buscaba relacionar el cuadro de las magnitudes con el cuadro de las figuras. Mientras que el propósito de la Actividad 2 fue analizar las reconfiguraciones que los estudiantes realizan a diferentes polígonos para determinar la medida de su área, usando lápiz, papel con malla cuadriculada y colores. Asimismo, que los estudiantes movilicen los conocimientos de reconfiguración adquiridos en la primera actividad, es decir lo que se está provocando es relacionar el cuadro de las figuras con el cuadro numérico.

Desarrollo de las actividades y análisis

Si bien esta investigación se realizó con 13 estudiantes de segundo grado de educación secundaria (entre 13 y 14 años) pertenecientes a una institución educativa privada de Lima, en el análisis de las actividades solo se trabajó con dos estudiantes (Sara y Abril) quienes fueron las que mostraron mayor interés durante toda la aplicación y nos proporcionaron mayor información en sus fichas de actividades. En este documento solo mostraremos el análisis a priori y el análisis a posteriori del ítem 1 resuelto por Sara.

Ítem 1

En el ítem 1 se le pidió al estudiante determinar la medida del área de las figuras considerando a cada cuadradito como unidad de medida y luego se le pidió justificar su repuesta, como se muestra en el Figura 3.

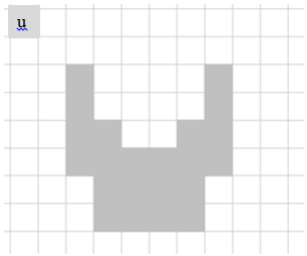


Figura 3. Ítem 1 de la Actividad 2(Castillo, 2018)

Análisis a priori: Las variables didácticas que intervienen en este ítem son: nitidez de la figura (sin malla visible) y posición relativa del polígono en relación con la malla (todos los lados coinciden con la línea de la cuadrícula).

Para resolver este ítem esperamos que el procedimiento más usado sea el conteo de cuadraditos con el que se obtiene como respuesta 22u. Por otro lado, es posible que surjan otros procedimientos como por ejemplo la descomposición de la figura en once rectángulos cuyos lados midan 2 y 1, es decir, una descomposición homogénea. Después, se determine la medida del área de uno de los rectángulos y luego se multiplique este valor por la cantidad de rectángulos que hay en la figura. Otro posible procedimiento sería la reconfiguración heterogénea. Por ejemplo, la figura inicial se puede descomponer en tres sub-figuras: dos rectángulos y un dodecágono. Luego, mediante una aprehensión operatoria de modificación posicional se traslade los dos rectángulos y se obtenga una nueva figura en la que sea más fácil determinar su área (ver Figura 4).

Luego de ello, esperamos que el estudiante movilice su aprehensión discursiva que le permita explicar el procedimiento utilizado para resolver el ítem. Por otro lado, pensamos que este ítem sería el más fácil de la actividad puesto que todos los lados de la figura coinciden con las líneas de la malla cuadriculada.

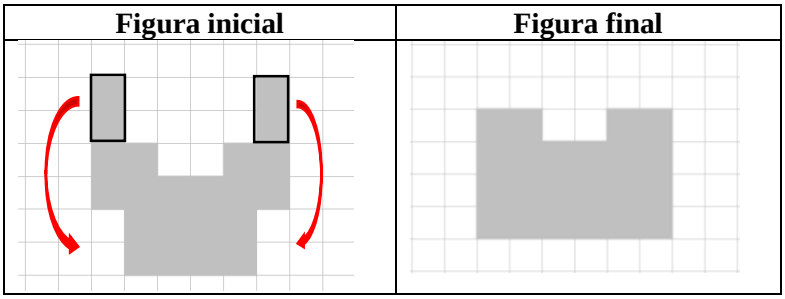


Figura 4. Posible reconfiguración del ítem 1

Análisis *a posteriori de Sara*: ella decidió usar colores como una forma de organizar mejor su trabajo. Como se muestra en el Figura 5, Sara movilizó su aprehensión perceptiva y operatoria de modificación mereológica de descomposición heterogénea, para transformar su figura inicial en dos rectángulos. A diferencia de lo previsto en el análisis a priori, Sara realizó más descomposiciones en la figura. Ella descompuso la figura inicial en cuatro cuadrados, un rectángulo y un octógono. Luego, mediante una modificación posicional, trasladó los dos cuadrados verdes y los dos cuadrados rojos para completar los "espacios vacíos" y formar dos rectángulos, uno cuyos lados midan 6 y 3, y otro cuyos lados midan 4 y 1.

En cuanto a su aprehensión discursiva, podemos observar que Sara usó el término "mover" para referirse al movimiento de traslación, usó la frase "agrandar más de la cuenta" para referirse a una figura compuesta en la que no se puede obtener el área desde un principio. Cuando Sara dice que desea "crear dos figuras que me den el área" pensamos que Sara cree que solo puede calcular el área de figuras conocidas como el rectángulo por ejemplo. Por otro lado, podemos observar que Sara respondió correctamente la medida del área de la figura, sin embargo, falló en la unidad de medida elegida. Ella escogió al centímetro cuando el ítem indicaba que la unidad de medida era u.

Es importante mencionar que en nuestro análisis a priori, habíamos pensado que este sería el ítem más fácil y que por lo tanto les tomaría menos tiempo. Sin embargo, pudimos observar

que las estudiantes se demoraron en responder este ítem porque no encontraba números de forma explícita y por esta razón pensaban que la pregunta no se podía resolver.

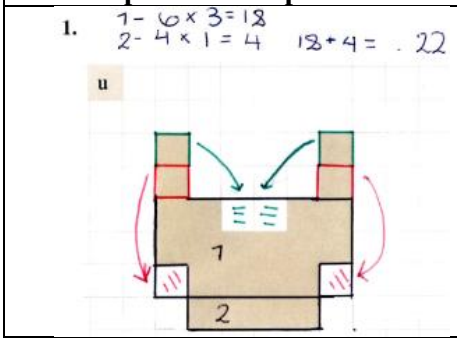
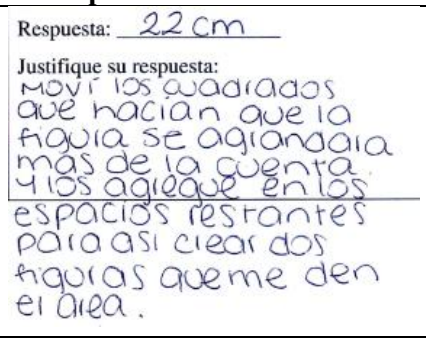
Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	

Figura 5. Reconfiguración del ítem 1 de la Actividad 2 producido por Sara

En el taller se pretende mostrar también el análisis a posteriori de los otros ítems resueltos por Sara cuyas imágenes se encuentran en el Apéndice A.

Después de realizar el análisis de las actividades, pudimos observar que ambas estudiantes (Sara y Abril) utilizaron a la reconfiguración como una estrategia para poder determinar la medida del área de los polígonos presentados en la ficha. No obstante, manifestaron dificultades en la selección de la unidad de medida.

También observamos que ambas estudiantes realizaron más descomposiciones que las que esperábamos en el análisis a priori, pensamos que esto se debe a que su aprehensión perceptiva se apoyó en la cuadrícula de la malla cuadriculada. Por otro lado, ambas estudiantes lograron articular sus aprehensiones perceptivas, discursivas y operatorias. A lo largo de las dos actividades, las estudiantes lograron realizar conversiones de un registro a otro, generando así el aprendizaje.

Conclusiones

El tangram es un recurso que permite la producción de figuras por el proceso de reconfiguración. Este material facilitó que las estudiantes comprendieran que dos figuras que tienen diferente forma pueden tener la misma área, siempre y cuando estén compuestas por la mismas sub-figuras. Asimismo, permitió que las estudiantes realizaran reconfiguraciones homogéneas y heterogéneas.

La malla cuadriculada por su parte, propició la reconfiguración mediante la descomposición y composición de las figuras. Las reconfiguraciones más utilizadas en las figuras fueron las de tipo heterogénea. Asimismo, la malla cuadriculada facilitó el poder determinar la medida del área de los polígonos mediante el conteo de cuadraditos o la generación de rectángulos. En ese sentido, medir el área se entendió por determinar cuántas veces un cuadradito cabía en la figura.

Confrontamos los análisis a priori y a posteriori de las actividades planteadas, afirmamos que se logró validar el uso de la reconfiguración como una operación en el registro figural que permitió obtener la medida de área de diversos polígonos.

Agradecimientos

A la beca PAIP (Programa de Apoyo a la Investigación para estudiantes de Posgrado), a la

beca Marco Polo y a la beca RSU (Responsabilidad Social Universitaria) de la DARS (Dirección Académica de Responsabilidad Social).

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Borja, I. (2015). *Reconfiguración del trapecio para determinar la medida del área de dicho objeto matemático con estudiantes del segundo grado de Educación Secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Castillo, M. (2018). *Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área con estudiantes de segundo grado de Educación Secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes de primaria a la universidad.* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.

Da Silva, J. (2011). *Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático*. Dissertação (Mestrado en Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco.

Douady, R.; & Perrin-Glorian, M. (1987). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Cahier de didactique des mathematiques-IREM*, 37, 1 – 51.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, 17, 121-138.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Trad. Myriam Vega. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática (Obra original publicada en 1995).

Duval, R. (2011). *Ver y ensinar a matematica de outra forma: entrar no odo matemático de pensar: os registros de representaçõe semióticas*. Sau Paulo, Brasil: Proem editora.

Duval, R. (2012a). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*, 7(2), 266-297.

Duval, R. (2012b). Abordagen cognitiva de problema de Geometría em termos de congruencia. Revista electrónica de Educación Matemática. *Revemat*, 7(1), 118-138.

Ferreira, L.; Bellemain, P. (2016). Aprendizagem e o ensino das grandezas geométricas no 6° ano: quais as raízes dos entraves enfrentados pelos alunos?. *I Simpósio Latino-americano de Didática da Matemática.* Mato Grosso do Sul.

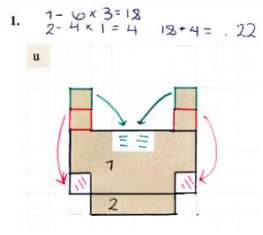
Herendiné, E. (2016). The level of understanding geometric measurement. *Ninth Congress of the European Society of Research in Mathematics Education: CERME 9*, 536-542.

Ministerio de Educación del Perú (2016). *Evaluación Censal de Estudiantes 2015: informe para docentes*. Segundo grado de secundaria. Lima.

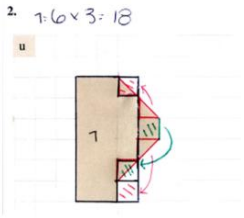
Pessoa, G. (2010). *Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis*. Dissertação (Mestrado en Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco.

Apéndice A
Respuestas de Sara a los 6 ítems de la Actividad 2

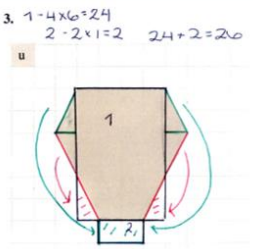
Ítem 1

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	Respuesta: 22 cm Justifique su respuesta: Moví los cuadrados que hacían que la figura se agrandaría más de la cuenta y los agregué en los espacios restantes para así crear dos figuras que me den el área.

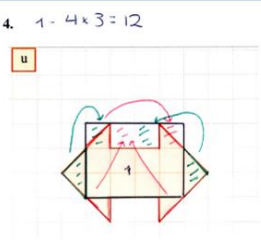
Ítem 2

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	Respuesta: 18 cm Justifique su respuesta: Moví y sume diferentes cuadrados para crear un rectangulo.

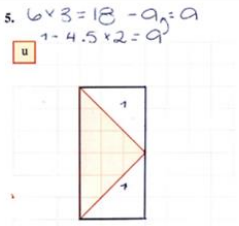
Ítem 3

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	Respuesta: 26 cm Justifique su respuesta: Cree dos rectangulos moviendo los cuadrados. Sume y agregue los cuadrados que no estaban completos.

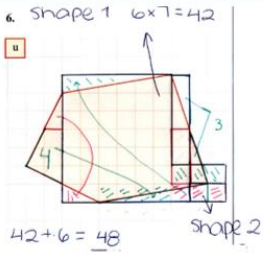
Ítem 4

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	Respuesta: 12 cm Justifique su respuesta: Junte dos cuadrados que estaban hasta la mitad y cree un cuadrado.

Ítem 5

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	Respuesta: 9 cm Justifique su respuesta: Saque el promedio de un rectangulo entero y el espacio restante lo reste.

Ítem 6

Aprehensión operatoria	Aprehensión discursiva
	Respuesta: 48 cm Justifique su respuesta: Moví bastantes cuadrados para poder crear dos figuras.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La medida, en el bosque de los colores

Paula Fernanda **Martinez** Ravelo
Universidad Industrial de Santander
Colombia
pfmr09@hotmail.com
Jenny Patricia **Acevedo-Rincón**
Universidad Industrial de Santander
Colombia
j.p.a.rincon@gmail.com

El presente documento presenta una breve descripción de la planeación de la clase realizada bajo la metodología de *Lesson Study* con un grupo de primer grado de primaria. Aquí serán mostradas las experiencias más significativas de esta propuesta. El aprendizaje de la clase estaba enfocado en el concepto de medir (medidas de longitud de cualquier objeto, o lugar han sido necesarias siempre desde las antiguas civilizaciones hasta nuestros días). En la vida cotidiana de una persona se hace uso constante de las unidades de medidas, así que su enseñanza y aprendizaje, dentro del pensamiento métrico y sistemas de medidas, están establecidas por la necesidad que hay de entenderlas como parte del diario vivir del niño. Así mismo teniendo presente el derecho básico de aprendizaje en el cual fue orientada la clase: (i) realiza medición de longitudes, capacidades, peso, masa, entre otros, para ello utiliza instrumentos y unidades no estandarizadas y estandarizadas; (ii) mide longitudes con diferentes instrumentos y expresa el resultado en unidades estandarizadas o no estandarizadas comunes; (iii) toma decisiones a partir de las mediciones realizadas y de acuerdo con los requerimientos del problema. Además, se hace necesario resaltar que la planeación fue pensada hacia la exploración de los niños y la resolución de varias preguntas por medio de juego de roles y reflexiones dirigidas durante la clase.

Lesson Study es una metodología de origen japonés que privilegia el aprendizaje conjunto de quienes participan. Inicialmente fue propuesto para mejorar las prácticas de matemáticas y ciencias bajo el lema de maestros aprendiendo juntos (Lewis, 2002). Las reflexiones suscitadas por la identificación de necesidades de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, nacen a partir de la observación a un grupo de estudiantes, que al complementar con la experiencia de otros (futuros) profesores, promueven ciclos de discusión y reflexión que posibilitan el aprendizaje a partir de la "problematización de diferentes prácticas de enseñanza en matemáticas" (Acevedo y Fiorentini, 2017, p.40).

Este modelo permite planear, reflexionar y analizar las necesidades de enseñanza, mediante las siguientes fases de ejecución: (i) observación en el salón de clases; (ii) identificación del tema a desarrollar en la clase; (iii) planeación; (iv) implementación de la clase; (v) reflexión y

sistematización de la experiencia. Estas fases serán detalladas en el siguiente apartado, donde se hará la relación del referente teórico de la metodología de *Lesson Study*, con las prácticas de enseñanza y aprendizaje en una institución Educativa.

Luego de varias semanas de observación a dos grupos de primero de primaria, esta era la primera vez en abordar este tema, por lo que se hizo necesaria la búsqueda y lectura de varias y variadas actividades. Se tenía claro que se pretendía planear una clase participativa en donde los niños fueran los protagonistas de esta, pues ellos debían de llegar a encontrarle significado a medir y sus herramientas a usar. Teniendo presente que en los dos grupos de niños tenía 33 estudiantes muy activos y curiosos, escogí una actividad en donde ellos debían tener un rol o misión para descubrir, fue así como la idea de que fueran exploradores surgió para la clase, pues pretendía que ellos iniciaran la construcción de la noción de medida.

La clase pretendía: medir el largo de objetos o trayectos haciendo uso de unidades no estándar. Esta, a su vez, estuvo organizada en varias actividades fue orientada de la siguiente manera: (i) La profesora se ubica al frente del salón, para dar las respectivas instrucciones de toda la actividad y sus partes (Saludo, dinámica de grupos, preguntas acerca de la medición, e instrucciones de silencio para abordar la actividad), se hacen preguntas como ¿Qué es medir?, ¿Les gustaría ser exploradores?, ¿Qué hacen los exploradores?, ¿Cómo se mide?, ¿para que se mide?, ¿Qué usamos para medir?; (ii) la docente lee en voz alta y haciendo mímica con el rostro a los niños un cuento "midiendo en el bosque de los colores" así mismo, crea expectativa entre los niños por medio de los problemas que tiene (la mariposa) uno de los animales del bosque, se hacen algunas preguntas respectivas de la lectura para verificar la comprensión de esta, (iii) seguidamente se muestra en el tablero cómo se debe de llenar la guía entregada y posteriormente se realiza la asignación de los equipos de 6 estudiantes, se asigna nombre de animales respectivos del cuento, (iv) la profesora entrega a cada uno los atuendos de exploradores (escarapela del animal correspondiente y tabla de registro), se asignan los líderes de cada grupo en donde cabe resaltar que fueron elegidos por poca participación observada en las clases anteriores. Los niños se organizan en los grupos de animales para salir del salón y la profesora hace el recorrido por el bosque junto con los grupos exploradores. Los niños toman los datos midiendo con los materiales (huella de los animales por cada grupo) y lo registran. (v) Devuelta al salón, se utiliza la tabla anexa para registrar los pasos de los animales y trayectos propuestos para medir, haciendo preguntas para que los alumnos pudieran reflexionar al respecto de lo realizado. Finalmente, en el cierre de la actividad, donde (vi) la profesora pregunta si la actividad preparada les gustó, los líderes de cada equipo cuentan su experiencia, además verifica si aprendieron algo de la actividad, lo cual fue satisfactorio pues los niños hicieron comentarios como:

- Qué actividad tan divertida

- profe me gusto caminar como un animal

- ahora podemos medir con diferentes objetos, pero necesitamos ponernos de acuerdo con uno para que tener la misma medida.

La planeación de la clase "la medida, en el bosque de los colores" realizada el lunes 17 de septiembre del 2018 en la institución educativa publica, colegio Liceo Patria con dos grupos de primero de primaria, fue única y muy significativa ya que se pudo desarrollar con éxito, cada una de las actividades y preguntas pensadas fueron abordadas y correspondidas con agrado de los niños, sacarlos del aula de clase y ponerlos a trabajar en grupos de animales, fue una buena decisión ya que ellos deben de organizarse y asignarse pequeñas tareas para lograr la actividad. Resalto que los niños en medio de sus diferentes perspectivas a la hora de hacer una observación

o una pregunta lo ponen a prueba como docente dándonos así la oportunidad de ver un enfoque más profundo en un tema en específico.

Quiero resaltar que el trabajar con material concreto ayuda a que esta actividad sea más real, los estudiantes se apropien de las tareas asignadas facilitando así su desarrollo y aprendizaje, los materiales diseñados fueron apropiados para la implementación de las diferentes actividades.

Por mejorar, hubiera sido ideal trabajar el tono de voz más alto, pero contando con que son niños, se entiende que es algo normal en el aula de clase. El tiempo que se planeó para llevar a cabo la clase fue suficiente. Respecto a las preguntas planteadas y las situaciones problema que fueron abordadas, hizo que los estudiantes estuvieran siempre atentos y con el foco en terminar la actividad bien, teniendo presente si lo que hacía estaba bien o no, lo cual me agrado demasiado ya que eran los niños quienes debía validar los proceso, discutir si lo hacían bien, confrontar por medio de argumentos y dar una aprobación de lo encontrado. Siempre hubo trabajo en equipo respectando las tareas asignadas, si se veían en aprietos que no podían resolver me llamaban y ante una nueva pregunta que les hacía iniciaban la resolución nuevamente, hasta llegar al resultado y registrarlo en la tabla, buscando en ellos crear argumentos y construcción del concepto trabajado.

Podría concluir que el éxito de la clase está enfocado al tiempo, la dedicación, las constante revisiones que se le hicieron a las actividades y el análisis previo de cada pregunta con la respuesta suministrada. La participación de los estudiantes fue fundamental pues estos eran los encargados de que la clase fuera evolucionando por cada uno de los aportes. El hecho de tener observadores en la clase es bueno en la medida de que le dan un punto de vista o sugerencias para poder poner en práctica a la hora de desarrollar nuevamente la actividad como lo fue con el segundo grupo abordado, pues se hizo la retroalimentación de la primera clase con sus observaciones y se llevaron a cabo en la segunda clase lo cual mejoro notablemente tanto las preguntas que se les hacía como las respuestas de ellos y comprensión en el tema abordado. El trabajar con niños en demasiado gratificante porque es un aprendizaje mutuo y constructivo integralmente.

Referencias y bibliografía

Acevedo, J.; Fiorentini, D. (2017). A ‘Glocal’ *Lesson Study: the case of pedagogical practices in mathematics.* International Journal for Research in Mathematics Education, vol. 7(2), pp. 24-44.

Lewis, C. (2002). *Lesson Study:* A Handbook of Teacher-Led InstructionalChange. Philadelphia, PA: Research for Better Schools, Inc.

MEN (2016). Derechos básicos de aprendizaje-Matemáticas. Recuperado el 17 de sept 2018 de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Pesquisas em Psicologia da Educação Matemática: contribuições para o ensino e a aprendizagem da geometria

Nelson Antonio **Pirola**
Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP
Brasil
npirola@uol.com.br

Resumo

A pesquisa tem como principal objetivo investigar os trabalhos produzidos no âmbito do ensino e aprendizagem da geometria escolar, no que se refere às suas contribuições para o trabalho do professor da Educação Básica. A fonte de dados se constituiu na produção científica dos dois maiores grupos brasileiros de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática – PME – de duas universidades estaduais paulistas. O delineamento utilizado foi a pesquisa documental e foram analisadas 12 pesquisas desenvolvidas em níveis de mestrado e doutorado. A análise dos dados apontou 2 eixos de contribuições para o trabalho do professor, em sala de aula: Eixo 1 – ensino e aprendizagem: valoriza aspectos referentes aos exemplos e contraexemplos e atributos definidores de figuras geométricas; Eixo 2- formação de professores: necessidade de trabalho com os conteúdos matemáticos, principalmente na formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras chave: geometria, ensino, aprendizagem, pesquisas, formação.

Introdução

O PROCAD – Programa Nacional de Cooperação Acadêmica da Coordenação Acadêmica da Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior, CAPES, é desenvolvido pelo Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho, UNESP/Bauru, desde 2015, em parceria com outras universidades brasileiras: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e a Universidade Federal de Sergipe. O tema central do PROCAD é a formação de educadores em Ciências e Matemática por meio das aproximações entre ensino e pesquisa. Este artigo traz uma investigação, no âmbito do PROCAD, e que teve como objetivo analisar as contribuições de trabalhos de mestrado e doutorado, com ênfase no processo de ensino e aprendizagem da geometria escolar, desenvolvidos por dois grandes grupos de pesquisa brasileiros: O GPPEM, Grupo de Pesquisa

em Psicologia da Educação Matemática, da UNESP/Bauru e o PSIEM, Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP.

O interesse em investigar esse tema se deve ao fato de o ensino de geometria ainda continuar sendo relegado a um plano secundário. Pavanello (1993), já na década de noventa denunciava o abandono do ensino de geometria nas escolas brasileiras. Embora algumas ações, em termos de políticas educacionais tenham apresentado alguns avanços, como a execução de programas de formação continuada de professores, como o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa, e o Plano Nacional do Livro Didático, com o objetivo de melhor a qualidade dos livros didáticos utilizados nas escolas públicas brasileiras, o que se percebe é uma ausência do ensino de conteúdos de geometria ou um ensino conduzido de forma equivocada, alicerçado em procedimentos prontos e acabado, embasado na memorização arbitrária de fórmulas e procedimentos, como apontam os trabalhos de Silva (2018) e Souza (2018).

Os Grupos de pesquisa GPPEM e PSIEM têm se dedicado ao estudo de vários temas relacionados com os processos de ensino e aprendizagem da Matemática escolar e, entre eles, está a geometria. Embora as pesquisas desenvolvidas por esses grupos apresentem resultados importantes no campo da cognição, como os de Pirola (2000), Tortora (2014) e Souza (2014), e no campo da afetividade, como as pesquisas de Nascimento (2008) e Morais (2018), percebe-se que tais estudos ainda estão longe de serem utilizados/refletivos pelos professores da Educação Básica. Pirola, Sander e Silva (2016) destacam que a transferência dos resultados de pesquisas desenvolvidas na academia tem se constituído em um dos maiores desafios dos pesquisadores da área educacional. De acordo com esses autores, muitos são os fatores para que isso ocorra, entre eles são destacados os problemas na divulgação de pesquisas em que a maior parte dos professores ou não tem acesso a elas, ou, em virtude da carga horária excessiva de trabalho em sala de aula, não conseguem encontrar tempo para os seus estudos.

Pirola, Sander e Silva (2016) apresentam algumas possibilidades para que as pesquisas científicas, desenvolvidas nas universidades, possam ser discutidas pelos professores. Entre elas destacam o horário de trabalho pedagógico (HTP), presentes na maior parte das escolas brasileiras. Nóbrega e Casavechia (2008) apontam que esse horário tem sido subutilizado, muitas vezes caracterizando-se por um momento destinado a resolver problemas burocráticos da escola. O HTP poderia ser aproveitado como um espaço para aproximações entre as pesquisas e o ensino da Matemática escolar, além de se constituir em um momento de formação continuada dos professores. No campo da geometria, poderiam ser discutidas pesquisas que abordam os processos cognitivos e afetivos no desenvolvimento do pensamento geométrico, uso de tecnologias e de diferentes materiais didáticos para a aprendizagem de conceitos geométricos.

Metodologia

A pesquisa tem caráter bibliográfico que, de acordo com Fonseca (2002) é desenvolvida a partir de levantamento de referências teóricas já publicadas em diferentes meios, como eletrônico, livros, revisas, entre outros. Ainda, de acordo com esse autor, na pesquisa bibliográfica procuram-se essas referências com o *"objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a reposta"* (Fonseca, 2002, p. 32).

A fonte de dados se constituiu em teses e dissertações, sobre ensino e aprendizagem de geometria, produzidas por dois grandes grupos de pesquisa: GPPEM e PSIEM. Esses grupos foram escolhidos por terem uma vasta produção na pesquisa em Psicologia da Educação

Matemática e por desenvolverem pesquisas, com um olhar alicerçado em teorias da Psicologia, sobre aprendizagem de conceitos geométricos.

Foram seguidas as seguintes etapas: 1- Seleção de todos os trabalhos de mestrado e doutorado produzidos pelos dois grupos de pesquisa; 2- seleção dos trabalhos cuja temática era ensino e aprendizagem da geometria escolar; 3- leitura, fichamento e resumo de todos os trabalhos, com enfoque nas contribuições que os trabalhos podem dar ao professor da educação básica.

Com base nos critérios elencados acima, foram selecionados os seguintes trabalhos: Tortora (2014), Proença (2008), Kochhann (2007), Nascimento (2008), Moraco (2008), Silva (2018), Silva (2016), Rezi (2001), Viana (2000,2005), Pirola (1995, 2000) e Souza (2018).

A análise dos trabalhos permitiu a identificação de dois eixos: Eixo1: ensino e aprendizagem de geometria; Eixo 2: formação de professores.

Análise e discussão dos resultados

No que diz respeito ao **eixo 1,** os trabalhos de Pirola (1995),Tortora (2014), Proença (2008), Viana (2005), Souza (2018) e Moraco (2008) investigaram os conhecimentos que os alunos da Educação Básica possuíam em relação aos conceitos geométricos. Todos os trabalhos apontaram o baixo conhecimento desses alunos em geometria. As maiores dificuldades encontradas pelos alunos, participantes dessas pesquisas, se concentraram na identificação de atributos definidores das figuras geométricas, na diferenciação entre exemplos e contraexemplos de figuras planas e espaciais. Além disso, o trabalho de Rezi (2001) que realizou um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria, mostrou a dificuldade dos estudantes do ensino médio no processamento e manipulação de imagens mentais. Esses mesmos resultados também foram encontrados por Viana (2005). O trabalho de Moraco (2008) mostrou a dificuldade de alunos do ensino médio na representação mental de figuras geométricas tridimensionais. O trabalho de Tortora (2014) investigou o desenvolvimento de habilidades básicas de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. De acordo com Pirola (2013), problemas como os identificados nas pesquisas citadas anteriormente, apontam para um problema que tem sido bastante recorrente no ensino da geometria que é uma ênfase muito grande no ensino de procedimentos, em detrimento ao ensino de conceitos.

Os resultados dessas pesquisas podem mostrar ao professor da educação básica: 1- a importância, no processo de formação de conceitos geométricos, do trabalho com os atributos definidores (AD) (características das figuras geométricas que permite fazer relações e diferenciações entre as figuras geométricas). Além disso, o trabalho com os AD pode ajudar o professor a desenvolver nos alunos as relações superordenadas (relações que vão dos casos mais específicos aos mais gerais) e subordinadas (relações que vão dos casos mais gerais aos mais específicos); 2- o trabalho com os exemplos e contraexemplos é extremamente importante para a construção de conceitos e para evitar o processo de supergeneralização que ocorre quando são apresentados contraexemplos em pouca quantidade ou excessivamente parecidos. Como ilustração, o estudo de Pirola (1995) mostrou que um quadrado rotacionado era considerado, por uma grande dos estudantes do Ensino fundamental, como sendo um contraexemplo de quadrado, conforme mostra o trabalho de Pirola (1995). Dessa forma, os resultados dessas pesquisas descritas nesse eixo podem levar o professor à reflexão de que o trabalho com atributos definidores e exemplos e contraexemplos são essenciais para a formação de conceitos.

De acordo com Pirola, Sander e Silva (2016), as pesquisas podem se aproximar ainda mais dos professores por meio dos Mestrados Profissionais (MP) desenvolvidos no Brasil, destinados a professores da Educação Básica. De acordo com esses autores, no MP os professores desenvolvem os produtos educacionais, a partir de problemas identificados em suas aulas. O trabalho de Souza (2018) identificou dificuldades dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental no desenvolvimento de habilidades geométricas. Diante disso, a pesquisadora elaborou uma história em quadrinhos (HQ) valorizando os atributos definidores e exemplos e contraexemplos de figuras bidimensionais e tridimensionais. Além de trabalhar com conceitos a partir da teoria das habilidades de Hoffer (1981), a HQ teve um caráter motivador na aprendizagem das crianças.

No que diz respeito ao **eixo 2** os trabalhos de Kochhann (2007), Nascimento (2008), Silva (2018), Silva (2016) e Pirola (2000) mostram as dificuldades conceituais em geometría apresentada por professores que atuam nos anos iniciais do Ensino fundamental.

Os problemas conceituais evidenciados pelos alunos da Educação Básica, descritos nas pesquisas de Pirola (1995), Souza (2018) e Proença (2008), relacionados aos atributos definidores, exemplos e contraexemplos, também foram identificados nos professores.

Dessa forma, as pesquisas de Kochhann (2007), Nascimento (2008), Silva (2018), Silva (2016) e Pirola (2000) contribuem com o ensino de geometria, na medida em que identificam a fragilidade dos cursos de formação inicial no que se refere ao conhecimento geométrico. Neste sentido, para Pirola (2013) os programas de formação continuada pode ser um caminho possível para que os professores possam encontrar fundamentos teóricos e metodológicos para a reflexão da própria prática docente.

As pesquisas elencadas nos dois eixos também mostram a importância de articulação entre os conhecimentos declarativos e de procedimentos. De acordo com Sternberg (2000) o conhecimento declarativo diz respeito ao "o que é", ou seja, á formação conceitual. Já o conhecimento de procedimento corresponde ao "como". Sendo assim, o que sabemos sobre uma determinada figura geométrica, como por exemplo, atributos definidores, exemplos e contraexemplos, é o conhecimento declarativo. A sequencia de ações para executar uma tarefa, como por exemplo, resolver uma equação, diz respeito ao conhecimento de procedimento. Dessa forma, o estudo de Pirola (2000) indica algumas possibilidades dessa articulação.

Conclusões

Esta pesquisa teve como principal objetivo investigar algumas contribuições de pesquisas desenvolvidas no campo da Psicologia da Educação Matemática, no campo do ensino e da aprendizagem da geometria escolar, produzidas por dois grupos de pesquisa.

A análise dos estudos, distribuídos em dois eixos: ensino e aprendizagem de geometria e formação de professores apontam para:

1- a necessidade de o professor considerar, na formação de conceitos geométricos, os atributos definidores, exemplos e contraexemplos de figuras geométricas planas e tridimensionais. Esse procedimento pode levar os alunos a superarem as dificuldades de inclusão de classes das figuras geométricas, bem como evitar os processos de supergeneralização;

2- A necessidade de desenvolvimento de programas de formação continuada para professores dos anos iniciais do Ensino fundamental que valorizem não somente os

aspectos metodológicos, mas também o conhecimento geométrico em seus aspectos declarativos e de procedimentos. Além disso, destaca-se a importância de se valorizar os HTP como um momento de aproximação de pesquisas acadêmicas com o trabalho do professor em sala de aula;

3- A necessidade de o professor utilizar diferentes recursos metodológicos, incluindo as tecnologias da informação e conhecimento, para o desenvolvimento das habilidades geométricas;

4- A necessidade de articulação dos conhecimentos geométricos com diferentes campos das ciências, artes e cultura;

É Importante e desejável que os cursos de licenciaturas, prevejam em seus projetos pedagógicos, momentos para se tratar das articulações entre as pesquisas e o ensino da Matemática escolar, seja por meio do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) e projetos de iniciação científica, seja por meio das transposições didáticas presentes em cada disciplina do curso.

Referências

Fonseca, J. J. S. (2002). *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: UEC. Apostila.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher,* NCTM, volume 74, p.11-18.

Klausmeier, H. J. & Goodwin, W. (1977). *Manual de Psicologia Educacional: aprendizagem e capacidades humanas.* Tradução de Abreu, M. C. T. A. São Paulo: Harper & Row.

Kochhann, M. E. (2007). Gestar: formação de professores em serviço e a abordagem da geometria. *Tese* (*Doutorado em Educação para a Ciência*). Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Moraco, A. S. C. T. (2006). Um estudo sobre os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do Ensino Médio**.** *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)*. Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Morais, J. A. R. S. Atribuição de sucesso e fracasso e as crenças de autoeficácia Matemática: Um estudo com alunos do Ensino Médio. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)* - Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Nascimento, A. A. S.B. (2008). Relações entre os conhecimentos, as atitudes e a confiança dos alunos do curso de licenciatura em matemática na resolução de problemas geométricos. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)*. Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru

Nóbrega, L. & Casavechia, T. M. (2008). Hora de Trabalho Pedagógico: desafio e controvérsias. In: Basso, I.; Rocha, J. C. R.; Esqueda, M. D. *Anais do II Simpósio Internacional de Educação Linguagens Educativas: perspectivas interdisciplinares na atualidade.* Bauru: USC.

Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Zetetiké*, v1, n. 1, 7-17.

Pirola, N. A.; Sander, G. P. ; Silva, G. A. (2006). Transferência dos resultados de pesquisas para o ensino da Matemática escolar: contribuições das investigações sobre atitudes em relação à Matemática. *In: XII Congreso Argentino de Educación Matemática. Buenos Aires. Libro de Resúmenes XII CAREM*, 2016. p. 32-33.

Pirola, N. A.. (2013) Algumas contribuições de pesquisas em Psicologia da Educação Matemática. *Tese (Livre-Docência em Educação Matemática)*. FC/UNESP – Bauru.

Pirola, N. A. (1995). Um estudo sobre a formação de conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos do 1º grau. *Dissertação (Mestrado em Educação)* – Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas.

Pirola, N. A. (2000). Solução de problemas geométricos: dificuldades e perspectivas. *Tese (Doutorado em Educação Matemática)* – Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas.

Pirola, N. A**.**. (2013). Algumas contribuições das pesquisas em Psicologia da Educação Matemática para o ensino de geometria. In: Groenwald, C. L. O. & Silva, M. A.. (Org.). *Educação Matemática - Contribuição para as séries finas do Ensino Fundamental e Médio.* 1ed.Canoas: Editora da Ulbra. v. 1, p. 173-188.

Proença, M. C. (2008) Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)*. Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Rezi, V. (2001). Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria**.** *Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)* – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Silva, B. A. C. (2016). Geometria no ciclo de alfabetização: um estudo sobre as atitudes dos alunos do ciclo de alfabetização diante da geometria e suas relações com a aprendizagem. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)* - Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Silva, G. A. (2018). O conhecimento declarativo do professor alfabetizador no ensino de geometria. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)*. Pós-Graduação FC/UNESP – Bauru.

Souza, P. P. F. C.. (2018). *O desenvolvimento do pensamento geométrico: uma proposta de recurso didático por meio da HQ*. Dissertação (Mestrado em Docência para a Educação Básica). Pós-Graduação. FC/UNESP – Bauru.

Sternberg, R. (2000). *Psicologia cognitiva*. Trad. Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: ArtMed.

Tortora, E. (2014). Resolução de problemas geométricos: um estudo sobre conhecimentos declarativos, desenvolvimento conceitual, gênero e atribuição de sucesso e fracasso de crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)* - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

Viana, O. A. O. (2005). Componente da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria**.** *Tese (Doutorado em Educação)*. Faculdade de Educação - Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Campinas.

Viana, O. A. (2000). O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. *Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)* – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La Elipse en la Métrica del Taxista

Wilson Jairo **Pinzón** Casallas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wjpinzonc@udistrital.edu.co
Wilson **Gordillo** Thiriat
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wgordillot@udistrital.edu.co
Orlando **García** Hurtado
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
ogarciah@udistrital.edu.co

Resumen

Este artículo presenta una propuesta didáctica para la comprensión de la elipse en estudiantes de primer semestre de la asignatura de cálculo diferencial de ingeniería topográfica, empleando la métrica del taxista, que permite trabajar diferentes representaciones semióticas de la misma con la convicción de que el estudiante entiende la elipse cuando transita entre las distintas representaciones semióticas. La elección de estas métricas se debió a la utilización que tienen los estudiantes de Ingeniería Topográfica para medir. Consideramos que el énfasis en la ecuación cartesiana de la elipse promueve la pérdida de su estructura como lugar geométrico y presenta resultados interesantes y sorprendentes que permiten el desarrollo de un aprendizaje más crítico y significativo.

Palabras clave: didáctica, lugar geométrico, métrica del taxista, elipse.

Introducción

Descripción de la problemática y objetivos de investigación

La elipse es un objeto matemático que se trata en nuestra universidad en la asignatura cálculo diferencial, correspondiente al primer semestre de la ingeniería topográfica. En donde se comienza el uso de técnicas analíticas, y se espera que los estudiantes puedan reconocer cónicas a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan. Los estudiantes que han trabajado la elipse bajo el enfoque tradicional, si bien comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen, y son capaces de graficarlas, presentan grandes dificultades para entenderla como un

lugar geométrico, como se observó en la investigación realizada por Bonilla y Parraguez (2013) sobre la elipse. Con el objetivo de ver las diferentes representaciones semióticas que pueden elaborar los estudiantes sobre una situación planteada en el aula se diseñó esta investigación, en donde los artefactos utilizados en las representaciones son creación propia de los estudiantes.

Marco teórico

¿Qué comprensión es mejor para el aprendizaje de la elipse? Para hacer una elección entre la comprensión relacional y la comprensión instrumental de la elipse, el problema ya debe haber sido identificado y, por lo tanto, comprendido, esto está dentro de la paradoja del presente cognitivo. Es decir, se debe aprender en contexto, se debe entender lo que se aprende, esto permite que no sea olvidado y cuando se necesita solo con recordar una parte se puede reconstruir el todo, toda esta reconstrucción no sería posible sin una comprensión instrumental, por todo esto el aprendizaje de las matemáticas no puede ser memorístico, porque se olvida cuando pasa la evaluación; en otras palabras, se aprende para pasar la evaluación.

La comprensión relacional permite que el aprendizaje de las matemáticas construya una estructura conceptual (esquema) a partir de la cual su poseedor puede (en principio) producir un número ilimitado de planes para llegar desde cualquier punto de partida dentro de su esquema hasta cualquier punto de llegada.

Este tipo de aprendizaje es diferente en varios aspectos del aprendizaje instrumental.

- Los medios se independizan de los fines particulares que deben alcanzarse.
- La construcción de un esquema dentro de un área de conocimiento dada se convierte en un objetivo intrínsecamente satisfactorio en sí mismo.
- Cuanto más completo sea el esquema de un estudiante, mayor será su confianza en su propia capacidad para encontrar nuevas formas de "llegar hasta allí" sin ayuda externa.
- Pero un esquema nunca está completo. A medida que nuestros esquemas se amplían, nuestra conciencia de las posibilidades se amplía. De esta manera, el proceso a menudo se vuelve auto-continuo.

Por lo anteriormente dicho se podría tener en cuenta que el aprendizaje de las cónicas es introducido, en los niveles iniciales, desde una perspectiva procedimental, como generalización de procedimientos abstractos, tratándose las representaciones de la elipse como generalizaciones de las operaciones algebraicas y siendo evaluadas dichas generalizaciones para valores concretos de las variables. Sin embargo, rápidamente pasa a ser considerada desde una perspectiva estructural. Entonces, las representaciones de las cónicas son concebidas como objetos matemáticos en los cuales se llevan a cabo operaciones estructurales.

Este cambio obliga a los estudiantes a afrontar la necesidad de una comprensión relacional que, a menudo, no han experimentado en su aprendizaje matemático previo. En el aprendizaje de las cónicas los estudiantes deben tratar representaciones simbólicas como objetos matemáticos, y operar estos objetos con procesos que habitualmente no conducen a la obtención de una respuesta numérica. Por otra parte, deben modificar sus interpretaciones previas sobre los símbolos y empezar a representar problemas verbales con operaciones que, a menudo, son las inversas de las que utilizan para resolver problemas similares en el álgebra. Los estudiantes, ante este cambio, no sólo encuentran importantes dificultades en adquirir una comprensión relacional, sino también en conjugarla con su comprensión instrumental de las cónicas; aspectos a los que habitualmente no se les presta especial atención en la enseñanza.

Propuesta didáctica

Para diseñar la propuesta didáctica, indagamos en las bases epistemológicas de la Geometría No Euclidiana para pensar la elipse, las cuales nos dio luces sobre los elementos matemáticos que permiten articular las representaciones semióticas. Destacamos como antecedentes didácticos, la investigación de Parraguez y Bozt (2012) que, en una de sus conclusiones, reportan para su objeto matemático de estudio, que aquellos estudiantes que logran transitar entre los modos de pensamiento muestran en sus argumentos una cercanía con las definiciones formales de los conceptos. Así también, Bonilla y Parraguez (2013) realizan un estudio sobre la elipse desde la perspectiva la teoría los modos de pensamiento, donde afirman, que los estudiantes que han trabajado la elipse bajo el enfoque tradicional, si bien comprenden la elipse a partir de las ecuaciones que la definen, y son capaces de graficarlas, presentan grandes dificultades para entenderla como un lugar geométrico.

Con el propósito de que los estudiantes comprendan la elipse –como figura que la representa, como pares ordenados y como lugar geométrico–, nos propusimos como objetivo general de investigación: Diseñar una propuesta didáctica que promueva el tránsito entre las diferentes representaciones semióticas de pensar la elipse, para estudiantes de 16-21 años, utilizando como sistema de referencia el plano en la geometría del taxista (Krausse,1986).

Elementos históricos

En el istmo, entre el mar Mediterráneo y el Lago Mareótis, al oeste del delta del río Nilo, en una antigua aldea de pescadores y pastores llamada Rhakotis, nació la ciudad de Alejandría. En sus geométricas calles cuya planificación se atribuye al urbanista Dinócrates[1], Euclides escribió su obra "*Los Elementos*" que está compuesta de un conjunto de 13 libros. De que sólo se han encontrado versiones y traducciones muy tardías, en donde Euclides buscó dar a las matemáticas griega una base sólida utilizando el método axiomático.

El método axiomático consiste en un grupo de objetos o términos no definidos, llamados objetos o términos primitivos, en función de los cuales se definen todos los demás términos u objetos; un conjunto de proposiciones que se hace sobre los objetos o términos primitivos y aceptados sin demostración, que se llaman axiomas o postulados, y finalmente un conjunto de proposiciones demostradas utilizando la lógica deductiva que se denominan teoremas.

Euclides inicia el Libro I de los Elementos citando 23 definiciones en que busca dejar la comprensión de los objetos y términos, que tendrán sus propiedades estudiadas y establecidas en el transcurso de su obra, de forma bien clara y precisa.

A continuación, Euclides escribe los postulados y axiomas delimitando así las hipótesis que se utilizan en las demostraciones de los teoremas y en el desarrollo de toda la teoría. El cuestionamiento más importante de la obra de Euclides y que permitió a las matemáticas expandir y abrir nuevos caminos y áreas de estudio, giró alrededor del Quinto Postulado, también conocido como Postulado de las Paralelas, ya que puede ser así enunciado: punto, exterior a una recta, puede trazar una sola recta paralela a la recta dada.

[1] Arquitecto y urbanista originario de Rodas o Macedonia, vivió en la época de Alejandro el Grande, y también construyó la gran pira funeraria en Hefestion.

Durante muchos años, nos dice Aaboe, los investigadores creyeron que el Quinto Postulado dependía de los anteriores y, por lo tanto, era posible probarlo y el mismo no debería estar explicitado como un postulado. Varias tentativas de demostración aparecieron y fueron, cada una de ellas, refutadas.

La obra de Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), padre jesuíta, profesor de teología, filosofía y matemática, publicada en 1773 y titulada "Euclides ab Omni Naevo Vindicatus" (Euclides Libre de todos los errores) es una más que tiene como foco la demostración del Quinto Postulado de Euclides. El enfoque de Saccheri fue negar el Postulado de las Paralelas, o sea, él lo tomó como falso y aceptó como premisas verdaderas las 27 primeras proposiciones del Libro I de Euclides. A partir de ahí comenzó a buscar alguna evidencia de que el Quinto Postal era de hecho cierto. Él utilizó un cuadrilátero con dos lados opuestos congruentes y perpendiculares a la base que hoy conocemos como cuadrilátero de Saccheri estudiando así sus propiedades. Se puede decir que él descubrió una nueva geometría o la primera Geometría No Euclidiana, sin haber percibido de tal hecho. Desafortunadamente Saccheri analizó sus hechos bajo una óptica más volcada en la creencia existente en la época en que la verdadera y única geometría era la Euclidiana, que en lo que la lógica le estaba mostrando, dejando así de caminar en la dirección de una nueva e interesante área de las matemáticas. Hoy se considera como un precursor de una geometría no euclidiana.

Finalmente, en 1820 un preocupado padre con el futuro profesional del hijo le da un consejo por carta: "No desperdicies una hora en el problema. En vez de ser recompensador, envenenará toda tu vida. Este celoso padre todavía sigue tratando de disuadir al hijo para otros intereses escribiendo: "los mayores geómetras ponderaron el problema durante cientos de años y no consiguieron probar el postulado de las paralelas sin un nuevo axioma." Y poniendo la autoridad de padre: "Creo que yo incluso investigue todas las ideas posibles ... ".

A pesar de los llamamientos de Farkas Wolfgang Bolyai, el joven de 21 años, Janos Bolyai, nacido en Kolozsvár, Hungría (actualmente Cluj, Rumania), escribió a su padre el 3 de noviembre de 1823 relatando: "He realizado descubrimientos maravillosos que me dejaron extasiados y, sería motivo de lamento si las perdiera. Cuando las veas, querido padre, también lo percibir. En la misma carta Janos Bolyai escribe una conocida frase "He creado un universo de la nada". Y como se disculpó por el hecho de no haber seguido el consejo del padre afirma: "Estoy seguro que me traerá honor, tal como si ya hubiera completado el descubrimiento".

Una vez que nuevas y buenas ideas no son privilegio de una sola persona, pudiendo ocurrir de modo simultáneo entre personajes que nunca se conocieron, Farkas Bolyai aconsejó a su hijo a actuar con rapidez: "primero porque las ideas pasan fácilmente de unos a otros, que las pueden de inmediato publicar, y, segundo, hay alguna verdad en el hecho de que muchas cosas tienen una época para ser descubiertas al mismo tiempo en varios sitios ".

En esa época Farkas Bolyai trabajaba en su libro Ensayos sobre los Elementos de Matemáticas para Jóvenes Estudiosos e inmediatamente invitó a Janos Bolyai para incluir en él su investigación. Pero sólo en 1832 Janos Bolyai publicó sus estudios en un apéndice del 1º volumen de los Ensayos de Farkas Bolyai, con el pomposo título "La ciencia del espacio absoluto con una demostración de la independencia de la verdad o falsedad del axioma XI de Euclides (que no puede se decidirá a priori) y también la cuadratura del círculo en el caso de su falsedad.

Un poco antes, otro personaje de esa historia, Nikolay Ivanovich Lobachevsky, fue el primero en publicar un trabajo que presentó una geometría no euclidiana, que hoy conocemos como la Geometría Hiperbólica. En 1829 en una desconocida revista científica rusa, El Mensajero de Kazam, Lobachevsky presentó un artículo titulado Sobre los Fundamentos de la Geometría. En ese artículo, escrito en ruso, él relató todo el desarrollo de lo que llamó Geometría Imaginaria.

Tanto Bolyai como Lobachevsky no conocían el trabajo el uno del otro y como afirma Mlodinow "... desafortunadamente, nadie tampoco sabía. Matemáticos esencialmente oscuros, cuando hablaron nadie escuchó ". Bolyai nunca más publicó ningún otro trabajo y Lobachevsky se convirtió en rector de la Universidad de Kazam. Mlodinow todavía completa afirmando:

... podrían haber desaparecido en el limbo desconocido, no fuera su contacto con Gauss. Irónicamente, fue la muerte de Gauss que finalmente llevó a la revolución no euclidiana.

Gauss fue un cronista meticuloso de las cosas a su alrededor. Tenía el placer de coleccionar datos bizarros, tales como la duración de la vida de sus amigos muertos, o el número de pasos desde el laboratorio donde trabajaba hasta varios lugares que le gustaba visitar. También hacía registros de su trabajo. Después de su muerte, los expertos estudiaron con atención sus anotaciones y correspondencia. Allí, descubrieron su investigación sobre el espacio no euclidiano, así como los trabajos de Bolyai y Lobachevsky. (Mlodinow, 2010, pg.125).

Sólo en 1862, cuando Richard Baltzer, en la segunda edición de su libro Element der Mathmatik incluyó los trabajos de Bolyai y Lobachevsky, los convirtió en referencias estándar para aquellos que estudian esas nuevas geometrías. Así, de Euclides alrededor de 300 aEC hasta Bolyai y Lobachevsky en el siglo XIX, mucho tiempo se pasó para que las matemáticas consolidaran las ideas y consideraciones en torno al Quinto Postulado de los Elementos y abrirse camino para el estudio de nuevas geometrías que hoy conocemos como las Geometrías No Euclidiana. Tales geometrías son así llamadas, pues contrarían el Quinto Postulado de los Elementos o algunas de sus consecuencias.

Hoy en día llamamos Geometría Euclidiana, Geometría Hiperbólica y Geometría Elíptica aquella que adopta como el Quinto Postulado respectivamente la afirmación de que por un punto exterior a una recta se puede trazar una única recta paralela, infinitas rectas paralelas o ninguna recta paralela a la recta paralela a la recta dado.

A continuación, presentamos una Geometría No Euclidiana que por su simplicidad de comprensión y uso puede ser insertada y trabajada para contextualizar tópicos de la Enseñanza: La Geometría del Taxista.

Representaciones semióticas

En búsqueda de evidencias empíricas para las diferentes representaciones semióticas que pueden elaborar los estudiantes sobre la elipse, se selecciono una situación problema de nuestra secuencia exploratoria para darla a conocer en este artículo, se plantea la siguiente situación:

> *Un ciclotaxista que trabaja en el centro de la ciudad se desplaza por las calles y las carreras, que son perpendiculares a las calles. Sólo se les permite detenerse en las esquinas, por lo cual ellos miden las distancias en "cuadras" y siempre utilizan los recorridos tales que la suma de las cuadras a las dos estaciones de transporte en este lugar sea de 9 cuadras.*

Las representaciones obtenidas se fueron las siguientes:

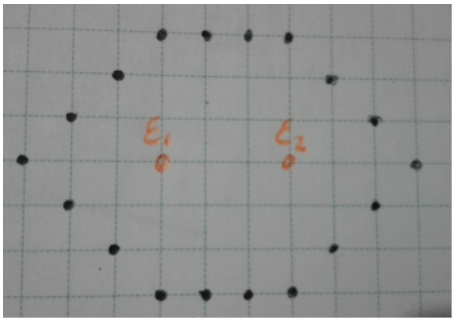


Figura 1. Representación grafica.

La figura 1 muestra la representación semiótica que la mayoría de los estudiantes realizaron de la situación problema, en donde se ve el lugar geométrico, pero no lo identifican como una elipse.

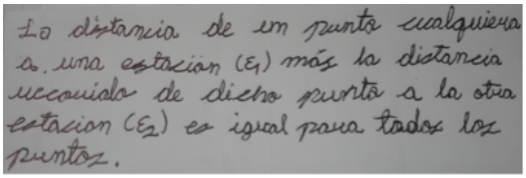


Figura 2. Representación verbal

En relación con la figura 2, se muestran evidencias de estar en vía de comprender un lugar geométrico por medio de una representación semiótica verbal, donde prueban a través de las distancias la propiedad que define la elipse, pero no logran establecer una ecuación.

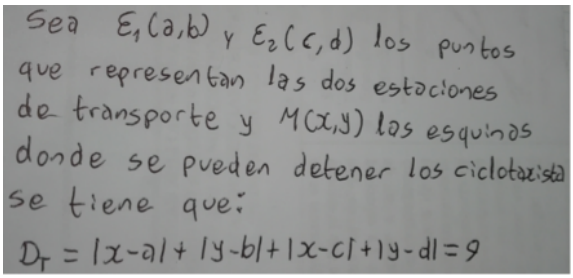


Figura 3. Representación algebraica

La figura 3, evidencia una comprensión de una representación semiótica algebraica en donde establecen una ecuación para todos los puntos que forman la elipse.

Es importante destacar que los estudiantes pueden mostrar que un punto específico es parte de la elipse, sin embargo, su dificultad radica en generalizar un punto de la elipse, es decir, si (a,b) es un punto ¿cómo se muestra que ese punto (a,b) es parte de la elipse? Por otro lado, evidenciamos que uno de los elementos que favorecen la conexión entre las representaciones de la elipse es la concepción del conjunto solución de una ecuación. Además, damos cuenta que, si bien los estudiantes han trabajado las cónicas en la geometría euclidiana, las definiciones presentadas en la actividad exploratoria acuden al concepto de lugar geométrico, por lo tanto, es

posible que las definiciones de elipse, en la geometría del taxista como lugar geométrico se hayan construido a través de las actividades realizadas en el mismo instrumento exploratorio.

Resultados finales

Esta investigación proporciona al profesor de cálculo diferencial una forma de observar las matemáticas bajo un aspecto integrador y crítico, posibilitando que él mismo incluso pueda reflexionar sobre los procesos de enseñanza y las posibilidades que las representaciones semióticas proporcionan un objeto de aprendizaje. La representación semiótica grafica permite modelar el ambiente como un objeto de aprendizaje de comprensión natural y lúdica. La métrica del Taxista es un modelo natural para la geografía urbana y su conocimiento posibilita, la construcción de otras propuestas motivadoras, interdisciplinares y cercanas al cotidiano del estudiante, posibilitando la ruptura de paradigmas y fomentando enfoques más críticos y, desarrollos más consistentes del aprendizaje. Esperamos con ese trabajo, que el profesor de matemáticas de cálculo diferencial, abra nuevos caminos en su práctica docente y se sienta motivado en crear sus propias estrategias, buscando nuevos conceptos de aprendizaje.

Referencias y bibliografía

Aaboe, A. (1964). Episodes from the early history of mathematics (Vol. 13). MAA.

Bonilla, D. & Parraguez, M. (2013). La elipse desde la perspectiva la teoría los modos de pensamiento. Alemania: *Editorial académica española*.

Krause, E. (1986). Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry. New York: *Dover Publications*.

Mlodinow, L. (2010). *Euclid's window: the story of geometry from parallel lines to hyperspace*. Simon and Schuster.

Parraguez, M. & Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en ciencias*, *7*(1), 49-72.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Reflexión por partes de profesores y futuros profesores en matemática en torno a definiciones

Ana María **Mantica**
Facultad de Humaniades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
Argentina
ana.mantica@gmail.com

María Florencia **Cruz**
Facultad de Humaniades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
Argentina
ma.florenciacruz@gmail.com

Resumen

En este trabajo se reflexiona en torno a una experiencia de un taller que se lleva a cabo con profesores y futuros profesores en matemática. En el mismo se analizan diferentes definiciones de polígono de distintos libros de texto.

Se pone énfasis en el análisis de la experiencia respecto a cuestiones que emergen en instancias de debate colectivo. Cabe destacar que la discusión versa en la arbitrariedad de las distintas definiciones presentadas, la relación que existe entre representaciones y definiciones formales, la presentación de ejemplos y no ejemplos del concepto de polígono y la equivalencia entre definiciones.

Palabras clave: *Definición, Polígono, Libros de texto, Futuros Profesores, Profesores en Matemática.*

Introducción

En la enseñanza de la matemática, actualmente, los libros de textos son los principales recursos didácticos empleados en los diferentes niveles del sistema educativo (Cárcamo, 2012). Braga Blanco y Belver Domínguez (2014) destacan la necesidad de que los profesores no utilicen diferentes libros de textos de un modo cegado, sino que realicen análisis de los mismos teniendo en cuenta el lugar preponderante que ocupan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática. Consideraciones similares se señalan en Cárcamo (2012).

En Argentina los documentos regulatorios producto de las últimas reformas curriculares revalorizan el trabajo en geometría (NAP, 2011). Sin embargo, diversos autores ponen de manifiesto la pérdida de presencia de este dominio en las clases de matemática en este país (Schaefer y Sgreccia, 2016; Grossi y Sgreccia, 2016) y parece que esta tendencia se evidencia también a nivel internacional (Ibarra, Formeliano, Patagua, Velazquez, Baspiñeiro, y Mendez, 2013; Olivero, Bosch y Gascón, 2013).

La definición de conceptos en matemática tiene un papel destacado, al respecto Winicki Landman (2006) afirma "Las definiciones, junto a los axiomas y los teoremas son los ladrillos con los que se construyen todas y cada una de las teorías matemáticas" (p. 528). En este sentido, cabe destacar que diversos investigadores en Educación Matemática manifiestan la preocupación por el modo en que se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de la definición (Vinner y Dreyfus, 1989; Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1991).

Atendiendo a las consideraciones realizadas se diseña un taller con el fin de reflexionar, analizar y discutir con docentes y futuros docentes definiciones de polígono que se presentan en libros de textos (manuales y académicos). Este taller se lleva a cabo en el XIII Congreso Argentino de Educación Matemática realizado en octubre 2018 en la ciudad de La Plata en la provincia de Buenos Aires (Argentina). En este trabajo se propone analizar la reflexión realizada por futuros profesores en matemática y profesores de matemática en desempeño en torno a cada una de las definiciones de polígono presentadas en el marco del taller mencionado.

Referentes teóricos

En el presente trabajo se abordan las particularidades que presentan los conceptos geométricos que llevan implícito una definición y una representación del mismo, considerando para esto diferentes teóricos que reflexionan sobre esta problemática.

Vinner (1991) hace referencia a definición conceptual cuando remite al significado matemático, es decir, a la definición formal. El autor considera que el nombre de un concepto conocido en raras ocasiones permite evocar su definición formal, sino que hace recordar un "algo" formado por un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Esto es lo que el autor denomina imagen conceptual. En la formación de conceptos geométricos, esta imagen conceptual que se crea en la mente de los sujetos está formada por los diversos dibujos, figuras o representaciones que se recuerdan como ejemplo de este concepto y el conjunto de propiedades que asocian al mismo. La imagen del concepto es correcta cuando le permite al sujeto discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociada son todas relevantes.

Winicki-Landman (2006) destaca que la secuencia clásica de trabajo en el aula de matemática, definición, ejemplos y no ejemplos, potencia el proceso de elaboración de la imagen conceptual. Propone una diferencia entre la definición formal del concepto y la personal. Con la formal se hace referencia a la definición matemática aceptada por la comunidad matemática y con la personal a las interpretaciones, construcciones o reconstrucciones que cada individuo hace respecto de la definición formal.

Guillén (1991) sostiene que la imagen que el estudiantes se forma de un concepto está basada en sus atributos críticos, los que debe poseer para ser un ejemplo de determinado concepto y los no críticos que sólo lo poseen algunos ejemplos. La autora considera que a medida que el mundo de ejemplos y no ejemplos posibles aumenta la imagen se amplia. Al respecto, Vinner y Dreyfus (1989) y Tall (1989) señalan la importancia de la presentación de ejemplos y no ejemplos en la construcción de la definición de un concepto geométrico.

Otra consideración a tener en cuenta es la equivalencia y no equivalencia entre definiciones formales de un mismo concepto matemático.

Van Dormolen y Zaslavsky (2003) sostienen que la equivalencia entre dos definiciones se da si definen el mismo concepto. En caso que se tengan definiciones equivalentes, en la práctica, se debe elegir una de ellas y considerar que las demás pueden probarse como propiedades. Lo mencionado posibilita que un sujeto pueda elegir entre varias definiciones equivalentes la que le

resulte más elegante, por diversas razones, entre ellas, necesita menos cantidad de palabras, menos símbolos o porque usa conceptos generales más básicos.

Winicki-Landman (2006) destaca:

> En el proceso de definir se influyen criterios que no siempre se revelan cuando las definiciones son presentadas como hechos consumados […]. Desde el punto de vista lógico, la definición de un concepto: a) Debe ser precisa. b) Debe basarse solamente en otros conceptos previamente definidos o en conceptos primitivos (criterio de jerarquía, según Van Dormolen y Zaslavsky, 2003) c) Debe ser consistente con definiciones anteriores en la que ella se apoya. d) Es arbitraria. e) Establece condiciones necesarias y suficientes, es decir es bicondicional. (p. 530 y 531)

Modalidad de trabajo

El taller se lleva a cabo en un encuentro que posee una duración de dos horas. Participan profesores en matemática que desempeñan en nivel secundario y/o superior y futuros profesores en matemática de Argentina, Uruguay, México y Chile.

El taller se diseña con el fin de discutir con los participantes consideraciones en torno a: la arbitrariedad de la definición de polígono, las imágenes conceptuales que poseen y el valor de los no ejemplos en la formación de dichas imágenes conceptuales. Teniendo en cuenta lo mencionado se ponen en juego dos momentos de trabajo en grupos de al menos seis sujetos.

Para el primer momento se trabaja en torno a la siguiente tarea:

Tabla 1

Tarea 1 que se presenta a los asistentes al taller.

TAREA 1: Analizar las definiciones que se presentan de polígonos a partir de ideas disponibles a fin de justificar si son adecuadas o no.

Para el desarrollo de la tarea se trabaja con cinco definiciones de polígono tomadas de libros de texto de la escuela obligatoria y un libro de Geometría Euclídea destinado a la educación superior. Se entregan en formato papel tres definiciones de polígono a cada uno de los grupos. Luego que cada grupo finaliza la discusión se realiza un debate colectivo. El análisis que se realiza para el presente trabajo se concentra en discutir la reflexión realizada por los participantes en torno a cada definición por lo que no exponemos hasta el análisis cada una de ellas.

En el segundo momento de trabajo se presentan imágenes de ejemplos y no ejemplos de polígonos construidas en el software de geometría dinámica *GeoGebra* a fin de justificar cuáles consideran representaciones de polígonos y cuáles no. En esta instancia se muestra la vista gráfica 2D y 3D con el fin de incentivar la reflexión acerca de la relación entre construcciones bidimensionales, tridimensionales y las definiciones de polígonos. En el debate colectivo se pone especial énfasis en conocer los supuestos de los asistentes sobre polígonos y qué determina para cada individuo que una representación sea un polígono o no, la definición o la imagen. A su vez se reflexiona acerca del potencial del empleo del software de geometría dinámica *GeoGebra* en las vistas simultáneas de una representación en 2D y 3D, se propone la discusión acerca del papel que juegan los no ejemplos en la construcción de conceptos matemáticos, entre otros.

Es de destacar que durante el taller y con el consentimiento de los participantes se registra la discusión en audio. En este trabajo se realiza el análisis de las cuestiones que emergen en torno al primer momento llevado a cabo en el mismo.

Reflexión de discusiones colectivas

Se organiza el análisis presentando cada una de las definiciones y posteriormente una reflexión acerca de lo discutido en torno a la misma en el taller. Cabe destacar que los extractos de transcripciones textuales se presentan en letra cursiva.

Definición 1:

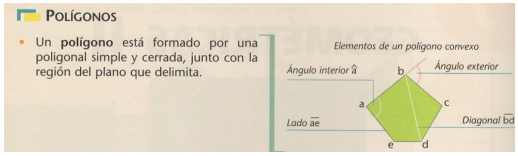


Figura 1. Definición recuperada de Kaczor, P.J.; Piñeiro, G.E.; y Serrano, G.B. (2012). *Actividades clave. II Matemática*. Buenos aires: Santillana.

El grupo A manifiesta que se emplean conceptos que no se encuentran definidos anteriormente en el texto, como ser, poligonal simple y cerrada. También destacan que el texto de la derecha hace referencia a un polígono convexo cuando la definición que se presenta a la izquierda es de polígono. La primera consideración puesta de manifiesto evidencia la necesidad de emplear el criterio de jerarquía al definir (Van Dormolen y Zaslavsky, citado en Winicki-Landman, 2006) La segunda hace referencia a la formación del concepto, este modo de presentación podría contribuir negativamente la formación de la imagen del concepto (Vinner, 1991).

El grupo B agrega a lo mencionado que los elementos que se presentan en el dibujo podrían suponer que un triángulo no es un polígono convexo por no tener diagonales. "*Estos son los elementos, que yo alumno de segundo año como plantea ahí, estas son las cosas que tengo que encontrar en un polígono convexo, la diagonal en un triángulo no existe entonces, ¿el triángulo dejó de ser un polígono convexo?*" Se manifiesta que está categorizado como los demás, y afirma que si se elimina un lado de un polígono convexo deja de ser un polígono.

El grupo C rescata como positivo que se considera el polígono como una región. Parece que debe cumplir estrictamente la definición dicha condición, sin embargo las definiciones son arbitrarias (Winicki-Landman, 2006).

Finalmente el Grupo A plantea que una definición debe responder a la pregunta, ¿qué es?, tanto en el ámbito de trabajo matemático como en otros ámbitos. Y afirma que en este caso no responde a esta pregunta.

Definición 2:

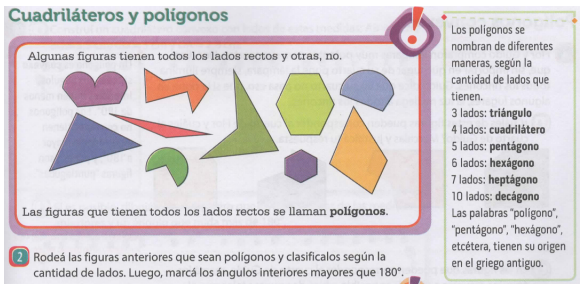


Figura 2. Definición recuperada de Sessa C. (Coord.). (2015). Hacer Matemática 7/1. Buenos Aires: Estrada.

El grupo D presenta la imagen 4 que considera que verifica la definición pero no corresponde a la imagen conceptual de polígono (Vinner, 1991). En este sentido se discute acerca de la necesidad de emplear conceptos previamente definidos (Winicki-Landman, 2006) y la importancia de los acuerdos en la comunidad clase que se trabaja.

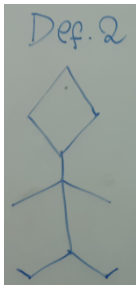


Figura 3. Representación Grupo D

Se presenta una discusión en torno a la expresión "lados rectos" y manifiestan que lados son segmentos y por tanto sólo pueden ser rectos.

Definición 3:

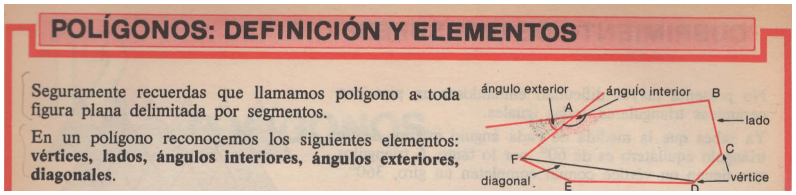


Figura 4.: Definición recuperada de Sadovsky, P., Kass, M., Panizza, M.G. y Reyna, I.M. (1989) Matemática 2. Buenos Aires: Santillana.

El grupo A expresa la confusión que puede representar la imagen debido a la continuación del lado que se realiza para considerar el ángulo exterior y al representarlo como el segmento determinado por dos vértices consecutivos. Nuevamente se pone de manifiesto la influencia de las representaciones visuales en la construcción de un concepto (Vinner, 1991). El grupo B agrega que es importante el uso de líneas de puntos para representar con el fin de diferenciar el lado del polígono de la extensión del lado. A su vez los integrantes destacan que lo que se presenta no es una definición, no se profundiza esta afirmación porque no realizan mayores consideraciones al respecto.

Definición 4:

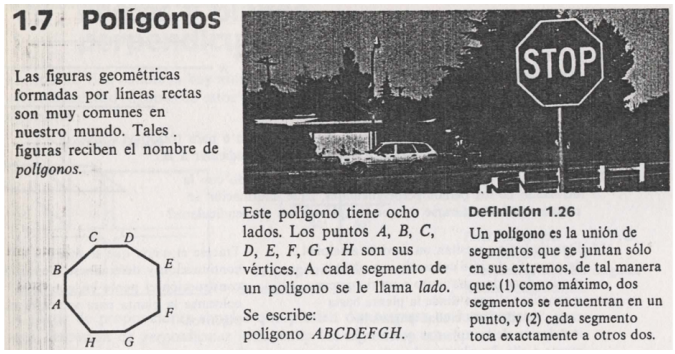
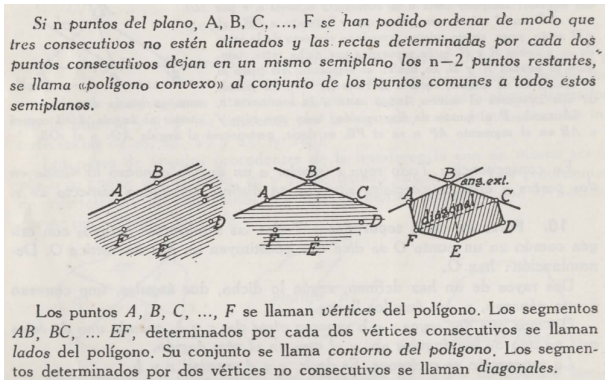


Figura 5. Definición recuperada de Stanley C., Phares G. y Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Distrito Federal: Addison Wesley Longman.

El grupo A manifiestan que los autores consideran la poligonal, por lo que no toma como otros textos la región. En esta afirmación se explicita la no equivalencia entre las definiciones trabajadas (Van Dormolen y Zaslavsky, 2003). También manifiestan que en la descripción y en la definición se emplean diferentes términos para referir al mismo concepto, por ejemplo, "formados por líneas rectas dice primero, cuando después en la definición habla de segmentos, es la brecha entre lo que cuenta y lo que define", también hacen referencias, entre otros, a los

términos, puntos, vértices. A su vez señalan que el concepto está "muy anclado" en la representación que es un polígono convexo puede dificultar la formación de la imagen conceptual de polígono (Vinner 1991).

Definición 5:



Si n puntos del plano, A, B, C, ..., F se han podido ordenar de modo que tres consecutivos no estén alineados y las rectas determinadas por cada dos puntos consecutivos dejan en un mismo semiplano los n−2 puntos restantes, se llama «polígono convexo» al conjunto de los puntos comunes a todos estos semiplanos.

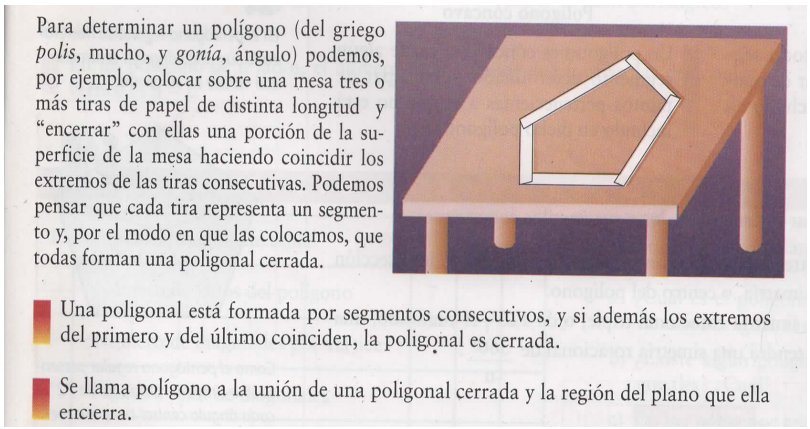
Los puntos *A, B, C, ..., F* se llaman *vértices* del polígono. Los segmentos *AB, BC, ... EF,* determinados por cada dos vértices consecutivos se llaman *lados* del polígono. Su conjunto se llama *contorno del polígono*. Los segmentos determinados por dos vértices no consecutivos se llaman *diagonales*.

Figura 6. Definición recuperada de Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo I. Fundamentos. Euler, G. Madrid: Puig Ediciones.

El grupo A diferencia esta definición de la presentada en la imagen 1 respecto al concepto de diagonal, puesto que en este caso se expresa que se determinan considerando vértices no consecutivos, en consecuencia no se excluye al triángulo como polígono convexo. Nuevamente se reflexiona en torno a la no equivalencia entre las definiciones presentadas (Van Dormolen y Zaslavsky, 2003)

El grupo B manifiesta que este texto no lo presentaría en la escuela secundaria por la formalidad con que está escrito, pues un libro destinado a la educación superior.

Definición 6:



Para determinar un polígono (del griego *polis*, mucho, y *gonía*, ángulo) podemos, por ejemplo, colocar sobre una mesa tres o más tiras de papel de distinta longitud y "encerrar" con ellas una porción de la superficie de la mesa haciendo coincidir los extremos de las tiras consecutivas. Podemos pensar que cada tira representa un segmento y, por el modo en que las colocamos, que todas forman una poligonal cerrada.

Una poligonal está formada por segmentos consecutivos, y si además los extremos del primero y del último coinciden, la poligonal es cerrada.

Se llama polígono a la unión de una poligonal cerrada y la región del plano que ella encierra.

Figura 7. Definición recuperada de Amenado M.B., Carranza, S.G., Diñeiro, M.T., Grau, J.E. y Latorre, M.L. (1996). Matemática 2. Buenos Aires: Santillana

El Grupo C destaca que "Se coloca en el mismo nivel de análisis y complejidad la palabra, mesa, tirita y polígono", el grupo D responde que les parece adecuada la presentación. Se hace referencia al material concreto que se emplea para representar los lados, algunos grupos expresan que es interesante el trabajo con el mismo para iniciar la comprensión del concepto y visualizar, y otros consideran que no son adecuados los materiales, puesto que la "*tirita de papel puede mojarse y doblarse. Tiene propiedades que no tiene el concepto, por ejemplo, espesor, una*

superficie, ¿qué es un punto?, ¿qué es un vértice en esa superposición de dos tiras?". Al respecto se debate que todas las representaciones tiene limitaciones y que nunca la representación es la definición formal, en este sentido cabe destacar la importancia de lograr la fusión entre esta y sus representaciones (Vinner, 1991).

Un integrante del grupo D expresa que el trabajo con el material concreto podría representar cinco tiras articuladas lo cual puede redundar en beneficios de la construcción del concepto de polígono debido a que potencia la visualización de representaciones de polígonos cóncavos y convexos, esta cuestión se encuentra en sinergia con lo planteado por Guillén (1991).

Reflexiones finales

En el taller se pone de manifiesto y discute la arbitrariedad de la definición en matemática. Sin embargo, al hacer referencia a poligonal y región poligonal parece haber una resistencia en algunos docentes en aceptar alguna de ellas como definición de polígono que contradice su propia concepción de este concepto. Esto puede influir en instancias de producción de definiciones en el aula de matemática.

Cabe destacar que la reflexión en torno a la equivalencia y no equivalencia entre las definiciones presentadas puso de manifiesto la necesidad de realizar un análisis del libro de texto a utilizar antes de emplearlo en el aula con estudiantes. Esta cuestión se acrecienta más aún cuando se realiza recopilación de diferentes textos de distintos autores y por tanto con perspectivas disímiles.

Emerge en las discusiones con los profesores y futuros profesores la importancia del empleo de representaciones visuales, imágenes, etc. en instancias de formación de conceptos. Respecto al análisis realizado es evidente que en la mayoría de textos presentados estas representaciones son escasas, estereotipadas y que en algunos casos pueden generar contradicción con la definición dada por el mismo autor. A su vez se destaca la potencialidad del uso de ejemplo y no ejemplos en los proceso de enseñanza y de aprendizaje; en particular se reflexiona la importancia de presentar no ejemplos que cumplan algunas de las condiciones de la definición y no otras.´

El taller permitió a los participantes reflexionar acerca de diversas cuestiones, entre otras, la discusión respecto al lugar que ocupa la definición en matemática y la importancia de análisis de libros de textos, dado que puede redundar en beneficios en la enseñanza de la asignatura matemática y consecuentemente contribuir al logro de resultados satisfactorios de estudiantes.

Bibliografía y Referencias

Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos*. Euler, G. Madrid: Puig Ediciones.

Amenado M.B., Carranza, S.G., Diñeiro, M.T., Grau, J.E. y Latorre, M.L. (1996). *Matemática 2*. Buenos Aires: Santillana

Braga Blanco, G. y Belver Domínguez, J.L. (2014). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación,* 27 (1), 199-218.

Cárcamo, D. (2012). *Uso de los Libros de Texto de matemática en el proceso de enseñanza: Un análisis de casos comparado.* Tegucigalpa*:* Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

Grossi, S. y Sgreccia, N. (2016). Perspectivas docentes acerca de habilidades de representación y comunicación de lo tridimensional. En *libro de actas 2 CIECyM y 3 ENEM*, 73-77.

Guillén Soler, G. (1991). *El mundo de los poliedros.* Madrid. Síntesis.

Ibarra, L.; Formeliano, B.; Patagua, I.;Velazquez, S.; Baspiñeiro, S. & Mendez, G. (2013). La construcción de triángulos en la escuela primaria. Memorias del IV econgrès international sur la TAD.

Kaczor, P.J.; Piñeiro, G.E.; y Serrano, G.B. (2012). *Actividades clave. II Matemática*. Buenos aires: Santillana.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). NAP. Tercer ciclo. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-secundaria-matematica

Olivero, F.; Bosch, M.; Gascón, J. (2013). Praxeologías matemáticas en torno a la geometría para la formación del profesorado. *Memorias del IV econgrès international sur la TAD.*

Sadovsky, P., Kass, M., Panizza, M.G. y Reyna, I.M. (1989) *Matemática 2*. Buenos Aires: Santillana.

Schaefer, L. y Sgreccia, N. (2016). Conocimiento especializado del contenido al enseñar a medir segmentos y ángulos a futuros profesores en matemática. En *libro de actas 2 CIECyM y 3 ENEM*, 66-77.

Sessa C. (Coord.). (2015). *Hacer Matemática 7/1*. Buenos Aires: Estrada.

Stanley C., Phares G. y Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Distrito Federal: Addison Wesley Longman.

Tall, D. (1989). Concept images, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 37–42.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 91-106.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989) Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Winicki-Landman, G. (2006). Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19,* 528-537.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

¡Fractales! Factor motivador para el estudio de las matemáticas

Dorenis Josefina **Mota Villegas**
Escuela de Matemática y Física, Pontificia Universidad Católica del Ecuador
Ecuador
djmota@puce.edu.ec

Ricardo Enrique **Valles Pereira**
Escuela de Matemática y Física, Pontificia Universidad Católica del Ecuador
Ecuador
rvalles@puce.edu.ec

En este poster se describe una experiencia de clase llevada a cabo en la asignatura de Matemática para la Carrera de Arquitectura, perteneciente a la Facultad de Arquitectura, Diseño y Artes (FADA) de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Sede Quito. El objetivo del proyecto fue promover una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas, dentro de un contexto donde generalmente los estudiantes no muestran un gran interés por la asignatura.

Los fractales y su actual aplicación en situaciones de la cotidianidad fueron el punto de conexión entre los estudiantes y la matemática. El proyecto estuvo basado en varias actividades que poco a poco fueron sumergiendo al estudiante en el mundo de los fractales; donde se le dio primacía a la aplicabilidad de éstos en la actualidad con el estudio de las formas y los elementos matemáticos de rigor fueron abordados de forma superficial, sin embargo, esto último no impidió que el estudiante pudiera manipular fórmulas complejas para crear fractales, pero lo hizo mediante un simulador (fractfinder, 2018).

El proyecto estuvo fundamentado desde el punto de vista didáctico matemático en la teoría de la etnomatemática (Ubiratan, 2008).

Específicamente se llevaron a cado las siguientes actividades:

Actividad 1: Elaboración de un mapa mental por parte de los estudiantes en base al video: “la geometría fractal de la naturaleza”. En tal sentido cada estudiante tuvo que diseñar un mapa mental en base a lo que pudo interpretar del material audiovisual. Este recurso fue evaluado siguiendo los lineamientos de una rúbrica facilitada al estudiante previamente.

Actividad 2: Video Didáctico por estudiantes sobre la aplicación de los fractales en Arquitectura y Diseño. Para la actividad dos, cada estudiante debe elaborar un video haciendo uso de cualquier plataforma o recurso visual, en donde se evidencie la aplicabilidad de los fractales en la carrera de Arquitectura.

Actividad 3: Elaboración de una maqueta empleando elementos fractales en su construcción. Finalmente para esta última actividad cada alumno debió elaborar una maqueta de alguna estructura observada en su contexto donde se apliquen las teorías de fractales.

Para concluir, se les presentó una encuesta a los estudiantes de Arquitectura sobre su apreciación de la experiencia realizada; en la cual se lograron resultados positivos, ya que ellos manifestaron el interés por el estudio de los fractales, así como también su aplicabilidad en su campo laboral.

En tal sentido se pudo lograr el objetivo que era generar la motivación por el estudio del tópico matemático Fractal, y su aplicabilidad en el contexto profesional de los Estudiantes de Arquitectura del curso de Matemática en los estudiantes de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador.

Referencias y bibliografía

Fractfinder (2018). Página web disponible en: / https://www.fractfinder.es/

Rebeca E, A. A. (2017, 01,03). La Geometría Fractal de la Naturaleza. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=uggDndM-p7Y

Ubiratan, D. A. (2008). Etnomatemática. Entre las tradiciones y la modernidad. México: Limusa

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La entrevista socrática como medio para detectar el nivel de comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, en el marco del modelo de van Hiele

William Eduardo **Calderón** Gualdrón
Doctorando en Ciencias de la Educación de la Universidad Metropolita de Educación Ciencia y Tecnología. UMECIT. Grupo de Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander EDUMAT-UIS.
Colombia
williameduardoc@hotmail.com

René Alejandro **Londoño** Cano
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
renelondo@gmail.com

Resumen

El presente trabajo es parte de una investigación en curso que tiene por objetivo caracterizar los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele asociados a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. Basados en nuestra experiencia docente y de acuerdo a la literatura abordada, hemos evidenciado que la gran mayoría de estudiantes de primeros semestres de universidad presentan dificultades para comprender el concepto de parábola como lugar geométrico. De acuerdo a Londoño (2011), la entrevista de carácter socrático permite generar, por un lado, experiencias de aprendizaje en relación con un conocimiento matemático y, por otro, avanzar en la comprensión del concepto en cuestión; este estudio retoma esta idea y la adapta al software GeoGebra. Dos hallazgos emergieron de este proceso y nos permitieron caracterizar la comprensión: Un conjunto de descriptores de los niveles de razonamiento de van Hiele y un guion de entrevista socrática mediada por GeoGebra.

Palabras clave: Lugar geométrico, Descriptores, GeoGebra, Parábola, Entrevista socrática Dinámica.

Introducción

Basados en nuestra experiencia docente y de acuerdo a la literatura abordada, los estudiantes de primer año de universidad presentan dificultades en la comprensión de las

secciones cónicas, situación que ha sido documentada hace más de 30 años por investigadores como Just y Carpenter (1985), Santa y Jaramillo (2007), Gómez y Carulla (2000), quienes aseguran que los estudiantes que aprenden de memoria las ecuaciones de las cónicas, no comprenden las propiedades ni hacen procesos de análisis; lo anterior conlleva a dificultades en relación a la representación algebraica y geométrica, impidiendo su comprensión como lugar geométrico.

Lo anterior señala la necesidad de aportar elementos que permitan a los profesores mejorar el proceso de enseñanza de las cónicas, en específico, de la parábola como lugar geométrico.

En esta investigación, en particular, interesa aportar a la solución de la problemática de las dificultades en la comprensión de la parábola como lugar geométrico en estudiantes de educación media. Para ello, nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo comprenden los estudiantes de educación media el concepto de parábola como lugar geométrico, haciendo uso del software de geometría dinámica GeoGebra?*

Fundamentación teórica

El problema de la comprensión en conexión con el aprendizaje de la geometría ha sido abordado desde antaño por Pierre Van Hiele (1957) quien resalta su importancia al afirmar que "la adquisición de comprensión es, con razón, uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas" (p. 10). Para ello, Pierre señala que se deben crear las condiciones bajo las cuales la comprensión se pueda dar, lo cual conduce a pensar que es, quizás, por la forma tradicional que se enseña que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos.

El modelo de van Hiele

Como docentes de matemáticas siempre estamos buscando la forma en que nuestros estudiantes mejoren su actividad en el área, cuestión que resulta frustrante en ocasiones.

> "Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aun así los estudiantes no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban el máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. Pero debido a que yo era un profesor inexperto, también tenía que considerar la posibilidad de que yo fuera un mal profesor. Y esta última y desagradable posibilidad se afirmaba por lo que ocurría posteriormente: de pronto parecía que comprendían la materia en cuestión, podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: «no es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicó usted de forma tan complicada?» En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviese hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento." (van Hiele, 1957, p. 39)

Estas reflexiones, sobre su propia práctica pedagógica, llevaron a los profesores Van Hiele a plantear su teoría para la enseñanza-aprendizaje de la geometría. Su mentor de tesis doctoral, Hans Freudenthal, precisó:

> Ellos se observaron a sí mismos cuando enseñaban, recordaron lo que habían hecho y lo analizaron. De hecho el pensamiento es una actividad continua, pero existen niveles relativos a esta actividad. En el nivel más alto, la acción del nivel más bajo se convierte en objeto de análisis. Eso fue lo que los van Hiele reconocieron como característica sobresaliente de un proceso de aprendizaje, nombrándolo de la manera como ellos lo aprendieron enseñando. Ellos transfirieron esta característica del proceso de aprendizaje, que era la meta de su enseñanza, al proceso de aprendizaje de los estudiantes quienes estaban aprendiendo matemáticas. Allí, ellos descubrieron niveles similares. Para mí, esto se parece a un descubrimiento importante. (Freudenthal, 1973)

Este descubrimiento del que habla Freudenthal es lo que en la actualidad se conoce como el Modelo de Enseñanza-Aprendizaje de van Hiele, debido a que da una explicación integral del proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría de la gran mayoría de estudiantes.

Prat (2105), indica que cualquier modelo educativo se compone de tres etapas diferenciadas, las cuales son:

a. Observación: la primera etapa detecta la repetición de determinados patrones de comportamiento en los estudiantes bajo unas condiciones concretas.

b. Planteamiento: acorde a las regularidades observadas se definen y formulan las características del modelo, que describen cómo se produce el desarrollo o aprendizaje de los estudiantes.

c. Análisis: se realizan diversas experiencias que corroboren o rectifiquen los planteamientos hechos.

El modelo de van Hiele atravesó estas tres etapas, y se validó por parte de los van Hiele en la enseñanza de la geometría en educación secundaria. La geometría fue escogida como un ejemplo debido a que es la piedra angular de las matemáticas. No obstante, el modelo se ha extendido y validado en ramas diversas de las matemáticas como el análisis matemático, la aritmética, la trigonometría, entre otras.

El modelo de van Hiele es “una excelente guía para los profesores pues (…) enseña a descubrir cómo debe comunicarse el profesor con los alumnos, para presentarles nuevos conceptos de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas” (Jaime y Gutiérrez, 1990, pp. 302-303).

El modelo de Van Hiele está fundamentado en tres aspectos:

a) “niveles de razonamiento”, los cuales referencian una secuencia continua de tipos de razonamientos mediante los cuales progresa, sin saltarse alguno. Permiten analizar la capacidad de razonamiento matemático de los individuos, desde que empiezan su aprendizaje hasta que alcanzan su máximo grado de desarrollo.

b) “fases de aprendizaje”, orientada a los profesores, las cuales brindan directrices para encaminar a sus estudiantes hacia un nivel superior de razonamiento.

c) y la percepción-insight, que es el interés original y el tema de disertación.

La entrevista socrática

El método socrático ha ganado un importante lugar en la educación ya que facilita el ambiente para construir conocimiento bajo una característica especial: el profesor, quien dirige el diálogo, asume una actitud de humildad que permite a los estudiantes sentirse cómodos en un nivel en el cual pueden participar abiertamente; en vez de decir qué o cómo hay que pensar, permite el descubrimiento del conocimiento por parte del estudiante. El diálogo socrático se ha validado como medio para que un estudiante encuentre la verdad sobre un conocimiento, de igual forma, la entrevista de carácter socrático se ha implementado como una estrategia que permite generar, por un lado, experiencias de aprendizaje en relación con un conocimiento matemático y, por otro, identificar el conocimiento que se ha aprendido (Londoño, 2011).

El diálogo como elemento importante en la educación matemática es entendido desde los "Diálogos" de Platón (texto que contiene el capítulo llamado "Menón", en el cual se puede apreciar el diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón acerca de encontrar el cuadrado de área doble, de otro cuadrado dado), cuyos coloquios se caracterizan por su alto grado de indagación y análisis, lo cual supone un compromiso con el intelecto. De la Torre (2003) describe el método socrático como camino hacia el esclarecimiento de los conceptos, tal como se perfila en el Menón; señala además que:

> El camino hacia el conocimiento es un proceso gradual, en el cual la opinión y la creencia constituyen etapas intermedias. El aprendiz se esfuerza y participa activamente en el proceso, que termina cuando aquel inventa o descubre la respuesta adecuada a una pregunta bien formulada. (De la Torre, 2003, p. 102)

Sucerquia, Londoño y Jaramillo (2015) señalan que en una clase de matemáticas el diálogo debe permitir la expresión de ideas, conocimientos, razonamiento crítico y reflexivo, procesos argumentativos, etc.; es decir, el diálogo matemático debe presentar algunas características particulares que deben estar en correspondencia con las propias del diálogo socrático.

> La entrevista socrática […] ha sido el medio más adecuado para realizar el seguimiento de la construcción y evolución de un concepto matemático en la mente del alumno, como también se ha considerado una herramienta fundamental en estos estudios, debido a que ha permitido determinar los niveles de razonamiento a la luz del modelo de van Hiele […]. (Jaramillo y Campillo, 2001, p. 82)

Londoño (2011) emplea la entrevista socrática con una doble intención: a) que el profesor reflexione sobre el concepto y las dificultades en la enseñanza del mismo, esto con el propósito de que forje la necesidad de diseñar una red de relaciones para propiciar el acercamiento del estudiante al concepto; b) que le permita al entrevistado (el estudiante) progresar en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo. La entrevista socrática diseñada en el estudio de Londoño le permite la detección de los niveles de comprensión de tres estudiantes en el marco de la teoría de Piere y Kieren a partir de *descriptores* diseñados para cada nivel, los cuales se obtuvieron durante la aplicación de las diferentes versiones de la entrevista socrática.

El autor enfatiza en las conclusiones de su estudio la importancia de que en la entrevista socrática se generen preguntas que entorpezcan al aprendiz ante un posible error o confusión y así avanzar en su proceso de comprensión.

Asimismo, para efectos de esta investigación, se tomaron en cuenta los aspectos que Van Hiele considera importantes en una clase donde se trabaje con el método socrático; según de De la Torre (2003) ellos son:

- El maestro tiene que asegurarse del interés de los alumnos en el problema y debe captar su atención desde el comienzo.
- El método socrático sólo es efectivo en la medida en que se pueda garantizar que cada uno de los alumnos alcanza la solución mediante su trabajo personal. El profesor no podrá llenarse de impaciencia ni darles la solución prematuramente.
- El trabajo de los alumnos debe ser individual y las conversaciones colectivas en el aula deberán ser guiadas por el maestro, de modo que se les permita avanzar también a los alumnos que se muevan a paso lento.
- El maestro debe calibrar acertadamente la dificultad del problema, de modo que todos los estudiantes conserven el interés hasta el fin, sin que ninguno de ellos olvide el corazón del asunto. (p 103).

van Hiele (1986) insiste en estas premisas pues "es posible emplear el método socrático, con muy buenos resultados, pero también es muy fácil fracasar en el intento" (Londoño, 2010, p. 27).

En este estudio se realizó la entrevista de carácter socrático mediada por un software de geometría dinámica, pues existen investigaciones como las de Peña (2010) que resaltan que los *softwares* de geometría dinámica (SGD) contribuyen con nuevas posibilidades en la enseñanza de la geometría ya que se supera el carácter estático de las figuras en el papel; los SGD dotan de *movimiento* a las figuras, cualidad que permite analizarlas desde diferentes perspectivas y comprender los conceptos y propiedades asociadas a ellas, esto empleando las opciones de arrastre de los programas. La autora señala que "la utilización de los programas de Geometría Dinámica en clase nos ayudará a acercar los contenidos matemáticos a los estudiantes y mejorar su comprensión" (p. 166).

Gracias a la utilización de la tecnología en el aula, en particular de los software de geometría dinámica, Acosta y Fiallo (2017), quienes realizan un estudio con un grupo de estudiantes y docentes tanto de colegio como de universidad, afirman que identificaron "múltiples transformaciones debido al impacto de esas herramientas: transformación de las concepciones y prácticas matemáticas; transformación de las relaciones entre los profesores y el saber; entre los alumnos y el saber; entre los alumnos y los profesores; transformación de las formas de organización de la clase y de las responsabilidades administrativas en la institución; y transformación del currículo de matemáticas, entre otras".

Los investigadores López-Mesa, Aldana-Bermúdez y Alonso-Arboleda (2013) emplearon el software de geometría dinámica GeoGebra en un estudio con 25 estudiantes (cuyas edades oscilan entre 17 y 30 años) de Ingeniería de Sistemas de primer semestre para conocer cómo ellos adquieren la comprensión del concepto de parábola, mediante geometría dinámica y la Ingeniería Didáctica de Chevallard como soporte teórico. Entre las conclusiones reportadas, destaca que las tecnologías digitales logran una mayor comprensión del objeto matemático, en los siguientes términos:

> […] el medio informático como herramienta facilitó en los estudiantes la comprensión de los elementos que caracterizan la ecuación canónica de la parábola con centro en el origen

y fuera de este; establecieron relaciones entre los elementos matemáticos y los modos de representación gráfico, algebraico y analítico, y lograron una construcción progresiva, ascendente, consciente y real del objeto matemático de estudio.

Todos estos aspectos favorables motivan el uso de GeoGebra y la entrevista socrática en el proceso de enseñanza conducente a la comprensión de la parábola como lugar geométrico.

Hallazgos y consideraciones finales

De acuerdo con las características mencionadas del modelo de van Hiele, esta investigación se centró en la parte prescriptiva del modelo, esto es, en los niveles de razonamiento los cuales son características intelectuales y cognitivas que se pueden describir cuando observamos el desarrollo intelectual y cognitivo por el cual debe atravesar todo estudiante, lo cual permite describir su nivel de razonamiento y comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, así mismo, los niveles permiten conocer el avance de un estudiante en la comprensión en cuanto al concepto matemático. A continuación, presentamos las características generales de los descriptores que se están detectando en cada nivel, los cuales se encuentran en un proceso de refinamiento:

Nivel 0: Predescriptivo

En este nivel se identifica el conjunto de saberes previos que necesita el estudiante para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. Los descriptores para este nivel son estrictamente conceptuales sin requerir el uso del software.

Nivel I: Reconocimiento visual

En este nivel el estudiante construye y visualiza, en un ambiente de geometría dinámica, puntos, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras.

Nivel II: De análisis

En este nivel, el estudiante determina algunos puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo llamado F y de una recta llamada D.

Nivel III: De clasificación

En este nivel, el estudiante determina la condición que deben cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la parábola como lugar geométrico y mediante el *software* construye ese conjunto de puntos.

Nuestra investigación no intenta caracterizar los descriptores del Nivel IV, de deducción formal, pues el propio modelo de van Hiele establece que es difícil de detectar y que se considera de carácter teórico.

Se ha identificado hasta ahora que la entrevista socrática mediada por un software de geometría dinámica se diferencia de la planteada por Londoño (2011) y Santa (2007), ya que el software transforma la manera en que el entrevistado interactúa con el entrevistador, al proporcionarle al primero nuevas herramientas en las que puede dotar de movimiento las situaciones que se le presentan, dándole a la entrevista una cualidad en la que mediante la experimentación y manipulación de distintos elementos geométricos en GeoGebra, el estudiante logra deducir resultados y propiedades hasta llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

La investigación pretende que la entrevista socrática dinámica pueda convertirse en una estrategia para los profesores de matemáticas, ya que, mediante las actividades propuestas en ella, se orienta sobre cómo debe comunicarse el profesor con los estudiantes a través de un software de geometría dinámica, para presentarles nuevos conceptos, de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas, su aprendizaje y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los mismos.

Referencias y bibliografía

Acosta, M y Fiallo, J (2017) Enseñando geometría con tecnología digital: Una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

De la Torre, A. (2000). El método socrático y el modelo de Van Hiele. Lecturas Matemáticas, 24, pp. 99-121.

Fiallo J. (2011). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. (Tesis de Doctorado) Universidad de Valencia.

Freudenthal, H. (1973) Mathematics as an Educational Task . Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Gómez, P. y Carulla, C. (2000). *Enseñanza sobre la Función Cuadrática*. Universidad de los Andes. Colombia.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele*. En: Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.). Teoría y práctica en educación matemática (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Jaramillo, C. y Campillo, P. (2001). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la Luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, *9*, pp. 65–84. Recuperado de https://www.emis.de/journals/DM/v91/art5.pdf

Just, M. y Carpenter, P. (1985). Cognitive coordinate systems: Accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability. Psychological Review, 137-172.

Londoño, R. A. . (2011) La Relación Inversa entre Cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Medellín: Tesis Doctoral.

López-Mesa, J., Aldana-Bermúdez E., Alonso-Arboleda A. (2013). Análisis de la comprensión del concepto de parábola en un contexto universitario. *Respuestas*; *18*(2): 74-79.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Matemáticas. Colombia: M.E.N.

Peña, A. (2010). Enseñanza de la geometría con tic en Educación secundaria obligatoria. Tesis doctoral

Santa-Ramírez, Z. M. & Jaramillo-López, C. M. (2014). Entrevista socrática para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 41, 45-60. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/464/986

Santa, Z. y Jaramillo, C. (2007). *Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de Van Hiele*. En: X Encuentro Colombiano de Matemáticas Educativa. Universidad de Antioquia.

Van Hiele, P.M. (1957). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). (Tesis doctoral). Universidad de Utrecht, Utrecht (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El uso de software educativo GeoGebra en el estudio de las transformaciones isométricas

Jocelyn Vanessa **Aguilera** Aravena
Colegio Esperanza, Quilpué
Chile
j.aguilera.aravena@gmail.com

Resumen

El objetivo de la presente propuesta de innovación es contribuir a la educación a partir de una secuencia de actividades donde se trabaja el objeto matemático de las transformaciones isométricas, traslación, en terceros básicos a través del uso de la tecnología en el aula utilizando el software educativo GeoGebra. El marco teórico a utilizar, Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), se esbozarán elementos de la Génesis Instrumental, en función de la importancia que implica el uso de un software educativo en la enseñanza de la geometría. Los hallazgos visualizados en la puesta en práctica superan lo esperado por la docente, pues lo estudiantes se involucran con las secuencias de actividades a tal nivel que construyen figuras con el objetivo de comprobar lo aprendido en relación a la traslación.

Palabras clave: Innovación, GeoGebra, transformaciones isométricas, traslación, enseñanza primaria.

Problemática

A partir de lo observado en las prácticas pedagógicas de la educación matemática en el establecimiento donde me desenvuelvo como docente de primaria, trabajando en el área de la educación en niveles de primero y tercero básico es que he observado la alarmante situación donde los objetivos de aprendizaje relacionados con la utilización de software educativos para la enseñanza de geometría se han dejado de lado, pues, no son considerados en las planificaciones de los docentes y menos aún en las clases dictadas por ellos.

El problema va in crescendo cuando se observa que la misma problemática se replica en los niveles de secundaria. Es por ello, que se hace elemental, generar situaciones en donde los estudiantes conozcan software educativos para poder aplicar lo conceptual y llevarlo a planos donde se vincula la vista algebraica con lo geométrico.

La idea de innovación está relacionada con generar una situación de aprendizaje en donde los estudiantes comprendan el objeto matemático de las transformaciones isométricas a través del software educativo GeoGebra.

Para llevar a cabo dicha propuesta, se deben generar dos líneas de situaciones de aprendizaje previas: la primera debe estar vinculada a una alfabetización del programa GeoGebra, considerando fases de exploración y elementos sustanciales para poder utilizarlo de manera efectiva. Una segunda línea importante a considerar son los aprendizajes previos de los estudiantes, dado que, es necesario recurrir a ellos para generar una situación en donde puedan construir relaciones ligadas a las transformaciones isométricas. Considerar aprendizajes previos como: elementos primitivos de la geometría, construcción de figuras 2D y perímetros de figuras 2D.

Contextualización

El establecimiento en el cuál se implementará la situación de aprendizaje, tiene las características de ser particular subvencionado, cuenta con una matrícula de 1.080 estudiantes y está ubicado en la comuna de Quilpué, Chile, acoge a familias de nivel socioeconómico medio alto (según los datos obtenidos de la información que nos entregan evaluaciones estandarizadas). La actividad se desarrollará en los terceros básicos A y B, cada uno de ellos cuenta con una matrícula de 34 alumnos y alumnas. Importante es recalcar que esta situación será el primer acercamiento que los estudiantes tendrán acerca de las transformaciones isométricas y es por ello que se hace tan importante, generar una situación que sea atractiva para ellos y que logre el objetivo de que emerja desde los estudiantes este aprendizaje.

La secuencia de actividades abarca tres clases (cada una conformada por bloques de 2 horas pedagógicas --comprendiendo las horas pedagógicas de un tiempo de 45 minutos cada una.)

A continuación se exponen los objetivos de las sesiones sugeridos para la implementación de la actividad:

Sesión Nº1

Objetivo de la clase: *representar elementos primitivos de la geometría utilizando el software educativo GeoGebra.*

En una primera instancia, los estudiantes resuelven actividades relacionadas con los elementos primitivos de la geometría (punto, recta, segmento, rayo y semirrecta) en un módulo de aprendizaje, el cual, será anexado al final del escrito. Luego de ello, exploran el software educativo GeoGebra, visualizando las herramientas con las cuales pueden contar para trabajar con el programa. Finalmente representan los elementos primitivos de la geometría en el software educativo GeoGebra.

Sesión Nº2

Objetivo de la clase: *construir cuadriláteros utilizando el software educativo GeoGebra*

Durante esta sesión, los estudiantes construyen un cuadrilátero utilizando el programa. Para ello, escuchan las indicaciones que les entrega la docente y luego trabajan en su computador individual. La construcción se puede realizar a través de puntos y segmentos por separado o utilizando la herramienta de polígono.

Sesión Nº3

Objetivo de la clase: *aplicar transformación isométrica (traslación) a un cuadrilátero utilizando un vector a través del software educativo GeoGebra.*

Los estudiantes utilizan la herramienta para aplicarle una transformación isométrica, traslación, al cuadrilátero construido anteriormente construido. La traslación se puede hacer utilizando la herramienta  hacer click en el cuadrilátero y luego construir un vector. La otra opción es construir un vector y luego trasladar la figura según el vector construido.

Finalmente, los estudiantes comunican los pasos que han utilizado para poder aplicar la traslación al cuadrilátero que han construido.

Objeto matemático: isometría

El objeto matemático involucrado en este proyecto de innovación son las transformaciones isométricas. Para comprender el significado de isometría debemos observar la raíz epistemológica de su palabra, pues, ***iso*** significa igual y ***metría*** medición, en griego. Esta palabra compuesta significa, entonces, igual medida.

Snapper y Troyer (1971) construyen tres principios de una isometría:

"Una **isometría** de V a W es una función que cumple σ: V $\rightarrow$ W

1. σ es uno uno y sobre
2. σ es una transformación lineal.
3. AB = (σ A) (σ B) para todos A, B ε V."

Coxeter (1991), en la pág. 54 indica que "una *isometría es una transformación que preserva la longitud, de manera que si (P, P′) y (Q, Q′) son dos pares de puntos correspondientes, determinarán los segmentos congruentes PQ = P′Q′: PQ y P′Q′."* Este segundo acercamiento, a la luz de un saber sabio, se puede acercar a la definición que los textos escolares nos brindan, "si cambias de posición o ubicación una figura sin modificar su forma ni su tamaño, estas realizando una transformación isométrica".

El objeto matemático de las transformaciones isométricas trae consigo una matemática tremendamente profunda y necesaria para futuros aprendizajes escolares. La adhesión y el aprendizaje significativo de éste, se puede lograr utilizando de manera intencionada un software educativo, diseñando actividades que se encuentren articuladas, donde, el objetivo final sea evidenciar el aprendizaje logrado relacionado con el objeto matemático de estudio.

Uso del GeoGebra

Para llevar a cabo dicho objetivo, es necesario que los estudiantes exploren el software educativo, en una primera instancia, posterior a ello, se requiere aplicar una alfabetización básica de la herramienta tecnológica, para que los alumnos puedan cumplir a cabalidad con los objetivos planteados en las sesiones.

El programa GeoGebra emerge de una maestría de año 2001 en donde su autor, Markus Hohenwarter, deseaba generar un sitio web que implicara una fusión entre la geometría dinámica y los sistemas de cálculos simbólicos, que tuviese la modalidad de ser útil en la enseñanza de la matemática en el aula. Tal fue el éxito de su propuesta, que hubo

muchos matemáticos que tuvieron la intención a aportar ideas para que dicho software educativo pudiese ampliar sus funciones. Según lo indica https://www.geogebra.org/about

> GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. GeoGebra, con su libre agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento.

Marco teórico

El Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) es un ambiente creado y desarrollado para resolver situaciones y problemas geométricos, donde éstos se pueden relacionar y vincular con un individuo (Kuzniak 2004). Esta relación puede estudiarse desde dos planos; el primero es el plano cognitivo, el cual, está compuesto por la visualización, construcción y prueba. El segundo, plano epistemológico, está formado por el conocimiento referencial, artefactos y el espacio real con figuras. Ambos planos interactúan a través de tres génesis, la semiótica, instrumental y discursiva.

La siguiente imagen logra plasmar la interacción existente entre los planos y sus génesis.

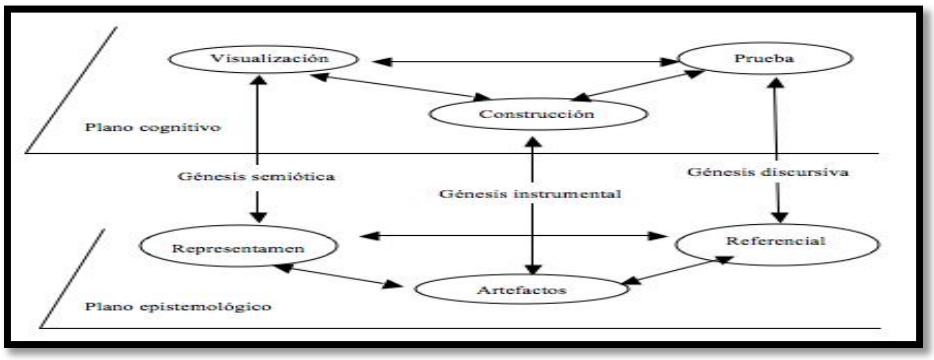


Figura 1: Espacio de Trabajo Matemático Kuzniak 2011

Paralelo a ello, el Espacio de Trabajo Geométrico se puede clasificar en tres tipos:

- ETG de referencia: hace mención al espacio ideal en relación a elementos matemáticos y su empleador es una persona experta en lo epistémico.
- ETG: idóneo: se encuentra centrado en elementos didácticos, pues, en general, su utilizador en el docente.
- ETG: personal: relacionado con el análisis y reflexión de los conocimientos adquiridos, lo cuales, han sido puesto en práctica, en general, su utilizador natural puede ser el estudiante o docente.

Para aplicar la teoría al contexto de esta investigación es que se concretizarán los espacios de trabajo geométrico involucrados en las actividades detalladas anteriormente. En el caso del ETG de referencia se puede evidenciar en los programas de estudios y bases curriculares que contempla el Ministerio de Educación en función del currículo para los establecimientos de enseñanza básica o primaria. En lo que respecta el ETG idóneo, se considerará el análisis del módulo de aprendizaje resuelto por los estudiantes y los documentos en GeoGebra en función de las construcciones realizadas. En relación al ETG personal, corresponde a cada estudiante que participó del proyecto, niños y niñas del Tercero Básico A y B.

Análisis curricular

A continuación se observa una tabla de Objetivos de Aprendizaje (según lo descrito en las Bases Curriculares, Chile):

	Nivel	1º Básico	2º Básico	3º Básico	4º Básico
Eje de Geometría	**Elementos de la geometría**	**OA 15.** Identificar y dibujar líneas rectas y curvas.		**OA 18:** Demostrar que comprenden el concepto de ángulo: ›identificando ejemplos de ángulos en el entorno › estimando la medida de ángulos, usando como referente ángulos de 45º y de 90o	**OA 19:** Construir ángulos con el transportador y compararlos.
	Transf. isométricas			**OA 17:** Reconocer en el entorno figuras 2D que están trasladadas, reflejadas y rotadas.	**OA 17:** Demostrar que comprenden una línea de simetría: › identificando figuras simétricas 2D › creando figuras simétricas 2D › dibujando una o más líneas de simetría en figuras 2D › usando software geométrico. **OA 18:** Trasladar, rotar y reflejar figuras 2D.

El texto de estudio de tercero básico que entrega el Ministerio de Educación (2017) brinda una definición de lo que son las transformaciones isométricas, “si cambias de posición o ubicación una figura sin modificar su forma ni su tamaño, estas realizando una transformación isométrica”.

Desde la guía docente no emergen definiciones que puedan complementar este análisis.

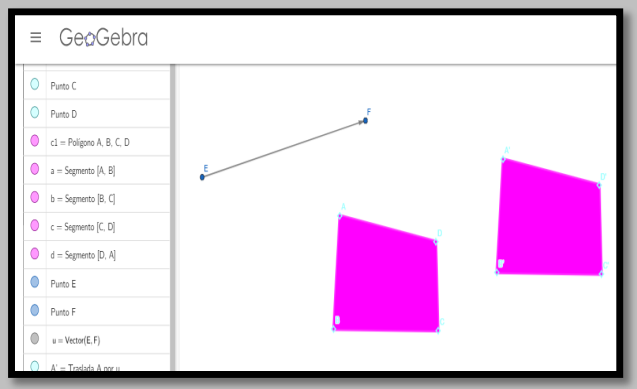
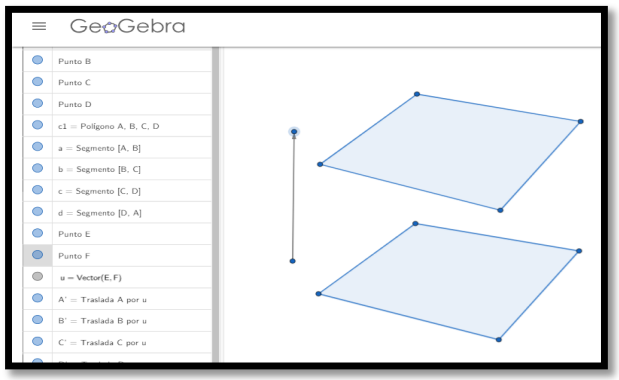
La profundización de los aprendizajes relacionados con las transformaciones isométricas emergen desde los textos de estudio de segundaria o segundo ciclo (7mo y 8vo

básicos) en donde, los estudiantes deben aplicar las transformaciones isométricas en el software educativo GeoGebra.

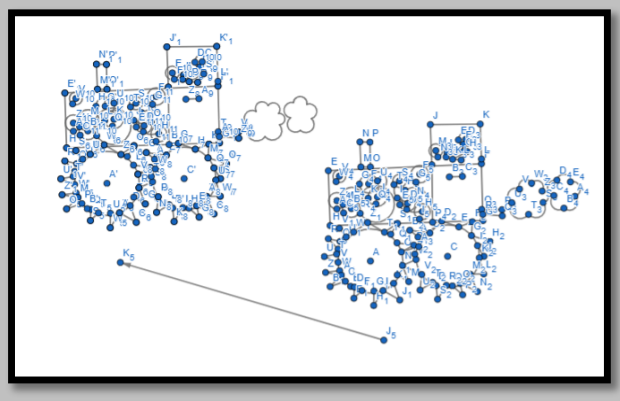
En función de ello, es que esta propuesta didáctica cobra real importancia, pues, es trascendental involucrar a los estudiantes con una geometría móvil, integral, diferente. El que los estudiantes se vean envueltos en una alfabetización de GeoGebra a temprana edad, facilitará la adquisición de aprendizaje en el segundo ciclo, además, provoca que los estudiantes se involucren con el objeto de estudio, se interesen por investigar más y se motiven a construir nuevos aprendizajes.

Algunos resultados

La totalidad de los estudiantes logró los objetivos planteados al inicio de las sesiones. Demostrando mucho ánimo en el proceso de exploración, construcción y traslación de cuadriláteros. Tanto fue el asombro y la motivación demostrada por los estudiantes, que fueron ellos quienes solicitaron a la docente, poder construir otras figuras utilizando el software educativo, dado que, estaban curiosos por saber que sucedería si se le aplicaba una traslación. La docente facilitó el tiempo para que implementaran sus construcciones y logran aplicar una traslación a las figuras construidas. A continuación adjunto algunas imágenes de los trabajos realizados por los estudiantes.

Construcción en GeoGebra	Comentarios de los estudiantes
Estudiante 1: 	**Estudiante 1:** "tuve que hacer un de esos de cuatro lados (…) cuadrilátero y después apreté el botón para trasladar (…) hice un rayo, ¿rayo se llamaba no? Y se trasladó.
Estudiante 2: 	**Estudiante 2:** "primero tuve que leer bien el módulo, y luego construí un cuadrilátero que tiene cuatro lado, obvio, la traslación es en relación al vector"

Estudiante 3:



Estudiante 3:

"me dí cuenta que los polígonos son figuras cerradas, porque si yo unía los lados no era asi como exacto, faltaba un poquitito. Entonces el cuadrilátero es una figura cerrada de cuatro lados"

Figura 2: Imágenes de los trabajos realizados por los estudiantes.

Bibliografía y referencias

Coxeter, H. (1991). *Fundamentos de Geometría*. México: Limusa.

Kuzniak Alain. (2004), *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Paris, France: Institute de Recherche sur l'enseignement des Marthématiques Paris VII.

Kuzniak Alain. (2011), Léspace de travail mathématique et ses généses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 16. Pp. 9 – 24.

Kuzniak A, Montoya-Delgadillo E, Viviera L, (2016) El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* Año 11. Número 15. pp 237-251. Costa Rica

MINEDUC (2012) Programas oficiales de educación matemática. Ministerio de Educación, Gobierno de Chile. Disponible en línea: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-49395.html

Montoya-Delgadillo, E. (2014) El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: *profesionales en formación inicial. Enseñanza de las Ciencias,* 32.3 oo: 227-247.

Snapper, E. & Troyer, R. (1971) *Metric Affine Geometry*, Academic Press.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en operaciones cognitivas

Jorge Enrique **Galeano** Cano
Área de Educación Matemática, Universidad del Valle
Colombia
jorge.enrique.galeano@correounivalle.edu.co

Resumen

Se presenta una síntesis del trabajo de grado en la Maestría en Educación: *Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento* (Galeano, 2015). Este propone, a partir de una perspectiva semiótica y cognitiva (Duval, 2005), un acercamiento a las figuras geométricas como un modo de ilustrar las posibilidades de una propuesta para la enseñanza de la geometría y contribuir así al desarrollo del pensamiento espacial. Toma como metodología los Experimentos de Enseñanza (Cobb, 2000); se caracterizan dos grupos de situaciones, las actividades diseñadas muestran cómo pueden usarse para desarrollar procesos de construcción que permiten un acceso significativo a dichas figuras, y procesos de visualización que explotan su productividad heurística. El análisis de la implementación muestra que los estudiantes desarrollan posibilidades de tratamiento sobre las figuras y se acercan a la comprensión de las propiedades características de una figura geométrica.
Palabras clave: Visualización, construcción, razonamiento, geometría, figuras geométricas, aprendizaje, diseño, experimento de clase.

Formulación de la propuesta de trabajo en clase

El trabajo realizado se constituye a partir de la formulación de un problema en Educación Matemática, los elementos teóricos y metodológicos que lo sustentan, lo que finalmente se concreta en el diseño, implementación y análisis de una serie de actividades en un grado sexto de Educación Básica Secundaria para el trabajo con figuras geométricas. En la realización del Experimento de Enseñanza[1] se identifican dos niveles: un micronivel y un macronivel (Cobb, 2000). En el micronivel se encuentra el experimento de enseñanza en el momento en que fue pensado y se hicieron ciertas anticipaciones, junto con los elementos previstos para desarrollar la enseñanza, los cuales contemplan las actividades de clase planeadas y aplicadas; se cierra este

[1]Es una metodología de investigación que provee maneras de explorar las posibilidades de investigar lo que a partir de la propuesta de enseñanza del profesor ocurre con el aprendizaje de los estudiantes y con los cambios que se dan al nivel del salón de clase (Cobb, 2000); está incluida dentro de las metodologías de Investigación Basada en Diseño IBD.

primer nivel con el análisis de la implementación de dichas actividades, estos es, un *análisis local* que permite identificar lo que ocurrió en clase y a partir de ahí desarrollar los ajustes para las actividades siguientes e identificar los primeros resultados del trabajo.

La planeación de las actividades inició con la determinación de los contenidos que serían cubiertos con el desarrollo de la intervención en clase así como una descripción de las maneras en que se espera discurra el aprendizaje (la *conjetura*); en esta parte fue importante tener en cuenta lo que el profesor, y el colegio, tenían planeado para trabajar con los estudiantes.

La conjetura es una afirmación sobre los hechos del salón de clase que se basa en evidencias, tanto teóricas como experimentales, que recoge las creencias del equipo de investigación en relación con las formas en que se han de desarrollar los aprendizajes de los estudiantes (Confrey y Lachance. 2000). Cobb (2000) afirma, al estilo del ya conocido símil de la moneda, que una conjetura tiene dos partes diferentes pero estrechamente ligadas y que se conjugan al momento de formularla. Se tienen entonces la dimensión del contenido y la dimensión pedagógica de la conjetura; la primera asociada a qué se debe enseñar y la segunda a cómo se debe hacerlo. Todo lo anterior se concreta en la formulación de una *trayectoria hipotética de aprendizaje*[2].

En el macronivel, se estudia toda la secuencia completa de enseñanza, todos los elementos que constituyeron la planeación del experimento y sus diversas actividades de clase así como los detalles de su implementación; se trata de crear conexiones, relaciones y explicaciones entre la teoría local que guió el diseño y la implementación de las actividades, para tratar de explicar la forma en que las trayectorias de aprendizaje y las conjeturas respondieron a lo esperado en el experimento de enseñanza; esto se realiza mediante un *análisis retrospectivo*.

Fundamentos de la propuesta

La propuesta de actividades -trayectorias- se organiza siguiendo lo señalado por las dos dimensiones de la conjetura: en el qué enseñar se incluyen reflexiones de orden matemático (sistemas geométricos) y curricular (pensamiento espacial); en el cómo enseñar se introducen consideraciones de orden cognitivo y semiótico. Se presentan a continuación algunos detalles de lo anterior.

La geometría euclidiana es parte importante en el trabajo que sobre el pensamiento espacial se hace en la escuela. Así, la formación de los estudiantes se organiza –según lo señalado por los Estándares- en relación con los sistemas geométricos "Los puntos, líneas rectas y curvas, regiones planas o curvas limitadas o ilimitadas y los cuerpos sólidos o huecos limitados o ilimitados pueden considerarse como los elementos de complicados sistemas de figuras, transformaciones y relaciones espaciales: los sistemas geométricos." (MEN. 2006, p. 62). Es decir, estos sistemas están constituidos a partir de tres componentes: los objetos geométricos, las operaciones entre ellos y las transformaciones de las que son susceptibles dichos sistemas.

Para alcanzar lo propuesto por el MEN las escuelas definen acciones que se estructuran fundamentalmente desde una mirada conceptual, es decir, se organiza la propuesta de enseñanza

[2]Siendo un concepto nuevo, como ocurre con tantos otros en educación matemática, no se encuentra aún un consenso entre los miembros de la comunidad en relación con su definición y alcance. En este trabajo se parte de la acepción de dada por Confrey & Maloney (2009) "… a researcher-conjectured, empirically-supported description of the ordered network of constructs a student encounters through instruction (i.e., activities, tasks, tools, forms of interaction and methods of evaluation)..." p. 347

alrededor de las exigencias que la estructura formal del concepto presenta. Esta decisión, que está ampliamente sustentada, ha logrado darle sentido a las prácticas escolares en los últimos años; sin embargo, parece posible ampliar la mirada e incluir en estas exigencias aquellas que la actividad geométrica le impone a los estudiantes, en particular se considera que desde un punto de vista cognitivo (Duval, 2001) en necesario incluir aspectos relacionados con los procesos de construcción, visualización y razonamiento.

Se puede iniciar haciendo entonces una reflexión en relación con los procesos de visualización involucrados en la actividad matemática. El trabajo que se propone en geometría ha de estar asociado necesariamente con el desarrollo de las capacidades de visualización que debe construir un estudiante. Una primera caracterización de este proceso señala dos tipos de visualización: la icónica y la no icónica (Duval 2010).

La visualización icónica supone un acceso a las figuras geométricas del mismo modo en que sucede en otras representaciones gráficas por fuera de las matemáticas. En geometría el reconocimiento icónico de las figuras requiere de "una figura particular que sirve de modelo, y las otras figuras son reconocidas según su grado de parecido con este modelo" (Duval, 2004. p. 168). Sin embargo, el asunto fundamental en la entrada icónica a la visualización de una figura, en geometría en particular, tiene que ver con el hecho de que en esta las formas reconocidas aparecen estables, es decir, aparecen como si no fueran susceptibles de ser transformadas; al ser representaciones y sabiendo que la potencia de toda representación no está solo en el hecho de poder dar acceso a cierta información, sino que su potencia como signo radica en el hecho de poder transformarse y expresarse de modos distintos, esta estabilidad que la visualización icónica da a las figuras se convierte en algo que ha de ser superado para realizar un aprendizaje significativo de la geometría.

Es claro pues que uno de los primeros retos que ha de enfrentar una propuesta de trabajo en clase de geometría es la de apoyar el desarrollo de habilidades que le permitan al estudiante alejarse de una visualización icónica de las figuras. Un primer paso en este sentido es entonces comprender la naturaleza de la visualización no icónica, Duval (2004) afirma:

> La visualización no icónica… permite reconocer las formas, bien en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, bien en virtud de deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades que hayan sido enunciadas en las definiciones o en los teoremas que declaran lo que representa una figura. (p. 168)

Desarrollar en los estudiantes esta forma de ver que activa, por decirlo de alguna manera, la realización de tratamientos sobre las figuras, que pueden conducir a la solución de un problema, o que por lo menos dan lugar a procedimientos de búsqueda de dicha solución, se constituye en el objetivo que se quiere alcanzar en el proceso de aprendizaje de la visualización en geometría. Esta forma de ver una figura se asocia con distintas transformaciones sobre las figuras; unas tienen que ver con descomponer una figura en otras figuras (subfiguras), otras tienen que ver con la posibilidad de descomponer una figura en unidades figurales de una dimensión inferior. Las primeras se conocen como modificaciones mereológicas y las segundas como un proceso de deconstrucción dimensional (Duval, 2005).

En la construcción de una figura la producción de un trazo está asociada a dos elementos: una instrucción que recoge un pedido en relación con aquello que se quiere construir y la movilización de una propiedad geométrica en relación con el o los instrumentos que se van a

emplear. Estos elementos dan lugar a lo que Duval (2005) ha llamado *trazos auxiliares y trazos reorganizadores.* Se tiene aquí un punto de encuentro entre la construcción y la visualización: las posibilidades que un estudiante tiene de ver los trazos reorganizadores necesarios para resolver un problema dependen de las capacidades de visualización que haya construido; se puede decir inicialmente que una mirada icónica sobre las figuras claramente no apoya la construcción de ningún trazo reorganizador.

La práctica tradicional de enseñanza de la geometría, en la cual las figuras se consideran evidentes y acabadas, ha dejado por fuera la enseñanza de algunos tratamientos básicos en el registro de las figuras; poder hacer un trazo que la figura no tenía, tan simple como suena, no es una práctica común en las clases de geometría.

Estructura de la propuesta

Se presentan entonces algunas consideraciones generales en relación con las trayectorias de aprendizaje: las situaciones, las actividades y sus conjeturas. Las tres primera situaciones configuran la trayectoria 1, que fue implementada y analizada, y a partir de los resultados de lo anterior se formula la segunda trayectoria, la cual queda como una propuesta para desarrollar futuros trabajos.

En todas las situaciones, las figuras aparecen como representantes de propiedades geométricas y las modificaciones a realizar son de carácter gráfico solamente; además, se propone como objeto de enseñanza la génesis de formas de actuación que lleven a desarrollar los procesos necesarios para entender las figuras en este sentido. Con tareas de construcción se apoya el primer rol asociado a las figuras y de ahí se pasa a los procesos de visualización no icónica para apoyar el desarrollo de las modificaciones mereológicas y de deconstrucción dimensional.

En la primera trayectoria, compuesta por tres situaciones, todas las actividades son de reproducción de una figura, para lo cual se usan instrumentos de construcción no estándar (ilustración 1) (Duval, 2010) o convencionales; son tareas que exigen la producción de una representación gráfica que debe conservar las mismas propiedades que la figura dada.

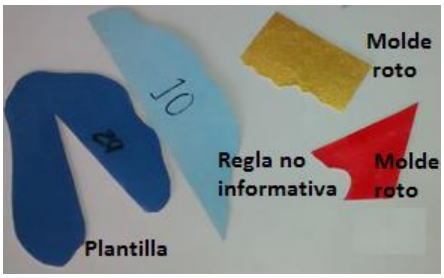


Ilustración 1. Instrumentos de construcción no estándar

Cada situación involucra el desarrollo de *objetos* del sistema geométrico que aparecen directamente asociados a figuras geométricas (triángulos, cuadrados, rombos, etc.), y se formularon en relación con los estándares para el pensamiento espacial, del grado sexto a noveno (MEN, 2006); es decir, cada situación se asocia con el desarrollo de alguno de los estándares de este ciclo; aunque es claro que una sola situación no agota el desarrollo de dicho estándar. Además, en cada situación se privilegia el desarrollo de alguna operación cognitiva. La situación 1 surge como una adecuación de la propuesta de Duval (2010). Está constituida por cinco actividades en las que se emplean instrumentos de construcción no convencionales en tareas de

reproducción de figuras. La situación 2 consta de cinco actividades. Todas ellas tienen que ver con la reproducción de cuadriláteros empleando instrumentos convencionales (las escuadras) y no convencionales (moldes y plantillas). La situación 3 consta de tres grupos de actividades; en cada una de estas situaciones se daba una figura y la consigna era formular en lengua natural una serie de pasos que le permitan a quien lee o escucha dicho mensaje hacer la reproducción de la figura, conservando forma y tamaño.

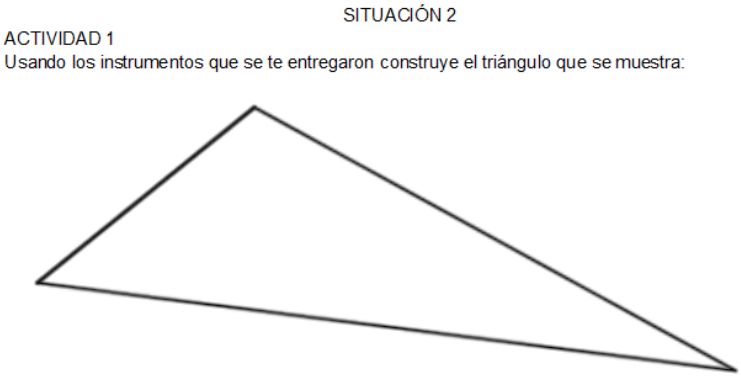


Ilustración 2. Ejemplo de actividad. Es la primera de 3 actividades que conforman la situación 2. En ella se usan una escuadra y la regla no informativa.

Las condiciones sobre lo curricular (Estándares del pensamiento espacial), lo matemático (sistemas geométricos) y los procesos cognitivos introducidas en el diseño se mantienen para todas las situaciones y se resume en la tabla siguiente.

Tabla 1

Condiciones para el diseño de las situaciones

Sistema geométrico	Procesos cognitivos			*Estándares pensamiento espacial 6°-9°*
	Construcción	Visualización	Razonamiento	
Objetos	S2a1 S2a2 S2a3 S2a4 S2a5	S1a1 S1a4 S1a5 S1a2 S1a3	S3a1 S3a2 S3a3	*C*[3]
Relaciones	S4a1 S4a2 S4a3	S5a1 S5a2 S5a3	S6a1 S6a2 S6a3	*J* *E* *H* *I*
Transformaciones				

Nota. Cada celda hace referencia a una situación y las actividades que la componen, determina las relaciones de dicha situación con el sistema geométrico (primera columna a la izquierda), con lo

[3]Se usó una letra para designar cada uno de los Estándares (MEN, 2006) de 6° a 9°: C. Clasifico polígonos en relación con sus propiedades. E. Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte, por ejemplo.

curricular (última columna a la derecha) y lo cognitivo (arriba, columnas del centro). La última fila corresponde a elementos de los sistemas geométricos y a estándares que no se trabajaron en esta experiencia, queda como un asunto pendiente para futuros estudios. La antepenúltima fila corresponde a la primera trayectoria, y la penúltima fila corresponde a la trayectoria 2.

En cada trayectoria, y en el marco del experimento de enseñanza, se determinó una conjetura y sus dos dimensiones, en ellas quedan plasmados los elementos y consideraciones que se han señalado para el diseño; por ejemplo, para la situación 1 se tienen las siguientes:

Conjetura: El uso de instrumentos de construcción no convencionales permite que los estudiantes reconozcan las características y propiedades de una figura geométrica. Dimensión pedagógica: *Las actividades de reproducción de figuras constituyen un escenario ideal para que los estudiantes exploren las diferentes características de una figura geométrica.* Dimensión del contenido: *Los triángulos tienen la característica de ser la figura más simple que contiene ángulos, los cuales son uno de los elementos claves para la determinación de las propiedades de una figura.*

En la segunda trayectoria, se formula en la parte final del trabajo tomando como base los resultados obtenidos en la implementación de la primera (ver abajo, Resultados: micronivel); se presentan algunas generalidades de su diseño.

La trayectoria 2 se compone de tres situaciones, cada una de las cuales responde a una de las categorías que se desprendieron de los análisis locales, se mantiene la relación con algún estándar del pensamiento espacial, y en esta se atiende a las *relaciones* del sistema geométrico (ver penúltima fila, tabla 1). La situación 4 recoge la realización de trazos reorganizadores sobre las figuras como apoyo al surgimiento de nuevas formas de ver; con dichos trazos se puede ver en una figura algo que antes no se veía. La situación 5 pretende apoyar el desarrollo de modificaciones mereológicas sobre las figuras, es decir, avanzar en la comprensión de la aprehensión operatoria. La situación 6 busca el desarrollo de los procesos discursivos de designar, describir y explicar, como formas fundamentales de apoyar el avance hacia la deconstrucción dimensional de figuras.

Resultados

Micronivel

Las situaciones se implementaron en el grado sexto, en el marco de dos trabajos de pregrado de la licenciatura en matemáticas (Bahamón & Bonelo, 2015; Hoyos, 2015) vinculados con el presente trabajo, el autor. Se presenta una síntesis de los resultados de los análisis locales, sobre todo aquellos que encuentran relación con los propósitos del trabajo, se han organizado en dos grandes grupos: los que tienen relación con la actividad de construcción y los que tienen que ver con las actividades de razonamiento y visualización.

Una mirada sobre los datos se hizo atendiendo a los usos dados a los instrumentos, las propiedades de las figuras que se pueden identificar gracias a dicho uso, la relación de estas propiedades y los tipos de instrumentos empleados, el uso de trazos reorganizadores y las posibilidades de avanzar de una visualización icónica a una no icónica, el papel de estos trazos en el desarrollo de la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de formas, y algunas consideraciones sobre las restricciones y cuidados en el uso de dichos instrumentos.

Otra mirada, que no se desarrolla en este texto, tiene que ver con los ajustes al diseño que apuntan al refinamiento del mismo, además de los resultados de los estudiantes.

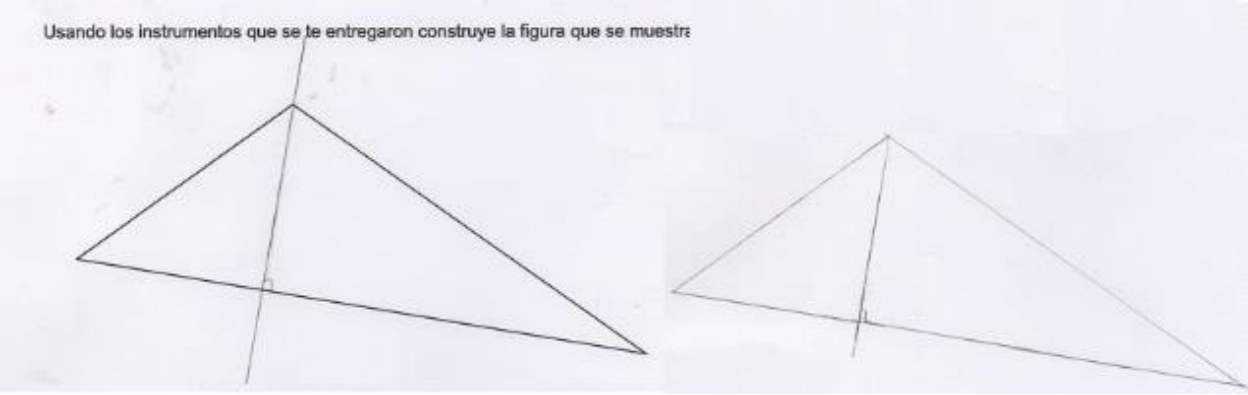


Ilustración 3. Ejemplo de la producción de un estudiante. En la figura dada, el estudiante hizo el trazo de la altura del triángulo; luego, en la derecha, hace el trazo de la base y de la altura, para luego completar las demás partes del triángulo.

Macronivel

Finalizadas las sucesivas intervenciones en clase y sus análisis locales, se inició el análisis retrospectivo que se contempla en la metodología; esto es, se hace una revisión global de los diseños, la implementación y las discusiones y resultados de los análisis locales, con miras a identificar variables que permitan hacer un análisis de las condiciones que produjeron efectos significativos en el diseño y en la implementación. Este análisis además sentó las bases para el diseño de la segunda trayectoria, junto con las actividades de clase respectivas.

Esta revisión permitió identificar las siguientes categorías sobre las cuales se ubicaron la mayoría de las producciones de los estudiantes y que al mismo tiempo daban elementos para atender la pregunta del proyecto y los objetivos del mismo. Así, el análisis permitió que:

1. Se caracterizaran los diferentes usos que los estudiantes dieron a los instrumentos de construcción empleados en las actividades; estos usos se ponen en relación con las características que teóricamente se asignaron a dichos instrumentos.
2. Se determinaran las formas de visualización presentes en el trabajo de los estudiantes, sobre todo el proceso de evolución de lo icónico a lo no icónico.
3. Se identificaran algunos desarrollos en relación con la deconstrucción dimensional de figuras.

Conclusiones

Los resultados obtenidos evidencian las potencialidades de una propuesta de trabajo en clase de geometría basada en el desarrollo de los procesos cognitivos, pues abren una amplia gama de opciones de trabajo con las figuras en geometría; además dejan ver que es posible hacer avanzar a los estudiantes en formas de trabajo que dan cuenta de desarrollos en su conocimiento geométrico al mismo tiempo que construyen formas de actuación y reflexión potentes para la solución de problemas.

El asunto central en los desempeños de los estudiantes es que logran dar el salto dimensional; pasan de ver las figuras de dos dimensiones como unidades figurales, a ver las unidades de una dimensión que las conforman; es decir, ya es claro para la mayoría de ellos que son los trazos de una dimensión los que permiten la construcción de figuras de dimensión superior.

La visualización no icónica se manifiesta sobre todo en el reconocimiento de las subfiguras que surgen al hacer trazos reorganizadores, aunque se debe entender que este reconocimiento no es suficiente para realizar modificaciones mereológicas. Es decir, se logró que los estudiantes hagan los tratamientos que les permiten identificar subfiguras, pero no se establece completamente la aprehensión operatoria.

Los trazos que predominaron en las actividades fueron el trazo de alturas, las cuales siempre llevaban a dividir el primer contorno en otro que contenía triángulos rectángulos. Aparecen diversas formas de lograr dichos trazos. En todos estos casos los trazos nuevos entran a jugar un papel central en el avance desde la visualización icónica a la no icónica.

La visualización no icónica, la que apoya la deconstrucción dimensional, se presentó claramente en las acciones de los estudiantes; aunque restringida a ciertas líneas y no a todo el espectro posible de rectas asociables a una figura. Esto debido a que las tareas que se debían resolver solo requerían de algunas de estas rectas.

Se abre la necesidad de seguir pensando en la relación entre los procesos de visualización y razonamiento, y entre la construcción y razonamiento, pues se ve que los estudiantes presentan serias dificultades para usar un discurso potente en geometría.

Referencias y bibliografía

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. *A. Kelly & R. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* Cap. 12 (pp. 307 - 326). N Jersey: Lawrence Earlbaum.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative Teaching Experiments through Conjecture-Driven Research Design. *A. Kel & R. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* Cap. 10 (pp. 231 – 265)

Confrey, J., Maloney, A. P., Nguyen, K. H., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. *En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*.

Duval, R. (2001). La geometría desde un punto de vista cognitivo. *Boletín de la red en educación matemática*, número 2. Cali. Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta. *M. d. ciencia, Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159 - 188). Madrid: secretaría general técnica.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales De Didactique Et Sciences Cognitives*. Volume 10 (pp. 5 – 53)

Duval, R. (2010). Los cambios de mirada sobre las figuras. *TEA Tecné, Episteme y Didaxis*. N° 27 (pp. 108 – 129).

Galeano, J. E. (2015). *Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento.* Trabajo de Maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias. MEN. Bogotá, Colombia.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O Ensino de Geometria nos Anos Finais do Ensino Fundamental: Uma Análise Epistêmica das Orientações Curriculares Brasileiras

Miriam Ferrazza **Heck**
Doutoranda do Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil
Brasil

miriamfzh@gmail.com
Carmen Teresa **Kaiber**
Docente do Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil
Brasil
carmen_kaiber@hotmail.com

Resumo

Neste trabalho apresenta-se uma análise epistêmica da Base Nacional Comum Curricular brasileira, no que se refere aos conhecimentos geométricos nos anos finais do Ensino Fundamental, parte integrante de uma pesquisa que está sendo desenvolvida em nível de doutorado, que tem como objetivo investigar possibilidades da constituição de um currículo para a Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, na região da 36ª Coordenadoria Regional de Educação/ RS, tomando como referência o EOS. Teoricamente, a análise proposta se efetivou considerando os constructos advindos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática- EOS. Resultados apontam a presença, de modo equitativo dos componentes situações-problemas, linguagem, regras, argumentos e relações, integrantes da Idoneidade Epistêmica da EOS. Foi possível identificar, também, uma articulação entre as unidades temáticas Geometria e Grandezas e Medidas na indicação do trabalho com situações- problemas.

Palavras chaves: Geometria, Diretrizes Curriculares, Currículo de Matemática, Ensino Fundamental.

Introdução

Os conhecimentos geométricos se constituem em parte importante do currículo da Educação Básica brasileira e estão presentes nas orientações curriculares com espaço e relevância análogos aos demais campos que compõem o currículo da área de Matemática- Aritmética, Álgebra, Estatísitca e Probabilidade- apresentados na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017). Ainda, aspectos do processo de ensino e aprendizagem da Geometria permanecem no centro de discussões e investigações relacionadas, principalmente, a sua pouca presença como objeto de

ensino em sala de aula, suas contribuições ao desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e a processos de ensino pertinentes, notadamente os que envolvem uma Geometria chamada de experimental e a utilização de recursos advindo das tecnologias digitais. Mais recentemente, pesquisas sobre o trabalho com provas e demonstrações, na Educação Básica, tem recebido atenção.

Nesse contexto, o estudo aqui apresentado é parte de uma pesquisa que está sendo desenvolvida em nível de doutorado e que tem por foco investigar aspectos do desenvolvimento da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental em escolas públicas da 36ª Coordenadoria Regional de Educação do Estado do Rio Grande do Sul/Brasil tomando como referência os constructos teóricos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS (Godino, 2011). Particularmente, apresenta-se, aqui, uma análise produzida na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2017) no que se refere a Geometria desenvolvida no nível de ensino mencionado, na perspectiva do enfoque teórico apontado e que vai servir de base para a coleta e análise de dados a ser realizada nas escolas participantes da investigação.

A Base Nacional Comum Curricular foi insituida no ano de 2017 com o objetivo de estabelecer os conteúdos essenciais a serem estudados na Educação Básica brasileira. Trata-se de um documento de caráter normativo, que se estrutura por meio de um conjunto harmônico e progressivo de aprendizagens essenciais a serem desenvolvidos ao longo da escolaridade conforme apontado no documento que a apresenta (Brasil, 2017).

Anteriormente a Base, no período entre os anos de 1998 e 2016, o documento orientador da Educação Básica brasileira eram os Parâmentros Curriculares Nacionais e, de acordo com o documento que apresenta a BNCC do Ensino Fundamental (Brasil, 2017), esses parâmetros e a Lei de Diretrizes e Base- LDB nº 9394/96, serviram de subsídio para a constituição das noções fundantes e estruturantes das orientações curriculares que entraram em vigor no ano de 2017.

Sobre essa questão a BNCC destaca que a orientação para a definição de uma Base Nacional Comum Curricular já estava presente na própria Constituição Federal do Brasil que orientava no seu artigo 210 que "serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar a formação básica comum a respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais" (Brasil *apud* Brasil, 2017 p. 10), apontando para o estabelecimento de um conjunto de ações e conhecimentos básicos a serem desenvolvidos em todo o território brasileiro. Neste sentido, segundo o que consta no documento que apresenta a base é esperado que a BNCC ajude a superar a

> [...] fragmentação das políticas educacionais, enseje o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e seja balizadora da qualidade da educação. Assim, para além da garantia de acesso e permanência na escola, é necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, tarefa para a qual a BNCC é instrumento fundamental. (Brasil, p. 8, 2017)

De acordo com o mencionado documento, dentre as vertentes inovadoras que podem ser observadas na BNCC (Brasil, 2017), é que a mesma refere-se às aprendizagens por competências (definida no documento como a mobilização de conhecimentos, conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida. Neste sentido, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências, possuindo o compromisso com a educação brasileira, com a formação humana integral e com a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, fatores considerados essenciais para serem desenvolvidos no decorrer da Educação Básica.

No que se refere à Matemática do Ensino Fundamental a BNCC (Brasil, 2017) aponta que a mesma precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a

representações, associando essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Desta forma, é esperado que os estudantes desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. Ao mesmo tempo, salienta que é nesta fase que a dedução de algumas propriedades e a elaboração de conjecturas precisa ser estimulada.

Ainda de acordo com o documento, o Ensino Fundamental precisa ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, ou seja, que os alunos precisam ser capazes de desenvolver a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma variedade de contextos.

Dentre as competências específicas de Matemática apontadas na BNCC (Brasil, 2017, p.265) para o Ensino Fundamental, destacam-se: a) reconhecer que a Matemática é uma Ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas; b) desenvolver o raciocínio lógico, espírito de investigação e capacidade de produzir argumentos convincentes; c) compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática; d) fazer observações sistemáticas de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes; e) utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais, para modelar e resolver problemas cotidianos, validando estratégias e resultados; f) enfrentar situações-problemas em múltiplos contextos; g) desenvolver e discutir projetos; h) desenvolver trabalhos coletivos no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder questionamentos e na busca de soluções para problemas.

A BNCC apresenta os conhecimentos matemáticos estruturados em cinco unidades temáticas - Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Em cada unidade temática são apresentados os objetos do conhecimento pertinentes e destacadas as habilidades a serem desenvolvidas. Particularmente, neste trabalho, apresenta-se uma análise produzida em duas unidades temáticas: Geometria e Grandezas e Medidas, considerando que na própria BNCC estas unidades aparecem entrelaçadas ao longo de diferentes situações no decorrer do Ensino Fundamental, embora o foco da análise fosse a Geometria.

Assim, no que se refere a Geometria, a BNCC (Brasil, 2017) enfatiza o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. No caso dos anos finais do Ensino Fundamental, o ensino e aprendizagem envolvem contruções e representações, por meio de indução e o desenvolvimento do raciocínio lógico, intuitivo e hipotético dedutivo, por meio de aplicações e demonstrações, de forma articulada com outros conhecimentos. Neste contexto, destaca-se a importância de representações e comunicação em linguagem matemática (linguagem natural, numérica, simbólica, figural e gráfica), bem como um trabalho que permita desenvolver a capacidade de apresentar justificativas e construir argumentações.

Apresenta-se ainda, a necessidade de desenvolver aprendizagens com o auxílio de diferentes recursos didáticos e materiais, de maneira avdespertar o interesse e apresentar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática integrada a situações que propiciem a reflexão, tomada de decisão e apresentação de justificativas, necessários para a sistematização dos conceitos. Nesse contexto faz-se necessário, também, que os estudantes tenham a oportunidade de desenvolver a capacidade de abstração por meio de reelaboração de situações- problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos.

Já na unidade temática Grandezas e Medidas é proposto o desenvolvimento do estudo de medidas e das suas relações, favorecendo a integração da Matemática com outras áreas do

conhecimento. No que se refere aos anos finais do Ensino Fundamental, esta unidade reforça a necessidade de reconhecer comprimento, área, volume, ângulos e as demais grandezas associadas a figuras geométricas de forma a conseguir resolver problemas com o uso das diferentes unidades de medidas.

No que segue, são apresentados considerações sobre EOS, enfoque teórico adotado, com foco na dimensão epistêmica da Idoneidade Didática, os procedimentos metodológicos da investigação e a análise produzida.

Aspectos da Análise Epistêmica no Âmbito do EOS

De acordo com Godino (2011) o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) se propõem analisar as relações entre o pensamento, a linguagem e as situações em que a atividade matemática ocorre. Para o autor, esse processo se constitui como um percurso de reflexão, análise e tentativa de unificar diferentes pressupostos sob aspectos ontológicos, epistemológicos, cognitivos e instrucionais do conhecimento matemático e da instrução matemática essencial para o seu desenvolvimento. Parte de uma visão da Matemática que contempla um triplo aspecto: como atividade de resolução de problemas socialmente compartilhada, como linguagem simbólica e um sistema conceitual logicamente organizado (Godino, 2011).

O EOS é composto por um conjunto de noções teóricas, entre as quais destaca-se, aqui, a Idoneidade Didática, a qual pode ser util na concepção, implementação e avaliação do processo de ensino e aprendizagem da Matemática (Godino, 2011). Ainda, de acordo com o autor, a Idoneidade Didática é definida como a articulação coerente de sistêmica de seis dimensões: epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, emocional e ecológica.

Particulamente a análise aqui apresentada tem como foco a Idoneidade Epistêmica, a qual Godino, Contreras e Font (2006) salientam que está relacioanda, em um processo de estudo, ao grau de representatividade que há, do ponto de vista institucional, entre o significado atribuído a um objeto em relação a sua referência matemática. Refere-se ao conhecimento institucional, o qual é compartilhado dentro das instituições ou comunidades de prática, como se fossem redes de objetos. Orientado pelos pressupostos do EOS a análise epistêmica realizada na BNCC segue as orientações dos componentes da idoneidade epistêmica a qual, de acordo com Godino (2011), propõe cinco elementos advindos das entidades primárias que caracterizam o modelo epistêmico-cognitivo no EOS: situações-problema, linguagem (elementos linguísticos e representacionais), regras (conceitos, definições, procedimentos), argumentos e relações. Tais elementos serão explicitados, na metodologia, a partir de indicadores que são propostos no âmbito do EOS e que foram tomados como referencia para a análise.

Procedimentos Metodológicos

A investigação, na qual a análise aqui apresentada se insere, está sendo conduzida em uma perspectiva qualitativa (Creswell, 2014). Particularmente elementos da análise textual discursiva (Moraes & Galiazzi, 2007), aliados aos constructos teóricos do Enfoque Ontossemiótico, deram o suporte necessário para a mesma. A análise textual discursiva está organizada, de acordo com os autores, em quatro focos, sendo que os três primeiros constituem um ciclo inicial, desmontagem dos textos, estabelecimento de relações, seleção de informações pertinentes e, por fim, o ciclo de análise dos elementos seguindo um processo autorganizado.

No quadro da Figura 1 são colocados em destaque os componentes e indicadores da chamada Ferramenta de Análise Epistêmica, utilizada como referência na análise produzida.

Figura 1- Ferramenta de Análise Epistêmica

Componentes	Indicadores
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propor situações de expressão matemática e interpretação
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.

Fonte: Godino (2011, p. 09, traduzido pelos autores).

No que segue são destacados os resultados provenientes da análise produzida no documento que apresenta a Base Nacional Comum Curricular – BNCC no que se refere a Geometria desenvolvida nos anos finais do Ensino Fundamental, como já destacado.

A Geometria nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma Análise Epistêmica da BNCC

Conforme já descrito, a BNCC encontra-se em vigor e estabelece as normativas educativas para as escolas de Educação Básica brasileiras. A análise epistêmica da BNCC apresentada a seguir refere-se aos anos finais do Ensino Fundamental. A Base está organizada por áreas do conhecimento (Aritmética, Álgegra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística), competências específicas das áreas, componentes curriculares e competências específicas de componente. Estas unidades temáticas definem um arranjo dos objetos de conhecimento ao longo do Ensino Fundamental e as habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos dos diferentes contextos escolares.

Segundo o documento que apresenta a BNCC (Brasil, 2017) a mesma estabelece que os conteúdos mínimos apresentados se limitem a 60% dos conteúdos trabalhados em sala de aula, sendo que os outros 40% serão estabelecidos pelos sistemas de ensino estaduais. No que se refere a unidade temática Geometria, a BNCC destaca que a mesma envolve “o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (Brasil, p. 226, 2017). Esse tipo de pensamento, é essencial

para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos, sendo que, nessa etapa, a Geometria precisa ser consolidada de forma a promover a ampliação das aprendizagens.

Neste sentido, Fonseca (2009) contribui considerando que o trabalho com a Geometria é uma das melhores oportunidades que existe para aprender a matematizar a realidade, visto que, permite descobertas, construções e manipulações, possibilitando novas investigações. Nessa mesma linha de pensamento, Bulos (2011) enfatiza que a Geometria pode ser o caminho para o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias para a resolução dos problemas do nosso cotidiano, visto que o seu entendimento proporciona o desenvolvimento da capacidade de olhar, comparar, medir, predizer, generalizar e abstrair.

No quadro da Figura 2 é apresentada uma síntese da análise produzida nas unidades temáticas Geometria e Grandezas e Medidas dos anos finais do Ensino Fundamental da BNCC, tomando com base os objetos do conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas e apresenta os componentes e indicadores da Análise Epistêmica da Idoneidade Didática. Como já explicitado a unidade temática Grandezas e Medidas foi percebida articulada à Geometria, motivo pelo qual fez parte da análise. No quadro são destacadas evidências da presença, na BNCC, de cada um dos componentes epistêmicos propostos pela Ideoneidade Didática, as quais não são as únicas encontradas ao longo do documento, mas um conjunto que se entendeu representativo dos mesmos.

Figura 2 - Análise Epistêmica da BNCC

Componentes	Evidências- BNCC
Situações-problema	- Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas de comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume. - Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão. - Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas. - Resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. - Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ ou triângulos, utilizando a equivalência entre área. - Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas. - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
Linguagem	- Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono. - Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e a construção de quadriláteros. - Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas. - Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e quadriláteros. - Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro. - Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área.

	- Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
Regras (definições, proposições, procedimentos)	-Reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º. - Reconhecer a rigidez geométrica de triângulos e suas aplicações. - Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos. -Reconhecer, representar e construir, no plano cartesiano, o simétrico de figuras geométricas. - Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.
Argumentos	- Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. - Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos. - Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. - Reconhecer a inclusão e a intersecção de classes.
Relações	- Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides. - Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos e classifica-los em regulares e não regulares. - Identificar características dos quadriláteros e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles. - Verificar relações entre os ângulos formados por retas cortadas por uma transversal. - Estabelecer relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência. - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. - Identificar características dos triângulos, quadriláteros e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos; - Reconhecer a inclusão e a intersecção de classes.

Fonte: Brasil (2017, p. 299 - 317)

A análise permitiu perceber que as orientações curriculares propostas pela BNCC (Brasil, 2017) apontam para um conjuto significativo de situações-problemas envolvendo diferentes conceitos desenvolvidos ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental. Destaca-se, também, a presença da propostas de situações que articulam diferentes unidades temáticas, no caso a Geometria e Grandezas e Medidas, motivo pelo qual a análise foi realizada contendo essas duas unidades, como já indicado. Fica claro, também, a presença da Aritmética e da Álgebra, uma vez que as situações envolvem tratamentos que, muitas vezes, são de natureza aritmética e algébrica.

No que se refere ao componente epistêmico Linguagem a análise apontou indícios da presença de diversos tipos de expressões matemática manifestadas em linguagem natural, numérica, algébrica, simbólica, figural e gráfica. Destaca-se, ainda, que o componente Regras se faz fortemente presente, sendo que os conteúdos indicados a serem estudados envolvem a construção de conceitos, o desenvolvimento de procedimentos e o entendimento e demonstração de proposições.

O componente epistêmico Argumentos se faz presente, notadamente, nos dois últimos anos do Ensino Fundamental, pois pode-se observar a existência de indicativos para o trabalho com

situações que envolvam argumentações, explicações, comprovações e demostrações. Já no que se refere a Relações, a BNCC destaca os objetos geométricos a partir de situações, definições, proposições e procedimentos que se relacionam e se conectam entre si.

Considerações Finais

Embora analisados separadamente, os componentes da Idoneidade Epistêmica, mantêm estreitas relações e articulações o que foi percebido também nas habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental apontadas na BNCC.

A análise permitiu perceber a existência de evidências que apontam para a articulação das unidades temáticas Geometria e Grandezas e Medidas na proposta de situações a serem resolvidas, bem como a presença dos componentes epistêmicos da Idoneidade Didática – situações-problemas, linguagem, regras, argumentos e relações. Considera-se que tais componentes, estão presentes de modo equitativo na BNCC, sendo que argumentações e relações estão mais fortemente presentes nos últimos dois anos do Ensino Fundamental.

Por fim, destaca-se que foi possível perceber um gradual aprofundamento ao longo dos anos, com indicativos de que uma noção que é trabalhada intuitivamente em um ano, nos anos seguintes e retomada e aprofundada buscando uma conceitualização gradual.

Agradecimentos: À Coordenação de Aperfeiçoamento da Pessoal Nível Superior - CAPES que financia a investigação.

Referências

Bulos, A. M. M. *O Ensino de Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.* In: XIII CIAEM-IACME, Recife, 2011.

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC)- Anos Finais do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Creswell, J. W. (2014). *Investigação qualitativa e projeto de pesquisa:* escolhendo entre cinco abordagens. Tradução de Sandra Mallmann da Rosa. 3. ed. Porto Alegre: Penso.

Fonseca, M. da C. F. R., et al. (2009). *O ensino da Geometria na Escola Fundamental:* três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica.

Godino, J. D. *Indicadores de la idoneidade didáctica de processos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. In: XIII CIAEM – IACME. **Anais.** Recife, 2011. Disponível em: <https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf>. Acesso em: 15 out. 2018.

Godino, J. D.; Contreras, Á.; Font, V. *Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática.Universidad de Granada, 2006. Disponível em:<http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf>. Acesso em: 25 set. 2018.

Moraes, R. Galiazzi, M. do C. (2007). *Análise Textual Discursiva*. Ijuí, RS: UNIJUI.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Características de la comprensión de niños de 9 años de las relaciones de inclusión entre figuras geométricas

Melania **Bernabeu** Martínez
Facultad de Educación, Universidad de Alicante
España
melania.bernabeu@ua.es
Salvador **Llinares** Ciscar
Facultad de Educación, Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es
Mar **Moreno** Moreno
Facultad de Educación, Universidad de Alicante
España
mmoreno@ua.es

Resumen

Este trabajo pretende identificar características de la relación que los niños/as de 9 años establecen entre la identificación de atributos de una figura y su uso para determinar la pertenencia a una categoría como parte de la comprensión de la clasificación de polígonos. Nos apoyamos en la teoría de los conceptos figurales (Fishbein, 1993), los cambios de anclaje (Duval, 1995) y la coordinación de las aprehensiones (Duval (1998). Participaron 29 alumnos/as de tercero de primaria que respondieron a un cuestionario post experimento de enseñanza. Los resultados indican que la generación de las relaciones de inclusión entre las figuras parece estar vinculada a la habilidad de reconocer el atributo crítico usado para establecer la relación, sin considerar el resto de atributos. Este fenómeno se denomina deconstrucción dimensional (Duval, 2005), el cual se entiende como una manifestación de la aprehensión operativa al ser una forma del procesamiento visual de las figuras geométricas.

Palabras clave: pensamiento geométrico, relaciones de inclusión, atributo crítico, concepto figural, aprehensiones cognitivas, deconstrucción dimensional, cambios de anclaje.

Introducción

En los últimos años se ha empezado a subrayar el papel de los procesos cognitivos en el aprendizaje de la geometría. Este aprendizaje va más allá de la consideración de los contenidos geométricos cómo únicos referentes en la comprensión de las definiciones y de los procesos de

clasificación (Sinclair, et al, 2016; Presemeg, 2006). Una aproximación al aprendizaje de la geometría se centra en la construcción gradual de la imagen del concepto basada en el desarrollo de la comprensión y de las formas de razonar con los atributos de las figuras. Esta aproximación asume que los niveles del desarrollo del pensamiento geométrico propuestos por van Hiele admiten grados de razonamiento y diferencias en el discurso de los estudiantes (Clements et al, 1999).

En particular, el foco sobre la relación entre la construcción gradual de la imagen del concepto y la definición del concepto ha puesto de manifiesto cuestiones sobre la relación entre definiciones equivalentes que podemos generar para las figuras geométricas y las relaciones inclusivas que puedan derivarse. Como, por ejemplo, la investigación de Bernabeu, Moreno y Llinares (2017a) sobre la consideración del triángulo equilátero como un tipo de isósceles o la de Popovic (2012) sobre la definición de paralelogramo como un tipo de trapecio (trapezium). Asimismo, el trabajo de Fujita y Jones (2007) explora la relación entre la comprensión de los cuadriláteros y la naturaleza de las clasificaciones inclusivas, mostrando la gran influencia de las figuras prototípicas en el uso de definiciones que generaban relaciones partitivas en el conjunto de figuras (el cuadrado no es un rombo). Estos resultados muestran la relación entre cómo los estudiantes definen y comprenden los polígonos, y la manera en la que pueden generar relaciones de inclusión entre las diferentes clases de figuras geométricas.

Estas investigaciones previas indican que la comprensión del concepto de polígono está vinculada a la manera en la que los estudiantes comprenden las figuras geométricas como elementos de una clase (figuras que comparten un atributo, aunque sean perceptualmente diferentes). En particular, el análisis del papel que desempeña la identificación de algún atributo común para considerar que dos figuras pueden ser parte de un mismo grupo, ha puesto de manifiesto que el control de la componente conceptual sobre la perceptual, en la comprensión de las figuras como elementos de una clase, depende del atributo considerado (Bernabeu, Llinares y Moreno, 2017b).

El objetivo de la investigación es identificar características de la relación que los niños de 9 años establecen entre la identificación de atributos críticos de una figura y su uso para determinar la categoría a la que pertenecen como parte de la comprensión de la clasificación de polígonos.

Marco Teórico

Las referencias teóricas que permiten encuadrar este problema de investigación son la teoría de los conceptos figurales (Fishbein, 1993), los cambios de anclaje (de lo visual a lo discursivo y viceversa) (Duval, 1995) y la coordinación entre la aprehensión perceptual, discursiva y operativa (Duval, 1998). Fischebein (1993) considera que las figuras geométricas tienen simultáneamente propiedades figurales y condiciones conceptuales lógicas. Esto permite observar la influencia de las figuras prototípicas sobre los procesos de razonamiento de los estudiantes, aunque ellos conozcan las definiciones formales de los conceptos. Para caracterizar los procesos de razonamiento de los estudiantes que implican aspectos figurales y conceptuales, Duval (1998, 2018) propone centrar la atención en la coordinación de tipos de aprehensiones: la aprehensión perceptiva (reconocer y nombrar una figura en diferentes formas y orientaciones); la aprehensión discursiva (que permite asociar atributos de las figuras a afirmaciones matemáticas); y la aprehensión operativa (modificaciones de una figura geométrica manteniendo los atributos que la definen). La coordinación entre las aprehensiones nos permite explicar las dificultades de los niños/as en reconocer un atributo común entre dos figuras y que no es compartido por una tercera figura, lo que se considera la base del razonamiento que lleva a la comprensión de los procesos de clasificación. Esta aproximación al análisis de los razonamientos de los niños/as,

incide en subrayar la dificultad que tienen algunos de ellos/as en centrarse en alguna subconfiguración o atributo de la figura por el papel predominante de la aprehensión perceptiva. Duval (2005) indica que identificar un atributo de una figura geométrica implica una deconstrucción dimensional, lo que se entiende como un proceso de visualización geométrica que permite el reconocimiento perceptual de una figura en una configuración de unidades figurativas de dimensiones inferiores (lados, vértices, ángulos, …). Por ejemplo, determinar que dos figuras tienen el mismo número de lados supone que el alumno/a centra su atención en el atributo "número de lados", lo que le permitiría descartar los demás atributos.

Reconocer un atributo de una figura geométrica significa determinar las condiciones necesarias para identificar un ejemplo de un concepto geométrico. Al identificar dicho atributo se pone de manifiesto las transformaciones entre las diversas representaciones semióticas (representación visual y verbal) (Duval, 1995). Existen dos tipos de transformaciones: el tratamiento y la conversión (Duval 1995, 2006). Para esta investigación, nos vamos a basar en la conversión, la cual consiste en una transformación de una representación de un registro a otro (cambio de anclaje) sin cambiar los atributos que denota. Este cambio de anclaje puede realizarse bidireccionalmente, de lo discursivo a lo visual (cuando se representa una figura a partir de unas condiciones dadas) o de lo visual a lo discursivo (cuando se reconocen los atributos de una figura y se emiten declaraciones sobre estos) (Duval, 1995). Esta transformación es la que permite considerar una definición dando un conjunto mínimo de atributos.

Por lo tanto, el objetivo de la investigación se concreta en la siguiente pregunta de investigación:

- ¿qué relación existe entre identificar atributos en una figura y usar estos para categorizarla?

Método

Participantes

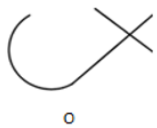
En esta investigación participaron 29 alumnos/as de tercero de educación primaria (9 años) de una escuela española. Teniendo en cuenta el currículo español de tercero de educación primaria, se diseñó e implementó un experimento de enseñanza de 10 sesiones, cada una de una hora de duración y cuyo objetivo fue desarrollar, entre otros, la capacidad de análisis e identificación de atributos críticos que categorizan a las figuras geométricas (número de lados, concavidad/convexidad, ejes de simetría, etc.). Todos los alumnos contestaron a un cuestionario al finalizar el experimento de enseñanza (post-test).

Instrumento

El instrumento de recogida de datos lo constituye el cuestionario diseñado *ad hoc*, formado por 12 ítems, al que respondieron los alumnos al finalizar el experimento de enseñanza. Los ítems (agrupados en 6 tareas) pretendían aportar información sobre la capacidad de:

- Identificación de los atributos críticos de los polígonos (Tarea 1, ítems 1a, 1b, 1c, 1d y 1e). (Figura 1)

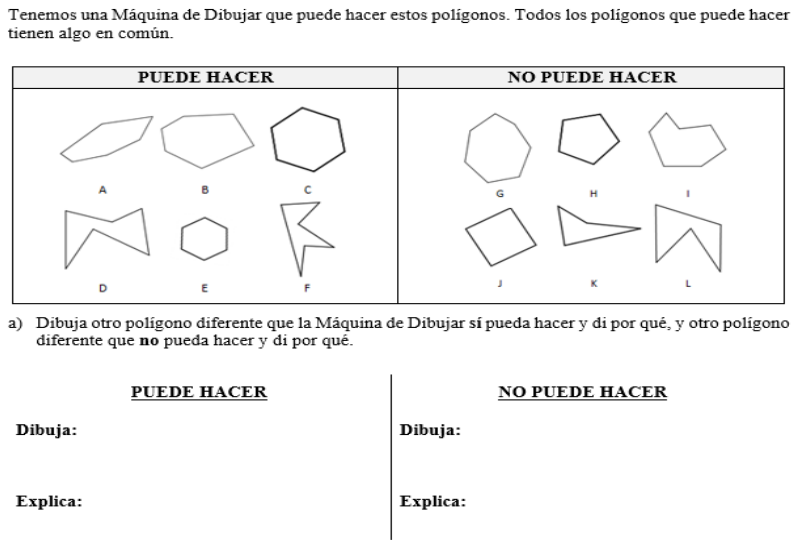
b) La figura "O" no es un polígono. Indica con tus palabras qué cambiarías para que fuera un polígono. Dibújalo.



O

Figura 1. Ítem 1.b: identificar atributos críticos de un no-polígono y transformarlo en polígono.

- Identificación del atributo crítico que comparte un grupo de polígonos en relación a otro grupo de polígonos que no lo comparte, y representación de un ejemplo y un no-ejemplo de polígonos del conjunto identificado, tanto a partir de imágenes (registro visual) (Tarea 2: concavidad/convexidad; Tarea 3: número de lados igual a 6/número de lado diferente a 6 (Figura 1); Tarea 4a: polígonos con un eje de simetría/ningún eje de simetría), como a partir de una condición dada (registro verbal) (Tarea 6a: representa tres cuadriláteros con dos lados paralelos/tres cuadriláteros que no cumplan esa condición).


Tenemos una Máquina de Dibujar que puede hacer estos polígonos. Todos los polígonos que puede hacer tienen algo en común.

PUEDE HACER	NO PUEDE HACER
A B C D E F	G H I J K L

a) Dibuja otro polígono diferente que la Máquina de Dibujar **sí** pueda hacer y di por qué, y otro polígono diferente que **no** pueda hacer y di por qué.

PUEDE HACER	NO PUEDE HACER
Dibuja:	**Dibuja:**
Explica:	**Explica:**

Figura 2. Ítem 3: identificar el atributo crítico de un conjunto de figuras, explicar y representar ejemplos y no-ejemplos.

- Reconocimiento de la relación entre el atributo crítico de un grupo de figuras y una figura dada (Tarea 4b: Si un rombo -2 ejes de simetría-, pertenece al grupo de los polígonos con un eje de simetría o al de los que no tienen eje de simetría; Tarea 5: si un triángulo equilátero -tres lados iguales- pertenece o no al grupo de los triángulos con dos lados iguales, o al de los triángulos sin lados iguales) o un registro verbal y una figura dada (Tarea 6b: si un cuadrado -lados paralelos dos a dos- pertenece al grupo de los cuadriláteros con 2 lados paralelos).

Teniendo en cuenta el objetivo de esta investigación, hemos tenido en cuenta 7 ítems, los correspondientes a las tareas de la 2 a la 6. Todos ellos nos permiten observar la conversión entre el registro visual y verbal que se produce cuando los niños/as tienen que explicar los atributos de una figura, establecer relaciones entre estos o representar una figura a partir de unos criterios dados. Asimismo, la secuencia de tareas del cuestionario permite obtener información sobre el proceso de deconstrucción dimensional (Duval, 2005).

Análisis

Se analizaron un total de 203 respuestas procedentes de los 7 ítems del cuestionario. Poniendo nuestra atención en cómo los niños/as usaban el registro verbal para describir la resolución de la tarea y cómo representaban según las condiciones dadas. A partir del sistema de códigos, construimos categorías para obtener las frecuencias de las tareas e identificar los atributos que generan mayores dificultades. Por lo tanto, conocer cómo es la comprensión de las

figuras geométricas y las relaciones que se establecen para categorizar las figuras.

Resultados

Los resultados los presentamos en dos secciones: (i) identificación atributos críticos que comparte un grupo de polígonos y (ii) reconocimiento de la relación entre el atributo crítico de un grupo de figuras/definición y la figura dada.

Identificación atributos críticos que comparte un grupo de polígonos

Los atributos considerados en los ítems 2, 3 y 4a, respectivamente, fueron la concavidad, el número de lados igual a 6, y la simetría de los polígonos (Tabla 1). El atributo más difícil de reconocer fue la simetría de los polígonos (ítem 4a), ya que 21 de los 29 niños/as no identificaron este atributo crítico en el grupo de polígonos. Mientras que el atributo más fácil de reconocer fue la concavidad (Figura 3).

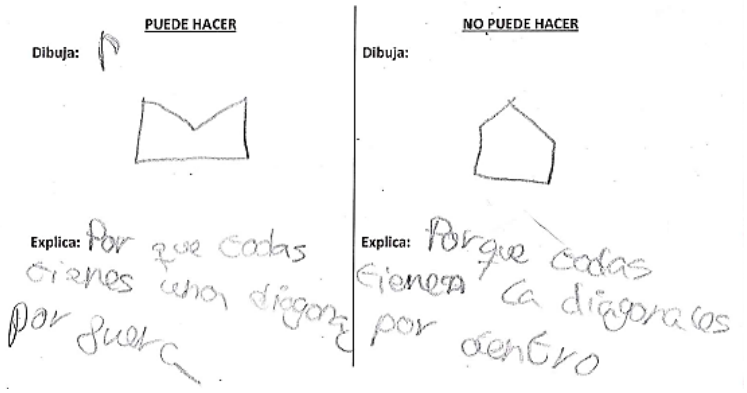


Figura 3. Ítem 2: respuesta G2A4

Tabla 1

Identificación de atributos críticos (n=29).

	No reconocen	Reconocen	TOTAL
Ítem 2: concavidad – convexidad	16	13	29
Ítem 3: número de lados igual a 6	17	12	29
Ítem 4a: Figuras simétricas	21	8	29

En relación a la tarea de identificar atributos críticos de la definición que permitieran representar ejemplos y no-ejemplos (Ítem 6a), tan solo 6 de los 29 alumnos/as fueron capaces de representar correctamente tres ejemplos de cuadriláteros con dos lados paralelos y tres no-ejemplos de cuadriláteros que no cumplieran estos atributos. 11 alumnos/as representaron correctamente tres ejemplos de cuadriláteros con dos lados paralelos, pero incorrectamente los no-ejemplos, pues representaron tres no-polígonos o tres no-cuadriláteros. El resto de los alumnos (n=12) no supieron identificar el atributo crítico que les permitiera representar los ejemplos y no-ejemplos o no representaron nada.

Reconocimiento de la relación entre el atributo crítico de un grupo de figuras/definición y la figura dada

Ningún alumno supo identificar en el ítem 4b la relación entre la simetría de la figura representada (un rombo con dos ejes de simetría) y el conjunto de polígonos con el atributo crítico “tener un eje de simetría” y “no tener ejes de simetría”.

Las frecuencias obtenidas a partir de las relaciones de inclusión, tanto en el conjunto de los triángulos como en el de los cuadriláteros, fueron inferiores a las tareas de identificar el atributo común del conjunto de polígonos (Tabla 2).

Tabla 2

Reconocimiento de relaciones de inclusión

	No reconocen relación de inclusión		Reconocen relación de inclusión	TOTAL
	Explicación no coherente	Reconocen relaciones partitivas		
Ítem 4b: Rombo	29	-	-	29
Ítem 5. Triángulo equilátero	18	5	6	29
Ítem 6b. Cuadrado	19	-	10	29

En el ítem 5, de los 11 niños/as que reconocen relaciones entre los triángulos, 5 de ellos reflejan un conocimiento de la relación partitiva que implica la separación de los triángulos isósceles y de los triángulos equiláteros (Figura 4); mientras que los otros 6 establecieron relaciones de inclusión entre los triángulos, considerando el triángulo de tres lados iguales como perteneciente a la categoría de triángulos con dos lados iguales.

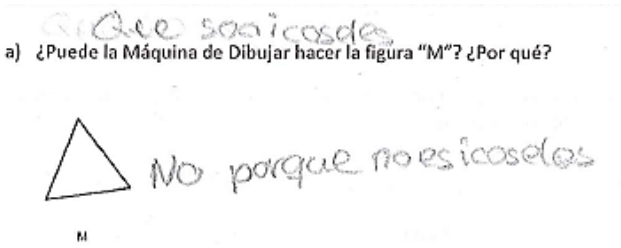


Figura 4. Ítem 5: respuesta de relación partitiva de G2A5

En cambio, en el ítem 6b los 10 alumnos/as que realizaron relaciones entre las figuras fueron de carácter inclusivo, considerando el paralelogramo como un tipo de trapecio (cuadrilátero con dos lados paralelos) (Figura 5).

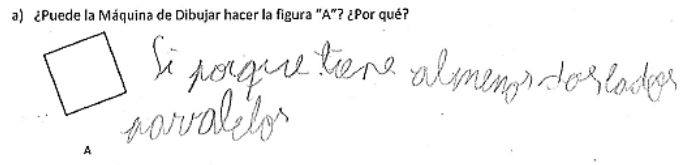


Figura 5. Ítem 6b: respuesta de relación inclusiva de G2A18

Discusión

El objetivo de esta investigación era identificar características de la relación que los niños de 9 años establecían entre la identificación de atributos críticos de una figura y su uso para determinar la categoría a la que pertenecían como parte de la comprensión de la clasificación de polígonos. Las frecuencias obtenidas en los resultados han mostrado que la mayoría de los alumnos/as todavía no han desarrollado las habilidades (aprehensiones) (Duval, 1995) para identificar los atributos críticos de las figuras geométricas (deconstrucción dimensional) (Duval, 2005) que permitan categorizar las figuras y así, establecer relaciones de inclusividad. De esta manera, la relación entre identificar un atributo crítico y usarlo para determinar la relación de inclusividad de las figuras, parece depender de cómo los niños/as comprenden las condiciones

conceptuales que componen la imagen del concepto, que Fischbein (1993) denominó el concepto figural, y de cómo combinan las aprehensiones (perceptiva, discursiva y operativa) (Duval, 1998).

Por ejemplo, la mayor dificultad que se presenta en el reconocimiento del atributo común recae sobre el atributo referente a la simetría de las figuras (ítem 4), que implica realizar una aprehensión operativa, aparte de la perceptual y discursiva, imaginándose un eje de simetría y doblando la figura para comprobar que coinciden sus dos mitades. Por otro lado, las dificultades que se presentan en las tareas de relacionar figures geométricas recae sobre la habilidad de centrarse en un atributo crítico (el que establece la relación) sin considerar el resto de los atributos. El desarrollo de esta habilidad que Duval (2005) denomina deconstrucción dimensional parece clave en la generación de las relaciones inclusivas entre las figuras.

Otro aspecto que ha puesto de manifiesto nuestros resultados son el papel de la expresión verbal en describir el proceso de deconstrucción dimensional como paso de la aprehensión perceptiva a la aprehensión operativa. Esta característica se ha puesto de manifiesto cuando algunos estudiantes intentaban explicar por qué un cuadrado puede ser considerado un cuadrilátero con dos lados paralelos generando una explicación en la que no intervenía el atributo crítico (dos lados paralelos). Este resultado muestra en qué medida el desarrollo del lenguaje geométrico puede ayudar al desarrollo del pensamiento geométrico.

El hecho de que durante el módulo de enseñanza se aportara a los alumnos/as definiciones que implicaban relaciones inclusivas entre las figuras favoreció que los alumnos establecieran relaciones inclusivas en los ítems 5 y 6. Otro aspecto clave en los resultados del post-test son las características de las tareas con relación a los cambios de anclaje que se precisan para resolverlas. Por ejemplo, el ítem 5 presenta tres cambios de anclaje: identificar el atributo común que compartía cada grupo de figuras (cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo), establecer la relación entre dicho atributo y la figura mostrada (cambio de anclaje de lo discursivo a lo visual) y finalmente, explicar la relación entre las figuras (cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo); mientras que el ítem 6 solo presenta dos cambios de anclaje: reconocer los atributos de la definición y compararlos con la representación (cambio de anclaje de lo discursivo a lo visual) y explicar la relación entre la definición y el paralelogramo (cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo), que coinciden con los dos últimos del ítem 5. Comparando ambos resultados, parece que el cambio de anclaje más complejo es el primero, pasar de lo visual a lo discursivo: reconocer el atributo crítico del conjunto de figuras y relacionarlo con el concepto figural (Duval, 1995; Fischbein, 1993).

Para finalizar, el hecho que 5 alumnos/as realizaran una relación partitiva en el ítem 5 podría estar relacionado con la influencia de las figuras prototípicas (triángulo equilátero) como ya se ha comprobado en otras investigaciones (Fujita y Jones, 2007). Por lo que intuimos que las figuras prototípicas siguen siendo los ejemplos visuales de los conceptos geométricos, ya que los alumnos/as todavía no comprenden las condiciones conceptuales que forman parte del concepto figural (Fischbein, 1993).

Reconocimiento

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana) (PROMETEO/2017/135).

Referencias y bibliografía

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017a). *Desarrollo de la comprensión del triángulo en Educación Primaria.* Comunicación presentada en el II CEMACYC-Congreso de Educación

matemática de América Central y el Caribe, Cali, Colombia, Octubre-Noviembre.

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017b). Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 157-166). Zaragoza: SEIEM.

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2018). Comprensión del concepto de polígono en niños/as de 9 años. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 151-160). Gijón: SEIEM.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 192–212.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: an ICMI study* (pp. 37–52). Dordrecht: Kluwer

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Duval, R. (2018). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* London: Springer.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 139-162

Presmeg, N. (2006). Research on visualisation in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp.205–304). Rotterdam: Sense Publishers.

Popovic, G. (2012). Who is this trapezoid, anyway? *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(4), 196–199.

Sinclair, N., Bartolini-Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM.Mathematics Education, 48*, 691-719.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Trayectorias de aprendizaje de la visualización espacial con incorporación de hipótesis sobre género

William Andrey **Suárez** Moya
Colegio CAFAM
Colombia
wasuarezm@correo.udistrital.edu.co

Resumen

El género como construcción social, vincula prácticas que posibilitan el aprendizaje del espacio y el desarrollo de habilidades como la visualización espacial. El presente trabajo se constituye a partir de referentes teóricos sobre habilidades de visualización espacial y género en el aula, los cuales son tomados como hipótesis para diseñar una ruta de desarrollo de la visualización espacial en niños y en niñas, denominándose Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, la cual resulta en cinco Trayectorias Reales de Aprendizaje, validando parcialmente las hipótesis formuladas, y destacando el desarrollo de la visualización espacial en los niños y niñas, sujetos de la investigación.

Palabras clave: Visualización espacial, Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, Investigación de Diseño, Género

Género y visualización espacial

El género ha sido un componente que ha cobrado importancia en el contexto de la educación en Colombia en las dos últimas décadas, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) y el Ministerio de Educación de Colombia (MEN), (véase ICFES, 2012, 2013; MEN, 1997) documentan y analizan los resultados de desempeños entre niños y niñas en pruebas internacionales como el Estudio Internacional de Progreso en Comprensión Lectora (PIRLS) y el Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS), y pruebas nacionales en Colombia como SABER en el área de matemáticas. En el análisis de TIMSS se identifican diferencias de género en el desempeño en matemáticas de niños y niñas en problemas relacionados con "manejar mentalmente figuras tridimensionales y para reconocer figuras congruentes o semejantes, manejar o utilizar relaciones, en el conocimiento de algunas características de los cuadriláteros, y para manejar rotaciones en el plano" (León, 2012, p. 106).

Linn y Petersen, citados en ICFES (2013) refieren que una de las grandes diferencias de género en el aprendizaje de las matemáticas de niños y niñas, está asociada con la ventaja de los hombres en algunas habilidades espaciales. Otros autores afirman que no hay diferencias significativas en habilidades visuales, pero si diferencias cualitativas en las estrategias de procesamiento y estructuración empleadas por hombres y mujeres durante la resolución de

actividades (Fennema, 2000; Gorgorio 1998; Rubio, 2000). Clements y Sarama (2009) mencionan que las niñas se pueden ver marginadas en su progresión en las matemáticas debido a la falta de atención por parte de los docentes en el desarrollo de habilidades espaciales en el área de geometría, apoyando esta tesis, se encuentran los trabajos de Casey, Nuttall y Pezaris (2001). En las investigaciones de Clements y Battista (1992), se estructuran tareas que tienden a disminuir las diferencias de género que los autores vinculan a factores de tipo cultural y/o biológico.

Sin embargo, la caracterización para género en estos trabajos citados y otros revisados en el marco del trabajo de investigación de Suárez (2017), se reduce a un sistema binario de sexo/género, en el que el sexo de la hembra va unido al género mujer, y el sexo del macho al género hombre. Por tanto, este sistema no contempla los cuerpos que no corresponden con estos sexos o los cuerpos que asumen un género no vinculado al sexo, denominándose bajo la categoría de identidad de género. Por cuanto más allá del sistema binario establecido, el género es una construcción social en la que se vinculan los cuerpos que expresan características biológicas, psicológicas, sociales y culturales (Suárez, 2017).

El género en tanto construcción social, vincula prácticas que dan forma a como los estudiantes visualizan los objetos, conceptos y procesos dentro de la actividad cognitiva. Estas prácticas se hacen evidentes en las acciones y producciones de los niños y niñas en el aula, por cuanto el interés por diseñar rutas que contemplen el género de los estudiantes y posibiliten el desarrollo de habilidades como la visualización espacial aprovechando prácticas como juegos y quehaceres. Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA), son la mejor opción para diseñar estas rutas; como mencionan Clements y Sarama (2009), las THA, "ayudan a los maestros a entender la variedad de niveles de conocimiento y de pensamiento de sus clases y de los individuos dentro de ellas, como fundamentales para satisfacer las necesidades de todos los niños" (p.16).

Por su parte, en la investigación, estudiantes con sexo de hembra se reconocieron como mujeres y estudiantes con sexo de macho se reconocieron como hombres, sin que apareciera otra denominación que no correspondiera a estas identidades.

Procesos que desarrollan la visualización espacial

El desarrollo de la visualización espacial exige que se deba producir un dinamismo en las imágenes mentales. El desarrollo temprano del pensamiento espacial y de la visualización espacial da cuenta que las imágenes mentales de los niños y niñas inicialmente son estáticas; por tanto, el promover tareas que posibiliten el desarrollo del proceso de transformación de imágenes mentales o dinamizar imágenes mentales es fundamental.

Desde el trabajo de la Trayectoria de Aprendizaje de la Visualización Espacial e Imágenes de Clements y Sarama (2009), se determina que los movimientos de deslizar, voltear y girar son los más fáciles para que los niños y niñas comiencen con el desarrollo de la transformación de la imagen mental. La dirección del movimiento incide en la dificultad de transformar la imagen; pero dependiendo de la tarea instruccional esta dificultad podrá solucionarse.

Haciendo énfasis sobre los movimientos de deslizar, voltear y girar, los cuales serán objeto en la THA diseñada, en adelante son considerados procesos condicionados al desarrollo de la transformación de imágenes en la visualización espacial.

La THA permite destacar aspectos en el desarrollo de la visualización espacial como la importancia del cuerpo en actividades que promueven el desarrollo de la visualización espacial en niñas (Clements & Sarama, 2009).

De esta manera, se consolidó la THA de la visualización espacial, que tuvo seis niveles de

pensamiento (Figura 1). En cada nivel se vinculó una hipótesis acerca de los procesos que desarrollan la visualización espacial.

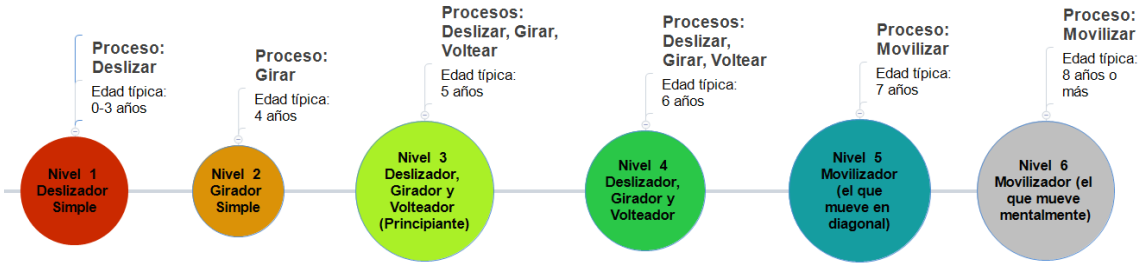


Figura 1. Niveles de pensamiento de la THA de la visualización espacial en niños y en niñas. Fuente propia

Diseño metodológico de la investigación

La metodología de la Investigación de Diseño resultó indicada para este trabajo puesto que al mismo tiempo que se estudia el proceso de aprendizaje, se analizan los modos por los cuales el aprendizaje se sustenta y se organiza (Cobb & Gravemeijer, 2008). Así mismo, la Investigación de Diseño permite la comprobación de los supuestos del modelo teórico, transformados en hipótesis, de acuerdo a la validez que evidencian según el análisis de los datos obtenidos (Confrey, 2006; Steffe & Thompson, 2000). En el marco de la Investigación de Diseño se encuentran los Experimentos de Enseñanza, los cuales permitieron determinar la eficacia del diseño de la THA que vinculó hipótesis sobre bases teóricas que asocian estudios de género en el desarrollo de la visualización espacial de los niños y niñas. Para el diseño de la THA se consideraron tres componentes, a) Las metas de aprendizaje en el desarrollo de la visualización espacial; b) La ruta de desarrollo constituida por los niveles de pensamiento; c) Un conjunto de actividades instruccionales (Clements & Sarama, 2009).

Entre las actividades instruccionales se encuentran las siguientes:

Tabla 1

Actividades instruccionales de la THA.

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
Organización el aula	Pentominós	Doblar, Limpiar y barrer	Teselados	Reflejos	Poleas
Construyendo siluetas con imaginación	Tangram (Tablet)	Logimax	Origami	Mosaicos geométricos	Razonamiento abstracto
El recorrido del orden	Match		Cubos-soma	Los ángulos del reloj	Que ficha le falta al rompecabezas
Camino a la casa					

A partir del ciclo de enseñanza propuesto por Simon y Tzur (2004), se hizo un ajuste para las fases metodológicas de la investigación (Figura 2):

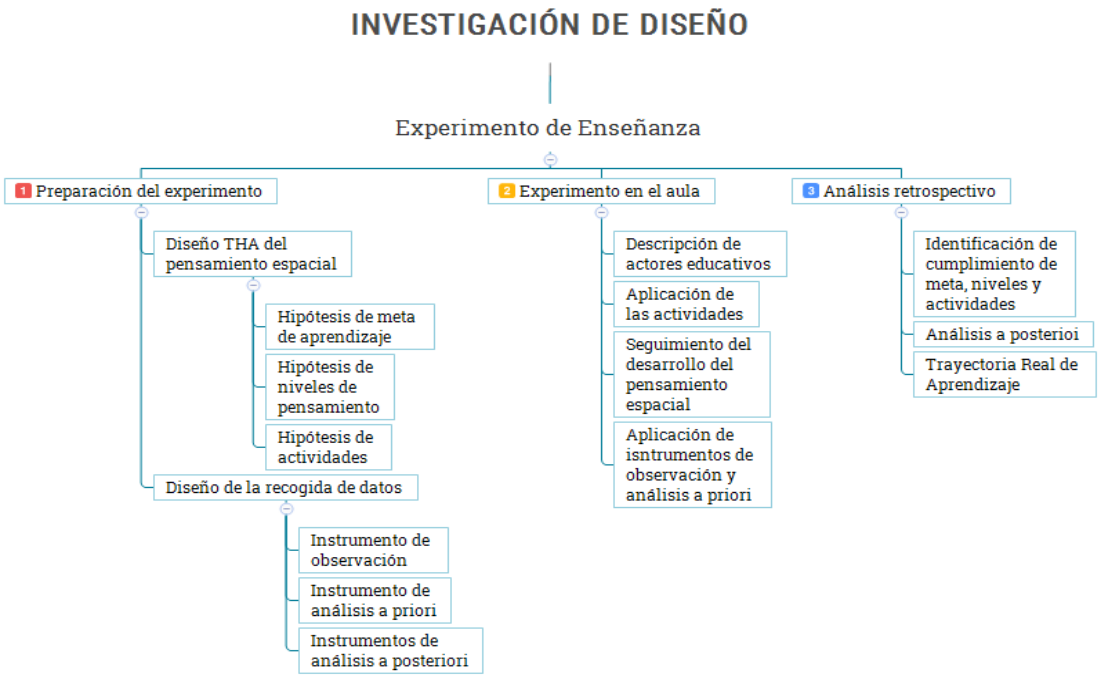


Figura 2. Cuadro metodológico. Fuente propia

Análisis de verificación de hipótesis sobre visualización espacial

Teniendo en cuenta las hipótesis del nivel y el descriptor del nivel, se verificó el cumplimiento de estas hipótesis por medio de los indicadores de nivel. En la Tabla 2 se muestra el ejemplo para el Nivel 2 de pensamiento: Girador Simple, en el que se describen las hipótesis de nivel, el descriptor del nivel y los indicadores del nivel:

Tabla 2.

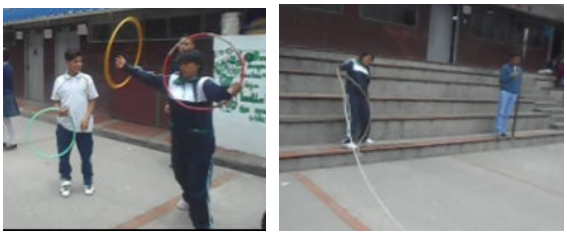
Hipótesis, descriptor e indicadores del nivel 2 de la visualización espacial.

Hipótesis del nivel	• Los niños de cuatro a cinco años de edad pueden hacer giros si tienen tareas simples y claves, como tener una marca clara en el borde de una figura y no una forma "girada" como distractor (Clements & Sarama, 2009). • Los niños y niñas de entre cuatro a ocho años, no muestran diferencias de género en tareas que involucran movimientos con deslizar y girar (Moyer, 1978).
Descriptor del nivel	Gira objetos en tareas fáciles
Indicadores del nivel	• Replica patrones de bloques. • Arma rompecabezas simples. • Anticipa mentalmente los movimientos.

Para dar cuenta del cumplimiento de la hipótesis de nivel 2, donde el proceso de girar se identifica con la realización de tareas simples y claves, se asocia el descriptor de nivel en estos términos, gira objetos en tareas fáciles. Posteriormente, se asociaron los indicadores de nivel con este descriptor señalando tres tareas simples asociadas a este movimiento. Con ello se verificaron estos indicadores en las actividades, tal y como se muestra en la Tabla 3:

Tabla 3.

Verificación de las hipótesis para el nivel 2 de la visualización espacial.

<table>
<tr><td>Cumplimiento del indicador</td><td>Evidencia</td></tr>
<tr><td>En cuanto al primer indicador del nivel, arma rompecabezas simples.
En la actividad del tangram en la tablet, los estudiantes giran las fichas del juego (1) con el fin de encajarlas en la configuración de la silueta de la figura que muestra la tablet.</td><td>  </td></tr>
<tr><td colspan="2">Esta tarea resulta fácil puesto que la silueta de la figura a armar estaba presente para encajar las fichas.</td></tr>
<tr><td>En cuanto al segundo indicador del nivel, replica patrones de bloques.
En la actividad del pentominó, los estudiantes giran las fichas del juego (1) con el fin de encajarlas en la configuración de un rectángulo.</td><td>  </td></tr>
<tr><td colspan="2">Esta tarea resulta ser fácil puesto que en la instrucción de la actividad se mencionaba que no se debía utilizar necesariamente todas las fichas del juego para armar el rectángulo.</td></tr>
<tr><td>En cuanto al tercer indicador del nivel, anticipa mentalmente los movimientos.
En la actividad de match, los estudiantes anticipaban sus movimientos mentalmente antes de realizarlos (1), esto se observó al momento en el que se iba a dar giros al hula hula, a la cuerda y sobre la colchoneta.</td><td>  </td></tr>
<tr><td colspan="2">En esta actividad se tuvo en cuenta la experiencia previa en el movimiento del cuerpo, particularmente en los juegos del hula hula, lazo, pirinola, yoyo, lanzamiento de disco y botes sobre colchoneta, donde se exigía cierta precisión, fuerza y ángulo en los movimientos.</td></tr>
</table>

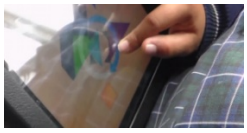
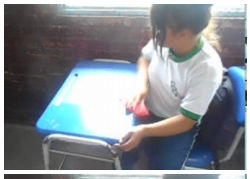
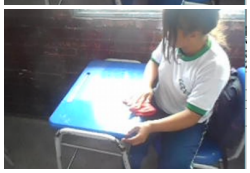
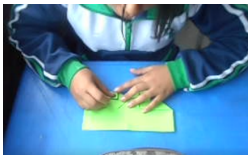
Análisis de progresión de niveles de la THA

A partir del cumplimiento parcial y total de las hipótesis formuladas en el diseño de la THA, a continuación, se muestra el progreso de una estudiante en cuatro niveles de la THA tomando el proceso de Girar (Tabla 4). Además, se describen maneras en que los procesos se produjeron a partir de la intervención del cuerpo.

Tabla 4.

Análisis de progresión de niveles de la THA de la visualización espacial.

NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
Se identificaron dos maneras de girar en tres actividades de este nivel: Girando sus manos sobre las fichas del tangram para llevarlas	Se identificaron tres maneras de girar en tres actividades de este nivel: Girando sus manos sobre las fichas del	Se identificaron dos maneras de girar en una actividad de este nivel: Girando sus manos sobre el trapo para	Se identificó una manera de girar en una actividad de este nivel: Girando sus sobre el papel para hacer

NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
de una ubicación a otra (1). Girando la regla con una mano, y girando la mesa con una mano mientras la otra mano está fija (2). (1)  (2)  	pentominó para encajarlas (1). Moviendo el dedo sobre la superficie de la Tablet haciendo arcos para girar las fichas del, y sobre la superficie del hula hula (2). (1)  (2)  	limpiar la superficie de la mesa (1). Dando giros con su cuerpo mientras camina para barrer el piso (2). (1)   (2) 	pliegues sobre la mesa (1). (1)   

A partir de lo anterior, se constituyen los resultados del análisis de la progresión de niveles de la THA con la representación gráfica para los procesos. En el gráfico se presentan las maneras en las que el proceso Girar se dio en cada estudiante, mostrando el número de incidencias que tuvo tal manera en los niveles de la THA (Figura 3).

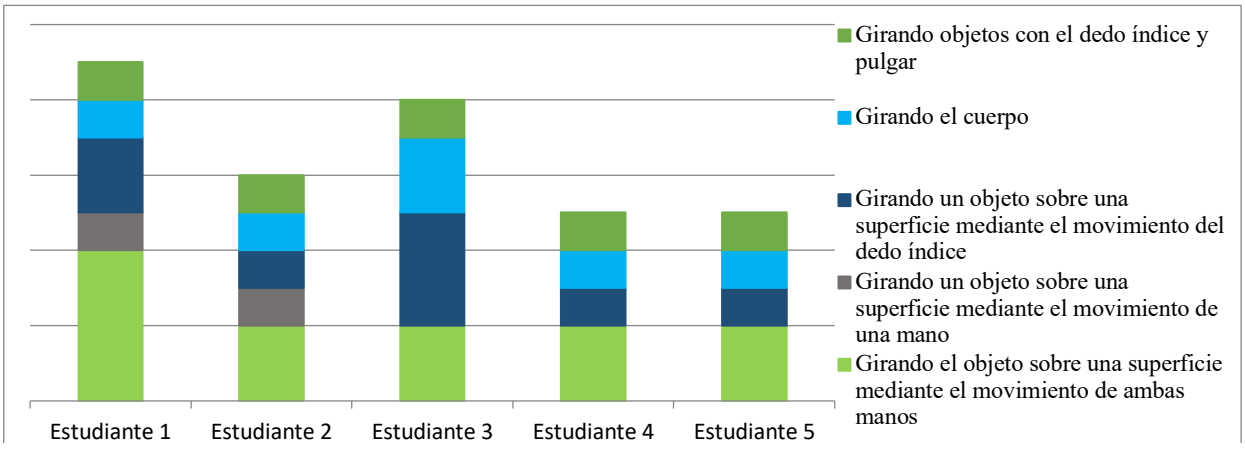


Figura 3. Proceso de girar en los estudiantes durante la THA. Fuente propia

Los resultados de la THA dan cuenta de cinco Trayectorias Reales de Aprendizaje (TRA) (Figura 4), cada una asociada a cada estudiante, y que muestran la ruta que tuvieron los niños y las niñas durante la aplicación de las actividades para el desarrollo de la visualización espacial.

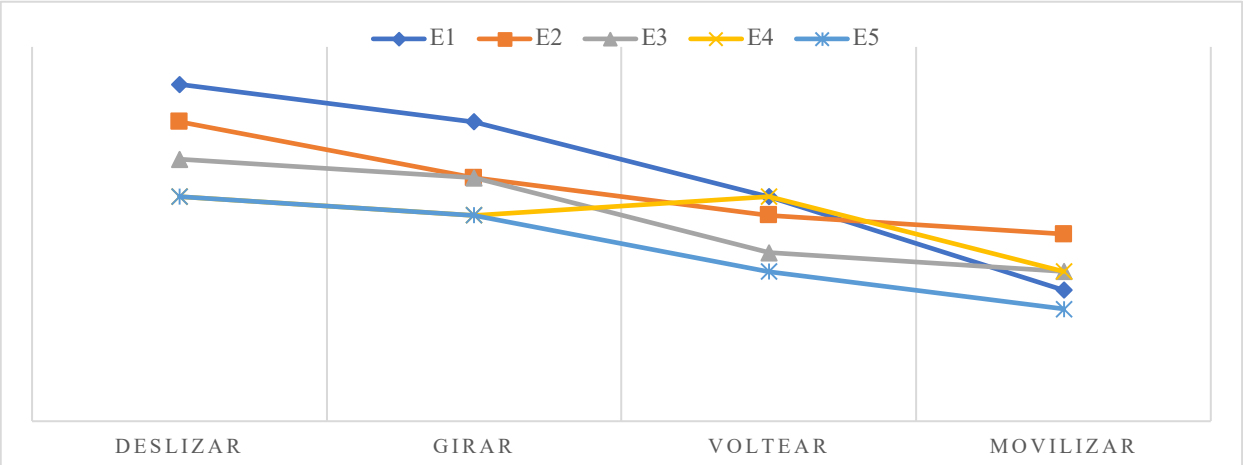


Figura 4. Resultados de las cinco TRA de la visualización espacial vinculadas al género. Fuente propia

Conclusiones

En la revisión de trabajos sobre estudios de género y desarrollo de la visualización espacial, se identificaron hipótesis para la meta de aprendizaje y cuatro niveles de pensamiento en las que se describen diferencias de género en las habilidades espaciales de estudiantes al momento de realizar tareas que involucran rotación mental, por lo que se diseñaron diferentes actividades que promovieron el desarrollo de la visualización espacial en los niños y niñas.

El diseño de varias actividades en cada nivel de pensamiento posibilitó el desarrollo de la visualización espacial por diferentes entradas en los niños y niñas. Evidencia de ello se encuentra en los resultados de la progresión de niveles de pensamiento, en donde los niños y niñas avanzaron en cada nivel a partir de la verificación de los procesos que desarrollan la visualización espacial afianzando diferentes maneras en las que se puede dar determinado proceso. Por cuanto sin importar la favorabilidad de una determinada actividad al género del estudiante, lo fundamental fue posibilitar el progreso de los niños y niñas por los niveles de pensamiento.

Las maneras en las que cada niño y niña desarrollaba la actividad, dan cuenta a un arraigo de prácticas socioculturales en las que los niños y niñas han vivido, por cuanto actividades relacionadas con juegos infantiles y quehaceres de la casa dieron evidencia en la progresión en los procesos de la visualización espacial de manera distinta. Las experiencias previas extraescolares con este tipo de actividades permiten el avance de los estudiantes entre los niveles de pensamiento.

Reconocimiento

Este trabajo hace parte del proyecto de la Maestría en Educación: Un estudio de género en Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje de la Visualización Espacial, el cual está vinculado a AIDETC (Programa Nacional Colciencias código 1419-6614-44765), y al proyecto internacional ACACIA (código 561754-EPP-1-2015-1-COEPPKA2-CBHE-JP) cofinanciado por el Programa Erasmus+ de la Unión Europea.

Referencias bibliográficas

Casey, M., Nutall, R., & Pezaris, E. (2001). Spatial–mechanical reasoning skills versus mathematics self-confidence as mediators of gender differences on mathematics subtests using cross national gender-based items. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(10), 28–57

Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 34-67). New York: NCTM.

Clements, D., & Sarama, J. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research*. Nueva York: Routledge.

Cobb, P, & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to Support and Understand Learning Processes. (A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek, Edits.) *Handbook of Design Research Methods in Education: Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching*, 68 - 95.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. (R. K. Sawyer, Ed.) Nueva York: Cambridge University Press.

Fennema, E. (2000). Gender Equity for Mathematics and Science. *Office of Educational Research and Improvement, 12*.

Gorgorió, N. (1998). *Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation.*

ICFES (2012). *Colombia en PIRLS 2011*. Bogotá. ICFES.

ICFES (2013). *Análisis diferencias de género en desempeño de estudiantes colombianos en matemáticas y lenguaje*. Bogotá. ICFES.

León, O. (2012). Cien años de reformas y un problema actual en la enseñanza de la geometría. En L. Camargo (Ed.), *Investigaciones en Educación Geométrica*. Bogotá, D.C.: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 30-40.

MEN (1997). *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas – TIMSS* – Colombia. Bogotá. MEN.

Moyer, J. C. (1978). The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*(2), 83-92.

Rubio, M. (2000). Género y diferencias cognitivas en la solución de problemas de razonamiento espacial. *Tecné, Episteme Y Didaxis: Revista de La Facultad de Ciencia Y Tecnología, 8*, 25–30.

Simon, M, & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91 - 104.

Suárez, W. (2017). *Un estudio género en Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje de la visualización espacial*. Tesis de Maestría. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 267-307.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Sistematizando "La vuelta al mundo con la geometría" hacia el Mnecraft

Camilo **Arévalo** Vanegas
Gimnasio de Los Cerros, Universidad Distrital
Colombia
camiloarevaloul@gmail.com
Oscar Javier **González**
IED Silveria Espinosa de Rendón, Universidad Distrital
Colombia
oscarmateud@gmail.com
Mónica Andrea **Díaz** Guarín
IED Fernando González Ochoa, Universidad Distrital
Colombia
andreadg_323@hotmail.com

Resumen

Se pretende dar a conocer una experiencia de aula realizada en el Gimnasio de los Cerros durante las clases de geometría con miras a fortalecer el pensamiento espacial en estudiantes de tercero de primaria. Para ello se establece una propuesta que está fundamentada desde los aportes teóricos de Dickson (1991), al hablar del estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físico-visuales para proporcionar experiencias tangibles del mundo; reconociendo la representación bidimensional del mundo físico que nos rodea a través de material manipulativo-tangible y grafico-textual Godino (2006). Ésta metodología de enseñanza se enmarca en una situación problema fundamental Brousseau (1986), en donde los estudiantes deberán viajar por cinco países, para reconocer cuatro solidos relacionados con las obras y maravillas de cada país, finalizando con una obra de arte que relaciona los sólidos y a partir de la sistematización de dicha experiencia trabajar con el mundo minecraft

Palabras clave: sistematización, pensamiento espacial, recursos, situaciones didácticas.

Planteamiento del problema

Se establece una propuesta que tiene objetivo reivindicar al aula de matemáticas como un espacio de experiencias significativas para el estudiante, desde el uso de recursos didácticos que faciliten la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación primaria desde la propuesta de Godino (2006) y su clasificación de los materiales didácticos en manipulativos tangibles, grafico textuales y ayudas al estudio; por tanto se pretende valorar un análisis sobre las funciones, ayudas y características que brindan dichos materiales en la adquisición de nuevos

conocimientos geométricos en los estudiantes, desde el trabajo con su entorno y la manipulación de materiales.

Por tal razón se establece una situación fundamental desde lo planteado por Brousseau (1986) en su teoría de las situaciones didácticas, donde el profesor debe imaginar y proponer a los estudiantes situaciones que motiven el ambiente en el aula escolar y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el estudiantes debe descubrir, además por medio del planteamiento y la sistematización de la experiencia lograr construir nuevas experiencias gracias al trabajo de los estudiantes y al reconocimiento de nuevos objetos matemáticos.

Ahora bien, el reto estaba en planear una propuesta de enseñanza de la geometría, enfocada a desarrollar el pensamiento espacial, la enseñanza de los sólidos geométricos y las figuras planas en estudiantes de tercero desde los aportes de Dickson (1991) para soportar la enseñanza de la geometría espacial, empezando desde el estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físicas-visuales para proporcionar el camino hacia el aprendizaje de las representaciones bidimensionales de estos objetos tridimensionales, desarrollando así el pensamiento espacial al reconocer en el contexto del estudiante, el mundo geométrico que lo compone.

Desde los parámetros de calidad en la educación, se proponen los lineamientos curriculares de matemáticas, particularmente los que aluden a las representaciones geométricas, y que promueven la exploración por parte del estudiante, generan la comunicación oral y escrita de ideas matemáticas verificando, negociando y validando las afirmaciones puestas en juego dentro de procesos de socialización MEN (1998); sin embargo, su aprendizaje se ve afectado porque se centra en representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales que se usan ocasionalmente para resolver algunos problemas o situaciones, además no se tienen en cuenta los procesos de argumentación y justificación que se ponen en juego en los espacios de socialización del aula de clase.

Fundamentación teórica

Desde los contenidos planteados en la enseñanza de la geometría, los sólidos y sus propiedades no se ilustran con la profundidad suficiente, Dickson (1991) de este modo se privilegia lo bidimensional sin llegar a comprender y establecer el paso de lo bidimensional a lo tridimensional o viceversa. En los estándares de matemáticas se reconoce esta problemática y la importancia de desarrollar una "geometría activa", en la que se privilegie la exploración de figuras mediante el movimiento, empezando por el propio cuerpo, como cuando el niño recorre la frontera de una figura y pasando por el que se aplica a los objetos físicos MEN (1998).

Las propuestas frente al aprendizaje de la geometría espacial en niños preescolares, puede hacerse partiendo de las figuras tridimensionales y su comparación con los objetos físicos de la realidad, hacia la geometría bidimensional trabajada como atributos de la geometría tridimensional o a lo que Dickson (1991, p. 47), se refiere cuando habla de "la representación bidimensional del espacio tridimensional."

Por tanto, la propuesta centra su fin en que los estudiantes vayan identificando las características bidimensionales que tienen los objetos tridimensionales, empezando por la interacción y percepción del mundo físico que nos rodea, donde "la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos y la representación es una evocación de los objetos en ausenta de ellos". (Piaget, 2005); de esta manera se genera que ellos

construyan esquemas mentales del objeto cuando a este se le hacen transformaciones, es decir, según Dickson (1991) las acciones como rotar, trasladar, girar, ordenar, moldear, cortar, pegar etc. es aquí donde se hace imprescindible el uso de recursos didácticos para el estudiante, que faciliten el desarrollo y afrontamiento de la situación problema planteada.

> A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias que se proporcionan a los estudiantes son bidimensionales, nos valemos de libros matemáticos que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales, tal uso de dichos dibujos le supone al estudiante una dificultad adicional en el proceso de comprensión. (Dickson, 1991, p. 48)

.

Recursos didácticos

Al afrontar la enseñanza en el aula de matemáticas y el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial, es sustancial tener en cuenta los métodos que utilizan los maestros para lograr los propósitos educativos; así como los medios a los que acuden y que confieren a los estudiantes para facilitar el proceso de aprendizaje; por medio de la propuesta se presenta la clasificación que hace Godino (2006), a los recursos didácticos (Ver tabla 1):

Tabla 1

Instrumentos semióticos: **Son los medios por los cuales se mediatiza entre la acción del sujeto ante el intento de resolver una situación-problema y el contexto en el que se desarrolla.**	
Manipulativos tangibles	**Gráfico-textuales-verbales**
Son los objetos físicos que sirvieron para identificar características propias de los sólidos y que ponen en juego la percepción táctil. ➢ *Sólidos construidos por los estudiantes y docentes* ➢ *Materiales para caracterizar propiedades del sólido (Palillos y plastilina)*	Son los recursos en los que se hace presente la percepción visual y/o auditiva. ➢ *Videos e imágenes de los frecuentes viajes alrededor del mundo geométrico* ➢ *Guías e instrumentos:*

Fuente: Clasificación de los recursos didácticos Godino (2006, *Págs. 117-124)*

Metodología de investigación

El reto de la propuesta era diseñar actividades que despertarán el interés y la motivación de adquirir nuevos y útiles conocimientos; aunque no es tarea fácil, "Sistematizando "la vuelta al mundo con la geometría" hacia el minecraft " es la justificación perfecta para cautivar la atención de los estudiantes y proporcionarles experiencias de aula innovadoras en el estudio de las matemáticas, proponiendo el aprendizaje de la geometría espacial desde las figuras tridimensionales y su comparación con los objetos físicos de la realidad, hacia la geometría bidimensional trabajada como propiedades de la geometría tridimensional o a lo que se refieren cuando se habla de la representación bidimensional del espacio tridimensional.

Por tal razón la resolución de problemas es un método de inagotables recursos dado que cada experiencia con problemas matemáticos posibilita la retroalimentación de experiencias

pasadas, genera la sistematización de nuevas prácticas dotándolas de creatividad y en espacios de socialización desarrolla una conciencia crítica en los estudiantes.

Se ejecuta una propuesta de enseñanza enfocada a desarrollar el pensamiento espacial, la enseñanza de los sólidos geométricos y las figuras planas; empezando desde el estudio de objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características para proporcionar el camino hacia el aprendizaje de las representaciones bidimensionales de dichos objetos tridimensionales, ya que es común que se utilicen libros matemáticos que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales y usar estos gráficos genera en el estudiante una dificultad adicional en el proceso de comprensión, como lo menciona Dickson (1991).

Desde la propuesta de Brousseau (1986, p. 64), quien propone que *"*el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno debe descubrir*"*, se estableció una metodología de enseñanza enmarcada en una situación problema fundamental Brousseau (2007), explícitamente una situación motivacional en la que los estudiantes viajaron por cuatro países y desde allí reconocieron cuatro solidos relacionados con maravillas de un país (Ver figura 1), finalizando con una galería de arte que relaciona los sólidos, sus características y propiedades.

El diseño de la situación y la evaluación del impacto y pertinencia del uso de recursos didácticos se evidenciará a partir de las categorías de análisis del modelo Van Hiele (1984) y Hoffer (1981), que pretende establecer que la geometría es aprendida por una secuencia de niveles de pensamiento, los cuales se caracterizan por ser progresivos y ordenados, donde solo al dominar o alcanzar un nivel se puede pasar al siguiente. Van Hiele (1984), plantea cinco niveles para la enseñanza de la geometría; *Nivel 0,* visualización o reconocimiento, *Nivel 1,* análisis, *Nivel 2,* Ordenación o clasificación, *Nivel 3,* Deducción formal y *Nivel 4,* Rigor.

Atendiendo al intervalo de edad en el que se encuentran los estudiantes (7-8 años), se ubican según el modelo Van hiele en el nivel de reconocimiento, con las cinco habilidades que plantea Hoffer (1981), y que se desarrollan por los niños de esta edad (Ver tabla 2):

Tabla 2

Van Hiele	Habilidades	Características
Visualización o Reconocimiento	***Visual:*** Capacidad de crearse representaciones mentales a través de la visualización de objetos.	• Reconocer figuras de un dibujo • Reconocer información contenida en una figura
	Verbal: Habilidad de comunicación donde se da a conocer la información contenida en los objetos geométricos que ha logrado interiorizar.	• Asociar el nombre correcto con una figura dada • Interpretar frases que describen figuras
	Dibujo: Crea imágenes mentales a partir de la visualización de objetos y las traduce a representaciones externas, a partir de representaciones internas de conceptos matemáticos	• Hacer dibujos de figuras interpretando las partes
	Lógica: Desarrollar el poder de argumentación lógica, sus propias justificaciones y formulaciones.	• Diferencias y similitudes entre figuras • Comprender la conservación de figuras en diferentes situaciones

	Aplicada: Pretende que al enfrentarse a una situación problema, se utilicen estrategias de solución utilizando las demás habilidades	• Identificar formas geométricas bidimensionales en objetos físicos

Fuente: Modelo Van Hiele (1984) con aportes de Hoffer (1981) para la enseñanza de geometría.

Descripción de la experiencia

En cada uno de los países a los que se viajó (Ver figura 1) debería aprenderse algo nuevo referente a la geometría, pues la idea era mostrarles construcciones en diferentes países asociadas a algunos sólidos geométricos, para que finalmente desarrollarán la capacidad al descomponer los sólidos trabajados en su sus propiedades bidimensionales, y desde allí trabajar con sus propiedades y características a través del material proporcionado.

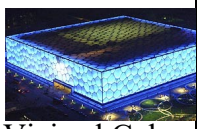
1. Cubo	**2.** Paralelepípedo	**3.** Pirámide	**4.** Esfera	**5.** Galería
 Viaje al Cubo de agua en **China**	 Viaje a la Torre Picasso en **España**	 Viaje a la Piramide de Giza en **Egipto**	 Viaje a la Esfera de piedra en **Costa Rica**	 Viaje a la Galería de arte geométrico en **Colombia**

Figura 1: Viaje por el mundo geométrico

Para simular el viaje se hacía uso de material gráfico-textual Godino (2006) como lo son videos e imágenes de los países y construcciones de cada lugar. Estos recursos grafico-textuales ayudaban a involucrar al estudiante en la situación propuesta, los constantes viajes a países lejanos para mirar las imágenes de construcciones arquitectónicas en forma de sólidos, generaban entusiasmo para el trabajo activo con los recursos tangibles.

Se recurría a recursos tangibles (Ver figura 2) y manipulativos durante todas las sesiones, los cuales correspondían a sólidos construidos, realizados por los mismos estudiantes o construcciones del docente y el objetivo principal era el motivar al estudiante a la exploración táctil y visual de los mismos para que proporcionarán las primeras informaciones sobre las características y algunas de sus propiedades, siguiendo la idea de (Piaget, 1964), quien hace distinguir este proceso y dice: "la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos, para que posteriormente la representación sea una evocación de los objetos en ausenta de ellos".

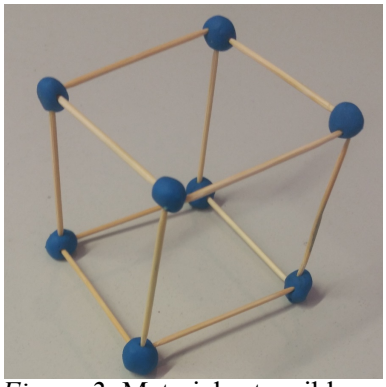


Figura 2: Materiales tangibles

El objetivo después del reconocimiento de sólidos y su caracterización, era que los estudiantes estuvieran en la capacidad de descomponer los sólidos en sus propiedades bidimensionales logrando así evidenciar las formas planas que componían a un sólido.

Esta actividad que corresponde a la última sesión, se desarrolló durante el viaje a Colombia, donde el aula de clase se convirtió en una galería de arte geométrico (Ver figura 3), simulando el arte de Omar Rayo donde se usaban figuras planas para crear valiosas y bonitas obras. En ésta sesión el estudiante debía crear su propia obra pero sin el uso de pincel, sino con los mismos sólidos anteriormente trabajados durante los viajes a los demás países, pues debían usar cada una de las caras planas de los sólidos para simular un sello y plasmarlas sobre una cartulina evidenciando las propiedades bidimensionales de los sólidos que ya habían trabajado, de esta manera creaban sus obras con figuras planas y a la par comprendían la composición bidimensional de objetos tridimensionales.



Figura 3: Arte geométrico

Conclusiones y reflexiones finales

Los materiales manipulativos tangibles ayudan a la compresión de conceptos, generando una conexión con el estudiante, permitiéndole a partir de situaciones nuevas, adquirir conocimientos, donde el material por sí mismo no es nada, lo es cuando el maestro le da un enfoque para tratar conceptos y llegar al objeto la geometría espacial, así la enseñanza y el aprendizaje se dota de un carácter dinámico y comprensible para el estudiante.

Ahora bien, en cuanto a las características físicas de un sólido, ellos empezaban a asociar esas propiedades según lo percibían; por ejemplo al mostrarles los vértices de la pirámide decían que ese nombre "vértice" era muy raro que preferían llamarle "puntas", lo que ayudo a su mejor reconocimiento y saber cuántas poseía cada sólido; a las aristas como los "bordes" que se podían sentir con los dedos y finalmente las caras las reconocían como aquello sobre lo cual la pirámide podía quedar de pie, pues si intentas ponerlo de pie sobre una punta se caía, igualmente si intentas pararla sobre el borde, el único lugar sobre queda de pie es sobre sus caras planas.

Uno de los aspectos que llama la atención, es que la conceptualización planteada por los estudiantes, está acompañadas por gestos y palabras del lenguaje cotidiano del estudiante, hasta que los conceptos sean validados o institucionalizados por los estudiantes, para una futura valoración de definiciones y simbolismos formales.

Es importante hacer mención a la importancia que tienen los recursos gráfico-textuales como los videos y las imágenes interactivas, ya que en la educación matemática actual no se tienen en cuenta y por lo que se logró en esta experiencia de aula, se puede concluir que son recursos agradables e interesantes a la vista del estudiante, porque el estudiante se interesa por los procesos de aprendizaje, motiva el trabajo activo y lo involucra en una situación donde debe acceder a nuevos conocimientos gracias a la propia acción.

Finalmente gracias a estas características que ellos de manera curiosa les atribuían a los sólidos, lograban realizar los conteos de cada uno de los vértices, caras y aristas lo que no se dificultó en ningún sentido. Reconocían igualmente la representación bidimensional de los sólidos, pues identificaban figuras como triángulos, cuadrados y círculos en las pirámides, cilindros y paralelepípedos, dibujándolas de acuerdo a la cantidad.

Ahora bien, se debe mencionar que a partir de la implementación de esta experiencia y gracias al trabajo de los estudiantes al construir los sólidos y establecer sus obras de arte, se generó una nueva experiencia que apunta a trabajar la enseñanza de los sólidos y las figuras planas desde la situación motivacional **"Construyendo un muñeco Minecraft"** (Ver figura 4).



Figura 4: Muñecos Minecraft

Referencias y bibliografía

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Francia. Universidad de Burdeos.

Brousseau, G. (2007). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage (primera edición en francés, 1998).

Dickson, L. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: M.E.C. & Labor.

Godino, J. (2006). *Uso de material tangible y gráfico textual en el estudio de las matemáticas; superando algunas posiciones ingenuas*. Machado y Cois. Guimarães, Portugal.

Hoffer, A. (1981). *La geometría es más que demostración*. En notas de matemática Nº 29, abril de 1990 p 10-24.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área matemáticas.* Áreas obligatorias y fundamentales. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Piaget, J. (2005). *La representación del espacio*. México: Reseña del libro Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza. Correo del maestro y ediciones la vasija.

Van Hiele, P.M. (1984). *Estructuras y visiones. Una teoría de la educación matemática*. Londres.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Medida de volume do dodecaedro e do icosaedro: uma visão diferente

Amarildo Aparecido dos **Santos**
Universidade Federal do ABC - UFABC
Brasil
amarildosantos10@gmail.com

A geometria está presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos.

De acordo com PCN+ (BRASIL, 2002) usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão de modelos para resolução de problemas da matemática. Segundo o BNCC (BRASIL, 2017), ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa a capacidade de resolver problemas, comunicar, argumentar e ampliar a capacidade de pensar matematicamente. Além disso, estão preparados para escolher as representações mais convenientes para cada situação, para mobilizar, de modo simultâneo, ao menos dois registros de representação e para, a todo o momento, trocar de registro de representação.

Nesse sentido, exploramos as construções dos poliedros regulares convexos, no Cabri-3D, como uma possível transposição didática interna, no sentido de Chevallard, a partir da construção de superfícies poliédricas desenvolvidas por Euclides (BICUDO, 2009), livro XIII. Em primeiro lugar, buscamos compreender as construções realizadas por Euclides, obter relações matemáticas que favoreçam o cálculo da medida de volume desses poliedros. Em segundo lugar, concentramos no dodecaedro e icosaedro regulares, para determinar relações matemáticas que permitam a decomposição em pirâmides e consequente dedução da fórmula para o cálculo da medida de seus volumes. Em terceiro lugar, utilizar as relações e construções para um caminho inverso, ou seja, relações matemáticas que permitam dizer se uma pirâmide regular, triangular ou pentagonal, pode compor ou não um dodecaedro ou um icosaedro regular. Para isso, utilizamos como referencial teórico a noção de Transposição Didática e a Problemática Ecológica de Yves Chevallard e os Registros de Representação Semiótica de Duval especificamente nas apreensões sequencial, perceptiva, operatória e discursiva. No caso do dodecaedro regular verificamos que o segmento que representa a altura da pirâmide e o segmento que representa o apótema do pentágono da base dessa pirâmide determinam um segmento que foi dividido em média e extrema razão, sendo a altura o maior deles e o apótema da base representa o menor. Com esta constatação, foi possível então construir uma pirâmide regular de base pentagonal, a partir de um segmento qualquer dividido em média e extrema razão e considerar o maior deles como a altura da pirâmide e o menor como o apótema do pentágono regular da base de tal pirâmide. Com essa pirâmide construída pudemos compor o dodecaedro regular. Para o icosaedro regular, notamos

que o prolongamento de uma de suas faces permite construir um retângulo, com um de seus lados sendo a aresta do icosaedro e que as duas outras arestas representam metade das diagonais desse retângulo. Constatamos que esse retângulo é um retângulo áureo. Dessa forma foi possível constatar, ainda, como esse retângulo é áureo, a partir da construção de um retângulo áureo, que a metade de suas diagonais corresponde às arestas laterais de uma pirâmide que tem como aresta da base o lado menor desse retângulo áureo. Com essa constatação, foi possível construir uma pirâmide que pode compor um icosaedro regular. A partir de relações e medidas obtidas durante a construção deduzimos fórmulas para o cálculo da medida de volume para cada um dos poliedros regulares, tanto em função da medida da aresta de cada um, quanto em função da medida da diagonal, ou diâmetro da esfera que circunscreve cada um deles. No caso do icosaedro e do dodecaedro, a possibilidade de decompor cada um em pirâmides regulares e de obter a medida da altura de cada uma delas foi o que permitiu a dedução das fórmulas para a medida de seus volumes. Pudemos então, verificar que existem condições necessárias para determinar se uma pirâmide regular de base pentagonal possa ser usada para compor um dodecaedro regular e, de modo análogo, para que um tetraedro regular possa ser usado para compor um icosaedro regular, existem condições necessárias para determinar se um tetraedro regular possa compor um icosaedro regular.

Entendemos que realizamos uma transposição didática interna, segundo os pressupostos teóricos de Chevallard (1998), porque conseguimos estudar didática e matematicamente as construções dos poliedros regulares, de um ponto de vista não encontrado em nossa revisão bibliográfica e estudo de livros didáticos. Construímos um processo para o ensino de poliedros regulares e o cálculo da medida de seus volumes que poderiam, com adaptações, fazer parte da matemática escolar, seu diferencial está tanto nas construções, quanto no desenvolvimento de fórmulas em um ensino mais significativo para os alunos. As apreensões, segundo Duval (2012), podem ser construídas visto que foi desenvolvido um discurso associado à compreensão do desenho que conduziram ao desenvolvimento efetivo de construções geométricas. Esse discurso juntamente com a apreensão sequencial permitiu escrever uma sequência de passos para a construção dos poliedros. A apreensão operatória sobre as figuras, a partir das modificações possíveis, articulada com a apreensão discursiva permitiu justificar e demonstrar matematicamente as construções realizadas e, ainda deduzir outras relações que permitiram estudar pirâmides que possam compor o icosaedro ou o dodecaedro. A visualização também foi desenvolvida com a articulação das apreensões perceptiva e operatória. Foi fundamental a conversão de representações realizadas do registro figural para representações no registro algébrico e tratamentos em cada um deles. No registro figural as modificações nas figuras, permitiram o desenvolvimento da apreensão operatória. Dentre elas, destacamos a modificação mereológica que se faz em função da relação parte todo ocorreu em vários momentos, por exemplo, na divisão de segmentos em média e extrema razão ou na decomposição dos poliedros.

Referencias e bibliografia

Bicudo, I. (2009). *Os Elementos - Euclides*. Livro XIII, Editora Unesp, p.563.

BNCC, *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. (2013). Brasília: MEC; SEB; DICEI.

Brasil, *PCN+ Ensino Médio***.** (2002). Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasília: MEC/SE.

Duval, R. (1988). *Approche cognitive des problèmes de geométrie em termes de congruence*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, v.1, p.57-74, IREM de Strasbourg.

Santos, A. A. (2016). *Construção e Medida dos poliedros convexos com o Cabri-3D: uma possível transposição didática*. 167p. Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC, São Paulo.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Jogos educativos como ferramenta no ensino aprendizagem de Geometria

Isadora Freitas **de Oliveira**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
isadora.2017@alunos.utfpr.edu.br
Laura Marco **Reginaldo**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
lauramarco2010@hotmail.com
Giovana Melchiades **Melendi**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
giovanammelendi@gmail.com
Bruna da Cunha **Castilho**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
brunacastilho@alunos.utfpr.edu.br
Danielle Gonçalves de Oliveira **Prado**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
danielle@utfpr.edu.br

A matemática sempre foi uma matéria desafiadora para os alunos, apesar de estar tão presente no cotidiano. Ela exige muita concentração, raciocínio lógico, estudo e dedicação desde o primeiro contado. Porém, muitas vezes, o aluno apresenta dificuldades no seu entendimento e acaba ficando desmotivado, ou seja, perde o interesse pela aprendizagem. Infelizmente, a cada ano isso vai se agravando e contribuindo para o aumento no déficit de conhecimento.

No Brasil, segundo o SAEB (2015), as proficiências médias em Matemática evoluíram nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental I e II, mas caíram no Ensino Médio pela segunda vez consecutiva. Nesse último módulo, o Paraná está 6 pontos acima da média brasileira ocupando a 7ª posição, ficando atrás dos estados de DF, MS, RS, SC, RJ e ES.

Sabendo disso, a estratégia do uso de jogos educativos envolvendo conceitos matemáticos se tornam uma solução para despertar um novo interesse na disciplina pelos estudantes. Através desse tipo de ferramenta, é possível reconhecer as maiores dificuldades de aprendizagem dos alunos, assim o educador pode intervir quando necessário, além de proporcionar um entretenimento agradável entre eles. Para Muniz (2013), esses jogos se tratam de materiais pedagógicos fantasiados de jogos que possuem um professor como juiz.

A Escola de Desenvolvimento Humano Casa do Caminho – EDHUCCA, foi escolhida para realização das atividades propostas. A instituição, que não possui fins lucrativos, foi criada em 2001 na cidade de Apucarana – PR, e sua ideologia é baseada no ECA – Estatuto da Criança e do Adolescente. A escola dá uma atenção especial à família, priorizando os lares que estão em situação de risco e vulnerabilidade social.

Cada jogo educativo apresentado tem sua finalidade e metodologia de desenvolvimento própria, além de apresentar níveis de dificuldade diferentes, podendo ser aplicados a crianças e adolescentes de idades distintas. Santos (2014) afirma que o pensamento geométrico é construído a partir de quatro elementos: o objeto, possibilitando ao aluno o toque; o conceito, através da manipulação do material; o desenho e, por último, a imagem mental, consolidada à medida que os estudantes conseguem descrever as propriedades de uma figura mesmo sem a sua presença.

Nesse trabalho, focamos em jogos que trabalhem com esses elementos e o desenvolvimento do conhecimento da Geometria, conteúdo de suma importância na aprendizagem de matemática. O objetivo tanto do Dominó da Geometria Espacial (Figura 3) quanto do Piff Geométrico (Figura 4) é a identificação e reconhecimento de formas geométricas espaciais no cotidiano.

No dominó, as cartas devem ser divididas igualmente entre todos os jogadores e vence quem acabar primeiro com suas peças. Já no piff, 6 cartas são entregues para cada jogador, que deverá formar 3 pares, sendo que cada par é formado por cartas de características comuns.

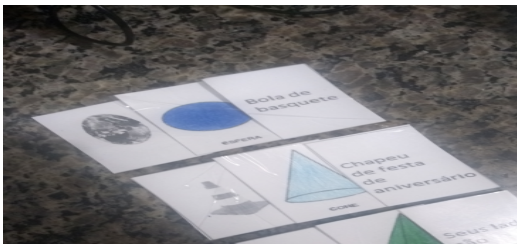


Figura 3. Dominó da Geometria Espacial

Fonte: Autores, 2018.



Figura 4. Piff Geométrico

Fonte: Autores, 2018.

É importante acompanhar o rendimento de cada um dos participantes e fazer avaliações sobre o comportamento deles durante as atividades. Dessa forma, novas propostas, que atendam às demandas e às necessidades da turma podem ser preparadas para os dias que seguem.

No primeiro contato, os alunos apresentaram uma base precária no conhecimento da matemática, mostrando que o cenário da educação pública brasileira realmente deixa a desejar. Além disso, vale ressaltar que, em sua maioria, os participantes apresentam problemas familiares, logo, a oficina de jogos matemáticos faz com que eles se distraiam, divirtam e socializem, tornando assim, a matemática cada vez mais interessante para os mesmos.

Foi observado que, após aplicações dos jogos os alunos começaram a se interessar mais pelo conteúdo, mostrando que esta prática semanal de brincar de maneira educativa despertou nos jovens curiosidade e entusiasmo pela matemática.

A idade dos alunos foi fundamental para a escolha dos jogos, para que a seleção dos mesmos fosse a melhor possível, já que o objetivo era obter um crescimento no conhecimento da matéria. Foi necessário iniciar com jogos mais simples para identificar qual o nível de

dificuldade dos adolescentes, assim podendo partir para jogos mais complexos.

Devido a relevância educacional e social do trabalho desenvolvido, pretende-se continuar aplicando os jogos nessa instituição, e ainda, estender as atividades para outros conteúdos importantes da matemática.

Referencias e bibliografia

Almeida, C. S. Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área. Tcc de Licenciatura em Matemática, UCB, 2006.

Santos, C. A. dos; nacarato, A. M. Aprendizagem em Geometria na educação básica: a fotografia e a escrita na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

Muniz, C. A. Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Autêntica, 2013.

Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB. Resultados do SAEB – 2015. Brasília, 2015.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relações entre geometria e aritmética: um estudo a partir da experiência

Jhone Caldeira **Silva**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás
Brasil
jhone@ufg.br
Euler José de Assis **Garcia**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás
Brasil
eulerroker@gmail.com
Alexandre de Almeida **Xavier**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás
Brasil
alexandrevps@gmail.com
Renato **Sardinha** de Souza
Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação, Universidade Federal de Goiás
Brasil
rensardinha@gmail.com

Resumo

Investigamos a percepção de alunos sobre a relação geometria-aritmética e promovemos uma integração de saberes na aprendizagem da matemática, especificamente na primeira fase do Ensino Fundamental. A partir de observações realizadas em nossas experiências pedagógicas com conceitos geométricos, identificamos questionamentos dos próprios alunos se geometria era matemática. Assim, práticas educacionais foram aplicadas a fim de diagnosticar relações que os alunos faziam entre saberes e promover a integração dos conceitos geométricos e aritméticos. Baseamos nossos estudos em Alves (2012), Lorenzato (2008) e Tripp (2005) e os dados foram analisados conforme Fávero & Trajano (1998) e Moro & Soares (2005). Os resultados sugerem que há alunos que não compreendem a relação geometria-aritmética, desassociando uma da outra, e apresentam dificuldades em resolver problemas elementares envolvendo leitura geométrica e escrita aritmética. Ainda, é necessário ampliar a pesquisa no sentido de compreender, também, a percepção dos professores no ensino de geometria na Educação Básica.

Palavras chave: matemática, geometria, aritmética, experiência pedagógica.

Introdução

A presente pesquisa foi realizada em uma escola pública da Rede Federal, localizada na cidade de Goiânia no estado de Goiás, Brasil, em uma turma de 4º ano, primeira fase do Ensino Fundamental. O intuito da pesquisa foi entender quais eram as percepções dos estudantes sobre a relação geometria-aritmética e a integração de conceitos e saberes na aprendizagem da matemática. A motivação desta investigação se deu num processo com abordagens de conceitos geométricos, em que buscávamos relacioná-los com o cotidiano dos alunos. Surgiram questionamentos de alunos que afirmavam que o tema não era de matemática, de onde identificamos que alguns alunos não enxergavam a geometria como ramificação ou parte da matemática. Percebemos que seria importante entender melhor o que aqueles alunos pensavam a respeito de geometria e matemática e suas relações.

Já no início do processo do estudo, dada a fase inicial de formação dos alunos envolvidos, identificamos que a maioria desses considerava como matemática aqueles conceitos da aritmética e, assim, se referiam à matemática (e usavam essa palavra) somente quando a aritmética estava envolvida. Buscamos estabelecer relações mais claras entre geometria e aritmética a fim de que os alunos pudessem chegar à ideia de que a matemática não é um universo segmentado, mesmo sabendo que uma "separação" de conceitos matemáticos é algo considerado natural dentro da disciplina. Lorenzato (2008) afirma que essa divisão de áreas da matemática no Brasil é algo que sempre aconteceu.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997, p.38), a matriz curricular para alunos do Ensino Fundamental deve conter o estudo de números (aritmética e álgebra), bem como o estudo de formas (geometria). Deve, também, apresentar o estudo de grandezas e medidas, esse possibilitando uma interligação dos campos de geometria, aritmética e álgebra, permitindo a consolidação dos conceitos propostos. Entendemos que essa interação dos conceitos entre os diferentes campos pode surtir efeitos em espaços de aprendizagem que levem à apropriação destes. Consequentemente, estimula as funções cognitivas (MAGALHÃES, 2011) essenciais para o desenvolvimento do ser humano.

Miguel, Fiorentini & Miorim (1992) salientam, a respeito da relação geometria-aritmética, que

> Queremos, na verdade, revelar a existência de uma atitude oscilatória e maniqueísta em relação a esses dois campos fundamentais da Matemática que, infelizmente, parecem direcionar os estudos, as reflexões e os debates sobre o ensino da Matemática Elementar, pelo menos a partir da década de 70, quando as primeiras ressonâncias do chamado movimento da matemática moderna se fizeram sentir no interior de nossas escolas (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 39).

A geometria tem um grande papel na aprendizagem de conceitos matemáticos. É por meio dela que podemos visualizar conceitos. E essa importância toma um nível ainda maior quando se trata da aprendizagem infantil. É nessa fase que os primeiros conceitos matemáticos são introduzidos na vida de toda criança. E a geometria, então, tem sua relevância maximizada, pois o exercício deixará de ser apenas teórico e passará a ser também visual. Vieira (1997) diz

> As leituras realizadas sobre o tema de presente pesquisa reforçam o entendimento de que o processo de ensino-aprendizagem da geometria é fundamental para apoiar a construção de conceitos matemáticos científicos. E mais, destacam também que o ensino dos conteúdos de geometria, aritmética e álgebra devem estar entrelaçados, advindo daí o interesse por elaborar um programa voltado para o ensino inter-relacionado dos conteúdos de geometria e álgebra (VIEIRA, 1997, p. 21).

Mas então se tal integração é tão importante e não se dá de maneira natural no ensino da matemática na Educação Básica brasileira, há que pensar em maneiras para que isso aconteça. A alternativa que tem se mostrado mais eficaz é a resolução de problemas. Além de utilizar a

aritmética para resolver o que é pedido, a interpretação geométrica dá uma ideia visual do que é o problema.

O grande desafio é mostrar que a matemática é um aglomerado de ideias, conceitos e estruturas muito importantes e que se fazem dependentes entre si. Dessa maneira, para que o aluno compreenda de forma mais natural que estruturas como a geometria e a aritmética fazem parte da mesma matemática, é necessário que desde as séries iniciais o professor saiba organizar as suas aulas com cautela. Ele deve trazer, mesmo que de forma simples, uma matemática que utilize vários conceitos e métodos para sua resolução ou entendimento. Alves (2012) destaca que

> Para Piaget, a percepção não é uma atividade única, fazendo parte, sim, de processos diversos como a exploração, reorganização, esquematização, transporte e antecipação. Além do que, apesar de todas essas atividades estarem possivelmente presentes desde o nascimento, elas não acontecem pelo que parece, no mesmo ritmo (ALVES, 2012, p. 3).

A partir do momento em que o professor conseguir, por meio de seu planejamento e trabalho, desenvolver atividades que tragam uma matemática "completa", ou seja, geometria, aritmética e até mesmo álgebra de formas integradas, ele estará promovendo percepções que acabarão com uma visão fragmentada que essa ciência possui. Com isso, nossa proposta se resumiu em conhecer o que os alunos sabiam a fim de tentar entender todas essas percepções que envolvem a relação geometria-aritmética transversalmente com a experiência.

Método

Participaram desse estudo 31 alunos de uma turma de 4º ano (primeira fase do Ensino Fundamental) de uma escola pública da Rede Federal de Goiânia (Goiás-Brasil). O objeto de investigação nasceu a partir de questionamentos dos próprios alunos. Práticas educacionais foram aplicadas abordando conceitos de geometria e aritmética condizentes com a maturidade escolar dos estudantes a fim de diagnosticar as relações que esses faziam entre saberes matemáticos, além de promover o entendimento da integração dos conceitos geométricos e aritméticos. Foram abordadas desde aulas teóricas à atividades lúdicas em ambientes externos (por exemplo, observações de elementos presentes em uma quadra poliesportiva, em uma roda de bicicleta, em que exploramos os desenhos e formas e algumas medidas). Para o presente estudo trazemos três atividades: a Atividade 1 buscou sistematizar as observações da pesquisa no sentido de identificar as relações que os sujeitos estabelecem entre geometria e matemática, sendo ela composta por perguntas abertas e um problema bastante elementar; ii) as Atividades 2 e 3 exploraram os conceitos de raio, diâmetro, círculo e circunferência, com situações em que os estudantes deveriam vivenciar a geometria e a aritmética conjuntamente. As atividades estão apresentadas no Apêndice A. Os alunos responderam as atividades individualmente, sem ajuda dos pesquisadores. Realizamos uma pesquisa-ação, como sugere Tripp (2005), e as respostas foram analisadas como apontam Fávero & Trajano (1998) e Moro & Soares (2005).

Resultados e discussão de dados

Considerando a Atividade 1, inferimos algumas relações que os alunos fazem com respeito da geometria e da matemática. As respostas refletem que parte dos alunos tinham a percepção de que as aulas/atividades de geometria não necessariamente eram de matemática. Veja:

Tabela 1

Percepções dos alunos sobre a geometria e a matemática, Atividade 1.

Categorias	Número de Alunos
A1. Acreditam que existem diferenças entre a Matemática e a Geometria, mas concordam que Geometria é Matemática e vice-versa.	10
A2. Acreditam que existem diferenças entre a Matemática e a Geometria e que Geometria não é Matemática e vice-versa.	4
A3. Não existem diferenças entre Matemática e Geometria.	14
A4. Não conseguiram articular.	3

Na Categoria A1 incluímos aqueles alunos que conseguiram enxergar uma diferença entre matemática e geometria e concordam que uma faz parte da outra. Pudemos perceber que, mesmo dentre aqueles alunos que entendem que a geometria faz parte da matemática ou vice-versa, há alguns que acreditam que a diferença entre a geometria e matemática é o fato de a geometria se tratar de formas, desenhos e figuras enquanto a matemática está relacionada às contas e aos cálculos (aritmética). As notações da Figura 1 a seguir trazem exemplos.

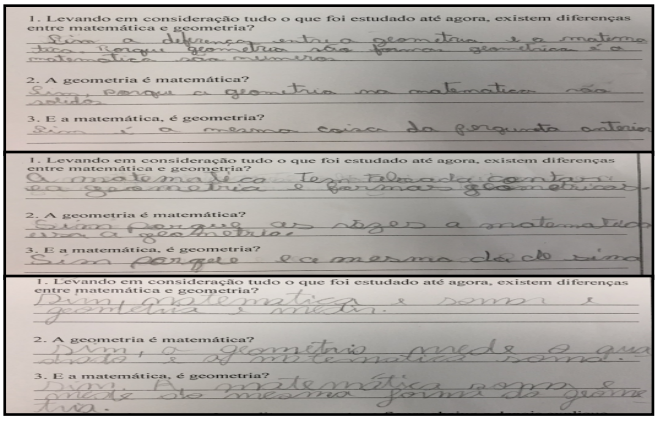


Figura 1. Respostas de alunos, Categoria A1, Atividade 1. Fonte: Acervo Pessoal.

É importante observar também a forma como os alunos fazem relações: "a matemática é responsável por somar e a geometria medir o quadrado". De acordo com nossas experiências, o aluno pode estar relacionando "medir o quadrado" e "somar" com o cálculo do perímetro, pois esse conceito fora abordado. Ou seja, esse aluno provavelmente conseguiu enxergar um elo entre medir e saber quanto vale o lado de um quadrado, por exemplo, e somar estes lados para se chegar a um resultado como um processo completo e não segmentado.

Na Categoria A2 estão os alunos que citam as diferenças entre a matemática e a geometria e afirmam que uma não é a outra.

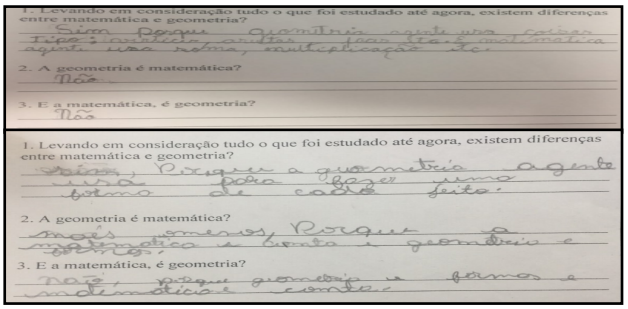


Figura 2. Respostas de alunos, Categoria A2, Atividade 1. Fonte: Acervo Pessoal.

Vemos na Figura 2 que os alunos disseram que existe diferença entre a matemática e a geometria e que há alunos que acreditam que uma não é a outra. Inferimos que um dos alunos tende a entender a matemática como algo mais "amplo" que a geometria, quando usa a expressão "mais ou menos" na resposta à Pergunta 2. Mais uma vez encontramos o argumento em que coloca a matemática como "contas" e a geometria como "formas".

Na Categoria A3, que equivale a 45% dos alunos (14), temos aqueles que acreditam que não existe nenhuma diferença entre matemática e geometria e entendem que uma faz parte da outra. Vejamos as notações na Figura 3:

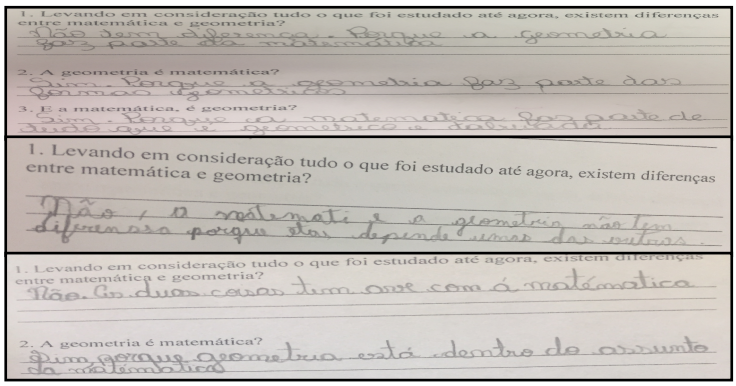


Figura 3. Respostas de alunos, Categoria A3, Atividade 1. Fonte: Acervo Pessoal.

Esses alunos consideram matemática e geometria um mesmo universo, apontam em suas respostas que uma faz parte da outra. Isso nos faz perceber que para eles a ligação entre matemática e geometria é natural. Ainda que saibamos que há inúmeros conceitos de matemática que não se enquadrem em geometria, optamos por não levar a discussão a um tom tão profundo e específico. Levamos em consideração o caminhar escolar dos alunos envolvidos, a faixa etária, a maturidade, a experiência prévia, diante do currículo escolar. Ainda não era o momento das formalidades conceituais, fórmulas, propriedades etc. Estávamos vivenciando as primeiras experiências com diversos conceitos geométricos, que pudessem ser adquiridos pela experiência e observação. Diante disso, valorizamos, sobretudo, que os alunos pudessem perceber a inter-relação entre os conceitos de matemática como um todo, em particular, quando se trata de geometria e aritmética.

Contudo o que pudemos observar a respeito da Atividade 01, vemos que 45% dos alunos (14) conseguem visualizar matemática e geometria como algo único e dependente e 55% dos alunos (17) acreditam na independência das duas áreas, principalmente com a ideia de que somar e medir fazem parte de universos distintos. Ainda, 48% (15 alunos) vê a geometria e a matemática como duas disciplinas que empregam metodologias diferentes: a geometria como estudo das formas e a matemática como estudo dos números e contas. Essas observações são bastante naturais, pois de acordo com Van de Walle (2009), a geometria é o estudo das formas e do espaço com características próprias que auxiliam o processo educacional.

As Atividades 2 e 3 buscaram explorar os conceitos de raio, diâmetro, círculo e circunferência, oportunizando situações que envolvessem a geometria e a aritmética conjuntamente. A Atividade 02 permitia aos estudantes expressarem com palavras as suas constatações, enquanto a Atividade 03 envolvia a interação dos conceitos com pequenos cálculos aritméticos. Confrontando as respostas dessas atividades, pudemos perceber que dos 29 alunos respondentes (02 alunos que responderam à Atividade 1 não participaram das Atividades 2 e 3), apenas 31% deles (9) souberam expressar corretamente o conceito de diâmetro (consideramos a

linguagem matemática/materna do aluno) e calculá-lo para uma circunferência com um raio dado. Além disso, cerca de 52% dos alunos (15) não souberam relacionar com aproveitamento o conceito estudado à aritmetização da relação raio-diâmetro. Desses 15 alunos, 9 deles souberam calcular o valor do diâmetro, mas não conseguiram alcançar uma resposta esperada quanto à absorção do conceito em si e os outros 6 alunos o souberam definir, mas não conseguiram calcular de maneira correta. Por fim, cerca de 17% dos alunos (5) não conseguiram expor de maneira correta o conceito de diâmetro nem calcular o diâmetro de uma circunferência com o raio dado. Apresentamos a tabela a seguir.

Tabela 2

Resultados da Análise das Atividades 2 e 3.

Categorias	Número de Alunos
B1. Sabem definir diâmetro e sabem calculá-lo.	9
B2. Sabem definir diâmetro, mas não sabem calculá-lo.	6
B3. Não sabem definir diâmetro, mas sabem calculá-lo.	9
B4. Não sabem definir diâmetro e nem sabem calculá-lo.	5

Vemos que os alunos na Categoria B1 sabem definir o diâmetro e sabem calculá-lo. Eles representam menos de um terço do total de respondentes. Podemos entender que tais alunos souberam enxergar o elo existente entre o conceito apresentado do diâmetro e a relação aritmética usada na multiplicação do valor da medida do raio por dois.

Aqueles na Categoria B2 sabem definir diâmetro, mas não sabem calculá-lo. Cerca de 21% dos alunos (6) estão situados nesse conjunto. Podemos inferir que tais indivíduos, apesar de entender o que o diâmetro significa dentro de uma circunferência, não conseguem visualizar a relação diâmetro-raio de forma aritmética. Já na Categoria B3, os sujeitos não sabem definir diâmetro, mas sabem calculá-lo. Cerca de 31% dos alunos (9) estão inseridos nesse grupo. Apesar de não terem uma ideia corretamente formalizada do conceito de diâmetro, usam a representação geométrica da circunferência e do raio para calcular o valor do diâmetro.

Finalmente, na Categoria B4, encontramos cerca de 17% dos alunos (5). Para esses, que apresentam não saber definir diâmetro e nem calculá-lo, é importante buscar compreender porque não conseguiram internalizar os conceitos, tampouco conectar a representação geométrica da circunferência e do raio para determinar o valor do diâmetro.

Diante do cenário exposto, percebemos que a maioria dos alunos ainda não entende a relação existente entre um conceito geométrico dado e a sua aritmetização. Para esses, os conceitos estão desassociados, como apontam Miguel, Fiorentini & Miorim (1992). Assim, avaliamos a importância de aprofundar as discussões, apresentando novas oportunidades aos alunos a fim de que consigam identificar os saberes geométricos e aritméticos, além de serem capazes de resolver problemas elementares que os envolvam.

Considerações finais

Nossos estudos apontam que é interessante trabalhar geometria e aritmética, buscando integrar os conceitos. Uma vez que identificamos questionamentos entre os alunos da primeira fase do Ensino Fundamental, buscamos investigar se era possível perceber a relação geometria-aritmética nessa fase da Educação Básica. Pudemos perceber que, com o passar do tempo, um número maior de alunos já conseguia enxergar alguma relação entre as “formas” e as “contas”. E na medida em que eles conseguiram entender tais relações de forma mais natural, foram amadurecendo matematicamente. Tal movimento é importante, pois como a matemática é uma

ciência que se divide em várias subáreas, saber que existe ligação entre todas elas é algo essencial para o desenvolvimento cognitivo do indivíduo.

Talvez a grande dificuldade que o ensino da geometria enfrenta hoje seja a sua independência dentro de uma aula de matemática. Muitos dos livros didáticos colocam os conteúdos de geometria como os últimos tópicos dos conteúdos programáticos. Em muitas ocasiões, por falta de tempo, tais conteúdos não chegam a ser trabalhados em sala de aula. Os alunos envolvidos experimentam exatamente o contrário. Para eles, os temas referentes à geometria são sempre intercalados aos temas referentes à aritmética. Defendemos práticas como essa, pois, na medida em que o aluno internaliza os conteúdos de forma integrada, sua aprendizagem matemática se dará de forma mais efetiva, onde ele saberá usar artifícios geométricos para entender aritmética e vice-versa.

Por fim, entendemos que é necessário ampliar a pesquisa no sentido de compreender, também, a percepção dos professores e futuros professores no ensino de geometria na Educação Básica, uma vez que a visão desses reflete diretamente na percepção formada pelos alunos.

Referências e bibliografia

Alves, M. L. *Percepção*. (2012). 6 p. Artigo (Instituto de Física)- Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP. Disponível em: http://sites.ifi.unicamp.br/laboptica/files/2012/12/Percep%C3%A7%C3%A3o.pdf.

BRASIL. (1997). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1º e 2º ciclos do ensino fundamental)*. v. 3. Brasília: MEC.

Fávero, M. H. & Trajano, A. A. (1998). *A leitura do adolescente: mediação semiótica e compreensão textual*. Psicologia: Teoria e Pesquisa, n. 1, 131-136.

Lorenzato, S. (2008). *Para aprender matemática*. Campinas, SP: Autores Associados.

Magalhães, R. C. B. P. (2011). *Educação Inclusiva: escolarização, política e formação docente*. Brasília: Liber Livro, 13-31.

Miguel, A., Fiorentini, D. & Miorim, M. A. (1992). Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?. *Pro-Posições*, Campinas-SP, v. 3, n. 1, 39-54, mar. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644424/11844.

Moro, M. L. F. & Soares, M. T. C. (2005). *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola*. Curitiba: Ed. da UFPR.

Tripp, D. (2005). Pesquisa-Ação: *Uma introdução metodológica. Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, n. 3, 433-466. Disponível em: http://pesquisaemeducacaoufrgs.pbworks.com/w/file/fetch/81004715/pesquisa%20a%C3%A7%C3%A3o%20metodologia.pdf.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.* 6. ed. Porto Alegre: Artmed.

Vieira, V. D. (1997). *Geometria e álgebra: uma proposta de ensino*. 1997. 125 p. Dissertação (Mestrado em Educação Escolar Brasileira) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia. Disponível em: https://ppge.fe.ufg.br/up/6/o/Dissert_Vania_Domingos_Vieira.pdf.

Apêndice A
Atividades 1, 2 e 3

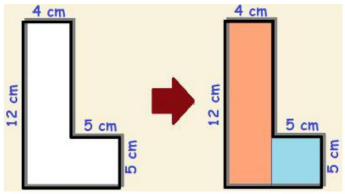
Atividade 1

1. Levando em consideração tudo o que foi estudado até agora, existem diferenças entre matemática e geometria?

2. A geometria é matemática?

3. E a matemática, é geometria?

4. Pinte o balão que você acredita representar a figura abaixo e depois explique porque você escolheu este balão.



Matemática

Matemática e Geometria

Geometria

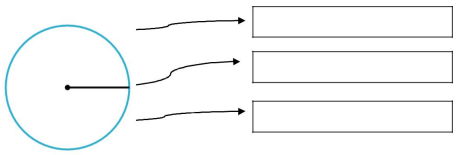
Atividade 2

Considerando a atividade que foi feita fora da sala de aula, responda:

1. Qual é a diferença entre círculo e circunferência?

2. Quando o barbante se tornou maior, o que aconteceu com o círculo e com a circunferência?

3. Observe a figura e indique: o raio (barbante), o círculo e a circunferência.

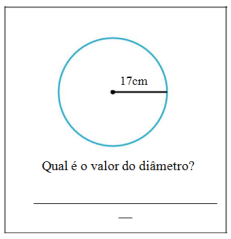


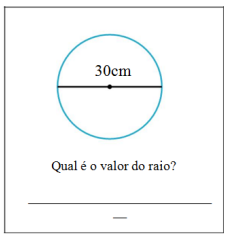
4. Lembrando da atividade que foi feita, qual é a importância de manter o barbante bem esticado na hora de desenhar a circunferência?

5. E o que aprendemos sobre o diâmetro?

Atividade 3

1. De acordo com as circunferências abaixo, calcule o que se pede:





2. Com o auxílio de uma régua, calcule o valor do raio da roda da frente da bicicleta abaixo.



XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Aprendizagem significativa de conceitos geométricos para a trigonometria no 9º ano do ensino fundamental

Marli Teresinha **Quartieri**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
mtqurtieri@univates.br
Romildo Pereira da **Cruz**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
romildo.cruz@universo.univates.br
Geovana Luiza **Kliemman**
Universidade do Vale do Taquari
Brasil
geovanakliemman@universo.univates

Resumo

Neste trabalho apresenta-se o relato de uma experiência de ensino, que faz parte do projeto da tese de doutorado, em andamento, que nesta etapa teve como objetivo estabelecer indícios de como a articulação entre, aprendizagem significativa e tecnologia de ensino pode favorecer a construção de aprendizagem significativa da trigonometria aos alunos. A proposta está embasada na perspectiva da Teoria de Aprendizagem Significativa (TAS). Neste sentido, a caracterização da (TAS) está alicerçada a partir da visão cognitivista de Ausubel, perpassando pelas concepções críticas de Moreira e, concatenada a visão mais humanista introduzida por Novak. À ação relatada ocorreu com uma turma de 9º do Ensino Fundamental composta por 30 alunos, na disciplina de Matemática, na região do Vale do Taquari, RS, Brasil. Por ser uma atividade de cunho exploratório não se apresentam resultados.

Palabras clave: Aprendizagem Significativa, Geometria, Trigonometria, Triângulo Retângulo, Ensino.

Introdução

Não é difícil identificar alunos desconectados da sua realidade, do meio em que vivem, da situação política, social e humanitária, e porque não salientar a alienação dos próprios princípios de aprendizagem sem nenhum espaço para a criatividade e para a construção do conhecimento de forma significativa. Observando as pesquisas de Pêgo (2013), Leite (2013), Silva (2014) e outras não citadas foi possível observar às dificuldades dos estudantes na transposição dos conceitos de

geometria para a trigonometria, abordados no 9º Ano do Ensino Fundamental, em situações reais, do dia a dia.

Tais dificuldades, revelaram-se como causa de desinteresse e desmotivação para aprender. Segundo Ausubel (1982), dois fatores são fundamentais para se estabelecer aprendizagem com significado. Primeiro, o estudante precisa estar motivado para o aprendizado; segundo, o material deve ser potencialmente significativo, isto é, não arbitrário, de tal forma que o estudante possa relacioná-lo com seus subsunçores.

A busca por uma abordagem pedagógica que permita a superação de algumas barreiras para os processos de ensino e de aprendizagem, faz presumir, a necessidade de enunciar o objetivo a partir da leitura dos referenciais teóricos tomados. Assim, neste trabalho, a articulação entre, aprendizagem significativa e tecnologia de ensino é objeto de estudo, com o objetivo de investigar como ambientes de ensino e de aprendizagem que consideram o uso de variadas tecnologias de ensino, podem favorecer a construção de aprendizagem significativa da trigonometria aos alunos.

Com esses pressupostos norteadores, buscou-se planejar e explorar de maneira estratégica atividades com potencial para promover a aquisição de subsunçores e consequentemente, aprendizagem significativa relacionada ao papel dos conceitos geométricos aplicados ao campo da trigonometria. Para tanto, situações encontradas no dia a dia dos alunos (otimização de terrenos, atravessar uma avenida, subir ladeira, telhados de casas, pistas de fluxo invertido e outras) serviram de ponto de partida para a abordagem, visando à contextualização do ensino de trigonometria. Neste sentido, Scheller e Biembengut (2013) concordam que um estudante precisa ir além do domínio de técnicas e estratégias de cálculo; deve desenvolver a iniciativa e o senso criativo, para saber adaptá-lo a diferentes contextos. Desta forma, ele poderá visualizar a aplicação de conceitos abstratos, em situações reais do seu cotidiano.

A trigonometria, bem como a maioria dos conteúdos da matemática que são estudados na Educação Básica, surge em um primeiro momento a partir de necessidades práticas. Neste sentido, busca-se com as atividades desenvolvidas uma aproximação entre as situações reais e teóricas de maneira a colaborar na aquisição e/ou consolidação dos subsunçores dos alunos.

Diante dessas considerações apresenta-se, na seção 2, o referencial teórico, com base no qual o trabalho foi realizado. Na seção 3 é descrita uma das atividades desenvolvidas e considerações acerca da abordagem, seguida pela seção 4, em que é apresentada uma análise dos indícios de aprendizagem obtidos. Na última seção, dedicada às considerações finais, procuramos evidenciar o que já pode ser dito, em termos de ação exploratória que busca apresentar encaminhamentos para aprendizagem significativa da trigonometria no triângulo retângulo.

Referencial

Inclua A falta de noção de geometria pela maioria dos nossos alunos não está apenas imbricada as questões de engessamento do currículo escolar. Para Meneses (2007), o tratamento que se impõe à geometria nas últimas décadas criou uma lacuna que ainda não foi reparada. Os livros didáticos atuais mesclam o ensino da geometria do início ao fim dos mais variados contextos buscando uma aproximação entre tais, mas ainda existe a postura, por parte de alguns profissionais, de sempre deixar de lado seus conteúdos. Neste sentido, Nacarato (2002, p. 85) argumenta que:

> A ausência da geometria na escolarização formal vem formando gerações de profissionais, principalmente professores, que desconhecem os fundamentos desse campo da matemática,

pouco discutido no âmbito da prática pedagógica.

Segundo o autor (2002), a deficiência da formação geométrica é o principal motivo para o surgimento de profissionais despreparados quanto ao desenvolvimento adequado desse conteúdo em sala de aula. "A não compreensão, por partes dos professores, da importância da formação de conceitos geométricos para o desenvolvimento do pensamento matemático" favorece a resistência desses profissionais em relação ao trabalho com geometria (2002, p. 85). De acordo com as concepções de Filho (2002, p. 16):

> A linguagem geométrica está de tal modo inserida no cotidiano, que a consciência desse fato não é explicitamente percebida. É dever da escola explicitar tal fato a fim de mostrar que a Geometria faz parte da vida, pois vivemos num mundo de formas e imagens.

Assim, é necessário possibilitar aos alunos enxergar de forma diferente o ambiente geométrico em que convivem, buscando um novo olhar crítico que o estudo da geometria oferece, criando sentido onde nada se vê. Com o intuito de colaborar na busca de mais uma alternativa para a temática buscamos no campo da trigonometria elaborar uma sequência didática aliada ao uso de tecnologias diversificadas de ensino que favoreça a aprendizagem significativa dos alunos.

Nesta perspectiva e, em consonância com a própria história da Geometria inferimos que a evolução histórica da trigonometria do triângulo retângulo aconteceu a partir das respostas a perguntas contextualizadas em elementos práticos e vinculados a outras ciências, e essas interações motivaram o surgimento dos principais teoremas que constituem a trigonometria. De acordo com Boyer (1996, p. 108),

> A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem - ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, tal estudo seria melhor chamado "trilaterometria", ou medida de polígonos de três lados (triláteros).

Neste sentido, o conhecimento do como e do porquê do surgimento de um novo conceito e quais as transformações e evoluções por ele sofrido faz-se necessário para o entendimento das suas aplicações moderna. Ademais, acredita-se que o estudo histórico do surgimento de um conceito é importante, pois evidencia os obstáculos epistemológicos do processo de construção do saber matemático. À análise desses obstáculos ajudam a compreender as dificuldades dos alunos de hoje e, por outro lado, o entendimento da própria História e evolução da Matemática pode ser ampliado a partir da análise dos erros e embaraços dos estudantes. (Vergnaud, 1994).

Com a intenção de dar consistência ao embasamento da investigação procurou-se elencar alguns encaminhamentos pertinentes a pesquisa. Neste seguimento destacam-se as tecnologias educacionais (desde as mais tradicionais até as informáticas) que, historicamente são utilizadas como ferramentas de ensino inferindo-se uma ligação entre a palavra e a realidade. Logo, na perspectiva da teoria que suporta esta pesquisa, que está em andamento, o ideal seria que toda aprendizagem se transpusesse para uma situação real de vida do aprendiz/ indivíduo/aluno.

Neste sentido, Ausubel (2003) contextualiza que, o conteúdo deve ser significativo para quem aprende, gerando assim predisposição e curiosidade por parte do aluno. Caso não tenha sido estabelecida uma conexão entre o novo assunto e o que o aluno já sabe (subsunçor), não há aprendizagem.

Como exposto, para Ausubel, o conhecimento prévio, chamado de subsunçor, é

fundamental, pois é a partir dele que o novo conhecimento se sustenta e se desenvolve. Neste aspecto, elenca-se como subsunçores para o aprendizado de trigonometria no triângulo retângulo os seguintes tópicos: teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras. A partir deles, desenvolveu-se o trabalho com as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo.

Os conteúdos explicitados são considerados peças importantes para aquisição dos subsunçores necessários para que o aluno possa engajar os conhecimentos novos aos já ancorados em sua estrutura cognitiva, ou ainda, ampliar os conhecimentos já internalizados. Considerando os principais pressupostos apontados por Ausubel para a ocorrência de aprendizagem significativa destaca-se:

1) Disposição do aprendiz para aprender;

2) Material potencialmente significativo;

3) Existência dos subsunçores na estrutura cognitiva do aprendiz.

A condição referente à disposição do aluno em aprender significativamente requer que ele manifeste uma disposição para relacionar, de forma não-arbitrária e substantiva, o novo material à sua estrutura cognitiva. Para Moreira (1999) a pré-disposição para aprender e a aprendizagem significativa têm uma relação cíclica: "[...] a aprendizagem significativa requer predisposição para aprender e, ao mesmo tempo, gera esse tipo de experiência afetiva". Não basta que o material, ou as atividades de ensino sejam potencialmente significativos se o aluno não estiver motivado ou não dispuser de características cognitivas adequadas, ou ainda, se ele se satisfaz adquirindo conhecimentos vagos ou difusos, sem a significância devida ao adotar estratégias que o levam a internalizar o conteúdo de forma literal e arbitrária.

De acordo com as interpretações de Brum e Silva (2014, p. 76), “a busca de indícios sobre a ocorrência de uma aprendizagem significativa não é uma tarefa simples”. Verificar se uma aprendizagem ocorreu, segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), simplesmente perguntando ao aprendiz os atributos de um conceito ou proposição é arriscado, haja vista a possibilidade da utilização de respostas mecanicamente memorizadas. Os autores entendem que é necessária uma compreensão no domínio dos significados que se apresentam de forma clara, precisa, diferenciados e transferíveis.

Na busca por indícios de uma possível aprendizagem significativa Ausubel (2003) sugere que se busquem evidências que o aprendiz está compreendendo genuinamente um conceito, ou seja, que ele está atribuindo a ele significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis. Entretanto, para Moreira (1999), o aluno após uma longa experiência em fazer exames pode se habituar a memorizar não somente proposições e fórmulas, mas também, causas, exemplos, explicações e formas de resolver problemas exemplares. Para os autores Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 137),

> Se tivéssemos que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio diríamos que o fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe, descubra isso e baseie-se nisso seus ensinamentos.

Nessa perspectiva, Ausubel (2003) afirma que na aprendizagem significativa o aluno é ativo na construção do seu conhecimento e participa do processo educacional. Há diversas alternativas para verificação da ocorrência de aprendizagem significativa, como tarefas de aprendizagem sequencialmente vinculadas, servindo de apoio a etapas posteriores da atividade, a resolução de problemas bem como a utilização de mapas conceituais. Também se podem utilizar

classificações consensuais de especialistas de matérias e de professores para se avaliar o grau de proximidade de relevância cognitiva existente para uma determinada tarefa de aprendizagem.

No processo de aprendizagem significativa, a partir de sucessivas interações, conceitos são desenvolvidos, elaborados e diferenciados entre si. De acordo com a concepção de Moreira (1997), a diferenciação progressiva é o princípio pelo qual os conceitos mais gerais e inclusivos do conteúdo de ensino devem ser apresentados no início da instrução e, progressivamente, diferenciados em termos de detalhes e especificidades. Para Ausubel (2003, p. 166),

> [...] quando o conteúdo de uma disciplina é programado de acordo com o princípio da diferenciação progressiva, apresentam-se, inicialmente, as ideias mais gerais e inclusivas da disciplina e depois estas são progressivamente diferenciadas em termos de detalhe e especificidade.

Esta ordem de apresentação do conteúdo corresponde, presumivelmente, à sequência natural de aquisição de consciência cognitiva e de satisfação, quando somos expostos a determinados conhecimentos. Para justificar a abordagem Ausubel se baseia em duas hipóteses:

- ✓ É mais fácil para os seres humanos captar aspectos diferenciados de um todo, anteriormente apreendido e mais inclusivo, do que chegar ao todo a partir de suas partes diferenciadas;
- ✓ A organização do conteúdo de uma determinada disciplina na mente do indivíduo é uma estrutura hierárquica na qual as ideias mais inclusivas estão no topo da estrutura e progressivamente incorporam proposições, conceitos e fatos menos inclusivos e mais diferenciados.

De forma mais explícita, pode-se dizer que novas ideias e informações são aprendidas, e retidas mais eficazmente, quando já estão disponíveis na estrutura cognitiva do aprendiz ideias mais inclusivas e especificamente relevantes, para servir como subsunçores. Neste sentido, a função dos organizadores prévios em relação a qualquer tópico ou subtópico, quando os subsunçores não existem ou quando existem e o aprendiz não percebe sua relacionalidade com o novo material é de reorganizar a estrutura cognitiva.

No seguinte, apontam-se os encaminhamentos que norteiam os primeiros passos da investigação exploratória em andamento.

Procedimentos metodológicos

A bala deve: A fim de contribuir para que o estudante consiga relacionar os conceitos de geometria com a trigonometria com situações do contexto do seu cotidiano, tendo condições de analisar e intervir no mundo real, as ações foram todas planejadas de forma a contemplar o arcabouço apenas do Ano/Curso já abordado. Inicialmente, buscou-se na história da trigonometria, algumas situações-problema que surgiram no passado, cuja importância ainda é reconhecida nos dias de hoje.

Exemplo disso é o estudo das relações existentes nos triângulos que, segundo Souza (2010), surgiu por causa da necessidade de medir distâncias inacessíveis. Os avanços nos conhecimentos da Astronomia, da Agrimensura e da Navegação também impulsionaram a utilização da trigonometria na resolução de situações-problema. Ciente disso, o estudante se apropria de subsídios para a tomada de decisão, visando melhores resultados na atividade a exemplo da jardinagem, medições de terras; cálculo do desnível do solo; alturas inacessíveis e análise de fenômenos periódicos.

Diante dessas considerações, planejou-se a prática de campo, que foi realizada através de visita aos viveiros de plantas, observação de prédios construídos no bairro e de ruas que apresentavam aclives considerados muito íngremes, que se localizam entorno do colégio no subúrbio da cidade de Lajeado, interior do Rio Grande do Sul. As atividades foram desenvolvidas com uma turma de 9º Ano do Ensino Fundamental. A ação teve o apoio do professor da disciplina onde ocorre a pesquisa. Nesta perspectiva, tratou-se a contextualização que nortearam a prática.

Os conceitos usuais de trigonometria, abordados no Ensino Fundamental, ainda não haviam sido tratados, anteriormente, em sala de aula, na forma tradicionalmente utilizada, por meio de aulas expositivas. Com a prática de campo, a intenção era verificar a aprendizagem de tais conceitos e, na medida do possível, validá-la, como uma atividade com potencial para promover aprendizagem significativa. Para esta prática dispomos de duas aulas de 50 minutos cada. A mesma consistiu de duas etapas: 1) discussão entre professor e estudantes, com base na realização de tarefas relacionadas com o tema; 2) resolução, pela turma, dividida em grupos, de duas situações-problema.

A intencionalidade, foi encontrar um caminho para que o aprendizado de conceitos geométricos ocorresse de forma a produzir melhores resultados do que os já tradicionais experenciados em situações pontuais pelo autor. A princípio, quis-se observar os problemas e as dificuldades que ocorrem na evolução deste aprendizado, justificando a necessidade de reconstruir-se o ensino da geometria de 9º Ano por meio de procedimentos que possibilitem uma nova forma de condução destes conteúdos.

Perspectivou-se conduzir as atividades de forma que os alunos sentissem-se à vontade na construção de seus próprios conhecimentos. Desejou-se inicialmente identificar os conhecimentos geométricos apropriados por alunos iniciantes do 9° Ano do Ensino Fundamental participantes da pesquisa. Quis-se observar, no grupo de estudantes, os conhecimentos que estes alunos possuem, comparando com os pré-requisitos geométricos mínimos que deveriam conter para prosseguir seus estudos ou simplesmente para utilizarem na prática real no convívio social.

A turma foi disposta em um círculo e ao centro, com a ajuda de cinco estudantes voluntários, utilizando um esquadro de madeira e uma marreta, foram fixadas ao solo cinco estacas (a orientação era que o triângulo deveria ter um de seus ângulos reto). Com um pequeno prego no topo de cada uma das estacas, passou-se um fio de nylon contornando todos os pontos do triângulo perfazendo o perímetro total deste.

Após ter-se interligado os pontos comuns do triângulo retângulo, em seguida pediu-se para que observassem a disposição das estacas e, a forma como elas estavam organizadas para verificar se conseguiam visualizar os triângulos semelhantes representados. Solicitou-se ainda que, estabelecem letras representativas dos vértices atrelados a cada estaca. Ademais, foram perguntadas questões relativas à classificação dos triângulos quanto às medidas dos lados e dos ângulos correspondentes. Conforme as respostas surgiam, cada estudante fazia anotações. Na sequência, com o auxílio de uma trena e de um transferidor, foram orientados a medir dois ângulos e dois lados do triângulo (maior). De posse dessas medidas foi questionado se, sem utilizar a trena, seria possível determinar as medidas do terceiro segmento do triângulo (maior) dos outros três lados do triângulo (menor). Após alguns olhares e troca de informações, alguém disse: “Sim, pois trata-se de semelhança de triângulos”. Como a resposta estava correta, foi solicitado que, em pequenos grupos, calculassem as medidas dos lados do triângulo (menor). Para isso deveriam desenhar o triângulo em seus cadernos e poderiam utilizar à calculadora.

Esgotado o tempo, dos seis grupos formados, apenas dois grupos conseguiram executar o

cálculo com êxito. Sendo assim, um dos grupos, utilizando um quadro branco e canetões, demonstrou aos demais como o fizeram. Ao final da demonstração, percebeu-se que nem todos se lembravam das relações existentes em semelhança de triângulos, pois o foco inicial para eles foi apenas a aplicação do teorema de Pitágoras para determinarem a hipotenusa do triângulo (maior). Porém, havia clareza de que a soma dos ângulos internos do triângulo correspondia a 180°.

A turma foi questionada sobre o que aconteceu ao traçar a altura do triângulo e logo alguém respondeu que o triângulo havia sido transformado em dois triângulos retângulos. As estacas foram, então, mudadas de lugar, como forma de modificar as medidas dos lados e dos ângulos do triângulo.

Como um dos objetivos da prática era expandir as possibilidades de resolução, ou seja, o estudante sendo um agente do seu próprio aprendizado, novamente foi perguntado se era possível chegar ao mesmo resultado usando apenas as relações trigonométricas do triângulo retângulo. Como já haviam utilizado o método de traçar a altura do triângulo qualquer, transformando-o em dois triângulos retângulos, os grupos traçaram a altura do triângulo e, trabalhando conjuntamente, todos conseguiram resolver.

Apresentação dos resultados

Segundo Moran (2000), aprende-se quando experiencia-se, relaciona-se, atribui-se sentidos ou novos significados, ao que é apresentado. Aprende-se quando se tem interesse e motivação, desenvolvem-se hábitos que podem facilitar a ação de aprender e sente-se prazer pelo que se estuda e a forma como o faz-se.

Quanto a esse ponto, Ausubel (2003, p. 36) assevera que o estudante assume uma responsabilidade adequada pela própria aprendizagem quando: aceita a tarefa de aprender ativamente, procurando compreender o material de ensino; tenta, de forma genuína, integrá-lo nos conhecimentos que já possui; não evita o esforço por novas aprendizagens difíceis; decide fazer as perguntas necessárias sobre o que não compreende.

Foi nesta atmosfera de envolvimento e empolgação, com a forma como ocorreu a abordagem que os alunos ao que se pôde perceber, deram um passo importante de organização hierárquica dos conceitos discutidos para que a pesquisa possa atingir o objetivo pretendido, que é a transposição dos conceitos geométricos para as relações trigonométricas através do uso de tecnologias de ensino variadas. Esclarece-se que, no trabalho em equipe, o envolvimento com as tarefas propostas, a participação ativa nas discussões que iam surgindo deram-se de maneira espontânea e natural. O manuseio de ferramentas de apoio, interesse e envolvimento nas tarefas apresentadas, elaboração de todos os cálculos atestam indícios de um novo despertar, favorecendo a reconciliação do novo conhecimento aprendido com os seus conhecimentos prévios.

Evidentemente, que a inserção de atividades práticas não garante que as mesmas alavancarão processos que possam desencadear aprendizagem significativa a partir das suas usabilidades. Porém, há que se reconhecer que se trata de tendências apontadas com crescente frequência por um número cada vez maior de pesquisadores, a citar Pereira (2011), Oliveira (2013) e Ocanha (2016) e de instituições setoriais

As argumentações de diferentes autores que subsidiaram o aporte teórico deste trabalho deixam a entender que a tendência da Educação Matemática como construtora de novas possibilidades significativas dos conteúdos matemáticos, é buscar um aluno crítico, questionador e investigativo, a partir desse tripé busca ampliar outras possibilidades de aprendizagem com

mais significado. Para Novak e Hanesian (1980, p. 5),

> [...] é essencial levar-se em consideração as complexidades provenientes da situação de classe de aula, estas, por sua vez, incluem a presença de muitos alunos de motivação, prontidão e aptidões desiguais; as dificuldades de comunicação entre professor e aluno; as características particulares de cada disciplina que esta sendo ensinada; e as características das idades dos alunos.

Em outra instância, Ausubel (2003, p. 4) reafirma que,

> O conhecimento é significativo por definição. É o produto significativo de um processo psicológico cognitivo ("saber") que envolve a interação entre ideias "logicamente" (culturalmente) significativas, ideias anteriores ("ancoradas") relevantes da estrutura cognitiva particular do aprendiz (ou estrutura dos conhecimentos deste) e o "mecanismo" mental do mesmo para aprender de forma significativa ou para adquirir e reter conhecimentos.

Na busca por indícios de uma possível aprendizagem significativa Ausubel (2003) sugere que se busquem evidências que o aprendiz está compreendendo genuinamente um conceito, ou seja, que ele está atribuindo a ele significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis. Uma sugestão de Ausubel e defendida por Moreira e Masini (2011), com objetivo de evitar uma simulação da aprendizagem significativa, é utilizar situações que sejam novas e não familiares, exigindo máxima transformação do conhecimento existente.

Quanto aos aspectos que acrescentaram ao estudante no desenvolvimento da atividade apresentada pode-se elencar: resolução de situações práticas em campo com o emprego da geometria, oportunidade de resolução de problemas simples, desenvolvimento da habilidade do trabalho em grupo, habilidades de investigação e resolução de situações práticas da matemática e o desapego do uso de fórmulas prontas.

Considerações

Retomando a questão que norteou essa etapa da pesquisa, que nesta etapa teve como objetivo estabelecer indícios de como a articulação entre, aprendizagem significativa e tecnologia de ensino pode favorecer a construção de aprendizagem significativa da trigonometria aos alunos. Neste sentido, considera-se que alguns indícios foram atingidos. Com base na descrição da abordagem, pode-se salientar que o ensino através de atividades práticas apresenta-se como uma possibilidade real para que haja a ocorrência de aprendizagem significativa no ensino de trigonometria no triângulo retângulo.

A análise dos contextos explicitados e implícitos nos discursos de Ausubel (2003) deixa evidente que do ponto de vista instrucional, a utilização de organizadores prévios é excepcionalmente recomendável como veículos facilitadores da aprendizagem significativa, sobretudo, quando não existem na estrutura cognitiva os subsunçores adequados. Tais pressupostos corroboraram para a organização da sequência desenvolvida com os alunos pesquisados.

Diante do que se pode constatar, acredita-se que o objetivo foi alcançado, pois a prática pedagógica, desenvolvida em um espaço informal com os estudantes, motivou-os para a realização das atividades, um dos pressupostos apontados por Ausubel. Ademais, destaca-se que tanto os alunos, quanto o professor da disciplina, em suas falas concordaram que houve um ganho em termos de aprendizagem. Isto leva a crer que houve uma contribuição para que o estudante do Ensino Fundamental em questão conseguisse relacionar os conceitos de geometria com a pretendida trigonometria com situações do contexto cotidiano, tendo possível condições

para analisar e intervir no mundo real em que vive.

Portanto, acredita-se que através da atividade desenvolvida, possa-se ter proporcionado condições favoráveis para que os alunos envolvidos na prática desempenhassem o papel de agentes do seu próprio aprendizado, o que é uma condição importante para a ocorrência de aprendizagem significativa.

Agradecimento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Referencias

Ausubel, D. P. *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano, 2003.

Ausubel, D. P.; Novak, J. D.; Hanesian, H. *Psicologia educacional*. Trad. de Eva Nick. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

Boyer, C. B. *História da Matemática*. 2 ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher/Edusp, 1996.

Brum, W. P.; Silva, S. de C. R. da. A utilização de um recurso tecnológico para apresentação do tema geometria plana analisada a partir da teoria da aprendizagem significativa. Aprendizagem Significativa em *Revista/Meaningful Learning Review* – V4(2), pp. 72-87, 2014.

Filho, D. M. T. O *aprendizado da geometria no ensino médio – origens de dificuldades e propostas alternativas*: [s.n], 2002.

Meneses, R. S. *Uma História da Geometria Escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo*. 2007. 172 f. (Mestrado acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia universidade católica, São Paulo: [s.n], 2007.

Moran, José Manuel. et al. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. Campinas/SP: Papirus, 2000.

Moreira, M. A. *Aprendizagem significativa: um conceito subjacente*. In: Encontro Internacional sobre aprendizagem significativa. Espanha, 1997.

Moreira, M. A. e Masini, E. F. S. *Aprendizagem Significativa: a Teoria de David Ausubel*. São Paulo, Centauro, 2011.

Moreira, M. A. *Teorias de aprendizagem*. São Paulo: E.P.U., 1999.

Nacarato, A. M. A Geometria no Ensino Fundamental. In: SISTO, Fermino Fernandes, DOBRANSZKY, Enid Abreu, MONTEIRO, Alexandrina (Orgs.). *Matemática e Aprendizagem*. Petrópolis: Vozes, 2002.

Novak, J.D. e Gowin, D.B.. *Aprender a aprender*. Lisboa. Plátano Edições Técnicas. Tradução ao português, de Carla Valadares, do original Learning how to learn. 212p. 1996.

Scheller, M.; Biembengut, M. S. A utilização de tecnologias digitais nos primeiros passos na arte da pesquisa: uma experiência de modelagem. *Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 11, p. 1-11, 2013.

Souza, L. E. C. *Aprender a aprender e ensinar a aprender: Trigonometria*. 2010. Trabalho de Conclusão do Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Ribeirão Pires, 2010.

Vergnaud, G. *Epistemology and Psicology in Mathematics Education. Mathematics and Cognition*. Nesher, P. e Kilpatrick, J., pp 14 -30, Cambridge University Press, 1994.



Contribuições do uso das Tecnologias Digitais no ensino e aprendizagem de conceitos geométricos espaciais

Danielle dos Santos **Rodrigues**
Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil
Brasil
danielle.sr89@gmail.com

Carmen Teresa **Kaiber**
Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil
Brasil carmen_kaiber@hotmail

Resumo

Este artigo apresenta parte de uma pesquisa que teve como objetivo investigar as possíveis contribuições do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), com recurso às tecnologias digitais, no desenvolvimento de conceitos da Geometria Espacial, junto a um grupo de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. Particularmente, está sendo aqui apresentado resultados referentes a uma análise qualitativa realizada em uma atividade que envolvia o uso do *software* GeoGebra, tomando como referência aspectos dos constructos do modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico que se buscou adaptar para a Geometria Espacial. Resultados apontam que o recurso as tecnologias digitais, particularmente a utilização do *software* GeoGebra, potencializou o trabalho dos estudantes, uma vez que possibilitou a visualização, construção e movimentação de diferentes objetivos geométricos permitindo os estudantes identificar propriedades, analisar, conjecturar e propor soluções.

Palavras-chave: Currículo de Matemática, Ensino Médio, Temas de interesse.

Introdução

A importância do desenvolvimento dos conceitos geométricos é destacada na Base Nacional Curricular Comum do Ensino Médio[1] - BNCC (Brasil, 2018), considerando que o desenvolvimento do pensamento geométrico propicia ao estudante um tipo de pensamento que lhe permite compreender, de forma organizada, o mundo em que vive. Fainguelernt (1999) pondera que o estudo da Geometria é de fundamental importância, posto que possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento espacial, elementos essenciais no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, segundo a autora. Dreyfus (1991) já apontava, para a necessidade do uso de ferramentas que auxiliassem no desenvolvimento do raciocínio dos estudantes no que se refere a visualização.

Neste contexto, entende-se que as tecnologias digitais podem se constituir em uma potente ferramenta para o ensino e aprendizagem da Geometria Espacial. Particularmente, Santos (2006) destaca que a visualização, na Geometria é de grande relevância para a aprendizagem, uma vez que, não havendo esta habilidade de criação mental, há dificuldades para construção de objetos geométricos, assim como justificar ou validar resultados obtidos.

Fainguelernt (1999), afirma que visualização geralmente se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais. Porém, a autora salienta que só a visualização não proporciona o conhecimento geométrico, uma vez que há pessoas que possuem a habilidade de conceber a imagem mentalmente e que não necessariamente possuem domínio dos conhecimentos geométricos (Fainguernt, 1999). Contudo, Fainguelernt (1999) destaca para a importância de desenvolver uma educação visual adequada, visto que, para o desenvolvimento do pensamento geométrico é de fundamental importância, corroborando com o que Hoffer (1981) aponta, quando destaca que a habilidade visual propicia aos estudantes reconhecer, perceber, identificar e fazer inter-relações entre figuras distintas.

Concorda-se com Santos (2006) quando destaca que as tecnologias digitais possibilitam uma abordagem dinâmica para a investigação matemática, em particular para a Geometria, proporcionando a visualização de objetos geométricos, já que, as imagens fornecidas na tela do computador podem, por exemplo, serem exploradas sob diferentes aspectos, enfatizando a intuição, a percepção e o raciocínio, competências essenciais para a compreensão dos conceitos geométricos. Assim, não se pode ignorar a sua inserção e suas potencialidades em sala de aula, potencialidades estas que também são destacadas na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

Em uma perspectiva mais ampla, no âmbito da Educação Matemática, a utilização das tecnologias digitais influencia a forma de ver, utilizar e produzir a Matemática, principalmente em sala de aula, propiciando diferentes fontes de informação e formas de tratamento para o desenvolvimento de conhecimentos que não estão presentes em outros recursos (Kaiber & Conceição, 2007; Gravina & Basso, 2012).

Neste contexto, as tecnologias digitais podem se constituir em um poderoso recurso de suporte para a aprendizagem, com inúmeras possibilidades pedagógicas a serem desenvolvidas. Concorda-se com o que é destacado por Kenski (2015), quando afirma que

[1] A Base Nacional Curricular Comum é uma nova organização curricular no Brasil, a qual já está em vigor no Ensino Fundamental, entretanto, a BNCC do Ensino Médio, ainda não foi homologada, estando disponível uma versão preliminar da mesma (Brasil, 2018).

> Por meio das tecnologias digitais é possível processar e representar qualquer tipo de informação. Nos ambientes digitais reúnem-se a computação (a informática e suas aplicações), as comunicações (transmissão e recepção de dados, imagens, sons etc.) e os mais diversos tipos, formas e suportes em que estão disponíveis os conteúdos (livros, filmes, fotos, músicas e textos). É possível articular telefones celulares, computadores, televisores, satélites etc. E, por eles, fazer circular as mais diferencia das formas de informação (Kenski,2015, p.23).

Os argumentos apresentados deram suporte a um estudo, o qual buscou investigar as potencialidades do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), com recurso às tecnologias digitais, no desenvolvimento de conceitos da Geometria Espacial de um grupo de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio.

Particularmente, neste artigo, serão apresentados resultados no âmbito do estudo

mencionado, os quais se referem a uma atividade da UEA que envolveu o uso do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra para a resolução da mesma. Optou-se por este *software,* por ser uma ferramenta que possibilita a visualização e movimentação dos sólidos geométricos em diferentes perspectivas, auxiliando a compreensão e aprendizagem dos estudantes dos conceitos estudados.

Software de Geometria Dinâmica GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de Geometria Dinâmica, livre e gratuito, que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Alia dinamicamente, Geometria, Álgebra e Cálculo oferecendo esses recursos em um ambiente totalmente conectado. A partir da versão 5.0 do GeoGebra, o mesmo passou a incluir a possibilidade de trabalho com objetos tridimensionais. Aliado ao potencial de ferramentas disponíveis para a construção e visualização de objetos, a movimentação dos mesmos, quer seja utilizando a ferramenta controle deslizante ou movimentando diretamente os objetos construídos, confere ao *software* a característica de um ambiente próprio para a exploração, análise, estabelecimento de conjecturas sobre possíveis propriedades, provas empíricas e soluções a problemas propostos, particularmente no âmbito da Geometria.

Com relação a visualização, Van Hiele (1986) aponta em sua teoria, que o reconhecimento visual é o primeiro nível do pensamento geométrico. A visualização e representação mental dos objetos geométricos, bem como a análise e a organização das propriedades geométricas relativas aos conceitos geométricos, de acordo com o autor, são passos preparatórios para o entendimento e formalização do conceito. Nessa mesma linha de pensamento, Borba (2011) afirma que a visualização condiciona o pensamento matemático, influenciando diretamente na produção do conhecimento. Neste sentido, a visualização possibilita o desenvolvimento de ideias para que o conceito seja compreendido e investigado. No que se refere a movimentação, concorda-se com Gravina (2001), quando pondera que o uso de *softwares* de representação dinâmica propicia aos estudantes a construção de significados por meio da movimentação, a qual possibilita aos mesmos a oportunidade de realizar análises, levantar hipóteses e conjecturas, o que, de acordo com a autora, ocorre de maneira limitada quando as figuras geométricas são estáticas, conforme apresentado em livros ou representações realizadas pelos professores.

Giraldo, Caetano, Mattos (2012) apontam, especialmente, o potencial dos *softwares* de Geometria Dinâmica no processo de ensino e aprendizagem da Geometria.

> Os *softwares* de Geometria Dinâmica permitem a construção de objetos geométricos de acordo com as propriedades ou relações estabelecidas. Eles podem então ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que as propriedades e relações sejam preservadas. Esse modo particular de construção geométrica apresenta características especiais, que podem ter consequências importantes para a aprendizagem (Giraldo; Caetano; Mattos, 2012, p.168).

Neste contexto, optou-se pelo uso do *software* GeoGebra por disponibilizar uma tela de trabalho para análise dos objetos em 2D e 3D, em linguagem clássica da Geometria, possuindo recursos para construção de figuras a partir das propriedades que as definem. Zotto (2013) destaca que na janela de visualização 3D, se pode rotacionar a construção realizada considerando as coordenadas.

De acordo com Souza (2014), a utilização do *software* GeoGebra oferece recursos capazes de explorar conceitos matemáticos bem como despertar a capacidade criativa e o engajamento dos alunos na troca de ideias acerca dos conceitos em discussão. Sobre o GeoGebra, Fanti (2010) pondera que:

> [...] é uma importante ferramenta para despertar o interesse pela busca do conhecimento matemático principalmente com os alunos do ensino fundamental e médio. Possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da educação básica permitindo a abordagem de diversos conteúdos especialmente os relacionados ao estudo da geometria (Fanti, 2010, p.01).

Os argumentos apresentados buscam destacar que as tecnologias digitais exercem um importante papel na busca de novas opções de trabalho para o ensino e a aprendizagem. Concordase com Lorente (2009) quando afirma que, as tecnologias podem e devem fazer parte da vida escolar dos estudantes, tanto que, proporcione o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem Matemática.

Como já destacado, o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele foi tomado como referência para a constituição da UEA, assim como para a análise dos dados advindos da aplicação da mesma, motivo pelo qual aspectos do modelo passam a ser apresentados.

Modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele

O chamado modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele teve origem nas respectivas teses de doutorado de Dina e Pierre van Hiele, e está estruturado em cinco níveis de compreensão, descrevendo características do processo de pensamento, oportunizando avaliar e identificar, por meio desses níveis e das habilidades descritas em cada um, o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico e a aprendizagem adquirida pelo estudante (Crowley, 1994). Além dos níveis, o modelo apresentado indica propriedades e fases de aprendizagem que proporcionam situações que favorecem o avanço de nível dos estudantes.

O modelo de Van Hiele foi concebido para o desenvolvimento do pensamento geométrico considerando a Geometria Plana, no entanto, buscou-se lançar um olhar, a partir do modelo, para a Geometria Espacial (Rodrigues & Kaiber, 2016) o que é apresentado no quadro da figura 1.

Nível/Descritor	Pensamento Geométrico Espacial/Habilidades
Visualização Percepção de espaço como algo que existe no entorno; conceitos geométricos vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos; identificação de formas específicas e sua reprodução; aprendizagem de um vocabulário básico.	Identifica figuras geométricas espaciais em objetos ou construções do seu entorno e em representações. Identifica figuras geométricas no espaço e planificadas. Constrói sólidos geométricos em cartolina, canudinhos, ou outros materiais. Descreve figuras geométricas utilizando linguagem não padronizada (um cubo parece uma caixa), por exemplo.
Análise A partir da observação e experimentação, os alunos começam a perceber as características das figuras geométricas e a identificar as propriedades; reconhecem as figuras por suas partes. Todavia, neste nível, os estudantes ainda não conseguem explicar as relações entre propriedades, e fazer a inclusão de classes.	Identifica, classifica e compara os sólidos segundo suas características e propriedades. Identifica e desenha um sólido no espaço, a partir de uma descrição oral ou escrita de suas propriedades. Identifica o sólido de diferentes vistas. Faz deduções superficiais a partir de exemplos. Utiliza vocabulários e símbolos apropriados. Resolve problemas geométricos que requeiram o conhecimento das propriedades dos sólidos no espaço e das relações geométricas.
Dedução Informal Consegue fazer inter-relações de propriedades entre diferentes figuras; são capazes de deduzir propriedades e reconhecer classes de figuras; fazem inclusão de classes, compreendem o significado das definições; acompanham uma prova informal, mas não tem condições de fazê-la.	Demonstra compreensão do significado do conceito, definições, propriedades, características de cada figura geométrica espacial. Desenvolve e usa definições para descrever os sólidos. Faz inclusão de Classes. Apresenta argumentos informais, a partir de construções de sólidos ou desenhos. Resolve problemas considerando as propriedades e inter-relações entre as figuras. Identifica informações implícitas em determinado sólido espacial ou em alguma informação.

Figura 1. Geometria Espacial na perspectiva dos níveis de compreensão do modelo de van Hiele

A caracterização feita pelas autoras indica os cinco níveis preconizados no modelo, salienta-se, contudo, que neste artigo foram destacados apenas os três primeiros níveis do modelo (nível de visualização, nível de análise e nível de dedução informal) envolvidos nas análises apresentadas.

Metodologia

Os resultados aqui apresentados foram obtidos a partir de uma investigação, de cunho qualitativo, cujo objetivo era investigar as possíveis contribuições do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), no desenvolvimento de conceitos da Geometria Espacial por um grupo de 40 estudantes do terceiro ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Município de Canoas/ RS, Brasil.

A UEA foi constituída por um conjunto de materiais didáticos e de atividades a serem desenvolvidos em sala de aula, com recurso às tecnologias digitais, entre outros. As mencionadas atividades foram organizadas em três eixos: Geometria de Posição, abrangendo relações de posição entre retas, planos e planos e retas; Noções primitivas e Conhecimentos Básicos, retomando conceitos trabalhados ao longo da Educação Básica, como elementos, classificação, nomenclatura de figura e sólidos geométricos; e Poliedros, envolvendo Prismas e Pirâmides.

A investigação ocorreu em 12 encontros de 50 minutos cada, em sala de aula com os estudantes. A professora pesquisadora assumiu a turma neste período, abordando temáticas referente à Geometria Espacial, conforme já estava estabelecido no plano de ensino pela escola.

Os resultados apresentados neste artigo, são oriundos de uma atividade proposta no eixo Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos da Geometria, apresentada no quadro da Figura 2. Os estudantes realizaram a atividade organizados em grupos, entretanto, ao longo da UEA foram propostas atividades as quais foram realizadas tanto em grupo como individualmente.

1. Com auxílio do *software* GeoGebra construa sólidos geométricos, e indique:
   - características observadas no sólido construído;
   - se é convexo ou não convexo;
   - sua nomenclatura, quando possível.

   Utilize-se das ferramentas disponibilizadas pelo *software* para representar seu objeto geométrico.

Figura 2. Atividade do eixo Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos

Após as construções realizadas no *software*, seguido de uma discussão no grande grupo sobre as características dos diferentes sólidos construídos, foi solicitado aos estudantes que dessem continuidade ao que a atividade solicitava. No que segue, serão apresentadas resultados e as análises provenientes da realização da atividade, tomando como referência aspectos do modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele tal como destacado no quadro da Figura 2.

Análise da atividade realizada no *Software* GeoGebra

A utilização do GeoGebra permitiu aos alunos realizarem construções geométricas, que não são feitas usualmente com régua e compasso. Assim, com os recursos disponíveis foi possível lançar diferentes olhares para o mesmo objeto, propiciando experimentar, lançar hipóteses e testá-las, conjecturar, manipular os objetos buscando extrair características, propriedades e relações geométricas.

Destaca-se a construção no *software* GeoGebra realizada pelo grupo de estudantes, denominado grupo A. O grupo realizou a atividade (Figura 3) demonstrando muita habilidade e criatividade no uso do *software,* assim como conhecimento sobre o conceito envolvido.

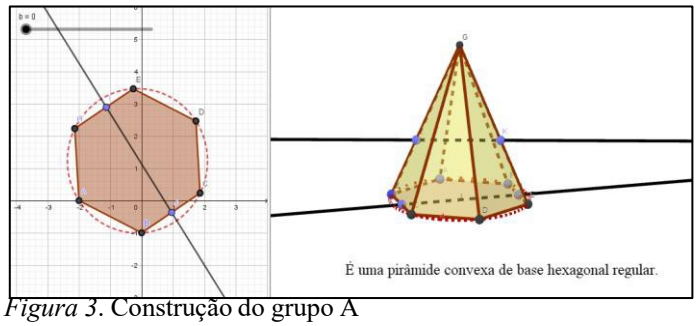


Figura 3. Construção do grupo A

O *software* GeoGebra, oportunizou com que os estudantes trabalhassem a construção, planificação, classificação, reconhecimento de elementos e propriedades. Observando a construção apresentada pelo grupo foi possível identificar que os mesmos, possuíam domínio de definições e propriedades geométricas importantes para o desenvolvimento do pensamento

geométrico, como, a construção da circunferência circunscrita ao polígono e também inscrita, constatando, assim, ser um polígono regular, bem como a construção da reta interceptando o mesmo, buscando identificar se o polígono construído era convexo, evidenciando possuir conhecimentos geométricos prévios adequados.

Destaca-se, nesta atividade, que o *software* proporcionou aos estudantes a construção do objeto em um tempo menor do que se o mesmo tivesse sido elaborado com ferramentas tradicionais (régua e compasso). Além disso, propiciou com que os estudantes realizassem conjecturas, levantassem hipóteses e questionamentos partir da observação da movimentação de suas construções efetuadas, simultaneamente, nas janelas de visualização 2D e 3D.

Ressalta-se que as potencialidades do uso do *software* foram evidenciadas ao longo do desenvolvimento da UEA, como por exemplo nas atividades apresentadas na Figura 4, as quais foram realizadas logo em seguida. Em tais atividades, além do conhecimento envolto, buscava-se identificar as estratégias dos estudantes para realização das mesmas.

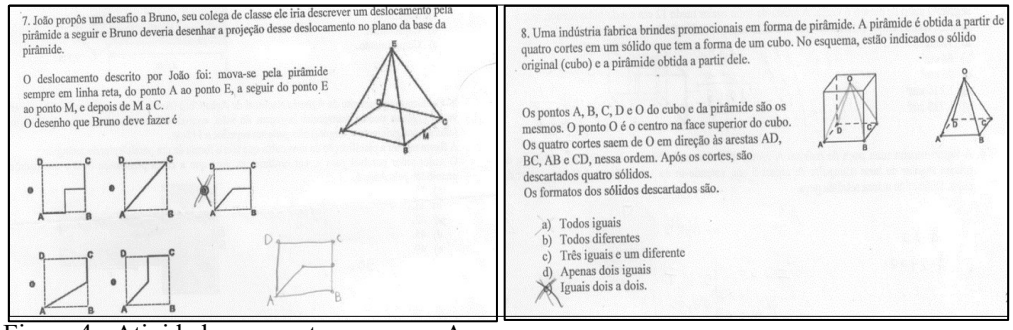


Figura 4 - Atividades propostas ao grupo A

Em ambas atividades, os estudantes optaram por representar, no *software*, as informações contidas no enunciado, para então analisar e conjecturar sobre a questão. As soluções apresentadas que envolveram a construção no *software* e sua solução justificada, apontaram para a importância dos aspectos visuais e de movimentação proporcionados pelo *software*, o que, entende-se contribuiu para a solução.

Borba e Villareal (2005) salientam que o uso de ferramentas digitais pode auxiliar na visualização da construção dos objetos, proporcionando que o estudante desenvolva o pensamento geométrico. Nesse sentido e considerando que a visualização na Geometria é de grande relevância para a aprendizagem, uma vez que, não havendo essa habilidade de criação mental a dificuldade para justificar ou validar resultados obtidos é grande, conforme destacado por Santos (2006). Considera-se que o trabalho com o *software* contribuiu significativamente para a apropriação dos conhecimentos pelos estudantes. De acordo com o modelo de van Hiele adaptado, considera-se que os estudantes transitam entre o nível de análise e o nível de dedução informal, visto que, conseguiram realizar as atividades que requeriam conhecimento de propriedade dos sólidos, assim como estabeleceram relações.

Assim como o grupo de estudantes destacado neste artigo, a turma envolvida na investigação apresentou um bom desempenho na realização das atividades no que se refere aos níveis do modelo de Van Hiele. Foi possível identificar que a turma já possuía desenvolvidas as habilidades referentes ao nível de visualização, porém, quanto ao nível de análise, foi constatado

um avanço ao longo da aplicação da unidade. Já no nível de dedução informal foi onde ocorreu o maior avanço, visto que, no início da investigação a turma não evidenciava as habilidades necessárias para o trabalho neste nível. Porém, ao longo do desenvolvimento da UEA os conceitos geométricos pertinentes foram sendo trabalhados com foco nas habilidades referentes a esse nível, o que resultam em um avanço significativo no mesmo.

Considerações Finais

A atividade tinha por objetivo analisar as contribuições do uso das tecnologias digitais no desenvolvimento da intuição, da percepção e do raciocínio geométrico, contribuindo, assim para o desenvolvimento da habilidade de visualização, com amparo nos descritores indicados no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele (nível de visualização, nível de análise e nível dedução informal), voltado à Geometria Espacial.

Destaca-se, que os estudantes articulavam muito bem no nível de visualização (nível 1),não apresentando dificuldades na identificação e representação do objeto construído no *software,* nem na atividade proposta posteriormente. Já, com relação às habilidades correspondentes aos níveis de análise (nível 2) e de dedução informal (nível 3), percebeu-se, o progresso dos estudantes do grupo A, visto que, mostraram facilidade em reconhecer características, propriedades dos objetos geométricos propostos, bem como, apropriação das definições e conceitos dos sólidos geométricos.

Agradecimentos: O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e à FULBRA – Fundação Ulbra pelo apoio para a participação do evento.

Referências

Borba, M. C.; VILLARREAL, M. V. *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. v. 39, New York: Springer, 2005.

Brasil. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular* – Documento preliminar. MEC. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <http:// http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf >. Acesso em: 27/05/2018.

Dreyfus, T. H, Nurit. Euclides deve permanecer e até ser ensinado.In: LINDIQUIST, Mary. SHULTE. Albert P. *Aprendendo e ensinando geometria*. Trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1994.p. 50-71.

Fainguelernt, E. K. *Educação Matemática: representação e construção em Geometria*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

Fanti, E. L. C.. *Utilizando o software Geogebra no ensino de certos conteúdos matemáticos*. Disponível em <http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Conferencias%20Apresentadas/C%203.pdf>. Acesso em: 18/06/2016.

Gravina, M. A; Basso, M. V. A. *Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática*. p.180, elaborado, Biblioteca Central da Universidade Federal do Rio grande do Sul. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

Gravina, M. A. *Os ambientes de geometría dinámica e o pensamento hipotético-dedutivo***.** Tese de Doutorado, Porto Alegre: UFRGS, 2001.

Giraldo, V; Caetano, P.; Mattos, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT, 06).

Hoffer, A. *Geometry is more than Proof. The Mathematics Teachears***,** vol 74, n.1, p.11-18, 1981.

Kaiber, C. T; Conceição, C. P. Software Educativo e o Ensino da Trigonometria**.** In: LEIVAS, J. C. P. Educação Matemática em Revista – RS. p. 37-50, n. 8, ano. 8, 2007

Kenski, V. M.. *Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância*. 9. ed. Campinas: Papirus, 2015

Lorente, F. M. P. *Usando a Calculadora nas aulas de Matemática***.** 2009. Disponível em < http:// http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/371-4.pdf f> Acesso em 20 de Janeiro, 2017.

Santos, C. S. *A produção Matemática e um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana Espacial.* 2006, p. 145. Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2006.

Souza, L. A. *Uma Proposta pata o Ensino da Geometria Espacial usando o GeoGebra 3D*. 2014, 79p. Mestrado Profissionalizante (Programa de Pós-Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2014.

Valente, J. A. (org.) *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas, SP:UNICAMP/NIED, 1999. 156p.

Zotto, N. D; Machado. G. M. Z; Mello. K. B; Silva. R. S. *GeoGebra 3D e quadro interativo: uma possibilidade para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio.* Anais do VI CIEM – Canoas, Ulbra, 2013. Disponível em <http:// www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/778/621> Acessado em 21/03/2016.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conocimiento geométrico en contextos escolares

Myrian Luz **Ricaldi** Echevarria
Universidad Femenina del Sagrado Corazón
Perú
myrianricaldieb@unife.pe

Resumen

El presente artículo describe los resultados de la aplicación de una prueba diagnóstica para determinar el nivel de conocimiento geométrico de dos grupos de estudiantes del segundo grado de secundaria en la ciudad de Lima. La investigación es de naturaleza cualitativa, toma elementos teóricas del modelo de Van Hiele. El objetivo del estudio fue describir las dificultades asociadas al estudio y comprensión de temas geométricos en estudiantes del nivel de educación secundaria. Los hallazgos más importantes son que los estudiantes pueden relacionar las propiedades de una figura con otras propiedades de la misma figura, pero en diferentes contextos no pueden establecer esa relación; además, no poseen el vocabulario propio al nivel que el programa de estudios que le corresponde.

Palabras clave: evaluación diagnóstica, conocimiento geométrico, modelo de Van Hiele, limitaciones del aprendizaje, educación secundaria.

Introducción

Cuando se analiza un problema didáctico es necesario hacer explícita la concepción del conocimiento que subyace a la intervención de los procesos de construcción, tal concepción enfocará la atención en aspectos del contenido matemático y tecnológico que definirán dichos procesos. En este sentido, la presente investigación pretende realizar un estudio de carácter descriptivo, desde el punto de vista socio-constructivista que describa y analice el nivel de conocimientos geométricos logrado por los estudiantes del segundo grado de secundaria.

Objetivo de la investigación

Describir las dificultades asociadas al estudio y comprensión de temas geométricos vinculados al estudio del triángulo en estudiantes del nivel de educación secundaria.

Marco Teórico

Cuando se incorpora un saber al sistema educativo como objeto de enseñanza se focaliza con una intencionalidad didáctica. Esto tiene que ver con la epistemología del conocimiento para entender la razón de ser de su incorporación al ámbito escolar. En el caso de la Geometría, se

inicia el estudio exploratorio en el libro clásico de historia de la matemática de Boyer (1996) que dice:

> La geometría euclidiana plana consiste en el estudio de las figuras del plano, incluidas las áreas y longitudes, que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones que se genera por las traslaciones y rotaciones en el plano, llamadas transformaciones rígidas o movimientos. (p. 678)

De lo anterior se podría afirmar que resulta natural reconocer que el ser humano desde su primera infancia experimenta directamente con las formas de juguetes u otros elementos. Al mismo tiempo, cuando se mueve actúa sobre su entorno tomando posesión del espacio. Además, en este proceso se orienta, analiza las formas y establece relaciones espaciales. Por lo tanto, el estudio inicial de la geometría debería estar indisolublemente relacionado con la experiencia a través de los sentidos.

Al mismo tiempo, algunos autores señalan que los docentes tienden a no enseñar contenidos geométricos, a pesar de figurar en los programas, por desconocimiento del área o por no valorar su real importancia (Báez e Iglesias, 2007). En este panorama de necesidades todavía no atendidas se considera que la geometría escolar es importante porque:

- Estimula el razonamiento y posibilita el desarrollo de habilidades como clasificar, definir, particularizar, generalizar, etc. (Pérez y Guillén, 2007).
- Desarrolla la percepción espacial y la visualización. En este proceso la visualización es esencial para lograr una adecuada percepción espacial.
- Forma parte del lenguaje cotidiano, se encuentra presente en la comunicación referida a la ubicación, el tamaño o la forma de objetos.
- Tiene importantes aplicaciones en la vida real, muchas aplicaciones cotidianas involucran una base geométrica.
- Sirve como base para la comprensión de conceptos de otras disciplinas; además, es un recurso para la visualización de diversos conceptos.

Investigaciones más recientes respaldan y justifican la necesidad de incorporar el estudio de la geometría en contextos escolares. Así, tenemos a Sharygin (2004) quien indaga sobre los motivos que justifican el estudio de la geometría en la escuela y argumenta que son varios: valor práctico, conocimiento, desarrollos cultural, espiritual, intelectual, creativo, estético, mental y moral. Particularmente Bartolini (2007) considera a las perspectivas espaciales como objeto de enseñanza por su relevancia: matemática, cultural, cognitiva, social y educativa.

Las investigaciones antes señaladas dan un marco para el estudio de la Geometría a nivel escolar. Por otro lado, es relevante precisar que en su estudio se sugiere dejar de lado el énfasis en los cálculos operativos y en los resultados meramente numéricos centrados en la medición. En contraposición, hay que incidir más en el desarrollo de las nociones geométricas y en el establecimiento de las relaciones entre éstas; en la visualización de elementos, en la representación gráfica de situaciones y figuras, para atender a sus propiedades. Al mismo tiempo, es necesario enfatizar en el uso de la justificación lógica, que considere, al mismo tiempo, el nivel de evolución del pensamiento de los estudiantes según su edad.

Por otro lado, la presente investigación considera como marco teórico de referencia, desde la perspectiva matemática, la teoría de niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. En *The Childs Thought and Geometry*, Pierre Van Hiele (1984), describe la influencia de la evolución del pensamiento geométrico en el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico. De acuerdo a esta teoría, el aprendizaje de la geometría se hace pasando por unos determinados

niveles de pensamiento y conocimiento, que no se asocian a la edad y que sólo permiten el tránsito de un nivel a otro superior cuando se ha logrado el dominio de habilidades secuenciales.

Según Van Hiele, en la base del aprendizaje de la geometría hay dos elementos importantes: el lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos. El primero implica que los niveles, y su adquisición, van muy unidos al dominio del lenguaje adecuado y, lo segundo, que sólo van a asimilar aquello que les es presentado a nivel de su razonamiento.

A continuación, se describirán las características de cada uno de los niveles.

Para el nivel 1 (Reconocimiento):

- Percepción de los objetos en su totalidad y como unidades.
- Descripción de los objetos por su aspecto físico, se diferencian o clasifican considerando semejanzas o diferencias físicas entre ellos.
- No se suelen reconocer explícitamente los elementos característicos ni las propiedades de los objetos.

Para el nivel 2 (Análisis):

- Percepción de los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no se identifican las relaciones entre ellas.
- Descripción de los objetos con listas de propiedades, que puede que no sean suficientes para caracterizar el objeto o que se incluyan más de las necesarias.
- Deducción de nuevas propiedades a partir de la experimentación y posible generalización a todos los objetos de la misma familia.
- La demostración de una propiedad se realiza mediante la comprobación en uno o en pocos casos.

Nivel 3 (Ordenación o clasificación)

- Se pueden realizar clasificaciones lógicas de los objetos considerando propiedades o relaciones ya conocidas.
- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos.
- Utilización de razonamientos deductivos informales para demostrar una propiedad. Se detecta la necesidad de justificar de manera general la veracidad de una propiedad.
- Comprensión de los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no del encadenamiento de estos pasos ni de la estructura de una demostración.
- Incapacidad para realizar una demostración completa en la que haya que encadenar varias implicaciones, y tampoco se siente su necesidad. Esto explicaría porque no se comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Nivel 4 (Deducción formal)

- Se realiza, según su necesidad, deducciones y demostraciones lógicas y formales para justificar las proposiciones planteadas.
- Comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.
- Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado.

Nivel 5 (Rigor)

- Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.
- Se puede trabajar la geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

Se debe precisar que en las investigaciones reportadas suelen considerarse los tres o cuatro primeros niveles, según el nivel educativo donde se lleven a cabo tales investigaciones.

Participantes e instrumentos

Se recogió información de dos grupos de estudiantes varones del 2do grado de secundaria, cada uno de los grupos estaba formado por 26 estudiantes y sus edades fluctuaban entre 11 y 13 años. En cuanto al tipo de muestra que se usó en el estudio esta fue intencional, lo cual permitió manejar de manera adecuada las características excepcionales; es decir, se buscó una muestra que era comprehensiva y que ponía el énfasis en los casos más representativos. Para la recolección de datos se aplicó una prueba diagnóstica, instrumento que buscó identificar las principales dificultades asociadas al estudio de temas geométricos. Para la elaboración de la prueba se consideraron elementos de la teoría de Van Hiele.

Estrategias para el análisis de los datos

Se establecieron categorías de análisis las mismas que emergieron del estudio de la información que se recogió. Durante los procesos de categorización, contrastación y teorización en función a las respuestas frecuentes de los participantes, se planteó el análisis, relación y comparación de las respuestas. Es decir, las categorías de análisis surgieron por las relaciones que se dieron entre las respuestas. En cuanto a la interpretación de los datos obtenidos estos se hicieron a la luz de los elementos de los niveles de razonamiento geométrico: visualización y reconocimiento, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal y rigor. Estas herramientas, también, se usaron para el diseño de las preguntas de la prueba diagnóstica.

Análisis y discusión de los resultados

La prueba contenía 14 ítems de tipo textual y gráfico, algunos del nivel de identificación y otras más complejas donde los estudiantes debían analizar y sintetizar los datos. En la prueba se decidió utilizar ítems de respuesta abierta, ya que éstos permiten que los estudiantes expliquen con detalle su forma de trabajo y sus justificaciones a los procedimientos aplicados; además, su aplicación fue simultánea a los dos grupos durante un tiempo de 40 minutos. Un inconveniente derivado de la aplicación de este instrumento es que para los estudiantes fue más difícil expresarse por escrito que verbalmente, por lo que se evidenció la tendencia a dar respuestas cortas. A priori se consideró que la mayoría de ellos estarían en los niveles 1 y 2, por lo que los ítems se orientaron mayoritariamente a evaluar los niveles 1, 2 y 3.

El diseño de la prueba se centró en los siguientes contenidos: nociones básicas de geometría plana y espacial, propiedades vinculadas al cálculo de áreas y perímetros de cuadrados, rectángulos y triángulos. Estos contenidos fueron seleccionados considerando los programas curriculares de los dos años previos y del presente grado escolar. A continuación, se resume las características de los ítems elaborados considerando: número de ítems, contenido geométrico de los mismos y niveles de razonamiento evaluados por cada ítem. Cada nivel es evaluado por varios ítems, además, el mayor número de preguntas corresponden a los niveles 1 y 2.

Tabla 1
Características de la prueba diagnóstica de dificultades geométricas

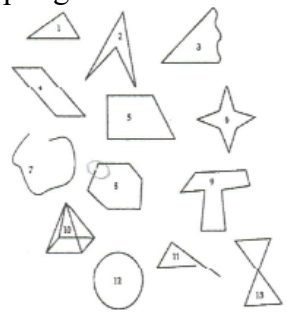
Ítem	*Niveles*			*Contenido geométrico*
	1	2	3	
P- 1	✓	✓		Clasificación de polígonos.
P- 2	✓	✓		Diagonales de un polígono.
P- 3	✓			Ubicación espacio- temporal
P- 4	✓			Polígonos y poliedros.
P- 5		✓	✓	Perímetro y área.
P- 6		✓	✓	Perímetro de un cuadrilátero.
P- 7			✓	Área de un cuadrilátero usando la noción de paralelismo.
P- 8		✓		Distancia entre puntos.
P- 9	✓			Relaciones de perpendicularidad, paralelismo y oblicuas.
P- 10	✓			Ángulos agudo, recto, obtuso y llano.
P- 11		✓	✓	Área y perímetro del triángulo equilátero y cuadrado.
P- 12	✓	✓		Ángulos alrededor de un punto.
P- 13		✓	✓	Relación entre el volumen y áreas.
P- 14		✓	✓	Área de cuadrados y triángulos.
Total	7	9	6	

Fuente: elaboración propia.

Análisis de los resultados teniendo en cuenta las categorías

A continuación, se presenta el análisis cualitativo de algunas de las respuestas:
Problema 1

Observa detenidamente cada una de las siguientes figuras. Indica aquellos que no son polígonos. Justifícalo en cada caso.

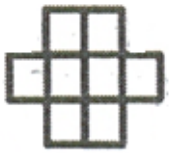


Para los estudiantes los polígonos tienen varios lados que se cierran. En sus argumentos el estudiante 1 escribió: “sólo es un polígono si sus segmentos se cierran” evidenciando con ello un nivel 1 dentro de los niveles de razonamiento geométrico, ya que usa propiedades de las figuras geométricas para describirlas en función al aspecto físico. Este mismo estudiante generó una especie de leyenda O = es un polígono, X = no es un polígono (ver Figura 1). En el caso 12, el estudiante marcó que es un polígono, esto devela que el estudiante no considera que los segmentos tienen que ser rectos. Por otro lado, de la respuesta al caso 13, este estudiante indicó que no veía un polígono porque en un vértice se cruzaban muchos segmentos.

El estudiante 2 confundió términos escribiendo: “polinomio es una figura con varios lados, cerrada y plana”. Esto tal debido a lo reciente del aprendizaje de algunas operaciones con polinomios. Esto devela una confusión semántica; sin embargo, analizando la respuesta del estudiante existe ambigüedad ya que no se especifica el carácter secuencial de los vértices los cuáles se unen con segmentos. La noción aprendida que persiste, pero que debe complementarse con lo anterior es que es una de figura cerrada. Otro estudiante al que llamaremos 3 sólo marcó de manera errónea y no justificó su respuesta. El estudiante 4, sólo escribió: “7 no está cerrado y 11 no está cerrado”. Se podría considerar que la característica cerrada es para él una justificación. Por otro lado, el estudiante 5, escribió: “sólo la 3, 7 y 11 no son polígonos porque sus lados no se cierran”. Todos los estudiantes consideraron de manera errónea a la circunferencia como un polígono, ninguno de ellos preciso la naturaleza recta de los lados como característica de los polígonos.

Problema 5

La siguiente figura formada por cuadrados idénticos tiene perímetro 42 cm. ¿Cuál es el área de la figura?



El problema evaluaba la relación que había entre el área y el perímetro de una figura compuesta de varios cuadrados. En relación a las respuestas de los estudiantes, se detalla lo siguiente: los estudiantes 1 y 2 contestaron correctamente, mostrando los cálculos y relaciones establecidas. Por otro lado, los estudiantes 3, 4 y 5 confundieron la medida de lados con perímetros y no distinguieron la diferencia entre área y perímetro. Esto refleja un análisis inadecuado de las relaciones de estas propiedades.

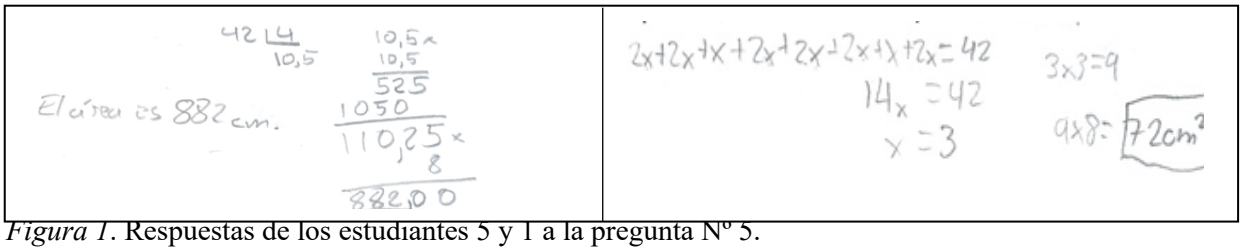
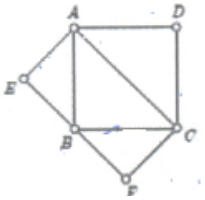


Figura 1. Respuestas de los estudiantes 5 y 1 a la pregunta Nº 5.

Problema 7

La forma de la biblioteca de Alejandría, la más rica de la antigüedad, tenía la forma indicada en la figura: Sabiendo que EF es paralelo a AC, que ABCD es un cuadrado de 40 m de lado y que AEFC es un rectángulo, calcular la medida del área ocupada por la biblioteca.



Este problema demandaba que el estudiante reconozca que algunas propiedades se deducen de otros datos, relacionen y clasifiquen figuras basándose en propiedades. Se comparte algunas de las soluciones presentadas por los estudiantes: Los estudiantes 1 y 5 colocaron en el dibujo la información del lado. Por otro lado, el estudiante 2 señaló algunas operaciones que conducen a la respuesta correcta del problema. El estudiante 3, indicó en el dibujo datos incorrectos y señaló al margen una operación aritmética. El estudiante 4 completó datos en el dibujo en forma incorrecta, además, mostró una adición que arrojaba un resultado incorrecto.

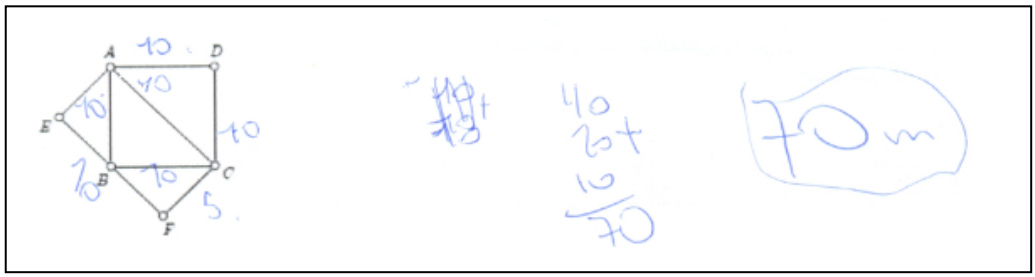
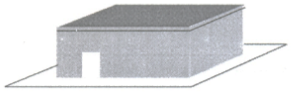


Figura 2. Respuesta del estudiante 4 a la pregunta Nº 7.

Problema 13

José pinta las paredes de un almacén que tiene 6 metros de largo, 4 de ancho y 3 de alto. ¿Qué área pintara, si solo deja de pintar la puerta cuyas medidas son de 1 metro de ancho por 2 de alto?



Los estudiantes 1 y 2 contestaron correctamente. Además, mostraron las operaciones que los llevaron a esos resultados. Además, indicaron correctamente las unidades m^2 que corresponden a las áreas. En contraparte los estudiantes 3,4 y 5 calcularon el volumen del paralelepípedo presentado y luego le restaron 2. Es decir, restaron magnitudes cuadradas de unas magnitudes cúbicas cayendo en el error de operar con magnitudes de unidades diferentes. Además, que mostraron poca comprensión del enunciado propuesto al confundir áreas con volúmenes.

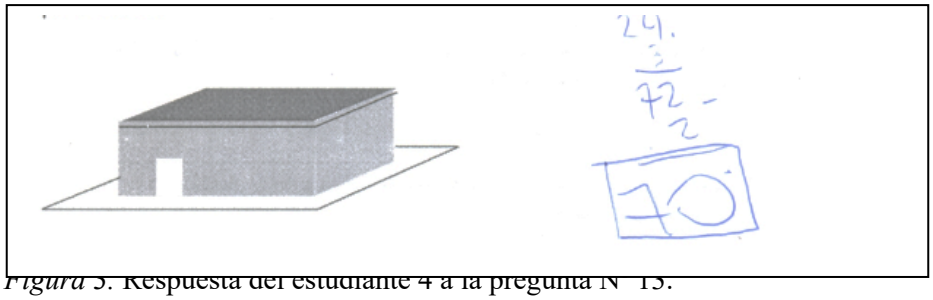


Figura 3. Respuesta del estudiante 4 a la pregunta N° 13.

Conclusiones

Los estudiantes pueden relacionar las propiedades de una figura con otras propiedades de la misma figura, pero en diferentes contextos no pueden establecer esa relación.
Además, no poseen el vocabulario propio al nivel que el programa de estudios asume que debían tener. Por otro lado, los estudiantes comprenden algunas de las interrelaciones existentes entre diversas propiedades de una figura geométrica cuando se hace que centren su atención en éstos, pero si se les presenta dos situaciones aparentemente diferentes por sí mismos no las clasifican como pertenecientes a la misma familia, por lo que les es difícil resolver problemas distintos a los propuestos. Ante esta situación se recomienda atender las restricciones de origen matemático y didáctico, sobre todo porque algunas respuestas de los estudiantes develan un limitado manejo conceptual, es importante también promover la creación de problemas reales que permitan el tránsito de lo concreto a lo abstracto y cuya conceptualización y solución se de en diferentes registros de representación. En este sentido, sería relevante proponer diferentes puntos de acceso al conocimiento, partiendo del entorno y superando la atomización de los contenidos geométricos; también es aconsejable relacionar la geometría plana con la geometría del espacio, especialmente, para ampliar algunas definiciones en un entorno más real para el estudiante.

Bibliografía y referencias

Báez, R., y Iglesias, M. (2007). Principios Didácticos a Seguir en el Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática 12 al 16*, 67-88.

Bartolini, M. (2007). Semiotic mediation: fragments from a classroom experiment on the coordination of spatial perspectives. *ZDM Mathematics Education 39*, 63-71.

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Pérez, S. y Guillén, G. (2007). Planeamiento de un proyecto de investigación sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la Geometría y su enseñanza. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, M. Gómez, J. Murillo y M.T. González (Eds.). *Investigación en Educación Matemática.* Comunicación de los grupos de investigación XI Simposio de la SEIME, Octubre, Tenerife.

Sharygin, I. (2004). On the concept of School Geometry. En J. Wang & B. Xu (Eds.). *Trends and challenges in Mathematics Education* (pp. 43-51). Shanghai: East China Normal University Press.

Van Hiele, P. M. (1984). A child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and P.M. Van Hiele* (pp. 242-252). Brooklyn: Brooklyn College.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enseñanza del pensamiento espacial y geométrico mediado por herramientas tecnológicas

Yessica Paola **Díaz** Lugo
Universidad del Cauca
Colombia
ydiazl@unicauca.edu.co
Yeny Leonor **Rosero** Rosero
Universidad del Cauca
Colombia
yrosero@unicauca.edu.co

Resumen

En la actualidad, una de las problemáticas en la enseñanza de la geometría es la falta de dinamismo en los objetos geométricos, para esto una alternativa es la implementación de herramientas tecnológicas que permitan al estudiante descubrir el espacio geométrico y dotarlo de significado; situación que requiere un cambio en las prácticas docentes. En este sentido, se diseña una secuencia didáctica seleccionando actividades mediadas por tecnologías. Los estudiantes se motivan por el uso de software y para proponer diferentes representaciones de objetos geométricos usan las nociones de geometría activa, otorgando un significado a estos objetos; por su parte los docentes se sienten atraídos por resolver situaciones problema con la mediación de software. Esta investigación se debe a una reflexión crítica sobre una búsqueda de fenómenos educativos en la Escuela Normal Superior de Popayán.

Palabras clave: herramientas computacionales, pensamiento espacial, geometría activa, secuencia didáctica, mediación tecnológica

Mediación de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de la geometría

En la actualidad, los estudiantes están inundados de herramientas tecnológicas, su cotidianidad se ve afectada de diversas maneras; sin embargo se refleja cierto desinterés e incapacidad para hacer uso de ellas en el ámbito académico. Aspecto que también se evidencia en algunos profesores que enseñan matemáticas, esta situación incide en el aprendizaje de los actuales estudiantes ya que no perciben una relación directa de las matemáticas con las tecnologías que usan diariamente, ni tampoco comprenden el significado de los objetos matemáticos que estudian.

Moreno (2015) expresa, que uno de los problemas en la enseñanza de las matemáticas son

las dificultades en la apropiación de fragmentos de conocimiento, en cómo se construye un proceso "dialógico" estable y permanente, entre estudiantes y profesores sobre el significado de los objetos matemáticos.

En consecuencia, el reto para los maestros debe ser dotar de significado a los objetos matemáticos con el apoyo de herramientas computacionales para que, según Moreno (2001) la "sinapsis matemática" (p. 82) (ensamble entre los objetos matemáticos y los recursos computacionales) tenga un sentido.

Otro aspecto del problema es cómo atraer la atención de los estudiantes en el momento de presentarles un nuevo conocimiento matemático, generando la necesidad de incursionar e interponer en el aula de clase una nueva herramienta, ocasionando la producción de un nuevo currículo impulsado por el uso de tecnologías.

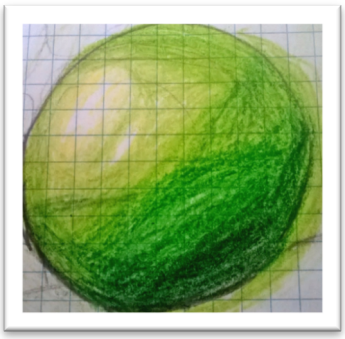
Moreno (2001) afirma que "el pensamiento matemático del estudiante queda afectado radicalmente por la presencia de la herramienta" (p. 85), el docente decide presentar un objeto digital al estudiante para ampliar su propio pensamiento y visión matemática. Ante esta situación se hace necesario diseñar estrategias didácticas que ayuden a articular el objeto matemático con las TIC (tecnologías de la información y comunicación), lo que significa cambios en la práctica docente con la introducción generalizada de las TIC, formando adecuadamente al profesorado en el aprovechamiento didáctico de estas (Bracho y Maz, 2013). Esto lleva, a formular la pregunta: ¿Cómo las herramientas tecnológicas, contribuyen al desarrollo de pensamiento espacial y geométrico en estudiantes que inician la secundaria?

Metodología

Esta investigación es cualitativa, el método es investigación acción y la técnica es la observación. La población la conforma un grupo de estudiantes de grado sexto y se indaga por problemáticas educativas existentes en el aula de clase al estudiar la esfera y los poliedros, luego se realiza una reflexión de lo descubierto en la inmersión inicial en el aula, sustentada por algunos referentes teóricos que argumentan las representaciones de los estudiantes. Con ellos, se utiliza los software: SketchUp y Poly Pro, como herramientas mediadoras del conocimiento y, para el trabajo con los docentes, en la modelación de algunos problemas matemáticos, además, se utiliza geogebra y Excel según se requiera.

Resultados

Las evidencias corresponden al trabajo realizado con: estudiantes y profesores. El análisis de los resultados con los estudiantes son divididos en tres categorías; la primera es la categoría discurso natural que interpreta las diferentes evidencias que muestran la visualización de los estudiantes del entorno junto a su lenguaje natural; Alsina (1989) menciona que "la enseñanza de la geometría puede ser caracterizada como el estudio de las experiencias espaciales" (p. 15) en consecuencia, la modulación de conocimientos e intuición geométrica lleva al estudiante a la percepción espacial, un ejemplo de esto es la figura 1, en la cual se observa un representación en la que los estudiantes ponen en manifiesto el concepto de perspectiva reproduciendo, en una superficie plana, la profundidad de la figura tridimensional, generando la identificación de propiedades y el acercamiento de un lenguaje más preciso y estructurado



E1: “puede hacer un giro de 360° grados”

E2: “la pelota tiene grosor”

Figura 1 Dibujo de uma pelota

La segunda es la categoría transición de lo bidimensional a tridimensional; se realiza la representación de figuras tridimensionales, en un espacio bidimensional y viceversa, con el objetivo de comunicar y revelar información de un objeto tridimensional partiendo de representaciones y relaciones de figuras planas (MEN, 1998), un ejemplo es la figura 2, en ella se observa la representación de un objeto tridimensional en una pantalla de video, el software utilizado permite que el estudiante transforme la figura, en un objeto dinámico y visualice el espacio tridimensional en el que fue construido observando el objeto en una sola vista

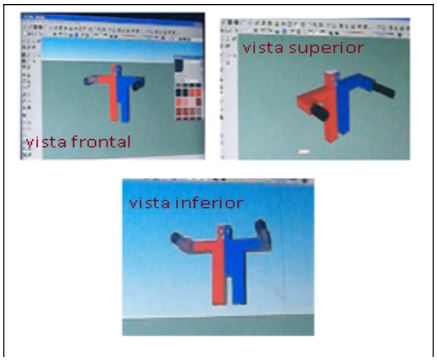


Figura 2 Vistas de un objeto tridimensional

La tercera es la categoría operatoria, aquí se estudia el conjunto de figuras geométricas tridimensionales analizadas desde el punto de vista de unidades figurales que las componen, combinadas con las modificaciones realizadas por los estudiantes, es así como “todas estas transformaciones promueven operaciones específicas y constituyen la heurística de las figuras” (Duval, 1995, p.156), dichas transformaciones se hacen evidentes en el uso de software y la concepción de geometría activa. En la figura 3 el estudiante construye su representación a partir de figuras geométricas “base” sobre las cuales se deducen operaciones, relaciones y nuevos elementos que soportan la construcción de la figura, es así como se logra captar las transformaciones correspondientes para formar en este caso cuerpos redondos como el cilindro y el cono.

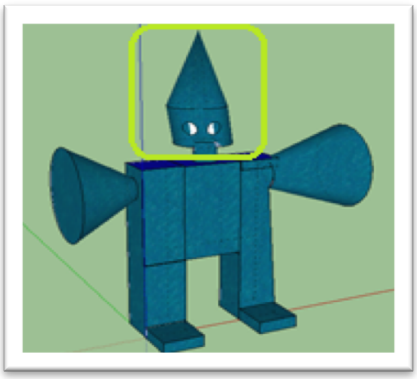


Figura 3 Representación de una figura

Por otro lado, en los docentes, el interés por la articulación de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, confiere un espacio de aprendizaje en donde se estudia algunos problemas matemáticos ((Matemático, 2018)), indicando algunos estándares básicos de competencias que se pueden alcanzar en cada uno de los ejercicios propuestos, con el fin de revelar las potencialidades de la articulación entre una herramienta tecnológica y los saberes matemáticos. Uno de los problemas es el siguiente: la figura 4 muestra un pentágono. Se dibujan cinco circunferencias con centros en A, B, C, D y E de tal manera que las circunferencias de centros consecutivos son tangentes entre sí. Las longitudes de los lados del pentágono se dan en la figura. ¿Qué punto es el centro de la circunferencia de mayor radio? A, B, C, D o E. La figura 4 muestra una representación, la visualización del problema realizado en Geogebra. Ante la necesidad de formalizar el resultado se busca un método de solución más preciso, es así como se recurre a plantear un sistema de ecuaciones lineales (figura 5 y 6).

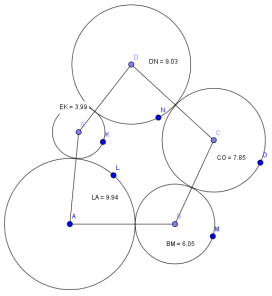


Figura 4 Modelación de un problema matemático en Geogebra

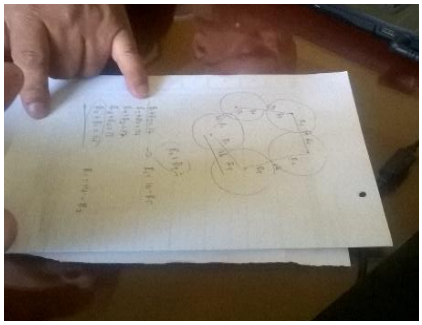


Figura 5 Docente estableciendo las ecuaciones correspondientes con ayuda de un dibujo

$$
\begin{aligned}
r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 &= 16 \\
0r_1 + r_2 + r_3 + 0r_4 + 0r_5 &= 14 \\
0r_1 + 0r_2 + r_3 + r_4 + 0r_5 &= 17 \\
0r_1 + 0r_2 + 0r_3 + r_4 + r_5 &= 13 \\
r_1 + 0r_2 + 0r_3 + 0r_4 + r_5 &= 14
\end{aligned}
$$

Figura 6 Sistema de ecuaciones para el problema

Conclusiones

La secuencia didáctica permite que el docente seleccione y diseñe actividades para generar en los estudiantes un aprendizaje significativo.

El diseño curricular es basado en la geometría activa, articulado con herramientas computacionales que actúen como mediadoras del conocimiento; lo que produce un cambio en la presentación de las matemáticas a los estudiantes

La mediación tecnológica junto con el análisis cualitativo y cuantitativo de figuras geométricas, permite dar soporte a la interpretación de objetos matemáticos modelados.

Las herramientas tecnológicas permiten realizar representaciones de un objeto matemático desde diferentes concepciones del pensamiento matemático y se constituyen en mediadoras del conocimiento.

El uso de tecnologías en el aula es un proceso que requiere superar ciertas competencias tecnológicas.

Referencias y bibliografía

Moreno Armella, L. (15 de febrero del 2017). De la geometría a la geometría dinámica.

Moreno Armella, L., Lupiañez, J. L. (2002). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En Ministerio Nacional de Educación. República de Colombia (Ed.), Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas (pp. 248-256). Bogotá, Colombia: Enlace Editores.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf.

Alsina, C., Pérez, R., Fortuny, J, (1997). ¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO. Madrid, España: EDITORIAL SINTESIS

Matemático, A. C. (24 de 10 de 2018). *Canguro Matemático*. Obtenido de http://www.canguromat.org.es/canguro2002/ikg2002.html

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Moreno Armella, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio Nacional de Educación. República de Colombia (Ed.), Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas (pp. 81-86). Bogotá, Colombia: Enlace Editores

Apéndice A
Plan de clase: Construcción de pirámide por medio de SketchUp y Poly Pro

Introducción

Se pretende dar impulso al uso e implementación de herramientas tecnológicas en el aula de clase, incentivando a la creación de un nuevo currículo que aborde conceptos geométricos, así mismo el docente debe permitir al estudiante expresar sus representaciones, en diferentes medios. Aunque, ¿se deberían utilizar una o varias herramientas tecnológicas para que el estudiante obtenga y sea dueño de un concepto geométrico?, es difícil dar un número exacto, sin embargo se puede acudir a implementos que el estudiante conoce con anterioridad por ejemplo el lápiz y papel, estos vistos como otro tipo de tecnología (Moreno, 2002). En el siguiente plan de clase se presentan diferentes actividades de abordar el concepto de pirámide.

Propósito

Lograr que los estudiantes construyan la pirámide

Objetivo

Analizar los diferentes procesos utilizados por los estudiantes para la construcción de una pirámide.

Actividades

Con el motivo de descubrir la capacidad de distinguir, caracterizar y construir una pirámide se procede a las siguientes actividades:

- Se le pide al estudiante responder en su cuaderno las siguientes preguntas relacionado con la construcción (casa) realizada anteriormente: ¿Qué figura (sólido) les causó más dificultad? ¿Por qué? Y ¿En dónde se detuvo la construcción de la figura?

Para enfatizar el concepto de construcción de los prismas, en particular de la pirámide con base cuadrada, se procede a mostrar a los estudiantes la figura 4, una pirámide de base cuadrada de Poly Pro

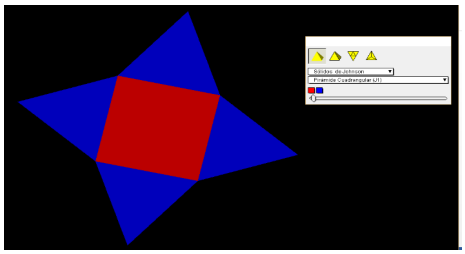


Figura 7 Pirámide triangular en Poly Pro

- Se pide al estudiante dibujar en una hoja de papel un plano de la pirámide triangular como el que se muestra en la figura 4. Pero ¿solo se podrá formar una pirámide con un cuadrado y cuatro triángulos?
- El estudiante debe realizar dos patrones de una pirámide cuadrangular, con las siguientes figuras: cuatro (4) triángulos y un (1) cuadrado, un ejemplo de esto es la figura 5. Finalizada esta actividad, se ha hecho un traslado de una figura tridimensional a un plano bidimensional.
- En otro aspecto, se presenta a los estudiantes la actividad de la figura 6, en este ítem el objetivo es ver el tronco de la pirámide en un plano bidimensional a construirla en el

software tridimensional, además distinguir que está es parte de la pirámide que los estudiantes construyeron.

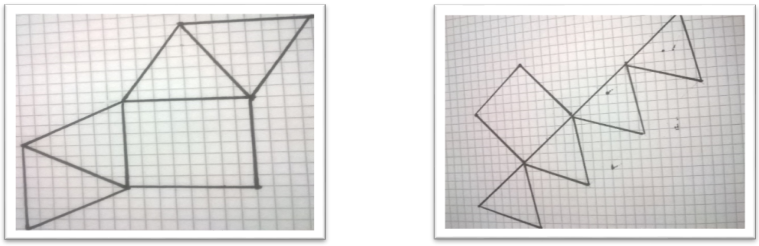


Figura 8 Patrones de pirámide de base cuadrada

En la actividad 4 se busca también, que los estudiantes logren observar la semejanza de los planos paralelos (particularidad del tronco de la pirámide).

- Ahora los estudiantes señalan cuál de las siguientes figuras puede armar la caja que construyen en el software la figura 7. Para estas actividades se destinan 8 horas.

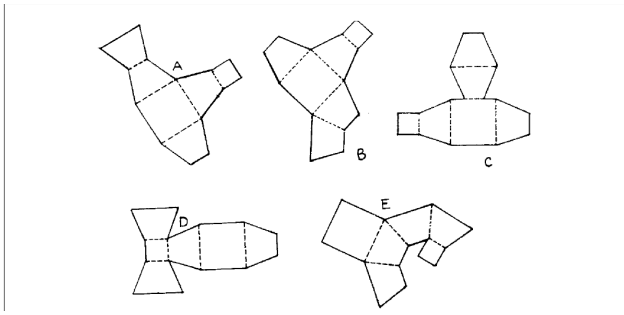


Figura 9 Ejercicio para los estudiantes

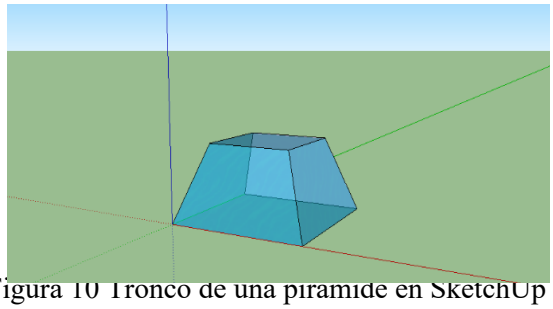


Figura 10 Tronco de una pirámide en SketchUp

Referentes teóricos para institucionalizar el saber

Según Clemens, et al (1989) "una pirámide es un poliedro en el cual todas las caras, menos una, tienen un vértice común. Ese vértice común es el *vértice* de la pirámide, y la cara que no contiene al vértice es la *base* de la pirámide."

Pero ¿Qué es un poliedro? Giesecke (2006) afirma que "los sólidos delimitados por superficies planas se llaman **poliedros**; las superficies son llamadas *caras* y si las caras son polígonos regulares iguales los sólidos se conocen como *poliedros regulares".*

Observemos que tipo de figuras están catalogadas como poliedros

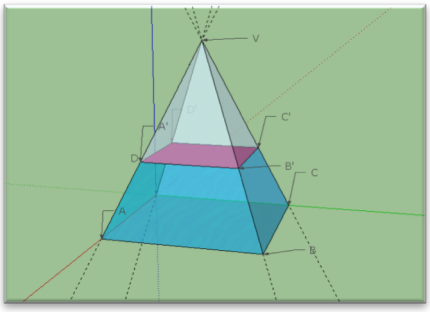


Figura 11 Pirámide en SketchUp

i. Prismas

Definición prisma: es un poliedro que satisface las siguientes condiciones: la primera hay un par de caras congruentes sobre planos paralelos (*bases*), y la segunda todas las demás caras son congruentes. (Clemens, S. R, et al, 1989), en ellos se encuentran los *paralelepípedos*

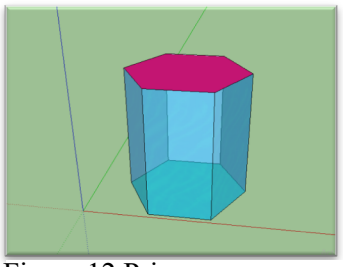


Figura 12 Prisma en SketcUp

ii. Cuerpos redondos

Definición cuerpos redondo (o solidos de revolución): es un sólido en el que por lo menos una de sus caras es una superficie curva, aquí se encuentran: *cono, cilindro, esfera*. (Rojas Álvarez, 2015)

Definición cono: es un sólido engendrado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos denominado *eje de revolución* o *eje de giro*. El otro cateto describe un círculo y es el *radio de la base* o *radio del cono.*

Definición cilindro: es un sólido engendrado por la revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados, denominado eje de revolución o eje de giro.

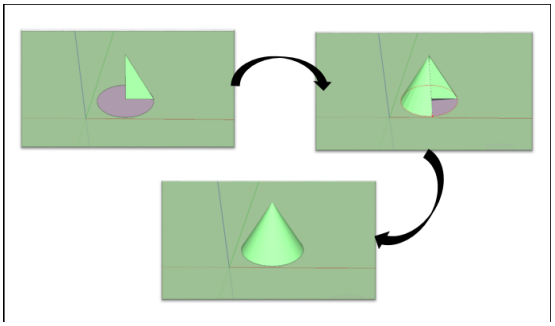


Figura 13 Construcción del cono

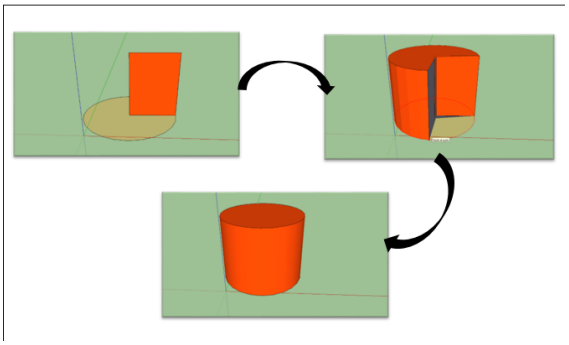


Figura 14 Construcción del cilindro

Poliedros regulares

Definición poliedros regulares: es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares con el mismo número de aristas y todos los vértices están rodeados por el mismo número de caras. Solo existen cinco poliedros regulares o solidos platónicos. (Rojas Álvarez, 2015)

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Triángulos en el GeoGebra: experiencia en el desarrollo de una unidad didáctica en geometría

Luis Eduardo **Guerra** Betancourt
ASOVEMAT REDUMATE
Venezuela
lewisedward1984@gmail.com

Resumen

Dentro del campo de la Educación Matemática (EM) se han desarrollado diversas propuestas y recursos formativos de cohorte tecnológico. En el área de Geometría, se evidencian diversos software tales como el GeoGebra y el Cabri, los cuales son de gran importancia en la ejecución de las actividades académicas del docente de matemática; por ello, se presenta la siguiente experiencia vinculada al diseño y ejecución de una unidad didáctica en el área de geometría, específicamente en el tema de triángulos. Se señalan los aspectos teóricos y prácticos que fueron tomados en cuenta para la creación de la misma dentro de un curso de Geometría y su didáctica; donde se obtuvo una alternativa didáctica en el camino a la formación inicial de profesores de Matemática en el área de Geometría, la cual fue medianamente implementada con buenos resultados y aceptación por parte de los aprendices.

Palabras clave: Geometría, Formación inicial del profesor de matemáticas, TIC.

Introducción

El uso de las nuevas tecnologías está íntimamente relacionado al conocimiento que se posee de las mismas y a las de su potencial, como tambien en los aspectos educativos y en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Las tecnologías están a la mano y se encuentran presentes en nuestros espacios educativos, pero en la mayoría de los casos no son aprovechadas o se les utiliza para la enseñanza o aprendizaje a través de modelos tradicionales (Gómez y Polania, 2008 y Rodríguez, 1999).

Son diversas las oportunidades que nos proporciona hoy en día el uso de softwares en la educación, y más, si es en asignaturas donde la deserción y desmotivación es el pan de cada día; por ejemplo, en las matemáticas, siendo que esta rama del conocimiento es una de las que más se le ha proporcionado de diversidad de software para mejorar su proceso de enseñanza, como tambien para la adquisición de conocimientos en los estudiantes. Uno de ellos es el software de geometría dinámica GeoGebra para la enseñanza de tópicos matemáticos.

Como el docente es una de las personalidades fundamentales en la planificación y ejecución de procesos de enseñanza y aprendizaje, es necesario que estos conozcan y manejen diversidad de recursos, entre ellos los tecnológicos, y así lograr su adecuación a la actualización

y vanguardia educativa, es por esto que en su proceso de formación ha de vincularse a múltiples herramientas que le permitan desarrollar sus habilidades en el campo educativo.

En relación a la disciplina matemática es indispensable el acercamiento de estos docentes desde sus etapas iniciales de formación a la multiplicidad de software educativos que se han creado para la dinamización del proceso académico en las diversas ramas de esta ciencia, pero centrado en temas específicos.

En la presente comunicación, se describe el procedimiento llevado a cabo para el diseño, desarrollo e implementación de una Unidad Didáctica sobre el tema de triángulos mediante el uso del software de Geometría Dinámica GeoGebra, específicamente en docentes de matemáticas de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagogico de Maturin "Antonio Lira Alcalá" (UPEL-IPMALA) de Venezuela.

Unidades Didácticas y su diseño e implementación en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje

Son muchos los elementos a tomar en cuenta en la constitución de una unidad didáctica para la misma se tomaron en cuenta ciertos criterios para el diseño de la presente, los mismos son propuestos por Sanmartí (2005; p. 17):

- Definición de finalidades/objetivos: formularlos desde el punto de vista del estudiante, plantearlo como un desarrollo de sus capacidades y especificar la acción que se pretende que los estudiantes apliquen.
- Selección de contenidos: qué tipo de contenidos, relaciones entre la "ciencia de los científicos" y la "ciencia escolar" o la "matemática de los matemáticos" y la "matemática que se enseña en la escuela" y la significatividad social de los contenidos a seleccionar.
- Organizar y secuenciar los contenidos: libros de texto e importancia de aprendizaje.
- Selección y secuenciación de actividades: diferenciar entre actividades de iniciación, actividades para promover la evolución de los modelos iniciales, actividades de síntesis y actividades de aplicación.
- Selección y secuenciación de actividades de evaluación: distinguir las actividades de evaluación; inicial, formativa y sumativa.
- Organización y gestión del aula.

Estos criterios son de gran importancia en el diseño de una unidad didáctica, varios se tomaron en cuenta para el diseño de la unidad didáctica que se presenta en esta investigación, los cuales fueron también organizados e integrados a las orientaciones que del análisis didáctico se sustrajeron.

Para la conformación de la unidad didáctica, también se utilizó el Análisis Didáctico (Gómez, 2007), como estrategia que dio respuesta en el proceso de diseño e implementación de los resultados en términos de procesos formativos en este ámbito de aprendizaje para la Geometría y su Didáctica (Ortiz, Iglesias y Paredes,2013), y para, de una manera más organizada, dar respuesta a la siguiente interrogante: ¿Cuáles son los elementos necesarios para el desarrollo de una unidad didáctica sobre el tema de triángulos tecnológicamente mediada por el GeoGebra?

El análisis didáctico contempla cuatro (4) componentes: análisis del contenido, análisis cognitivo, análisis de la instrucción y análisis evaluativo. Seguidamente, se describen como estos componentes se aplicaron en el diseño de la mencionada propuesta didáctica:

Análisis de contenido: fue útil para propiciar el desarrollo de conocimientos y capacidades que se pretendieron desarrollar o consolidar en los futuros profesores de Matemática, a partir de la evaluación previa de diversos textos de las matemáticas en pro de organizar y presentar el contenido más idóneo dentro de la unidad didáctica.

En el mismo se realizó la selección y alcance de los temas a ser estudiados, en el caso de esta propuesta, los contenidos geométricos que fueron tomados en cuenta, dentro del tema de triángulos, son los que surgieron de las debilidades observadas en los aprendices. La organización de dicho tema se presentó mediante un mapa conceptual, donde se enfatiz en tres de los organizadores del currículo: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (Ortiz, Iglesias y Paredes; 2013), donde se utilizo el mapa de enseñanza y aprendizaje (Orellana Chacín, 2002). Ver imagen 1.

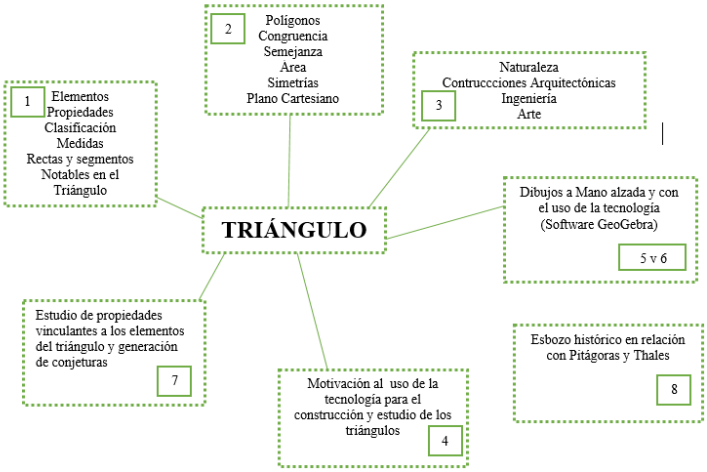


Imagen 1: *Mapa de Enseñanza Aprendizaje del Tópico Triángulo*

Análisis Cognitivo: Este análisis permitió determinar los objetivos de aprendizaje que se procuraron lograr en la unidad didáctica para el aprendizaje de los tópicos relacionados con el tema de triángulos. Se espera que los estudiantes a los cuales va dirigido esta unidad didáctica profundicen en el tema de los triángulos (estudio conceptos y propiedades métricas y generación de conjeturas a partir de problemas diversos), perimitiéndole así conocer más sobre la estructura del tema y lograr que sea capaz de interaccionar los contenidos propuestos en el software de geometría dinámica.

Análisis de la Instrucción: Es aquí donde se seleccionó, diseñó y se secuenció las tareas que se emplearon, como también se visualizaron los materiales y recursos a ser utilizados en el tema tratado hacia el aprendizaje de ese contenido geométrico. También se tomó en cuenta las potencialidades del software de geometría dinámica GeoGebra para el buen fin de los objetivos planteados.

Análisis Evaluativo: se llevó a cabo después de implementar la unidad didáctica y fue útil para recabar información acerca de en qué medida se han logrado las expectativas de aprendizaje establecidas y la funcionalidad de las tareas empleadas, siendo información necesaria para la implementación de la unidad nuevamente. En este caso se tomaron en cuenta los productos de los estudiantes y la actuación de los mismos para determinar el nivel de avance y adquisición de conocimientos en el tema tratado.

El Software de Geometría Dinámica GeoGebra

El GeoGebra, es un programa computarizado compatible con cualquier sistema operativo, el mismo ofrece tres perspectivas diferentes de cada objeto matemático; gráfico, numérico y algebraico y además, un acceso de hoja de cálculo, permitiendo apreciar los objetos matemáticos en tres representaciones diferentes: gráfica (presentación de puntos, gráficos de funciones y de objetos geométricos), algebraica (apreciación de las coordenadas de puntos, expresión de las ecuaciones y de las funciones), y la utilización de las celdas de una hoja de cálculo para las operaciones numéricas.

Este software según Zerpa (2010; p. 132) permite los siguientes usos didácticos:

- Soporte para las explicaciones del profesor.
- Soporte para la resolución de problemas por los alumnos.
- Herramienta para que el alumno realice investigaciones.
- Utilidad para la creación de actividades interactivas.
- Herramienta para realizar construcciones y observar propiedades y características.
- Realización de construcciones geométricas planas complicadas.
- Cálculo y resolución de problemas

Unidad Didáctica Triángulos con el GeoGebra

Para todo el proceso de construcción de la unidad didáctica se tomaron en cuenta las orientaciones de los cuatro análisis del proceso de análisis didáctico (Gómez y Rico, 2002) y las consideraciones de acuerdo a los criterios para la elaboración de unidades didácticas hechas por Sanmartí (2005).

Para la selección y secuenciación de los contenidos, además de tomar en cuenta los resultados de la prueba diagnóstico realizada a los estudiantes, también se consideró la revisión de fuentes documentales tales como: Moise y Downs (1986); Clemens, ODaffer y Cooney (1998); MPPE (2007, 2015); UPEL (1987, 2004a, 2004b).

Para la determinación de los objetivos, se tomaron en cuenta varios documentos (MPPE, 2007, 2015; UPEL 1987, 1996, 2005, 2011, 2004a y 2004b), los mismos son de los niveles de educación media general y educación universitaria del sistema educativo venezolano.

I. Objetivos de la Unidad Didáctica triángulos en el GeoGebra

General: Estudiar los triángulos a través del uso del software de geometría dinámica GeoGebra.
Específicos:

- Conocer las características del GeoGebra.
- Utilizar las herramientas del GeoGebra.
- Saber realizar movimientos en el plano con GeoGebra.
- Identificar los elementos de un triángulo.
- Identificar triángulos.
- Clasificar triángulos.
- Utilizando el software de geometria dinamica GeoGebra: Construir segmentos, ángulos y triangulos
- Verificar propiedades métricas de los triángulos a través del software de geometría dinámica GeoGebra.
- Evaluar mediante el uso del software de geometria dinamica GeoGebra las caracteristicas de las rectas, segmentos y puntos notables de un triángulo.

- Validar teoremas de congruencia y semejanza de triángulos a través del software de geometría dinámica GeoGebra a partir de ciertas condiciones inicales propuesta por los actores.

II. Recursos

Libro de Texto, Sotfware de Geometría Dinámica GeoGebra, Dispositivo computarizado (Tablet u Ordenador), Lápiz y Papel.

III. Duración de la Unidad Didáctica triángulos en el GeoGebra

Semanas: 3 / Total de Horas: 24
Actividades en sesiones presenciales: 3 Semanas - 18 Horas
Actividades en sesiones a distancia: 3 Semanas – 6 Horas

IV. Fundamento Matemático de la Unidad Didáctica triángulos en el GeoGebra

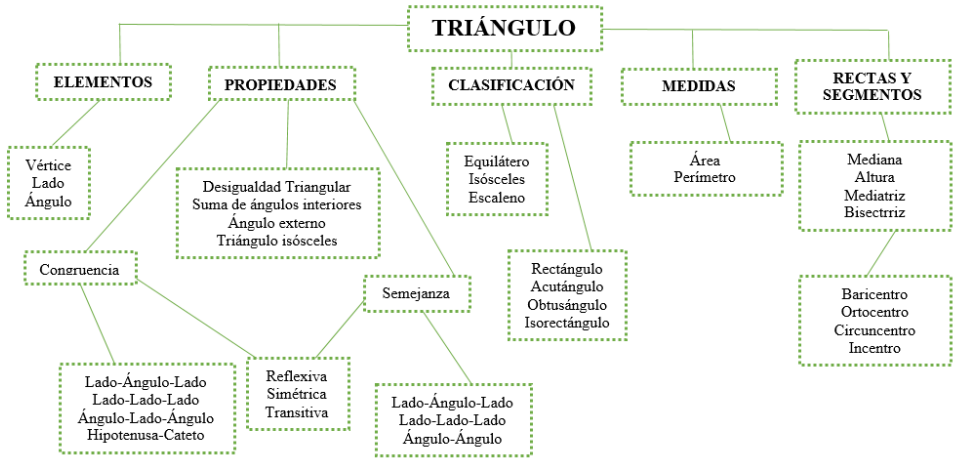


Imagen 2: Mapa Conceptual del Tópico Triángulo

V. Actividades de la Unidad Didáctica triángulos en el GeoGebra

Tabla 1

Actividades de la Unidad Didáctica triángulos en el GeoGebra

Fases	Actividades
Inducción: Conociendo al GeoGebra	- Lectura del manual del GeoGebra. - Instalación del GeoGebra en un dispositivo computarizado (Tablet u Computador) - Familiarización con el software GeoGebra
Construcción de Elementos Geométricos	- Construir: un segmento, una recta, un ángulo y un triángulo. - Construir un triángulo a partir de un ángulo agudo. - Construir un triángulo a partir de un ángulo recto. - Construir un triángulo a partir de un ángulo obtuso. - Determinar las medianas de los lados del triángulo. - Determinar las alturas de un triángulo. - Determinar las mediatrices de los lados del triángulo. - Determinar la bisectrices de los ángulos del triángulo.

Construcción puntos notables	- Determinar el baricentro de un triángulo. - Determinar el ortocentro de un triángulo. - Determinar el circuncentro de un triángulo. - Determinar el incentro de un triángulo. - Realizar análisis métricos de estos puntos con respecto a los ellementos del triángulo.
Construcción a través de los postulados de congruencia	- Construir un triángulo dado la medidas de tres lados – apreciacion de la desigualdad triangular – Criterio LLL - Construir un triángulo dado la medidas de dos lados y el ángulo comprendido – Criterio LAL - Construir un triángulo dado la medidas de dos ángulos y el lado comprendido – Criterio ALA. - Construir un triángulo dado la medidas de la hipotenusa y un cateto. - Construcción de triángulos a partir de otros criterios (AAA-LAA-LLA).
Construcción a través de los postulados de Semejanza	- Construir dos triángulos dado las medidas de dos ángulos – Criterio AA - Construir dos triángulos dado las medidas de dos lados de uno proporcionales a dos lados del otro, siendo proporcionales a razón 2:1 y el ángulo comprendido por dichos lados en ambos triángulos debe ser de igual medida – Criterio LAL. - Construir dos triángulos dado las medidas de los tres lados de uno proporcionales a los tres lados del otro, siendo proporcionales a razón 3:2. Criterio LLL

Fuente: Construccion propia.

Ejecución de la unidad didáctica

Los estudiantes a los cuáles se les aplicó la unidad didáctica sin integrantes del curso Geometría II, asignatura ubicada en el segundo semestre del plan de estudios de la especialidad de matemáticas de la UPEL – IPMALA.

Se pudo observar gran motivación en los estudiantes en cuanto al manejo de este software en conjunto con la temática planteada. Primeramente se decidió formar grupos de 4 estudiantes para asumir la teoría que conforma la unidad didáctica (ver tabla 2):

Tabla 2

División de contenidos en la Unidad *Didáctica triángulos en el GeoGebra*

Grupo	Temática
1	Concepto de Triangulo, Elementos del Triángulo, Clasificación de triángulos, Medidas en el triángulo y Propiedades Básicas del Triángulo.
2	Rectas y Segmentos notables en un Triángulo y Puntos notables de un Triángulo.
3	Congruencia de Triángulos y Criterios de Congruencia de Triángulos.
4	Semejanza de Triángulos, Proporcionalidad, Criterios de Semejanza de Triángulos y Propiedades de la Semejanza de Triángulos.

Luego, se desarrollaron las actividades mediante el uso del GeoGebra, recurso que hizo factible y accesible la determinación de medidas, estudio de los diversos tipos de triángulos y

análisis de las propiedades de los diferentes objetos matemáticos inmersos en este tópico. Por lo accesible y lo rápido que es trabajar con el GeoGebra, se propuso una actividad extra para el tema de proporciones, que fue el de tomar una figura del entorno y comprobar sus proporciones con GeoGebra, esto fue asociado a un número característico (áureo, π, etc.).

Reflexiones

En cuanto a la utilización del recurso GeoGebra para el desarrollo de una unidad didáctica en geometría se tiene que: a) Es fácil de manejar puesto que sus instrucciones son comprensibles al público en general; b) Es indispensable la participación de un facilitador como guía en el aprendizaje del tópico de geometría; c) Interés por parte de los estudiantes en abordar las actividades de clase y las de autoaprendizaje en el área de geometría; d) Es adecuado el trabajo de congruencia de triángulos en esta herramienta ya que permite la superposición y verificación de correspondencia entre los pares de elementos correspondientes (criterios de congruencia); e) Se visualizan con facilidad las características y propiedades de los triángulos como de sus elementos; f) permite el análisis de propiedades de los diversos objetos matemáticos que ahí se construyen, en caso específico de los triángulos; g) El diseño de unidades de didácticas con la utilización del software GeoGebra mediante la teoría del análisis didáctico de Gómez y Rico (2002) permite llevar una secuencia organizada de todos los aspectos a tomar en cuenta para el desarrollo de una programación para docentes en formación, y h) La utilización de los criterios a tomar en cuenta para la conformación de unidades didácticas propuesto por Sanmartí (2005) hace viable la construcción de la misma ya que permite: la determinación de objetivos, selección y secuenciación de contenidos y la selección y secuenciación de actividades para la construcción de una forma sistemática, sobre todo en unidades didácticas que vinculan la utilización de las nuevas tecnologías, I) En relación a la vinculación de este recurso tecnológico con temas matemáticos, en opinión de los participantes, les permitió un estudio ameno e interactivo de los diversos conceptos y propiedades que en cuanto a este tema surjan, así como la visualización de variaciones que son a veces imperceptibles en un estudio con papel y lápiz.

Referencias y bibliografía

Clemens, S., ODaffer, P. y Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. México: Editorial Addison Wesley.

Gómez, M. y Polania, N. (2008). *Estilos de enseñanza y modelos pedagógicos*. Tesis de Maestría. Bogotá. Recuperado de http://repository.lasalle.edu.co/bitstream/handle/10185/1667/T85.08%20G586e.pdf.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1335.

Gómez, P. y Rico, L. (2002). Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/376

Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE). (2007). *Currículo Nacional Bolivariano*. Caracas: Autor.

Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE). (2015). *Proceso de cambio curricular de educación media*. Caracas: Autor.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Delaware: Addison – Wesley Iberoamericana, S.A.

Orellana-Chacín, M. (2002). ¿Qué enseñar de un tópico o un tema?. Enseñanza de la Matemática. 11(2), 21-41.

Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes Z. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiánez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 293 - 308). Granada: Comares.

Rodríguez, N. (1999). *Teorías y modelos de enseñanza: posibilidades y límites*. Milenio Lleida.

Sanmartí N. (2005). La unidad didáctica en el paradigma constructivista. En Couso, D., Badillo, E., Perafán, G. y Adúriz-Bravo, A. (Aut.), *Unidades didácticas en ciencias y matemáticas* (pp. 157-188). Colombia: Editorial Magisterio.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio (UPEL). (1987). Geometría I. Manual del Estudiante. Caracas: Autor.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín (UPEL). (2004a). Programa Analítico de la Asignatura de Geometría I. Maturín: Autor.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maturín (UPEL). (2004b). Programa Analítico de la Asignatura de Geometría II. Maturín: Autor.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Vicerrectorado de Docencia (UPEL). (1996). *Diseño Curricular. Documento Base*. Caracas: FEDEUPEL.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Vicerrectorado de Docencia (UPEL). (2011). *Documento Base de Currículo UPEL*. Caracas: FEDEUPEL.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Vicerrectorado de Docencia (UPEL). (2005). *Proyecto de Transformación y Modernización del Currículo para la Formación Docente de Pregrado en la UPEL*. Informe que se presenta ante el Consejo Universitario. Caracas: Autor.

Zerpa, M. (2010). Geometría analítica plana con Geogebra. *Revista Números,* 75, 131-142.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El papel de la refutación en los procesos de argumentación. Una aproximación desde el estudio de las propiedades de los triángulos

Sara Marcela **Henao**
Universidad Icesi
Colombia
saramarcelahenao@gmail.com

Resumen

En esta comunicación se presenta un estudio sobre los argumentos *formales e informales* realizados por estudiantes de quinto de primaria cuando trabajan con actividades que implican analizar algunas propiedades de los triángulos. El objetivo de este estudio fue discutir el papel que cumple la refutación en el proceso de la argumentación *colectiva* cuando las aserciones construidas de manera individual no son válidas. Los resultados obtenidos muestran que la *refutación* ocupa un papel fundamental en la construcción de argumentos colectivos válidos, no solo en estudiantes de educación superior, sino en estudiantes de niveles escolares básicos.

Palabras clave: argumentos formales, argumentos informales, refutación, argumentos colectivos, argumentos.

Introducción

Este trabajo presenta un estudio sobre las refutaciones realizadas por estudiantes de quinto de primaria en la construcción *de argumentos informales* y *formale*s al trabajar con algunas propiedades de los triángulos. Con el propósito de esquematizar los argumentos se adopta el esquema de Toulmin (1958), puesto que el objetivo es analizar el papel que cumple la *refutación* dentro proceso de argumentación colectiva, en particular en aquellos argumentos donde la aserción no es válida. De igual modo, las categorizaciones de *razonamiento, argumentación y argumento* se retoman de Toulmin, Rieke, y Janik (1978) y se asume la categorización de *argumento formal e informal* presentada por Viholainen (2008).

En correspondencia con el objetivo de la propuesta se adaptó el enfoque de estudio cualitativo, particularmente un *estudio de caso descriptivo*, el cual permite analizar en profundidad los fenómenos educativos (Córdoba, 2011). En este sentido, la investigación se realizó en tres momentos, el primero la puesta en escena de la actividad constituida por cuatro tareas, seguidamente la discusión en la que se evidencian las refutaciones, y finalmente los análisis de los datos.

En este estudio mostramos que las *refutaciones* no solo juegan un papel importante en los procesos argumentativo de los matemáticos (Inglis, Mejia, & Simpson, 2007), sino también en la

construcción de argumentos colectivos en estudiantes de quinto de primaria.

Contextualización y formulación del problema

Desde hace algunos años el estudio de los argumentos matemáticos producidos por los estudiantes se ha convertido en un tema de interés para investigadores en el campo de la Educación Matemática (Inglis, Mejia, & Simpson, 2007). En particular el modelo de Toulmin (1958) se ha adaptado para analizar y estructurar los diversos argumentos que surgen en las clases de matemáticas. Sin embargo, desde Krummheuer (1995) se usa una versión reducida del esquema original, que omite los respaldos, los cualificadores modales y la refutación, argumentando que estos elementos son irrelevantes para los argumentos matemáticos (Inglis et al., 2007). De igual modo otros investigadores (Knipping, 2003; Mariotti, 2006) han adaptado esta postura centrada en que un argumento matemático consta de tres elementos, datos, garantías y conclusión.

De otra parte, investigadores como Inglis et al. (2007) señalan que es necesario involucrar todos los elementos del esquema argumentativo de Toulmin, particularmente los cualificadores modales y la refutación ocupan un papel importante en la categorización de tipos de garantías que los matemáticos utilizan. Reid, Knipping y Crosby (2008) ponen de manifiesto que las refutaciones que emergen en los procesos argumentativos determinan la lógica de las prácticas de enseñanza, en otras palabras, las refutaciones dejan entrever modelos de enseñanza que se privilegian en la escuela. De esta manera surge un interés por estudiar el papel de la refutación en la validación de *argumentos formales e informales* de estudiantes de quinto de primaria. Dado que diversas investigaciones se han centrado en el análisis de los argumentos sin tener presente todo el esquema de Toulmin, y más aún los elementos como *la refutación* o los *cualificadores* han cobrado sentido en las propuestas para el estudio de la argumentación de los matemáticos expertos y el análisis de la lógica de la práctica, pero pocos estudios centrados en el papel de la *refutación* en estudiantes con escasa experimentación en el campo matemático. De este modo surge la pregunta objeto de investigación.

¿Qué papel cumple la refutación en la validación de los argumentos formales e informales de estudiantes de quinto de primaria?

El enfoque por competencias que actualmente rige los modelos de enseñanza en México deja entrever que es necesario formar ciudadanos críticos frente a las problemáticas sociales, lo cual implica la promoción de espacios en donde se comuniquen ideas matemáticas tanto verbales como escritas, se verifiquen, se validen y se negocien en espacio de socialización. De aquí la importancia de la elaboración de este estudio.

Algunos referentes conceptuales

En este apartado se presenta algunos referentes teóricos que sustentan la propuesta de investigación, en particular se expone lo plantado por Toulmin (1958) en la teoría de la argumentación, y la categorización de *argumentos informales* y *formales* propuesta por Viholainen (2008). A partir de estos referentes teóricos se enmarca la manera en que se realizarán los análisis.

Toulmin (1958) propone una vía para estudiar la estructura de un argumento y su contenido semántico, alejándose de los enfoques tradicionales centrados en la lógica formal deductiva en la que no es posible estudiar el campo de la razón práctica. Desde la perspectiva Toulmin (1958), la *argumentación* es la actividad de plantear aserciones, desafiarlas, apoyarlas con razones, criticar esas razones, y refutar esas críticas. Por su parte, el *razonamiento* se refiere a la actividad central de presentar las razones en apoyo a una aserción, con el objeto de mostrar

como esas razones tienen éxito al darle fuerza a la aserción (Toulmin, et. al 1978). Ahora bien, un argumento según Toulmin (secuencia de proposiciones lógicas que requieren el uso de razonamiento) puede esquematizase mediante 6 elementos: las razones, las garantías, los respaldos, la pretensión, los cualificadores modales y las refutaciones.

La pretensión (claim) es el punto de partida y llegada de la argumentación, al comienzo un proponente plantea un problema frente a otro u otros oponentes, quienes cuestionan de alguna forma la pretensión (Gonzales & Arévalo, 2015), en este caso el proponente deberá dar razones (grounds) relevantes y suficientes para apoyar la pretensión inicial. Estas razones no son teorías generales, sino hechos específicos de la situación objeto de discusión. Ahora bien, el oponente puede exigir al proponente justificar la transición entre las razones y la pretensión, para ello, deberá hacer uso de los enunciados generales que autorizan esta transición, las garantías (warrant) del argumento. Estas garantías se caracterizan por ser enunciados generales que posibilitan la conexión entre las razones y la conclusión (pretensión), apelando a reglas, definiciones y analogías. En cualquier caso, las garantías no se sustentan en hechos sino en reglas que permiten el paso de un enunciado a otro. Sin embargo, en ocasiones las garantías no son siempre suficientes para apoyar el argumento, en este caso, el proponente deberá mostrar que las garantías son válidas, relevantes y superior a cualquier otra cosa, sobre todo cuando existen diversos caminos para pasar de las razones a la pretensión. Para esto, el proponente deberá presentar el campo general de información o respaldos (backing) fundamentado en enunciados categóricos de hechos, es decir las teorías generales, creencias y las estrategias que apoyan a las garantías son respaldos que justifican porque la pretensión es aceptada. El proponente califica (apoya) la pretensión con cierto grado de confianza mediante cualificadores modales (qualifiers), algunos de estos son: presumiblemente, con toda probabilidad, plausiblemente, según parece. En algunos casos, los argumentos pueden ser cuestionados por el oponente cuando las garantías presentadas por el proponente dan lugar a una refutación (rebuttals) en la que la conclusión no se cumple en ciertas condiciones, o las garantías no conducen a una pretensión válida. Estas refutaciones debilitan de cierto modo el argumento, obligando al proponente a transformar sus garantías y su esquema argumentativo. A modo de síntesis se presenta el modelo de Toulmin (1958) para el análisis argumentativo.

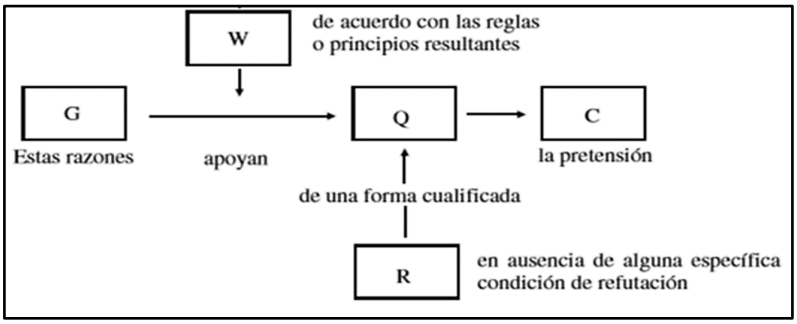


Figura 1: elementos del argumento en el esquema argumentativo de Toulmin (1958)

De otra parte, las garantías determinan según Viholainen (2008) el tipo de argumento que un proponente presenta, en particular se puede distinguir entre un *argumento formal e informal*. Los primeros se vinculan con el hecho de que las garantías están exclusivamente sustentadas en elementos del sistema formal axiomático de las matemáticas. Es decir, un argumento es *formal* si muestra que la conclusión es consecuencia de definiciones, axiomas y teoremas que provienen de los datos. Ahora bien, un argumento es *informal* si las garantías están sustentadas en interpretaciones informales de conceptos o situaciones, es decir interpretaciones visuales o físicas.

Metodología y Participantes

Con el propósito de estudiar el papel que juega la *refutación* en la validación de *argumentos formales e informales* de los estudiantes de quinto de primaria se adaptó un enfoque de investigación *cualitativa*. Martínez (2006) señala que una investigación *cualitativa* posibilita el estudio de la naturaleza de fenómenos que suceden en la clase de matemáticas, y permite la explicación descriptiva de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro de dichos fenómenos. De aquí la importancia de adoptar esta postura.

Por su parte, Córdoba (2011) señala que los métodos de investigación *cualitativa* son los que mejor se ajustan para el estudio de los fenómenos educativos, ya que favorecen la exploración del contexto a estudiar, logrando descripciones detalladas del fenómeno. De esta manera, y en correspondencia con los intereses de la propuesta, se adopta un enfoque cualitativo de investigación, donde el método de *estudio de caso descriptivo* se presenta como el más apropiado. Pues bajo esta metodología es posible dar cuenta de cómo y por qué se presentan un fenómeno determinado en la escuela, favoreciendo de este modo un estudio detallado y profundo alrededor del fenómeno objeto de estudio, además permite establecer generalizaciones para una comunidad particular.

Para el caso de este estudio los participantes fueron 4 estudiantes de quinto de primaria (10 años de edad) de una escuela privada de México. En un primer momento los estudiantes resolvieron de manera individual la actividad que contaba con 4 tareas asociadas al estudio de las propiedades de los triángulos. Seguidamente se discutió de manera grupal cada una de las respuestas, fue en esta fase en donde se evidenciaron las *refutaciones* realizadas por cada participante. En un tercer momento se analizaron las producciones de los estudiantes tanto escritas como las verbales que fueron obtenías de las grabaciones, este análisis se elaboró mediante unas categorías que permitieron evidenciar el papel de las refutaciones en la validación de *argumentos informales* y *formales*. Finalmente, se elaboraron las conclusiones entorno a los resultados.

A continuación, se presenta la actividad.

Actividad: explorando los triángulos

Responde las siguientes preguntas

1. ¿Será posible dibujar un triángulo rectángulo equilátero?

De ser posible, describe las condiciones que debe cumplir este tipo triángulos.

Presenta un ejemplo de este tipo de triángulos

2. ¿Será posible dibujar un triángulo acutángulo isósceles?

De ser posible, describe las condiciones que debe cumplir este tipo triángulos

Presenta un ejemplo de este tipo de triángulos

3. ¿Será posible dibujar un triángulo obtusángulo isósceles?

De ser posible, describe las condiciones que debe cumplir este tipo triángulos.

Presenta un ejemplo de este tipo de triángulos

4. ¿Será posible dibujar un triángulo obtusángulo equilátero?

De ser posible, describe las condiciones que debe cumplir este tipo triángulos

Presenta un ejemplo de este tipo de triángulos.

Análisis de los datos

En este apartado se presenta algunos momentos de discusión en los que surgen las *refutaciones* durante la comunicación de los *argumentos formales e informales* de los participantes. A partir del análisis de los datos se evidencian dos papeles fundamentales de la refutación en la validación de *argumentos formales e informales* de los estudiantes de quinto de primaria, a saber: la refutación como medio para la identificación de errores en las garantías y la refutación como un medio para la transición entre argumentos formales e informales. Estos dos papeles se constituyen en las categorías de análisis del estudio; de este modo se logra dar respuesta a la pregunta de investigación.

En la primera categoría de análisis los errores son identificados por el oponente y posteriormente por el proponente, posibilitando de esta manera el cambio del esquema argumentativo del proponente, es decir surge una nueva aserción válida a partir de la refutación. La segunda categoría muestra la importancia de la refutación para transformar argumentos informales sustentados en representaciones visuales no válidas de un objeto matemático en aserciones válidas.

Las convenciones que utilizaremos para la transcripción de las conversaciones son E(n) para los estudiantes T para la docente, así como D par los datos, G para las garantías, R para las refutaciones y C para la aserción. De esta manera se presentan las discusiones con su respectivo esquema de Toulmin.

La refutación como medio para la identificación de errores en las garantías

A continuación, se presentan un momento de discusión en el que se puede evidenciar el papel de la refutación como medio para la identificación de errores en las garantías.

Este primer momento surge de la tarea 1 y muestra que E1 modifica la aserción a partir de la refutación realizada por E2, igualmente se pone de manifiesto que a pesar de que E1 conoce las propiedades de los triángulos las aplica de manera incorrecta.

T: ¿será posible dibujar un triángulo rectángulo equilátero?

E_1: Si es posible porque puedo poner un ángulo de 90 grados, otro de 60 grados y otro de 30 grados.

E_2: No, yo digo que no, porque el equilátero debe tener sus tres lados iguales.

T: y tu como sabes que este no tiene sus tres lados iguales

$E_{2:}$ porque todos sus ángulos deben de medir lo mismo

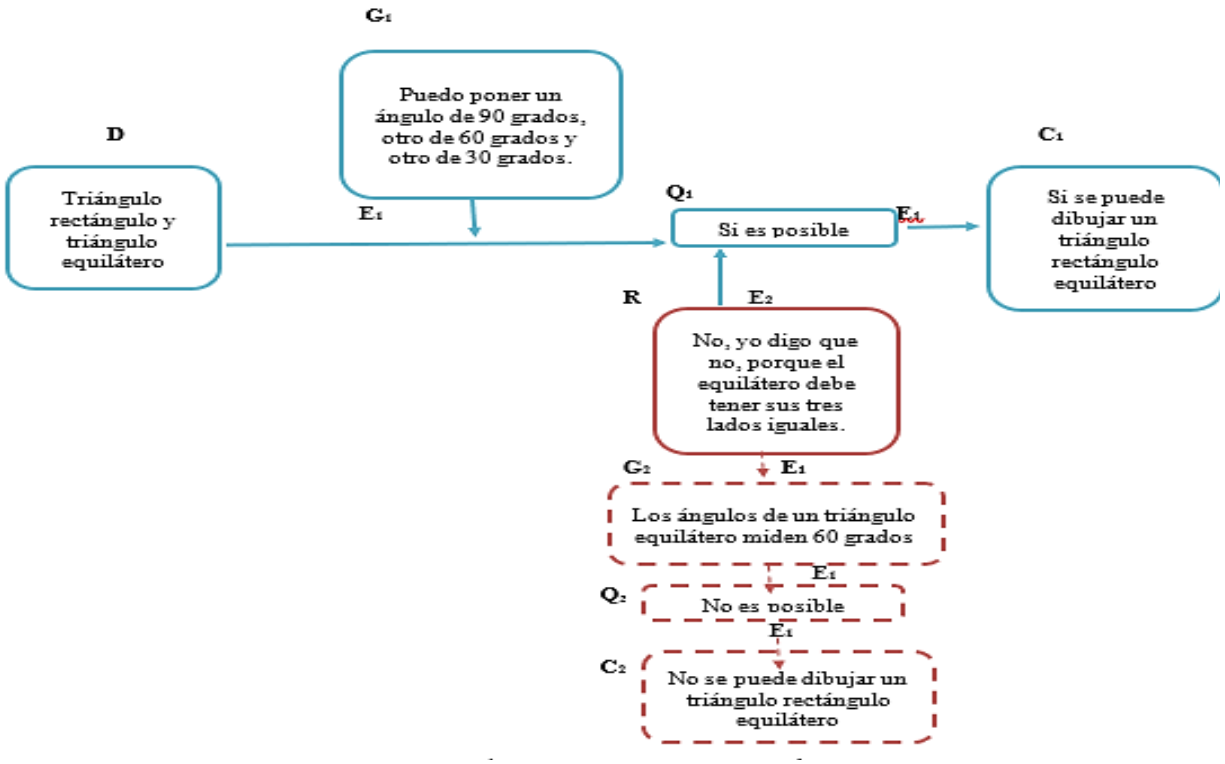
E_1: ¡Ah ya! todos sus ángulos deben de medir 60, yo no puse los tres lados iguales

En el anterior momento de discusión se pone en evidencia que las garantías utilizadas por uno de los participantes no conducían a la validez de la aserción, a pesar de ser un argumento formal, de aquí que otro participante interviene para aclarar que no estaba tomando en cuenta una de las propiedades de los triángulos equiláteros. Sin embargo, es importante aclarar que el estudiante E1 toma en cuenta que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180 grados y que un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 grados, el error fue no tener presente la propiedad de los triángulos equiláteros de que sus ángulos deben de medir todos lo mismo. Este error fue identificado por el estudiante E1 luego de la intervención de E2. De este modo, podemos concluir que las refutaciones tienen un papel importante dentro del proceso argumentativo, pues permite el reconocimiento y la identificación de los errores presentes en las

garantías.

Un aspecto importante en el argumento de E1 es que conocía que en los triángulos equiláteros la medida de cada ángulo es de 60 grados, de aquí que en su ejemplo explicite un ángulo de 60 grados, sin embargo, obvió el hecho de que deben ser los tres ángulos de 60 grados.

A continuación, se presenta el esquema del proceso argumentativo



Esquema 1: la refutación como médio para la identificación de errores

La refutación como un medio para la transición entre argumentos informales a formales.

En el siguiente momento de discusión se evidencia el papel de la refutación en la transición de argumento informal no válido a un argumento formal válido.

Esta discusión surge en la tarea 3 y pone en evidencia que el estudiante E4 posee una representación que no es coherente con la definición de triángulo obtusángulo, de aquí que E1 presenta una refutación que posibilita el cambio en el esquema argumentativo de E4.

T: ¿será posible dibujar un triángulo obtusángulo isósceles?

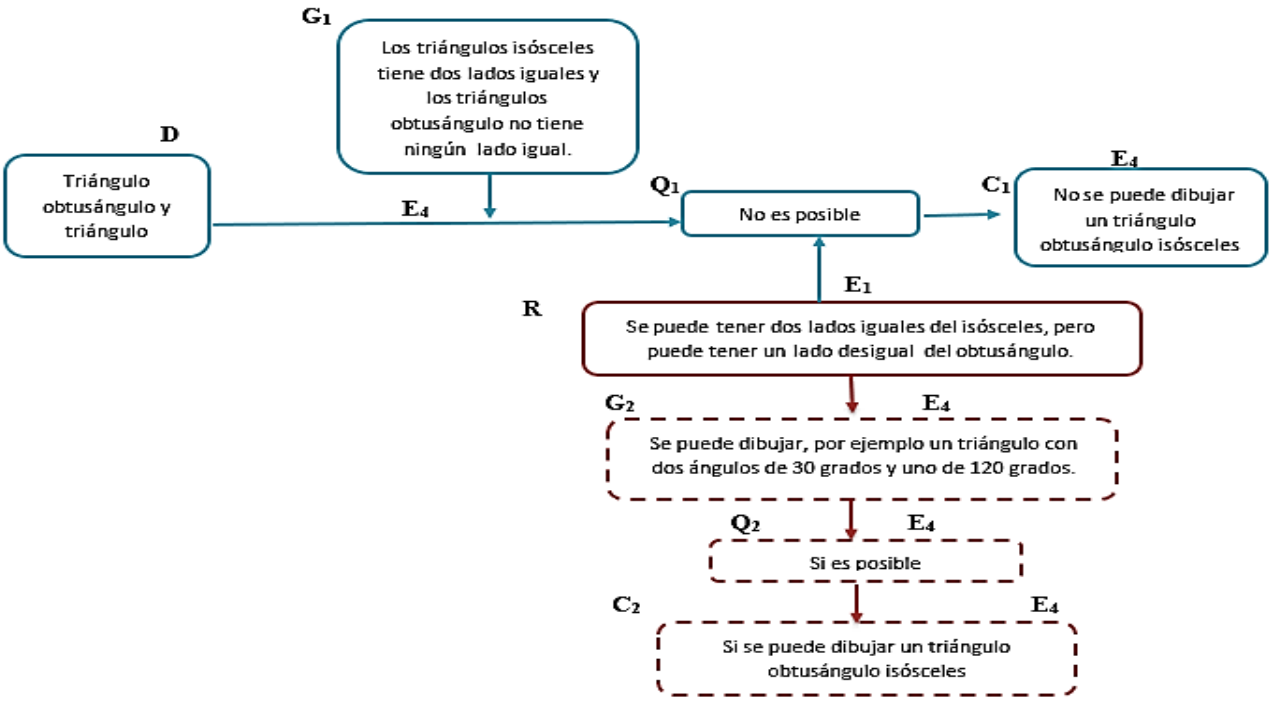
E_4: ..No se puede porque el isósceles tiene dos lados iguales y el obtusángulo no tiene ningún lado igual.

T: ¿El triángulo obtusángulo tiene todos sus lados desiguales?

E_4: Si porque tiene un lado más chiquito otro más largo

E_1: ¡Si se puede! porque si puede tener dos lados iguales del isósceles, pero puede tener un lado desigual del obtusángulo.

E_4: mmmm, por ejemplo 30 más 30 y 120 (refiriéndose a los ángulos)



Esquema 2: la refutación como medio para la transición entre argumento informal al formal

En el anterior momento de discusión se presenta un argumento informal del estudiante E4. Las garantías usadas se fundamentan en la representación visual que tiene del concepto de triángulo obtusángulo y del isósceles. El estudiante E4 representa un triángulo obtusángulo como aquel que tiene todos sus lados desiguales y el triángulo isósceles el que tiene dos lados iguales y uno desigual, de aquí que su aserción no sea válida. Ahora bien, el estudiante E1 presenta una refutación a esta aserción mediante argumentos formales que muestran la posibilidad de dibujar los triángulos obtusángulos isósceles, de esta manera se pone de manifiesto que no todos los lados de un triángulo obtusángulo son desiguales. Esta refutación permitió que el argumento informal presentado por E4 se transforme en un argumento formal en el que se pone en juego las propiedades de los triángulos obtusángulos e isósceles. Es importante señalar que en algunas situaciones los argumentos informales pueden conducir a aserciones válidas, sin embargo, en este caso la representación visual no se correspondía con la definición del triángulo obtusángulo, lo cual lleva a una aserción no válida.

Conclusiones

En esta investigación se encontró que la *refutación* ocupa un papel importante en la construcción de argumentos colectivos de estudiantes de quinto primaria. En este sentido, la *refutación* permite que los estudiantes identifiquen los diferentes errores presentes en las garantías. Estos errores para el caso de este estudio surgen por un mal uso de las propiedades matemáticas, o por tener una representación que no se corresponde con la definición de un concepto. Sin embargo, las causas de los errores pueden ser múltiples entre ellas obstáculos epistemológicos y obstáculos didácticos. Es importante mencionar que el reconocimiento de errores posibilita la construcción de nuevos conocimientos, en este estudio se evidenció que los estudiantes a partir del error elaboraban nuevos significados de los objetos matemáticos. De otra parte, la *refutación* posibilita que los estudiantes transformen sus argumentos informales no válidos por argumentos formales válidos.

Este tipo de estudios deja entrever que el uso del esquema completo de argumentación de Toulmin no solo es importante para analizar los argumentos de los matemáticos expertos, sino para el análisis de los argumentos colectivos en estudiantes de primaria, ya que la *refutación* y los cualificadores modales ocupan un papel importante en la transformación de argumentos no válidos a válidos. Además, esta investigación permite promover procesos argumentativos en el aula, logrando de esta manera favorecer el enfoque por competencia que actualmente rige la enseñanza en México.

Referencias

Córdoba, F. (2011). *La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería.* (tesis inédita de maestría). Instituto politécnico nacional: centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, México.

Gonzales, O., & Arévalo, C. (2015). Caracterización de la actividad argumentativa de estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones. *Proceedings of XIV Internamerican Conference on Mathematics Education*. Mexico.

Inglis, M., Mejia, J., Simpson, A. (2007). Modelling Mathematical Argumentation: The Importance of Qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.

Knipping, C. (2003) Argumentation structures in classroom proving situations. In: M. A. Mariotti (eds.). *Proceedings of the Third Congress of the European Society for Researchin Mathematics Education.* Bellaria, Italy, ERME.

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. In: P. Cobb and H. Bauersfeld (eds.). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale: Erlbaum, pp. 229–269

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In: A. Gutierrez and P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* Rotterdam: Sense, pp. 173–204.

Martínez, M., Da Valle, N., Bressan, A., & Zolkower, B. (2002). La relevancia de los contextos en la resolución de problemas de matemática. *Paradigma, 22* (1), 59-94.

Martínez, P. (2006). *El método de estudio de caso estrategia metodológica de la investigación científica. Pensamiento y gestión*, 20, 165-193.

Reid, D., Knipping, C., & Crosby, D. (2008). Refutations and the logic of practice. In Figueras, O., Cortina, J.L., Alatorre, S., Rojano, T., & Sepúlveda, A. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*: Vol. 4, (169-176). México: Cinvestav-UMSNH.

Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1978). Reasoning and its goals. *An introduction to reasoning* (pp 3-23). New york: earlier.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. England: Cambridge University Press.

Viholainen, A. (2008). *Prospective mathematics teachers informal and formal reasoning about the concepts of derivative and differentiability*. (Tesis inédita de maestría). University of Jyvaskyla: Faculty of Mathematics and Science, Finland.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Un referente para analizar los campos de conocimiento conceptual y procedimental del teorema de Pitágoras

Nathalia **Valderrama** Ramírez
Docente de Matemáticas – Investigador
Secretaria de Educación Bogotá - Universidad Nacional de Colombia
Colombia
nataliavalderrama@ustadistancia.edu.co

Diana Isabel **Quintero** Suica
Docente de Matematicas - investigador
Secretaria de Educación Cundinamarca - Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma_dquintero472@pedagogica.edu.co

Resumen

Al abordar el teorema de Pitágoras en diferentes momentos y trabajos de aula anteriores a este, y al procurar un marco de evaluación de las producciones de los estudiantes frente a dichos trabajos, surge la necesidad de generar un instrumento que permita analizar las producciones realizadas por ellos. El objetivo del presente documento es ilustrar la creación y constitución de dicho instrumento, el cual conforma *un referente para analizar los campos de conocimiento conceptual y procedimental del teorema de Pitágoras*, y es derivado de la integración de dos propuestas: los campos de conocimiento conceptual y procedimental expuestos en Rico (1997), y las etapas de construcción de estructuras descritas en la taxonomía SOLO (*Structure of Observed Learning Outcomes*). Toda vez que esta integración es producida, nutrimos tal referente a partir de unos indicadores de análisis sugeridos que posibilitan un análisis cualitativo de futuras producciones estudiantiles sobre este concepto matemático.

¿Cómo nacen las propuestas Teorema de Pitágoras – Proporcionalidad?

La idea impulsadora del presente documento nace tres años atrás, a partir de nuestro interés en los estudios realizados por Guacaneme (20016) acerca de la nociones de razón y proporción en la geometría euclidiana. Tales nociones, las cuales difieren de las movilizadas tradicionalmente en el aula de la educación básica y media, nos han llevado a explorar nuevos ámbitos de la educación en matemáticas, y a construir una serie de propuestas (Quintero-Suica y Valderrama, 2015-a; Quintero-Suica y Valderrama, 2015-b) que nos permitan comprender algunas de las complejidades de los objetos, y de los procesos de enseñanza y aprendizaje de

estos.

Acerca de la propuesta anterior

Para la construcción de la razón de proporcionalidad en nuestras propuestas, nos hemos auxiliado del método de antanairésis. Por medio de este método se busca determinar una medida común a dos magnitudes dadas, cuya naturaleza sea la misma, vía la sustracción reiterada de una de las magnitudes a la otra. Toda vez que se construye la razón de un par de magnitudes, es posible determinar si dos parejas de magnitudes de la misma naturaleza son proporcionales. En este caso basta con comparar la razón construida para cada pareja, verificando que sean las mismas.

Esta concepción de la razón y proporción la exploramos, con relativa facilidad en un curso de grado séptimo, al considerar como magnitudes un par de segmentos o parejas de segmentos. No fue así, al querer explorarla con magnitudes como las superficies, pues requeríamos un algoritmo que nos permitiera adicionar o sustraer cantidades de superficie, obteniendo como resultado una magnitud del mismo tipo.

Articulación con la propuesta actual

La dificultad antes señalada, se convierte en una oportunidad de trabajo al considerar al teorema de Pitágoras como el algoritmo requerido para llevar a cabo tales operaciones en el conjunto de las superficies. Por esta razón, nos interesamos en diseñar una secuencia de aprendizaje para la construcción de una concepción generalizada de este teorema.

Después de diseñada la propuesta, en la misma línea de la primera (antanirésis), se aplicó a estudiantes de grado decimo y con el fin de analizar las producciones al trabajar con tal secuencia, vimos la necesidad de configurar un marco de referencia apropiado, y por tanto una herramienta analítica, con el fin de describir cualitativamente tales producciones.

Acerca de la propuesta "Generalización del teorema de Pitágoras"

El presente artículo tiene como objetivo principal presentar y justificar el marco de referencia que se elaboró a partir de la propuesta de Campos de conocimiento de Rico (1997) integrando a este las taxonomías SOLO (*Structed Observed Learning Outcomes*) por Biggs y Collis (1982), para determinar criterios de clasificación y análisis de las producciones de los estudiantes luego de aplicar la propuesta didáctica denominada "generalización del teorema de Pitágoras" sin embargo, es necesario para el lector hacer una breve síntesis de dicha propuesta , extraída de la propuesta misma la cual se ha socializado anteriormente como parte del trabajo completo que se viene desarrollando desde hace algunos años como investigación de aula inspirada por las propuesta del profesor Edgar Guacaneme en algunos de sus artículos.

Esta propuesta se definió desde dos perspectivas i) la histórico-matemática la cual nos permitió establecer el método de suma tomando como instrumento el teorema de Pitágoras y ii) los aspectos de tipo didáctico y evaluativo que se consideran pertinentes para orientar la propuesta (objetivos, actividades, entre otros). En este sentido se presentara la primera perspectiva para contextualizar al lector.

Histórico - matemática

Guacaneme (2011) citando a Recalde (1994), establece una de las perspectivas del teorema de Pitágoras abordada en *Elementos* la cual se detalla "como [un] algoritmo de la suma

de superficies, vía la construcción de lo que hoy se reconoce como una estructura algebraica para las magnitudes geométricas" (p. 663).

Desde esta nueva perspectiva del teorema de Pitágoras se indaga sobre una nueva concepción de esta proposición. Muñoz (2012) hace un análisis minucioso de las superficies, la forma de sumarlas y la estructura algebraica que se plantea en *Elementos* y que representa la adición definida en el conjunto conformado por estas superficies. En su tesis de pregrado Muñoz (2012) presenta las tipologías de magnitudes que Euclides consideró en la geometría. Una de estas tipologías es la magnitud superficial, considerando que "una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura" (p.21). Claramente, aunque es posible aplicar esta definición a las superficies sólidas[1], solo se trabajara con la noción de superficie plana.

Luego de definir las superficies planas, Euclides "construye [en] la proposición I.47 […] un algoritmo (Teorema de Pitágoras) para sumar dos cuadrados evidenciando así que la suma de estos cuadrados da como resultado un cuadrado equivalente a los sumados" (Muñoz, 2012, p.45). Dicho algoritmo se describe indicando que "en los triángulos rectilíneos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto" (Muñoz, 2012, p.48).

En otras palabras, el método para sumar superficies consiste *grosso modo* en la disposición de dos figuras semejantes en los catetos de un triángulo rectángulo, para luego obtener el resultado de la suma de estas dos figuras por medio de la representación de la figura dispuesta en la hipotenusa de dicho triángulo que, por su puesto, será semejante también a las dos iniciales.

Si bien Euclides solo consideró a los cuadrados para ser sumados por medio del teorema de Pitágoras, el método expuesto por él se puede aplicar a un par de superficies cualesquiera, aun cuando no fuesen cuadrados. Esto es posible debido a que *la gran mayoría* de las superficies planas se pueden cuadrar[2] (construir un cuadrado con la misma cantidad de superficie que la original) de forma que se puedan operar con el teorema de Pitágoras. Se analizarán, en lo que sigue, dos ejemplos de sumas de superficies con este teorema.

Ejemplo 1: Sean el $\boxdot ABCD$ y el $\boxdot EFGH$. Para obtener la suma de la cantidad de superficie de estos dos cuadrados, primero se disponen los cuadrados en los catetos de un triángulo rectángulo tal que la medida de estos últimos coincidan con la medida de estos catetos.

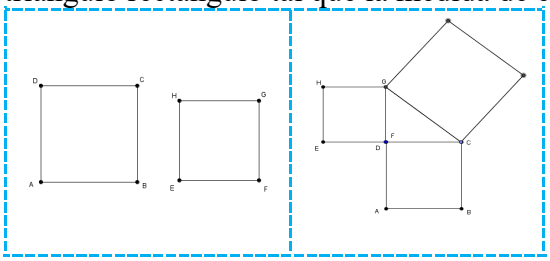


Figura 1: Suma de dos cuadrados

[1] En la sección de magnitudes superficiales (1.4), Muñoz (2012) aclara la distinción que hacían los filósofos griegos de las superficies y por tanto la posibilidad de una superficie sólida.

[2] En este punto cabe aclarar que para la Matemática griega solo era posible cuadrar algunas superficies con regla y compás (rectas y circunferencias). Sin embargo, las herramientas con las que disponemos en la actualidad (software matemático) nos permite cuadrar una cantidad adicional de superficies, como por ejemplo el círculo. Esto último es importante para la introducción de las TIC´s en la propuesta de enseñanza que aquí se presenta.

Luego, se construye a partir de la hipotenusa de ese mismo triángulo rectángulo, un cuadrado tal que la medida de su lado sea la misma que la medida de la hipotenusa. La cantidad de superficie de este cuadrado es la suma de las cantidades de las superficies dispuestas en los catetos.

Ejemplo 2: El presente ejemplo se toma de Muñoz (2012). Si se tienen dos superficies S_1 y S_2

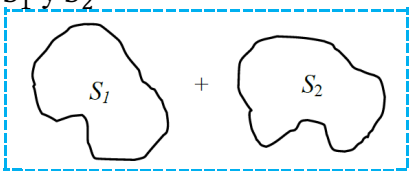


Figura 2: Superficies a sumar

Su suma se puede calcular cuadrando ambas superficies y obteniendo el cuadrado que subtiende la hipotenusa del triángulo rectángulo elegido, de forma que la cantidad de superficie de este es el resultado de la suma como se explicitó en el *Ejemplo 1*.

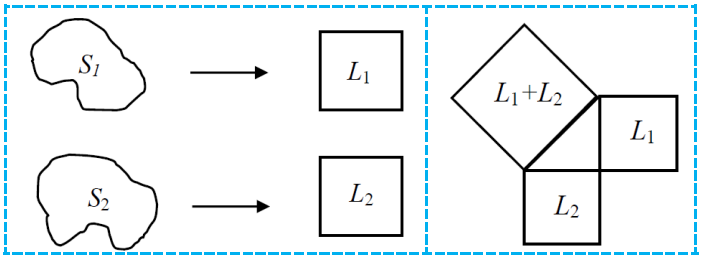


Figura 3: Suma de las superficies

Se puede observar fácilmente que utilizando el mismo método se puede también obtener la diferencia entre dos superficies. En el *Ejemplo 1*, la superficie del $\boxdot ABCD$ se puede ver como el resultado de la diferencia entre la cantidad de superficie del cuadrado que subtiende la hipotenusa y la cantidad de superficie del $\boxdot EFGH$. En otras palabras, si a la superficie del cuadrado de la hipotenusa se le resta la superficie del $\boxdot EFGH$, se obtendrá como resultado la superficie del $\boxdot ABCD$. Algo similar se puede realizar con las superficies del *Ejemplo 2*.

Por otro lado, el conjunto G de las superficies con la adición tal que

$$+: G \times G \to G$$

$$(S_1, S_2) \mapsto (S_1 + S_2)$$

Es una estructura algebraica denominada *semigrupo*. Es decir, $+$ es una operación conmutativa y asociativa en el conjunto G de las superficies (Muñoz, 2012). En otras palabras:

$$\forall S_1, S_2, S_3 \in G \left((S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3)\right)$$

$$\forall S_1, S_2 \in G \, (S_1 + S_2 = S_2 + S_1)$$

Acerca del marco de referencia de análisis de resultados de la puesta en practica

Ahora bien, este artículo pretende ilustrar la propuesta que desarrollaron las autoras al construir el marco de referencia que se usó para analizar los resultados, el cual tomó dos marcos conceptuales, los campos de conocimiento propuestos en Rico (1997) y las taxonomías SOLO de

Biggs y Collis (1982). Las autoras de la propuesta por inclinaciones didácticas eligen estos dos marcos y determinan indicadores para analizar las actuaciones y producciones de los aprendices.

En el primer marco conceptual elegido, Rico (1997) hace una organización cognitiva de los conocimientos y los clasifica en dos campos el campo conceptual y el campo procedimental. En el primero, El campo de conocimiento conceptual establece un conocimiento rico en relaciones, define que una unidad de conocimiento conceptual debe estar relacionada con otras piezas de información (unidades) para ser considerada una pieza del conocimiento conceptual (Hiebert y Lefevre. citados en Rico, 1997). En este campo se identifican los conceptos, los cuales nos permiten pensar y según lo concretos que estos sean se pueden identificar tres niveles: i) los **hechos** son unidades de información para registrar acontecimientos, *ii*) los **conceptos**, los cuales describen relaciones entre un conjunto de hechos y poseen una representación simbólica y, *iii*) las **estructuras conceptuales**, que relacionan conceptos y permiten generar unos de orden superior.

En el segundo campo, el procedimental se establece las formas de ejecutar una tarea a partir de algoritmos, reglas o procedimientos que son secuenciales y organizados linealmente (Hiebert y Lefevre. citados en Rico, 1997). Este conocimiento establece también tres niveles

i) Las **destrezas** las cuales procesan hechos o transforman expresiones simbólicas en otras a partir de una secuencia de reglas y manipulación de símbolos, *ii*) los **razonamientos**, que establecen relaciones de inferencia entre los conceptos y constituyen relaciones entre estos y, *iii*) las **estrategias**, que operan dentro de una estructura conceptual y suponen diferentes tipos de procedimientos a partir de las relaciones y conceptos implicados.

El segundo marco conceptual elegido para el marco de referencia tomado para el análisis son las taxonomías de SOLO (*Structed Observed Learning Outcomes*) Biggs y Collis (1982), estas buscan analizar y describir el nivel de comprensión y razonamiento de un aprendiz cuando se enfrenta a un aprendizaje especifico a través de cinco etapas o niveles que incrementan su complejidad asi: i) **Pre-estructural,** en este nivel se adquieren conceptos e información que no se encuentra relacionada entre sí, que no tiene organización o sentido, ii) **Uni-estructural,** aquí se realizan conexiones simples y obvias, pero la información no adquiere mayor significado respecto a la etapa anterior, iii) **Multi-estructural,** se deben realizar un número considerable de conexiones pero la relación entre ellas aún no se identifica y por lo tanto no se adquiere un sentido global de estas, iv) **Relacional,** en esta se puede apreciar el significado de las partes en relación con el todo y v) **Abstracta,** aquí ya se realizan conexiones no solo entre los objetos dados sino con otros elementos conocidos, generalizando y transfiriendo los principios establecidos en el nuevo conocimiento a algunas otras instancias. Esto en la propuesta y secuencia didáctica no represento de ningún modo indicadores de aprendizaje u objetivos de aprendizaje, por lo tanto no se planifico esperando que el aprendiz alcanzara el ultimo nivel, simplemente represento junto con los campos de conocimiento la estrategia de análisis.

¿Cómo se integran los dos marcos conceptuales?

En este sentido las etapas de la taxonomía SOLO se integran en el nivel de razonamiento del campo de conocimiento procedimental, es decir que el marco conceptual de Rico se toma como eje principal para el marco de referencia y las taxonomías son una integración en uno de los niveles de uno de los campos. Esta integración se logra luego del análisis de las pretensiones del nivel y las taxonomías mismas. De esta forma este marco de referencia permitirá definir los niveles del aprendiz en cada campo (teniendo una extensión en el campo procedimental y específicamente en el nivel de razonamiento).

Resultados

Marco de referencia para análisis de resultados

Como se especificó anteriormente este marco se diseña a partir de dos campos de conocimiento el conceptual y procedimental, los cuales a su vez incluyen tres niveles en uno de los cuales se integran las taxonomías de SOLO. A continuación se presenta cada campo considerado en la propuesta "Generalización del teorema de Pitágoras" y descrito desde el campo de conocimiento conceptual específicamente para el concepto "Teorema de Pitágoras – polígonos" y desde el campo de conocimiento procedimental lo establece desde el hecho que conforma "Teorema de Pitágoras – cuadrados". Es posible que el lector esté interesado en usar el marco de referencia que se va a proponer para definir los criterios en toda la estructura conceptual, es decir para cada concepto allí definido o que en próximos trabajos las autoras lo presenten.

Campo del conocimiento conceptual: la figura presenta las consideraciones de cada uno de los niveles *hechos, conceptos y estructuras conceptuales.*

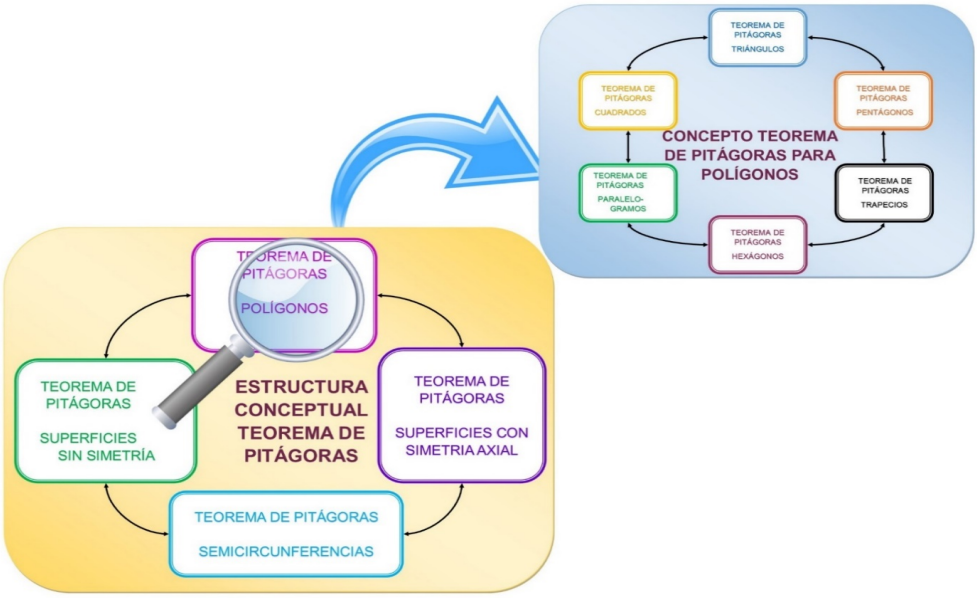


*Figura 1***.** Estructura conceptual para la generalización del **Teorema de Pitágoras**

La figura 1 ilustra una perspectiva global de la estructura conceptual que dentro del análisis se denomina "Teorema de Pitágoras" la cual se forma con los conceptos y las interrelaciones que se establecen entre estos. Cabe resaltar que aunque a dichos conceptos subyace el papel determinado desde la matemática griega, cada uno representa un tipo de superficie específica, por lo que aquí se propone un término concreto para cada uno, a saber: *Teorema de Pitágoras - Polígonos, Teorema de Pitágoras – Superficies sin simetría, Teorema de Pitágoras – Superficies con simetría axial y Teorema de Pitágoras – Semicircunferencia (estos son los* ***conceptos****).* Las autoras consideran que el reconocimiento y tratamiento de cada uno de estos conceptos le permitirán al aprendiz tener una amplia noción acerca de la proposición en estudio.

Tomando uno de los conceptos de la estructura se permite ver en detalle los hechos o unidades que lo conforman, por ejemplo en el concepto definido como "Teorema de Pitágoras – Polígonos" se contemplan las diferentes versiones del teorema de Pitágoras que se abordaron en la propuesta didáctica para superficies poligonales. Cuando se establece el teorema de Pitágoras para cuadrados se dice que este es un **hecho** que requiere ser relacionado con otros para generar dicho concepto. Así mismo, se tienen otros hechos que aluden al teorema para otros cuadriláteros (no cuadrados), los cuales se denominan: *Teorema de Pitágoras – Paralelogramo y Teorema de Pitágoras – Trapecio (estos son los **hechos** dentro de dicho concepto)*. Igualmente se tienen para otros polígonos, con lo cual surgen los hechos denominados Teorema de Pitágoras - Triángulos, Teorema de Pitágoras – Pentágonos y Teorema de Pitágoras – Hexágonos.

Cabe aclarar que en la ilustración se presenta un número finito de hechos que conforman el concepto, sin embargo, el número es infinito por a la cantidad de polígonos existentes.

Lo anterior describe un concepto de la estructura conceptual propuesto a partir de la relación entre varios hechos, el cual fue necesario abordar desde tareas de aprendizaje que posibilitaran la conceptualización y las relaciones entre la estructura. En la propuesta se abordó con mayor énfasis los hechos del concepto Teorema de Pitágoras con el fin de estudiar propiedades y relaciones geométricas que permitieran interiorizar la estructura en completitud.

Campo del conocimiento procedimental integrando SOLO en uno de sus niveles: Luego de definir las relaciones en el campo de conocimiento conceptual propuesta en la figura 1 se define el campo de conocimiento procedimental estableciendo sus tres niveles *destrezas, razonamientos y estrategias.* En este campo se debería definir los 3 niveles para cada uno de los hechos en cada concepto de la estructura sin embargo, así como en el anterior campo se seleccionó un concepto para ilustrar los hechos y relaciones entre estos que definen el concepto (lo cual deja abierta la posibilidad al lector de proponer para cualquiera de los demás conceptos definidos), en este campo se determinara solo un hecho especifico "Teorema de Pitágoras – Cuadrados". En la tabla 1 se organizaron los indicadores que clasifican las *destrezas, razonamientos (*en cada una de las etapas de SOLO) y las *estrategias.*

Tabla 5

Indicadores para la medición de destrezas, razonamientos y estrategias del hecho Teorema de Pitágoras - Cuadrados

Destrezas	Razonamientos		Estrategias	
	Etapa	Indicador	Etapa	Indicador
I1. Decide la transformación adecuada de dos superficies cuadradas en una tercera, por medio de la selección entre tres opciones	Pre-estructural	Identifica que las figuras involucradas en el trabajo son cuadrados	Abstracta I	Comprueba el Teorema de Pitágoras con superficies no cuadradas (triángulos, paralelogramos, etc)
I2. Explica las razones por la cuales descartar algunas de las opciones presentadas como superficies cuadradas posibles de representar la suma de otras dos del mismo tipo	Uni-estructural	Relaciona una determinada cantidad de superficie con la suma de dos cantidades de superficie adicionales	Relacional I	Generaliza el Teorema de Pitágoras de acuerdo con la comprobación hecha con superficies poligonales alternas

I3. Describe un método para realizar la transformación de dos superficies cuadradas en una tercera superficie del mismo tipo	Multi-estructural	Asocia las medidas de cada uno de los lados de cada cuadrado con las medidas de los lados de un triángulo rectángulo	Abstracta II	Comprueba el teorema de Pitágoras con superficies no poligonales
I4. Identifica la obtención de uno de los tres cuadrados a partir de otros dos dados, acudiendo al Teorema de Pitágoras como instrumento	Relacional	Da significado a la relación entre una terna de cuadrados y un triángulo rectángulo, reconociendo la conjunción de estos elementos como el teorema de Pitágoras	Relacional II	Generaliza el Teorema de Pitágoras de acuerdo con la comprobación hecha en superficies no poligonales.

Teniendo la tabla anterior se completa el marco de referencia que las autoras proponen para revisar las producciones de los estudiantes luego de aplicar la propuesta didáctica "Generalización del Teorema de Pitágoras" con el fin de tener un instrumento para medir los alcances de la misma.

Referencias y bibliografía

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Guacaneme, E. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas* (Tesis de maestría). Universidad del Valle: Cali, Colombia.

Guacaneme, E. (2011). *Usos de la historia de las matemáticas en la educación matemática. El caso del teorema de Pitágoras*. Quindío: ECEM.

Muñoz, D. (2012). *Análisis histórico y epistemológico de la noción de suma en Euclides* (Tesis de pregrado). Santiago de Cali, Colombia.

Quintero-Suica, D., & Valderrama, N. (2015-a). Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad. Tuxtla, Chiapas. México: CIAEM.

Quintero-Suica, D., & Valderrama, N. (2015-b). Una concepción del Teorema de Pitágoras y su enseñanza en la educación básica y media. Bogotá. Colombia: ENHEM5.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M.M. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Madrid: ice - Horsori.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Comprensión del concepto de área y perímetro de figuras planas, mediadas por las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele en estudiantes de grado tercero

Diana Luz **Arcia**[1]
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
Diana.arcia@udea.edu.co
David Fernando **Méndez** Vargas[2]
Grupo de investigación EDUMATH
Universidad de Antioquia
Colombia
davidmendezvargas@gmail.com
Pedro Vicente **Esteban** Duarte[3]
Grupo de investigación EDUMATH
Universidad de Antioquia
pedrovicente@gmail.com
Colombia

Resumen

La presente investigación se ha diseñado con el objetivo de analizar cómo los estudiantes de grado tercero comprenden el concepto de área y perímetro de figuras planas, mediadas por las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. Se enmarca en un enfoque cualitativo con un estudio de caso instrumental, mediado por los instrumentos como: la observación, la entrevista y documentos escritos, permitiendo una mejor comprensión y análisis de los datos mediante la triangulación de éstos con los referentes teóricos. Se busca que los participantes logren comprender estos conceptos mediante el desarrollo de situaciones cotidianas que indaguen por el perímetro y el área de figuras planas.

Palabras clave: área, perímetro, comprensión, Van Hiele, aprendizaje, geometría

[1] Estudiante del programa de Maestría en Educación
[2] Asesor 1 de la tesis
[3] Asesor 2 de la tesis

Introducción

La presente investigación se realiza en el marco del programa de Maestría en Educación, Línea de Formación: Educación Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Este se origina a partir de la preocupación del docente de grado tercero de la Institución Educativa San Pedro de Urabá, al observar las dificultades que presentan los estudiantes en relación a la comprensión de los conceptos de área y perímetro, los cuales confunden con facilidad y les cuesta comprender el perímetro como el contorno de la figura y el área como la medida de la superficie limitada por el contorno. San Pedro de Urabá es un municipio que basa su economía en la agricultura y ganadería, por lo que parte de la población se dedica a estos quehaceres, lo que sugiere que los niños desde temprana edad están en contacto con algún tipo de medida. Con el fin de fortalecer este conocimiento y utilizando los medios que brinda el contexto, es oportuno abordar este tipo de investigación ya que pretende analizar como los estudiantes comprenden estos conceptos.

Planteamiento del problema

En el presente apartado se describe el contexto en el cual se realiza la investigación, se aborda la problemática que se espera investigar y su justificación. También se presenta una breve historia de los conceptos de área y perímetro, al igual que un rastreo de los mismos en la legislación colombiana y algunos antecedentes de investigaciones previas del tema en cuestión. Al final del apartado se encuentra la pregunta de investigación.

Contexto de la investigación

La Institución Educativa San Pedro de Urabá se encuentra ubicada en la zona urbana del municipio de San Pedro de Urabá, cuenta con 1997 estudiantes, distribuidos en varias sedes, ofrece servicios educativos de transición, básica primaria, secundaria y media. El grado tercero, en el que se realiza la presente investigación está conformado por 37 estudiantes, los cuales se encuentran entre edades de 8 y 12 años, provenientes de familias monoparentales, en su mayoría víctimas del conflicto armado que ha vivido la zona en los últimos tiempos.

Descripción del problema

Durante los años de experiencia en básica primaria, ha llamado la atención la dificultad que presentan los estudiantes, especialmente los de grado tercero, cuando se enfrentan a situaciones en las que intervienen los conceptos de área y perímetro. Cada vez que se plantean actividades en las que hay que hallar algunas de estas medidas, los estudiantes se confunden con facilidad, por ejemplo, cuando hay que hallar el área (o el perímetro) de una figura plana, colocan es la medida del concepto contrario. Otro razonamiento repetitivo sucede cuando aún estando la figura sobre una cuadrícula, los niños no logran encontrar el área correcta de la figura, a pesar de las repetidas orientaciones que se hacen al abordar el tema. A continuación, se muestran algunas actividades desarrolladas con los estudiantes que evidencian lo dicho hasta el momento.

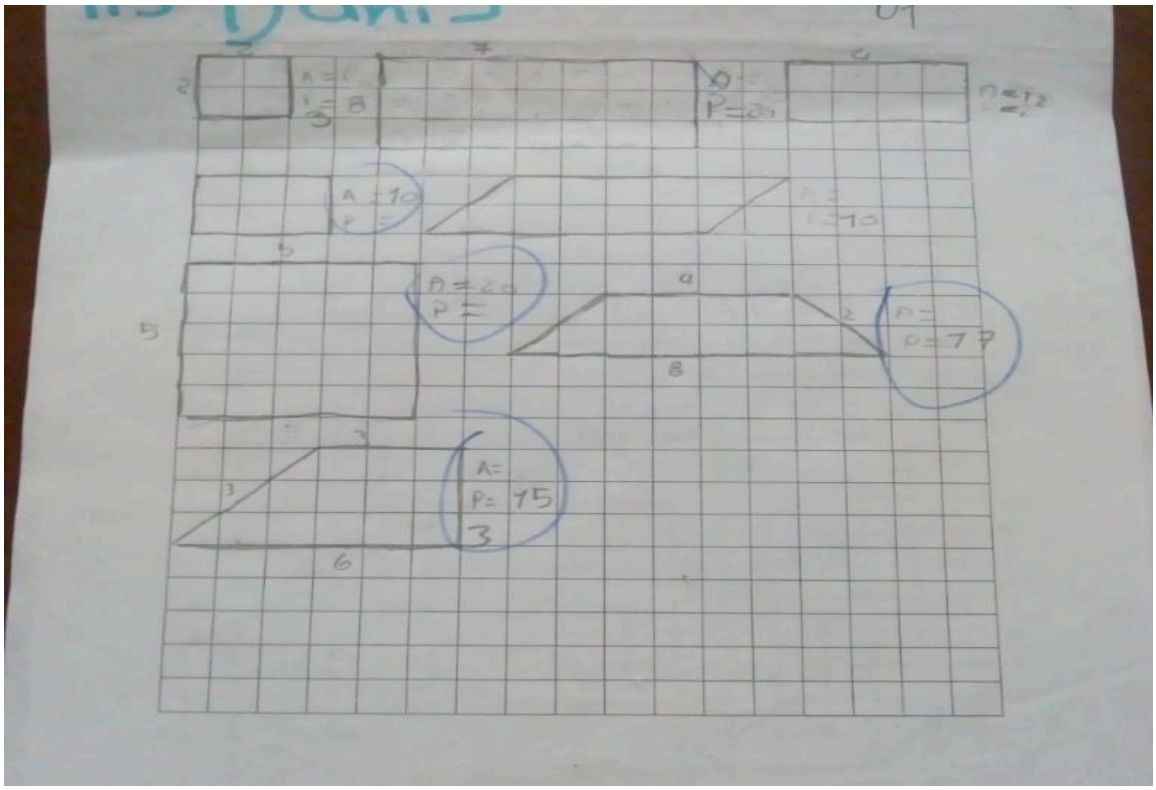


Imagen 1

Fuente: Investigación 2018

A los estudiantes se les indicó inicialmente que para hallar el perímetro se debía contar un lado de las unidades cuadradas del borde que conforman la figura (_), para hallar el área se debe tomar como unidad de medida la cuadrícula □. Como se puede observar en la *Figura 1*, para el rectángulo y el cuadrado cuyas áreas son $6u^2$ y $25u^2$, respectivamente, se evidencia que el estudiante coloca los números 10 y 20. Claramente se puede deducir, en ambos casos que el estudiante coloca el valor correspondiente al perímetro más no el del área, que es por lo que se le está preguntando. Si se profundiza un poco en el análisis se nota que, en ninguno de los ejercicios de la actividad, el estudiante coloca la unidad cuadrada correspondiente a esta medida. Esta dificultad llama la atención y motivan a plantear esto como un problema de investigación, en el que se analice la comprensión de los conceptos de área y perímetro en estudiantes de grado tercero.

Justificación

Los conceptos de área y de perímetro están ligados al diario vivir, en diversas ocasiones se encuentran situaciones como: ¿Cuál es el ancho de la sala?, ¿Cuánto mide esta mesa?, Qué parque tan grande, Qué piscina más pequeña. Para comprender mejor este tipo de cuestionamientos se requieren conocimientos de los conceptos de área y de perímetro y, por ello, es importante involucrar estrategias de enseñanza y de aprendizaje adecuadas, desde los primeros años de escolaridad. Es importante anotar que hay escenarios en los que cobran mayor importancia estos conceptos, como lo puede ser el contexto del campo, donde a diario los estudiantes se ven enfrentados a situaciones como las siguientes: ¿Cuánto mide cada uno de los límites de la finca de mi tío?, ¿Cuántas hectáreas se van a utilizar en el cultivo de maíz este año?, ¿Cuántos instrumentos de madera alargado se necesitan para cercar el terreno?, ¿Cuál es el terreno que se va a rodear para sembrar los vegetales? Escenarios como estos, son en los que viven la mayor parte de los estudiantes

con los que se desarrollará el presente proyecto. Esto pone en evidencia la necesidad que desde los primeros años de escolaridad los estudiantes empiecen a razonar adecuadamente sobre los conceptos de área y de perímetro. Por otra parte, varias de las pruebas externas que realiza el estado a los estudiantes y las que se proponen a nivel institucional tienen un componente geométrico relacionado con el área y perímetro de figuras planas. De igual forma, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), a través de los Estándares Básicos de Competencia (2006), proponen que el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes se de en contextos del mundo real y cotidiano, escolar y extraescolar, lo que pone de manifiesto, que la comprensión de los conceptos de área y perímetro requieren un acercamiento con el entorno, permitiendo a los estudiantes relacionar figuras, objetos, formas y mediciones con situaciones de su diario vivir, generando oportunidades de desarrollo eficaz de habilidades matemáticas para resolver problemas en el contexto.

Importancia de la geometría a través de la historia

Para iniciar es pertinente definir la palabra geometría, que según Hemmerling (2005). "La geometría es el estudio de las propiedades y medidas de las figuras compuestas de puntos y líneas, se deriva de las palabras griegas *geo* que significa tierra, y *metrón* que significa medir" (p. 1).

La geometría tuvo sus orígenes con los egipcios, a partir de la necesidad que tenían para medir sus terrenos y delimitar sus cultivos debido a las inundaciones causadas por el rio Nilo.

También, Hemmerling (2005), manifiesta que "la geometría fue utilizada por los egipcios y babilonios aproximadamente en los años (4000 - 3000 a. C)." (p. 1).

Ortiz (2005), plantea que: "… las civilizaciones que lograron significativos progresos matemáticos, como fue el caso de Babilonia y de Egipto, dos legendarias culturas que llegaron a poseer una geometría, una aritmética y un álgebra suficientemente avanzada para lograr significativas aplicaciones (p. 4)." Esto les permitió resolver problemas prácticos relacionados con su entorno.

Concepto de área y perímetro desde los lineamientos

El Ministerio de Educación Nacional, en aras de fortalecer los procesos académicos al interior de las instituciones ha propuesto a lo largo del tiempo lineamientos curriculares que permiten unificar criterios referentes al aprendizaje que los estudiantes deben lograr en los diferentes niveles de educación, transición, básica primaria, secundaria y media. Es así como como en el año 2006 el MEN entrega a las Instituciones Educativas del país los Estándares Básicos de Competencia (EBC), para que tanto docentes como estudiantes tengan una mejor comprensión de los conceptos que se deben desarrollar en el aula y los puedan poner en práctica, de acuerdo a las exigencias de los diferentes contextos.

El MEN (1998) plantea que:

La renovación curricular propuso acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos, desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones (p. 6).

Para fortalecer la comprensión de los conceptos geométricos de los estudiantes en su paso por la escuela, los Estándares Básicos de Competencias (2006), proponen:

el trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medidas y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras (pág. 62).

A continuación, se encuentran los EBC de la básica primaria en el área de matemáticas, que guardan relación con los conceptos de área y perímetro:

- Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales.
- Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y, en los eventos, su duración.
- Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas (MEN, 2006 p. 80).

Concepto de área

En el presente trabajo se tomará como definiciones de los conceptos abordados en el estudio los propuestos por Garrido (2005), dado que guardan un acercamiento con el contexto en el que se desenvuelve la investigación y además son citados por el MEN.

"El área de un polígono es la superficie delimitada por las rectas entre sí, y se calcula en unidades cuadras, en otras palabras, se define como el tamaño de una superficie en unidades cuadradas; en el sistema internacional la unidad de medida de longitud es el metro (m)". (Garrido, 2015, p.51).

Concepto de perímetro

"Es la suma de las medidas de todos los segmentos que forman el área de un polígono" (Garrido, 2015, p. 51).

Los conceptos antes mencionados son los que se tendrán en cuenta como objeto de estudio en la presente investigación para el razonamiento de estudiantes de grado tercero.

Antecedentes

Después de realizar una búsqueda relacionada con el objeto de interés en las diferentes bases de datos, se encontraron investigaciones y artículos publicados que enriquecen la presente investigación.

González, (2014), realizó una investigación fundamentada en la comprensión de los conceptos de área y perímetro y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café utilizando como marco conceptual la Enseñanza para la Comprensión. El objetivo general fue analizar el proceso de comprensión de los estudiantes del grado 5º de la Institución Educativa Santa Rita, municipio de Andes, departamento de Antioquia, donde los resultados mostraron que los estudiantes comprendieron los conceptos de área y perímetro a través de diversas asociaciones con el de área.

Manotas y Rojas (2008), publicaron un artículo basado en la conceptualización acerca del perímetro, área y volumen en tres estudiantes universitarios, el objetivo principal fue describir las concepciones que tienen tres alumnos universitarios acerca del perímetro, el área y el volumen, donde una de las conclusiones que se evidencio fue la confusión entre área y perímetro, un problema muy frecuente en la escuela, además el tratamiento no debe ser aritmetizado, sino que debe tomarse como referente las situaciones de la vida cotidiana para que el estudiante asimile de forma directa los conceptos pertinentes.

Selmer, Valentine, Luna, Rummel & Rye (2016), en su publicación: ¿cómo podemos utilizar mejor el espacio de nuestro jardín escolar? Explorando los conceptos de área y el perímetro en un contexto de aprendizaje autentico, este artículo tiene como propósito mostrar como una unidad de ciencias matemáticas y el uso del aprendizaje basado en el jardín, se pueden utilizar para enseñar los conceptos matemáticos de medición de área; el trabajo se realizó dividiendo el jardín en diferentes regiones teniendo en cuenta el tamaño de las plantas elegidas para cada espacio. Al analizar los criterios de la rúbrica y puntuaciones de los estudiantes se evidencio un aumento en el

porcentaje de los estudiantes que pueden utilizar con precisión una fórmula para el área, pueden determinar el perímetro, pueden utilizar una estrategia para encontrar el área correcta además se comunican de forma integral y con claridad.

Las investigaciones antes mencionadas se constituyen en referentes para el presente trabajo, dado que aportan elementos que contribuyen a mejorar la comprensión de conceptos matemáticos en niños y niñas desde los grados iniciales, algo similar se pretende con este estudio, que los estudiantes comprendan los conceptos de área y perímetro de figuras planas que se encuentran en su entorno: aula de clase, Colegio, lugar de vivienda, entre otros.

Pregunta de investigación

Esta propuesta se direcciona en la comprensión que deben tener los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa San pedro de Urabá en el componente geométrico, como es el área y perímetro de figuras planas, para lo cual se diseñó la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo comprenden los estudiantes del grado tercero los conceptos de área y perímetro de figuras planas, mediadas por las fases de aprendizajes del modelo de Van Hiele?

La anterior pregunta se sustenta desde la propia experiencia como profesora del área y desde referentes de la literatura científica, "El análisis obtenido desde la experiencia evidencia que la confusión entre el área y perímetro se muestra persistente" (Corberán, 1996, p. 22).

Objetivo general

Analizar cómo los estudiantes de grado tercero comprenden los conceptos de área y perímetro de figuras planas, mediadas por las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

Marco teórico

Después de un estudio de varios marcos teóricos con los cuales es posible abordar un trabajo investigativo de este tipo, considerando la naturaleza de la investigación y teniendo en cuenta los aportes realizados por el MEN en relación con el estudio de la geometría, se considera que para la implementación de la presente investigación es pertinente apoyarse en los fundamentos teóricos del modelo de razonamiento de Van Hiele planteado por Jaime y Gutiérrez (1990), y en especial en las fases de aprendizaje del mismo, que permiten organizar de una manera coherente el trabajo que los estudiantes deben realizar a lo largo de un proceso de aprendizaje de conceptos geométricos.

Metodología y diseño

Para orientar el desarrollo de esta propuesta se tendrá en cuenta un enfoque de tipo cualitativo, donde Hernández, Fernández y Baptista (2010) "Postulan que la "realidad" se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación" (p. 9). Es de gran importancia realizar una interpretación adecuada a los actores en el proceso, en este caso a los estudiantes de grado tercero, los cuales serán los participantes de la investigación y que van a permitir el avance de la misma. Se considera que el enfoque cualitativo es pertinente para el desarrollo de la presente investigación dado que brinda herramientas puntuales para la recolección, procesamiento de los datos y el análisis de la información.

El diseño metodológico es el Estudio de Caso Instrumental planteado por Stake (1999), es un instrumento que permite analizar la comprensión de un individuo o de un grupo de personas, donde la observación juega un papel importante y la información recopilada permite analizar cómo se desarrolla el proceso investigativo planteado. Los instrumentos para recolectar la información son: observación, entrevista y documentos escritos, a través de la recolección de informaciones con los participantes se pueden aplicar actividades de las fases de Van Hiele que conlleven a la comprensión de los conceptos de área y perímetro de figuras planas

Resultados esperados

Se espera que con la presente investigación aportar al estudio de la comprensión de los conceptos de área y de perímetro desde el grado tercero de la Básica Primaria, a partir de situaciones cotidianas que requieran la aplicabilidad de estos conceptos, donde los participantes logren resolver situaciones como; "En la casa de Andrés se necesita embaldosar la habitación de él, ésta mide tres metros de largo y tres de ancho. Andrés necesita la ayuda de los compañeros para saber cuántas baldosas de 30 centímetros de lado se necesitan para cubrir la superficie de la habitación". Además, se requiere saber su perímetro, porque su madre desea decorar a su alrededor con una cenefa.

La revisión de la literatura se constituye en referente para la presente investigación dado que aportan elementos que contribuyen a mejorar la comprensión de conceptos matemáticos en niños y niñas desde los grados iniciales, por lo que se podría concluir que:

- Los estudiantes comprendan los conceptos de área y perímetro de figuras planas que se encuentran en su entorno: aula de clase, Colegio, lugar de vivienda, entre otros
- Fortalezcan los aprendizajes relacionados con el componente geométrico, y puedan relacionarlo con las prácticas cotidianas
- Los estudiantes de grado tercero resuelvan problemas de la vida diaria relacionados con los conceptos de área y perímetro

Referencias bibliográficas

Corberán, R. (1996) *análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Valencia, España.

Cortez López, R. (2012). *Historia de la geometría euclidiana y sus aplicaciones para la enseñanza.* Recuperado de: file:///C:/Users/Asus/Downloads/TFG-L2.pdf

Garrido, E. (2015) *La enseñanza del concepto de área y perímetro de polígonos a través del Geoplano, para el desarrollo de la competencia matemática en resolución de problemas del grado séptimo en el Colegio María Antonia Cerini.* Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia

González, J. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café.* Tesis de maestría. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Hemmerling, M. (2005). *"Elementos básicos de la geometría" en Geometría elemental.* México: Limusa, pp. 11-62.

Hernández, R. Fernández, C, Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. 22

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de la investigación para la enseñanza de la geometría*: El modelo de Van Hiele. Sevilla: Alfar. México.

Manotas, M., & Rojas, C. (2008).

Conceptualización acerca del perímetro, área y volumen en tres alumnos universitarios.

Zona próxima (9). Revista del Instituto de Estudios en Educación. Universidad del Norte

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias del área de matemáticas.* Bogotá. Colombia. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje del área de matemáticas.* Colombia. Recuperado de: https://es.slideshare.net/sbmalambo/dba-derechos-bsicos-de-aprendizaje-matemticas

Ortiz, A. (2005). *Historia de la Matemática*. Recuperado de: http://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf.

Selmer, S., Valentine, K., Luna, M., Rummel, S., & Rye, J. (2016). *How Can We Best Use Our School Garden Space? Exploring the Concepts of Area and Perimeter in an Authentic* Learning Context. Australian Primary Mathematics Classroom, *21*(4), 3-10.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudios de caso*. Madrid: Morata, S.L.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La geometría en el salón de clases a través del uso de algunos elementos del arte

Fernando **González** Aldana
Colegio Santa Teresa de Jesús de Ibagué
Colombia
fernalmat@hotmail.com
Osvaldo Jesús **Rojas** Velázquez
Universidad Antonio Nariño
Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

La matemática es una de las áreas del conocimiento que contribuye al desarrollo cognoscitivo en las estudiantes, el teorema de Pitágoras y Tales, las construcciones de figuras geométricas, la perspectiva y la resolución de problemas geométricos, aportan a este fin. Este trabajo se dirige a favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en las estudiantes de grado octavo, a través de actividades que se sustentan en la resolución de problemas, en el uso de algunos elementos del arte, en la visualización y en la Comunidad de Práctica de Wenger. La implementación de las actividades sobre la matemática y arte, sirven como motivación para el estudio de la geometría, constituyendo la base conceptual para el desarrollo de otras temáticas; además, ayuda a fortalecer el pensamiento espacial, mejora la percepción visual y propicia motivación para la resolución de problemas retadores en la Educación Básica.

Palabras clave: resolución de problemas, elementos del arte, visualización, Comunidad de Práctica, enseñanza aprendizaje de la geometría.

Introducción

El contenido geométrico está presente en todos los currículos de los diferentes niveles educativos, por tal motivo es necesario lograr un aprendizaje adecuado de este contenido en cada grado, pues el contenido dado sirve de base para los estudios posteriores.

La matemática y el arte en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en el grado octavo, ha ocupado a los investigadores en diferentes reuniones y congresos, en particular se destacan las investigaciones presentadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática

(ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las reuniones latinoamericanas de matemática educativa (RELME), entre otros. En el ICMI (2001), se considera a la geometría como una herramienta vital para el entendimiento, y también como una parte intuitiva y concreta de las matemáticas, ligada a la realidad. El ICMI 2008 centra su atención en la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediante software de geometría dinámica (SGD). Koyuncu, Akyuz & Cakiroglu (2014) enfatizan que la interacción con los SGD favorece el desarrollo cognitivo y la adquisición de conocimientos. Se considera que para ubicar de nuevo la geometría en un lugar prominente se hace necesario retomar las herramientas con las que se generó la geometría y a su historia.

Por otra parte el uso de los elementos artísticos para el aprendizaje de la geometría, es una propuesta que surge de la experiencia de trabajo en el aula, lo cual ha llevado a observar el limitado desarrollo del componente geométrico en los estudiantes. En este sentido, se pretende retomar, además de materiales manipulables como la regla y el compás, conceptos básicos de geometría, el uso de la tecnología, elementos artísticos y sumados a esto, el ingenio y la creatividad para que haya una apropiación y disfrute de la geometría.

Este trabajo parte de las dificultades que presentan las estudiantes, y se dirige a buscar herramientas que fortalezcan el aprendizaje geométrico, a través de los elementos artísticos. Para ello se diseñan y aplican actividades didácticas y pedagógicas, que favorecen el aprendizaje y razonamiento geométrico en las estudiantes. La investigación tiene como objetivo favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, mediante la implementación de actividades basadas en problemas, que permitan a las estudiantes adquirir habilidades y destrezas creativas que conduzcan a la visualización y apreciación del arte en una demostración o práctica matemática.

Marco teórico

Esta investigación, toma como punto de referencia la historia del arte desde Paolo Ucello (1397-1475), Leon Battista Alberty (1404-1472), Piero de la Francesca (1416-1492), Leonardo Davinci (1452-1519), cuando tuvieron que resolver el problema de como plasmar un objeto tridimensional en un plano, problema matemático que fue resuelto por estos matemáticos artistas, con el concepto de perspectiva. Para Platón, la importancia y el valor de una obra de arte residen en la asimilación de la belleza absoluta, por ello, una obra de arte es bella si contiene orden y armonía. Por otro lado Kant contrapone lo bello y lo sublime en términos de forma y contenido, aunque no necesariamente como unidad dialéctica; Para los pitagóricos, la armonía, uno de los ingredientes de la belleza, va unida al número en la constitución ontológica de todo el universo, Aristóteles por su parte, en su Metafísica enuncia que las formas expresan la belleza desde el orden, la simetría, la precisión y las matemáticas se ocupan de estudiarlas. Esta es la base de esta investigación como herramientas pedagógicas en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Las matemáticas y el arte han estado siempre estrechamente vinculadas: el número de oro, las simetrías, las proporciones, la geometría, son elementos presentes en el arte; no en vano muchos grandes artistas de la historia han sido grandes matemáticos; se han apoyado en la matemática para expresar la realidad con un lenguaje artístico. Euclides, en el siglo III a. de C. condensó todo el conocimiento matemático de la antigüedad en los trece volúmenes de los "Elementos". En la escuela Platónica, consideraban la geometría como una ciencia pura que existía por derecho propio. Era inevitable que otras ciencias y el arte, adoptaran sus descubrimientos.

Según De Guzmán (2013) ésta temática ha sido abordada por diferentes investigadores,

donde plantean sus ideas y características importantes. La relación entre la geometría, la matemática, el arte y el diseño es bastante obvia. La belleza de muchos objetos de la geometría es inspiración para los artistas. Comúnmente se ve la matemática como una ciencia; pero la matemática es un lenguaje de la ciencia. Muchos matemáticos ven también a la matemática como un arte; un artista crea cosas que considera bellas pero para un matemático un teorema es bello y algunos teoremas son más bellos que otros, lo cual un artista lo trasforma en obra de arte.

La naturaleza por sí sola tiene un diseño único artístico-matemático. Cada uno de los objetos naturales tiene una armonía, un juego de colores que contrastan todo tipo de sensación y es allí, donde se encuentra implícita la matemática porque esto hace que sea perfecto, que sea irrepetible. Cada fenómeno natural funciona gracias a su matemática. Falk de Losada (2013), precisa que los griegos no fijaron su atención en la simetría sino en la proporcionalidad y terminaron por estudiar temas relacionados con construcciones de regla y compás.

En una demostración matemática se despiertan sentimientos y cambios de estado de ánimo que también se encuentran al realizar una obra de arte, siendo éste, el verdadero valor de motivación. Esto implica que podemos incluir la técnica de Omar Rayo (1928-2010), artista colombiano considerado geométrico-óptico, que aprovecha los cuadrados, los rectángulos y las líneas en zig zag y se expresa con el blanco, el negro y el rojo; Víctor Vasarely (1906-1997) artista Húngaro, considerado como el padre del op art o modelo propio de arte abstracto geométrico, con efectos ópticos de movimiento, ambigüedad de formas y perspectivas, e imágenes inestables. Emmer, Michelle (2005) “Un hecho matemático debe ser, ante todo bello. Un teorema puede y debe ser bello, como lo es, por ejemplo, una poesía...”. Es allí donde se puede encontrar la relación matemática y arte.

Además la investigación se sustenta en la teoría de la resolución de problemas y en la visualización. Con respecto a la teoría de la resolución de problemas se destacan los aportes de Polya (1973), Krulik y Rudnik (1980), Pochulu y Rodríguez (2012), Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006); Santos-Trigo, Moreno y Camacho-Machín (2016), entre otros. Se asume que un problema “... es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para el cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma” (Krulik y Rudnik, 1980: 4). Para el momento de resolución de los problemas en el aula se consideran las fases “… comprender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan y mirar hacia atrás…” (Polya, 1973: 5-16).

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría a través de algunos elementos del arte se hace necesario un constante apoyo en el aula y en el trabajo extraescolar, para dotar a los estudiantes de herramientas y estímulos para hacer descubrimientos visuales. Por su parte, Arcavi (2003, p. 216) aduce que "La visualización ofrece un método de ver lo invisible", criterios que se consideran útiles para las clases de matemática. Con respecto a la visualización, se asume en esta investigación la definición dada por Arcavi (2003, p. 217), pues se ajusta al propósito del trabajo, pues expresa que:

> … es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas.

Metodología

La población objeto de investigación son las estudiantes del grado octavo del colegio Santa teresa de Jesús de Ibagué, de carácter estatal, nivel muy superior, ubicado en el departamento del Tolima, país Colombia y como muestra 37 estudiantes del grado octavo C.

La investigación se lleva a cabo bajo el paradigma cualitativo, con un enfoque de investigación cualitativo y un diseño de investigación acción. Este enfoque en el área de la matemática y el arte permite transformar, mejorar y enriquecer el quehacer docente, dirigido a despertar la motivación y el interés para lograr un aprendizaje significativo en las estudiantes de grado octavo del colegio Santa teresa de Jesús de Ibagué.

Durante la investigación se utilizan elementos del arte y de la geometría, imágenes pictóricas de los artistas Omar Rayo y Víctor Vasarely, software de geometría dinámica (GeoGebra), materiales visuales manipulables de geometría y dibujo como la regla, compás, escuadras, colores, borrador, lápices, entre otros. El instrumento de contenido se dirige a constatar cómo se manifiesta el proceso de diseño y reproducción de ejercicios pictóricos (representación visual), como resultado de una práctica o de una demostración geométrica, importante en la resolución de problemas.

La investigación se orienta a encontrar la relación entre matemática y arte en el aula, con una metodología que propicia "conocer y actuar" en el contexto de un proceso de apropiación y aplicación del conocimiento geométrico. Para ello, en el grupo seleccionado se realizan talleres sobre dominio de herramientas físicas y tecnológicas. La observación participante, los instrumentos de geometría, de dibujo y el uso de la tecnología a través de GeoGebra, conducen a encontrar la relación entre matemáticas y el arte.

Se realiza una implementación en la práctica con estudiantes de grado octavo y se muestran los resultados alcanzados, los cuales se contrastan con una encuesta de satisfacción aplicada a las estudiantes para valorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría con ayuda de la relación que existe entre las matemáticas y el arte, una vez terminada la aplicación de la práctica pedagógica.

Resultados

Las actividades diseñadas para la clase de geometría, donde se integra el arte y la matemática, están orientadas hacia el aprendizaje de las construcciones geométricas, Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, perspectivas en el op art y solución de problemas geométricos. Este proceso se lleva a cabo a través de la resolución de problemas geométricos retadores.

Las actividades propuestas propician la manipulación y exploración de los objetos artísticos y geométricos, para lograr el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en el grado octavo, a través de la relación arte y matemática.

Para la búsqueda de la relación entre matemática y arte, en la investigación se desarrollan seis actividades basadas en problemas retadores. Estas actividades son:

- Construcción de figuras geométricas con regla y compás.
- Teorema de Pitágoras y su aplicación a los números irracionales.
- Aplicación del Teorema de Tales para la resolución de problemas.
- Perspectiva en el arte óptico.
- Problemas geométricos.
- Exposición concurso intercolegiado "Matemáticamente" 2017.

Resultados de la encuesta de satisfacción aplicada a los estudiantes y discusión

Al realizar el análisis respectivo de la encuesta de satisfacción, aplicada a 33 estudiantes presentes del grado octavo C, del colegio Santa Teresa de Jesús de Ibagué, acerca de la percepción que tienen las niñas involucradas en la práctica pedagógica, se evidencia en alto porcentaje de favorabilidad el cumplimiento de los objetivos planteados en la tesis (ver gráfico 2), tabla de datos de la encuesta de satisfacción.

Preg \ Valor	1	2	3	4	5
1			1	2	30
2				8	25
3	1	1	1	6	24
4	1		2	7	23
5			2	3	28
6			2	10	21
7				12	21
8			1	7	25

Gráfico 1. Tabla de datos de la encuesta de satisfacción.

Fuente: Elaboración propia.

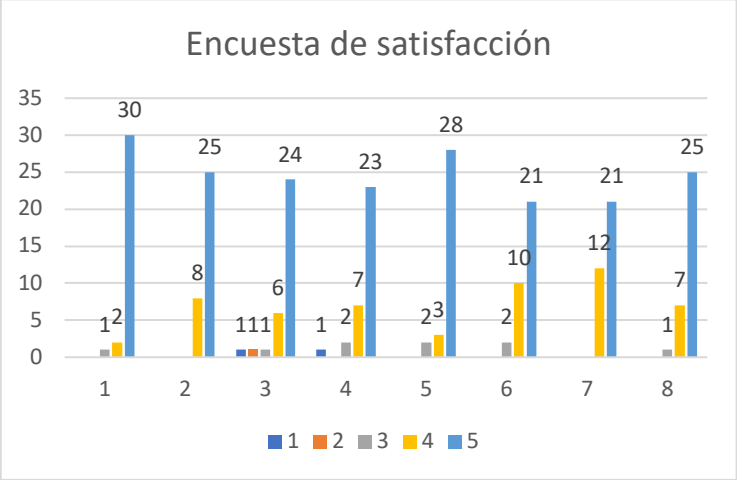


Gráfico 2. Análisis estadístico de la encuesta de satisfacción

Fuente: Elaboración propia.

El anterior gráfico de barras (gráfico 2), análisis estadístico de la encuesta de satisfacción, en donde participaron 33 estudiantes de las 37 de la muestra, se evidencia la calificación más alta de uno a cinco, la tienen un gran número de estudiantes en cada una de las ocho preguntas realizadas, en la pregunta uno, 30 estudiantes manifestaron 5, dos en 4 y una en 3; en la segunda pregunta, 25 en 5 y ocho en 4; en la tercera pregunta 24 en 5, seis en 4 y una estudiante en el 1, 2 y 3; en la cuarta pregunta 23 en 5, siete en 4, dos en 3 y una en 1; la quinta pregunta 28 en 5, tres en 4, dos en tres; en la sexta pregunta 21 en 5, diez en 4 y dos en 3; en la pregunta 7, 21 estudiantes 5, y doce estudiantes en 4 y en la octava pregunta 25 en el 5, siete estudiantes en 4 y una en 1.

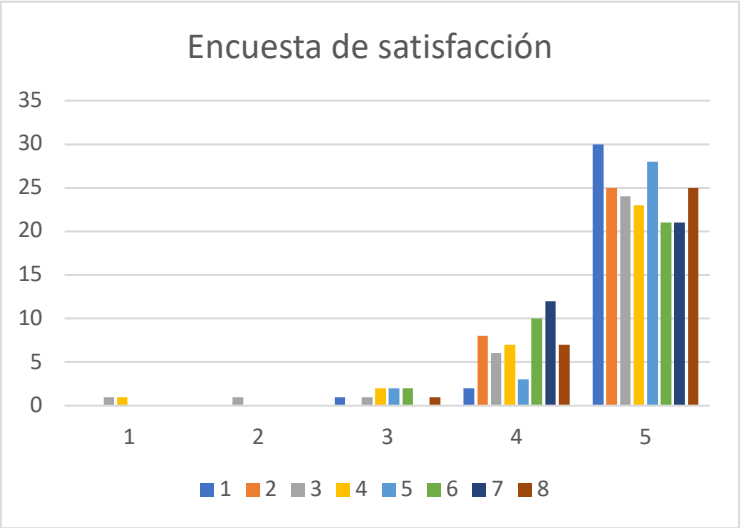


Gráfico 3. Análisis de datos por valoración

Fuente: Elaboración propia.

El gráfico 3, análisis de datos por valoración, nos muestra que de las 33 estudiantes encuestadas, se concentra en la valoración de 5 en cada una de las preguntas así; la 1 en un 91%, la 2 en un 76%, la 3 en un 73%, la 4 en un 70%, la 5 en un 85%, la 6 y la 7 en un 64% y la 8 en un 76%; en la valoración 4, el porcentaje es en la pregunta 1 es de 6%, la 2 de 24%, la 3 de 18%, la 4 de 21%, la 5 de 9%, la 6 de 30%, la 7 de 36% y la 8 es de 21%; la valoración de 3 en un porcentaje en la preguntas 1, 3 y 8 de un 3% y las pregunta 4, 5 y 6 en un 6%, las preguntas 2 y 7 0%; la valoración de 2, la pregunta 3 un 3% las demás preguntas 0%, en la valoración de 1, sólo las preguntas 3 y 4 con un 3%, las preguntas 0%. Las estudiantes hicieron valoración de la pregunta 3 y 4 de 1 porque no consideraron un reto las actividades y tienen ciertas dificultades en el manejo de los elementos artísticos y geométricos.

Conclusiones

El proceso de investigación sobre matemática y arte, en el grado octavo de la Educación Básica, permitió dar respuesta al objetivo. Los resultados obtenidos permiten destacar algunos elementos en éste trabajo, ellos son:

- La teoria de la resolución de problema es fundamental para el trabajo en el aula con la solución de problemas de matemática y arte. En la investigación se retoman las ideas de especialistas en Educación Matemática, los cuales aportan definiciones sobre problemas, resolución de problemas y estrategias para la resolución, que constituyen elementos básicos en la propuesta de actividades, basada en problemas retadores.
- La resolución de problemas aporta a la construcción de ejercicios artísticos con contenido matemático, a través del uso de algunos elementos del arte, pues las estudiantes aprenden a pensar y a razonar de manera geométrica abstracta, a explorar y a crear sus representaciones y modelos mentales. Mediante este proceso se propicia resolver situaciones de la matemática, del arte y de la vida real.
- La visualización favorece la construcción de ejercicios artísticos, a través del uso de elementos de geometría como la regla y el compás. En este proceso se considera que la visualización es una habilidad, que permite formar imágenes y representaciones, para la

búsqueda de una interpretación geométrica de las obras de arte y de utilizar las técnicas artísticas como el op art y geometría abstracta en una gráfica geométrica o en un teorema.

- La comunidad de práctica para el trabajo de la matemática y arte en el aula, transitó durante su desarrollo por las fases: potencial, coalescencia, madurez, gestión y transformación. El tránsito por estas fases permite su consolidación como comunidad y favorece la construcción del conocimiento, donde es esencial la participación, la imaginación de las estudiantes, para la búsqueda de su propia identidad. El trabajo en comunidades de práctica permite la comprensión y socialización en el salón de clases de la construcción y apropiación de conocimientos geométricos.
- Como resultado de la implementación de las actividades en la práctica escolar, se constata:

✓ Comprensión por las estudiantes acerca del proceso de relacionar imágenes de obras de arte con sus respectivas soluciones geométricas y viceversa.

✓ El diseño de las actividades, la heurística utilizada en los problemas, el estilo de trabajo en grupo, la relación entre matemática y arte, motivaron a las estudiantes en querer socializar sus ideas y mostrar sus experiencias pictóricas.

✓ Se interpretan y analizan los Teoremas de Pitágoras y Tales y, se fortalecen otros conceptos matemáticos y geométricos que implican estas demostraciones.

✓ El uso de los materiales didácticos en la clase, genera mayor motivación en las estudiantes para la resolución de los problemas geométricos que relacionen la matemática y el arte.

✓ Los diferentes procedimientos que utilizaron las estudiantes para la resolución de los problemas se constatan en la socialización de las actividades, tanto en los grupos de comunidades de práctica, como en el debate con todas las estudiantes del aula.

✓ Se fortalece el sentido de cooperación, responsabilidad y compañerismo y la participación entre las estudiantes, lográndose su satisfacción al notar avances en el desarrollo de sus procesos matemáticos.

✓ En las actividades participaron 10 grupos de trabajo, para un total de 37 estudiantes, de ellos un 90% responde de forma correcta cada una de las actividades.

✓ La exposición de sus trabajos sobre matemática y arte en el concurso intercolegiado “Matemáticamente 2017”, a diez delegaciones de instituciones privadas y públicas de Ibagué, fortalecen su motivación y autoestima.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

De Guzmán, M. (2013) *Polivalencia de las matemáticas: Ciencia, técnica, arte, juego, filosofía*. Real Academia de Ciencias. Recuperado de www.rac.es/ficheros/doc/00337.pdf, p.243

De Losada, M. (2013). *Corrientes de pensamiento matemático del siglo XX*. Segunda parte: Estructuralismo. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Emmer, M. (2005). La perfezione visibile: matematica ed arte. *Arnodes, 1-9.* Recuperado de https://www.sectormatematica.cl/arte/emmer0505.pdf.

González, A. F. (2017). La matemática como arte en el desarrollo del pensamiento espacial, sistema geométrico. En O. Pérez (presidencia), Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 31), Lima, Perú.

Koyuncu, I. Akyuz, D & Cakiroglu E. (2014) investigating plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*. Recuperado http://link.springer.com/article/10.1007/s10763-014-9510-8.

Krulik, S., y Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires: Eduvim.

Polya, G. (1973). *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Stanford University, Second Edition, New Jersey: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M., Moreno, L. y Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM Mathematics Education*, Spriger.

Sigarreta, J., Rodríguez, J. y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* (Venezuela), vol. 13, núm. 1, pp.53-66.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Perspectivas para a formação inicial de professores de matemática a partir de um projeto de monitoria em geometria

Andriceli **Richit**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
andriceli.richit@ifc.edu.br
Cleiton **Fornari**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
cleiton_fornari@yahoo.com.br
Eliane Suely Everling **Paim**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
eliane.paim@ifc.edu.br
Felipe Junior **Crozetta**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
felipecrozetta@outlook.com
Mariane de Lima **Bissolotti**
Instituto Federal Catarinense – *Campus* Concórdia
Brasil
mariane.bissolotti@gmail.com

Resumo

Este artigo traz considerações acerca do Projeto "Ampliando compreensões e atenuando dificuldades em Geometria Plana, Espacial e Analítica por meio de Projeto de Monitoria" desenvolvido no IFC - *Campus* Concórdia. Objetivou ampliar e diversificar estudos de Geometria Plana, Espacial e Analítica, fomentar a melhoria dos processos de ensino-aprendizagem, incentivar a formação docente, promover articulações entre docentes e discentes bem como estimular práticas que possibilitem o desenvolvimento de inovações metodológicas pautadas na construção de itinerários formativos articulando conteúdos disciplinares. No desenvolvimento da monitoria, destacamos reconstruções conceituais a partir de representações com softwares e a necessidade de reflexão sobre as contribuições da monitoria, no sentido de que não pode ser vista apenas como um apêndice que visa abordar/tratar aspectos mais imediatos relacionados aos processos de aprendizagem, mas que de fato contribua e

ultrapasse dinâmicas de sala de aula e desenvolva um acadêmico autônomo, enriquecendo a formação do monitor, docente e demais envolvidos.

Palavras Chave: Ensino e Aprendizagem, Geometria, Formação de Professores, Monitoria, Prática Docente.

Introdução

A Geometria pode ser compreendida como um corpo de conhecimentos fundamental para que possamos compreender o mundo além de propiciar a participação ativa do homem na sociedade, pois está presente em todas as instâncias de nossas vidas (Fillos, 2006). Corroboramos ao autor supracitado de que a Geometria tem papel preponderante no ensino, uma vez que ativa estruturas mentais no movimento que perpassa dados concretos e experimentais para processos que envolvem abstração e generalização. Ademais, a Geometria configura-se como um tema integrador entre diversos ramos da Matemática, "sendo a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituintes de sua essência" (Fillos, 2006, p. 2).

Embora historicamente o desenvolvimento da Geometria tenha sido impulsionado por necesidades práticas e cotidianas, sua axiomatização e relevância alcançada no meio científico, vem configurando-a como uma disciplina complicada, uma vez que se desdobrou em outras áreas como a Geometria Plana, Espacial e Analítica e uma algebrização foi se instaurando em sua essência. Por outro lado, reconhecemos que sem uma articulação dos aspectos algébricos do Ensino da Matemática aos geométricos, obstáculos acabam de criando e privando os estudantes de um desenvolvimento integral dos processos de pensamento (Rosa, 2009).

Nesse sentido, discussões que envolvem as problemáticas dos processos de ensinar e aprender Geometria, assumem várias orientações que transitam entre questões pedagógicas e metodológicas. Nesse movimento, vem se desenvolvendo investigações que tomam as tecnologias como possibilidades de promover compreensões "[...] de relações geométricas sem a necessidade de memorização e utilização de estratégias rigorosamente elaboradas, ou técnicas de resolução analítica e, com as TI a experimentação passa a obter um papel importante na produção matemática (Santos, 2006, p. 24)".

Ainda nesta perspectiva, Pavanello (2001, p. 183) chama a atenção a postura do professor ao trabalhar com a Geometria, assinalando que este não trabalha "[...] as relações existentes entre as figuras, fato esse que não auxilia o aluno a progredir para um nível superior de compreensão de conceitos". Neste sentido, destacamos que ao longo da instituição desta área da Matemática no contexto escolar, a Geometria não tem sido abordada ou abordada de maneira superficial devido as dificuldades inerentes aos seus processos de ensino e aprendizagem. Para Rosa (2009, p.24) "O ensino da Geometria no enfoque tradicional enfrenta grandes problemas, seja com relação à formação e conhecimento do professor, aos métodos utilizados, ou ainda as dificuldades encontradas em relacionar a abordagem axiomática e a Geometria prática [...]".

Considerando as problemáticas relacionadas aos processos de aprender e ensinar Geometria, apresentamos, neste artigo, algumas considerações a partir do desenvolvimento de um Projeto de Monitoria em Geometria (Plana, Espacial e Analítica) no contexto da formação inicial de professores de Matemática. Para tanto, o presente texto, assim está estruturado: primeiramente, apresentamos alguns elementos introdutórios. Em um segundo momento, trazemos reflexões no que concerne ao Ensino de Geometria. Na sequência, apresentamos alguns aspectos referentes a história das monitorias e sua institucionalização no contexto da Educação

Superior, a processualidade metodológica e encerrando o texto, apresentamos algumas compreensões a partir do Projeto desenvolvido.

Geometria: Elementos históricos e de ensino e aprendizagem

Pavanello (1993, p. 8) pontua que o ensino de Matemática no início do século passado buscava "O domínio das técnicas operatórias necessárias á vida prática e às atividades comerciais. Com a mesma orientação, eram trabalhadas algumas noções de geometria". No tocante aos professores de Matemática desta época Pavanello (1993) menciona que estes não apresentavam formação específica em licenciatura, mas eram profissionais liberais que, muitas vezes, haviam aprendido sozinhos. Por outro lado, as aulas de Matemática eram, conforme Silva (2010, p. 69)

> [...] expositivas, sendo que nem sequer a resolução de exercícios pelos alunos em sala de aula era uma prática generalizada. Quando era feita, o que se apresentava aos alunos eram exercícios padronizados, que deveriam ser resolvidos do mesmo modo que um "problema modelo", com ênfase nos cálculos volumosos. As demonstrações dos teoremas eram expostas pelo professor e decoradas pelos alunos, para apresentação nas provas. Os recursos utilizados não iam além do giz, quadro-negro e livro-texto, se houvesse.

Ponderamos que não houveram mudanças substanciais fazendo uma comparação com os dias de hoje, e, diariamente, alguns estudantes tem aulas com professores não formados em Matemática ou com profissionais não capacitados, os quais desenvolvem uma prática pedagógica que enfatiza a memorização de fórmulas, exercícios repetitivos que são seguidos de Provas. Ademais, alguns desses profissionais capacitados ou não acabam desenvolvendo um ensino superficial em Geometria, conforme evidencia Lorenzato (1995, p. 3):

> São inúmeras causas, porém, duas delas estão atuando forte e diretamente em sala de aula: a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas. [...] A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho que estão submetidos.

Dessa maneira fica evidente que as causas levantadas por Lorenzato fazem parte do cotidiano da escola e do professor, onde se estabelece uma dependência sobre o livro didático, onde o professor ensina Geometria como ela é apresentada nos livros, ou seja, como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, sem nenhuma contextualização com a vida cotidiana do aluno. Compreendemos, que para que o ensino de Geometria seja realmente eficaz e significativo, o professor deve lançar mão de diferentes recursos e metodologias, com destaque no contexto atual, para a utilização das Tecnologias Digitais. Um dos documentos mais importantes do contexto brasileiro, os PCN, que propõe diretrizes para o Ensino de Matemática na escola básica, salienta que:

> É importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação. E também, o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a

> iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 1998, p. 26).

Sendo assim, tendo em suas mãos alguns recursos diferenciados daqueles comumente presentes em sala de aula, o professor pode desenvolver um ensino eficaz e significativo, fazendo com que os estudantes passem a buscar pelo novo, e não apenas esperar, reduzindo indagações rotineiras como: Mas por que estudar Geometria? Ela é tão necessária em nosso dia a dia? Assim, tais indagações podem serem substituídas e a importância do estudo da Geometria pode ser finalmente compreendido pelos estudantes. Sobre isso, Lorenzato (1995, p.5) pontua que:

> A necessidade do ensino de geometria, pelo fato de que um indivíduo sem este conteúdo, nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizadas. E ainda não se pode utilizar a geometria como facilitadora para compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

É preciso ressaltar que a Geometria está presente de alguma forma em todos os lugares do nosso cotidiano, quer seja por por visualização de formas geométricas ou até mesmo por idéias de paralelismo e entre outras definições inerentes a disciplina, o que justifica sua importância. No IFC – Campus Concórdia, há um índice elevado de reprovação nas disciplinas de Geometria Plana, Espacial e Analítica no contexto da Licenciatura em Matemática bem como em outros Cursos, e na tentativa de construir novos itinerários formativos é que o projeto foi proposto e desenvolvido e cujas reflexões são aqui apresentadas. No que segue, expomos algumas considerações teórico-metodológicas relacionadas a monitoria.

Aspectos teórico-metodológicos do trabalho de Monitoria

O Ensino Superior é uma realidade de 14% da população adulta brasileira, onde apenas 16% dos egressos completaram a graduação (OCDE, 2016). Frente a isto, Instituições de Ensino Superior (IES) investem em estratégias e práticas que propiciem alcançar melhores resultados, tanto na avaliação do Ministério da Educação quanto no prestígio reverberado pelos egressos. Isso já constitui, por si só, um motivo para investir em formas alternativas de trabalho que estimulem e efetivem o processo de aprendizagem, como é o caso das monitorias (Frison, 2016).

O papel de monitor na antiguidade clássica era exercido pelo pedagogo, através de atividades diferentes e auxiliares às do professor, ora com o objetivo didático de explicar, ora buscando disciplinar, através do controle comportamental dos estudantes (Monroe, 1974).

No século XVIII, o inglês Joseph Lancaster criou o método de ensino Lancaster, também denominado ensino mútuo ou monitorial, que tem por objetivo ensinar um maior número de alunos usando poucos recursos, em pouco tempo e com qualidade. O monitor, aluno mais adiantado, recebia separadamente orientação do professor para depois replicar aos outros. No Brasil, ele fora implantado ainda no império sob a indicação de Dom Pedro I, em 1823, a partir da iniciativa de uma escola de ensino mútuo (Dantas, 2014). A monitoria, no Brasil, foi instituída oficialmente apenas no século XX, através da Lei de Reformulação do Ensino Superior (Lei BR nº 5540/68), cujo artigo 41 dispõe o seguinte:

> As universidades deverão criar as funções de monitor para alunos do curso de graduação que se submeterem a provas específicas, nas quais demonstrem capacidade de desempenho em atividades técnico-didáticas de determinada disciplina. As funções de monitor deverão ser remuneradas e consideradas título para posterior ingresso em carreira de magistério superior.

Mais tarde, em 1994, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei BR nº 9.394/94) revoga a anterior e, no artigo 84, estabelece a orientação atual: "Os discentes da educação superior poderão ser aproveitados em tarefas de ensino e pesquisa pelas respectivas instituições, exercendo funções de monitoria, de acordo com seu rendimento e seu plano de estudos". Portanto, a monitoria trata-se de uma estratégia de ensino respaldada em lei, que pode efetivar o aprendizado na graduação, por meio da atuação de monitores em práticas e experiências pedagógicas. Permite também oportunizar ao graduando atitudes autônomas perante o conhecimento, assumindo, com maior responsabilidade, o compromisso de investir em sua formação além de estimular a docência (Voos, 2009).

No entanto, mesmo com todas as contribuições que as atividades de monitoria oferecem ao Ensino Superior, as vezes é pouco aproveitada pelos acadêmicos. Sendo assim, neste trabalho buscamos apresentar algumas discussões sobre o ensino e aprendizagem de Geometria no âmbito de um Curso de Matemática - Licenciatura, vinculada ao referido programa.

Metodologia

O Programa de Monitoria mencionado teve seu início em agosto de 2017 e término em julho de 2018. Durante este período, vários acadêmicos tiveram a oportunidade de fazer acompanhamento semanal com o monitor, em que eram supridas algumas dificuldades básicas e imediatas. A medida em que o projeto e suas atividades foram se desenvolvendo, percebemos em algumas oportunidades, dificuldade dos alunos em relação à conceitos básicos da Geometria. Tais dificuldades relacionavam-se a necessidade de utilização de softwares específicos para compreender melhor situações apresentadas ou até mesmo a visualização de sólidos geométricos, no caso da Geometria Espacial. Assim, para avaliar a qualidade do ensino e aprendizagem de Geometria dos estudantes, monitores e coordenadora do Projeto, elaboraram um questionário semiaberto, composto por 24 perguntas subdivididas em seis subtítulos referentes a cada etapa do processo de ensino e aprendizagem de Geometria ao longo da vida acadêmica dos alunos. Participaram da pesquisa onze alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFC- Campus Concórdia. Os dados foram coletados nas dependências do Campus em Novembro de 2017, por meio de formulário online. Assim, os dados tomados para análise são oriundos de questionários aplicados e de observações e notas de campo do monitor do Projeto. A pesquisa segue os pressupostos da pesquisa qualitativa, com análise interpretativa (Bogdan; Biklen, 1994).

Resultados e Discussões

O Programa de monitoria iniciou em agosto de 2017, abrangendo a disciplina de Geometria Espacial. De início houve pouca participação dos acadêmicos, contudo logo começaram a sugir dúvidas no contexto da disciplina, e estes recorreram aos monitores. Assim, o primeiro atendimento realizado destinou-se a esclarecer dúvidas de natureza conceitual de polígono, poliedro, prisma e etc. Neste sentido as dúvidas não estavam relacionadas a resolução de exercícios, evidenciando assim algumas lacunas conceituais no que tangem ao ensino e aprendizagem de Geometria. Nesse sentido, compreendemos que estas lacunas conceituais podem ter raízes em um aprendizado limitado no Ensino Fundamental e Médio aliado as

metodologias adotadas pelo professor. Portanto, são várias os motivos que levam os alunos a não se apropriarem de conceitos básicos de Geometria.

Apesar de termos mudanças nas leis que definem o que ensinar e novas metodologias que escancaram as portas para novos conhecimentos, hoje em dia a forma de ensinar continua a mesma, baseadas em métodos em que os alunos são submetidos a aulas expositivas e métodos de repetição para fixação. Ao serem questionados sobre "Como foi a aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental e Médio?", 18,2% dos alunos disseram que não lembravam, 9, 10% disseram que foi regular, 63,60% disseram que foi pouco trabalhada e apenas 9,10% disseram que foi ótima.

Observemos que grande parte dos alunos ingressantes da Licenciatura em Matemática do IFC – Campus Concórdia não construíram conhecimentos em Geometria na educação básica. Uma pequena minoria disse que o ensino foi ótimo, mas não apresentaram elementos que nos possibilitassem avaliar a qualidade deste ensino. Apesar da fragmentação do processo de ensino e aprendizagem de Geometria na escola básica, acreditamos que para suprimir estas dificuldades, sua abordagem em sala de aula deve ser amparada por diversos materiais didáticos, incluindo o uso de softwares. No Projeto de Monitoria, a participação dos acadêmicos foi muito importante para a construção do conhecimento de conteúdo específico necessário a sua futura formação docente e articulou materiais concretos e softwares.

Outro questionamento que integrava o questionário online buscava aspectos relacionados ao conhecimento tecnológico dos alunos e assim estava definido "Você já conhecia ou conhece algum software para estudar Geometria? Como conheceu?" Dos respondentes, 9, 10% disseram que tinham conhecimento em autocad, outros 9,10% disseram que não. Por outro lado, não cabia a resposta do questionário, mas 81,80% disseram que tinham algum conhecimento e que este era oriundo de atividades e aulas que tiveram no ámbito da graduação.

Outra perspectiva das Monitorias, reside na construção de itinerários formativos, o que ocorreu no âmbito do Projeto, uma vez que os alunos puderam utilizar-se de outros recursos para subsidiar suas aprendizagens. Em específico, durante a monitoria, os alunos puderam experimentar abordagens que fugiam do clássico giz e lousa, as quais estavam alicerçadas na utilização das Tecnologias Digitais. Conforme quadro 2, podemos observar que grande parte dos acadêmicos não haviam estudado conceitos de Geometria por meio de softwares. Entretranto, a partir do projeto, esta prática não só foi incentivada como também foi materializada.

Ademais, no decorrer do projeto destacamos o Facebook como um importante aliado dos monitores, que quando necessário publicavam algumas atividades referente as geometrias.



Figura 1:

Publicações realizadas no facebook, no grupo Monitoria de Geometria.

Fonte: Autores (2018).

Ainda, em termos de construção do conhecimento em Geometria e sua importância na formação do futuro professor, mais de 50% dos alunos que responderam o questionário destacaram a importância do mesmo para sua futura atuação docente. Uma pequena porcentagem, representando 27,30 % justificou, dizendo que "Sim, pois a Geometria em si faz o aluno ter um senso crítico para observar objetos reais como exemplos. Além de resolverem problemas em nosso cotidiano". Outros 18,20% dos respondentes destacaram que "Com certeza, é o assunto mais 'palpável' que se pode ter dentro da Matemática".

Fillos (2006) *apud* Fainguelernt (1995), explicita que a Geometria tem um papel predominante na aprendizagem de conceitos matemáticos na medida em que ativa estruturas mentais no movimento que perpassa dados concretos e experimentais e caminha para os processos que envolvem abstração e generalização. Assim, nesta perspectiva, tem-se a necessidade de articulação dos aspectos algébricos aos geométricos, para poder suprimir ou até mesmo poder impedir que obstáculos se criem, e impedir os estudantes de um desenvolvimento integral dos processos de pensamento.

Considerações Finais

Apesar das dificuldades no processo de ensino de Geometria, consideramos que os alunos por si só podem construir seu próprio conhecimento a partir de estudos mais aprofundados e na utilização das TICs para que possam compreender aspectos e propriedadades mais abstratos.

Percebemos que o Projeto de Monitoria por vezes assumiu a característica de um Projeto de Mentoria, no sentido de que relações de confiança e entendimento entre os sujeitos se construíram. Ademais, o monitor "Ao compartilhar as histórias de vida e as experiências vivenciadas, os envolvidos se inserem em um movimento que permite olhar as diferentes situações e ações de vários ângulos, podendo desencadear processos reflexivos a cerda das vivencias que possibilitem o desenvolvimento dos sujeitos"(Oliveira; Guimarães; Andrade, 2016, p. 50). Ademais, o desenvolvimento do Projeto trouxe importantes contribuições em termos de formação inicial de professores, pois possibilitou a construção de conhecimento não só matemático, mas também pedagógico e tecnológico.

Referências

Bogdan, R. C.; Biklen, S. K. *Investigação qualitativa em educação:uma introdução as teorias e aos métodos.* Porto: Porto Editora, 1994.

Brasil. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Lei nº. 9.394/94, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Seção 1, p. 27.833 - 27.841.

Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Brasil. Senado Federal, Lei Federal n.º 5540, de 28 de novembro de 1968.

Dantas, O. M. *Monitoria: fonte de saberes à docência superior*. Rev. Bras. Estud. Pedagog. (online), Brasília; 95(241):567-589; set./dez. 2014.

Fillos, L.M. *O Ensino da Geometria: Depoimentos de Professores que fizeram História.* In: ANAIS DO X ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Belo Horizonte, Minas Gerais, 2006. p. 01-07.

Frison L.M.B. *Monitoria: uma modalidade de ensino que potencializa a aprendizagem colaborativa e autorregulada*. Pro-Posições; 27(1):133-153;jan./abr. 2016.

Lorenzato, S. *Por que ensinar geometria?* Educação Matemática em Revista, SBEM, São Paulo, v. 3, n. 4, p. 1-64, 1995.

Monroe, P. *História da Educação*. 10. ed. São Paulo: Nacional; 1974.

Oliveira, I. L. L.; Guimarães, S. U.; Andrade, J. A. A. *A Aprendizagem dos Calouros da Licenciatura em Matemática: a experiência de um programa de mentoria*. 1 ed. Curitiba: Editora Appris. 2016.

Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Education at a Glance (EAG); 2016. [acesso em 16 nov. 2017]. Disponível em:<http://www.oecd.org>.

Pavanello, R. M. *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências*. Zetetiké. Campinas, v. 1, n. 1, mar. 1993.

Pavanello, R. M. *Geometria: atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais*. In: Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática. Curitiba: 2001, p. 172-183.

Rosa, K. C. *Ambientes computacionais no contexto da Geometria: Panorama das teses e dissertações do Programa de Educação Matemática da PUC-SP de 1994 a 2007*. 106f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

Santos, S.C. *A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana Espacial.* 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

Silva, M. C. L. *A geometria escolar e o Movimento da Matemática Moderna*: *em busca de uma nova representação.* In: FLORES, C.; ARRUDA, J. P. (Org.). A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: contribuição para a história da educação matemática. São Paulo: Annablume, 2010, v. 1, p. 65- 88.

Voos, D.; Batista J.B. *Sphaera: sobre o ensino de matemática e de ciências*. Porto Alegre: Premier, 2009, p. 232-247.

Aritmética y sistemas numéricos

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O método Montessori no ensino e aprendizagem de números na Educação Infantil

Caroline de Paula Ribeiro
Faculdade de Educação, Universidade Federal de Juiz de Fora
Brasil
caroline-ad@hotmail.com
Reginaldo Fernando Carneiro
Faculdade de Educação, Universidade Federal de Juiz de Fora
Brasil
reginaldo.carneiro@ufjf.edu.br

Resumo

O presente artigo investigou as contribuições do método Montessori para o ensino e a aprendizagem dos números na Educação Infantil. Para tanto, realizamos uma pesquisa qualitativa em que utilizamos para produção de dados observações da sala de aula e notas de campo. O estudo foi realizado em uma escola particular de um município do interior de Minas Gerais, Brasil, em uma turma de Educação Infantil que recebe alunos de 3 a 6 anos de idade. Os resultados evidenciaram que a sala de aula montessoriana é repleta de materiais e conceitos matemáticos que respeitam o ritmo de desenvolvimento da criança e que proporcionam um aprendizado ativo, dinâmico e criativo em torno da construção do conhecimento. Além disso, as atividades permitiram abordar importantes ideias de conceitos matemáticos de números, mesmo sem a formalização e o rigor que ocorrerá nos níveis escolares seguintes.

Palavras-chave: método Montessori, números, ensino, aprendizagem, Educação Infantil.

Introdução

Desde muito cedo as crianças têm contato com a matemática. Elas observam o ambiente ao seu redor, as pessoas e suas ações em diferentes processos matemáticos e, no decorrer de sua vida, vão se apropriando de conhecimentos que estão inseridos na cultura a que ela pertence.

A Educação Infantil no Brasil é considerada a primeira etapa da Educação Básica e atende crianças de 0 a 5 anos de idade. Ao considerar as especificidades das crianças, o método Montessori reconhece a presença de conceitos topológicos na vida delas e busca a alfabetização

matemática por meio do desenvolvimento da capacidade de pensar e de resolver problemas, uma vez que ela observa os adultos o tempo todo e constrói suas experiências a partir disso.

Assim, esse método desenvolve um modo de organizar o ambiente, planejar o tempo, as intervenções e a maneira de lidar com a criança de acordo com a concepção de infância que considera "a importância das condições ambientais iniciais no desenvolvimento mental da criança, a percepção sensorial, a motivação intrínseca da criança, os períodos sensíveis no seu desenvolvimento e o papel do desenvolvimento cognitivo no estabelecimento dos seus poderes sociais e criativos" (Lillard, 2017, p. 25).

Essa pesquisa teve o objetivo de investigar as contribuições do método Montessori para o ensino e a aprendizagem dos números na Educação Infantil. Para tanto, desenvolvemos uma pesquisa de caráter qualitativo em escola montessoriana de uma cidade do interior de Minas Gerais, Brasil, que utilizamos para produção de dados a observação e as notas de campo.

Referencial teórico

A matemática está presente na vida das crianças desde muito pequenas, pois elas tem, por exemplo, que "conferir figurinhas, marcar e controlar os pontos de um jogo, repartir as balas entre os amigos, mostrar com os dedos a idade, manipular o dinheiro e operar com ele etc." (Brasil, 1998, p. 207).

Dessa forma, a Educação Infantil pode auxiliar as crianças a organizarem estratégias e informações, assim como apreender conhecimentos matemáticos. Segundo os Referenciais Curriculares Nacionais para a Educação Infantil (Brasil, 1998, p. 207), o ensino de matemática permite atender as "necessidades das próprias crianças de construírem conhecimentos que incidam nos mais variados domínios do pensamento; por outro, corresponde a uma necessidade social de instrumentalizá-las melhor para viver, participar e compreender um mundo que exige diferentes conhecimentos e habilidades".

Ao refletir sobre a Educação Infantil é preciso considerar o princípio de que a infância tem caráter histórico e cultural e também a heterogeneidade das relações infantis, uma vez que esse conceito abrange a multiplicidade e a individualidade da criança, que é um ser "social, histórico, político e criador de cultura" (Fazolo, 2014, p. 33).

A partir do cuidado, do acolhimento, da alegria e da brincadeira, a criança tem a oportunidade de iniciar seus primeiros contatos com a matemática e a instituição que oferece a Educação Infantil é uma das mediadoras entre ela e sua relação com os conceitos matemáticos por meio das práticas pedagógicas desenvolvidas.

Nesse contexto, Machado (1986) destaca que o método Montessori corresponde a um conjunto de práticas de ensino que foram elaboradas pela médica e pedagoga Maria Montessori (1870-1952), considerada como uma das pioneiras da Educação Infantil, pois buscou pensar a relação do processo de ensino e aprendizagem a partir das especificidades das crianças.

Montessori teve suas primeiras experiências educacionais quando começou a desenvolver um trabalho com crianças internadas em hospícios para propiciar a elas uma educação especial. Para isso, desenvolveu alguns materiais e ao levá-los para manuseio, ela obteve um ótimo retorno dos alunos considerados deficientes intelectuais. Devido ao grande êxito de sua experiência, ela percebeu que seus materiais poderiam ser utilizados por todas as crianças (Perry, 2017).

A médica e pedagoga elaborou um modelo de sala de aula, que segundo Lillard (2017) buscava a autoconstrução da criança, que só seria alcançada pela relação da criança com seu ambiente e as pessoas inseridas nele, e pela liberdade. O modelo de sala de aula observado é estruturado por áreas de ensino que são chamadas de áreas de desenvolvimento e se dividem em: linguagem, matemática, sensorial, educação cósmica (história, ciências e geografia) e vida prática que proporcionam às crianças aprendizagens significativas por meio da exploração, com liberdade e autonomia.

Outro aspecto do método, é a organização das turmas por agrupamentos de idades. A proposta de Montessori baseia-se na composição de crianças com idades mistas variando entre duas ou três faixas etárias. O espaço é composto por uma variedade de recursos com diferentes níveis de dificuldade para atender crianças em diversas etapas de desenvolvimento e níveis de aprendizagem. A estruturação da sala proporciona à criança um aprendizado que é construído em conjunto, incentiva a interação social e respeita as diferentes formas de aprender com cooperação mútua, trocas e experiências.

Em relação aos conceitos matemáticos, Machado (1986) afirma que Montessori concluiu que a mente do homem é de natureza matemática e tende para a exatidão, para a medida e para o confronto. Para ela, a aquisição de conceitos matemáticos deve ter início no concreto para "materializar as abstrações"[1]. Para chegar a essa conclusão, ela passou por inúmeras experiências pedagógicas cientificamente comprovadas.

Assim, no ensino de matemática o método busca promover a capacidade de desenvolver conceitos relacionados à topologia e às ideias comparativas, relacionadas ao tempo e ao espaço como conceitos de grande e pequeno, alto e baixo, em cima e em baixo, longe e perto, entre outros; conceitos relacionados ao desenvolvimento da lógica e do raciocínio lógico, da aritmética, da construção dos números e seus desdobramentos, da geometria e, sobretudo, da resolução de problemas.

Metodologia da pesquisa

A pesquisa desenvolvida possui caráter qualitativo e de natureza descritiva que caracteriza-se pela possibilidade de compreender a percepção, a representação, as imagens e os significados sobre determinada temática ou objeto e a natureza da descrição refere-se à percepção dos fenômenos levando em consideração os aspectos mais e menos complexos (Richardson et al., 2008).

Conforme Bogdan e Biklen (1994), na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural e o investigador constitui-se como o instrumento principal. Para isso, foi realizada a inserção no ambiente escolar para investigar as contribuições da perspectiva montessoriana para o ensino e a aprendizagem de números.

A pesquisa foi realizada em uma escola particular de uma cidade do interior de Minas Gerais, na turma de Educação Infantil nomeada de Agrupada II, da professora Bianca[2], que recebe alunos de 3 a 6 anos de idade.

[1] Abstração que acontece a partir do trabalho de manipulação com os materiais.
[2] Bianca é licenciada em Pedagogia e professora nesta escola há 9 anos. Nome fictício para manter o anonimato da professora.

Ao considerar que a investigação qualitativa é descritiva, o trabalho busca narrar os dados em toda sua riqueza, pois "a palavra assume particular importância na abordagem qualitativa, tanto para o registo, como para a disseminação dos resultados (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49). Os dados foram produzidos por meio de notas de campo da observação de quinze aulas com quatro horas diárias.

A observação proporcionou o contato privilegiado com as situações reais, pois para Laville e Dione (1999, p. 176), "é observando que nos situamos, orientamos nossos deslocamentos, reconhecemos as pessoas, emitimos juízos sobre elas".

Além disso, utilizamos também as notas de campo que referem-se ao "relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Segundo esses autores, as notas de campo se constituem de duas parte: a descrição e a reflexão. A descrição é a preocupação em captar com palavras uma imagem do que aconteceu no campo e a reflexão são as ideias, preocupações e pontos de vista do pesquisador.

Para a análise dos dados, fizemos a leitura das notas de campo inúmeras vezes e escolhemos situações que emergiram dos dados e que nos auxiliaram a alcançar o objetivo da pesquisa e que chamamos de episódios. Interessantes destacar que a observação realizada pela pesquisadora, primeira autora deste texto, possibilitou captar essas situações, no entanto, o distanciamento do experienciado necessário para a análise não foi fácil, pois ela trabalhava na escola e estudava o método Montessori.

Apresentação e análise dos dados

A turma acompanhada era composta por 19 crianças de 3 a 6 anos, sendo 10 meninas e 9 meninos. O agrupamento II da Educação Infantil é dividido em três níveis de idade e ano escolar, o maternal III – com crianças a partir de três anos; o 1º período – com crianças a partir de 4 anos e; o 2º período – com crianças a partir de 5 anos.

Bianca, professora da turma é acompanhada por duas assistentes que a auxiliam no dia a dia da sala. Existe uma rotina que varia apenas nos dias de aula específicas (Educação Física, Artes e Biblioteca). Geralmente, as crianças chegam à sala, realizam uma atividade em grupo, conhecida também como rodinha. Nesse momento, a professora abre espaço para trocas de relatos entre as crianças, conversam sobre a data do dia e da semana, contam quantos amigos já chegaram e quantos ainda estão faltando e também desenvolvem atividades de equilíbrio, de concentração e de ampliação do vocabulário.

Após esse momento, a professora convida as crianças para começarem as atividades e cada uma pode escolher o material de seu interesse. A concepção da escola é trabalhar com a livre escolha, em que a criança pode se direcionar para o material que tenha interesse, uma vez que para Montessori a criança precisa ter liberdade para que possa desenvolver sua criatividade e escolher o que atrai sua atenção no ambiente, para "se relacionar com isso sem interrupção e pelo tempo que desejar, para descobrir soluções e ideias e escolher uma resposta própria e comunicar e compartilhar suas descobertas com os outros conforme queira". (Lillard, 2017, p. 41)

Para análise dos aspectos matemáticos trabalhados no dia a dia de uma classe montessoriana da Educação Infantil, foram selecionados 4 dentre 11 episódios observados durante o estudo. Esses episódios abordam especificamente os conceitos e conteúdos de números.

Quadro 1: *Episódio 2 - Relação entre número e quantidade*

A professora chama uma menina para realizar uma atividade com ela, mas a menina diz que quer um desafio! Professora: *"Combinado, vai ser um desafio."* A aluna aceita o convite e busca o tapete enquanto a professora pega numerais de madeira de 1 a 10 e os embaralha no tapete. Professora: *"Coloquei no tapete números que você já conhece. Quero que você organize eles do menor para o maior."* A menina organiza na sequência correta e mostra a professora. Professora: *"Olha, você organizou todos os números. Este aqui é o número um (ela aponta para o 1). Quero que você vá no jardim e traga uma folha para mim."* E assim sucessivamente. Ao perceber o envolvimento da criança, a professora se afastou, continuou observando o trabalho e aluna permaneceu envolvida durante muito tempo. Entretanto, ao chegar no número oito, ela começou a demonstrar certa dispersão, pois uma amiga veio pedir ajuda com um desenho. A professora não insistiu que ela terminasse, apenas solicitou ajuda para organizar o material e disse que em outro dia poderiam fazer novamente.

Fonte: dados da pesquisa

O trabalho com os números ajuda a desenvolver nas crianças o pensamento numérico. Ao quantificar as folhas, a aluna estava interpretando os números de acordo com suas quantidades, ou seja, relacionando a quantidade com os numerais.

Essa proposta permite o desenvolvimento do conceito de número pela criança, embora como nos lembram Lopes, Roos e Bathelt (2014, p. 34), "não podemos confundir a capacidade que as crianças têm de reproduzir oralmente os nomes dos números na sequência correta da contagem oral com a compreensão e o domínio do processo da contagem propriamente dito". E que é por meio de brincadeiras e desafios que a criança compreende essas noções.

Assim, conseguir relacionar o numeral a uma quantidade de objetos, nesse caso, de folhas permite ao professor saber que a criança já iniciou o desenvolvimento dessa noção.

A atividade anterior além de trabalhar a matemática, apresenta o movimento do corpo, uma vez que a criança precisa se deslocar da sala até a área externa da escola. O movimento do corpo está presente nas atividades diárias da sala observada. De acordo com Lillard (2017), Montessori defendia o desenvolvimento de conceitos psíquicos da criança em conjunto com a atividade física.

Quadro 2: *Episódio 3 - Números de lixa*

Uma aluna é convidada pela professora a trabalhar com os números de lixa. Professora: *"Este é o número 1!"* Passa o dedo no numeral 1 e, posteriormente, o registra em uma bandeja de areia. Professora: *"Agora é sua vez."* A aluna faz o mesmo que a professora e continua com os números seguintes mesmo sem a professora solicitar.



Figura 1: Números de lixa

Criança 1: *"Eu já fiz todos, tia. O que posso fazer agora?"*
Professora: *"Agora eu vou pegar para você um material que vai nos ajudar."*
A professora pega na estante um quadro mural quadriculado e convida a criança a registrar os números com giz.

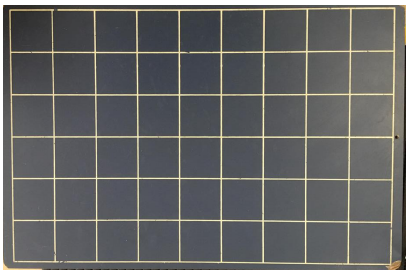


Figura 2: Quadro mural quadriculado

Um aluno que estava observando o trabalho chega até a professora e diz:
Criança 2: *"Tia, quer ver meu número oito?"*
Professora: *"Quero sim!"*
Ele direciona-se até o quadro de giz e faz o número 8 (com o movimento idêntico ao feito nos números de lixa).
Depois, ele faz um número 7 e o transforma em 8, junto a isso, diz que está descobrindo maneiras de transformar um número em outro.

Fonte: dados da pesquisa

A atividade apresenta à criança os símbolos que representam os números e proporciona um trabalho tátil acerca do movimento de cada número. O objetivo direto desse material é "apresentar às crianças os símbolos dos numerais, isto é, os algarismos – a 'chave' do mundo dos números" (Almeida, 2004, p. 19). Além disso, o material utilizado prepara a mão da criança para escrita dos numerais, por meio do movimento específico do toque e ao traçá-los, a criança trabalha sua memória muscular do formato dos numerais que futuramente serão escritos no papel.

Machado (1986) ressalta que a importância dos materiais montessorianos é que possibilita à criança a auto atividade, estimulando sua atenção e concentração por meio da manipulação de materiais manipuláveis que permite que elas intuam e pensem sobre os conceitos.

A forma na qual a professora conduziu a atividade conseguiu cativar a atenção da criança 2 que observava de longe e fez com que ela se envolvesse tanto quanto a criança 1. No momento em que a professora se afastava das crianças, ela continuava observando o trabalho e analisando como cada uma desenvolvia e quais seriam as próximas intervenções. Essa atividade auxilia também no desenvolvimento da coordenação motora da criança para que ela represente os numerais.

Quadro 3: *Episódio 11 - Contar as patas dos animais*

Algumas crianças estavam trabalhando com a caixa de animais que pertencem à classificação dos répteis (material de ciências). Ao observar o trabalho e perceber que elas comentavam sobre as patas dos animais, a professora decidiu apresentar às crianças um conceito matemático.

Ela solicitou que eles escolhessem um animal e contassem quantas patas eles tinham. Depois entregou a eles alguns círculos e pediu para colocarem a quantidade correspondente a cada pata. No momento que as crianças chegaram na cobra, elas perceberam que ela não tinha nenhuma pata e foi quando a professora comentou sobre o zero.

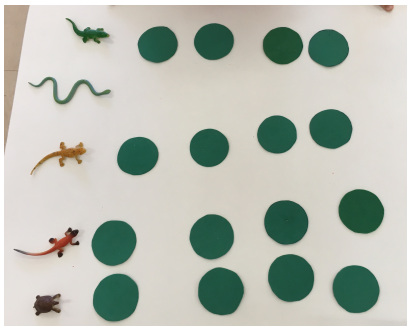


Figura 4: animais e círculos representando a quantidade de patas

Fonte: dados da pesquisa

Novamente, essa atividade envolveu a contagem e a representação com círculos, ou seja, para cada pata dos animais as crianças recortaram um círculo. Dessa forma, a professora abordou o conceito de correspondência um a um, ideia muito importante para compreensão do número.

A correspondência um a um refere-se a comparação entre dois conjuntos em que um deles é constituído pelos elementos que se deseja contar e o outro permite controlar a quantidade do primeiro (Moretti & Souza, 2015).

Além disso, possibilitou também a discussão sobre o zero já que a cobra não tem patas. É preciso ter o cuidado ao trabalhar a ideia do zero com as crianças evitando associá-lo ao nada, pois ele refere-se, na verdade, a ausência de quantidade e esse exemplo da cobra permite compreender esse fato.

O método Montessori busca trabalhar a conceituação de numeração e contagem ao relacionar sistematicamente as quantidades aos símbolos numéricos. Existe um material na sala de aula montessoriana chamado fusos que possibilita à criança "contar quantidades avulsas dentro do limite 10 e introduzir o conceito do zero, de ausência" (Almeida, 2004, p. 39).

Algumas considerações

Ao analisar as atividades observadas e registradas nas notas de campo, foi possível perceber que a matemática e o conceito de número está presente em todas as áreas de desenvolvimento oferecidas pela sala montessoriana, ou seja, o espaço é enriquecido de nomenclaturas e de conceitos matemáticos que contribuem para a ampliação do vocabulário das crianças.

A professora trabalhou a contagem de rotina com o uso do calendário, com a quantidade de crianças que estavam na sala e que tinham faltando, etc. Ela sempre estimula às crianças a

pensarem em formas de resolver os problemas, o que fazia com que elas pensem e busquem formas de resolver as situações.

Os trabalhos observados exploraram conceitos como contagem, número, quantidade, o zero etc. Ainda sobre os conceitos matemáticos foi interessante perceber que eles foram trabalhados, mas não da maneira formalizada que deve ocorrer nos anos seguintes de escolarização. Além disso, as atividades desenvolvidas proporcionaram às crianças o protagonismo na construção de seus conhecimentos em conjunto com a manipulação de materiais que contribuem para a abstração dos conceitos de número.

Durante as observações, Bianca trabalhou frequentemente a conquista do 10 com as crianças por meio de trabalhos com os números de 1 a 9 e, posteriormente, com a apresentação de novas ordens. A postura da professora deixou claro que seu principal objetivo era mediar a relação da criança com o ambiente e guiá-las na utilização dos materiais.

As crianças vivenciaram situações que foram oportunidades de conectar os conhecimentos adquiridos à realidade. O aprendizado era ativo, criativo, dinâmico e o interesse era contínuo e contribuiu significativamente para a construção do conhecimento matemático.

Dessa forma, percebemos algumas contribuições que o método Montessori traz para o ensino e aprendizagem de números na Educação Infantil.

Referências

ALMEIDA, Talita. *Desenvolvimento da mente matemática 2: Aritmética Montessoriana l.* 7ª Edição. Rio de Janeiro: Presence Editora, 2004.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Brasil. Ministério da Educação e do Desporto. (1998). *Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil.* Brasília: MEC.

Fazolo, E. (2014). Políticas de atendimento à infância no Brasil: entre proposições e perspectivas. In: M. Carvalho & M. Bairral et al. (Org.). *Matemática e educação infantil*: investigações e possibilidades de práticas pedagógicas. Petrópolis: Editora Vozes.

Laville, C. & Dionne, J. (1999). *A construção do saber*: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre: Artmed.

Lillard, P. P. (2017). *Método Montessori*: uma introdução para pais e professores. Barueri: Editora Manole.

Lopes, A. R. L. V., Roos, L. T. W. & Bathelt, R. E. (2014). O número: compreendendo as primeiras noções. In: Brasil. Secretaria de Educação Básica. *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa*: construção do sistema de numeração decimal. Brasília: MEC.

Machado, I. L. (1986). *Educação Montessori:* De um homem novo para um mundo novo. São Paulo: Pioneira.

Moretti, V. D. & Souza, N. M. M. (2015). *Educação matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental:* princípios e práticas pedagógicas. São Paulo: Cortez.

Perry, C. (2017). Prefácio. In: M. Montessori. *A descoberta da criança*: pedagogia científica. Campinas: Kírion.

Richardson, R. J. et al. (2008). *Pesquisa Social: métodos e técnicas*. São Paulo: Atlas.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O Lúdico dos Jogos Digitais na Interpretação e Resolução de Problemas Matemáticos no Ensino Fundamental I: Um relato de uso

Márcia Regina **Kaminski**
Escola Municipal Aloys João Mann
Cascavel/PR – Brasil
marciarkjf@gmail.com

Clodis **Boscarioli**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Cascavel/PR – Brasil
boscarioli@gmail.com

Resumo

Em alguns contextos escolares os Jogos Digitais são amplamente utilizados em especial devido ao caráter lúdico, atrativo e motivador que podem propiciar aos processos de ensino e aprendizagem. Há questionamentos, porém, em torno de como utilizá-los para que atendam às finalidades pedagógicas e não se limitem apenas à uma atividade lúdica. Nesse sentido, o presente trabalho apresenta uma sugestão de sequência de três tipos de jogos para a abordagem do conteúdo Interpretação e Resolução de Problemas Matemáticos em turmas de 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental I. A proposta é resultado da experiência realizada com estudantes dessa faixa etária em aulas de Informática Educacional em uma escola da Rede Municipal de Ensino de Cascavel/PR. Os resultados apontam que é possível abordar o conteúdo de forma atrativa e motivadora sem preterir o conteúdo pedagógico curricular.

Palavras-chave: Informática na Educação, Jogos Digitais, Ensino de Matemática, Resolução de Problemas, Ensino Fundamental.

Introdução

A palavra jogo normalmente remete à ideia de brincadeira, ludicidade e diversão. Por isso, não raro, os jogos são vistos com resistência nos contextos escolares mais tradicionais que, muitas vezes, os consideram como atividades de passatempo sem relevância ou contribuição significativa aos processos de ensino e aprendizagem. Porém, considerando os aspectos históricos e culturais da relação da humanidade com os jogos, de diferentes naturezas, é possível reconhecer o potencial atrativo e motivador que eles proporcionam.

Schwartz (2014) considera o jogo como uma questão histórica e cultural que faz parte do desenvolvimento da humanidade que tem necessidade do lúdico, do imaginário, da diversão. Para esse autor, o jogo é inerente à atividade humana e sempre traz um sentido motivador individual para o homem que sempre buscou formas de representar o imaginário, desafiar-se e ao mesmo tempo, divertir-se através de diferentes formatos de jogos, que no contexto atual inclui os digitais, que são desenvolvidos e jogados por meio de algum tipo de dispositivo eletrônico.

O caráter lúdico, atrativo e motivador dos jogos é inegável, especialmente para os estudantes do século XXI que estão em contato cada vez mais intenso e frequente com diversos tipos de jogos digitais, de modo que a escola pode fazer uso desse interesse dos estudantes pelos jogos como recurso para os processos de ensino e aprendizagem.

Reconhecendo esse fato, os jogos digitais estão sendo explorados em vários contextos escolares e as experiências revelam que sua utilização tem propiciado uma abordagem dos conteúdos que favorece o interesse dos estudantes. A exemplo disso, Silva e Queiroz (2014, p. 2) destacam que por meio dos jogos é possível trabalhar com uma nova abordagem educacional baseada na motivação e na experimentação: "os jogos criam uma necessidade convincente para saber, uma necessidade de perguntar, examinar, assimilar e dominar certas habilidades e conteúdos". Para esses autores, os jogos podem funcionar como sistemas de aprendizagem se bem direcionados e explorados pelos professores. O engajamento dos alunos nessas atividades favorece o querer aprender. Para Corbellini *et al.* (2015), os jogos desafiam os estudantes tornando o aprender mais prazeroso, desenvolvendo a tomada de decisões e atraindo a atenção.

Os jogos, sejam eles digitais ou não, se caracterizam por envolver, de acordo com Prensky (2012), os seguintes elementos: regras que orientam as ações, objetivos ou metas que motivam às ações, resultados que indicam respostas às ações, desafios que estimulam a continuar o jogo, a interação entre os jogadores e o enredo que indica o que o jogo representa (um conflito, uma história). Sousa (2016) separa os jogos utilizados no contexto escolar em duas categorias: os educativos, que fazem parte dos Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA), cuja principal finalidade é instruir e ensinar; e os educacionais que incluem os jogos comerciais, que não têm por objetivo principal ensinar algum conteúdo específico como os educativos, mas podem ser utilizados para esse fim a depender da abordagem utilizada, porém com finalidades diferentes, visando contribuições diferentes. Os jogos educativos estão cada vez mais incorporando elementos dos comerciais, tornando-se mais desafiadores, englobando enredos e aprimorando o caráter atrativo do jogo sem perder a finalidade pedagógica para a qual são desenvolvidos. No entanto, suas contribuições aos processos de ensino e aprendizagem vão muito além da questão motivacional, e o professor pode variar sua utilização dependendo dos objetivos. A título de ilustração, os trabalhos abaixo exemplificam diferentes cenários e contextos de uso.

Costa *et al*. (2009) abordaram conteúdos de geometria com alunos do curso de licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por meio de *software* e jogos matemáticos e concluíram que o jogo contribuiu para uma aprendizagem significativa na qual os alunos realmente entenderam os conceitos abordados e não apenas memorizaram ou decoraram. Gonçalves (2011) utilizou quatro jogos digitais educativos para o ensino de Matemática, com 17 alunos do 9º ano da rede estadual de Santa Catarina, destacando o auxílio na compreensão, motivação e aumento da confiança dos estudantes em relação à capacidade de aprender Matemática. Couto *et al.* (2016) relatam uma experiência positiva com alunos do 4º Ano do Ensino Fundamental I, de uma escola pública em Belém do Pará, na qual

utilizaram o jogo *TuxMath* para o ensino da operação de adição, relatando que o jogo auxiliou na aprendizagem lúdica e motivou os alunos.

Boscarioli *et al.* (2017), realizaram uma experiência com 20 alunos do 6º ano em um colégio estadual indígena, para abordagem de dois conteúdos da disciplina de Matemática utilizando dois jogos educativos. Para a experiência foram utilizados apenas 3 *notebooks* devido às limitações em termos de infraestrutura da escola e os alunos trabalharam com os jogos em sistema de rodízio coordenado pelos professores, adaptando a metodologia de rotação por estações de aprendizagem definida por Moran e Bacich (2015). Os resultados apontaram o maior interesse dos alunos em resolver problemas matemáticos no desafio do jogo do que em atividades convencionais. Além disso, os resultados também revelaram a importância da inserção das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação em todos os contextos educacionais, seja urbano, rural ou indígena.

Para que os objetivos sejam atingidos e os resultados esperados sejam alcançados, é preciso utilizar os jogos com intencionalidades bem definidas e realizar mediações pedagógicas que propiciem a reflexão por parte do aluno durante o jogo. Assim, feita essa contextualização do uso de jogos em diferentes conteúdos matemáticos e níveis de ensino, este artigo centra-se a partir de agora em apresentar possibilidades de abordagem do conteúdo Interpretação e Resolução de Problemas a partir da experiência de uso de jogos com alunos do 4º e 5º ano em uma escola pública municipal da cidade de Cascavel/Paraná.

Interpretação e Resolução de Problemas com Jogos Digitais

No município analisado, as escolas ofertam em período regular de ensino, o atendimento semanal de 40 minutos a todos os alunos no Laboratório de Informática. Desde 2017, por orientações da Secretaria Municipal de Educação, devem ser priorizados os conteúdos da disciplina de Matemática nas aulas de Informática, que são planejadas e ministradas por Instrutores qualificados para tal. Essa seção objetiva exemplificar a dinâmica do trabalho realizado no Laboratório de Informática de uma dessas escolas, no sentido de abordagem lúdica dos conteúdos matemáticos, a partir de três aulas desenvolvidas nesse espaço, nas quais foram trabalhados, de forma diferenciada, a interpretação e resolução de problemas matemáticos, conteúdos já explorados em sala de aula pelas professoras regentes.

Para essas aulas foram selecionados diferentes jogos educativos (OVA), sendo que alguns apresentam características dos jogos comerciais. Também foram empregadas estratégias de gamificação como o uso do recurso *Quiz* do *software Kahoot*[1]. Essa é uma estratégia para tornar as aulas mais dinâmicas, atrativas e desafiadoras aos alunos, de modo que o professor pode incorporar elementos dos jogos em diversas aulas ou atividades que desenvolve. Plataformas gratuitas como *Kahoot* possibilitam a criação de *Quizzes* sobre vários conteúdos tornando possível uma aprendizagem mais dinâmica.

> No *Kahoot* (em *Quiz*), cada aluno visualiza no seu dispositivo móvel se a resposta está correta ou incorreta. Na sala, é projetada a pergunta, a distribuição das respostas pelas opções sendo destacada a resposta correta. Em seguida, é apresentado o ranking com os nomes dos respondentes com melhor pontuação

[1] *Kahoot* é uma plataforma gratuita de aprendizagem baseada em jogos, usada como tecnologia educacional, disponível em https://kahoot.com

> (sendo consideradas a resposta correta e a rapidez de resposta). Este resultado costuma gerar alguma euforia. A competição impõe-se e, simultaneamente, estimula os alunos a quererem saber para conseguirem responder corretamente, no mais breve espaço de tempo (CARVALHO, 2015, p. 11).

Na sequência, são descritos os recursos e encaminhamentos adotados em cada uma das três aulas em que o conteúdo foi explorado, junto à discussão dos principais resultados.

Aula 1: Nessa aula, o objetivo foi trabalhar interpretação e resolução de problemas paralelamente às relações inversas entre as operações de adição e subtração desenvolvendo o pensamento algébrico, e estimulando o cálculo mental. Para isso preparou-se um *quiz* no *Kahoot* com problemas matemáticos personalizados ao conteúdo e às necessidades dos estudantes. A Instrutora tem uma conta na plataforma, e quinze questões foram elaboradas definindo as alternativas erradas e certas, e o tempo limite para a resposta, definido em 20 segundos.

A instrutora acessou o *game* na sua conta do ambiente e projetou a tela para os alunos que se conectaram a ele em seus equipamentos (neste caso os computadores do Laboratório), solicitando aos estudantes que inserissem o código do *game* gerado automaticamente pelo ambiente e fornecido pela Instrutora e, à medida que foram se conectando os seus nomes foram exibidos da tela de projeção. As perguntas são projetadas, a exemplo da Figura 1, junto com as alternativas vinculadas a uma cor e forma geométrica.

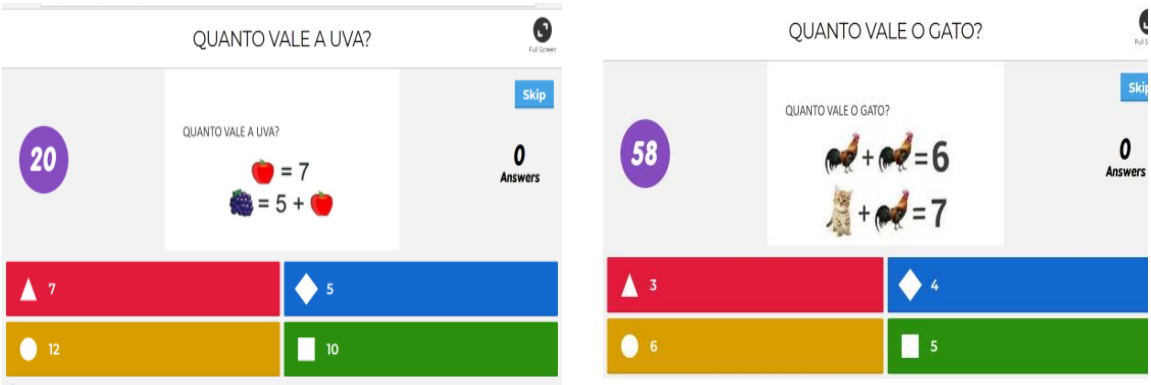


Figura 1. Exemplos dos problemas criados no *Kahoot*
Fonte: Perfil de usuário da escola no *Kahoot*.

Os alunos têm um tempo para responder sendo que nos seus equipamentos aparecem apenas as cores e formas que representam as alternativas. O aluno deve ler a pergunta projetada na tela, definir a resposta correta e clicar no símbolo e cor correspondente dentro do tempo estipulado, de forma que *Kahoot* é também útil no desenvolvimento das funções psicológicas superiores como memória, raciocínio, atenção, concentração. A pontuação é exibida na tela assim que o limite de tempo é atingido e é definida pelo acerto e velocidade em responder.

O jogo gerou bastante euforia. Os alunos mostraram-se envolvidos e preocupados em acertar as respostas. Inicialmente, tentavam responder rápido sem ler atentamente as questões, preocupados com o esgotamento do tempo, mas perceberam que assim os erros eram constantes e nas perguntas seguintes mantiveram-se focados na leitura e interpretação das questões.

A quantidade de questões foi adequada, considerando que inicialmente a Instrutora teve que explicar a dinâmica do jogo aos estudantes e entre a apresentação de uma questão e outra fazia-se a discussão oral e coletiva das soluções, a fim de que os estudantes pudessem verificar

as razões dos erros ou acertos. Em todas as questões a Instrutora realizou a discussão dos resultados por meio de questionamentos como: Por que essa alternativa não é a correta? Como podemos ter certeza disso? Como vocês pensaram para chegar a essa resposta?

Assim, a Instrutora fez mediação pedagógica do processo por meio de perguntas que ajudassem os alunos a analisar os erros e acertos. Por essa mediação os estudantes puderam perceber os conceitos matemáticos envolvidos na atividade e utilizá-los para responder as próximas questões. Interessante notar que mesmo os alunos que não ficaram entre os primeiros colocados não desistiram do jogo, nem se demonstraram desanimados, ao contrário, participaram de forma ativa e envolvida empenhados em acertar as questões e ao final, questionaram a Instrutora sobre quando teriam outra aula com o *game*. Algumas vezes houve lentidão para as questões serem carregadas em função de todos os alunos estarem conectados. Porém, isso não foi um impedimento à realização das atividades que foram concluídas como planejadas.

Aula 2: Foi selecionado o OVA "Operações com Números em Situações Problemas" (ALVES, 2015) para a prática da interpretação e resolução de problemas. Nesse jogo o aluno tem o desafio de conduzir o personagem pelo ambiente do jogo, fugindo dos obstáculos e capturando as bandeiras que estão distribuídas pelo cenário. Ao tocar em uma bandeira, um problema é apresentado e o aluno só ganha a bandeira em questão ao responder o problema corretamente. O jogo termina quando as 20 bandeiras tiverem sido capturadas. A Figura 2 mostra o cenário após a captura da bandeira e a pontuação obtida.

Os alunos mostraram-se entusiasmados com o ambiente e proposta do jogo. Porém, inicialmente valeram-se de estratégias para conseguir as bandeiras de forma por eles considerada mais fácil, sem ter que resolver todos problemas. Eles perceberam que ao tocar em uma bandeira e depois afastar-se dela, quando tocavam na mesma bandeira pela segunda vez, um problema diferente era apresentado. Assim, começaram a fazer isso diversas vezes para evitar os problemas mais complexos. Essa estratégia, no entanto, não funcionou, pois, os problemas não resolvidos acabam sendo exibidos novamente em outro momento. O OVA mostra-se adequado nesse sentido, pois apresenta os problemas aleatoriamente sem descartar nenhum deles, tal que todos devem ser resolvidos.



Figura 2. Exemplos de telas do OVA "Operações com Números em Situações Problemas"
Fonte: http://atividades.fundetec.org.br/.

Outra estratégia dos estudantes foi observar somente os números que apareciam no problema e realizar diversas operações combinando-os de formas diferenciadas, fazendo tentativas aleatórias de cálculos envolvendo subtração, adição, multiplicação e divisão, o que não fornecia o resultado correto e os alunos não avançavam no jogo. Nesse momento reclamavam: "*O jogo está errado porque já fiz todas as contas de todos os jeitos e não passa". "O jogo está "bugado" professora! Já fiz mais, menos, vezes e dividir e não dá.".* A Instrutora então procedeu

com as mediações pedagógicas por meio dos questionamentos: Por que você fez assim? Por que você escolheu essa operação? As respostas das crianças giravam em torno de: *"Não tem que fazer uma dessas contas"?* A Instrutora questionava: Pode me dizer do que se trata esse problema? As crianças apenas liam o problema para a Instrutora, mas não conseguiam explicá-lo. A Instrutora conduziu novos questionamentos como: Sobre o que ou quem o texto fala? O que aconteceu? O que nós sabemos? O que precisamos saber? Podemos utilizar as informações dadas para identificar o que precisamos? De que forma? A partir daí as crianças compreenderam a importância de ler para então decidir como resolver o problema e começaram a avançar no jogo. Em média, conseguiram capturar 12 bandeiras durante a aula.

As dificuldades com leitura e interpretação foram mais significativas do que as com os cálculos envolvidos. A mediação da Instrutora foi importante e o jogo mostrou-se adequado, pois impossibilitou aos alunos avançarem por outros métodos que não fosse a resolução dos problemas, o que é fundamental, pois do contrário, os alunos apenas passariam as fases usufruindo o lúdico do jogo, mas sem haver apropriação do conteúdo.

Aula 3: Com o objetivo de aprofundar o conteúdo, a Instrutora propôs uma atividade onde os estudantes elaboraram seus próprios problemas matemáticos. Para isso, foi selecionado o OVA Histórias Fantásticas© (CASTRO FILHO; PEQUENO, 2018) utilizado para a produção de textos pelos alunos, a partir do qual o aluno pode escolher uma atividade com objetos prontos para montar o cenário da história, ou pode ilustrar sua história. Os alunos escolheram um dos temas e montaram o cenário inserindo os objetos selecionados. A Instrutora auxiliou as duplas esclarecendo suas dúvidas. Os alunos foram lembrados das características de um problema por meio de questionamentos como: O que precisamos ter em um problema? Qual será a situação? Quais serão os personagens ou objetos envolvidos? O que acontecerá com eles? Qual será a pergunta final? Que informações serão dadas e quais precisarão ser identificadas?

A Instrutora lembrou os alunos do cuidado com a escrita tanto em questões ortográficas e gramaticais, além importância de o texto do problema ser escrito de forma compreensível, uma vez que outras pessoas iriam resolvê-lo. Alguns alunos elaboraram problemas simples, outros, problemas mais complexos. Passado o tempo, as duplas trocaram de computadores para resolver os problemas uns dos outros. Alguns problemas puderam ser resolvidos facilmente, pois estavam bem escritos. Alguns tiveram escrita não muito clara e outros esqueceram de colocar a pergunta. Nesses casos, as duplas chamavam a Instrutora e argumentavam: *"Não dá pra resolver porque falta a pergunta."; "Não dá pra entender nada."; "Não dá pra saber o que é pra fazer."*. Nesses casos a Instrutora orientava o diálogo entre as duplas autoras e as duplas que estavam solucionando para que explicassem e reformulassem o necessário. Esse exercício de refletir e dialogar sobre os problemas, de compartilhar estratégias e dúvidas e expressar suas opiniões justificando suas escolhas no momento da elaboração e da solução foi bastante produtivo. Alguns alunos se deram conta dos erros, tanto de autoria quanto de solução, apenas nesse momento.

As duplas foram incentivadas, no momento da solução, à além do cálculo, escrever um pequeno texto explicando a razão pela qual optaram por determinada forma de solução. Esse escrever sobre uma solução matemática também é um exercício importante, segundo Boaler (2018), para estruturar o raciocínio e o pensar matemático, ajudando a construir significados.

Ao final da aula os problemas com as respectivas soluções foram impressos. A Instrutora fez a correção ortográfica final e algumas observações para ajudar as duplas a melhorar tanto o problema quanto a solução. A Figura 3 ilustra o trabalho final realizado por uma das duplas.

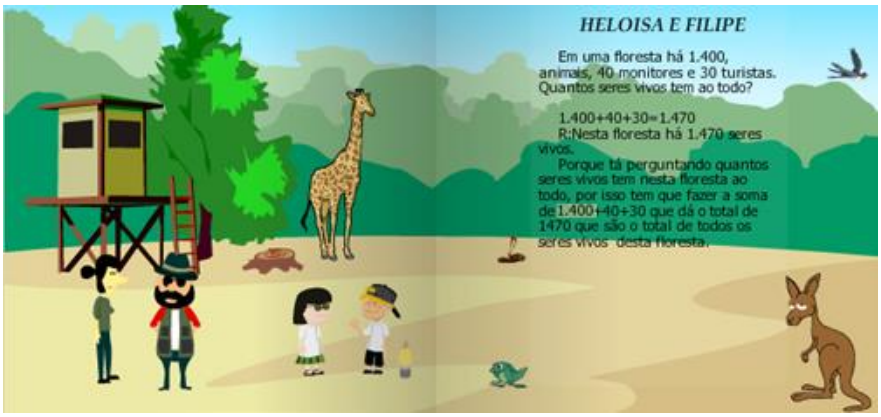


Figura 3. Exemplo de problema elaborado pelos alunos
Fonte: Dados da pesquisa.

Na aula seguinte, o material impresso foi distribuído às duplas que fizeram as devidas correções nos problemas, tanto no texto quanto da solução para impressão da versão final e montagem do mural com os trabalhos. A atividade foi bastante produtiva no sentido de que os alunos compreenderam as características de um problema, seus elementos e como utilizá-los como estratégia de solução. Também perceberam a importância de escrever corretamente e de forma clara. De forma interdisciplinar a atividade explorou conceitos matemáticos e linguísticos além de trabalhar a aspectos sociais e emocionais. Elaborar seus próprios problemas para outra dupla resolver chamou a atenção dos estudantes que se engajaram na atividade.

Considerações Finais

A sequência de jogos apresentada foi testada com alunos de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental I, sendo que no 4º ano o enfoque foi a introdução e no 5º ano a revisão e a prática do conteúdo. As atividades trouxeram contribuições importantes à medida que tornaram o conteúdo mais dinâmico, atrativo, motivador, sem deixar de lado a mediação pedagógica. Os alunos foram envolvidos pelas atividades, e na última foram protagonistas na criação de seus próprios problemas e puderam mostrar o que aprenderam exercitando a escrita e trabalhando colaborativamente com os colegas.

Kahoot oferece a possibilidade de criar *games* sobre diversos conteúdos adaptados às necessidades da turma. Portanto, é uma estratégia interessante para conteúdos com poucos materiais disponíveis em repositórios. Contudo, uma das dificuldades para utilização desse recurso pode ser o acesso à internet. O fato de ser um recurso que funciona apenas *online* é uma limitação nas realidades que não dispõe de acesso à internet. Os jogos que incorporam características dos jogos comerciais como o utilizado na segunda aula, que envolvem um personagem com desafios e metas a cumprir em um ambiente desafiador, prendem a atenção dos estudantes que ficam desejosos de resolver os problemas, o que muitas vezes não ocorre quando os mesmos problemas são propostos em formato tradicional. A última atividade, embora não se trate de um jogo em si, foi desenvolvida em uma perspectiva de protagonismo e colaboração entre os estudantes, o que a tornou desafiadora e instigante.

A importância da mediação pedagógica durante todo o trabalho ficou evidente de modo que o potencial de contribuições dos Jogos para o Ensino embora seja grande, só será plenamente alcançado quando os objetivos forem definidos e as mediações por parte do professor forem

constantes. Como trabalhos futuros, pretende-se elaborar sequências de jogos para abordagens de outros conteúdos incluindo os anos da alfabetização.

Bibliografia e Referências

Alves, J. C. V. (2015). *Operações com números em situações problemas*. Disponível em: <https://bit.ly/2xce4gG > Acesso em 13/09/2018.

Boaler, J. (2018). *Mentalidades Matemáticas*. Porto Alegre: Penso, 256p.

Boscarioli, C., Kaminski, M. R., Jumkerfeurbom, M. A. & Ribeiro, R. G. T. (2017). A Experiência de Alunos de uma Escola Indígena nos Primeiros Contatos com Jogos Digitais de Matemática. In: *Anais do XXIII Workshop de Informática na Escola*. p. 185-194. Disponível em: <http://goo.gl/yZu4VU>. Acesso em: 12/09/2018.

Carvalho, A. A. A. (2015). Apps para ensinar e para aprender na era mobile-learning. In: Carvalho, A. A. A. (Org.). *Apps para dispositivos móveis: manual para professores, formadores e bibliotecários*. Lisboa: Ministério da Educação de Portugal. Cap. 1. p. 9-18. Disponível em: <https://bit.ly/2lFBiXd> Acesso em: 11/09/2018.

Castro Filho, J. A. & Pequeno, M. C. (2018). *Histórias Fantásticas*. Universidade Federal do Ceará. Disponível em: <https://bit.ly/2Oi4KiE>. Acesso em: 17/08/2018.

Corbellini, S., Real, L. M. C. & Michailoff, F. (2015) Jogos online: ferramentas nas Intervenções Psicopedagógicas. In: *Anais do XXI Workshop de Informática na Escola*. p. 147-156. Disponível em: <https://bit.ly/2MnhHWp>. Acesso em: 11/09/2018.

Costa, B. F., Jorge, M. O., Basso, M. & Tonet, V. (2009) Interação Virtual para a Aprendizagem de Matemática. In: *Anais do XV Workshop de Informática na Escola*. p. 1897-1900. Disponível em: <goo.gl/eYX27L>. Acesso em: 09/08/2018.

Couto, F. V., Sousa, D. F., Barreto, W. D. L. & Sousa, A. M. C. (2016) Contribuições da Informática Educativa para a Operação de Adição: Uma Experiência com Alunos nos Anos Iniciais. In: *Anais do XXII Workshop de Informática na Escola*. Disponível em: <https://bit.ly/2t8355B>. Acesso em: 12/09/2018.

Gonçalves, P. A. S. (2011) *Jogos Digitais no Ensino e Aprendizagem da Matemática: efeitos sobre a motivação e o desempenho dos alunos*. 235 f. Dissertação - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade do Algarve. Disponível em: <http://sapientia.ualg.pt/handle/10400.1/5003> Acesso em: 08/08/2018.

Moran. J. & Bacich, L. (2015) Aprender e ensinar com foco na educação híbrida. *Revista Pátio*, n. 25, p. 45-47, jun. Disponível em: <http://goo.gl/1oBHmQ>. Acesso em 23/05/2018.

Prensky, M. (2012) A aprendizagem baseada em jogos digitais. São Paulo: SENAC, 546p.

Schwartz, G. (2014) *Brinco, logo aprendo: educação, videogames e moralidades pós-modernas*. São Paulo: Paulus, 343p.

Silva, L. R. A. & Queiroz, R. J. G. B. (2014) Aprendizagem baseada em jogos: Uma reflexão sobre o modelo de currículo da Quest to Learn. In: *Anais do XX Workshop de Informática na Escola*. p. 86-90. Disponível em: <https://bit.ly/2oZZapW>. Acesso em: 12/09/2018.

Sousa, C. A. B. (2016) O jogo em foco: uma discussão sobre os games e a aprendizagem. In: Raabe, A. L. A., Gomes, A. S., Bittencourt, I. I. & Pontual, T. *Educação criativa: multiplicando experiências para a aprendizagem Pipa Comunicação*. 472p. Série professor criativo: construindo cenários de aprendizagem - vol. 4 (e-book). p. 301-347.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ábaco, regletas, bloques multibase y billetes decimales: reflexiones acerca de su uso en la enseñanza del sistema de numeración decimal.

Olga Emilia **Botero** Hernández
Universidad de Antioquia.
Colombia
oebotero@gmail.com

Ana María **Jiménez** Echavarría
Colegio Gimnasio Los Pinares
Colombia
ana.jimeneze13@gmail.com

Resumen

El presente taller pretende contribuir a la formación de maestros de matemáticas, al ofrecer elementos teóricos y metodológicos que les permitan establecer una comparación práctica entre los diversos materiales manipulativos que se proponen en el ámbito académico para la enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración decimal. Se proponen varias tareas a los maestros para que las resuelvan usando el ábaco, las regletas de Cuisenaire, los bloques multibase y los billetes decimales con la finalidad de que analicen las posibilidades o limitaciones de cada uno de estos materiales por medio de una guía de trabajo y la retroalimentación grupal. En el análisis sobre los alcances y limitaciones de cada material se hará énfasis en la comprensión sobre el sistema de numeración decimal que se favorece en los niños.

Palabras clave: sistema de numeración decimal, ábaco, regletas de Cuisenaire, bloques multibase, billetes decimales.

Introducción

El eje central de este taller es el desarrollo y análisis de tareas que permitan a los maestros reflexionar acerca de los diferentes materiales manipulativos que se usan de manera frecuente en la escuela para la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal (SND) como son el ábaco, los bloques multibase, las regletas de Cuisenaire y los billetes decimales[1]. Como señalan Wolman y

[1]Es un material compuesto por fichas en forma de billetes con denominaciones 1,10 y 100 etc. que permite la manipulación de las unidades del SND y cuyas características se describirán más adelante.

Terigi (2007), la comprensión y utilización del SND es un propósito fundamental durante los primeros años de escolaridad.

En este taller se ofrecen a los participantes diversas oportunidades de favorecer la comprensión del SND, a partir de su participación en el desarrollo de tareas que se han llevado a cabo con niños y niñas de los grados preescolar y los primeros grados de educación básica en Colombia[2] en contextos de aula regular y en el desarrollo de diversas investigaciones. Las tareas propuestas han representado para los niños la oportunidad de comprender las relaciones al interior del SND a partir de las diferentes posibilidades de conteo o cálculo, en términos de Brissiaud (1993), quien señala la importancia de trascender en los niños de los procesos de conteo que se llevan a cabo cuando se observa la colección completa, a los procesos de cálculo que implican establecer una relación numérica entre dos cantidades, sin que medie la representación analógica de cada una de ellas. Los materiales utilizados en el taller permiten llevar a cabo agrupamientos, emplear el principio de la base y el valor posicional de las cifras, los cuales según Guitel, Ifrah (citados en Wolman y Terigi, 2007) ofrecen, además, la posibilidad de llevar a cabo diferentes cálculos, en particular, los relacionados con el pensamiento aditivo, sin recurrir a la enseñanza exclusiva de los algoritmos convencionales como único recurso de cálculo. Al finalizar el taller se invitará a los participantes a reflexionar alrededor de las prácticas de enseñanza y el diseño de las tareas que se dinamizan a partir del uso de estos materiales, así como las dificultades o restricciones que supone su utilización en el aula para la constitución de este saber matemático (SND) y el desarrollo de otras habilidades de pensamiento numérico.

Justificación

Cuando se piensa en los materiales pertinentes para potenciar los primeros aprendizajes numéricos y de manera particular la comprensión del SND, es común hacer referencia a los materiales manipulativos, los cuales han sido utilizados de manera amplia en la educación matemática, especialmente en los primeros grados, ya que estos materiales permiten que los estudiantes interactúen de forma directa con representaciones físicas de una idea matemática que se considera, puede ser abstracta para ellos.

El SND se considera una idea abstracta en tanto que es un saber que se constituyó de manera histórico-social con unas reglas y características específicas en relación con situaciones propias de la actividad matemática de determinadas culturas. Este saber se complejiza en tanto requiere la comprensión de asuntos como la representación que se hace de los numerales en dicho sistema y la comprensión de sus características decimales y posicionales tales como: el uso de una base, la equivalencia entre unidades de diferente orden, las agrupaciones, reagrupaciones y el valor relativo de cada cifra dependiendo de la posición.

En este sentido, es muy común encontrar en nuestro medio el uso de materiales manipulativos con criterios que atienden a diversas demandas o situaciones propias de la cotidianidad escolar, por ejemplo, las propuestas que se realizan a partir de los textos escolares,

[2] El sistema educativo colombiano lo conforman: la educación inicial, la educación preescolar, la educación básica (primaria cinco grados y secundaria cuatro grados), la educación media (dos grados y culmina con el título de bachiller.), y la educación superior.

el material disponible en los diferentes establecimientos educativos y el acercamiento que el maestro tuvo a determinado material en sus años de formación en didáctica, entre otros. Sin embargo, es necesario que el maestro constituya un criterio claro frente al uso de estos materiales, sus potencialidades y alternativas para su incorporación en el aula.

Algunos de los materiales que se pueden observar comúnmente en la escuela son[3]: el ábaco, bloques multibase, regletas de Cuisenaire y billetes decimales. En términos generales estos materiales favorecen la comprensión de aspectos fundamentales del SND.

Ábaco

Es un instrumento que fue utilizado por diversas culturas para llevar a cabo cálculos y operaciones entre cantidades, un ejemplo de este es el ábaco chino cuyo propósito no era de carácter didáctico sino que apoyaba tareas concernientes al comercio. Sólo a partir de comienzos del siglo XIX con el movimiento de la reforma de la enseñanza primaria se incorporó a las aulas con el propósito de apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la aritmética básica en el aula (Gallego, 2018).

El ábaco se conforma por una base rectangular a la cual se encuentran sujetos barras o vástagos paralelas entre ellas, las cuales representan las unidades, decenas, centenas y/o unidades de mil, a estos vástagos se añaden arandelas que representan un numeral según la posición del vástago.

Bloques multibase

Se emplean en la escuela con el propósito de permitir a los niños la visualización de la relación entre los diez cubos de $1cm^3$ y la barra equivalente a ellos, entre las diez barras y la placa que las representa y entre las diez placas y el cubo, relaciones en las cuales cada bloque representa una unidad, una decena, una centena y una unidad de mil, respectivamente.

> El material se presenta en cajas de madera. Una para cada base de numeración y está compuesto de cubos, placas y barras de madera pulida, sin color a fin de conseguir una mayor abstracción. En cada caja se encuentran: unidades, barras, placas y bloques. Llevan unas ranuras, fácilmente apreciables a un cm de distancia. Dienes (citado en Silva y Varela, 2010, p. 31)

Regletas de Cuisenaire

Su uso en el aula corresponde a la enseñanza de la serie numérica y de relaciones de carácter aditivo entre diversas cantidades que pueden representarse mediante la yuxtaposición de dos más regletas para formar otra equivalente, pretende hacer visibles estas equivalencias entre cantidades que se componen para formar otra.

> También se denominan ‘números en color’, son una colección de barras en forma de prismas rectangulares de diverso color según las longitudes, estas van desde 1 cm hasta 10 cm. Las regletas que tienen el mismo color poseen la misma longitud, este tipo de

[3] Esta lista no pretende ser exhaustiva, solo se describen algunos materiales que se usan en la escuela para la enseñanza del sistema de numeración decimal.

> material permite la yuxtaposición de las regletas para evidenciar la equivalencia que puede haber entre una y otra (Jiménez, Zapata y Cautiva, 2017, p. 23)

Billetes decimales

Este material, aunque no se presenta de forma generalizada en la escuela, es una propuesta reciente para la enseñanza de las características de sistema de numeración decimal que pretende ampliar las posibilidades y alternativas para prácticas educativas en la educación primaria. Una primera experiencia en la cual se describen algunas particularidades del uso de este material se encuentra documentada en el trabajo de investigación titulado "Prácticas matemáticas que movilizan estudiantes de primer grado, al utilizar los billetes decimales" (Jiménez, Zapata y Cautiva, 2017). "este material diseñado con las mismas características de nuestro sistema, pues consta de unos, dieces, cienes, etc., favorece la manipulación concreta de las unidades del sistema de numeración que usualmente es presentado de forma abstracta" (Botero, 2011, p. 7).

Existe una amplia gama de alternativas para la incorporación de materiales en la escuela y una multiplicidad de factores y de visiones que influyen en su elección y utilización en el aula. De manera particular, la naturaleza y las características de cada uno de estos materiales determinan los alcances y restricciones en términos de las relaciones que permiten reflejar en relación con el SND. Por tanto, se hace necesario desarrollar espacios y alternativas para favorecer la reflexión sobre a las posibilidades o limitaciones que, para la enseñanza de las matemáticas, ofrecen estos materiales. Es así como el presente taller permite a los maestros llevar a cabo tareas con cada uno de los materiales manipulativos y a partir del análisis que se realice, determinar las características de cada uno y plantear tareas que atiendan a la pertinencia o no de su uso, teniendo en cuenta las propiedades del SND que pueden estudiar con sus alumnos mediante el uso de dichos materiales.

Los objetivos que guían el desarrollo de este taller son:

- Reflexionar acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración decimal que se llevan a cabo en la escuela.
- Interactuar con diversos materiales manipulativos que se emplean en la escuela para la enseñanza del SND.
- Reconocer las fortalezas y debilidades que ofrece cada material manipulativo y las características particulares de las tareas que pueden llevarse a cabo con ellos.
- Plantear situaciones que pueden desarrollarse en el aula con cada uno de los materiales y comparar los alcances en cuanto a la comprensión que éstos posibilitan del SND en los niños.

Marco teórico

El uso de material manipulativo en la escuela primaria tiene un papel importante a la hora de medir los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de esta manera los materiales manipulativos deben ser entendidos como instrumentos que median su acción en el aula de clase. Vygotsky (1995) es uno de los primeros autores en indicar la importancia de la acción mediada instrumentalmente en el desarrollo de los procesos psicológicos superiores, es decir, el sujeto actúa sobre la realidad a partir del uso de diferentes instrumentos simbólicos o físicos, los cuales le permiten transformarla y transformarse. Entonces, de manera particular comprenderemos los instrumentos como "ese conjunto de recursos simbólicos —signos, símbolos,

textos, fórmulas, medios gráfico -simbólicos, artefactos, software, gestos— que constituyen los medios para la acción matemática" (Obando, Arboleda & Vasco, 2014, p. 85)

Otro autor que se refiere a la idea de los instrumentos y su relevancia en la actividad de los sujetos es Leontiev citado en Obando et al., (2014) quien al referirse a los instrumentos menciona que:

> (...) es a la vez objeto con el cual se realiza la acción laboral, pero también, el objeto social que sintetiza unos modos de acción socialmente elaborados. El instrumento es el conjunto complejo de métodos y operaciones socialmente elaboradas y cristalizadas en él. (p. 81)

En este sentido, los instrumentos no deben comprenderse solamente como objetos para la acción, sino como elementos que se dotan a través de la historia, de diversas ideas y significados a partir de las acciones de los sujetos que participan en la actividad. Un ejemplo de esto es el ábaco, el cual fue un instrumento creado para la realización de cálculos matemáticos en diversas prácticas que se relacionaban con la economía de la antigüedad, esta actividad matemática propia de los sujetos en una época y lugar determinado hace que la estructura física del ábaco- sistema de vástagos para representar las unidades decenas y centenas- , así como su funcionamiento y diseño se relacionen con las características del sistema de numeración decimal que usamos en la actualidad. De esta manera el material se constituyó a partir de la actividad humana de la época y en él se encuentra consignada la naturaleza de un saber matemático que determina su aspecto y funcionamiento. Además, es común encontrar en la actualidad el ábaco en el aula para mediar procesos relacionados con la enseñanza de las operaciones básicas o de algunas características del sistema de numeración decimal.

De acuerdo con lo anterior, los instrumentos toman especial relevancia durante la actividad matemática del sujeto que participa en el proceso de constitución del saber matemático, ya que estos "median las prácticas matemáticas en el aula de clase, dado que cristalizan en su estructura ciertas formas de relación que pueden ser puestas en analogía con formas de relación entre conceptos y objetos matemáticos" (Obando et al. 2014, p. 85).

Los materiales manipulativos, por tanto, se convierten en una alternativa para el trabajo en la escuela y, de manera especial, en los primeros grados de escolaridad, en los cuales se prioriza el trabajo con diferentes materiales para mediar los procesos de enseñanza de los numerales y del sistema de numeración decimal, materiales tales como el ábaco, las regletas de Cuisenaire, bloques multibase, billetes decimales, etc. Estos materiales se convierten en una herramienta indispensable para favorecer procesos de visualización y manipulación de estas ideas matemáticas que poseen una naturaleza abstracta, al considerar particularmente que nuestro sistema de numeración es un producto de la actividad humana, y dicho sistema cuenta con un desarrollo histórico-social. En este sentido es una convención cultural que se dota de una simbología y reglas particulares para su constitución y utilización.

En el caso específico de Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) sugiere en sus documentos rectores para la educación matemática en primaria la utilización de este tipo de

material, de manera precisa en estos documentos se hace alusión al uso de materiales de la siguiente manera:

> Para que los niños logren entender el significado de los números, además del uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre sus acciones y vayan construyendo sus propios significados (MEN, 1998, p. 46).
>
> Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas. (MEN, 2006, p. 54)

Aunque muchos autores resaltan la importancia de estos materiales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas e incluso se pueden encontrar diversas experiencias con estos materiales, otros autores también han reflexionado alrededor de las limitaciones de estos materiales para el aprendizaje del sistema de numeración decimal como lo son Silva y Varela (2010) y Lerner (1999). Se propone este espacio como un encuentro de formación, análisis y reflexión a partir de la experiencia misma con dichos materiales para constituir posturas críticas para su uso en el aula de clase.

Metodología

Los momentos que se presentan a continuación tienen como propósito brindar a los maestros asistentes al taller, los elementos teóricos y prácticos para tomar decisiones frente a la pertinencia y los usos más adecuados de los materiales manipulativos utilizados en la escuela para la enseñanza del SND. Es así como al finalizar el taller los maestros serán capaces de diseñar y llevar a cabo actividades de clase en las que incorporen de manera efectiva los diferentes materiales reconociendo y teniendo claridad frente a los criterios y los momentos en los que puede utilizarse cada uno de acuerdo con el nivel de desarrollo de los alumnos y con las intenciones didácticas del maestro con relación a dicho saber.

Primer momento: 5 minutos

Contextualizar a los participantes acerca de los antecedentes del taller, entre los cuales se encuentra la práctica en el aula regular en los grados primero y segundo de educación primaria y los referentes aportados por la investigación.

Segundo momento: 5 minutos

Realizar una primera indagación entre los maestros participantes acerca de las referencias que tienen de los materiales didácticos que se utilizarán en el taller: el ábaco, las regletas de Cuisenaire, los bloques multibase y los billetes decimales y en qué tipo de tareas los han empleado.

Tercer momento: 75 minutos

Se presenta a los maestros una tarea relacionada con los aprendizajes que los estudiantes constituyen en los primeros grados de escolaridad con respecto al SND, que deberán resolver, en grupos, cada uno con un material didáctico diferente registrando en un cuadro comparativo las posibilidades y limitaciones de dicho material. Los grupos de trabajo irán rotando, de manera organizada, por las bases en las que se encuentran los materiales restantes para llevar a cabo la tarea que se propone en cada una de ellas y llenar el registro.

Cuarto momento: 25 minutos

Se pondrán en discusión los registros que los maestros llevaron a cabo en las diferentes bases del momento anterior y se hará una caracterización del tipo de tareas que pueden ser abordadas en las aulas con cada uno de los materiales manipulativos utilizados durante el taller.

Referencias y bibliografía

.

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos.* Madrid: Aprendizaje Visor.

Gallego, D. C. (2018). Los catálogos de material escolar como fuente de la historia de la educación matemática: el caso de los ábacos. *Historia y Memoria de la Educación*, (7), 573-613.

Jiménez, A., Zapata, C y Cautiva, F. (2017). *Prácticas matemáticas que movilizan estudiantes de primer grado, al utilizar los billetes decimales (Tesis de grado)*. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Lerner, D. (1999). Reflexiones sobre: Uso del Material concreto en Matemáticas. Problemas de la Vida cotidiana. QUEHACER EDUCATIVO Nº 34 (Marzo), 56-60

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-231235.html.* Bogotá, Colombia: Magisterio

Obando, G., Arboleda, L. y Vasco, C. (2014). Filosofía, Matemáticas y Educación: una perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática. *Revista Científica*, 3*(20),* 72-90.

Silva, A. y Varela, C. (2010). Los materiales ―concretos‖ en la enseñanza de la numeración. Didáctica y prácticas docentes. *Que hacer Educativo*, 26-36.

Villa-Ochoa, J. y Botero, O. (2011). Estrategias y reflexiones matemáticas de maestr@s para maestr@s. Propuestas para la Educación Básica Primaria. Medellín, Colombia: Escuela del Maestro.

Vygotski, L. S., Kozulin, A., & Abadía, P. T. (1995). Pensamiento y lenguaje (pp. 97-115). Barcelona: Paidós.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El número natural como obstáculo en la comprensión del racional

Juan Manuel **González-Forte**
Universidad de Alicante
España
juanma.gonzalez@ua.es
Ceneida **Fernández**
Universidad de Alicante
España
ceneida.fernandez@ua.es
Salvador **Llinares**
Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumen

Algunas dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión del número racional están vinculadas a la aplicación inapropiada de las propiedades de los números naturales (fenómeno *natural number bias*). El objetivo de esta investigación es identificar perfiles de estudiantes de educación primaria y secundaria cuando resuelven tareas sobre la magnitud, la densidad y las operaciones con números racionales y su evolución a lo largo de los cursos. Participaron 438 estudiantes desde 5º de educación primaria (10 años) hasta 4º de Educación Secundaria Obligatoria (16 años). En los resultados se muestran las características de siete perfiles identificados y sus relaciones en cuanto a la evolución a lo largo de los cursos.

Palabras clave: *natural number bias*, *gap thinking*, perfiles, educación primaria y secundaria.

Introducción y marco teórico

Comprender el número racional es una parte esencial de la competencia matemática, ya que facilita la adquisición de contenidos matemáticos más avanzados como el álgebra y el cálculo (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983). Sin embargo, desde la década de los 80 las investigaciones están mostrando que los estudiantes de educación primaria y secundaria, e incluso los adultos, tienen dificultades en la comprensión de diferentes aspectos de los números racionales (Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985; Moss y Case, 1999; Resnick et al., 1989; Stafylidou y Vosniadou, 2004), mostrando que es un contenido complejo. Una de las posibles

causas de estas dificultades es la tendencia a aplicar (inapropiadamente) propiedades de los números naturales. La aplicación inapropiada de propiedades de los números naturales para resolver tareas de números racionales se está denominando fenómeno *natural number bias* (Ni y Zhou, 2005; Van Dooren, Lehtinen y Verschaffel, 2015).

La investigación sobre este fenómeno está siendo replanteada a nivel internacional en los últimos años desde nuevas perspectivas, que subrayan que el conocimiento sobre los números naturales facilita la resolución de tareas de números racionales que son compatibles con este conocimiento, pero provoca el efecto contrario cuando las tareas no son compatibles con dicho conocimiento (Vamvakoussi, Van Dooren y Verschaffel, 2012; Van Dooren et al., 2015). Los resultados obtenidos indican que los estudiantes resuelven de forma más eficaz las tareas con los números racionales que son compatibles con el conocimiento de los números naturales que aquellas en el que el conocimiento de los números naturales no es compatible con la tarea propuesta (Stafylidou y Vosniadou, 2004).

Con el fin de conocer en qué medida el conocimiento sobre el número natural interfiere en la comprensión de número racional, las investigaciones previas han considerado tres dominios: la magnitud de los números (su tamaño relativo), las operaciones aritméticas y la densidad (Obersteiner, Van Hoof, Verschaffel y Van Dooren, 2016; Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel y Van Dooren, 2015), teniendo en cuenta el papel desempeñado por las distintas representaciones de los números racionales (fracciones y números decimales).

Magnitud

A menudo los estudiantes de educación primaria y secundaria se basan en la ordenación de los números naturales cuando comparan fracciones, considerando que "a mayor numerador y denominador, mayor es la fracción" (Gelman, Cohen y Hartnett, 1989; Resnick, et al., 1989). Este conocimiento es compatible para resolver tareas de comparación de fracciones congruentes con la ordenación de los números naturales (aquellas en las que la fracción mayor tiene el numerador y el denominador mayor: 2/3 vs. 7/9) y no compatible para resolver tareas incongruentes con la ordenación de los números naturales (la fracción mayor tiene un numerador y un denominador menor: 3/4 vs. 5/9) (González-Forte, Fernández y Van Dooren, 2018; Van Hoof, Lijnen, Verschaffel y Van Dooren, 2013). Sin embargo, estudios recientes han obtenido resultados contrarios en los que los estudiantes tienen mayor nivel de éxito en las tareas incongruentes que en las congruentes. Estos resultados han sido obtenidos en estudiantes universitarios (DeWolf y Vosniadou, 2015) y en expertos matemáticos (Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof y Verschaffel, 2013), poniéndose de manifiesto la necesidad de considerar otras posibles causas no relacionadas con el *natural number bias* que expliquen las dificultades encontradas en este tipo de tareas, como el uso de estrategias erróneas como *gap thinking* "a menor diferencia entre numerador y denominador, mayor es la fracción" (Pearn y Stephens, 2004) y la estrategia *reverse bias* "cuanto más pequeño es el denominador, mayor es la fracción" (DeWolf y Vosniadou, 2015).

En cuanto a las tareas de comparación usando números decimales, los estudiantes de educación primaria y secundaria tienden a creer que cuantos más dígitos tiene la parte decimal, más grande es el número (Resnick et al., 1989). Por ejemplo, que 0.37 es mayor que 0.6 ya que 37 es más grande que 6. El rol del cero también desempeña un papel importante en las tareas de comparación de números decimales, ya que a menudo los estudiantes consideran que añadir un 0 al final de un número decimal incrementa su valor (0.320 es mayor que 0.32) (Durkin y Rittle-

Johnson, 2012).

Operaciones aritméticas

Cuando los estudiantes aprenden las operaciones aritméticas con los números naturales pueden asumir que la suma y la multiplicación "siempre dan como resultado un número mayor", y la resta y la división "siempre dan como resultado un número menor" (Fischbein et al., 1985). Sin embargo, esta afirmación no siempre es válida para los números racionales. Investigaciones indican que los estudiantes tienen mayor nivel de éxito y necesitan menos tiempo para estimar el resultado en tareas en las que se multiplica o divide un número natural por un racional mayor a la unidad: $3 \times 7/5$ o $3 \div 1.5$ que son congruentes con el modelo implícito anterior, que en las tareas en las que se multiplica o divide un número natural por un racional inferior a la unidad: 7×0.5 o $7 \div 1/3$) (Obersteiner et al., 2016; Van Hoof et al., 2015), que no es compatible con el modelo implícito generado por los números naturales.

Densidad

A diferencia de los números naturales, hay infinitos números racionales entre dos racionales (densidad). El concepto de densidad es complejo de comprender en estudiantes de educación primaria y secundaria, e incluso en adultos (Vosniadou y Verschaffel, 2004). Por ejemplo, los estudiantes tienden a considerar que entre 3/5 y 4/5 no hay ningún número, o que entre 4/7 y 6/7 únicamente está 5/7 (Merenluoto y Lehtinen, 2004; Vamvakoussi et al., 2012). Lo mismo ocurre con los números decimales, a menudo los estudiantes tienden a considerar que entre 1.67 y 1.68 no hay ningún número, o que entre 0.45 y 0.47 únicamente está el 0.46 (Moss y Case, 1999).

Nuestro estudio

La presente investigación tiene como objetivos (i) identificar perfiles de estudiantes con diferentes formas de comprender el número racional considerando sus respuestas a tareas de magnitud, densidad y de operaciones aritméticas de los números racionales (fracciones y números decimales), y (ii) examinar la evolución de los perfiles desde 5º de educación primaria a 4º de educación secundaria. La inclusión de los tres dominios de los números racionales en un mismo estudio puede permitir identificar relaciones entre ellos, así como caracterizar perfiles de estudiantes y su evolución con los años.

Método

Participantes

Los participantes fueron 438 estudiantes de primaria (10-12 años) y secundaria (12-16 años, ESO) pertenecientes a cuatro centros educativos (dos centros de educación primaria y dos centros de educación secundaria) de diferentes localidades de la provincia de Alicante (España) (Tabla 1). Los centros están situados en ciudades donde las familias son de clase media y alta.

Tabla 1

Número de participantes por curso

	Primaria		**Secundaria**				
Curso	5º	6º	1º	2º	3º	4º	**Total**
Nº de estudiantes	85	81	78	81	57	56	438

Instrumento y análisis

Diseñamos un test compuesto por 16 ítems sobre los tres dominios: magnitud, densidad y operaciones, incluyendo diferentes representaciones: fracción y decimal. Se incluyeron ítems congruentes e incongruentes con el conocimiento sobre el número natural (Tabla 2). El test estaba formado por 7 ítems de magnitud (2 congruentes y 5 incongruentes), 5 ítems de densidad (2 congruentes y 3 incongruentes) y 4 ítems de operaciones (2 congruentes y 2 incongruentes). Con relación al dominio de la magnitud, se propusieron 4 ítems de comparación de fracciones y 3 ítems de ordenación/comparación de números decimales. En los ítems de comparación de fracciones, se incluyeron 2 ítems con distinta diferencia entre numerador y denominador, donde el uso de la estrategia *gap thinking* lleva a la respuesta correcta (2/7 vs. 5/8: la fracción mayor tiene menos diferencia entre numerador y denominador); y 2 ítems con la misma diferencia, donde no se podía aplicar la estrategia *gap thinking*. De hecho, los estudiantes que usan la estrategia *gap thinking* para comparar, al observar la misma diferencia en estos ítems piensan que ambas fracciones son iguales. Para estudiar la densidad se propusieron 5 ítems en los que se pedía escribir un número entre dos racionales dados. Finalmente, el dominio de las operaciones aritméticas fue estudiado a través de 4 ítems de multiplicación de un número natural por un racional. Los estudiantes no solo debían resolver los ítems, sino que también se les pidió que justificaran sus respuestas.

Tabla 2

Ejemplos de ítems propuestos en el test

	Congruente	**Incongruente**
Densidad	Escribe dos fracciones entre 2/7 y 5/7 Escribe dos números entre 0.2 y 0.9	Escribe dos fracciones entre 3/5 y 4/5 Escribe dos números entre 0.4 y 0.5
Operaciones	Si multiplicamos 7 × 1.5 ¿el resultado será mayor o menor que 7?	Si multiplicamos 5 × 1/2 ¿el resultado será mayor o menor que 5?
Magnitud	Rodea la fracción mayor: 2/3 vs. 7/8	Rodea el número mayor: 0.37 vs. 0.5

Se llevó a cabo un análisis clúster con el software SPSS 23, con el fin de identificar clústers de comportamiento de los estudiantes en los diferentes dominios y cursos. Para ello, se codificaron las respuestas de los estudiantes en cada ítem con un 1 si la respuesta era correcta, y con un 0 si la respuesta era incorrecta o estaba en blanco. Además, se examinaron las justificaciones proporcionadas a las respuestas de los estudiantes con el fin de dar sustento a los resultados obtenidos tras el clúster. Los clústers obtenidos nos han permitido identificar siete perfiles de comportamientos de estudiantes que describimos a continuación.

Resultados

Descripción de los perfiles

Los siete clústers obtenidos permitieron clasificar el 95.88% de los estudiantes y los hemos denominado: Correcto, Full NNB, Density&Operation NNB, Fraction NNB, Reverse Operation, Reverse Size y Gap thinker. El ítem de densidad incongruente con fracciones no fue resuelto por casi ningún estudiante, por lo que no fue clave en la determinación de perfiles y no se tiene en cuenta en su descripción.

Perfil *Correcto* (29.22%). Estudiantes que resolvieron correctamente todos los ítems a excepción del de densidad incongruente con fracciones que no fue resuelto correctamente por casi ningún estudiante (tal y como se ha comentado anteriormente).

Perfil *Full NNB* (16.44%). Estudiantes que resolvieron únicamente de forma correcta los ítems congruentes con el conocimiento de los números naturales en los tres dominios.

Perfil *Density&Operation NNB* (6.39%). Estudiantes que resolvieron de forma correcta los ítems congruentes de todos los dominios, y los ítems incongruentes de magnitud con números decimales.

Perfil *Fraction NNB* (20.55%). Estudiantes que resolvieron correctamente los ítems congruentes e incongruentes con números decimales en todos los dominios. Sin embargo, con fracciones, únicamente respondieron correctamente los ítems congruentes.

Perfil *Reverse operations* (5.02%). Estudiantes que respondieron tuvieron más éxito en los ítems congruentes que los incongruentes tanto con fracciones como con decimales en magnitud y densidad, pero tuvieron más éxito en los ítems incongruentes que en los congruentes en el dominio de las operaciones.

Perfil *Reverse size* (4.79%). Estudiantes que tuvieron más éxito en los ítems incongruentes que en los congruentes en el dominio de la magnitud con fracciones. En el resto de dominios, tuvieron más éxito en los ítems congruentes.

Perfil *Gap thinker* (13.47%). Estudiantes que tuvieron más éxito en los ítems de magnitud con fracciones con distinta diferencia (donde el *gap thinking* lleva a la respuesta correcta) que en los ítems con misma diferencia. El resto de dominios los respondieron correctamente.

Evolución de los perfiles

A continuación, se describe, de manera general, la evolución de los perfiles desde 5º de educación primaria hasta 4º de educación secundaria (Figura 1).

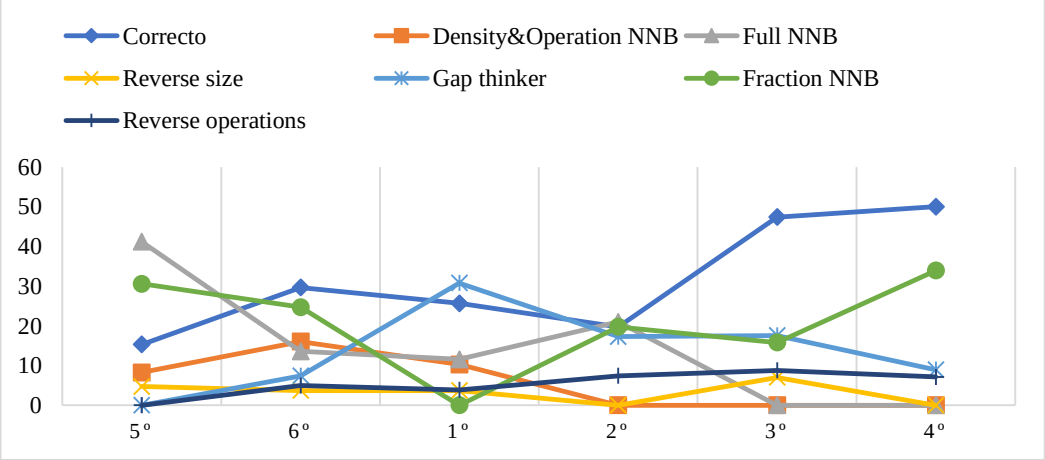


Figura 1. Evolución de los perfiles desde 5º de primaria hasta 4º de secundaria

En 5º de primaria predominan los perfiles *Full NNB* (41.18%) y *Fraction NNB* (30.59%), mientras que el perfil *Correcto* tiene un 15.29%. También aparece la presencia del perfil *Density&Operation NNB* (8.24%). Estos datos indican que, más del 75% de los estudiantes de 5º curso de primaria utilizaron incorrectamente propiedades de los números naturales para resolver tareas con números racionales en algunas de las tareas. De 5º a 6º de primaria aumentan los perfiles *Correcto* (29.63%) y *Density&Operation NNB* (16,05%), pero decrece el *Full NNB* (13.58%) y el *Fraction NNB* (24.69%). De este modo, en 6º de primaria el porcentaje de estudiantes de los perfiles *Fraction NNB* y *Density&Operation NNB* supera al *Full NNB* lo que

indica que los estudiantes de 6º curso comienzan a resolver correctamente ítems incongruentes con decimales en los diferentes dominios.

En 1º de Educación Secundaria hay un incremento del perfil *Gap thinker* (30.77%), siendo el curso con mayor número de participantes en este perfil. Por el contrario, los perfiles *Correcto* (25.64%), *Full NNB* (11.54%), *Density&Operation NNB* (10.26%) decrecen y *Fraction NNB* desaparece. Este resultado muestra que, aunque decrece el fenómeno *natural number bias* no aumenta el perfil *Correcto*, sino que aumenta el perfil *Gap thinker*. En 2º de ESO hay un aumento del perfil *Full NNB* (20.99%) y *Fraction NNB* (19.75%) de nuevo, y un decrecimiento de los perfiles *Gap thinker* (17.28%) y *Correcto* (19.75%). En 3º de ESO aumenta significativamente el perfil *Correcto* (47.37%), mientras que el perfil *Gap thinker* (17.54%) se mantiene en el mismo porcentaje que el curso anterior. El perfil *Fraction NNB* (15.79%) decrece ligeramente, mientras que el perfil *Full NNB* desaparece. Sin embargo, el descenso de los perfiles *Fraction NNB* y *Full NNB* se corresponde con un aumento del perfil *Reverse size* (8.77%), alcanzando su máximo porcentaje de empleo en este curso y también con un aumento desde 2º de la ESO del perfil *Reverse operations*. Finalmente, en 4º de ESO, el perfil *Correcto* (50%) aumenta, y disminuyen los perfiles *Gap thinker* (8.92%) y *Reverse size* (desaparece), mientras que el perfil *Fraction NNB* (33.93%) aumenta, siendo el curso con mayor número de participantes en este perfil.

Discusión y conclusiones

El objetivo de este estudio es identificar perfiles de estudiantes cuando resuelven tareas sobre la magnitud, la densidad y las operaciones aritméticas con los números racionales, y examinar su evolución desde 5º de educación primaria a 4º de educación secundaria. El análisis clúster determinó siete perfiles: *Correcto*, *Full NNB*, *Fraction NNB*, *Density&Operaton NNB*, *Gap thinker*, *Reverse size* y *Reverse operation*.

El análisis de la evolución de los perfiles permite señalar las siguientes conclusiones. En los primeros cursos de educación primaria predominan los perfiles *Full NNB* y *Fraction NNB*, lo que ratifica que los estudiantes usan las propiedades de los números naturales cuando comienzan a aprender los números racionales –fenómeno *natural number bias* (Ni y Zhou, 2005; Van Dooren et al., 2015) aunque no sea pertinente su uso. Además, los resultados muestran que el *natural number bias* decrece en números decimales con el aumento de los cursos, desapareciendo a partir de 3º de ESO (Van Hoof et al., 2018). Sin embargo, aunque este fenómeno desaparece con las fracciones a principio de la educación secundaria, aumenta a lo largo de la secundaria llegando a su porcentaje más alto en 4º de la ESO. Por tanto, los estudiantes de 4º de la ESO siguen considerando que "una fracción es mayor si su numerador y denominador son mayores" (DeWolf y Vosniadou, 2015), que "no hay, o hay un número finito de números racionales entre dos dados" (Merenluoto y Lehtinen, 2004; Vamvakoussi et al., 2012), y que "las multiplicaciones siempre dan como resultado un número mayor" (Fischbein et al., 1985).

Por otro lado, los resultados muestran que el perfil *Correcto* desciende de 6º de primaria a 2º de ESO y luego vuelve a aumentar. Este descenso de respuestas correctas se corresponde con un aumento del perfil *Gap thinker*, formado por estudiantes que se basan en la estrategia incorrecta *gap thinking* "a menor diferencia entre numerador y denominador, mayor es la fracción" (Pearn y Stephens, 2004) para resolver las tareas de comparación de fracciones. De este modo, el perfil *Gap thinker* lo forman estudiantes que únicamente tienen dificultades a la hora de determinar la magnitud de las fracciones. Sin embargo, el resto de tareas las resuelven

correctamente. Además, es destacable el hecho de que el perfil *Correcto* se observe únicamente en un 50% de los estudiantes al final de la etapa secundaria, por lo que la mitad de la muestra en el último curso de educación secundaria todavía tiene dificultades en la comprensión de algún dominio. También es destacable que se ha considerado como *Correcto* al perfil de estudiante que respondió correctamente todos los ítems, a excepción del de densidad incongruente con fracciones que no fue resuelto correctamente por casi ningún estudiante. Estos datos indican que el dominio de la densidad es el más difícil de comprender para estudiantes de educación primaria y secundaria (Vosniadou y Verschaffel, 2004). Además, se observan diferencias entre las formas de representación en este dominio, ya que los estudiantes en la mayoría de los perfiles fueron capaces de escribir un número entre 0.4 y 0.5, pero no entre 3/5 y 4/5.

El perfil *Density&Operation NNB* está únicamente presente en 5º, 6º y 1º ESO, y evidencia la transición entre el perfil *Full NNB* y el perfil *Fraction NNB*. Este resultado parece indicar, en los ítems utilizados en nuestro estudio, que los estudiantes primero desarrollan la comprensión de los números decimales, y posteriormente sobre las fracciones; y a su vez, primero desarrollan una comprensión en los ítems de magnitud y posteriormente de las operaciones y la densidad (Van Hoof et al., 2018). Por otro lado, el perfil *Reverse operation* evidencia la presencia de ciertos estudiantes, desde 6º hasta 4º ESO, que consideran que "multiplicar un número natural por un racional siempre va a dar como resultado un número menor", al contrario de lo que ocurre con los números naturales. Finalmente, el perfil *Reverse size*, formado por estudiantes que consideran que "cuanto más pequeño es el denominador, mayor es la fracción" (DeWolf y Vosniadou, 2015), parece mantener una trayectoria constante a lo largo de los cursos, sin ser predominante en ninguno de ellos.

Esta investigación tiene implicaciones para la enseñanza. En primer lugar, proporciona información sobre la comprensión sobre los racionales a lo largo de la educación primaria y secundaria a tener en cuenta en la elaboración de secuencias de enseñanza. En segundo lugar, proporciona información para el diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje del estudiante, en este caso sobre la comprensión de los números racionales, para ser usadas en los programas de formación inicial de maestros y profesores de matemáticas.

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (PROMETEO/2017/135).

Referencias

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. y Silver E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

DeWolf, M. y Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37*, 39-49.

Durkin, K. y Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, *22*(3), 206-214.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, *16*, 3-17.

Gelman, R., Cohen, M. y Hartnett, P. (1989). To know mathematics is to go beyond thinking that "fractions aren't numbers." En C. Maher, G. Goldin, y R. Davis (Eds.), *Proceedings of the eleventh annual*

meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 29–67). New Brunswick, NJ: Center for Mathematics, Science, and Computer Education at Rutgers–The State University of New Jersey.

González-Forte, J.M., Fernández, C. y Van Dooren, W. (2018). Gap and congruency effect in fraction comparison. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 459-466). Umeå, Sweden: PME.

Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction, 14*(5), 519-534.

Moss, J. y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 122-147.

Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J. y Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, *28*, 64-72.

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*. *107*, 537-555.

Pearn, C. y Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. En I. Putt, R. Faragher,y M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 430–437). Sydney, Australia: MERGA.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. y Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for research in mathematics education, 20*, 8-27.

Stafylidou, S. y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction, 14*(5), 503-518.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 344-355.

Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction, 37*, 1-4.

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences, 61*, 99-108.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education, 12*(2), 154-164.

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction, 37*, 30-38.

Vosniadou, S. y Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. En L. Verschaffel y S. Vosniadou (Eds.), Conceptual change in mathematics learning and teaching. Special Issue of *Learning and Instruction, 14*(5), 445–451.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Erros de alunos nos algoritmos das operações aritméticas e o sistema de numeração decimal

Leila Pessôa **Da Costa**
Universidade Estadual de Maringá – UEM
Brasil
lpcosta@uem.br
Regina Maria **Pavanello**
Universidade Estadual de Maringá – UEM
Brasil
reginapavanello@hotmail.com

Resumo

Esta oficina tem como objetivo discutir os erros cometidos pelos alunos na execução dos algoritmos das operações básicas aritméticas. A discussão tem como subsídios pesquisas sobre o tema bem como dados obtidos em pesquisa de doutoramento que investigou o ensino e a aprendizagem de alunos dos 4ºs e 5ºs anos do Ensino Fundamental matriculados em duas escolas da região noroeste do estado do Paraná – Brasil. Observou-se que as incorreções dos alunos relacionavam-se diretamente à ausência de compreensão das características do Sistema de Numeração Decimal, conhecimento este necessário para que o professor possa fazer intervenções pontuais com vistas a auxiliar o processo de aprendizagem dos alunos.

Palavras chave: Educação Matemática, Ensino Fundamental, Aritmética e sistemas numéricos, formação continuada e desenvolvimento profissional.

A proposição dessa oficina considera a importância do conhecimento do professor sobre o objeto e/ou conteúdo a ser ensinado. Considera, como Tardif (2002, p. 39), que os professores "[...] devem conhecer sua matéria, sua disciplina e seu programa, além de possuir certos conhecimentos relativos às ciências da educação e à pedagogia e desenvolver um saber prático baseado em sua experiência cotidiana com os alunos".

Shulman (1987), ao analisar historicamente a questão do conhecimento e da habilidade para ser professor, sugeriu a distinção do conhecimento do professor em três tipos diferentes de conhecimento do conteúdo: (a) conhecimento sobre o assunto, (b) conhecimento pedagógico do conteúdo e (c) o conhecimento curricular.

Considerando a importância do conhecimento do professor sobre a matéria ser ensinada e o conhecimento pedagógico necessário para que esse ensino contribua para a aprendizagem dos alunos, essa oficina objetiva proporcionar a reflexão dos participantes sobre erros comumente observados na resolução dos algoritmos das operações elementares da Matemática e sua relação com as características do Sistema de Numeração Decimal (SND) e as intervenções possíveis a serem desenvolvidas com vista à superação dos obstáculos observados.

De forma geral, algumas incorreções foram observadas na resolução desses algoritmos, tal como apontado na literatura acerca dos erros das crianças na realização dos algoritmos (Dockrell e Mcshane, 2000; Batista, 2009), entre elas:

- Copia o número errado ao armar o algoritmo, escrevendo, por exemplo, 59 ao invés de 89.
- Após realizar o agrupamento, não faz o transporte correto: ao multiplicar (2 x 6) ou somar um número (6 + 6) transporta o 2 ao invés do 1.
- Erro no cálculo/contagem ao adicionar ou subtrair um número do outro.
- Não finaliza o algoritmo.

Quanto ao algoritmo da adição com agrupamento (reserva ou "vai um", tanto na ordem das unidades como na das dezenas ou centenas, quando o aluno deve transportar (reservar) para a ordem seguinte o agrupamento realizado (‘vai um’), observaram-se as seguintes incorreções:

- Ao ‘montar a conta’ (colocar os números verticalmente) não obedece a ordem/classe do número.
- Ignora o agrupamento realizado na ordem anterior, ao adicionar as parcelas.
- Repetem o algarismo que está nas parcelas: na ordem da unidade, copia a unidade da última parcela, na ordem da dezena, copia a dezena da primeira parcela, e assim sucessivamente.

Com relação ao algoritmo da subtração quando o algarismo do subtraendo é maior que o do minuendo e o aluno necessita recorrer à ordem imediatamente superior para fazer as trocas (desagrupamento), ou ‘empréstimo’, foram observados os seguintes erros:

- Subtraem o minuendo do subtraendo.
- Desconsideram o ‘empréstimo’(desagrupamento) feito a uma determinada ordem, ao realizar a subtração dos números dessa ordem.

Observa-se ainda que os alunos demonstram dificuldade em compreender o papel do zero na composição de um número e muitas vezes acreditam que como ‘não vale nada’, no sentido de que não há valor algum naquela ordem, quando ele está presente, não sabem como operar.

Na multiplicação, se houver algum valor agrupado/transportado em qualquer uma das ordens, esse valor é desconsiderado, ou visto como multiplicando.

Outra dificuldade observada está relacionada aos procedimentos algorítmicos que, ensinados aos alunos sem relação com as características do SND, os levam a considerar somente a sequencia das ações a serem desenvolvidas.

No Brasil, é a partir do 4º ano que as professoras enfatizam o ensino dos algoritmos da multiplicação iniciando por operações que tem no multiplicador um número de um só algarismo

e, no multiplicando, um número que não leve à necessidade de agrupamento. Percebemos que esse procedimento enfatiza os passos para a resolução do algoritmo ao invés de a exploração do conceito subjacente à ação desenvolvida, o que acaba gerando conflito para os alunos, que, intuitivamente, utilizam o cálculo mental para resolvê-lo.

Observa-se ainda que, na resolução dos algoritmos que envolvem vários procedimentos, os alunos sabem quais são as ações necessárias, como por exemplo, no caso da multiplicação, que deve multiplicar e somar os algarismos, mas não tem claro o como e o porquê dessas ações.

No algoritmo da multiplicação, com 1 e 2 algarismos no multiplicador, percebemos a dificuldade do aluno em compreender a ordem que está sendo multiplicada de modo que, ao realizar o procedimento da operação, opera como se todos os algarismos do multiplicador não pertencessem a diferentes ordens.

Considerando os aspectos apresentados, a oficina procurará ressaltar que as dificuldades observadas a partir dos erros dos alunos são de natureza conceitual, o que contribuí para a incompreensão dos procedimentos utilizados para a resolução dos algoritmos.

Além disso, a ausência de um trabalho que desenvolva o cálculo mental e o sentido numérico inviabiliza a autoregulação pelos alunos da tarefa que executam. Por outro lado, dada as dificuldades que observam na produção dos alunos, e sem o conhecimento necessário para realizar as intervenções necessárias, os professores fazem com que a ênfase seja dada no resultado e acabam por reforçar nos aprendizes a crença de que só há uma forma de se resolver corretamente o algoritmo e é a ensinada pela professora.

Outro aspecto necessário para a intervenção do professor na produção do aluno é a necessidade de sua compreensão dos processos internos utilizados pelos alunos, o que somente se dá por meio da comunicação, que traz implícita a importância da reflexão em um contexto, em um determinado grupo e a partir de um objeto – "objeto pensado" (Freire, 1977) - codificado numa tarefa para este objeto seja compreendido. Nesse sentido, a comunicação, o trabalho em grupo e a tarefa são "ferramentas" importantes no processo de ensino e de aprendizagem.

Como a comunicação em sala de aula está diretamente relacionada às questões que são feitas pelo professor, é preciso que este proponha questões e tarefas que desafiem os alunos a pensar, motivo pelo qual o professor, qualquer que seja o comentário do aluno, deve perguntar o porquê deste ou pedir que ele explique seu pensamento (Meneses, 1999, p.1).

Além de ser uma capacidade a ser desenvolvida, a comunicação matemática assume também uma orientação metodológica para o ensino e a aprendizagem, orientação essa que a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017, p. 264) apresenta ao observar que "os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem [...] são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação)".

Para isso, Ponte e Serrazina (2000, p. 60) apontam que, no ensino da Matemática, é preciso

> [...] usar a comunicação para promover a compreensão da matemática, de modo que todos os alunos: - organizem e consolidem o seu pensamento matemático para comunicar com outros; - expressem as suas idéias matemáticas de modo coerente e claro para os colegas, os professores e outras pessoas; - alarguem o seu conhecimento matemático, considerando o pensamento e as estratégias dos outros; - usem a linguagem matemática como um meio de expressão matemática precisa (Ponte e Serrazina, 2000, p. 60).

Como o professor é o elemento chave para introduzir e trabalhar a dinâmica da comunicação matemática em sala de aula é importante que ele a vivencie em situações que articulem o conhecimento pedagógico e o da matéria a ser ensinada.

É por meio da tarefa que se dará a comunicação matemática, direcionada pelo professor. Mas, como salienta Meneses,

> Esta "habilidade" do professor para o questionamento passa pela capacidade de decidir quando colocar questões "provocadoras" ou questões "orientadoras", e depende do entendimento que tem da forma como deve decorrer a aula de Matemática, do seu papel e do papel do aluno (Meneses, 1999, p. 10).

Considerando assim a importância da comunicação matemática e do conhecimento necessário ao professor sobre o objeto a ser ensinado é que essa oficina está sendo proposta. Para o seu desenvolvimento serão apresentadas diferentes produções dos alunos a serem analisadas pelos participantes. As produções evidenciam os “erros” cometidos pelos alunos e trazem à discussão algumas propostas para superá-los.

Durante a análise a ser empreendida, serão discutidos as características do SND e apresentados alguns materiais e jogos que podem auxiliar os alunos nessa compreensão, tais como o ábaco, o material dourado, além de jogos e tarefas que provoquem e orientem os alunos na apreensão dos conceitos subjacentes ao sistema.

Referencias

Batista, C. G. (2009). Fracasso escolar: análise de erros em operações matemáticas p. 61-72. *Zetetiké:* Revista de Educação Matemática, v. 3 (4), n. 4.

Brasil (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação e Cultura.

Dockrell, J.; Mcshane, J. (2000) *Crianças com dificuldades de aprendizagem***:** Uma abordagem cognitiva. Artmed.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, v. 57 (1), feb/1987.

Tardif, M. (2002) *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes.

Freire, P. (1977). *Extensão ou comunicação*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Meneses, Luís. Matemática, Linguagem e Comunicação. ProfMat 99 – *Encontro Nacional de Professores de Matemática*. Portimão. (2013, 29 de Outubro) Disponível em: < http://www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm >. Acesso 29 out 2013.

Ponte, J. P.; Serrazina, M. L.(2000). *Didáctica da matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La interdisciplinaridad para el estudio de las fracciones

Luis Alexander **Conde** Solano
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Medellín
Colombia
lconde@udem.edu.co
Gerardo Elias **Sepúlveda** Restrepo
Secretaría de Educación del Departamento de Antioquia
Colombia
illecebris@hotmail.com
Marco Antonio **Ayala** Chauvin
Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL)
Ecuador
maayala5@utpl.edu.ec

Resumen

El objetivo de este estudio es analizar la construcción de la noción de equipartición de fracción en estudiantes de primaria, a través de un contexto interdisciplinar articulado entre las matemáticas y la música. Este interés surgió de nuestra práctica al observar que los métodos utilizados en la actualidad para la enseñanza de las fracciones, adolece de un mecanismo de comprobación de la existencia o no de la equidad de las partes. Los participantes fueron 17 estudiantes de 4º y 5º grado de educación primaria del sector rural de Antioquia. El análisis de la información recolectada permitió reconocer que los vínculos entre las matemáticas y la música pueden constituirse en un escenario interdisciplinar diferente a los tradicionales, para que los estudiantes por medio de experiencias y representaciones puedan construir una noción de equipartición de fracción.

Palabras clave: Interdisciplinaridad, fracción, matemática, música

Introducción

El uso de las fracciones representa una necesidad relevante para el desenvolvimiento de los estudiantes en la sociedad, a partir de la interpretación de los datos matemáticos con los que interactúa a diario; competencia que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) espera haya sido adquirida al terminar el quinto grado de básica primaria.

El dominio de este objeto matemático implica entrar en interacción con diferentes nociones, como lo es la equipartición, un aspecto que generalmente es abordado de manera estática en las aulas de clase, sin mecanismos de verificación y, por ende, sin la generación de

autonomía en la valoración de la coherencia de las respuestas dadas a las situaciones que se les presenta a los estudiantes. Para Kieren (1980) la acción de equipartir, es la base fundamental para la creación y aplicación del conocimiento del número fraccionario.

En el ejercicio escolar, los estudiantes y los maestros se enfrentan a dificultades sobre la comprensión y representación de las fracciones, tal vez consecuencia del uso de ejemplos para introducir la equipartición. En ejemplos como: partir frutas, chocolatinas o pasteles, se pasa por alto las unidades de medida, el tamaño de las partes, medio continuo, discreto, equivalencias, entre otros. En este escenario, consideramos que la apuesta interdisciplinaria entre las matemáticas y la música, ofrece una estrategia didáctica en el estudio de los fraccionarios diferente a las usadas tradicionalmente, de las cuales emergen imprecisiones a la hora de transponerlas a situaciones del contexto. Por lo tanto, la interdisciplinaridad como recurso didáctico promueve experiencias y representaciones utilizados por los estudiantes para conjeturar y probar ideas matemáticas emergentes de un fenómeno real observado. Concretamente desde nuestro punto de vista, la aplicación en el aula de actividades interdisciplinarias donde se articulen elementos musicales, objetos sonoros y matemáticos, integrados en procesos de medición, puede ofrecer a los estudiantes posibilidades para construir significados asociados con el objeto fracción.

Marco Conceptual

Actualmente, surgen nuevas problemáticas cada vez más complejas que de cierto modo exigen un trabajo articulado entre diversas disciplinas para su tratamiento. Estos requerimientos de la sociedad moderna necesariamente deben atenderse por medio de la interdisciplinaridad. La idea de un currículo interdisciplinar se puede observar desde la escuela pitagórica donde la música se consideraba una disciplina matemática en la que se estudiaban relaciones de números, razones y proporciones. Para los griegos, la aritmética, geometría, música y astronomía, que formaban el *quadrivium*, junto con la gramática, retórica y dialéctica que formaban el *Trivium* se convirtieron en las siete artes liberales.

En tiempos modernos, en la organización de currículo escolar, según los NCTM (2003) se sugiere la necesidad e importancia en establecer conexiones entre las distintas áreas del conocimiento. Abordar así los contenidos produce algo más que motivar a los estudiantes. "Revela las matemáticas como una disciplina con sentido, en vez de una disciplina en la que el profesor da reglas que deben memorizarse y usarse para hacer los ejercicios". También en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se enfatiza que, en la formulación, el tratamiento de situaciones problema con enfoque interdisciplinar contribuye al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de múltiples formas.

Para el interés de este trabajo damos relevancia a las conexiones entre las matemáticas y la música, a partir de las representaciones semióticas visuales desde la perspectiva de De Guzmán (1996); auditivas (McAdams, 1993 y Willems, 1993) y corporales basadas en Conde (2013), como puente dialéctico entre dichas disciplinas. Desde esta perspectiva, se establece un marco conceptual que sirve de soporte para el desarrollo de este estudio y responde a la naturaleza interdisciplinaria de nuestro planteamiento.

Representaciones visuales

Entendemos por representaciones visuales aquellas representaciones pictóricas como diagramas, gráficas, modelos geométricos, animaciones dinámicas virtuales, entre otras, como método para comunicar matemáticas y música.

De Guzmán (1996) señala que los matemáticos se valen de procesos simbólicos y diagramas visuales, aún en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista. Como consecuencia, la visualización aparece así, como algo profundamente natural en la transmisión y comunicación propia del quehacer matemático, en particular, la relación espacio-temporal se constituye en un sistema de representación encargado de organizar la duración de los sonidos y silencios en una línea de tiempo de forma escrita, tal como ocurre en la escritura musical en el pentagrama.

Representaciones auditivas

A diferencia de la actividad matemática, en la música se responde a la naturaleza de evento sonoro, en la cual la representación visual no es la única forma de comunicación y expresión, ya que un músico puede interpretar una melodía sin conocer dicho sistema de escritura. La representación auditiva, implica el desciframiento (reconocer, discriminar e interpretar) de estímulos auditivos asociándolos a experiencias previas (McAdams, 1993). Por lo tanto, se apela a la representación mental en forma de memoria auditiva para establecer relaciones y dar sentido a los sonidos percibidos.

Aunque la cognición auditiva actúa de manera simultánea, los procesos mentales se activan en función de cada cualidad del sonido. Sin entrar en detalle de la función de cada uno de estos elementos, en este estudio se tratan los aspectos que involucran: i) la variación en la duración, relacionada a la medida de tiempo de las figuras musicales y ii) la interrupción regular, que consiste en aquellos que producen repeticiones de una sucesión de sonidos de igual duración alternados con silencios (Willems, 1993).

Representaciones corporales

En la ejecución musical el gesto es un elemento inherente que puede ser relacionado corporalmente con el ritmo. Es decir, la experimentación sensorial de fenómenos sonoros permite al estudiante reconocer estructuras rítmicas por medio de actividad corporal. De esta forma es posible establecer un vínculo entre las estructuras rítmicas y los números fraccionarios (Conde, 2013).

Al realizar la ejecución del ritmo corporalmente (gesto) los estudiantes pueden determinar si el patrón rítmico cumple con ciertas propiedades, por ejemplo, pueden determinar si dos o más patrones rítmicos son equivalentes o no, al interpretarse simultáneamente. Es por ello que el gesto de los estudiantes no está sometido a las interpretaciones personales del maestro, es decir, es validado a través de la reproducción del propio ritmo.

El gesto desde la perspectiva de este trabajo, aunque está influenciado por la cultura e individualidades, es estable en la ejecución ya que posee una estructura rítmica musical. En este caso, los gestos deben ser articulados para cumplir con ciertas reglas temporales que no están sujetas a las interpretaciones de un observador (o experto) porque son inherentes a la métrica musical de un patrón determinado.

Metodología

Esta comunicación hace parte de una investigación de maestría en Educación Matemática. Es de corte cualitativo, cuyas fases de la investigación consistieron en: i) diseño y desarrollo curricular, en la que se estableció en una propuesta didáctica, ii) diseño y desarrollo de software educativo y iii) un análisis cualitativo sobre la manera en que los estudiantes de primaria construyen una noción de equipartición de fracción, a través del contexto interdisciplinar. En este

estudio participaron 17 estudiantes de los grados cuarto y quinto de básica primaria, de una institución educativa rural ubicada al occidente de Antioquia, Colombia.

Los recursos de apoyo elaborados como soporte a las acciones de intervención fueron una guía del docente, un cuaderno de trabajo del estudiante, un software educativo y material manipulativo. Los instrumentos de recolección y organización de la información consistieron en cuadernos de trabajo diligenciados por los estudiantes, videograbaciones de las actividades y un diario pedagógico como herramienta de registro de las experiencias e impresiones que surgieron del desarrollo de las sesiones de clase.

Discusión de resultados

En este apartado se ejemplifican algunas formas cómo los estudiantes a partir de sus experiencias en un contexto interdisciplinario, pueden de cierto modo construir una noción de equipartición de fracción. Para ello exhibimos episodios tomados de los diferentes instrumentos de recolección y organización de la información donde se evidencia el tránsito de una idea intuitiva, pasando por representaciones formales e informes de un fenómeno acústico hasta la consolidación de significados de la noción de equipartición.

Ideas intuitivas sobre la equipartición y sus representaciones no convencionales

La percepción de los sonidos y la necesidad de comunicar estas ideas, acercan a los estudiantes a formas de representación no convencionales ligadas a la descripción del fenómeno acústico percibido. Es así como, tras realizar una actividad de juego que vincula un patrón rítmico regular como los que se muestran en la Figura 1, las representaciones de los estudiantes se aproximan al cumplimiento de criterios de medición, comparación y simbolización.

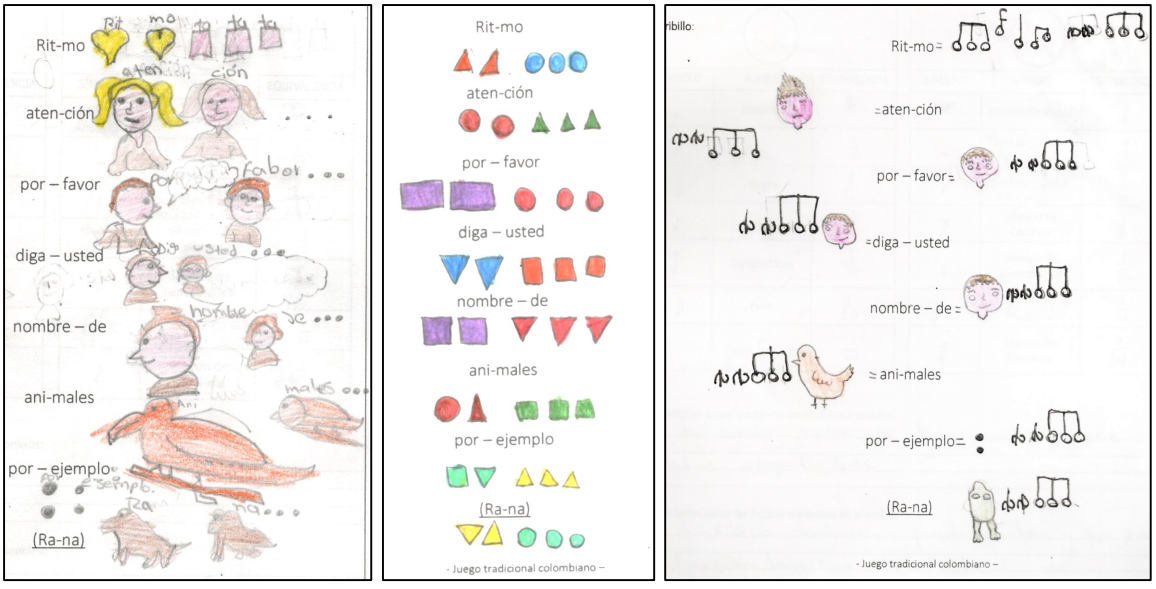


Figura 1. Construcción de patrones rítmicos con representaciones informales

La sensación de partición regular experimentada por los estudiantes, les permite dar sentido a la idea de patrón como experiencias repetidas (Johnson, 1987). Mismas que ofrecen conexiones con experiencias biológicas (pulsaciones del corazón) y experiencias cotidianas como las actividades de baile. En los dos ejemplos anteriores están regulados por pulsaciones, es decir, sonidos con igual tiempo de duración. Precisamente, las ideas intuitivas van surgiendo de

percepciones de eventos sonoros con tiempos de igual duración. Por lo tanto, los estudiantes representan dichos eventos con signos de la misma clase, con el mismo color y proporciones similares, tal como se muestra en la Figura 1.

Ideas sobre la equipartición y sus representaciones convencionales

En el entorno computacional se presentaron tres animaciones (Figura 2). En la primera consiste en barras dinámicas donde se articulan fracciones de sonidos o silencios con recubrimiento de la misma. En la segunda y tercera consiste en ordenar de mayor a menor las figuras musicales y la fracciones.

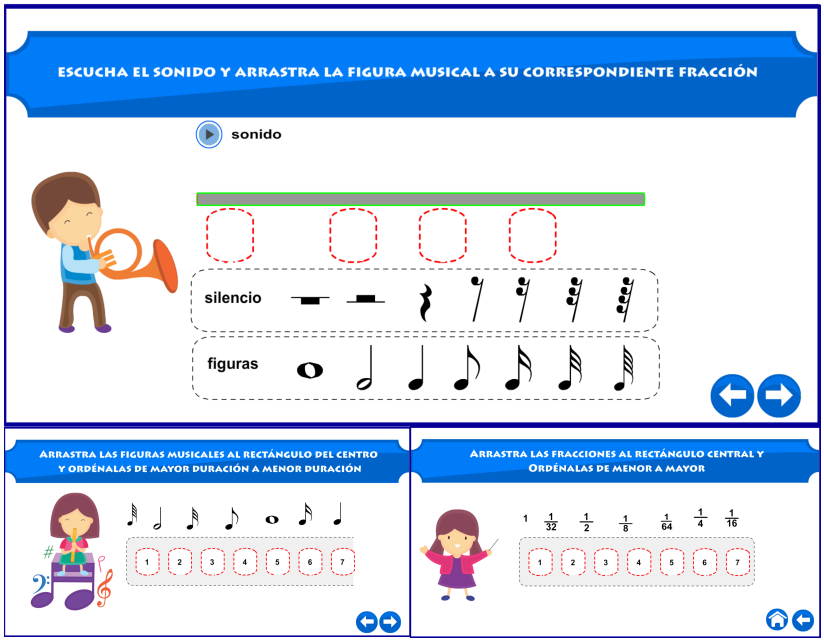


Figura 2. Duración de las figuras, (Software Educativo de acceso público registro: 13-67-227)

En la primera escena, aunque no se menciona la palabra fracción, implícitamente los estudiantes han trabajado con la sensación de partir o de fracturar para hacer discreto el tiempo de duración del sonido en la dimensión temporal. La representación dinámica permitió que los estudiantes reconocieran en una línea de tiempo, sonidos y silencios según su tiempo de duración determinado por los cortes entre sonidos. La idea de "fractura" que se considera fundamental en el estudio las fracciones tiene varias representaciones simultáneas que permiten a los estudiantes a determinar las características, el número y la medida de las partes en que está compuesto el todo referencial (Freudenthal, 1983).

La segunda y tercera escena, en las que se pretende medir el tiempo de duración de sonidos y silencios, crean en los estudiantes una noción de orden. Es decir, los conducen a reconocer y comparar sonidos/silencios asociados a sus representaciones. Esta exploración temporal inicial les permitió a los estudiantes adentrarse en la organización de eventos fundamentada en la percepción visual (sistema de representación gráfica), gestual y auditiva (sonido).

Aproximación a la noción de equipartición

En la interacción de los estudiantes con el entorno computacional (Figura 3), se introducen representaciones que ilustran la propiedad de construcción de las figuras musicales: *Cada figura*

es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente (Conde, Parada y Liern, 2016). Se representa la construcción de una redonda como la figura equivalente a cuatro pulsos y a partir de la redonda se asigna los tiempos musicales de las demás figuras.



Figura 3. Las figuras musicales y sus silencios - Multimedia

La redonda está representada en el ambiente computacional por una circunferencia completa, formada por cuatro fracciones de 1/4 o, lo que es lo mismo, cuatro negras. En lo auditivo, mientras se forma la circunferencia se reproduce un sonido o se deja un silencio de duración equivalente a cuatro pulsos, marcados a igual distancia temporal por un golpe del metrónomo.

Respecto a dicha construcción se generó el siguiente dialogo con los estudiantes:

> Docente: ¿Qué cantidad de pulsos hay en una blanca?
> Estudiantes: Dos pulsos
> Docente: ¿y cuantos había en una redonda?
> Estudiantes: Cuatro
> Docente: ¿Qué relación hay entre la blanca y la redonda?
> Estudiantes: La blanca tiene…, la mitad de los pulsos que tiene la redonda.

Al parecer los estudiantes describen una trayectoria de construcción de una noción de equipartición, puesto que se establece una unidad de medida como base (el pulso). Para luego expresar la duración de un sonido con relación a esta y trascender posteriormente a relacionar una figura con otra, partiendo de la cantidad de veces en las que el pulso aparece en ellas. La equipartición se asocia al número de figuras con iguales duraciones necesarias para completar la unidad de referencia. Desde nuestro contexto la equipartición está controlada por experiencias gestuales, visuales y auditivas que verifican la acción de equipartir. Como valor agregado tenemos los efectos sonoros dentro de la métrica musical que validan cuándo existe o no una equipartición, es decir, los estudiantes construyen un significado sobre la noción de "igual tiempo de duración".

Conclusiones

La enseñanza con enfoque integrador entre las matemáticas y otras disciplinas requiere no sólo conocimientos especializados, sino un cambio de creencias en torno a las opiniones de los profesores de matemáticas, ciencias y artes, sobre la organización del currículo, su enseñanza y cómo aprenden los estudiantes. Es decir, La interdisciplinariedad no aparece como un elemento que sea producto de la espontaneidad. Por lo tanto, Este estudio apunta a proveer experiencias diferentes al tradicional tratamiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde nuestro punto de vista, centramos la atención en el estudio de objetos integradores que coexisten

en contextos interdisciplinares y que pueden promover en los estudiantes procesos de construcción de su propio conocimiento.

En la interacción de las actividades interdisciplinarias propuestas en este estudio se observa que los estudiantes descubren, representan y comparan la forma como el pulso, el tiempo y el ritmo musical constituyen una aproximación a la noción de equipartición determinando al pulso como su unidad de medida. Aquí los estudiantes aprecian la equipartición en condición de igual tiempo de duración entre pulso y pulso. También los estudiantes confirman que los tiempos iguales son invariantes al patrón rítmico de una canción o fragmento musical.

Acto seguido, los estudiantes encuentran que hay una forma de establecer unidades de medida a partir del pulso, que pueden ser convencionales o no convencionales inicialmente, hasta cobrar forma en las figuras musicales como lenguaje universal para expresar la duración de un elemento sonoro de la música. Además, establecen una relación fraccionaria entre cada una de ellas, partiendo de la redonda como unidad y las demás como cierta parte de ella, siguiendo la propiedad de que cada figura es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente.

Como reflexión final, sugerimos cambios en la escuela tradicional en cuanto a herramientas y argumentos para el estudio de las fracciones. Una sugerencia podría ser reorientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la equipartición, a través de objetos musicales. Aquí se generan diversos escenarios didácticos que pueden favorecer el aprendizaje de las fracciones con base en su estructura métrica musical.

Referencias

Conde, A. (2013). La unidad relativa como vínculo cognitivo entre el tiempo musical y las fracciones. (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Conde, A., Parada, S., & Liern, V. (2016). Estudio de fracciones en contextos sonoros. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *16*(2),1-21.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la Pizarra*. Madrid: Pirámide.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (Trad. L. Puig). México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Johnson, M. (1987). The body in the Mind. Chicago: University of Chicago Press.

Kieren, T. (1980). The racional number constructs. Its Elements and Mechanisms. En: T. Kieran (Ed). Recent Research on Number Learning, (pp. 128-149). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

McAdams, S. (1993). Recognition of sound sources and events. In S. McAdams y E. Bigand (Eds.), *Thinking in Sound: The Cognitive Psychology of Human Audition* (pp. 146-198). Oxford: Oxford University Press.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas.* Bogotá. Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: SAEM Thales.

Willems, E. (1993). *El ritmo musical* (Trad V. Hemsy). Buenos Aires: Eudeba.



Comprensión de problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva

Alexander **Largo** Cañaveral.
Universidad de Antioquia
Colombia
largocanaveral@gmail.com
Gladys María **Rivera** Gonzáles
Universidad de Antioquia
Colombia
gladysmariarivera@gmail.com

Resumen

El presente proyecto de investigación enfoca su interés en determinar cómo comprenden los problemas de tipo multiplicativo estudiantes de cuarto y quinto de Básica Primaria en el modelo Escuela Nueva, se presentan los acercamientos conceptuales sobre la teoría de Enseñanza para la Comprensión (EpC), definiendo las dimensiones y niveles de la comprensión; luego, de estos acercamientos, se hace referencia al marco metodológico, donde se define el paradigma de investigación cualitativa, desde un enfoque interpretativo. Allí, se recurre al estudio de casos como el tipo de estudio que orienta este trabajo. Es así, como se determinan las técnicas a utilizar: la observación participante, diario de campo y entrevistas semiestructuradas.

Palabras claves: problemas de tipo multiplicativo, comprensión, Escuela Nueva

Planteamiento del problema

La resolución de problemas matemáticos se ha considerado como un aspecto relevante en los currículos escolares de Colombia; Como lo afirma el Ministerio de Educacion Nacional,

> "la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Pero esto no significa que se constituya en un tópico aparte del currículo, deberá permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos. (Ministerio de Educacion Nacional, 1998, p. 52).

Además, estos aportan al estudiante la capacidad de generalizar hipótesis, explorar, tomar decisiones, proponer nuevas ideas y hacer frente a diversas situaciones problemas; asi mismo expone la importancia del trabajo por competencia y proponen la Enseñanza para la Comprension, como un protente precursor para su dominio, ya que este permite valorar gradualmente el nivel de desarrollo de cada competencia, en progresivo creciemiento y deacuerdo al contexto donde se desarrolle (Ministerio de Educacion Nacional, 2006).

Con respecto al desarrollo del trabajo escolar como profesor del área de matemáticas, se ha podido observar que los estudiantes en los grados cuarto y quinto al enfrentarse a problemas matemáticos de tipo multiplicativo, constantemente se preguntan ¿qué operación debo hacer? confunden los conceptos de resta, suma, multiplicación y división. Esta realidad sumada a los resultados de las prueba SABER, donde se evidencia que sólo algunos estudiantes resuelven problemas de proporcionalidad directa, factor multiplicante, adición repetida, producto cartesiano y razón, son el origen del interés que orienta este trabajo.

La pertinencia de esta investigación también se sustenta en el rastreo de antecedentes, donde se puede evidenciar que la producción académica relacionada con la comprensión de problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva dirigidos por la fundación Volvamos a la Gente, es escasa. De acuerdo con lo anterior se formula la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo comprenden problemas de tipo multiplicativo los estudiantes de los grados cuarto y quinto de Básica Primaria, en el contexto de Escuela Nueva, en el marco de la Enseñanza para la Comprensión?

Objetivo general

Analizar cómo comprenden problemas de tipo multiplicativo en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión estudiantes de grado cuarto y quinto, de Educación Básica Primaria, en el modelo de la Escuela Nueva.

Objetivos específicos

- Describir la comprensión de problemas de tipo multiplicativo en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión de los estudiantes de cuarto y quinto de Educación Básica Primaria, en el modelo de la Escuela Nueva.

- Identificar los desempeños de comprensión que muestran los estudiantes al solucionar problemas de tipo multiplicativo en los grados cuarto y quinto de Educación Básica Primaria, en el modelo de Escuela Nueva, en el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

Problemas de tipo multiplicativo

Este apartado del trabajo se subdivide en dos momentos, en primera instancia se realiza un acercamiento a los problemas de tipo multiplicativo iniciando por Vergnaud (1991). En segundo lugar el estudio de los niveles de comprensión de resolución de problemas verbales simples de comparación multiplicativa realizados por Castro (1994). Seguido, se presenta de manera sucinta una definición de ruralidad y el modelo Escuela Nueva desde distintos autores.

Inicialmente, dentro de esta sección, se presentan los estudios realizados por Vergnaud (1991), quien haciendo uso de la teoría de los campos conceptuales describe y categoriza tres tipos de problema en la estructura multiplicativa. En esta línea, para Vergnaud (1990) “Un campo conceptual es el conjunto de problemas o situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos, relaciones, contenidos, operaciones y representaciones,

íntimamente relacionados, pero distintos, que están conectados unos con otros y probablemente entrelazados en el proceso de adquisición" (p. 142). Desde esta perspectiva, los conceptos involucrados en las situaciones que constituyen el campo conceptual de los problemas de tipo multiplicativo son las que implican el uso de divisiones y/o multiplicaciones.

En la línea de los problemas de tipo multiplicativo, Vergnaud (1991) propone dos formas de relación dentro de la estructura: relaciones ternarias tipo a.b=c y relaciones cuaternarias a/b=c/d. Además, de estas relaciones el autor, expone tres clases de problemas de tipo multiplicativo: isomorfismo de medidas, un solo espacio de medidas y producto de medidas. En el primero, interactúan cuatro cantidades y una de ellas constituye la incógnita. El segundo, –un solo espacio de medida– cuenta con "una sola categoría de medidas […] y la correspondencia no se establece entre cuatro cantidades sino entre dos, por una parte, y dos objetos, […] por la otra" (Vergnaud, 1991, p. 220). En tercer lugar, se encuentran los problemas tipo producto de medidas definidos como aquellos donde dos medidas del mismo o de diferente tipo dan origen a otra medida.

Estas construcciones, aportan al presente estudio de investigación, no solo en la clasificación de los tipos de problema multiplicativos sino, además, en el llamado que hace el autor, sobre la importancia de abordar cuidadosamente las diferentes clases de problemas y su análisis "con el fin de ayudar al niño a reconocer la estructura de los problemas, y a encontrar el procedimiento que conducirá a su solución" (Vergnaud, 1991, p. 223). Asimismo, Vergnaud en el II Congreso Internacional de la Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas (2016), se refiere a la comprensión matemática como una actividad que el estudiante desarrolla, advierte que, se comprende aunque no se diga ni una palabra. También, asegura que la comprensión se concibe a través de la observación de la actividad señalando lo esencial del plano metodológico.

Continuando con el rastreo de autores que aportan al campo de estudio de los problemas de tipo multiplicativo, se presentan las construcciones de Castro (1994), quien asocia el aspecto de la representación mental en el campo de la resolución de problemas con la interpretación o comprensión que el estudiante construye en relación a un problema. El autor también señala que dichas representaciones dan cuenta de los conocimientos y esquemas de conocimiento que el estudiante posee. A diferencia de lo que pretende este trabajo: abordar el estudio de la comprensión de diferentes tipos de problema asociados a la estructura multiplicativa, los estudios de Castro (1994), se centran en los niveles de comprensión de la resolución de problemas verbales simples de comparación multiplicativa, tales estudios se realizan bajo el diseño de fases propuestas por el autor, mientras este trabajo retoma las actividades, guías y desempeños de aprendizaje propuestas en el modelo de Escuela Nueva, los describe e interpreta de acuerdo con las dimensiones y niveles de comprensión propuestos en la Teoría de la Enseñanza para la Comprensión.

Para Castro (1994), la comprensión de problemas aritméticos verbales se subdivide en dos niveles: "traducción del problema a una representación interna e integración del problema en una estructura coherente" (Castro, 1994, p. 23). Al referirse al primero, este autor menciona la importancia de interpretar el lenguaje matemático; relacionando este nivel con el campo de la significación. En cuanto al segundo nivel, Castro (1994) plantea que tiene

relación con "la expresión matemática del problema" (Castro, 1994, p. 35) con situar el problema en un campo, en una estructura, en identificar los conocimientos matemáticos que se requieren para su solución. Los aportes de Castro (1994), señalan la necesidad de llevar a cabo estudios de este tipo con el propósito de realizar aportes didácticos que apuntan, de algún modo, a la evaluación y al contenido matemático en el ámbito de la aritmética.

Seguido, teniendo en cuenta que la sede El Cedro se encuentra ubicada en el contexto rural; el presente estudio expone la necesidad de acercarse a lo que implica esta realidad. Antes que nada, la ruralidad se entiende como algo que va más allá del campo, de los cultivos y los animales "el concepto de ruralidad trasciende lo agropecuario en términos de su relación con los contextos urbanos" (Pérez, 2003, p. 4). Para el Ministerio de Educacion Nacional (2012), dicha trascendencia está marcada por el acceso que tienen las comunidades rurales a las comunicaciones, las nuevas tecnologías y su vinculación con los centros urbanos. Entrena (1998) citado en Matijasevic y Ruiz (2013) plantea diferencias entre lo rural y la ruralidad, entendiendo "lo rural como un particular medio geográfico, y la ruralidad como una cultura o forma de vida vinculada con dicho medio" (p. 25).

En Colombia, el 32% de la población es reconocida como rural, según el Informe Nacional de Desarrollo Humano (PNUD, 2011), esta condición hace que en 1970 el país hable de educación rural incorporándola dentro las políticas de reforma agraria y de desarrollo rural a través de un modelo denominado Escuela Nueva (Ministerio de Educacion Nacional, 2012). Más adelante, se determina que corresponde a las entidades territoriales y al Gobierno Nacional la promoción de un servicio de educación campesina y rural, que comprenda especialmente la formación técnica en actividades agrícolas, pecuarias, pesqueras, forestales y agroindustriales que contribuyan a mejorar las condiciones humanas, de trabajo y la calidad de vida de los campesinos (Ley 115, artículo 64 de1994).

Es así como en la década del 70 surge en Colombia el denominado modelo Escuela Nueva, "caracterizado como sistema, como modelo, como programa y como metodología" (Colbert y Vásquez, 2015, p. 48). Para el caso de esta investigación se ha adoptado el término modelo Esuela Nueva este término incluye una fundamentación teórico-conceptual y operativa (Colbert y Vásquez, 2015). En este sentido, conceptos y teoría se abordan tal cual se presenta en las guias de aprendizaje, en cuanto a la cuestion operativa el abordaje de los problemas de tipo multiplicativos se contextualizan, ademas, se relacion con otros elementos como el trabajo cooperativo y los centro de recursos de aprendizaje.

Aproximación al marco teórico/aproximación al horizonte conceptual.

A continuación, se realiza una aproximación al marco conceptual de la EpC como referente que orienta el desarrollo de este trabajo, teniendo en cuenta los elementos, dimensiones y niveles de la comprensión. En esta sección se relaciona esta teoría con el contexto metodológico desde el cual se enmarca esta investigación, el modelo Escuela Nueva.

Marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión

Este marco conceptual nace como producto de un proyecto realizado en la Universidad de Harvard, inscrito en la escuela de Educación. La EpC intenta dar respuesta a cuestiones

relacionadas con el cómo enseñar y el cómo lograr que los estudiantes se interesen, comprendan y usen lo que la escuela pretende abordar en el aula de clase, de esta manera, la EpC plantea no solo el estudio de la comprensión como punto de llegada o resultado, sino que también expone una serie de elementos, metas de comprensión, desempeños de comprensión, dimensiones y niveles de comprensión que configuran toda una perspectiva de enseñanza, es decir, incluye una apuesta metodológica (Stone 1999). Es decir, incluye una apuesta metodológica. Sin embargo, en este trabajo solo son retomados las dimensiones y niveles de la comprensión con relación a los problemas de tipo multiplicativo, ya que la apuesta metodológica que se lleva a cabo en las escuelas multigrado del departamento de Antioquia se inscribe en el modelo de Escuela Nueva.

En consecuencia, en el marco conceptual de la EPC se define la comprensión como:

> La habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico es la "capacidad de desempeño flexible" con énfasis en la flexibilidad. De acuerdo con esto, aprender para la comprensión es como aprender un desempeño flexible (Perkins, 1999, pág. 70).

De acuerdo con esta definición, se espera que los estudiantes al terminar un ciclo de formación, cuenten con un repertorio de conocimientos y habilidades específicos, además, se espera que presenten una comprensión del sentido, la significación y el uso de dichos conocimientos y habilidades, es por ello que la EpC plantea una serie de desempeños que permiten identificar el nivel de comprensión del estudiante en diferentes dimensiones respecto a un tópico incluyendo el uso flexible de los conceptos en escenarios escolares o no escolares (Perkins, 1999). Esta forma de concebir la comprensión, responde a nuevas miradas sobre la enseñanza que ponen de manifiesto una educación más centrada en el contexto, en la cultura y en el reconocimiento de cómo los aprendizajes transforman el sujeto y su forma de ver el mundo (Perkins, 1999).

Conviene subraya que la comprensión se apoya en unas dimensiones que denotan las diferentes formas que demuestra el estudiante cuando comprende, estas se pueden definir como todas aquellas características observables durante el proceso de comprensión (Boix y Gardner, 1999). “Lejos de ser categorías estáticas y desvinculadas, interactúan dinámicamente en los desempeños de los alumnos” (Boix y Gardner, 1999 p. 243)

De acuerdo a esto, en primer lugar se presenta la dimensión de contenido que evalúa el paso de los conocimientos empíricos que ha construido el estudiante a través de sus experiencias, al conocimiento académico para ser aplicado de manera correcta, este escenario posibilita que el estudiante transforme sus creencias intuitivas y la coherencia de las redes conceptuales (Boix y Garnerd, 1999). En este sentido, los problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva plantea el conocimiento de cada uno de los conceptos que subyacen este tipo de problemas, multiplicación y división, a través de situaciones del contexto.

En segundo lugar, se presenta la dimensión de método, esta se refiere a las diversas formas y procesos que utilizan los estudiantes para construir, validar y resolver un problema o confirmar cierta información (Boix y Gardner, 1999). Al enmarcar esta dimensión en la

solución de problemas de tipo multiplicativo en el modelo Escuela Nueva, se involucra el uso de materiales concretos, representaciones pictóricas, simbólicas, entre otros métodos de solución, que permiten desentrañar la naturaleza del problema y sus conceptos.

Seguido, se encuentra la dimensión de propósitos, por su parte, se basa en "la convicción de que el conocimiento es una herramienta para explicar, reinterpretar y operar el mundo" (Boix y Gardner, 1999, p. 235). Se reflexiona acerca de las preguntas que los estudiantes plantean, en este sentido, Vergnaud (1990) propone que situaciones complejas se analicen como una combinación de tareas de las que es importante conocer su naturaleza y su dificultad, asi mismo, los conocimientos pueden ser puestos en juego a través de la formulación de preguntas de interés y la reflexión que se evoluciona en el conocimiento (Boix y Gardner, 1999).

Por último, la dimensión de formas de comunicación permite al estudiante implementar el uso de ciertos símbolos para comunicar lo que ha aprendido mediante la utilización de un lenguaje apropiado y comprensible (Boix y Gardner, 1999). En esta línea, el modelo Escuela Nueva posibilita que los estudiantes dialoguen sobre lo que van comprendiendo a través del trabajo colaborativo, el dialogo, el uso del cuaderno en donde se plasman las respuestas de los problemas multiplicativos, también se utiliza la herramienta del autocontrol de progreso, en donde los estudiantes escriben qué aprendieron y cuáles fueron sus dificultades.

Como ya se ha dicho, cada una de estas dimensiones de la compresión contiene distintos niveles, niveles que se dan de modo independiente en de cada una de las dimensiones; sin embargo, cada uno conserva características similares dentro de las dimensiones atendiendo a las particularidades de cada una. Es así, como en el nivel de ingenuo, los desempeños se basan en los conocimientos empíricos que no son aplicados en un contexto real, no hay conciencia del significado del conocimiento y la expresión del conocimiento es rígida carece de creatividad (Boix y Gardner, 1999). En el siguiente nivel, novato, los estudiantes difícilmente dan cuenta de conexiones entre ideas y conceptos, por lo tanto, su forma de presentar y demostrar el conocimiento es mecanizada (Boix y Gardner, 1999).

Más adelante se encuentra el nivel de aprendiz, en este nivel se presenta una relación consolidada entre el conocimiento y su uso flexible, existe conciencia de la complejidad de la construcción del conocimiento y la constante validación del mismo ((Boix y Gardner, 1999). Después, se encuentra el nivel de maestría, caracterizado por un convencimiento definido acerca de la importancia de construir el conocimiento a través de diferentes medios, es decir "los alumnos pueden usar el conocimiento para reinterpretar y actuar en el mundo que los rodea" (Boix y Gardner, 1999, p. 241). Es así que, el marco conceptual de la EpC entiende la compresión de un modo plural, es decir, no es estática, ni única, es móvil y múltiple, que reconoce diferentes dimensiones y niveles de ella (Stone, 1999).

Metodología

A continuación, se presentan las particularidades del diseño metodológico cualitativo que caracteriza este proyecto de investigación, proyecto que busca identificar cómo comprenden los estudiantes de los grados cuarto y quinto los problemas de tipo multiplicativo

orientado bajo el modelo de Escuela Nueva, entendiendo que las comprensiones se construyen dentro de realidades particulares, es por ello que en este estudio la realidad desde los aportes de Hernández, Fernández y Baptista (2010):

> La "realidad" se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación respecto de sus propias realidades. De este modo convergen varias "realidades" por lo menos la de los participantes, la del investigador y la que se produce mediante la interacción de todos los actores (p. 51).

Después de lo anterior, es necesario indicar que este estudio presenta características inductivas, ya que los datos son utilizados para proponer categorías (Taylor y Bogdan citado en González, 2014). En este sentido, el grupo de estudiantes, representado en tres niños, va construyendo comprensiones que se extienden y tocan otras formas de comprensión. Además de ser inductiva, esta investigación es de carácter es naturalista, que procura acercamientos de modo natural, intentando que la realidad se presente de la misma forma en la que los participantes la experimenten, sin limitarlos, ni condicionarlos.

Atendiendo a estas características, el método de investigación que adopta este trabajo es el estudio de casos, ya que permite investigar un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de vida real, sobre todo, cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes (Yin, 1994). El estudio de caso pretende comprender el cómo o por qué se da la comprensión y los factores que influyen en dicho proceso. Este método, posibilita que las comprensiones emerjan para describirlas e iluminarlas a la luz de la teoría.

El estudio de caso, admite seleccionar una muestra determinada de estudiantes para llevar a cabo este estudio, su selección está ligada a aquellos casos que puedan brindar gran "rentabilidad" (Stake, 1999, pág. 14); para la presente investigación se seleccionan tres casos. Las interacciones se realizan, inicialmente en las clases de matemáticas con el fin de observar las diferentes formas de la comprensión.

Después de determinar el método de estudio que orienta este proyecto de investigación, se proponen las fuentes o instrumentos de recolección de datos. En este sentido, Yin citado en Martínez (2006) plantea la importancia de utilizar múltiples fuentes de datos y el cumplimiento del principio de triangulación para garantizar la validez interna de la investigación, por tal razón, los instrumentos de recolección de información que aplican para esta investigación son:

En primer lugar, el diario de campo, esta herramienta de recolección de datos permite al investigador "vaciar sus anotaciones, reflexiones, puntos de vista, conclusiones preliminares, hipótesis iniciales, dudas e inquietudes" (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010, pág. 424). Seguido, se encuentra, la observacion participante, la cual en palabras de Corbetta (2003) es una técnica que conlleva a un contacto personal intenso entre el sujeto que estudia y el sujeto estudiado, además, el investigador observa y participa en la vida de los investigados. Por último, se utilizan las entrevistas que, según Stake (1999) permite ver aquello que no se ha percibido a través de la observación, por lo general confirman la descripción en alguna medida; Corbetta (2003) asegura que el investigador observa, escucha y pregunta, al preguntar utiliza la entrevista como instrumento.

La anterior ruta metodológica permite reconocer qué niveles de comprensión alcanzan los estudiantes, en la solución de problemas de tipo multiplicativo, en las diferentes dimensiones de la comprensión que plantea el marco conceptual de la Enseñanza para la comprensión, orientado bajo el modelo educativo Escuela Nueva- Fundación Volvamos a la Gente.

Resultados esperados.

Los niveles de comprensión en el que se inscribe cada estudiante de acuerdo a las dimensiones de la Enseñanza para la Comprensión: comunicación, métodos, propósitos y contenidos; se indagará a través del trabajo de campo y de los diferentes herramientas de recolección de información, se espera que estas comprensiones sean similares en algunas dimensiones y disimiles en otras, en este sentido los aprendizajes que construyan los estudiantes se darán a través del trabajo colaborativo, pero las comprensiones que de ella emerjan, serán individuales y se convertirán en el objeto de estudio de esta investigación.

Se espera que los problemas de tipo multiplicativo al contextualizarse con situaciones o actividades propias del cultivo del café como, la siembra, la recolección y la venta; así como la participación de los estudiantes con sus familias y sus compañeros en estas acciones, desarrollen comprensiones en la resolución de problemas de tipo multiplicativo y a su vez permitan afrontar de manera positiva la resolución de problemas de multiplicación y división en diferentes situaciones, escenarios o contextos.

Referencias y bibliografía

Castro, E. C. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.* Granada-España: Universidad de Granada.

Colbert de Arboleda, V., & Vásquez Castro, L. N. (2015). *Escuela Nueva - Escuela Activa, manual para el docente.* Bogota: Fundacion Escuela Nueva Volvamos a la Gente.

Corbetta, P. (2003). *metodología y técnicas de investigación social.* España: Mac Graw Hill.

González Molina, J. D. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricutura del café.* Medellín: Universidad de Antioquia tesis de maestría.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigacion quinta edición.* México: McGRAW-HILL/INTERAMERCANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Martínez Carazo, P. C. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestion* , 165-193.

Ministerio de Educacion Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Medellín : Imprenta Nacional.

Ministerio de Educacion Nacional. (2012). *Manual para la formulacion y ejecucion de planes de educacion rural* . Bogota: Imprenta nacional.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone Wiske, *la enseñanza para la comprensión. vinculación entre la investigación y la práctica.* (págs. 69-95). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de caso. Segunda edición.* Madrid: Edciones Morata.

Stone Wiske, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión.* México: Paidós.

Yin, R. K. (1994). *Investigación sobre estudios de casos. Diseños y métodos. Segunda edición.* London: SAGE publication .

Vergnaud, G. (1990). *La teoria de los campos conceptuales.* (U.R. Descartes, & CNRS, Edits.) Recherches en didáctiques en mathématiques, 10(2,3) 133-170.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Mexico: Trillas.

Vergnaud, G. (6 del 9 de 2016). segundo congreso internacional de la enseñanza de las ciencias y las matematicas (CIECYM). (M. R. Otero, & V. Llanos, Entrevistadores)



Comprensión del concepto de número natural en Preescolar

Maribel **Gil** Villegas
Universidad de Antioquia
Colombia
magilv3@gmail.com
Dora Mercedes **Bedoya** Vélez
Universidad de Antioquia
Colombia
dorabedoyav@gmail.com
Tanith Celeny **Ibarra** Muñoz
Universidad de Antioquia
Colombia
tanith2710@gmail.com

Resumen

La comprensión del concepto de número en el nivel Preescolar, es quien centra el interés de esta investigación, para lo cual, se retoman tres aspectos fundamentales, el primero es el número natural como concepto matemático, el segundo se refiere a la articulación con el Marco Conceptual Enseñanza para la Comprensión (EpC). Este marco brinda las herramientas para analizar cómo se presenta ésta desde una propuesta pedagógica de aula y el tercero es el uso de material reutilizable, elemento concreto, el cual cumple un doble propósito; permitirle al estudiante establecer relaciones cognitivas que lo lleven al número natural y para el docente investigador ser insumo de las observaciones de campo. La metodología, que plantea esta propuesta se enmarca en la investigación cualitativa, desde el enfoque hermenéutico, de tipo estudio de caso, con el propósito de encontrar explicaciones con relación a la pregunta sobre la comprensión del concepto matemático.

Palabras clave: educación, número natural, Preescolar, Enseñanza para la Comprensión, material reutilizable

Planteamiento del problema

Esta investigación centra la indagación en un área: las Matemáticas, específicamente en la comprensión del concepto de número natural, pues en dicho nivel es conveniente hacer acompañamiento desde la creación de ambientes que motiven al estudiante a pensar sobre el número y su relación con el contexto circundante, lo que posibilita la construcción de este objeto matemático.

Los dos hallazgos que justifican y dan relevancia de este proceso investigativo, son; primero, la observación en el aula de clase, que toma como referente el diagnóstico que se realiza al inicio del año escolar y el interés del docente investigador por aportar desde el Marco General de los Planes Educativos que con relación al fortalecimiento de la educación en primera infancia se vienen impulsando a nivel institucional y en segundo lugar, los aportes que brindan los referentes de calidad propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Estos hallazgos se describen a continuación:

Observación en el aula

Al respecto en la Institución Educativa de Jesús, sede Camilo González, del municipio de Concordia, departamento de Antioquia (Colombia), los estudiantes de Preescolar, población objeto de estudio de esta investigación, participan al inicio del ciclo escolar de una evaluación diagnóstica; la cual se realiza desde cada una de las dimensiones del desarrollo (socio- afectiva, corporal, comunicativa, cognitiva, estética, espiritual, ética), con indicadores que refieren al documento Derechos Básicos del Aprendizaje (DBA), éstos se han instaurado en la malla curricular de la Institución Educativa. Específicamente, se amplían los resultados con relación a la dimensión cognitiva, la cual es prioridad, desde las necesidades del grupo de estudiantes y los intereses institucionales en relación con el fortalecimiento de la educación para la primera infancia.

A partir de la prueba se evidencia que la construcción y posterior comprensión del concepto de número natural, se presenta desde acciones como: organización de elementos en el espacio desde la intuición, nombrar elementos sin orden específico ni relación perceptual, realizar conteos usando la palabra número desde el reconocimiento social que tienen.

Otro elemento que se resalta de este proceso diagnóstico, está relacionado con las diferencias cognitivas presentes en este grupo de estudiantes, donde algunos nombran los elementos de un conjunto separando por una característica física, pero sin establecer relaciones de comparación entre ellos, es decir, al preguntar cuál de estas dos colecciones es mayor o menor, dan respuestas basados en la percepción visual desde la ubicación en el espacio de los conjuntos, sin relación directa con la cantidad, por el contrario, otros establecen correspondencias y orden mental a los objetos.

Las diferencias en el proceso de construcción del número natural son evidentes, mientras algunos estudiantes establecen orden espacial de los objetos y correspondencia biunívoca; relación uno a uno de las palabras número con los objetos nombrados, otros por su parte, realizan conteos recitando secuencias de palabras número y señalando más de una vez el mismo objeto, lo cual evidencia la pertinencia de implementar estrategias que incluyan material concreto al momento de realizar acompañamientos fundamentados en el proceso cognitivo de cada estudiante para la comprensión del concepto.

Referentes de calidad

A continuación, se explicitan algunos apartados de referentes de calidad, segundo aspecto que perfila esta investigación, que fundamentan la Educación Preescolar en el país.

Lineamientos Curriculares de Preescolar (1998). Este documento refiere el sentido y significado de la Educación Preescolar y la visión del niño desde las dimensiones del desarrollo, describe el proyecto pedagógico, como eje articulador de la teoría y práctica, en tanto que es un:

> […] proceso de construcción colectiva y permanente de relaciones, conocimientos y habilidades que se va estructurando a través de la búsqueda de soluciones a preguntas y problemas que surgen del entorno y la cultura del cual el grupo y el maestro hacen parte -el grupo investiga, explora y plantea hipótesis en busca de diferentes alternativas-. (MEN, 2008, p. 14).

En este sentido, el enfoque que desde la Educación Preescolar se ha planteado para este grado específico, remite a la búsqueda de respuestas en el contexto, donde el estudiante tiene una participación activa, que los lleva a encontrar caminos para la comprensión de conceptos específicos.

Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) Transición (2016). En los DBA, se reconocen las interacciones que establecen los niños con el mundo, con los otros y consigo mismos, por medio de experiencias y ambientes pedagógicos en los que está presente: el juego, las expresiones artísticas, la exploración del medio y la literatura. Estos elementos se hacen visibles en tres grandes propósitos:

> a. Las niñas y los niños construyen su identidad en relación con los otros; se sienten queridos, y valoran positivamente pertenecer a una familia, cultura y mundo.
>
> b. Las niñas y los niños son comunicadores activos de sus ideas, sentimientos y emociones; expresan, imaginan y representan su realidad.
>
> c. Las niñas y los niños disfrutan aprender; exploran y se relacionan con el mundo para comprenderlo y construirlo (MEN, 2016, p. 5).

La presente investigación, focaliza el discurso desde el último propósito, en el cual se explicita la necesidad que tienen los estudiantes de explorar, comprender y construir el mundo, para responder a situaciones de contexto, a partir de sus conocimientos y el uso de recursos que les permiten proponer diversas alternativas de solución.

Bases Curriculares para la Educación Inicial y Preescolar (2017). Este documento desarrolla los referentes técnicos que desde el Ministerio de Educación Nacional se han expuesto para la atención a la primera Infancia; la cual va desde los cero hasta los siete años de edad.

El estudiante de Preescolar se desarrolla de forma integral, explorando el mundo que lo rodea, creando situaciones en las que intercambia información desde sus capacidades, para tomar decisiones y poner a prueba lo aprendido.

Es por lo anterior, que todo proceso de aprendizaje que se articula a lo planteado para esta etapa del desarrollo, debe tener en cuenta las condiciones cognitivas y específicamente el paso del pensamiento concreto al simbólico, como ocurre con relación a la construcción del concepto de número natural, lo cual remite a los cimientos, a esa pregunta por el cómo, desde aquello que ellos verbalizan, para construir un aprendizaje dialógico, en donde a través de preguntas y respuestas se comprenda el proceso que se viene desarrollando.

Objetivo general

Analizar cómo comprenden estudiantes de Preescolar el concepto de número natural, en el Marco Conceptual de (EpC), mediante el uso de material reutilizable.

Objetivos específicos

• Describir los niveles de comprensión que presentan los estudiantes del nivel Preescolar, a partir del registro de observaciones durante el desarrollo de un proyecto de aula diseñado para la comprensión del concepto de número natural.

• Interpretar cómo comprenden los estudiantes de nivel Preescolar el concepto de número natural, utilizando material reutilizable en el desarrollo de un proyecto de aula.

• Detallar las explicaciones escritas y verbales dadas por los estudiantes del nivel Preescolar durante la realización de entrevistas semiestructuradas en relación con la comprensión del concepto de número natural.

Marco Referencial

Concepto de número natural

Piaget (1991), buscó con sus investigaciones dar respuesta a preguntas epistemológicas sobre el conocimiento, llevándolo a estudiar los orígenes del mismo, en el desarrollo del pensamiento en los niños, conceptualizando de esta forma cómo piensan y solucionan situaciones de la vida cotidiana.

El número, desde esta teoría es definido como una estructura mental que "construye cada niño mediante una aptitud natural para pensar, en vez de aprenderla del entorno" (Piaget, citado por Kamii 2000, p. 17). El número es el resultado de dos tipos de relaciones que el niño establece entre objetos, de orden y de inclusión jerárquica.

Además, Piaget (1991) realizó una distinción entre tres tipos de conocimiento, uno es el físico, relacionado con los elementos físicos, lo visible y tangible, el segundo es el social o convencional, representado en hechos y fechas especiales que se dan en sociedades específicas, y el tercero es el conocimiento lógico- matemático, el cual es construido por cada niño, la mente es quien realiza las relaciones y diferencias entre los elementos físicos, este proceso es interno.

En este mismo sentido, para estructurar el conocimiento físico y lógico-matemático, el niño realiza dos tipos de abstracción, la abstracción empírica y reflexionante.

Según la teoría de Piaget, la abstracción del color de los objetos es de naturaleza muy distinta a la abstracción del número. En realidad, son tan diferentes, que se designan con términos distintos. Para la abstracción de las propiedades de los objetos, Piaget usó el término abstracción empírica (o simple). Para la abstracción del número usó el término abstracción reflexionante (abstraction réfléchissante) (Piaget, citado por Kamii, 2000, p. 22).

Teniendo en cuenta lo anterior, el niño se concentra en una sola característica de los objetos en la abstracción empírica, olvidando las otras, por su parte en la abstracción reflexionante, involucra relaciones entre objetos para establecer orden mental e inclusión jerárquica, para dar como síntesis el número, para esto pasa del conocimiento del objeto concreto abstracción empírica, empleando nociones lógicas de clasificación, seriación y correspondencia lo que le permite al estudiante establecer relaciones de inclusión jerárquica de clases y de orden con los elementos abstraídos, significación que se establece a partir de lo simbólico e interno de

la abstracción reflexionante, coordinado por la mente, a partir del desarrollo del pensamiento lógico matemático.

La comprensión del número, no es un proceso innato, como afirma Kammi (2000), el niño lo construye de forma individual, por la capacidad que tiene para pensar y las relaciones que establece con el mundo que lo rodea a través de la experiencia, esta investigación pretende integrar las consideraciones de la teoría piagetiana al reconocer que establece la evolución del desarrollo infantil, de las relaciones lógicas y cognitivas que están involucradas en la comprensión del número, además reconoce los aportes didácticos de Kamii en la propuesta de enseñanza la cual será articulada al Marco Conceptual de (EpC).

Será entonces, el Marco conceptual de Enseñanza para la Comprensión (EpC), el que fundamenta desde la integración de la teoría, que sirve de base para el análisis de la comprensión del concepto de número natural en Preescolar.

Marco Conceptual Enseñanza para la Comprensión (EpC)

El Marco Conceptual de Enseñanza para la Comprensión (EpC), en la compilación que realiza Stone (1999), busca promover y reconocer los procedimientos básicos que el docente tiene en cuenta al momento de planear una intervención en el proceso de enseñanza. Este marco desarrolla una propuesta fundamentada en tres componentes: Elementos, Niveles y Dimensiones. A continuación, se presenta esta descripción:

Elementos de la comprensión

Este componente desarrolla cuatro Elementos de Comprensión, que se describen a continuación de forma separada, pero que se articulan en una misma práctica, ya que "en rigor, cada uno de los elementos invoca aspectos de los demás" (Stone,1999, p. 96).

Tópicos generativos. Estos hacen referencia a los temas o ideas, las cuales deben ser motivantes, interesantes y accesibles, buscando establecer relaciones de comprensión.

Metas de comprensión. Después de elegir un buen tópico, se pasa a plantear las metas, las cuales guían el proceso a seguir, enfocando hacia el lugar que se dirige el proceso formativo, delimitando el campo conceptual.

Desempeños de comprensión. En este se desarrolla toda la propuesta de intervención, las actividades dinámicas, que han sido pensadas para el aprendizaje desde las inteligencias múltiples (Gardner, 1995) y la progresión que el estudiante realiza al pasar una a una por las categorías de desempeño para la comprensión.

Evaluación diagnóstica continua. Esta es pública y establecida desde el inicio del proceso formativo, se da en múltiples direcciones: el docente a los estudiantes, estudiantes con estudiantes, el proceso de autoevaluación y evaluación con expertos.

Niveles de comprensión

En (EpC), los estudiantes van pasando por diferentes niveles, que los llevan del ingenuo, al novato, para pasar al aprendiz y finalmente maestría, cada trabajo de comprensión implica un proceso, por lo tanto, se puede ser novato en cualquier área del saber y contar al mismo tiempo con una comprensión avanzada en otro campo determinado.

Dimensiones de comprensión

Además, en la compilación de Stone (1999), se proponen cuatro dimensiones: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación, que permiten hacer la definición de comprensión más específica, ya que facilitan el análisis del desarrollo progresivo de cada estudiante. Dentro de cada dimensión, se establecen los cuatro niveles de comprensión: ingenuo, novato, aprendiz y maestría.

De acuerdo con lo anterior, esta investigación busca articular el Marco de la (EpC) con el objeto de estudio planteado: concepto de número natural, retomando sus tres componentes. Desde cada una de las dimensiones se analizará el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes, y se describirán al interior de cada una de estas cuál sería el nivel ingenuo, novato, aprendiz y maestría en la comprensión del concepto de número natural.

A partir de los elementos se implementa un proyecto de aula para el nivel Preescolar, pensando en la edad y por ende en el nivel de desarrollo cognitivo y de lenguaje de los estudiantes, se propone el uso de material reutilizable como elemento mediador para la simbolización del proceso lógico y la interpretación de la comprensión.

Material reutilizable

Los estudiantes de Preescolar se encuentran en el proceso de simbolización del lenguaje y del conocimiento matemático, expresar lo que piensan y sienten se hace posible a través de las actividades rectoras: arte, juego, literatura y exploración del medio. El MEN (2017), relaciona esta última actividad con el contexto, la manipulación que el estudiante realiza de los materiales que se encuentran disponibles en su entorno, le permiten leer la realidad y apropiarse de la herramienta cultural que los rodea.

Si bien es cierto que "el niño aprende a partir de la acción sobre los objetos" (Piaget y Inhelder, 1975, p. 56), no es la manipulación como tal, la que contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, sino la acción mental sobre estos elementos, la cual se estimula al momento de combinar diversidad de materiales para establecer distintas relaciones lógicas.

El material reutilizable es un mediador del conocimiento, que facilita la observación del docente, el cual infiere a través de las acciones del estudiante la forma que actúa sobre los objetos, para analizar e intervenir en orden de influir en el proceso de razonamiento y así avanzar desde lo que sabe hacia lo que pretende comprender.

Metodología

Metodología cualitativa

La Investigación social de corte cualitativo, desde los planteamientos de Sandoval (2002), es aquella que "Se interesa por lo particular desde una mirada interna." (p.19) Se desarrolla en contextos reales, en este caso, la Institución Educativa de Jesús, sede Camilo González, desde las interacciones sociales que establecen los estudiantes.

En este mismo sentido, la comprensión del concepto de número natural, se da desde la interacción social que involucra a diferentes actores: familiares, sociales y escolares, dinámicas reales que pretenden ser analizadas e interpretadas.

Enfoque hermenéutico y estudio de caso

De acuerdo con Sandoval (2002), la investigación tiene en cuenta el enfoque hermenéutico, ya que busca interpretar y comprender la acción de los actores, mediante procesos libres, donde el

investigador es un actor participante, que observa la realidad para reconstruirla desde la flexibilidad, sin codificaciones previas, ni interpretaciones a priori, en escenarios reales donde se posibilita el diálogo.

Contexto, participantes e instrumentos.

La Institución Educativa de Jesús, se encuentra en el municipio de Concordia, ubicado al suroeste de Antioquia (Colombia). Una de las sedes periurbanas de la Institución, es la sede Camilo González, la cual ofrece educación formal hasta el grado Noveno, en la modalidad de Escuela Nueva; en este contexto se desarrolla la presente experiencia investigativa.

La población objeto de estudio son los estudiantes del nivel de Preescolar, éstos se encuentran entre los cinco y seis años de edad. El trabajo de campo se realiza con el grupo de estudiantes completo y para el estudio de caso, se seleccionan 4 estudiantes, con el propósito de analizar a profundidad la comprensión, ya que como afirma Stake (1999, p.11) "[…] es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes".

Es así, como los instrumentos que se han seleccionado como pertinentes para indagar la comprensión del concepto de número en nivel Preescolar son: observación y la entrevista semiestructurada.

Observación. Es el elemento que permite analizar la comprensión de un caso en particular, desde este instrumento que es registrado en un diario de campo, el investigador realiza sus interpretaciones de la realidad circundante en que está inmerso.

La interpretación es una parte fundamental de cualquier investigación. Podríamos discutir con quienes sostienen que en la investigación cualitativa hay más interpretación que en la cuantitativa -pero la función del investigador cualitativo en el proceso de recogida de datos es mantener con claridad una interpretación fundamentada. Los investigadores sacan sus conclusiones a partir de las observaciones y de otros datos (Stake, 1999, p. 21).

Entrevista semiestructurada. En esta misma línea del discurso, Stake (1999) propone que la entrevista "es el cauce principal para llegar a las realidades múltiples" (p. 63). Dando pertinencia al uso de la entrevista semiestructurada, para el análisis de casos particulares, estableciendo preguntas abiertas y cerradas que en el proceso permitan analizar la comprensión que cada estudiante está construyendo.

Teniendo en cuenta la información recolectada con los instrumentos mencionados y que la técnica empleada es el estudio de casos, el análisis de la información se realiza teniendo en cuenta los procesos de codificación y categorización de la información de los cuatro casos particulares, para cada caso se presenta el análisis en coherencia con los códigos y categorías que emergen en el desarrollo del trabajo de campo, realizando una descripción detallada de los procesos de comprensión del concepto de número en los estudiantes del nivel Preescolar.

Resultados esperados

La presente investigación articula el Marco de Enseñanza para la Comprensión (EpC), desde la implementación de un proyecto de aula con los estudiantes del nivel Preescolar buscando en primer lugar, interpretar sus comprensiones, teniendo como mediador desde dos perspectivas el material reutilizable, como elemento concreto que le permitan al estudiante establecer relaciones desde la abstracción empírica y reflexionante y al docente investigador

como insumo de observación, para reconocer como el estudiante resuelve las situaciones que se presentan (intuitiva, espacial o lógica) y analizar desde esta perspectiva la comprensión del concepto matemático. En segundo lugar, describir los niveles de comprensión que éstos presentan con respecto al concepto de número natural, teniendo como apoyo el registro de las observaciones en un diario de campo. Por último, se detallarán sus explicaciones escritas y verbales, para obtener como resultado el análisis de la forma como los estudiantes se enfrentan a diferentes requerimientos lógicos y cognitivos propios de la comprensión del concepto de número natural, utilizando material reutilizable durante el desarrollo de un proyecto de aula que incluye los componentes del marco de (EpC).

Referencias y bibliografía

Gardner, H. (1995). *Inteligencias Múltiples. La Teoría en la Práctica*. Barcelona: Paidós.

Kamii, C. (1995). *El número en educación preescolar.* Madrid: España

_____ (1996). La teoría de Piaget y la enseñanza de la aritmética. En C. Kamii, Piaget los mecanismos del desarrollo y los aprendizajes escolares (p.109-119). Madrid: Perspectivas.

_____ (2000). *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: España.

Ley N° 1098. Código de la Infancia y la Adolescencia, Bogotá, Colombia, 8 de noviembre de 2006.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Preescolar*. Bogotá: Colombia

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas.* Bogotá: Colombia

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *DBA Preescolar*. Bogotá: Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Bases Curriculares. Para la Educación Inicial y Preescolar*. Bogotá: Colombia.

Piaget, J. (1991). *Seis Estudios de Psicología. Barcelona*: España. Labor S.A.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1975) Psicología del niño. Madrid: Ediciones Morata.

Sandoval, C (2002). *Investigación Cualitativa*. Bogotá: Colombia.

Stake, R. (1999). *Investigación con Estudio de Caso*. Madrid: Morata

Stone, M. (comp). (1999). *La Enseñanza para la Comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica.* Buenos Aires: Paidós.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Un Modelo de Enseñanza para la adquisición de las nociones de los números naturales con base en von Neumann

María Leticia **Rodríguez** González
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
leticia.rodriguez@cinvestav.mx
Eugenio **Filloy** Yagüe
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
smmeef@aol.com
Bernardo **Gómez** Alonso
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia
España
bernardo.gomez@uv.es

Resumen

Este proyecto de investigación tiene como propósito diseñar un Modelo de Enseñanza, basado en la construcción de los números naturales de von Neumann. Los Modelos Teóricos Locales (MTLs) y sus cuatro componentes, son el referente teórico y metodológico para identificar y comprender las dificultades que tienen los alumnos de 6 a 9 años, con el uso de la lógica de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) que se involucran; así como los procesos cognitivos que se promueven con este Modelo de Enseñanza. En este espacio de comunicación la atención se centra en el componente de Comunicación: la producción de sentido para la construcción de significado de las acciones derivadas de las actividades realizadas con los números naturales y sus operaciones. Se presentan los primeros acercamientos al análisis e interpretación de la experimentación, misma que servirá de diagnóstico, para hacer las modificaciones correspondientes al Modelo inicial.

Palabras clave: Modelo de Enseñanza, Modelo de Comunicación, Números Naturales.

Introducción

El aprendizaje de los números forma parte de los procesos de la vida cotidiana; también es una prioridad curricular en los primeros años de escolarización de los niños de nuestra nación. En este sentido, en México el modelo de enseñanza que propone el Plan de Estudios, precisa que "…el estudio de la matemática considera el conocimiento y uso del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de información y de los procesos de medición." (SEP 2011, p. 53) El libro de texto oficial para el alumno Desafíos Matemáticos (SEP, 2015), prioriza el tratamiento cardinal de los números como comparar e igualar conjuntos;

y sólo hay dos lecciones que hacen referencia al sentido ordinal, en la primera "Carrera de autos" se les pide que pinten de diferente color de acuerdo con el lugar de llegada a la meta; en la otra lección "Animales en orden" se les pide que coloquen figuras de acuerdo con el orden de selección: conejo – primero, vaca – segundo,…

La estrategia pedagógica propuesta para trabajar los "Desafíos Matemáticos" (SEP, 2015), sugiere que a los niños se les planteen como retos, organizando diferentes formas de interacción; sin embargo, lo que se observa es que los maestros los abordan como lecciones o ejercicios al estilo tradicional, de forma individual e incluso los dejan de tarea en casa, los calificándolos y asignándoles mediciones numéricas, rompiendo el sentido pedagógico de la evaluación como proceso de valoración y análisis para revisar y consensar los procedimientos más factibles y económicos e identificar las dificultades que tuvieron y cómo lo resolvieron. Cuando los profesores no siguen la secuencia gradual de los libros de texto "Desafíos Matemáticos", rompen la progresión conceptual. Otra de las prácticas comunes que se observan es el abuso de mecanizaciones que van desde secuencias numéricas orales, escritas, ejercicios fotocopiados de libros de matemáticas que no tienen coherencia ni relación con el enfoque didáctico de la asignatura de matemáticas.

Por lo que, el interés de esta investigación está centrada en identificar las dificultades que tienen los niños, cuando se trabaja con ellos un modelo de enseñanza con la estructura formal de von Neumann y que pueda servir de base para la construcción del pensamiento aritmético. El único trabajo que se ha implementado en este sentido, es la propuesta que se viene explorando con niños preescolares con el trabajo de Maravilla (2011) y que ahora se pretende continuar en una nueva etapa con niños de los tres primeros grados de educación primaria. Se reitera, que un modelo de enseñanza con estas características nunca se ha puesto en práctica ni ha sido objeto de investigación. La estructura aritmética que se propone es la lógica de construcción de los Sistemas Matemáticos de Signos involucrados en la construcción de los números naturales, sus propiedades y operaciones.

Con el marco teórico de los Modelos Teóricos Locales (MTLs) (Filloy, Rojano y Puig, 2008) y sus cuatro componentes este proyecto de investigación se ha estructurado de la siguiente manera: a) *Modelo Formal* de John von Neumann precisa una lógica de construcción de los números naturales a partir del orden, con los procesos de iteración y recursividad, ir construyendo el sucesor a partir del antecesor; b) *Modelo de Cognición* recupera las aportaciones de Piaget (1984) y su relación con la lógica en la construcción de número y las contribuciones de la psicología soviética representada por Galperín (1976) y Talizina (2001) con la Teoría de las Acciones; c) *Modelo de Comunicación* implica a los usuarios competentes para usar los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) involucrados en las nociones de número y; d) Diseñar un *Modelo de Enseñanza* que traslade el modelo formal a un modelo con el uso de material concreto y la recta numérica.

La metodología de la investigación es de corte cualitativo, que se desarrolla en dos momentos: a) observación experimental (diagnóstico con la participación de 3 grupos de 1º, 2º y 3º de tres escuelas primarias públicas de la Ciudad de México. Con el análisis de estos primeros acercamientos a la experiencia empírica, se pretende tener elementos para seleccionar a los niños que participarán en el estudio de casos y entrevista clínica. Lo que permitirá tener elementos a partir de la triangulación del reporte de la observación con la guía teórica y metodológica de los MTLs para continuar con lo que se propone en la segunda parte de la investigación: el rediseño del Modelo de Enseñanza. Para este texto, se presentan sólo algunos ejemplos de interpretación

desde el modelo de comunicación en la producción de sentido para construir significados matemáticos.

Marco Teórico y Metodológico: Modelos Teórico Locales

Los MTLs son un marco teórico y metodológico que toma en cuenta las dificultades que se producen en las aulas cuando se plantean diferentes tipos de actividades que tienen que ver con la producción de sentido de mensajes matemáticos y su decodificación; su interés está en la observación en materia educativa. La observación empírica es la principal herramienta para comprender los procesos cognitivos que se articulan en la competencia formal y pragmática. Lo local profundiza en el análisis de un fenómeno específico, el cual es analizado a la luz de las cuatro componentes: formal, cognitivo, enseñanza y de comunicación. Los diseños experimentales tienen la intención de analizar la información que permita comprender las dificultades a las que se enfrentan los actores en situaciones problemáticas para observar las interacciones y contraposiciones de las competencias (cogniciones) que se ponen en juego en el espacio textual; cómo se van construyendo los intertextos a través del modelo de enseñanza específico con un soporte en el modelo formal y qué competencias comunicativas usan para decodificar y codificar los mensajes, así como las dificultades o posibilidades tienen para realizar un esbozo lógico semiótico de la situación problemática. La pregunta que guía esta investigación es:

¿Qué dificultades tienen los niños en la adquisición de las nociones de la estructura aritmética a partir de la construcción de los números naturales como base el modelo formal de von Neumann?

Para este propósito se han diseñado los siguientes objetivos:

- Diseñar un modelo de Enseñanza que traslade el Modelo de la Matemática Formal a un Modelo Matemático Concreto; sin intervenir ni obstaculizar la estructura curricular, con la finalidad de conocer los procesos de generalización y comunicación con contenido matemático, a través del estudio de casos como estrategia metodológica.
- Identificar y comprender las dificultades que tienen los niños en los dos primeros ciclos de educación primaria, en la adquisición de las nociones de la estructura aritmética a partir de la construcción de los números naturales, con base en el modelo de von Neumann y a través del desarrollo de procesos de iteración y recursividad; teniendo como referente teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales.

Estructura de este MTL para la construcción de los números naturales

Modelo de Competencia Formal. En este componente se requiere de un referente matemático abstracto, que permita describir "...las situaciones observadas por medio de un SMS más abstracto que permita decodificar todos los textos que se producen en un intercambio de mensajes en el que los actores tienen diversos grados de competencia de uso de los SMS utilizados..." (Filloy, 1999, pág. 7). Para este trabajo se retoma la construcción de los números naturales propuesta por J. von Neumann, desarrollado por Hamilton & Landin (1961) como la base teórica - conceptual para diseñar un modelo concreto, con el agregado de la recta numérica como un recurso didáctico en la construcción de los números a partir del orden, retomada de la aportación que hace Maravilla (2011) para darle sentido al orden de construcción de los números naturales, así como el uso de bolsas como contenedores de los conjuntos de elementos.

Modelo de Cognición. Se pretende comprender el desarrollo de los procesos cognitivos de la percepción, atención y la memoria a corto, mediano y largo plazo, para desarrollar los procesos conceptuales que realizan los niños en la construcción de los números naturales y las nociones de la estructura aritmética.

Modelo de Enseñanza. Es una colección de textos, en que la secuencia de actividades constituye espacios textuales (Filloy, Rojano & Puig, 2008, p. 129), para generar y modelar situaciones, el lenguaje va de concreto a abstracto, con códigos intermedios, que les permite gradualmente desarrollar habilidades matemáticas para resolver distintas situaciones o problemas. Estas habilidades matemáticas van desde los conocimientos intuitivos que ya poseen, sintácticas y semánticas que la experiencia escolar y cognitiva les va aportando. Las primeras y las segundas en nuestro caso hacen uso de la operatividad aritmética y mientras que en las últimas van acompañadas del sentido y uso en diversas situaciones problemáticas y escolares, como de la vida cotidiana. El diseño de las actividades del Modelo de Enseñanza, se realizó de acuerdo con la estructura del capítulo dos, presente en Hamilton & Landin (1961, págs. 74 – 115), quienes desarrollan el modelo formal de la construcción de los números naturales de von Neumann. La secuencia se organizó en tres etapas:

1ª Construcción de los primeros números naturales. a) el Modelo Formal se fundamenta en las definiciones de los números naturales del cero al nueve; sucesor; número natural y las relaciones de orden. b) Modelo de enseñanza – actividades concretas: construcción de los números naturales empezando por cero usando bolsas como contenedores (conjuntos), cubos, cuadrados, puntos, el cambio (construcción de la nueva unidad 10) y la recta numérica.

2ª Adición y multiplicación a partir de la construcción de las tablas de Pitágoras. a) Modelo Formal: definiciones de las relaciones de orden, conteo (correspondencia uno a uno) y las operaciones de suma, resta y multiplicación a partir de la construcción de las tablas de Pitágoras de suma y multiplicación. b) Modelo de Enseñanza: Secuencias numéricas, uso de la calculadora, saltos de la rana "adelante" y "atrás" en la recta numérica, construcción de las tablas de Pitágoras, contamos en diferente orden una colección.

3ª Relaciones de orden, adición, multiplicación y propiedades de las operaciones. a) Modelo Formal: definiciones de relaciones de orden, conteo, multiplicación como suma iterada, como producto cartesiano y reparto. b) Modelo de Enseñanza: Tiro al blanco, el Boliche, El artesano (operaciones de resta), los payasos (multiplicación).

Modelo de Comunicación. De acuerdo con Filloy, Puig y Rojano (2008, págs. 4 - 6) la matemática educativa se ocupa de comprender y entender cómo son los procesos de significación y comunicación que se generan en los espacios educativos, en nuestro caso, actividades relacionadas con la construcción de los números naturales. El referente que se retoma es la conceptualización del Sistema Matemático de Signos, así como la construcción de conceptos semióticos provenientes de Peirce y su relación triádica, para identificar y comprender la lógica de uso que siguen los niños en la construcción del SMS involucrados en la construcción de los números naturales, para producir sentido y significación, que les permita llegar a la abstracción.

Lógica de construcción del significado. Para fundamentar esta conceptualización los Modelos Teórico Locales (Filloy, Rojano y Puig 2008) se apoyan en la semiótica de Peirce, quien identifica en el signo y su doble y triple dimensión: acto como acción y representación; así como su relación tríadica (signo, objeto e interpretante) en la cual el interpretante (cognición) va a jugar un papel fundamental, para construir procesos de significación. Se trata de un

"...*Interpretante Dinámico*, pensamiento-signo u hombre-signo. Sólo este sujeto-significante completa una explicativa tríada genuina y permite un enfoque no dicotómico del tipo <<significado-significante>>" (Peirce 1987, pág. 11)

Signo y Símbolo. Para Peirce los procesos de significación que realiza el interpretante le lleva a generar tres premisas: el signo es una relación tríadica con la actuación del interpretante; está relacionado con la cognición "Es que la palabra o signo que el hombre usa es el hombre mismo." (Peirce, 1987, p. 8); la relación tríadica del signo no es arbitraria, es la relación entre el signo (representamen), el objeto y el interpretante. El representamen es el fundamento de las ideas, es el objeto que representa al signo, son los interpretantes quienes construyen el sentido y la significación a partir de la tríada signo – objeto – interpretante.

La semiótica se articula con las condiciones de verdad, "…como una teoría de la referencia y una teoría de la significación." (Peirce, 1987, pág. 9). Este proceso de significación se posibilita con la participación del interpretante. Entonces podemos afirmar que un signo y la cosa significada, son producto de la cognición producida en la mente. Siguiendo esta lógica de construcción, Peirce refiere como relación triádica: el signo como ícono es la relación del signo y la cosa.

Abducción, inducción, deducción. - En este planteamiento Peirce, conlleva a identificar otra tricotomía: los procesos de *inducción, abducción y deducción*; en el primero la *inducción* permite comprender los hechos homogéneos para clasificar, pero no explicar, busca los hechos empíricos para demostrar, prueba experimentalmente sus hipótesis, que a su vez le sugiere otras hipótesis, opera desde lo simbólico y su aproximación a lo real es a través de la verificación de sus resultados. "Una Inducción es (…) una verificación experimental de una predicción general,… " (Peirce 1987, pág. 259); mientras que con la *abducción* se desarrolla la inferencia hipotética, a partir de la consideración de los hechos construye hipótesis, establece un puente de lo real a lo simbólico; es decir, es una transcripción de las palabras en signos, símbolos, este razonamiento permite discriminar premisas verdaderas o falsas, es la base del razonamiento analítico, para formular hipótesis y conjeturas explicativas, con la finalidad de establecer su *falsabilidad*, es decir, como posibilidad de que una proposición que puede ser negada, entonces una

> … Abducción es un método para formar una predicción general sin ninguna seguridad positiva de que tendrá éxito, tanto en el caso especial como de manera usual, y su justificación es que es la única esperanza posible de regular nuestra conducta futura de manera racional,… (Pieice 1987, 259);

y la tercera la *deducción*, consolida la habilidad para razonar de lo general a lo particular.

> Una *Deducción* es un argumento cuyo Interpretante representa que éste pertenece a una clase general de posibles argumentos precisamente análogos, que son tales que a la larga, dentro de la experiencia, la mayor parte de aquellos cuyas premisas son verdaderas tendrán conclusiones verdaderas. Las Deducciones son o *Necesarias* o *Probables*. (Peirce 1987, pág. 258)

El proceso de *abducción* implica un uso correcto de la lógica de los SMS, sus códigos y sus reglas convencionales, artefactos lingüísticos que se emplean en una comunidad matemática. Pero también los sujetos usan metacódigos que constituyen "… una colección de instrumentos discursivos y semióticos heterogénea y divergente que dan cuenta de la <masa de actividades de significación y comunicación que en la práctica acompañan el primer modo (formal y rigoroso) de presentar las matemáticas>." (Filloy, 1999, p. 63) Entonces el interés se centra en la semiótica, como el estudio de los signos en su relación triádica y el papel del interpretante, que

es el sujeto de la cognición para producir sentido y significación. "Para Peirce los pensamientos son signos, la mente es un signo (…) el hombre mismo es un signo" (Peirce 1987, pág. 8).

Con estos referentes, se pretende comprender la complejidad que implica la estructura lógica de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales, los procesos intermedios que usan los niños para la producción de sentido y significación a las actividades y acciones que se les están proponiendo.

Texto e intertexto matemático. Los textos matemáticos se conforman por un sistema de signos con una estructura formal, que son interpretados por los sujetos que los usan y conceptualizan, a partir de ciertos códigos para comprenderlos. Filloy (1999, pág. 63) recupera la aportación de Javier Lorenzo "la caracterización del texto matemático (...) va a estar en el modo de emplearlo y en el modo por el cual se le da un referente o contenido semántico posterior". Argumenta que en matemática educativa una semiótica de las matemáticas implica centrarse en los sistemas de significación y los procesos de producción de sentido, porque lo que se va a "...calificar de <matemático> no es sólo un tipo particular de signos, sino determinados sistemas de signos." (Filloy 1999, págs. 63 y 64). En el aula, los alumnos y maestros producen textos cuando se está realizando la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas, interactúan a través del sentido y como producto del proceso de significación; dichos textos no son producto del lenguaje matemático (filloy 1999, pág. 64), "...sino el resultado de procesos de lectura/transformación hecho sobre un expacio textual..."

Lógica de uso de los Sistemas Matemáticos de Signos involucrados en construcción de los Números Naturales. Nuestro interés para comprender el uso de la lógica de los SMS está centrado en la realización de actividades sobre los números naturales, apoyándonos en el uso de algoritmos y de los SMS que usan los niños para poder observar lo que llevan a cabo en los procesos de construcción de los mismos. Es común que en la enseñanza se proponga una manera de construir y operar con los números usando los algoritmos convencionales, para lo cual los alumnos usan sus dedos, objetos o calculadoras. Sin embargo, en este punto es necesario precisar que nuestro interés es comprender los modos de significación, pues lo matemático está en los sistemas no en los signos (Filloy 1999, p. 63). Así los SMS se constituyen "…como una herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos" (Filloy 1999, p. 63), cuando están construyendo los números naturales con los procesos de iteración y recursividad, para operarlos usando los algoritmos correspondientes, para dar sentido a lo que están haciendo y como los están usando, en situaciones de enseñanza. Cuando los

> …Sistemas Matemáticos de Signos y su código correspondiente, cuando existe una posibilidad convencionalizada socialmente de generar la función de signo (mediante el uso de un functor (…) incluso cuando las correlacionales funcionales se han establecido en el uso de artefactos didácticos en una situación de enseñanza con la intención de que sean momentáneos. Pero también se deben considerar los sistemas de signos o estratos de sistemas de signos que los alumnos producen para dar sentido a lo que se les presenta en el modelo de enseñanza, aunque pueden estar guiados por un sistema que no ha sido socialmente establecido" (Filloy, Rojano y Puig, 2008, pág. 7).

Primeros acercamientos de interpretación de la experiencia empírica con el Modelo de Enseñanza

En los fragmentos de la experiencia empírica que presentamos a continuación se pretende interpretar a la luz del modelo de comunicación los procesos de producción de sentido y significación que van desarrollando los niños a partir de las actividades que se les presentan.

Alumnos de 6 – 7 años (1º grado). En este fragmento, los niños usan la *inducción* para producir sentido a las actividades de recursividad en la construcción de los primeros números naturales, llamándole "construído" a la construcción e inclusión de todos los números antecesores, usando su *memoria* operativa.

M: (...) ¿Quién más le falta al tres? (...)
Ns: El dos, el dos.
M: El dos. Pero el dos ¿Cómo debe de estar?
Ns: Construido.
M: Con el uno y el cero. (...) Pero ¿Qué le falta aquí al dos? (...)
E: El uno.
M: No, al dos ¿Qué le falta?
Ns: El cero.

Alumnos de 7 – 8 años (2º grado). Los niños pudieron usar su *inferencia analítica* para describir el tamaño de la bolsa (contenedora – conjunto) correspondiente al número 10.

M: ¿Hubieran imaginado que dentro del número nueve hay todos estos números?
Ns: Nooo! ¡Está bien gordo! – otro alumno expresa con asombro*:*
N_1: y va ser más gordo que nunca, ¿imagínate el diez?
N_2: Se tendría que tener una bolsa de la basura para el cien.

Alumnos de 8 – 9 años (3º grado). Los niños de este grado escolar ya tienen mayor experiencia cognitiva y académica, implementaron un *recurso intermedio* (palabra "pasajero") para dar cuenta del proceso de recursividad; lo que les permitió producir procesos de sentido y significación a todo el proceso:

M: Para que yo le pueda poner el uno ¿qué debe tener?, ¿cómo está? (se les muestra una bolsa de hule transparente vacía)
Ns: Vacía.
M: No puede ser el uno. Es el uno hasta que yo lo meta.
N: Lo meto (el niño introduce la bolsa del cero en la bolsa contenedora del uno).
M: Ahora si es el uno.
N: ¡Hasta que entre el pasajero!
M: ¡Hasta que entre el pasajero! ¡Muy bien!

Discusión final y continuidad en la investigación

El diseño experimental y el análisis efectuado ha permitido identificar que la dificultad se tuvo en un principio con el proceso recursivo, constituyó una fortaleza cuando un alumno encontró una manera de nombrar el proceso: "pasajero". Los niños estaban atentos y usaron su memoria a corto plazo, centrando su atención en la construcción y no en la secuencia oral o el numeral. Le dieron sentido a la iteración $n + 1$; usaron procesos *abducctivos* para transcribir con sus palabras el sentido recursivo en la construcción de cada número. Logrando con ello un uso correcto de la lógica de los SMS, lo que permitió la construcción de los siguientes números, pues estaban atentos para no omitir algo cada proceso recursivo para el siguiente número, auxiliándose en todo momento de la simbolización que hicieron al usar la palabra "pasajero" y en el caso de los niños de grados inferiores usaron la palabra "construido". La *inducción* y *deducción* les permitió explicar y comprobar sus hipótesis durante el proceso de la construcción, con lo que fueron consolidando argumentos para asegurar que el proceso se está realizando correctamente. Para ello, la atención estuvo presente al activar los receptores para seleccionar la

información que ya tenían en la construcción subsecuente. La memoria operativa les permitió pasar a una memoria a largo plazo.

Esta es la primera fase de la investigación experimental, en donde el análisis que se está realizando de la observación, constituye las bases del diagnóstico para seleccionar a los niños que participarán en la entrevista clínica como estudio de casos, para poder confrontar los resultados con la observación experimental y tener elementos para poder rediseñar el modelo de enseñanza.

Referencias y bibliografía

Filloy Yagüe, E. (1999). *Aspectos Teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy Yagüe, E. Rojano Ceballos, T. & Puig Espinosa, L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. USA: Springer.

Galperín Yakovlevich, P. (1976). *Introducción a la Psicología: un enfoque dialéctico*. España: Pablo del Río Editor.

Hamilton, N. & Landin, N. (1961). *Set Theory and The Structure of Arithmetic*. Boston, Usa: Allyn and Bacon, Inc.

Maravilla Cruz, A. (2011). *El orden y el conteo en la construcción de los números naturales con el modelo de John von Neumann en niños preescolares*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Piaget Fritz, J. & Inhelder, B. (1984). *Psicología del niño*. España: Morata.

Peirce Sanders, Ch. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus Ediciones.

S.E.P. (2011). *Plan de Estudios*. México: Secretaría de Educación Pública.

S.E.P. (2015). *Desafíos Matemáticos*. México: Secretaría de Educación Pública.

Talizina Fiódorovna, N. Comp. (2001). *La formación de las Habilidades del Pensamiento Matemático*. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Fracción como reparto.
Una experiencia en el aula con GeoGebra.

Nathalia **Moreno** Bermúdez
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
inmorenob@upn.edu.co
María Fernanda **Castro**
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
mfcastros@upn.edu.co
William **Jiménez**
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
williamajg@hotmail.com

Resumen

Este documento presenta una experiencia de aula en la que interviene la tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la cual tuvo lugar en el marco del seminario "Profundización en Matemáticas Elementales" del programa Maestría en Docencia de la Matemática cohorte 2018-I de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) de Bogotá. El objetivo de este documento, es dar muestra de los conocimientos matemáticos movilizados por los estudiantes al dar solución a diferentes problemas propuestos por el docente, quien a su vez hace uso de la tecnología digital. Como producto final del seminario, el docente solicitó a cada estudiante elaborar un aplicativo que promoviera la enseñanza y aprendizaje de un concepto matemático escolar. A lo largo del desarrollo del seminario y en el proceso de elaboración de los aplicativos, se evidenció que los estudiantes movilizaron algunos conceptos matemáticos que no estaban previstos.

Palabras clave: tecnología digital, enseñanza, GeoGebra, fracciones, aplicativo.

Presentación del problema.

Durante el primer semestre del año 2018, la Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN ofertó el seminario Profundización en Matemáticas Elementales a estudiantes pertenecientes a una cohorte cuyo énfasis es "Tecnología digital y enseñanza de las matemáticas", por lo que el uso de los recursos digitales se convertía en un aspecto primordial en el desarrollo de cualquier espacio académico adscrito a esta cohorte. En este espacio académico se realizó un estudio de distintos objetos matemáticos propios de la matemática escolar con el fin de incorporar nuevos elementos en su enseñanza y aprendizaje, en particular, la forma en que un recurso tecnológico podría incorporarse en las prácticas escolares, identificando potencialidades pedagógicas en su uso. Para lo cual se crearon ambientes de aprendizaje, apoyados en la resolución de problemas al hacer uso de diversos recursos manipulables, dentro de los cuales se encontraban la calculadora, papel y lápiz, cinta métrica, regla, hojas de cálculo (Excel), software matemáticos (Derive y GeoGebra), entre otros. Al finalizar el seminario y a la luz de un objeto o proceso matemático, cada estudiante debía elaborar un aplicativo en GeoGebra, que a su vez diera cuenta del favorecimiento del aprendizaje del objeto o proceso en cuestión o el desarrollo del proceso mismo. Este trabajo trajo consigo grandes retos, pues no solo demandaba el desarrollo de un aspecto matemático, lo que de forma implícita conlleva al análisis didáctico del tema en cuestión, sino que además confrontaba a los estudiantes ante la necesidad de utilizar las herramientas provistas por el software y así alcanzar el objetivo de enseñanza.

A lo largo del desarrollo de este documento, se presenta uno de los productos finales elaborados en el seminario, enmarcado en la enseñanza y aprendizaje de la aritmética, en particular, la interpretación del concepto fracción como *reparto*. Además, se muestran algunas de las múltiples bondades de GeoGebra, tales como el dinamismo al recrear situaciones que difícilmente se reproducen con lápiz y papel; así como también el papel de la representación gráfica que permite una visión amplia e interactiva del objeto de estudio. Según Villareal (2012), involucrar tecnología en el aula transforma los ambientes donde la matemática puede ser vivenciada como una ciencia experimental, permitiendo así, la generación y validación de conjeturas. En concordancia con este autor y tomando como caso específico el software GeoGebra, se evidencia que al hacer uso del mismo, se puede apreciar el cambio en el ambiente de algunas prácticas que en un principio se tornaban poco interesantes convirtiéndose luego en espacios de descubrimiento y exploración; en otras palabras, la inclusión de la tecnología digital en el aula brinda oportunidades de aprendizaje donde se reconocen acciones como planear, evaluar y decidir.

Marco teórico

Desde comienzo de siglo XXI la comunidad investigativa de Educación Matemática ha centrado sus esfuerzos en la inclusión de la tecnología en las prácticas educativas, posibilitando la transformación de las clases y de los contenidos matemáticos involucrados en estas Mariotti, 2001; Drijvers, 2002; citados en Moreno y Sandoval, 2012), ya que la tecnología tiene un gran potencial para generar nuevas oportunidades en el aprendizaje y provee un acceso a nuevas representaciones (Moreno y Lupiáñez, 2001), al desarrollo de procesos de construcción, la verificación de conjeturas y las estrategias para la resolución de problemas (Noss y Hoyles, 1996; Laborde, 2001; Laborde, et al., 2006; Papodopolus&Dagdilelis, 2009). En el contexto escolar, estos aspectos son transformaciones que aportan de forma significativa al proceso de enseñanza y aprendizaje, por ejemplo, las posibles representaciones y la resolución de problemas

que se dan como consecuencia del acceso a nuevos campos operatorios que brinda la tecnología. Según Villareal (2012), una de estas transformaciones son los ambientes creados con herramientas que permiten la generación y validación de conjeturas; laboratorios matemáticos que se construyen en el aula, en donde un "ensayo y error educado" es permitido y la visualización es un aliado para la comprensión matemática.

Es por esto, que las prácticas escolares mediadas con tecnología se convierten en lo que Camargo (2002) denomina como "socio cognitivo que acompaña al estudiante en sus indagaciones sea cual sea el software, el recurso tecnológico se convierte en un inspirador de ideas sobre cómo manipular las representaciones de los objetos geométricos en juego y contribuye a darles sentido" (p.40). Lo anterior, da lugar a pensar en cómo la tecnología puede cambiar las prácticas escolares convencionales; tal como lo señalan Moreno y Sandoval (2012), quienes afirman que las nuevas tecnologías enriquecen las tradicionales representaciones analíticas de carácter estático y que además, proporcionan un campo de exploración que no es factible mediante las representaciones elaboradas con lápiz y papel. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009, citados en Moreno y Llinares, 2015), aseguran que el uso de herramientas tecnológicas demanda el trabajo con problemas que no son sólo una adaptación de los trabajados con lápiz y papel, sino problemas donde dichas herramientas deben funcionar como mediadores entre el resolutor y la construcción del conocimiento matemático. En este caso, el estudiante es quien juega el rol de resolutor, acerca del que Dugdale (1999) señala la importancia sobre la atención que se le debe prestar, ya que al desempeñarse eficazmente como solucionador de problemas generales, debe reconocer cuándo los métodos de solución informática son propicios, cuándo se debe seleccionar entre una variedad de software aquellas herramientas aplicables a una situación problemática dada y cuándo combinar una variedad de herramientas tecnológicas y no tecnológicas apropiadas para indagar acerca de diferentes aspectos de un problema. Por esa razón no hay que olvidar la importancia del papel que desempeña el profesor, tal como exponen Prieto, Luque y Rubio (2013), quienes afirman que el profesor mejora su práctica en la medida que amplía el repertorio de instrumentos con que cuenta para atender a las demandas propias de la enseñanza. Desde esta perspectiva, el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas se sustentan y organizan en torno a la elaboración y uso de herramientas enfocadas hacia la mejora de las prácticas escolares.

Según estas prácticas escolares, es importante abordar objetos matemáticos que permitan la interacción entre lo práctico y formal, es decir, entre el conocimiento conceptual y el procedimental. Reconocer que el aprendizaje de las matemáticas se inicia, en algunas oportunidades, en las matemáticas formales y dentro de campos netamente operatorios, y no desde contextos del mundo real, requiere construir situaciones que les permitan a los estudiantes avanzar hacia las matemáticas formales. Un objeto matemático que admite dicha condición son las fracciones debido a los diversos significados y representaciones inmersos en su estudio.

Este concepto cuenta con una amplia variedad de estudios asociados a su enseñanza y aprendizaje (Morcote y Flores, 2001; Godino, 2004 y Vasco, 1991), ejemplos de esto, son las secuencias didácticas y las perspectivas teóricas que han evidenciado su importancia. Autores como Godino (2004) expone en su estudio que las fracciones son las primeras experiencias numéricas de los estudiantes que no están basadas en algoritmos de recuento como los números naturales. Por consiguiente, el trabajo con las diferentes interpretaciones del concepto de fracción, conlleva en el estudiante el desarrollo de habilidades, que posteriormente les serán

útiles para el estudio de sistemas numéricos, en otras palabras, logra que el estudiante consiga un aprendizaje producto de una comprensión y un significado.

Según Morcote (2000), una dificultad relacionada con este objeto matemático es representar el todo a partir de la información de una de sus partes, o la duda acerca de la representación de la parte sombreada en gráficas, en las que aparece más de una unidad. En consecuencia, con el diseño del aplicativo se puede establecer que un sistema de representación adecuado puede facilitar la comprensión y percepción de la noción de fracción como reparto.

Metodología

En esta experiencia, se escogió GeoGebra como herramienta mediadora debido a que es un software matemático interactivo libre, de fácil acceso y manipulación. Como señala su creador MarkusHohenwarter[1], este programa es un procesador algebraico y geométrico en el que es posible elaborar construcciones y representaciones de objetos matemáticos desde la geometría dinámica, a partir de la expresión algebraica de estos. En el seminario de Profundización de Matemáticas Elementales, se utilizaron diferentes herramientas tecnológicas como Calculadoras, Hojas de cálculo, Drive y GeoGebra, dando prioridad al manejo de este último y además, se abordaron problemas relativos a estadística, geometría y cálculo. Lo anterior, con el fin de reconocerlas herramientas de GeoGebra en el marco de la solución de los diferentes problemas, así como el estudio de conceptos propios de la matemática escolar. Como se mencionó anteriormente, al finalizar el seminario cada estudiante debía presentar un aplicativo de su autoría desarrollado en GeoGebra, que favoreciera o bien, el aprendizaje de un objeto matemático o el desarrollo de un proceso matemático. Los productos finales reunieron diferentes métodos de enseñanza de los temas seleccionados, además movilizaron en los participantes del seminario, diferentes conocimientos matemáticos que fueron necesarios durante el proceso de diseño y aplicación. Cabe resaltar, que a medida que se hacía necesario, el docente presentaba a los estudiantes el manejo de las diferentes herramientas que el software ofrece, con el fin de que ellos a su vez generaran recursos educativos en los que la representación digital juega un papel importante.

Resultados

Para la construcción del aplicativo se tuvo en cuenta un contexto que fuera familiar para los estudiantes, por tal motivo se escogió la temática del reparto de fracciones utilizando pizzas.
Para la construcción del aplicativo se tuvieron en cuenta los aspectos que se presentan a continuación:

1. Se crearon listas de secuencia para mostrar las porciones de las pizzas representadas gráficamente con circunferencias a partir de sectores circulares. La cantidad de pizzas se relacionan con deslizadores.
2. La programación de los botones se realiza a partir de la construcción de un deslizador, el número ingresado en las casillas debe ser natural para que el contexto de la situación tenga sentido.

[1]Matemático y profesor austríaco nacido en 1976. Presidente del Instituto de Educación Matemática.

El aplicativo diseñado corresponde a la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética y está compuesto por dos ventanas: la primera (parte izquierda, fig. 1) en la cual se muestra representaciones las gráficas de la(s) pizza(s) e imágenes de estudiantes asociadas con las porciones de esta(s); la segunda (parte derecha, fig. 1), se presentan dos casillas y tres botones -dos inicialmente-, en las casillas el usuario ingresa los datos solicitados y haciendo uso de los botones se puede avanzar o retroceder en el proceso de reparto.

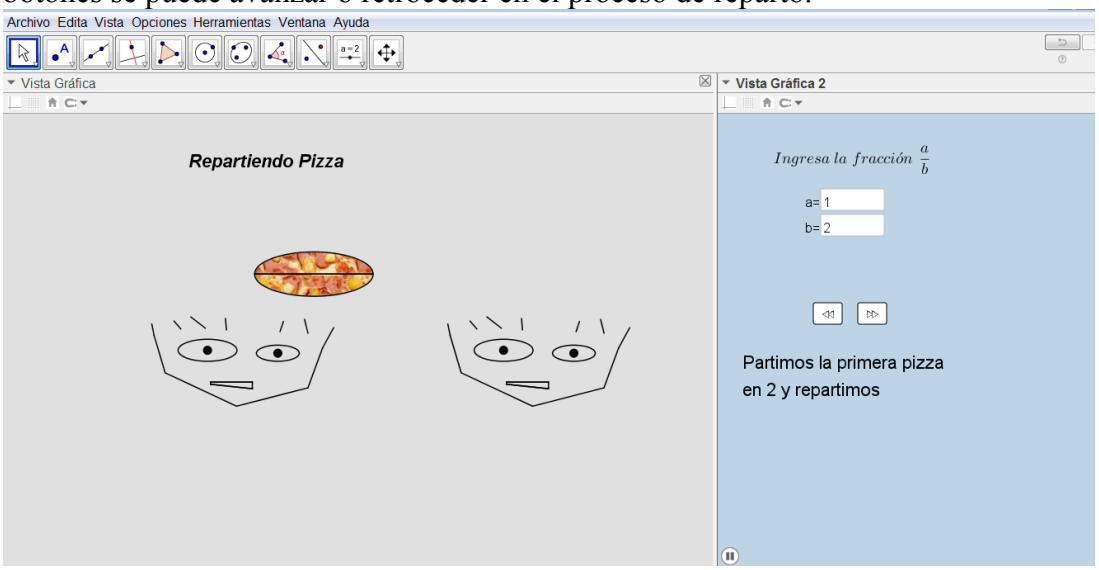


Figura 1. Pantallazo del aplicativo diseñado en GeoGebra.

Inicialmente se tenían conocimientos básicos en cuanto al uso y exploración del software, luego durante el desarrollo del seminario, se reconocieron comandos de programación, útiles para darle solución a los problemas propuestos por el docente encargado. A la luz de los procesos de creación y manejo del aplicativo, surgieron conceptos como estructura booleana, áreas de sectores y conectores lógicos. Dichos conceptos son muestra de que a la hora de construir un aplicativo como el aquí presentado, las matemáticas asociadas no necesariamente corresponden a las que fueron consideradas inicialmente.

Ejercicios como el propuesto, le aportan al profesor experiencia en la construcción de aplicativos, que pueden emplear en el desarrollo de sus clases de matemáticas, además evocan conceptos previos y propenden el conocimiento de algunos nuevos o poco explorados.

La construcción de aplicativos para la enseñanza de las matemáticas requiere del desarrollo de habilidades no sólo matemáticas, que se salen de lo procedimental y memorístico sino también tecnológicas.

Conclusiones

Mediante la construcción de los aplicativos trabajados a lo largo del seminario, los participantes de este, identificaron las bondades del uso de la tecnología en las clases de matemáticas. Una de ellas es la movilización de conceptos matemáticos que no se pretendían abordar y que se encontraban inmersos en cada uno de los trabajos, atendiendo a lo dicho por Castiblanco, Camargo y Villarraga (1999) quienes afirman que la tecnología está cambiando el modo de ver y estudiar las matemáticas y sus usos, ampliando el rango de sus posibilidades.

Adicionalmente se generaron nuevos aprendizajes en cuanto al manejo de GeoGebra, debido a que el ejercicio de construcción de los aplicativos llevo al interés y la necesidad de explorar el software en busca de más herramientas y comandos que resultaban útiles para la construcción de cada uno de los aplicativos. Esta situación está en concordancia con lo planteado por Castiblanco et al. (1999) quien asegura que es necesario que los estudiantes aprendan a utilizar la tecnología como herramienta para procesar información en la investigación y resolución de problemas.

La continua relación que se evidenció entre el conocimiento matemático y el uso repetitivo de GeoGebra en el espacio académico dio paso para aceptar la idea propuesta por Jones, citado en Hoyles (2010), quien asegura que el uso de herramientas en el aula de clase no solo se deben considerar como medio para llevar a cabo una acción concreta sino también considerarlas como un medio para aprender. Por consiguiente, el software de geometría dinámica GeoGebra se transforma en herramienta mediadora. Al reconocer la condición mediadora que tienen las tecnologías en el diseño de propuestas educativas, como menciona Villareal (2012), consideramos que el uso educativo de tecnología fomenta el desarrollo de actitudes favorables, pues promueven y crean ambientes de aprendizaje que se constituyen en escenarios de investigación y exploración.

Cabe resaltar que los aplicativos construidos pueden ser utilizados como una herramienta potente en el aula, teniendo en cuenta los intereses de la clase. Así pues, el papel del docente es hacer parte del proceso de creación de conocimientos y el generador de experiencias que involucren el uso de herramienta digital. El papel del profesor resulta fundamental en el éxito de la producción de conocimiento cuando se resuelve un problema, pues es él quien diseña la situación didáctica para propender un encuentro entre el sujeto y el medio. A partir de esta propuesta, se espera que los docentes desarrollen y empleen aplicativos de este tipo en su labor, debido a las evidencias mostradas en este documento acerca de las ventajas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes al hacer uso de herramientas como la presentada anteriormente, para así mejorar las prácticas de aula comúnmente desarrolladas y contribuir en la práctica profesional docente. Finalmente, es importante señalar que el estudiante también cambia por completo, ya no es un receptor si no un generador de su propio conocimiento a través de la exploración con la herramienta y guía del docente.

Referencias y bibliografía

Castiblanco, A., Camargo, L., Villaraga, M. & Zapata. G. (1999). Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas: apoyo a los lineamientos curriculares. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Dugdale, S. International Journal of Computers for Mathematical Learning (1999) 4: 151.

Godino, J. D (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada.

Hoyles C, Lagrange JB (eds) (2010) Mathematics education and technology – rethinking the terrain: the 17th ICMI Study. Springer, New York

Morcote, O. y Flores P. (2000): "Algunos elementos del conocimiento profesional en la planeación de clases de futuros profesores, un caso: las fracciones". Granada, España.

Moreno, M.y Llinares, S. (2015). Perspectivas de estudiantes para profesores sobre el papel de La tecnología para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 413-421). Alicante: SEIEM

Prieto, Juan Luis; Luque, Rafael E.; Rubio, Leonela M. (2013). Cuadriláteros con GeoGebra. Una secuencia de formación docente en la enseñanza de la geometría con tecnologías libres. Revista de la Universidad del Zulia, 4(9), pp. 115-130

Sandoval, I. T., & Moreno, L. E. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. Horizontes Pedagógicos, 14(1), 21–29.

Villareal, M. (2012). Tecnología y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. Innovación y Experiencias. Vol No. 5. Pag 73 –91. Universidad Nacional de Córdoba. Argentina

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La interdisciplinaridad para el estudio de las fracciones

Marco Antonio **Ayala** Chauvin
Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL)
Ecuador
maayala5@utpl.edu.ecb
Gerardo Elias **Sepúlveda** Restrepo
Secretaría de Educación del Departamento de Antioquia
Colombia
illecebris@hotmail.com
Luis Alexander **Conde** Solano
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Medellín
Colombia
lconde@udem.edu.co

Resumen

El objetivo de este estudio es analizar la construcción de la noción de equipartición de fracción en estudiantes de primaria, a través de un contexto interdisciplinar articulado entre las matemáticas y la música. Este interés surgió de nuestra práctica al observar que los métodos utilizados en la actualidad para la enseñanza de las fracciones, adolece de un mecanismo de comprobación de la existencia o no de la equidad de las partes. Los participantes fueron 17 estudiantes de 4º y 5º grado de educación primaria del sector rural de Antioquia. El análisis de la información recolectada permitió reconocer que los vínculos entre las matemáticas y la música pueden constituirse en un escenario interdisciplinar diferente a los tradicionales, para que los estudiantes por medio de experiencias y representaciones puedan construir una noción de equipartición de fracción.

Palabras clave: Interdisciplinaridad, fracción, matemática, música

Introducción

El uso de las fracciones representa una necesidad relevante para el desenvolvimiento de los estudiantes en la sociedad, a partir de la interpretación de los datos matemáticos con los que interactúa a diario; competencia que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) espera haya sido adquirida al terminar el quinto grado de básica primaria.

El dominio de este objeto matemático implica entrar en interacción con diferentes nociones, como lo es la equipartición, un aspecto que generalmente es abordado de manera estática en las aulas de clase, sin mecanismos de verificación y, por ende, sin la generación de autonomía en la valoración de la coherencia de las respuestas dadas a las situaciones que se les

presenta a los estudiantes. Para Kieren (1980) la acción de equipartir, es la base fundamental para la creación y aplicación del conocimiento de la fracción.

En el ejercicio escolar, los estudiantes y los maestros se enfrentan a dificultades sobre la comprensión y representación de las fracciones, tal vez consecuencia del uso de ejemplos para introducir la equipartición. En ejemplos como: partir frutas, chocolatinas o pasteles, se pasa por alto las unidades de medida, el tamaño de las partes, medio continuo, discreto, equivalencias, entre otros. En este escenario, consideramos que la apuesta interdisciplinaria entre las matemáticas y la música, ofrece una estrategia didáctica en el estudio de los fraccionarios diferente a las usadas tradicionalmente, de las cuales emergen imprecisiones a la hora de transponerlas a situaciones del contexto. Por lo tanto, la interdisciplinaridad como recurso didáctico promueve experiencias y representaciones utilizados por los estudiantes para conjeturar y probar ideas matemáticas emergentes de un fenómeno real observado. Concretamente desde nuestro punto de vista, la aplicación en el aula de actividades interdisciplinarias donde se articulen elementos musicales, objetos sonoros y matemáticos, integrados en procesos de medición, puede ofrecer a los estudiantes posibilidades para construir significados asociados con el objeto fracción.

Marco Conceptual

Actualmente, surgen nuevas problemáticas cada vez más complejas que de cierto modo exigen un trabajo articulado entre diversas disciplinas para su tratamiento. Estos requerimientos de la sociedad moderna necesariamente deben atenderse por medio de la interdisciplinaridad. La idea de un currículo interdisciplinar se puede observar desde la escuela pitagórica donde la música se consideraba una disciplina matemática en la que se estudiaban relaciones de números, razones y proporciones. Para los griegos, la aritmética, geometría, música y astronomía, que formaban el *quadrivium*, junto con la gramática, retórica y dialéctica que formaban el *Trivium* se convirtieron en las siete artes liberales.

En tiempos modernos, en la organización de currículo escolar, según los NCTM (2003) se sugiere la necesidad e importancia en establecer conexiones entre las distintas áreas del conocimiento. Abordar así los contenidos produce algo más que motivar a los estudiantes. “Revela las matemáticas como una disciplina con sentido, en vez de una disciplina en la que el profesor da reglas que deben memorizarse y usarse para hacer los ejercicios”. También en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se enfatiza que, en la formulación, el tratamiento de situaciones problema con enfoque interdisciplinar contribuye al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de múltiples formas.

Para el interés de este trabajo damos relevancia a las conexiones entre las matemáticas y la música, a partir de las representaciones semióticas visuales desde la perspectiva de De Guzmán (1996); auditivas (McAdams, 1993 y Willems, 1993) y corporales basadas en Conde (2013), como puente dialéctico entre dichas disciplinas. Desde esta perspectiva, se establece un marco conceptual que sirve de soporte para el desarrollo de este estudio y responde a la naturaleza interdisciplinaria de nuestro planteamiento.

Representaciones visuales

Entendemos por representaciones visuales aquellas representaciones pictóricas como diagramas, gráficas, modelos geométricos, animaciones dinámicas virtuales, entre otras, como método para comunicar matemáticas y música.

De Guzmán (1996) señala que los matemáticos se valen de procesos simbólicos y diagramas visuales, aún en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista. Como consecuencia, la visualización aparece así, como algo profundamente natural en la transmisión y comunicación propia del quehacer matemático, en particular, la relación espacio-temporal se constituye en un sistema de representación encargado de organizar la duración de los sonidos y silencios en una línea de tiempo de forma escrita, tal como ocurre en la escritura musical en el pentagrama.

Representaciones auditivas

A diferencia de la actividad matemática, en la música se responde a la naturaleza de evento sonoro, en la cual la representación visual no es la única forma de comunicación y expresión, ya que un músico puede interpretar una melodía sin conocer dicho sistema de escritura. La representación auditiva, implica el desciframiento (reconocer, discriminar e interpretar) de estímulos auditivos asociándolos a experiencias previas (McAdams, 1993). Por lo tanto, se apela a la representación mental en forma de memoria auditiva para establecer relaciones y dar sentido a los sonidos percibidos.

Aunque la cognición auditiva actúa de manera simultánea, los procesos mentales se activan en función de cada cualidad del sonido. Sin entrar en detalle de la función de cada uno de estos elementos, en este estudio se tratan los aspectos que involucran: i) la variación en la duración, relacionada a la medida de tiempo de las figuras musicales y ii) la interrupción regular, que consiste en aquellos que producen repeticiones de una sucesión de sonidos de igual duración alternados con silencios (Willems, 1993).

Representaciones corporales

En la ejecución musical el gesto es un elemento inherente que puede ser relacionado corporalmente con el ritmo. Es decir, la experimentación sensorial de fenómenos sonoros permite al estudiante reconocer estructuras rítmicas por medio de actividad corporal. De esta forma es posible establecer un vínculo entre las estructuras rítmicas y la fracción (Conde, 2013).

Al realizar la ejecución del ritmo corporalmente (gesto) los estudiantes pueden determinar si el patrón rítmico cumple con ciertas propiedades, por ejemplo, pueden determinar si dos o más patrones rítmicos son equivalentes o no, al interpretarse simultáneamente. Es por ello que el gesto de los estudiantes no está sometido a las interpretaciones personales del maestro, es decir, es validado a través de la reproducción del propio ritmo.

El gesto desde la perspectiva de este trabajo, aunque está influenciado por la cultura e individualidades, es estable en la ejecución ya que posee una estructura rítmica musical. En este caso, los gestos deben ser articulados para cumplir con ciertas reglas temporales que no están sujetas a las interpretaciones de un observador (o experto) porque son inherentes a la métrica musical de un patrón determinado.

Metodología

Esta comunicación hace parte de una investigación de maestría en Educación Matemática. Es de corte cualitativo, cuyas fases de la investigación consistieron en: i) diseño y desarrollo curricular, en la que se estableció en una propuesta didáctica, ii) diseño y desarrollo de software educativo y iii) un análisis cualitativo sobre la manera en que los estudiantes de primaria construyen una noción de equipartición de fracción, a través del contexto interdisciplinar. En este

estudio participaron 17 estudiantes de los grados cuarto y quinto de básica primaria, de una institución educativa rural ubicada al occidente de Antioquia, Colombia.

Los recursos de apoyo elaborados como soporte a las acciones de intervención fueron una guía del docente, un cuaderno de trabajo del estudiante, un software educativo y material manipulativo. Los instrumentos de recolección y organización de la información consistieron en cuadernos de trabajo diligenciados por los estudiantes, videograbaciones de las actividades y un diario pedagógico como herramienta de registro de las experiencias e impresiones que surgieron del desarrollo de las sesiones de clase.

Discusión de resultados

En este apartado se ejemplifican algunas formas cómo los estudiantes a partir de sus experiencias en un contexto interdisciplinario, pueden de cierto modo construir una noción de equipartición de fracción. Para ello exhibimos episodios tomados de los diferentes instrumentos de recolección y organización de la información donde se evidencia el tránsito de una idea intuitiva, pasando por representaciones formales e informes de un fenómeno acústico hasta la consolidación de significados de la noción de equipartición.

Ideas intuitivas sobre la equipartición y sus representaciones no convencionales

La percepción de los sonidos y la necesidad de comunicar estas ideas, acercan a los estudiantes a formas de representación no convencionales ligadas a la descripción del fenómeno acústico percibido. Es así como, tras realizar una actividad de juego que vincula un patrón rítmico regular como los que se muestran en la Figura 1, las representaciones de los estudiantes se aproximan al cumplimiento de criterios de medición, comparación y simbolización.

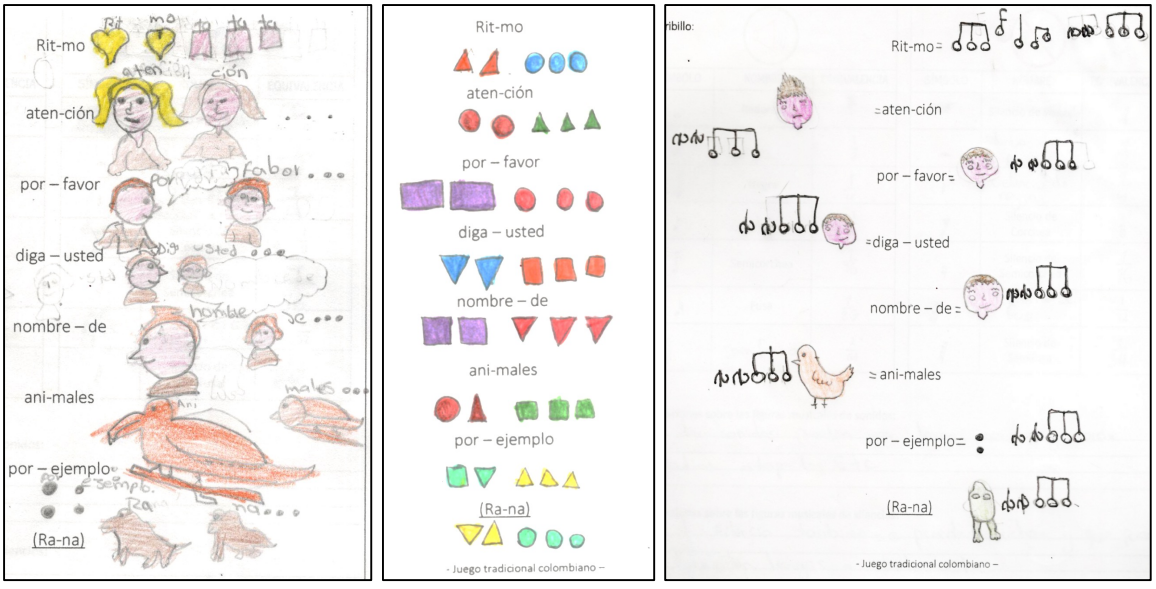


Figura 1. Construcción de patrones rítmicos con representaciones informales

La sensación de partición regular experimentada por los estudiantes, les permite dar sentido a la idea de patrón como experiencias repetidas (Johnson, 1987). Mismas que ofrecen conexiones con experiencias biológicas (pulsaciones del corazón) y experiencias cotidianas como las actividades de baile. En los dos ejemplos anteriores están regulados por pulsaciones, es decir, sonidos con igual tiempo de duración. Precisamente, las ideas intuitivas van surgiendo de

percepciones de eventos sonoros con tiempos de igual duración. Por lo tanto, los estudiantes representan dichos eventos con signos de la misma clase, con el mismo color y proporciones similares, tal como se muestra en la Figura 1.

Ideas sobre la equipartición y sus representaciones convencionales

En el entorno computacional se presentaron tres animaciones (Figura 2). En la primera consiste en barras dinámicas donde se articulan fracciones de sonidos o silencios con recubrimiento de la misma. En la segunda y tercera consiste en ordenar de mayor a menor las figuras musicales y la fracciones.

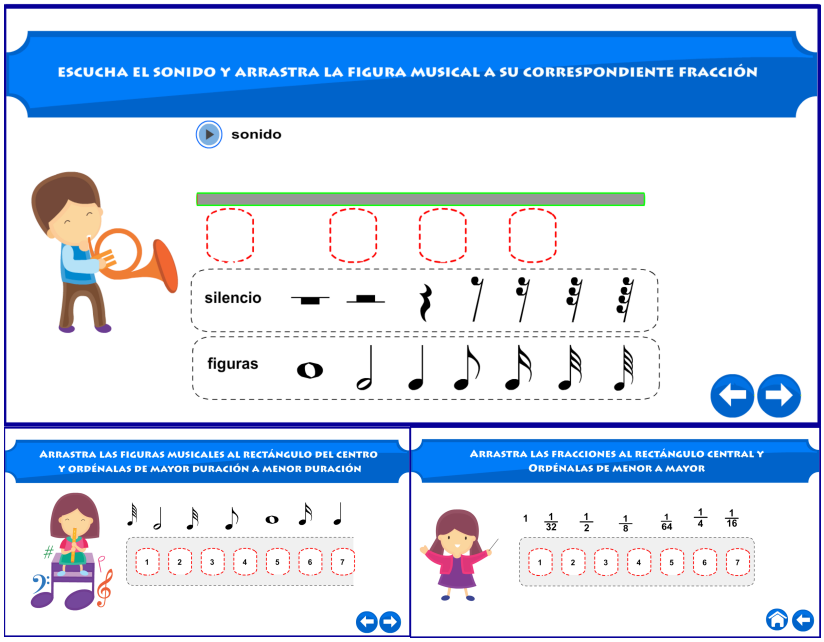


Figura 2. Duración de las figuras, (Software Educativo de acceso público registro: 13-67-227)

En la primera escena, aunque no se menciona la palabra fracción, implícitamente los estudiantes han trabajado con la sensación de partir o de fracturar para hacer discreto el tiempo de duración del sonido en la dimensión temporal. La representación dinámica permitió que los estudiantes reconocieran en una línea de tiempo, sonidos y silencios según su tiempo de duración determinado por los cortes entre sonidos. La idea de "fractura" que se considera fundamental en el estudio las fracciones tiene varias representaciones simultáneas que permiten a los estudiantes a determinar las características, el número y la medida de las partes en que está compuesto el todo referencial (Freudenthal, 1983).

La segunda y tercera escena, en las que se pretende medir el tiempo de duración de sonidos y silencios, crean en los estudiantes una noción de orden. Es decir, los conducen a reconocer y comparar sonidos/silencios asociados a sus representaciones. Esta exploración temporal inicial les permitió a los estudiantes adentrarse en la organización de eventos fundamentada en la percepción visual (sistema de representación gráfica), gestual y auditiva (sonido).

Aproximación a la noción de equipartición

En la interacción de los estudiantes con el entorno computacional (Figura 3), se introducen representaciones que ilustran la propiedad de construcción de las figuras musicales: *Cada figura*

es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente (Conde, Parada y Liern, 2016). Se representa la construcción de una redonda como la figura equivalente a cuatro pulsos y a partir de la redonda se asigna los tiempos musicales de las demás figuras.



Figura 3. Las figuras musicales y sus silencios - Multimedia

La redonda está representada en el ambiente computacional por una circunferencia completa, formada por cuatro fracciones de 1/4 o, lo que es lo mismo, cuatro negras. En lo auditivo, mientras se forma la circunferencia se reproduce un sonido o se deja un silencio de duración equivalente a cuatro pulsos, marcados a igual distancia temporal por un golpe del metrónomo.

Respecto a dicha construcción se generó el siguiente dialogo con los estudiantes:

> Docente: ¿Qué cantidad de pulsos hay en una blanca?
> Estudiantes: Dos pulsos
> Docente: ¿y cuantos había en una redonda?
> Estudiantes: Cuatro
> Docente: ¿Qué relación hay entre la blanca y la redonda?
> Estudiantes: La blanca tiene…, la mitad de los pulsos que tiene la redonda.

Al parecer los estudiantes describen una trayectoria de construcción de una noción de equipartición, puesto que se establece una unidad de medida como base (el pulso). Para luego expresar la duración de un sonido con relación a esta y trascender posteriormente a relacionar una figura con otra, partiendo de la cantidad de veces en las que el pulso aparece en ellas. La equipartición se asocia al número de figuras con iguales duraciones necesarias para completar la unidad de referencia. Desde nuestro contexto la equipartición está controlada por experiencias gestuales, visuales y auditivas que verifican la acción de equipartir. Como valor agregado tenemos los efectos sonoros dentro de la métrica musical que validan cuándo existe o no una equipartición, es decir, los estudiantes construyen un significado sobre la noción de "igual tiempo de duración".

Conclusiones

La enseñanza con enfoque integrador entre las matemáticas y otras disciplinas requiere no sólo conocimientos especializados, sino un cambio de creencias en torno a las opiniones de los profesores de matemáticas, ciencias y artes, sobre la organización del currículo, su enseñanza y cómo aprenden los estudiantes. Es decir, La interdisciplinariedad no aparece como un elemento que sea producto de la espontaneidad. Por lo tanto, Este estudio apunta a proveer experiencias diferentes al tradicional tratamiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde nuestro punto de vista, centramos la atención en el estudio de objetos integradores que coexisten

en contextos interdisciplinares y que pueden promover en los estudiantes procesos de construcción de su propio conocimiento.

En la interacción de las actividades interdisciplinarias propuestas en este estudio se observa que los estudiantes descubren, representan y comparan la forma como el pulso, el tiempo y el ritmo musical constituyen una aproximación a la noción de equipartición determinando al pulso como su unidad de medida. Aquí los estudiantes aprecian la equipartición en condición de igual tiempo de duración entre pulso y pulso. También los estudiantes confirman que los tiempos iguales son invariantes al patrón rítmico de una canción o fragmento musical.

Acto seguido, los estudiantes encuentran que hay una forma de establecer unidades de medida a partir del pulso, que pueden ser convencionales o no convencionales inicialmente, hasta cobrar forma en las figuras musicales como lenguaje universal para expresar la duración de un elemento sonoro de la música. Además, establecen una relación fraccionaria entre cada una de ellas, partiendo de la redonda como unidad y las demás como cierta parte de ella, siguiendo la propiedad de que cada figura es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente.

Como reflexión final, sugerimos cambios en la escuela tradicional en cuanto a herramientas y argumentos para el estudio de las fracciones. Una sugerencia podría ser reorientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la equipartición, a través de objetos musicales. Aquí se generan diversos escenarios didácticos que pueden favorecer el aprendizaje de las fracciones con base en su estructura métrica musical.

Referencias

Conde, A. (2013). La unidad relativa como vínculo cognitivo entre el tiempo musical y las fracciones. (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Conde, A., Parada, S., & Liern, V. (2016). Estudio de fracciones en contextos sonoros. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *16*(2),1-21.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la Pizarra*. Madrid: Pirámide.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (Trad. L. Puig). México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Johnson, M. (1987). The body in the Mind. Chicago: University of Chicago Press.

Kieren, T. (1980). The racional number constructs. Its Elements and Mechanisms. En: T. Kieran (Ed). Recent Research on Number Learning, (pp. 128-149). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

McAdams, S. (1993). Recognition of sound sources and events. In S. McAdams y E. Bigand (Eds.), *Thinking in Sound: The Cognitive Psychology of Human Audition* (pp. 146-198). Oxford: Oxford University Press.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas.* Bogotá. Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: SAEM Thales.

Willems, E. (1993). *El ritmo musical* (Trad V. Hemsy). Buenos Aires: Eudeba.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Zahira en la resolución de problemas multiplicativos con fracciones

Maribel **Hernández** Cobarrubias
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
México
marybellcob@gmail.com
Marta Elena **Valdemoros** Álvarez
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
México
mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen

El presente documento forma parte de una investigación cualitativa realizada en una escuela primaria pública del Estado de México, con estudiantes de sexto grado. Nos enfocamos en la resolución de problemas de estructura multiplicativa mediante el uso de fracciones y para ello recurrimos a la observación de clases, un cuestionario exploratorio, entrevista y un taller dividido en dos partes. La primera parte del taller dirigida a ofrecer a los alumnos prerrequisitos que enriquecieran sus nociones sobre la fracción y la segunda donde se abordó la multiplicación de fracción mediante la estructura de partes de partes. Integramos en esta comunicación el caso de Zahira quien al inicio presentó varias dificultades cognitivas con el uso de fracciones, pero que fueron superadas en el transcurso de la investigación.

Palabras clave: problemas multiplicativos, fracciones, estrategias, resolución, dificultades cognitivas.

Planteamiento del problema de investigación

En el Plan y Programas (SEP, 2011) se prevé que al finalizar la educación primaria los alumnos, en su formación matemática, ya hayan desarrollado diferentes actividades donde abordasen situaciones problemáticas con estructura multiplicativa, usando números fraccionarios. Al mismo tiempo se anticipa que ellos han transitado por diferentes significados de dicha operación. Sin embargo, resultados en evaluaciones oficiales como PLANEA (2017) manifiestan que a nivel nacional tan sólo el 6.8 % del total de alumnos que fueron evaluados al concluir el sexto grado de primaria logra resolver problemas multiplicativos donde intervienen dichos números.

Datos como los anteriores y nuestra experiencia docente nos permiten identificar lo complejo que es para los alumnos el manejo de situaciones que presentan estructura multiplicativa, haciendo uso de fracciones. En la búsqueda de mayor comprensión de tales contenidos de

aprendizaje, en la presente comunicación identificamos un espacio que focaliza nuestra atención en la resolución de problemas con estructura multiplicativa, en alumnos de sexto grado de educación primaria, mediante el uso de números fraccionarios.

En esta documento buscamos responder a 2 interrogantes referidas a los estudiantes de sexto grado de educación primaria, resolviendo problemas mediante el uso de números fraccionarios:

- ¿Cuáles son las estrategias que emplean?
- ¿Cuáles son las dificultades cognitivas a las que se enfrentan?

El presente estudio tiene como objetivo general:

- Identificar las estrategias y dificultades cognitivas que los alumnos de sexto de primaria presentan al resolver problemas multiplicativos, aplicando números fraccionarios.

Antecedentes teórico-empíricos

Vergnaud (1991) presenta en su clasificación sobre problemas con estructura multiplicativa, entre otros, aquéllos que reconoce como "producto de medida" y que se retomaron para el diseño de algunas tareas planteadas en el cuestionario exploratorio, donde la fracción se utiliza como medida.

Con respecto a las estrategias que los alumnos despliegan en la resolución de problemas de estructura multiplicativa recuperamos las que Mulligan (1992) identificó, entre otras, como el uso del "**number fact**", entendido en nuestra lengua como la aplicación de *hechos numéricos* conocidos por los niños que les permiten la actuación eficiente ante situaciones problemáticas. Recientemente, Ivars y Fernández (2016) encuentra que a partir del tercer grado la estrategia que más emplean los alumnos es el uso de algoritmos, pero que a su vez incrementa la aparición de una estrategia incorrecta al usar un algoritmo inverso. Esto coincide con lo que plantean Peralta y Valdemoros (1989), es decir con la aparición del algoritmo no se mejora la comprensión de las situaciones problemáticas existentes.

Con relación a la enseñanza de las fracciones, las aportaciones de Streefland (1991) son de gran relevancia para la presente investigación. Con su planteamiento sobre la matemática realista propone formas de permitir que los alumnos accedan a los diferentes significados que pueden atribuirse a las fracciones y que les faciliten dar sentido a las mismas.

Piaget (1975) identificó las relaciones que los niños pueden establecer entre clases y subclases (que se recuperan en este estudio como partes de partes) del todo continuo y discreto frente a ellos los niños pueden identificar tanto la conservación como la identificación de las características que los hacen pertenecer a una clase o subclase. Peralta (1989) así como Peralta y Valdemoros (1989) recuperan el planteamiento de Piaget en torno a que la relación parte-todo permite identificar a las partes como elementos que ayudan a reconstruir el todo. Con esta línea las autoras plantean tareas donde recuperan el todo continuo y el todo discreto, observando que los alumnos no hacen partición del todo continuo, de manera que las fracciones sean partes del todo original, pero también sean partes de sí mismas ya que pueden ser subdivididas de nuevo cuando se expresa "a/b x c/d" que se asocia a "a/b de c/d". De igual manera detectan que a los alumnos se les dificulta asociar la preposición "de" con la multiplicación de fracciones. En el presente estudio retomamos estas concepciones bajo el referente de partes de partes y recuperamos actividades propuestas en la segunda parte del taller para establecer una relación multiplicativa, usando fracciones.

Para el análisis recuperamos a Valdemoros (2004) quien propone un modelo interpretativo que permite el análisis de datos recuperados a través de la investigación empírica. Dicho modelo, con carácter lingüístico, permite identificar los tres planos de todo lenguaje: el semántico, el sintáctico y el pragmático. Presenta en cinco dimensiones los planos de análisis por lo que es una herramienta interpretativa de gran alcance, a la vez que posibilita interpretaciones semióticas.

Método

Escenario y sujetos

Para la realización del presente estudio se eligió como escenario una escuela pública de turno matutino de Educación Primaria del Estado de México, debido a la apertura y facilidades que tanto el directivo como la docente del grupo dieron para el desarrollo de la investigación. El estudio se realizó considerando al único grupo de sexto grado naturalmente constituido, integrado por 40 alumnos, de los cuales 22 son niñas y 18 niños, cuyas edades oscilaban entre 11 y 12 años al momento del estudio. Zahira pertenecía a este grupo y fue seleccionada por presentar diversas dificultades cognitivas en el desarrollo del cuestionario inicial, así como su facilidad para expresar verbalmente sus procedimientos y actuaciones ante las tareas propuestas.

Instrumentos metodológicos

Para la consecución del objetivo planteado se buscó la obtención de datos haciendo uso de los siguientes instrumentos metodológicos: observación de clases cuestionario exploratorio, entrevistas y un taller de enseñanza dividido en dos partes, con los que se integró el estudio de casos. El siguiente diagrama muestra la secuencia temporal en la que se aplicaron dichos instrumentos.

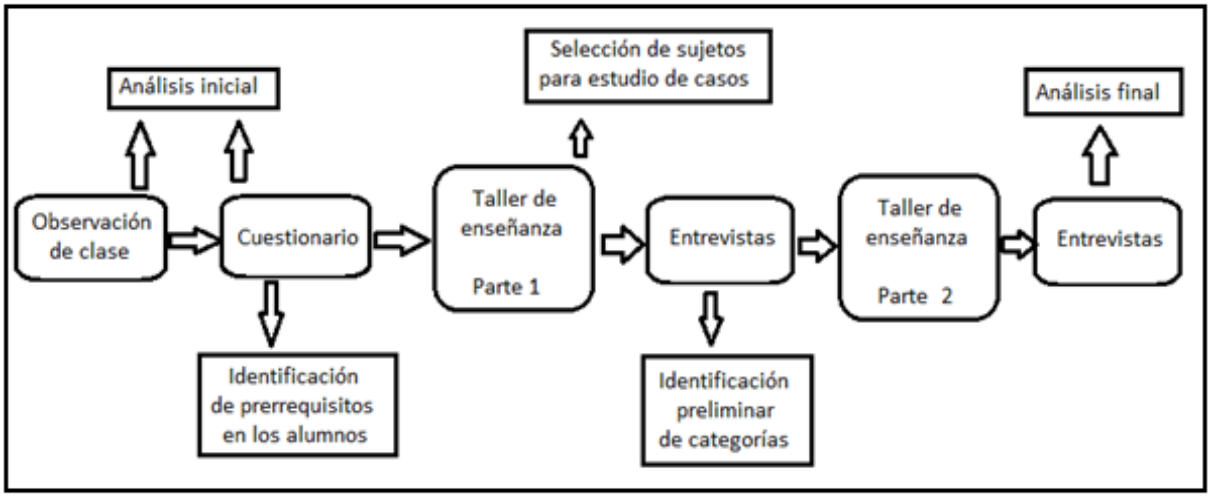


Figura 1. Secuencia temporal de aplicación de instrumentos metodológicos durante la investigación.

a) Observación de clases

Se realizó observación de clase durante 3 sesiones, donde la docente titular abordó la multiplicación de fracciones auxiliándose de la idea de iteración. Encontramos el uso del término "uneavos", refiriéndose a la fracción unitaria, que usaban al multiplicar mediante el uso de fracciones y aplicando un algoritmo.

b) Cuestionario

El cuestionario exploratorio (sometido a una experiencia piloto previa en otro grupo escolar), estuvo integrado por 10 tareas vinculadas al uso de fracciones mediante repartos, como medida y problemas de estructura multiplicativa. Se distribuyó a lo largo de 4 sesiones de una hora cada una. El análisis de las producciones de los estudiantes y lo observado durante las clases permitió identificar algunas de sus dificultades cognitivas con respecto a su concepción y manejo del número fraccionario y que les dificultaría la resolución de las tareas planeados para el taller.

c) Taller de enseñanza (Parte 1)

Con la intención de ampliar sus nociones de fracción, decidimos incluir actividades introductorias en lo que denominamos taller de enseñanza parte 1. En esta primera parte se desarrollaron actividades adaptadas de la secuencia que Streefland (1991) propuso y otras tareas planteadas por las autoras del presente reporte. En el contexto de visitas a una pizzería se desarrolló: a) noción de fracción a partir del reparto, b) reparto equitativo, c) generación de fracciones equivalentes, d) adición de fracciones y e) sustracción de fracciones.

d) Entrevistas

Considerando las producciones de los alumnos en los instrumentos previos, fue posible comenzar a plantear algunas categorías preliminares y a su vez seleccionar a Zahira, quien mostró algunas dificultades en las tareas del cuestionario; sin embargo durante las entrevistas de carácter semiestructurado de 3 sesiones de 45 minutos cada una, fue posible reorientar las inconsistencias conceptuales que se asumía le dificultaban su transición a un mejor desempeño.

e) Taller de enseñanza Parte 2

El taller de enseñanza en su segunda parte constó de 4 sesiones de trabajo, en donde se desarrollaron actividades relacionadas con la multiplicación de fracciones. Mediante el desarrollo de actividades lúdicas e inspiradas en un enfoque "realista", se pretendía que los alumnos alcanzaran la comprensión en la búsqueda de significados de la multiplicación de fracciones mediante el manejo del "todo continuo" y "el todo discreto" a través del trabajo con "partes de partes". En él se planteó un juego mediante el uso de dados, tarjetas y material manipulativo para la identificación de expresiones de la forma $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b}$ de n. De igual manera, la identificación del todo a partir de las partes haciendo uso del todo discreto como vía para la identificación de relaciones multiplicativas.

Validación cualitativa

En el presente estudio recurrimos a un uso combinado de diversos recursos de validación; sin embargo priorizamos la triangulación de diferentes métodos, lo cual permitió identificar las respuestas y procesos más estables tanto en el cuestionario, la entrevista y el taller. El contraste lo realizamos tomando en cuenta tareas con significados afines en los instrumentos. La identificación de categorías permitieron contrastar a lo largo de los instrumentos, tanto estrategias de solución de los alumnos, sus dificultades y los significados con las que las desarrollan. El caso de Zahira muestra el cambio cualitativo en el tipo de producciones, así como el sentido y significados[1] con los que desarrolla las estrategias de solución de las tareas.

[1] En Vigotsky (1977) el sentido es dado y comprensible por el propio sujeto, mientras que el significado es verbalmente formulado y comprensible para cualquier interlocutor.

Análisis del caso de Zahira a través de su actuación durante el taller

El caso de Zahira se recuperó debido a su facilidad para verbalizar sus procedimientos, así como las dificultades que manifestó al trabajar con las tareas propuestas. Entre otras, al hacer repartos sólo recurría a la equidad, sin hacer uso de la exhaustividad. Para expresar mediante una fracción, la porción correspondiente a cada sujeto, derivada del reparto, no establecía la relación aditiva de todas las partes producidas, sino que se auxiliaba sólo de aquéllas que le eran más representativas.

Al trabajar con expresiones a/b de n recurría a representaciones pictóricas[2] que hacían referencia al todo continuo y que no le permitían pasar hacia el todo discreto. El único significado que daba a la multiplicación era mediante una composición aditiva.

En los planteamientos de partes de partes, no consideraba que una fracción pudiera ser incluida en otra, en la identificación de la fracción resultante sólo consideraba el área sobrante de la primera parte. Esta dificultad se muestra en su actuación en la Figura 2 (tarea no. 8 del cuestionario) y que encontramos era compartida por varios de sus compañeros.

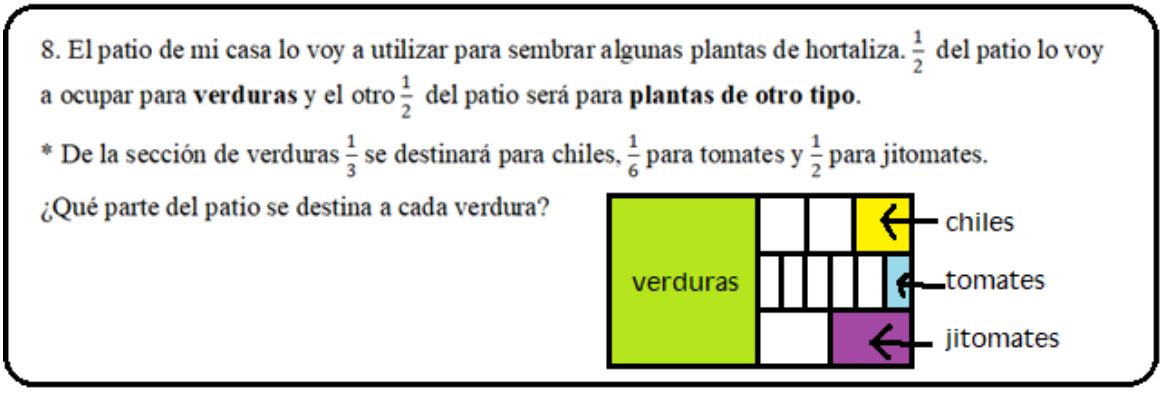


Figura 2. Representación de Zahira para resolver la tarea no. 8 del cuestionario.

Zahira mostró gran facilidad para verbalizar todo lo que producía y mucha apertura para contestar al cuestionarle sobre lo que cada representación, operación, frase o número que producía significaban para ella. A continuación mostramos parte de su producción durante el taller 2ª parte.

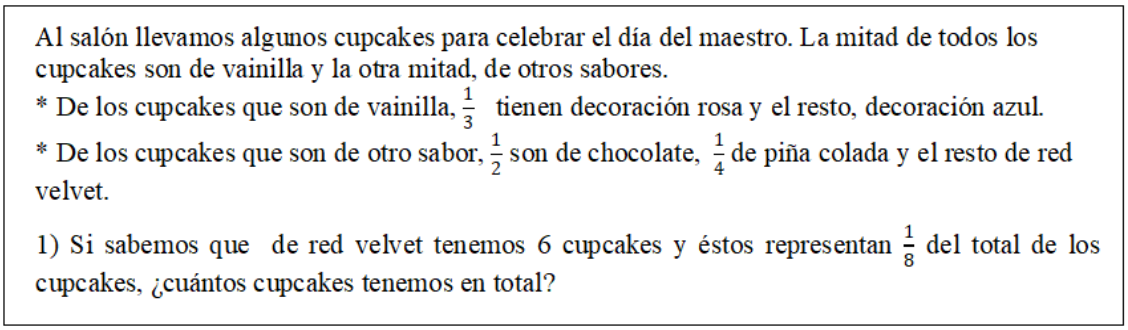


Figura 3. Hoja de trabajo de la 3er sesión del taller de enseñanza en su segunda parte.

[2] Valdemoros (1997) se refiere a éstas como algoritmos gráficos pues son una sustitución del algoritmo formal por dibujos que representan y son útiles en el complejo proceso de entender los algoritmos con fracciones.

En Figura 3 (hoja de trabajo del taller 2ª parte) inicialmente estableció relaciones aditivas, utilizando todos los números que aparecían en la situación planteada (figura 4), al finalizar de realizar el conjunto de adiciones entre los números se le pregunta sobre lo que significa para ella el resultado obtenido, a lo que responde que no lo sabe. Se le motiva a que vuelva a leer el planteamiento y trate de hacer algún dibujo que le ayude a comprender.

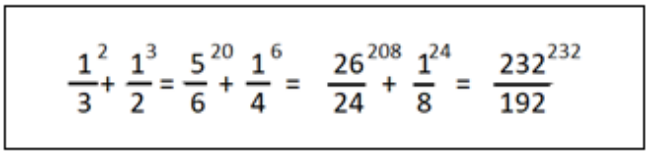


Figura 4. Actuación inicial de Zahira al tratar de encontrar la cantidad de cupcakes que hay en total.

A continuación se transcribe parte del diálogo que se entabló con Zahira cuando se retomaron sus producciones en la hoja de trabajo durante la entrevista.

ZAHIRA: Es que intento saber cuántos cupcakes hay en total, por eso creí que necesitaba sumar todas las fracciones para que me diera el total [refiriéndose al entero], pero no sé cómo convertirlo a cuántos cupcakes… [pausa] déjeme ver porque aquí me dice que hay 6 cupcakes [señala parte del texto y comienza a multiplicar 1/8 X 7/8 = 7/64]

ENTREVISTADORA: ¿Por qué elegiste resolverlo así?

ZAHIRA: Es que aquí me dice que seis cupcakes son un octavo y me faltan 7/8 para tenerlos completos [ella hacía referencia a que el todo sería igual a 8/8 del total de cupcakes], entonces yo podría multiplicarlo, pero no pueden ser 7/64, porque son menos de 6 cupcakes, entonces… [pausa prolongada].

Podemos identificar en este punto de su reflexión, que si bien ella plantea una multiplicación de fracciones, aún está presente una relación aditiva entre 1/8 + 7/8 = 8/8, que busca para reconstruir el todo. Ahora bien, la falta de sentido que tiene para ella el resultado la hace seguir buscando establecer una relación multiplicativa, pero ahora vinculada al uso de enteros; sin embargo no está del todo convencida y lo corrobora estableciendo una relación aditiva (Figura 5).

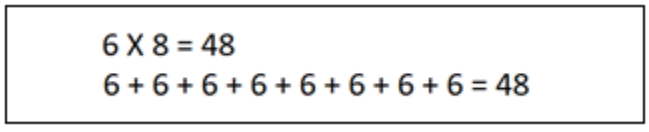


Figura 5. Desarrollo de Zahira para encontrar la cantidad de cupcakes en total, sabiendo que 6 piezas son un octavo del total.

ZAHIRA: Es que aquí (señalando en su lista el primer número que sumó) tenemos un octavo, dos octavos, tres octavos… [va señalando siguiendo la lista hasta llegar a ocho octavos] y por eso tenemos 48 cupcakes en total.

En el seguimiento anterior reconocemos la búsqueda que realiza Zahira en su intento de establecer relaciones multiplicativas; sin embargo no es capaz aún de justificarlo y recurre al establecimiento de relaciones aditivas [que le resultan más familiares] para poder establecer la

relación parte-todo. Para ello reconoce que para encontrar el total de cupcakes deberá hacerlo reconstruyendo el entero mediante 8/8 y establece la equivalencia entre 8/8 y el entero o unidad. Dicha representación nos

permite ilustar una de las categorías encontradas para las estrategias a las que recurren los alumnos para la reconstrucción del todo que clasificamos como: "Relaciones aditivas".

En la búsqueda de sentido de los enunciados del texto, Zahira y sus compañeros (33/42 del total del grupo), establecieron relaciones entre la preposición "de" (que en sesiones de clase con su maestra comentaron que se relacionaba con la multiplicación de fracciones) y la multiplicación (Figura 6). Cabe hacer notar que en la estructura del problema la relación entre las fracciones vinculadas mediante la preposición "de" no estaba señalada de manera explícita, es decir ellos tuvieron que buscarlas y la tradujeron a la operación de multiplicación con fracciones.

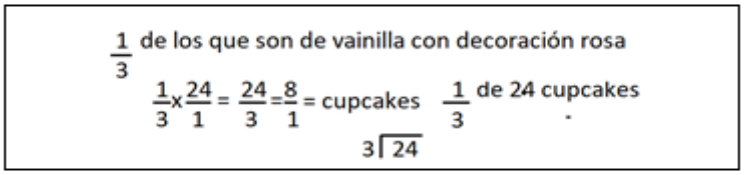


Figura 6. Secuencia que desarrolló Zahira, después de reconocer la cantidad de cupcakes que correspondían a la mitad de todo, para encontrar 1/3 de 24, realiza una multiplicación, encuentra el equivalente y lo vincula con el número de piezas solicitadas.

Zahira, al igual que varios de sus compañeros de clase (33/42 del total del grupo), después de identificar por diferentes caminos la cantidad de cupcakes que representaban al todo, fue capaz de establecer con facilidad las relaciones multiplicativas existentes en los planteamientos de partes de partes del problema planteado (Figura 6). Opera según lo ha trabajado con la maestra de grupo haciendo uso del elemento neutro, que como ella lo designa "convierten el entero a uneavos" y multiplica los numeradores y los denominadores para identificar la cantidad de cupackes decorados con color rosa.

Durante la sesión 4 del taller en la 2ª parte, se plantearon situaciones del tipo "a/b de n", Zahira (como varios de sus compañeros) asoció la relación multiplicativa de la situación planteada con el significado de "reparto" (Figura 7).

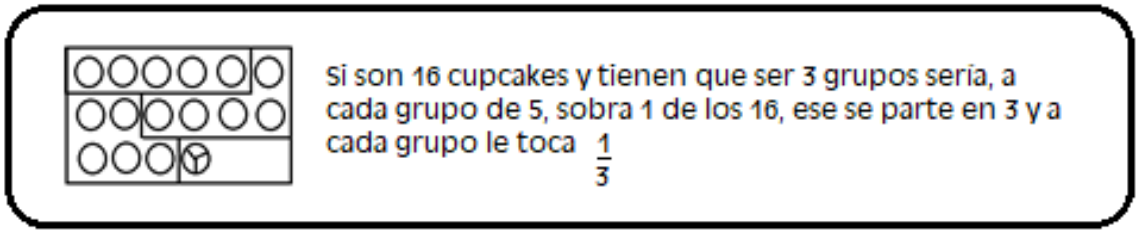


Figura 7. Durante el juego de la sesión 4, Zahira "lanza el dado y cae 1/3 de, toma una tarjeta que dice 16 cupcakes, las integra y forma la situación a desarrollar: "1/3 de 16 cupcakes" que desarrolla auxiliándose de representaciones pictóricas asociándolas con el significado de reparto.

Podemos identificar en Zahira un tránsito paulatino pero estable del uso y manejo que da a las situaciones problemáticas con estructura multiplicativa. Fue capaz de vincular la relación parte de parte con una relación multiplicativa mediante fracciones y definió adecuadamente la relación de la preposición "de" con la multiplicación con fracciones, asignando el significado de reparto a situaciones vinculadas con la estructura a/b de n.

Dificultades generales

Zahira al hacer representaciones cometía errores de trazo o de corte y al realizar comparaciones entre las porciones resultantes atribuía esa diferencia al número y no al trazo en sí. Esta dificultad pudo ser superada al solicitar verificar su respuesta haciendo uso del material de apoyo del taller.

Conclusiones generales

En esta investigación identificamos que Zahira llegó a utilizar el recurso de "partes de partes" y vincularlo con la multiplicación de fracciones, haciendo uso de expresiones de la forma a/b de c/d de pastel y reconstruyéndolo como ac/bd del pastel.

Al trabajar con partes de partes resulta necesario tener presente en todo momento la unidad con la que se está trabajando para no perder de vista la unidad de referencia inicial.

En la enseñanza escolar, el trabajo centrado en algoritmos con operaciones aditivas y multiplicativas mediante fracciones cobra mucha fuerza, pero a nivel de comprensión de los alumnos o transferencia de ideas genera lagunas e inconsistencias que se reflejan al plantear nuevas situaciones donde los estudiantes desconocen o confunden la forma de resolver.

Referencias

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación matemática*, 28 (1), 9-38.

Mulligan, J. (1992). "Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study". *Mathematics Education Research Journal*, 4 (1), 24-41.

Peralta, M. T. (1989). *Resolución de las operaciones de suma y multiplicación de fracciones, en su forma algorítmica y su representación gráfica, en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. México.

Peralta, M. T. y Valdemoros, A. M. (1989). Representación gráfica de la multiplicación de fracciones, en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad. *Memorias de la cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Acapulco, México, 285-290.

Piaget, J. (1975). *Génesis del número en el niño*. Buenos Aires, Argentina: Edit. Guadalupe.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic Education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Secretaría de Educación Pública. (2011).*Plan y programas de estudio, Educación Básica, Primaria.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.

Valdemoros, M. (1997) Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones; estudio de caso. *Educación Matemática*. 9 (3), 5-17.

Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, Fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación de Matemática Educativa*. 7 (3), 235-256.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México, México: Editorial Trillas.

Vigotsky, L. S. (1977). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires, Argentina: La Pléyade.

http://planea.sep.gob.mx Fecha de consulta 5 de febrero de 2018

http://143.137.111.132/PLANEA/Resultados2016/Basica2016/R16baCCTGeneral.aspx

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Una aproximación al aprendizaje de los fraccionarios como relación parte-todo mediante una propuesta de aula para el grado tercero de educación básica

Cristian Andrés **Hurtado** Moreno
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
cristian.hurtado@correounivalle.edu.co
Juan Sebastián **Cortés** Monroy
Universidad del Valle
Colombia
juan.sebastian.cortes@correounivalle.edu.co
Raúl Fernando **Mendoza** Yela
Universidad del Valle
Colombia
raul.mendoza@correounivalle.edu.co

Resumen

En esta comunicación se presentan los avances de una investigación en curso, cuyo propósito es caracterizar los procesos de matematización que logran un grupo de estudiantes de grado tercero de la Educación Básica Colombiana en torno a los fraccionarios como relación parte-todo. Para ello, se diseña e implementa una propuesta de aula que toma como referente conceptual y metodológico el enfoque de *La Educación Matemática Realista* (Freudenthal, 1973, 1991) y la propuesta de Ohlsson (1988) en torno al concepto matemático que se moviliza, y como referente curricular documentos de política pública nacional; en la cual se involucra el uso de artefactos (Radford, 2012) como el Tangram y las Regletas de Cuisenaire. El diseño que se propone parte de contextos reales favoreciendo la comparación cuantitativa de cantidades de magnitudes como el área, en el caso del uso del tangram, y de longitudes, en el caso del uso de las regletas.

Palabras clave: fraccionario, relación parte-todo, matematización, Educación Matemática Realista, artefacto.

1. Presentación del problema y justificación

La enseñanza y aprendizaje del número fraccionario ha sido y sigue siendo tema de debate y preocupación para la investigación en Educación Matemática. En efecto, distintos

investigadores como Llinares y Sánchez (1997), Obando (2003), Freudenthal (1983), Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013), Rodríguez y Sarmiento (2002), Pontón (2008), entre otros, han puesto de manifiesto la diversidad de dificultades, obstáculos y errores que suelen presentarse en su aprendizaje pese al gran esfuerzo que los maestros colocan en su enseñanza. No obstante, y de acuerdo con Llinares y Sánchez (1997), los maestros, que suelen privilegiar la introducción de los fraccionarios en la escuela desde la "relación parte-todo", lo hacen con un énfasis, a veces exclusivo, en su representación simbólica y mediante un tratamiento inadecuado de las representaciones gráficas, que por lo general se reduce al conteo de partes sombreadas y no sombreadas, y a la asignación de etiquetas y roles para las partes de la fracción.

Desde esta perspectiva, Obando (2003) considera que dicha forma de presentar este concepto matemático conlleva a que, primero, se entienda la igualdad en la equipartición de la superficie de una figura bidimensional únicamente como congruencia entre las regiones en que se subdivide la figura, por lo que se termina concibiendo el número fraccionario como una etiqueta asignada a una región sombreada de una figura; segundo, se interprete el fraccionario $\frac{a}{b}$ como el acto de dividir la superficie de una figura bidimensional en b partes iguales y de estas tomar a partes, causando que los estudiantes conciban al fraccionario como dos números naturales que están separados por un vínculo (raya), sin relación alguna entre ellos.

En este sentido, Cortina et al. (2013) plantea que el uso inadecuado de la equipartición en la enseñanza inicial de las fracciones, puede conducir a ciertas dificultades que impiden el desarrollo de concepciones maduras. En su investigación propone que la equipartición genera tres "imágenes", las cuales se constituyen en limitantes para la comprensión de los estudiantes, estas son: *la fracción como resultado de transformar un objeto*, donde a los educandos les resulta tentador asociar las fracciones con la necesidad de transformar, física e irreversiblemente, un objeto y tomar algunas partes de este, lo cual favorece únicamente las fracciones propias; *la fracción como tantos de tantos*, en esta "imagen" los estudiantes conciben la fracción como un subconjunto del conjunto que representa el todo, siendo el denominador la cantidad de elementos del conjunto y el numerador la cantidad de elementos que contiene el subconjunto de este conjunto, por lo que el numerador y el denominador se interpretan como números que expresan el resultado de un conteo y no un solo número, el fraccionario; *la fracción como incluida en un entero*, esta "imagen" consiste en concebir una fracción como algo que necesariamente está contenido dentro de un entero, lo cual limita tanto el tipo de situaciones en las que se pueden utilizar las fracciones como las cantidades de las que pueden dar cuenta (únicamente ≤ 1).

Como alternativa para evitar estas y otras problemáticas reportadas, Obando (2003) sugiere que una de las formas que se deberían privilegiar en el abordaje de este concepto matemático en el salón de clase, son los procesos de medición y comparación de cantidades de magnitudes, para que así, por ejemplo, la igualdad entre las regiones en que se subdivide una figura bidimensional por la equipartición se entienda como igualdad en cantidad de superficie, y de ahí, el fraccionario en su interpretación parte-todo se conciba como una relación cuantitativa entre magnitudes.

La propuesta de este autor se fortalece con los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional (en adelante, MEN) (2006), donde se propone que a finales de grado tercero de Educación Básica, los estudiante deben ser capaces de describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes, siendo el establecer relaciones cuantitativas entre medidas (magnitudes) la esencia de la relación parte-todo (Obando, 2003).

Ahora bien, Freudenthal (1983) ha indicado que buena parte de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de los fraccionarios se deben a que éstos son poco estudiados a partir de situaciones de la vida real de los estudiantes. Así mismo, Streefland (1991) y Martínez, Da Valle, Bressan y Zolkower (2002), plantean que es necesario buscar una relación cercana entre la enseñanza de las matemáticas y los contextos de la vida real de los estudiantes, dado que estos despiertan su interés al poner en juego elementos de su sentido común y conocimientos de lo que saben acerca de cómo son las cosas en el ámbito extraescolar, permitiéndoles acceder a las actividades con cierta familiaridad y comprensión previa. Es así como Freudenthal (1983) y Goffree (2000), llaman la atención en que para la introducción de los fraccionarios desde la relación parte-todo en el aula es necesario diseñar situaciones problemáticas concretas en contextos reales para que el alumno pueda dar sus propios significados, así como crear modelos de una situación real que le permita investigar, apropiándose de dichos modelos para solucionar otros problemas, es decir, que se pueda *matematizar* la situación.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, en el trabajo que aquí se reporta, se adopta la postura de *La Educación Matemática Realista* (Freudenthal, 1973, 1991) (en adelante, EMR) para diseñar una propuesta de aula, donde, a partir de los procesos de medición y comparación de magnitudes, como el área y longitud, favorecidos a través del uso del Tangram y las Regletas de Cuisenaire en contextos y situaciones reales, se favorezca una aproximación al aprendizaje de los fraccionarios como relación parte-todo en un grupo de estudiantes de grado tercero de la Educación Básica, y así poder caracterizar los procesos de matematización que logran el grupo de estudiantes focalizados al desarrollar la propuesta.

2. Marco de referencia conceptual

El planteamiento del marco conceptual toma en consideración el estudio de los referentes curricular y didáctico, a partir de los cuales se logran identificar elementos conceptuales de los números fraccionarios y estrategias metodológicas que permiten interpretar y organizar el estudio de las condiciones, restricciones y posibilidades que están involucradas en el diseño de una propuesta didáctica relativa a la enseñanza de los números fraccionarios en su interpretación como relación parte-todo desde un enfoque *realista* de la matemática. A continuación se exponen los elementos más sobresalientes de este marco.

2.1 Referente curricular

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas (MEN, 1998) una visión global e integral del quehacer matemático debería considerar tres grandes aspectos que permitan organizar el currículo, a saber: los procesos generales, que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; los conocimientos básicos, que se relacionan con el desarrollo de los pensamientos numérico y sistemas numéricos, espacial y sistemas geométricos, métrico y sistemas de medida, aleatorio y sistemas de datos, y variacional y sistemas algebraicos y analíticos; y el contexto, el cual se relaciona con tres escenarios como lo son el de la vida cotidiana, de las matemáticas mismas y de otras ciencias.

Tomando en consideración esta forma de estructurar el currículo, en este trabajo interesa para el diseño de la propuesta hacer énfasis en los procesos generales de razonamiento, comunicación y modelación. En cuanto a los conocimientos básicos, interesa favorecer los

producidos por los pensamientos numérico y métrico con sus respectivos sistemas. Por último, referente a los contextos las situaciones se diseñan en ambientes cotidianos y matemáticos.

Ahora bien, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se considera que el paso del número natural al número fraccionario requiere la comprensión de las medidas en situaciones donde la unidad de medida no está contenida un número exacto veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes. Desde esta perspectiva se plantean distintos estándares que se deben lograr con los estudiantes para favorecer en ellos diferentes interpretaciones de los fraccionarios tales como razón, operador, parte-todo, entre otras. De esos estándares se consideran para el diseño de la propuesta de aula algunos de los sugeridos para finales de grado tercero, los cuales guardan coherencia con el énfasis conceptual puesto en la investigación y se relacionan con los pensamientos numérico y métrico, estos son: Reconocer significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros); Describir, comparar y cuantificar situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones; Describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes; Comparar y ordenar objetos respecto a atributos medibles.

2.2 Referente didáctico

En este apartado se realiza una conceptualización didáctica, basada en elementos matemáticos, de los fraccionarios a partir de los planteamientos de Ohlsson (1988). Luego, se presenta el enfoque conceptual y metodológico de la EMR en términos de Freudenthal (1973, 1991). Por último, se exhibe el rol cognitivo, epistemológico y ontológico que tienen los artefactos en la actividad matemática (Radford, 2012).

2.2.1 El concepto de número racional. Ohlsson (1988) plantea la teoría de los constructos matemáticos, donde estos se entienden como entidades conceptuales (en este caso matemáticas) que están compuestas no sólo de un significado matemático (definiciones, axiomas y teoremas), sino también de un significado aplicacional, lo que incluye todas aquellas situaciones problema y registros simbólicos que estén relacionados con la teoría. Bajo esta perspectiva, propone cuatro subconstructos para el constructo de número fraccionario, a saber: función cociente, número racional, vectores binarios y función compuesta. En el segundo de estos se ubica la relación parte-todo como uno de sus significados aplicacionales. Según este autor la relación parte-todo presenta tres interpretaciones:

i. La fracción $\frac{n}{m}$ representa n partes cada una de las cuales mide $\frac{1}{m}$ de la unidad correspondiente.
ii. La fracción $\frac{n}{m}$ representa n partes iguales (iguales en cuanto a la magnitud en que se parten o comparan) de las m partes en que se ha dividido la unidad.
iii. La fracción $\frac{n}{m}$ representa la razón de la cantidad n a la cantidad m.

En la propuesta que se diseña en la investigación se favorecen las dos primeras interpretaciones, puesto que la tercera de ellas está más cercana al concepto de razón.

2.2.2 La educación matemática realista. Este enfoque conceptual y metodológico, propuesto inicialmente por Freudenthal (1991, 1983), toma como base la concepción de que la matemática es una actividad humana que consiste en matematizar, esto es, organizar o estructurar la realidad, incluida la matemática misma, por lo que insiste en la necesidad de

proponer a los estudiantes actividades de organización de situaciones problemáticas genuinas que dan lugar a procesos de matematización, siendo *la fenomenología didáctica* una potente ayuda para lograrlo. La EMR se compone a partir de seis principios, los cuales son:

Principio de actividad. El quehacer matemático es una actividad estructurante u organizadora de matematización que está al alcance de todos los seres humanos, porque la matemática debe ser para todos.

Principio de realidad. Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales, es decir, en situaciones problemáticas que son reales en la mente de los educandos.

Principio de interacción. La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social, donde la interacción entre los participantes puede provocar que cada uno reflexione con base en lo que aportan los demás, y así, lograr alcanzar niveles más altos de comprensión.

Principio de reinvención. La enseñanza debe tomar la forma de reinvención guiada, es decir, que los alumnos reinventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas en interacción con sus pares y bajo la guía del docente.

Principio de niveles. El aprendizaje es un proceso discontinuo que involucra distintos niveles de comprensión (matematización horizontal y vertical), y es a partir de los diferentes contextos, situaciones y modelos que se favorece el cambio de nivel. Estos niveles son:

- **Situacional:** Comprensión en el contexto de la situación.
- **Referencial:** Esquematización a través de los *modelos de*, descripciones, entre otros.
- **General:** Exploración, reflexión, generalización y formulación de *modelos para*.
- **Formal:** Procedimientos estandarizados y manejo de la notación convencional.

Principio de interconexión. Los contenidos matemáticos no deben ser tratados de manera aislada. Por tanto, se requiere de situaciones problemáticas incluyan contenidos matemáticos interrelacionados, pues así, los estudiantes podrán acceder a diversos modos de matematización.

Así, los principios que caracterizan la EMR se constituyen en el eje fundamental no solo para la elaboración de la propuesta (principio de actividad, principio de realidad y principio de interconexión) sino también su implementación (principio de interacción y principio de reinvención) y análisis de las producciones de los estudiantes (principio de niveles).

2.2.3 El uso de artefactos en la actividad matemática. Según Radford (2012), los artefactos son entendidos como recursos que desempeñan un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dado que ofrecen nuevas posibilidades para pensar y aprender, contribuyendo así a una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. Sin embargo, reconoce que para obtener estos beneficios es necesario estudiar los roles cognitivo, epistémicos y ontológico de ellos en la actividad matemática.

De acuerdo con esta perspectiva, en el diseño de la propuesta de aula que en esta investigación se desarrolla, se asumen el Tangram y las Regletas de Cuisenaire como artefactos cuyos roles se presentan de la siguiente manera: En cuanto al rol cognitivo, estos artefactos no son sólo mediadores o facilitadores de la adquisición de conocimiento sobre los fraccionarios como relación parte-todo, sino que se vuelven parte de la manera en que se llega a pensar sobre estos y a conocerlos, desde esta perspectiva, la presencia de estos dos artefactos modifica cognitivamente la forma como se acercan los estudiantes a los fraccionarios. Referente al rol epistemológico, la inserción de estos artefactos permite concebir el fraccionario como un

concepto matemático que no sólo tiene significado en el contexto abstracto de las matemáticas, sino que colabora en la construcción de este concepto, cuyo significado se genera por medio del razonamiento producido por la manipulación de estos artefactos. Además, estos artefactos incorporan formas particulares de comunicación, permitiendo complementar el conocimiento mediante la interacción con otros estudiantes o el mismo profesor (actividad conjunta). Por último, en el rol ontológico estos artefactos se consideran no como un medio para acceder a objetos matemáticos y formas matemáticas de razonamiento, dado que estos no se conciben como entidades trascendentales, estáticas o inmutables, sino como parte de la actividad matemática (como práctica material) de un grupo de estudiantes de grado tercero.

3. Diseño metodológico de la investigación

Para el desarrollo de la presente investigación se asume la metodología cualitativa de corte descriptiva e interpretativa (Monje, 2011), puesto que en este trabajo se busca, a través de la recopilación de información, datos y reflexiones que dejan los estudiantes al interactuar con las actividades propuestas, dar respuesta al objetivo trazado en el estudio. Para lograr esto, primero se ha delimitado el campo de estudio en términos de: ubicar una problemática, adoptar un marco de referencia conceptual, definir el tipo de estudio a realizar (metodología) y configurar el diseño de la propuesta de aula. Luego, llega el momento de la implementación de la propuesta de aula con un grupo de estudiantes de tercer grado de Educación Básica Primaria, donde se obtiene información mediante registros fílmicos y hojas de trabajo donde se expresen las producciones escritas de los estudiantes, para, posteriormente, simplificar la recolecta de datos a partir de la creación de categorías de respuestas afines, lo que permite manejar de mejor manera el corpus de datos recolectado. Por último, se procesa la información recogida de la implementación contrastándola con los fundamentos conceptuales adoptados, para presentar las conclusiones y reflexiones en torno al objetivo trazado en el estudio.

Ahora bien, la propuesta de aula que en este trabajo se realiza está configurada por dos situaciones, la primera vinculada al uso del Tangram y la segunda al uso de las Regletas. A continuación se hace una descripción de la primera de estas, resaltando especialmente los elementos del marco conceptual que en ella se movilizan.

La situación denominada *Fraccionando el Cuadro de Colores* está compuesta por cuatro actividades, cada una de las cuales corresponden a los cuatro niveles de comprensión (matematización horizontal y matematización vertical) descritos en la EMR. En ella se recrea el caso de una profesora de artística que desea colorear un cuadro de vidrio con forma cuadrada para obsequiar, pero éste se le ha caído al suelo partiéndose en siete fragmentos con forma poligonal, coincidiendo con la forma de cada una de las siete fichas del Tangram. Pese a lo sucedido, la profesora decide aprovechar las partes que resultaron para decorarlas con pintura y que de esta forma el regalo no se pierda. A partir de eso se les solicita a los estudiantes desarrollar las actividades. Tal y como se aprecia, la situación se instaura en un contexto de la vida diaria (MEN, 1998), real en el sentido propuesto por Freudenthal (1983), y plantea el uso del Tangram para, mediante un trabajo grupal entre estudiante-estudiante y estudiante-profesor, se aborde, como se verá en adelante, la comparación de las superficies de sus fichas, esto es, para trabajar sobre una magnitud continua. De este modo, se parte del estudio de una situación para que en su matematización propicie el acercamiento a algunos fraccionarios, dando cuenta así de los principios de actividad, realidad e interconexión.

Actividad 1. En esta actividad se les solicita a los estudiantes recortar las piezas que resultaron al quebrarse el cuadro a partir de una cartulina blanca entregada que de antemano tiene marcadas con líneas punteadas dichas piezas, resultando así las siete fichas del Tangram. A partir de la manipulación y visualización de éstas, se propone a los estudiantes analizar qué tipo de forma tienen las figuras (cuadrada, triangular, etc.) y si poseen o no la misma cantidad de superficie. Con esto se promueve el pasaje de un contexto cotidiano a un contexto matemático, dando cuenta del *nivel situacional* (matematización horizontal).

Actividad 2. En esta actividad, se remplaza el Tangram hecho por los estudiantes en papel por uno de madera, cuyas fichas están etiquetadas con una letra y pintadas de colores distintos. A partir de la manipulación con el artefacto, se proponen una serie de preguntas en las que se deben realizar comparaciones, en cuanto a cantidad de superficie, entre las siete figuras del Tangram y el cuadro completo (la unidad). Dicha comparación (medida relativa entre áreas) se puede expresar como la cantidad de veces que cabe la superficie de una figura en la superficie de otra, favoreciendo las comparaciones que dan a lugar a expresiones como: cabe dos veces, está cuatro veces, entre otras, para ir avanzando hacia la construcción de expresiones como "ser la mitad de" o "ser la cuarta parte de" asociadas a las primeras, respectivamente. Así por ejemplo, si la superficie del cuadrado (llamado F) cabe exactamente dos veces sobre la superficie de uno de los triángulos con mayor superficie (llamado A), se genera en el estudiante la idea que la superficie de F es la mitad de la superficie de A. De esta forma, hace presencia el nivel referencial (matematización vertical), por cuanto se describen relaciones matemáticas a través de "modelos de" una situación particular y se inicia así la aproximación a la segunda interpretación (ii), arriba señalada, de la relación parte-todo propuesta por Ohlsson (1988).

Actividad 3. Se propone aquí a los estudiantes la reflexión sobre las expresiones, procedimientos, estrategias y modelos hasta aquí utilizados, para que así logren detectar la existencia de aspectos generalizables de los mismos, permitiéndoles deducir que los modelos construidos no sólo son para una situación en particular, dando a lugar a los "modelos para" la resolución de las mismas. En este sentido, se quiere que la relación cuantitativa de ser un medio de, un cuarto de, etc., no se conciba como exclusiva de la comparación entre dos triángulos del Tangram, más aún, en el contexto propio de la comparación de superficies, sino que se logre generalizar a otros contextos y situaciones. Es así como se promueve en los estudiantes el nivel general (matematización vertical) y se continúa movilizando la segunda interpretación (ii).

Actividad 4. Con esta última actividad se desea, por un lado, que los estudiantes pasen de expresiones en lenguaje natural ("ser un octavo de") al lenguaje simbólico ($\frac{1}{8}$), es decir, que puedan reconocer la existencia del número fraccionario como el símbolo que expresa las relaciones cuantitativas dispuestas a lo largo de la situación; y por otro, que se construya la idea del fraccionario n/m como las n partes que miden $1/m$ de la unidad. De esta manera, se propicia el nivel formal (matematización vertical) y la primera interpretación (i) de la relación parte-todo propuesta por Ohlsson (1988) en torno a la relación parte-todo de los fraccionarios.

Es pertinente señalar que el manejo del Tangram presenta limitaciones en cuanto al aprendizaje de los fraccionarios, debido a que éste sólo permite el abordaje de algunos de ellos ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$) (Rodríguez y Sarmiento, 2002). Es por ello que se propone abordar una segunda situación vinculada al uso de las Regletas, que propicie el estudio de otros fraccionarios como $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, entre otros, y mediante el estudio de otra magnitud como lo es la longitud.

Referencias

Cortina, J., Zúñiga, C. y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática, 25* (2), 7-29.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel Publishing Co.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Kluwer, Dordrecht.

Goffree, F. (2000). "Principios y paradigmas de una 'educación matemática realista'", Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional, Barcelona, Graó, vol. 9, pp. 151-167.

Llinares, S., y Sánchez, M. (1997). *Fracciones: La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis S.A.

Martínez, M., Da Valle, N., Bressan, A. y Zolkower, B. (2002). La relevancia de los contextos en la resolución de problemas de matemática. *Paradigma*, *22*(1), 59-94.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.

Monje, C. (2011). *Metodología de la Investigación Cuantitativa y Cualitativa Guía Didáctica.* Recuperado de *https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf*

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA. 8*(2), 28-41.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pontón, T. (2008). *Una propuesta multirregistro para la conceptualización inicial de las fracciones* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Radford, L. (2012). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 282 – 288). New York: Springer.

Rodríguez, C. y Sarmiento, A. (2002). El tangram y el plegado: dos recursos pedagógicos para aproximarse a la enseñanza de las fracciones propias. *Revista EMA, 7*(1), p. 84-100.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Kluwer. Dordrecht. The Netherlands.

Vasco, C. (1994). El archipiélago fraccionario. En A. C. Castiblanco (Ed.), Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas (Vol. 2, pp. 23-45). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Análisis de una prueba diagnóstica relativa a la multiplicación en la Educación Básica Primaria. Una experiencia desde la cualificación y formación docente

Johnny Alfredo **Vanegas** Díaz
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
johnny.vanegas@correounivalle.edu.co
Teresa **García** Franco
Institución Educativa Gimnasio del Calima
Colombia
tedaja20@hotmail.com
Liliana **Escudero**
Institución Educativa Gimnasio del Calima
Colombia
lilianaes9@gmail.com

Resumen

En esta comunicación se presenta el análisis de una prueba diagnóstica sobre la multiplicación, la cual se implementó a un grupo de estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria de la Institución Educativa Gimnasio del Calima, sede Gabriela Mistral. Dicho análisis se consolidó a través de un proceso de cualificación y acompañamiento a dos docentes de esa Institución Educativa. En este sentido, se discute, desde la perspectiva del tutor que orientó el proceso, algunas características de la prueba diagnóstico y de la matriz de análisis que se construyó como base para interpretar y evaluar las producciones escritas de los estudiantes. Adicionalmente, se muestran algunos apartados del análisis alrededor de las preguntas más problemáticas para los estudiantes y finalmente, se mencionan algunas implicaciones de dicho análisis en los procesos de formación de los docentes participantes y en la reestructuración de una secuencia didáctica que había sido pensada previamente.

Palabras clave: isomorfismo de medida, producto de medidas, prueba diagnóstica, multiplicación.

Introducción

Desde el año 2014 la fundación Epsa, en alianza con la Universidad del Valle, viene desarrollando un programa de *cualificación y acompañamiento a docentes en el diseño de secuencias didácticas en el área de matemáticas*, el cual busca a través de un proceso de

formación y acompañamiento enriquecer las prácticas docentes en el ámbito escolar. Todo esto organizado en cuatro fases planeadas para desarrollarse durante dos años. En la fase I se conforman los grupos de docentes de acuerdo a las problemáticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que ellos mismos identifican; las cuales son documentadas a través de talleres, reflexiones y discusiones enmarcadas en diversas perspectivas: didáctica, curricular, matemática y de herramientas e instrumentos de mediación, concluyendo con una propuesta de diseño de una secuencia didáctica para su reformulación y aplicación en la siguiente fase. De esta manera, la fase II contempla la aplicación de una prueba diagnóstica, el análisis de las producciones de los estudiantes y la planeación de nuevas actividades y/o la reestructuración de las actividades de la secuencia para desarrollar en la tercera fase. La fase III se ocupa de la implementación, gestión y análisis de la secuencia didáctica diseñada, mientras que en la fase IV se propone un acompañamiento al diseño curricular de las instituciones educativas participantes.

La ruta de trabajo que aquí se esboza expone una parte del trabajo desarrollado en la fase II, llevado a cabo en el municipio de Calima-El Darién, por un equipo conformado por dos docentes quienes bajo la orientación de un tutor logran concluir el análisis de una prueba diagnóstica relativa a la multiplicación para el grado cuarto de primaria, la cual se implementó con un grupo de estudiantes de la Institución Educativa Gimnasio del Calima, sede Gabriela Mistral.

La consideración de una prueba diagnóstica, su implementación y respectivo análisis hace parte de la fase II del programa. Si bien, este es uno de los productos finales de la fase, el centro de atención está puesto sobre la configuración de una secuencia didáctica sobre la multiplicación. En consecuencia, el análisis de la prueba diagnóstica se gestiona con el fin de reconocer, entre otros elementos, qué tanto pueden hacer los estudiantes de grado cuarto al enfrentarse a problemas con estructura multiplicativa y cuáles son las dificultades que presentan frente a conceptos asociados con la multiplicación. De esta manera, el análisis de la prueba resulta útil para que los docentes del grupo integren nuevos elementos y reestructuren las actividades planteadas inicialmente en la secuencia didáctica de interés.

Características de la prueba diagnóstica, contexto y participantes

La prueba objeto de análisis en su versión original está constituida por 10 preguntas que incluyen dos tipologías, las primeras ocho son de opción múltiple con única respuesta y las otras dos se corresponden con el tipo de preguntas abiertas, caracterizadas por una formulación precisa que posibilita en su proceso de resolución diferente métodos y procedimientos. Sin embargo, en esta comunicación, únicamente, se discuten algunos resultados obtenidos del análisis de las preguntas cerradas.

Todas las preguntas que integran el diseño de la prueba son producto de un proceso de selección y adaptación de preguntas de selección múltiple, propuestas en los cuadernillos de las *pruebas saber* de los años 2012, 2013, 2014 y 2015 para los grados tercero y quinto[1]. El conjunto de preguntas atiende diversos contenidos específicos, que pueden entenderse en términos de significados y representaciones asociados con la multiplicación de números naturales. Entre tales contenidos se destacan: l*a unidad como agrupamiento, arreglos rectangulares, suma repetida de*

[1] Estos cuadernillos pueden descargarse de manera gratuita a través del sitio web: http://www2.icfes.gov.co/estudiantes-y-padres/pruebas-saber-3-5-y-9-estudiantes/ejemplos-de-preguntas-saber-3-5-y-9

sumando iguales, *series proporcionales* y *producto cartesiano*.

La prueba diagnóstica se implementó el día 23 de marzo de 2018, a 26 estudiantes de la Institución educativa Gimnasio del Calima, sede: Gabriela Mistral, del grado cuarto, grupo tres (4-3). La prueba fue desarrollada de manera individual y se utilizó una intensidad horaria de dos horas de clase (60 minutos) para su implementación, la cual fue orientada por la directora de grupo, la profesora Liliana Escudero. Es importante anotar que la selección de este grupo, entre todos los cursos de grado cuarto, tuvo que ver con los buenos resultados obtenidos en la *prueba saber 3 matemática 2012*.

Preliminares del análisis de la prueba diagnóstico

Para analizar la prueba diagnóstica se diseñó una matriz de análisis constituida por: los *contenidos específicos, la intención de cada pregunta*, el *desempeño evaluado* y los *indicadores de los tipos de respuestas*, los cuales permitieron interpretar las producciones escritas de los estudiantes.

Para ejemplificar dicha unidad de análisis se toma como referente la pregunta 2. En este caso, el contenido específico remite tanto a la *unidad como agrupamiento* como a las *series proporcionales*. Se trata de una pregunta que busca que los estudiantes piensen en un grupo de grupos, como si se tratara de una unidad (Isoda y Olfos, 2009). Particularmente, el contexto en que se inscribe la pregunta requiere que los estudiantes identifiquen la regularidad de la serie numérica involucrada (para una malla más le sumo tres pelotas más; voy de tres en tres), lo que eventualmente puede llevarlos a reconocer y usar ciertos productos (Itzcovich y Broitman, 2001). El desempeño evaluado se corresponde con uno de los estándares básicos de competencias de matemáticas del pensamiento numérico (MEN, 2006) y se expresa en los siguientes términos: *Resuelvo problemas multiplicativos de proporcionalidad directa a partir de la progresión escalar en las magnitudes*. Finalmente, la Tabla 1 presenta los indicadores considerados para los diferentes tipos de respuestas a la pregunta 2.

Tabla 1.

Características de los tipos de respuestas a la pregunta 2.

Pregunta 2	**Indicadores de los tipos de respuestas**
En un almacén se empacan pelotas de tenis en mallas de la siguiente manera.  Un cliente lleva una caja que contiene 12 mallas como la anterior. ¿Cuántas pelotas se llevó el cliente? A) 12 pelotas B) 15 pelotas	A) Los estudiantes que seleccionan esta respuesta, no identifican la relación de proporcionalidad directa existente entre la cantidad de mallas y la cantidad de pelotas de tenis, al considerar que la cantidad de mallas es igual a la cantidad de pelotas de tenis.
	B) Los estudiantes que eligen esta respuesta, adicionan la cantidad de mallas (12) con la cantidad de pelotas de tenis (3). Esto debido a que no diferencian las magnitudes y no referencian que una malla contiene 3 pelotas de tenis, por lo que al aumentar las mallas, la cantidad de pelotas de tenis también aumentará.
	C) Los estudiantes que seleccionan esta respuesta, reconocen la proporcionalidad que existe entre la cantidad de mallas y la cantidad de pelotas de tenis (por cada malla hay tres pelotas). Este proceso requiere que el estudiante realice cálculos aritméticos con estrategias multiplicativas

C) 36 pelotas D) 48 pelotas	D) Los estudiantes que escogen esta respuesta, tienen en cuenta la cantidad de mallas totales (12), pero omiten la información del gráfico y asumen que cada malla contiene 4 pelotas de tenis, por lo que el escalar les da 48 pelotas.

Es importante anotar que los indicadores de los tipos de respuestas, también son producto de las reflexiones que emergen en las discusiones con el grupo de docentes, al revisar investigaciones relacionadas con la temática. Por ejemplo, las investigaciones de Itzcovich y Broitman (2001), Usuga (2014) y Obando (2015) permitieron reconocer una amplia variedad de problemas multiplicativos –problemas de proporcionalidad, de organizaciones rectangulares y de combinatoria– y de estrategias que ponen en juego los estudiantes para su resolución.

Resultados de la prueba diagnóstica

Los resultados obtenidos se organizan en una tabla (Tabla 2) y en diagramas de barras (Figura 1). Es importante recordar que en la implementación de la prueba participaron 26 estudiantes que respondieron las primeras 8 preguntas seleccionando una única opción de respuesta, lo cual facilitó la clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes.

Tabla 2.

Clasificación inicial de las respuestas de los estudiantes.

PREGUNTAS	A	B	C	D	CORRECTA	INCORRECTA	CLAVE
1	2	3	4	17	17	9	D
2	4	1	21	0	21	5	C
3	2	2	3	19	19	7	D
4	4	1	12	9	12	14	C
5	2	4	0	20	20	6	D
6	2	1	0	23	23	3	D
7	7	18	0	1	18	8	B
8	19	0	7	0	7	19	C

Para comprender la información presentada en la Tabla 2, se toma como referente la pregunta 1. En este caso, la respuesta correcta es la opción D (**clave**). Esta pregunta fue contestada por todos los estudiantes, pero solamente 17 de ellos acertaron con la opción correcta, mientras que los 9 restantes escogieron las opciones A (2 estudiantes), B (3 estudiantes), y C (4 estudiantes), las cuales son incorrectas. A continuación, se describen los resultados de la Tabla 2 a través de un diagrama de barras (ver Figura 1), el cual permite visualizar y contrastar entre sí los resultados obtenidos en forma de porcentajes.

Los resultados presentados en la Tabla 2 y en la Figura 1 ponen de manifiesto que las preguntas 1, 4, 7 y 8 fueron problemáticas para los estudiantes; aspecto que se evidencia en el bajo porcentaje de aciertos. Si bien, en la pregunta número uno el 65% de los estudiantes respondió correctamente, los estudiantes restantes (35%) no se han familiarizado con un

significado fundamental para construir el concepto de multiplicación, la unidad como agrupamiento. Se requiere entonces que los estudiantes reorganicen sus conocimientos, pensando en un grupo de grupos, superando el obstáculo de pensar solo en el 1 como unidad (Isoda y Olfos, 2009).

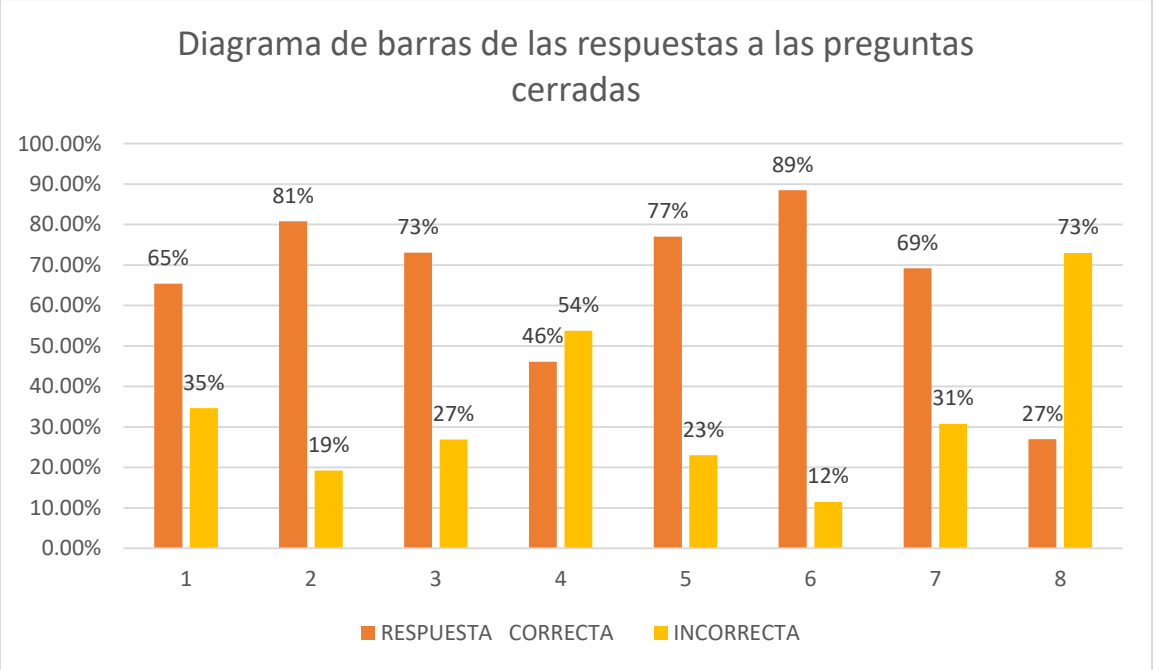


Figura 1. Clasificación porcentual de las respuestas a las preguntas 1- 8.

En el caso de la pregunta número cuatro, los resultados revelan que más de la mitad de los estudiantes (54%) no lograron resolver una situación problemática que involucra un isomorfismo de medida-tipo multiplicación, cuando se emplean representaciones pictóricas. En este sentido, se pone de manifiesto la dificultad que presentan los estudiantes para establecer una relación entre la multiplicación y la proporcionalidad simple directa, cuando se presenta esquemas gráficos (Obando, 2015). En contraste, los resultados obtenidos en la pregunta número siete revelan que un 31% de la muestra responden de manera incorrecta, lo cual parece indicar que la problemática con la estructura matemática de un isomorfismo de medida está más arraigada al trabajo con representaciones pictóricas y no tanto, cuando se proponen problemas en un contexto eminentemente numérico.

De manera general, los resultados obtenidos en las preguntas cuatro y siete sugieren un mayor trabajo con problemas que integran este tipo de estructuras (isomorfismo de medidas), favoreciendo las formas de razonamiento típicamente multiplicativas –variación conjunta de dos o más cantidades– *en las que la variación de una de las cantidades condiciona el proceso de variación en la otra* (Obando 2015).

Finalmente, se destacan los resultados de la pregunta número ocho, puesto que se pone en evidencia la dificultad que presentan los estudiantes para resolver un problema asociado al producto de medidas (combinatoria). Los resultados obtenidos sugieren mayor trabajo con este tipo de escenarios, dado que son muy pocos los estudiantes (27%) que establecen una relación entre la multiplicación y los contextos que involucran diferentes tipos de combinaciones. En consecuencia, se puso de manifiesto la necesidad de incluir más actividades, como parte de la

secuencia didáctica en construcción, que orientaran el trabajo de los estudiantes hacia la búsqueda de estrategias para encontrar las combinaciones que se pueden establecer entre los elementos de dos colecciones con independencia de colocación de los mismos (Itzcovich y Broitman, 2001). Este hecho fue tan representativo para el grupo de docentes que, al examinar los libros de texto empleados por ellos mismos, lograron constatar que son escasos los problemas de esta índole, pese a que las directrices curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) consideran su introducción para el cuarto grado de Educación Básica Primaria.

A continuación se exponen algunas de las preguntas que integran la prueba diagnóstica. Estas han sido consideradas porque a) permiten visualizar los contenidos específicos tratados y b) dan cuenta de las preguntas más problemáticas para los estudiantes. Además, se incluye una pequeña descripción del análisis organizado y desarrollado por los docentes participantes, entorno a la pregunta 1.

Primera pregunta

1. Un profesor debe organizar a sus 16 estudiantes en filas con igual número de integrantes. ¿Cuál de las siguientes alternativas le sirve al profesor?



En relación con esta pregunta, se puede apreciar que la mayoría de los estudiantes (65.4%) contestaron correctamente, quizá porque hicieron una buena interpretación del enunciado, al identificar las dos condiciones dadas, 1) que la configuración debería tener 16 puntos y 2) que cada fila debería tener igual número de integrantes.

Por otra parte, al analizar las respuestas incorrectas de los estudiantes se logró establecer al menos dos tipologías, a saber: a) los que contaron el número de puntos en la organización rectangular y no tuvieron en cuenta la organización de las filas, es decir, que escogieron las opciones A y B, y b) los que observaron unas filas bien organizadas, pero no tuvieron en cuenta el número total de puntos, es decir los que respondieron la opción C. En consecuencia, estos estudiantes no interpretan las relaciones de un número natural múltiplo de otro, a partir de un arreglo rectangular. Además, las respuestas escogidas, en este caso, da indicios sobre que los estudiantes no han logrado construir el significado de la multiplicación como una suma de sumando iguales, que responde al hecho ilustrado gráficamente en el arreglo rectangular planteado.

Séptima pregunta

7. Una familia compuesta por **3 adultos** y **2 niños** desea ingresar al circo. Al pagar las entradas en la taquilla les cobrarán

A. $26.500 B. $28.500

C. $18.500 D. $27.000

Octava pregunta

8. En una pequeña reunión hay 2 niños y 3 niñas. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar?

A. 2 parejas B. 4 parejas C. 6 parejas D. 12 parejas

Reflexiones finales

El análisis elaborado por el grupo de docentes (en compañía del tutor), permitió reconocer el papel de la prueba diagnóstica como instrumento de apoyo en la identificación de fortalezas y debilidades conceptuales por parte de los estudiantes, frente al contenido matemático de interés. En particular, dicho análisis dejó entrever los aspectos del proceso de aprendizaje de los niños, en los cuales debía hacerse énfasis, tales como: el trabajo con problemas de estructura multiplicativa que involucran el *producto de medidas* (producto cartesiano), el *isomorfismo de medidas* (series proporcionales) y la *unidad como agrupamiento*. En consecuencia, los docentes empezaron a reflexionar sobre las situaciones multiplicativas como aquellas en las que intervienen al menos dos clases de elementos y necesariamente una relación constante, enriqueciendo de este modo la visión simplista de la multiplicación como "una suma de sumando iguales" (Fernández, 2007).

Finalmente, es importante mencionar que este ejercicio de formación docente promueve espacios para que ellos hagan una reflexión profunda sobre su quehacer en el aula, por ejemplo: al reconocer que el análisis de las producciones escritas de sus estudiantes va más allá de una simple descripción numérica y que por tanto, se requiere un componente interpretativo que ayude a identificar dificultades e incluso, que aporte en la construcción de nuevas estrategias de intervención en el aula.

Referencias

Fernández, J. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 119-130.

Isoda, M., & Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Itzcovich, H., & Broitman, C. (2001). Orientaciones didácticas para la enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos de la EGB. Dirección de Educación General Básica, Argentina.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá: Magisterio.

Obando, G. (2015). Profesora, ¿qué es multiplicar? Trabajo derivado de la tesis doctoral que lleva por título: sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica. Universidad del Valle, Colombia.

Usuga, O. (2014). Diseño de una unidad didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación de números naturales en el grado tercero de la Institución Educativa Antonio Derka Santo Domingo del municipio de Medellín. Tesis inédita de maestría. Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La importancia de los ambientes para el aprendizaje una experiencia desde multiplicación de los números Naturales

Mary Luz **Bernal** Pinzón
Magister en Educación, Facultad de Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Marlubernapi@yahoo.es

Alba Soraida **Gutiérrez** Sierra
Doctorando en Educación, Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología Panamá
albasoraidagutierrez@gmail.com

Resumen

La presente comunicación, pretende mostrar la relación entre la didáctica y ambientes para el aprendizaje; se inicia con el recuento sobre cómo ha venido empleándose la didáctica de una forma instrumental haciendo un paralelo en la teoría de Shulman (1986).Se resalta la importancia de la enseñanza y aprendizaje en el contexto escolar, como un reto para la educación actual, pues el maestro como agente dinamizador debe propiciar ambientes de aprendizaje, en los cuales el estudiante interactúa con el conocimiento para llegar a la apropiación de conceptos abstractos más elaborados. Se muestra una experiencia relacionada con la didáctica de las matemáticas en la construcción del concepto de multiplicación en números naturales utilizando el conocimiento Didáctico del contenido CDC.

Palabras clave: didáctica, ambientes de aprendizaje, multiplicación, números naturales.

Algunas posturas sobre didáctica

Cuando se habla de didáctica, se piensa en diferentes estrategias que motivan, técnicas y actividades novedosas, creativas, además de elementos que se pueden involucrar dentro de la construcción del aprendizaje, pero no como una manera de ir moldeando y reflexionando sobre la praxis educativa, donde esta reflexión debe permitir el hecho de sobrepasar las barreras de los contenidos que se imparten dentro del aula y conducir a una dimensión donde se potencialice el desarrollo de competencias individuales y sociales.

Por ejemplo, la mirada que ofrece Astolfi (1998) sobre didáctica, hace reflexión sobre la epistemología del contenido (registro epistemológico) convirtiendo ese conocimiento en

actividades que permitan mirar las potencialidades, comprensiones o dificultades en el estudiante (registro psicológico) luego, realizar actividades donde el educando pueda dar cuenta de su apropiación y comprensión del concepto (registro pedagógico).Lo más importante es la interacción que hay entre saber-alumno y maestro. (Astolfi, 1998); frente a esta postura existe una figura ampliamente dominante en el campo didáctico francés conocida como triangulo didáctico, que relaciona los tres sujetos que intervienen en el hecho y el acto educativo: el saber, el profesor y alumno

En conformidad con lo anterior, Zambrano (2005) expresa que la didáctica es una ciencia que tiene por objeto la reflexión, sobre cómo organizar y orientar situaciones de enseñanza con el finde obtener la construcción de saberes, además de la formación intelectual del educando. Es decir, el papel de la didáctica en relación con el ambiente de aprendizaje, es una disciplina científica que problematiza, reflexiona, produce saber, conocimiento sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de un saber especifico. Por tal razón se debeentender qué es un ambiente de aprendizaje y qué conlleva en la práctica educativa.

Por su parte, Castaño & Fonseca (2008) se refieren a la didáctica, como una disciplina reflexiva, que le permite al docente cuestionarse constantemente sobre lo que sucede en torno a su quehacer pedagógico, donde lo invita a transformar su praxis, teniendo en cuenta que sus estudiantes no son simples objetos receptores, sí no que ellos se deben involucrar de manera directa en la construcción del conocimiento, haciendo de estos sujetos más críticos y auto-reflexivos.

Ambientes para el aprendizaje y su relación con la didáctica.

Existe una gran variedad de opiniones y conceptos en cuanto al término ambientes de aprendizaje, para este caso se toman algunas pautas en el análisis sobre ambiente educativo dadas por Duarte (2003) en ellas se destaca lo siguiente: el ambiente es concebido como una construcción diaria, reflexión cotidiana, singularidad permanente que asegura la diversidad y con ella la riqueza de la vida en interacción con el mismo, induce a pensar el ambiente educativo como sujeto que actúa con el ser humano y lo transforma. Es un espacio y un tiempo en movimiento, donde los participantes desarrollan capacidades, competencias, habilidades y valores.

Desde este punto de vista, cabe realizar un paralelo entre la didáctica como acción transformadora, y la construcción de un ambiente para el aprendizaje donde “El estudio de los diferentes discursos y la observación de las diversas prácticas en la educación relativa al ambiente ha permitido identificar seis concepciones sobre el mismo: El ambiente como problema, El ambiente como recurso, El ambiente como naturaleza, El ambiente como biosfera, El ambiente medio de vida y El ambiente comunitario”. (Duarte, 2003, p.99). Es decir paragenerar ambientes educativos, la escuela debe integrar abiertamente cada uno de los mencionados anteriormente para llegar a la construcción de diversos saberes que influyen en la calidad de vida de cada integrante

El conocimiento didáctico del contenido y sus elementos (CDC)

El CDCes especialmente importante, pues en él se identifican los diferentes estadios de conocimientos para la enseñanza. Como señala Shulman (1987):

> Representa la relación entre materia y didáctica por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los educandos, y como éstos son transformados para su enseñanza. El CDCde la materia es la categoría que con mayor probabilidad permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del maestro. El CDC trata de cómo puede ser interpretado el contenido específico en una situación de enseñanza (Cooney, 1994). Supone la comprensión de tópicos centrales en cada materia por parte del profesor y que éste sea capaz de responder a los siguientes tipos de preguntas acerca de cada tópico: ¿Qué conceptos clave, habilidades y actitudes potencia este tópico en los estudiantes? ¿Cuáles son los aspectos de este tópico que son muy difíciles de entender para los estudiantes? ¿Cuál es el más grande interés intrínseco del estudiante? ¿Qué analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones, simulaciones, manipulaciones u otras formas parecidas son más eficaces para lograr que los alumnos comprendan este tópico? ¿Cuáles preconcepciones de los estudiantes son posibles de considerar en su forma de aprender el tópico? (Shulman y Sykes, 1986, p. 9.)

Una experiencia didáctica desde el CDC

La siguiente experiencia se trabajó en la Institución Educativa la Cabaña, del municipio de Maripi; con niños de segundo y tercer grados de primaria al estudiar las tablas de multiplicar.

Para el diseño del ambiente para el aprendizaje a la luz del CDC se partió de:

Creencias de los estudiantes

Se empezó indagando a los niños si habían escuchado el término tablas de multiplicar y de que otra manera se realizaba, ellos daban diferentes anotaciones, se les puso varios ejemplos cotidianos para que ellos dieran cuenta que era igual a la suma, se les hizo ver la importancia de este concepto en la vida cotidiana, y los resultados que tienen en el aprendizaje de las matemáticas y facilidad para realizar cualquier operación.

Proceso de toma de decisiones en la enseñanza

A partir de las creencias y los preconceptos que se evidenciaron en los estudiantes se plantearon diferentes problemas y situaciones cotidianas empleando la suma para resolverlos; es aquí donde ellos proponen otras maneras de multiplicar, sin dejar atrás la importancia de generar ambientes de aprendizaje y trabajo colaborativo.

Esta experiencia fue de gran ayuda, puesto que propicioreflexión sobre la acción, contribuyendo al beneficio de un ambiente de aprendizaje donde el docente investiga ese saber científico y busca apoyo en la didáctica, no solo como herramienta sino más a manera de que el estudiante en la interacción con el saber pueda dar cuenta de sus dificultades y fortalezas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, dando pistas al maestro de cambiar, mejorar o innovar para que este proceso sea más flexible al niño.

Shulman(1986) lo denominó "conocimiento de la valoración de aprendizaje" en este caso las tablas de multiplicar. Frente al conocimiento del plan de estudios, se tuvieron en cuenta tres aspectos:

Materiales curriculares

Una de las actividades que realizaron los niños fue entrevistar a los diferentes docentes de la Institución, en este caso se inició con el profesor del área de matemáticas. El cual dió respuestas similares al apropiar el concepto por ellos, de esta manera evidenciaron que no sólo hay una manera de aprender las tablas, sino que existe la posibilidad de realizarlas mediante la suma consecutiva, antes de dar un concepto como tal, cada niño escribió el concepto de tablas de multiplicar de acuerdo con lo que había entendido. También ayudó la utilización de materiales del medio (piedras, semillas, tapas) el ábaco, yupana, etc. Esto con el fin de facilitarle al niño el proceso sumatorio que permite llegar a la multiplicación.

Exploración de los Números

Un primer acercamiento al concepto tablas de multiplicar se dio contando la historia de cómo éste se convirtió en un saber enseñable, como herramienta se utilizó una fotografía de Pitágoras de Samos, Grecia, quien inventó las tablas de multiplicar y dejó como parte de su legado el cuadro pitagórico. Esto les permitió a los niños contextualizarse con la construcción histórica del concepto.

Interdisciplinaridad del saber

Se realizó una actividad en el área de inglés cuyo objetivo era entrelazar el concepto tablas de multiplicar y el fortalecimiento en el Bilingüismo, los niños respondían preguntas que la maestra hacía en inglés a cerca de sumas abreviadas con problemas que involucraban la utilización de éstas.

Otras de las actividades que permitió el trabajo colaborativo fue una actividad lúdica llamada; Pepe el pescador. Los estudiantes se organizaron grupos de cuatro para pegar pescados. Cada equipo elegía a un niño para ir a pescar, en cada figura se encontraba escrita una multiplicación, ejemplo (2x8), ellos tenían que resolverla sumando tantas veces el numero como lo indicaba, este ejercicio reforzó el concepto de que multiplicación.

De esta forma se evidenció claramente cómo la didáctica jugó un papel necesario para la construcción de dicho concepto.

Métodos de Evaluación

Para evidenciar el aprendizaje apropiado por los estudiantes se utilizaron diferentes estrategias de evaluación tales como:

Lluvia de ideas, construcción del concepto a través de entrevistas directas, análisis y solución de problemas que se les plantearon.

Conclusiones

En la actualidad algunas investigaciones han hecho evidente el gran desinterés de los estudiantes, pues ellos no interiorizan la importancia de aprender para la vida, si va a la escuela o no; para él ya no es de gran importancia, el profesor ya no tiene ese mismo ímpetu que poseía hace unos años, los estudiantes van a la escuela a realizar todo tipo de actividades como: jugar, descansar del trabajo de casa, compartir con los amigos pero no a compartir conocimientos ni mucho menos como superar las dificultades vistas en clase, es aquí donde el maestro apoyándose en el CDC, realiza una transformación en la práctica cotidiana, generando ambientes que saquen de la monotonía su forma de enseñar e inviten a la interacción docente-estudiante-conocimiento.

En relación con lo anterior frente a esta postura, se podría indicar que algunas dificultades presentadas en el proceso de aprendizaje cuestionan conclusiones aparentemente evidentes a las que pueden llegar los profesores y padres, desde un análisis superficial, y simple, que podrían resumirse en atribuir el fracaso o demora del educando en la adquisición de los conocimientos de ciencias a determinadas características personales, cómo la falta de capacidad para aprender, de esfuerzo, de motivación, asociados a problemas de disciplina. Estas conclusiones hechas a la ligera impiden ver que existen problemas ocultos en los propios saberes y la forma en que estos son traspuestos, dificultando o hacen imposible un aprendizaje comprensivo, generando en elestudiante un sentimiento de incapacidad y desinterés.

Referencias

Astolfi J.(1998). *Estudios Pedagógicos, conceptos clave en la didáctica de las disciplinas.* Primera edición, 1998, pp. 73-82. Universidad de Sevilla .Sevilla, España.

Castaño& Fonseca.(2008).*La didáctica un campo de saber y de prácticas*. En R.S.otros,Contextos y pretextos sobre pedagogía,(pags.73-95). Bogotá: Fondo Editorial UPN.

Cooney, T. J. (1994), "Research and teacher education: In search of common ground", *Journal for* Research *in Mathematics Education,* vol. 25, núm. 6, pp. 608-636

Duarte D., J.(2003).*Ambientes de aprendizaje: una aproximación conceptual Estudios* Pedagógicos, núm. 29, 2003, pp. 97-113. Universidad Austral de Chile. Valdivia, Chile.

Shulman, L.S. y G. Sykes (1986).A*national board for teaching?: In search of bold standard*, Paper commissioned for the task force on teaching as a profession, Carnegie Forum on Education and the Economy, marzo.

Smith, D.C. y D.C. Neale (1989), *The construction of subject matter knowledge in primary* science *teaching*, Teaching and Teacher Education, vol. 5, núm. 1, pp. 1-20.

Zambrano A.(2005). *La didáctica lugar en las ciencias de la educación*.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enseñanza de la división, basada en justificaciones, con estudiantes de primaria

Candy Clara **Ordoñez** Montañez
Universidad Nacional de Cañete
Perú
cordonez@undc.edu.pe

Resumen

Existen investigaciones que muestran la importancia de incluir a las justificaciones como medio para enseñar las matemáticas. En ese sentido, este trabajo pretende investigar las condiciones en las que es posible lograr que los estudiantes de tercer grado de primaria sean capaces de construir la noción de división de números naturales cuando la enseñanza es basada en justificaciones. En este estudio participaron estudiantes de tercer grado de primaria de un colegio estatal. Las actividades que se diseñaron y aplicaron estuvieron enmarcados en una noción intuitiva que busca la construcción gradual de la noción de división. En el análisis de las respuestas de los estudiantes obtuvimos como principal hallazgo el logro de la comprensión de manera significativa de la relación existente entre el residuo y el divisor de una división de números naturales.

Palabras clave: enseñanza, división, repartición, justificación, primaria.

Introducción

En las últimas décadas, los documentos referidos a estándares de aprendizaje han enfatizado en la importancia de desarrollar las habilidades de los estudiantes para generar y criticar argumentos matemáticos en todos los grados de los diferentes niveles (Bieda, et al., 2013). Nuestro país no es ajeno a ello, pues en el Currículo Nacional (2016), propuesto por el Ministerio de Educación de Perú, contempla en sus cuatro competencias matemáticas la capacidad de la argumentación de afirmaciones (elaborar, justificar, validar o refutar afirmaciones). Sin embargo, todavía, resulta ser una capacidad matemática poca desarrollada en nuestros estudiantes de todos los niveles, especialmente, del nivel primario. En ese sentido, creemos que una forma de desarrollar esta capacidad y lograr la construcción de conocimientos matemáticos es con una enseñanza basada en justificaciones. Desde la perspectiva presentada por la investigadora Vallejo (2012) explica que las justificaciones matemáticas de un estudiante del nivel de primaria o secundaria se entienden como aquellos primeros argumentos que presentan los estudiantes que se inician en los procesos demostrativos. Es decir, es un sentido más amplio que la demostración matemática. Por otro lado, existen investigaciones que muestran la relevancia de las justificaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que son implícitas en temas afines. Por su parte, De Villiers (2001) manifiesta que la demostración

cumple varias funciones, no sólo consiste en la verificación de proposiciones matemáticas, sino contribuye a la creación de nuevos resultados. Asimismo, Reid (2011) señala que probar es un tema fundamental para las matemáticas, en que debe ser visto como una forma de desarrollar la comprensión de los conceptos matemáticos y de descubrir nuevos y significativos conocimientos matemáticos. De otro lado, tenemos el estudio de Stylianou (2011) el cual manifiesta que los estudiantes de nivel primario traen consigo una inclinación natural por probar, convencer o convencerse y que esto puede aprovecharse para ser cultivada en su pensamiento matemático. De igual modo, Schifter (2011) investiga sobre los argumentos que emplean los estudiantes en el nivel primario cuando se da una práctica docente basada en pruebas. En su estudio, uno de los casos que presenta es el de un profesor que trabaja los números pares e impares con sus estudiantes de tercer grado de primaria, que conjeturaron que la suma de dos números pares es par. La investigadora reporta cuatro categorías de argumentos que intentan probar la conjetura planteada; a partir de ello, le conlleva a concluir que los estudiantes son capaces de justificar afirmaciones de carácter general empleando como argumento la representación de objetos físicos, imágenes, diagramas o contextos de historias. Es por esa razón, que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante pruebas permiten explorar las nociones intuitivas e informales de la prueba y cómo estas pueden nutrirse de tal manera que sientan las bases para realizar pruebas matemáticas en grados posteriores. Investigaciones como las mencionadas muestran el papel importante de la demostración, la prueba y la estrecha relación con las justificaciones, siendo de sumo interés para la comunidad de la Educación Matemática y para la Comunidad Matemática. En ese sentido, este trabajo tiene como objetivo mostrar qué condiciones permiten a los estudiantes de tercer grado de primaria construir el conocimiento de la división de los números naturales cuando la enseñanza es basada en justificaciones.

Justificación matemática

Nuestra postura acerca de las justificaciones matemáticas se refiere a todos aquellos argumentos que permiten validar la veracidad o falsedad de una afirmación matemática, ya sea que se haya planteado como tal, o que esté involucrada en una pregunta. Un ejemplo de esto último es el siguiente caso que muestra dos maneras "equivalentes" de plantear un mismo problema.

- Planteado como una afirmación: Determine el valor de verdad de la siguiente afirmación y justifique su respuesta: "un residuo de una división con divisor 3 puede ser el número 4".
- Planteado como pregunta: ¿4 es un residuo de una división con divisor 3? Justifique su respuesta.

Observamos que para justificar la veracidad o falsedad de ambos problemas se requerirán básicamente de los mismos argumentos, ya que en esencia es el mismo problema. Por otro lado, entre los argumentos que se pueden emplear para una justificación tenemos: definiciones, resultados previamente justificados, ejemplos, contraejemplos, etc. La elección del argumento adecuado dependerá básicamente del tipo de problema que nos planteen: dependerá específicamente de si un problema es particular o general.

División como repartición equitativa y máxima

Lay (2009) considera que las pruebas (o justificaciones) dependen de buenas definiciones, ya que si estas últimas son inadecuadas no podemos esperar que los estudiantes puedan construir pruebas válidas. En base a ello, el presente trabajo toma la propuesta de Vallejo (2012) quien define la división de números naturales en función de la noción de la repartición equitativa y máxima como se esquematiza en la siguiente figura:

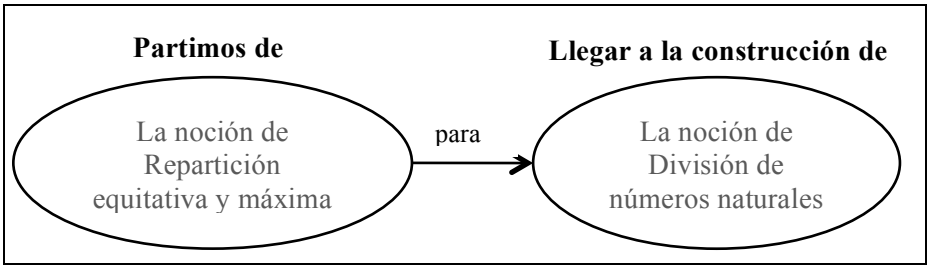


Figura 1. Esquema tomado de la investigación de Ordoñez (2014).

La noción de repartición equitativa y máxima cumple un rol importante en el desarrollo de este trabajo de investigación, es así que, explicamos los diferentes tipos de reparticiones a partir de los aportes de la investigadora Vallejo (2012) que se resume en la tabla 1.

Tabla 1
Tipos de reparticiones y sus ejemplos

Nociones	**Significado**	**Ejemplo de las reparticiones (ER):** Repartimos 15 lápices entre Hema y Felipe
Repartición equitativa	Repartición en la que cada persona recibe un mismo número de objetos.	ER: Entregamos a Hema 6 lápices y a Felipe 6 lápices y nos sobra 3 lápices después de la repartición.
Repartición máxima	Repartición en la que se reparte la mayor cantidad de objetos. Es decir, no sobra objetos después de la repartición.	ER: Entregamos a Hema 7 lápices y a Felipe 8 lápices.
Repartición equitativa y máxima	Repartición en la que cada persona le corresponde una misma cantidad de objetos y a la vez recibe la mayor cantidad posible de objetos.	ER: Entregamos a Hema 7 lápices y a Felipe 7 lápices y nos sobra 1 lápiz después de la repartición.
Repartición natural	Repartición en la que el número de objetos que le corresponde a cada persona es un número natural.	ER: Entregamos a Hema 5 lápices y a Felipe 10 lápices. Las dos personas tienen un número natural de lápices
Repartición Libre	Repartición que no presenta condición alguna.	ER: Entregamos a Hema 8 lápices y a Felipe 5 lápices y nos sobra 2 lápices después de la repartición.

Fuente: Nociones de reparticiones tomadas de Vallejo (2012)

Las reparticiones libres, reparticiones equitativas, reparticiones máximas por sí solas se caracterizan por tener más de una respuesta. Mientras que las reparticiones del tipo equitativas y máximas a la vez admiten una única respuesta. En base a la noción de repartición equitativa, y máxima la autora define división y divisibilidad (Vallejo, 2012, p. 153-157). En este trabajo nos concentramos en la noción de división, la cual define en términos de repartición:

> División de X entre Y como una repartición equitativa, máxima y natural de X objetos entre Y sujetos.

Metodología

Contexto y muestra

Este trabajo se llevó a cabo con 24 estudiantes del tercer grado de primaria, entre 8 y 9 años de edad, de un colegio estatal de Lima-Perú. Antes de desarrollar la investigación, ninguno de ellos contaba con conocimiento alguno sobre división de números naturales. Sin embargo, tenían como conocimiento previo la noción de adición, sustracción y multiplicación de números naturales. Por otra parte, el Currículo Nacional (2016) contempla la enseñanza y aprendizaje de la noción de división en el nivel 4 de los estándares de aprendizaje. Concretamente, en el tercer grado de primaria, es por esa razón que la investigación se sitúa en ese grado.

Procedimiento

Para la elaboración de nuestras actividades nos hemos basado en las nociones que presenta Vallejo (2012), pues presenta una propuesta de enseñanza por medio de justificaciones. La investigación se desarrolló en 14 sesiones, todas estas situaciones han sido diseñadas con el propósito de construir gradualmente las nociones de divisiones y divisibilidad de números naturales a partir de la noción de repartición equitativa y máxima. Nos centraremos en las 7 primeras sesiones, ya que estas estuvieron orientadas a la construcción de la noción de división de números naturales. Estas sesiones se han desarrollado en base a tres tipos de actividades: *Trabajo en clase* (todos los estudiantes con la guía de la investigadora), *Trabajo en grupos* (los estudiantes de manera grupal y sin la guía de la investigadora) y *Trabajo individual*.

Tabla 2
Resumen de sesiones y actividades

Sesión (*S*) y tipo de trabajo	**Actividad (*A*) y nociones trabajadas (*N*)**	**Propósito**
S1 Trabajo en clase y trabajo en grupos	*A: Situación "El álbum de frutas"* *N:* Repartición libre, equitativa, máxima, natural y libre.	*Caso: división con divisor fijo 2* Trabajar con un álbum de 2 páginas para repartir y pegar figuritas de frutas.
S2 Trabajo en clase y trabajo en grupos	*A:Situación "La promesa de las canicas"* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3* Trabajar con 3 bolsas de mallas para repartir canicas
S3 Trabajo individual	*A:Ficha "La promesa de las canicas"* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3* *C*onjeturar que existe infinitos números naturales que son divisibles entre 3.
S4 Trabajo individual y trabajo en clase	*A:Ficha "Reparticiones equitativas y máxima"* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3* Identificar las razones por las que 3 no pueden ser un valor del residuo en una división con divisor igual a 3.
S5 Trabajo en clase	*A:Ficha "Reparticiones equitativas y máxima"* *N:*Repartición equitativa y máxima	*Caso: división con divisor fijo 3,4 y 5* Identificar los posibles valores del residuo en una división con 3, 4 y 5.
S6 Trabajo en clase	*A:Situación: "Goles con premio"* *N:* Repartición exacta e inexacta	*Caso: división con dividendo fijo 24* Determinar los divisores de 24, en función de la noción intuitiva, para que cumpla la repartición exacta e inexacta
S7 Trabajo individual	*A:Situación: "La radio"* *A:Ficha: "Repartiendo entradas de forma equitativa y máxima"* *N:*Repartición exacta e inexacta	Identificar y justificar por qué las reparticiones son de tipo exacta o inexacta

Principales hallazgos

Para el análisis de las justificaciones de los estudiantes tanto individuales y grupales se han tenido en cuenta la puesta en práctica de las secuencias de actividades, así como también, las transcripciones que se han obtenido de las grabaciones en las sesiones de clases. Principalmente, el análisis de la información recopilada es cualitativa. Por otro lado, en esta investigación se combinan dos elementos relevantes de la enseñanza basada en las justificaciones: establecer un marco conceptual a partir del cual justificar y establecer como expectativa que las respuestas deben justificarse dentro de ese marco. Estos dos elementos se evidencian en las respuestas de los estudiantes dados a partir de la situación siguiente:

> ***Promesa de las canicas:*** Luis y sus amigos juegan un partidito de canicas. Esta vez Luis tiene presente que el día anterior había prometido a sus tres primos que les obsequiaría las canicas que gane en su próximo juego. Luis ha pensado en detalle cómo hará la repartición de las canicas que gane entre sus tres primos: "*Repartiré entre ellos la mayor cantidad de canicas que pueda, respetando que cada uno de ellos tenga una misma cantidad de canicas, así todos quedan contentos. Yo me quedaré con las canicas que sobren después de la repartición*". (Ordoñez, 2014, p.102)

A continuación, presento fragmentos de las transcripciones obtenidas en las sesiones.

Investigadora: ¿Podrá Luis tener 3 canicas después de repartir 12 canicas entre sus 3 primos?

Estudiante 1: No, porque Luis tiene que repartir la cantidad máxima de canicas.

Investigadora: Entonces, ¿no ha repartido la cantidad máxima de canicas?

Estudiante 2: No, todavía esas 3 (canicas) las puede repartir a sus primos

Investigadora: Ahora, ¿cuánto le corresponde a cada primo?

Estudiante: 4 canicas a cada primo y a Luis le sobrarían 0 canicas.

[...]

Investigadora: ¿con cuántas canicas como máximo se puede quedar Luis después de repartir cierta cantidad de canicas entre sus 3 primos?

Estudiante 3: 2 canicas

Respecto a este fragmento, notemos que las respuestas de los estudiantes proporcionan justificaciones en base a las expectativas que las respuestas han de tener dentro de un marco conceptual. En este caso, se estableció un marco conceptual, parte de ese marco es la noción de repartición máxima. Además, la justificación que presenta el estudiante 1 está basada en dicha noción; mientras que, el estudiante 2 considera la redistribución de canicas, de esa manera aplica la noción de repartición máxima. Es relevante mencionar que la enseñanza por medio de justificaciones permite construir la noción de división, pues comprenden y justifican por qué no puede ser el resto 3 cuando la división presenta como divisor a 3.

[...]

Investigadora: ¿Qué pasaría si Luis tiene 4 primos?, ¿con cuántas canicas Luis puede quedarse después de la repartición de un cierto número de canicas?

Estudiante 4: con 0, 1, 2 y 3 canicas

Investigadora: Ahora, Luis tiene 6 primos, ¿con cuántas canicas Luis puede quedarse después de la repartición de un cierto número de canicas?

Estudiante 5: 0, 1, 2, 3, 4 y 5 canicas

Investigadora: ¿por qué no le pueden quedar más de 5 canicas?

Estudiante 6: porque si fuera 6 canicas, tendría que repartirlas a sus primos.

Este fragmento, nos da señales claras que esta forma de enseñanza por medio de justificaciones permite que los estudiantes puedan construir la noción de división, y esto se evidencia cuando determinan los posibles valores que toma el resto cuando la división es por 4 y por 6. Cabe señalar que en las preguntas que se planteó solo tenían como dato el divisor (número de primos), pero esto no fue impedimento para que logren dar los posibles valores del residuo de la división (número de canicas que le quedan a Luis después de la repartición). Creemos que este tipo de respuestas dadas por los estudiantes conllevan a que más adelante hagan generalizaciones en relación al resto y el divisor de la división. Por otra parte, la intervención del estudiante 6 lo consideramos como una justificación, ya que emplea un ejemplo y se evidencia el uso de la noción de repartición máxima.

Investigadora: Luis tiene 672 primos, ¿con cuántas canicas se puede quedar Luis después de a la repartición de las canicas?

Estudiante 7: 671 canicas

Estudiante 8: también, 669, 668, …

Investigadora: ¿con cuántas canicas como mínimo se puede quedar Luis?

Estudiante 9: con 0 canicas.

Este último ejemplo y otros más, conlleva a deducir que los estudiantes han logrado comprender, justificar y construir su propio conocimiento de división, particularmente, cuando el residuo de una división no puede ser igual o mayor al divisor de la división. Por otra parte, en las transcripciones, hemos ilustrado el papel que tomó las justificaciones en la enseñanza de la división y como el establecimiento de la noción de la repartición máxima permitió que las justificaciones estén dentro del marco de dicha noción.

Según el esquema (ver figura 1) el logro de la construcción de la división se debe a la noción de repartición equitativa y máxima, pues este tipo de repartición admite una única respuesta. En los siguientes trabajos de los estudiantes muestran las actividades graduales que desarrollaron para lograr la adquisición de la noción de división.

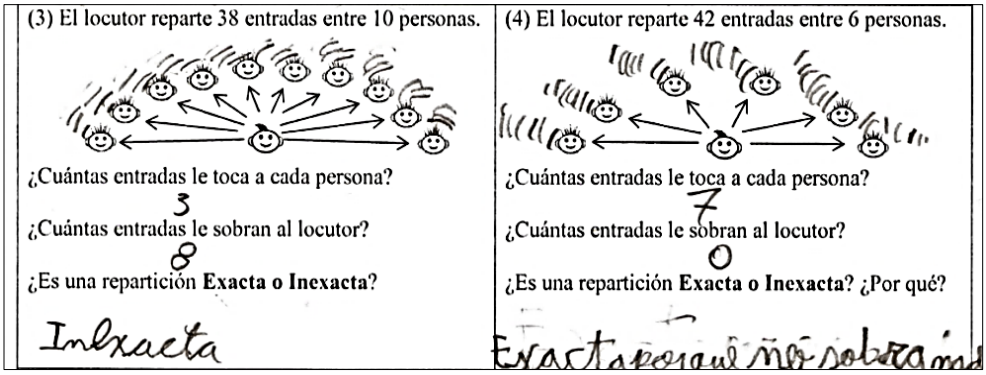


Figura 2. Ejemplo del estudiante 10

El trabajo anterior, presenta el ejemplo de un estudiante que para dar respuesta a lo planteado ha recurrido a un procedimiento de repartición equitativa y máxima, nuestro concepto primitivo. Notemos que da una justificación válida, de acuerdo al valor del residuo.

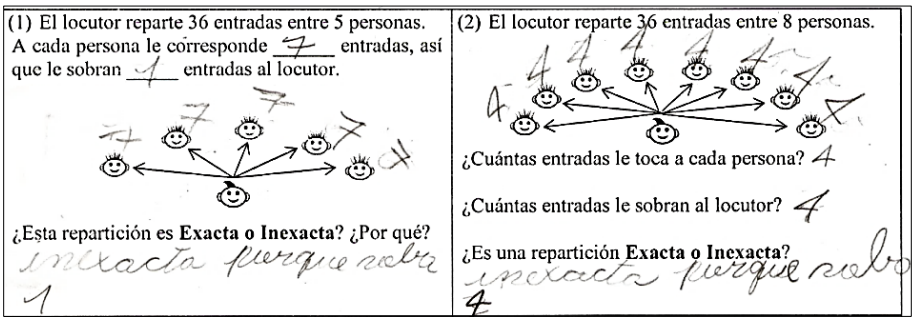


Figura 3. Ejemplo del estudiante 11

En la figura 3, creemos que el estudiante para dar respuesta a lo planteado recurre a dos nociones: reparticiones equitativas y máximas y, multiplicación. Justamente, el Currículo Nacional (2016) sugiere asociar la noción de la multiplicación con la división. Por otra parte, el estudiante en los dos casos presenta una justificación válida, según el resto obtenido.

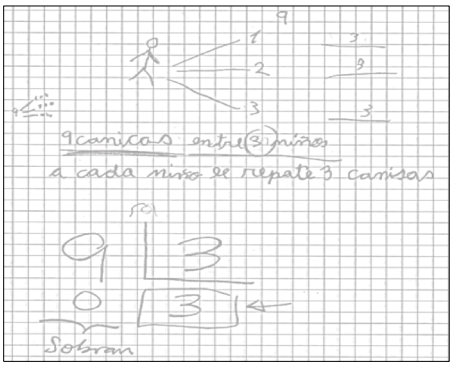


Figura 4. Ejemplo del estudiante 12

El estudiante 12 muestra claramente la vinculación entre las dos nociones: repartición equitativa y máxima (noción intuitiva), y la división de números naturales. Asimismo, evidencia como a partir de la noción intuitiva concibe la división y sus elementos (dividendo, divisor y residuo). Cabe aclarar que se orientó el uso de la notación de la división y se reforzó mediante el pedido de la creación de ejemplos de divisiones con esta nueva notación.

Conclusiones

Respecto al objetivo general, determinamos que las condiciones que permite la construcción de la noción de división son *la noción de repartición equitativa y máxima y, las justificaciones*. Estas dos condiciones se complementan, dado que la noción de repartición equitativa y máxima ha sido la base para la construcción de la división de números naturales, mientras que las justificaciones involucradas en los problemas han sido el medio para que se logre la construcción de dicho conocimiento. Asimismo, cabe señalar que la noción de repartición equitativa y máxima es un concepto intuitivo para los estudiantes, el cual permite con naturalidad asociar con la noción de división.

Coincidimos con lo manifestado por Reid (2011), las justificaciones (prueba) ha de ser vista como un vehículo para descubrir y construir conocimientos matemáticos. Consideramos

que este trabajo de investigación es una muestra clara que la enseñanza basada en justificaciones permite que los estudiantes logren construir sus propios conocimientos y, que consigan darle sentido y un gusto por aprender las matemáticas.

Notamos que la mayoría de los alumnos lograron darse cuenta de la relación existente entre el divisor y el residuo (esto al menos de manera implícita) y no memorizarse como muchos estudiantes de su edad lo hacen. En concreto, los estudiantes lograron justificar por qué el residuo no puede ser mayor o igual que el divisor. Asimismo, los estudiantes han logrado identificar los posibles valores del residuo y el valor máximo del residuo teniendo como información dada el valor del divisor. Este logro fue conseguido en base a la noción de repartición equitativa y máxima, gracias a la cual construimos la noción de división.

Asimismo, cabe resaltar que más del 50% (17 de los 24) de los estudiantes concibieron con facilidad el algoritmo de la división y en todo momento evidenciaron la vinculación con la noción de repartición equitativa y máxima.

Finalmente, nos sumamos a lo dicho por Stylianou (2011), la enseñanza de las matemáticas por medio de justificaciones (pruebas) en estudiantes de primaria es una oportunidad para que nuestros estudiantes puedan desarrollar su pensamiento matemático, explorar sus nociones intuitivas y construir los cimientos para que en los grados posteriores puedan realizar pruebas matemáticas.

Referencias y bibliografía

Bieda, K., Xueying, J., Drwencke, J., & Picard, A. (2013). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*

De Villiers, M. (2001). Papel e funcoes da demonstracao no trabalho como o sketchpad. 31-36. Key Curriculum Press.

Lay, S. (2009). Good proofs depend on good definitions: Examples and counterexamples in arithmetic. In F. Lin, F. Hsieh, G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), Proc. 19th Conf. of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study (Vol. 2, pp. 27-30). Taipei, Taiwan: ICMI.

Ordoñez, C. (2014). La construcción de la noción de división y divisibilidad de números naturales, mediada por justificaciones, en alumnos de tercer grado de nivel primaria. (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Perú, Ministerio de Educación (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf

Reid, D. (2011) Understanding proof and transforming teaching. In Wiest, L., & Lamberg, T. (Eds.) Proceedings of the Thirty-third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (pp. 15-30) Reno NV: University of Nevada.

Schifter, D. (2011). Representation-based Proof in the Elementary Grades. En Stylianou, D., Blanton M. & Knuth, E.(eds.). Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective.(cap.4, pp.71-86). New York: Routledge.

Stylianou, D., Blanton M. & Knuth, E. (2011), Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective. (pp.65-70). New York: Routledge.

Vallejo, E. (2012). Análisis y propuesta en torno a las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en el primer grado de secundaria. (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú

Álgebra y Funciones

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estructuras y generalización de estudiantes de segundo de primaria

María Dolores **Torres** González
Universidad de Granada
España
mtorresg@ugr.es
María C. **Cañadas** Santiago
Universidad de Granada
España
mconsu@ugr.es
Antonio **Moreno** Verdejo
Universidad de Granada
España
amorenoverdejo@gmail.com
Pedro **Gómez** Guzmán
Universidad de los Andes
Colombia
argeifontes@gmail.com

Resumen

En este estudio, caracterizamos el pensamiento funcional que evidencian alumnos de 2º de Educación Primaria (7-8 años). Ponemos de manifiesto la capacidad de los alumnos para identificar estructuras y generalizar en el contexto funcional del early algebra. Para ello, planteamos una tarea contextualizada que involucra la función lineal y=x+4, en sus formas directa e inversa durante entrevistas que realizamos tras un experimento de enseñanza. Describimos las estructuras evidenciadas en ambas formas de la función y el tipo de generalización que emplean los estudiantes. Destacamos que todos los estudiantes identificaron una estructura adecuada de la forma directa de la función, mientras que, en la forma inversa, hubo más dificultades. La mayoría de las generalizaciones se producen al preguntarles explícitamente por la generalización, tanto en la forma directa como la inversa de la función.

Palabras clave: pensamiento funcional, forma directa de una función, forma inversa de una función, estructura, generalización.

Antecedentes y marco teórico

Existe un interés por el estudio del pensamiento funcional que promueve en las aulas el estudio de regularidades, relaciones y propiedades matemáticas para permitir a los alumnos de edades tempranas explorar, predecir, modelizar, discutir y argumentar (Molina, 2009). La

función es el contenido matemático clave del pensamiento funcional siendo una regla que establece la relación entre dos variables que covarían (Thompson, 1994). El pensamiento funcional se centra en la relación entre dos variables, siendo fundamental el estudio de regularidades. La regularidad es lo que se repite y el reconocimiento de regularidades es esencial para generalizar ya que, a partir de una regularidad observada, se busca una regularidad que sea válida para más casos (Polya, 1966). A través de la identificación de la regularidad entre valores concretos de ambas variables, se puede llegar a generalizar. Existen investigaciones que exploran la generalización de estudiantes de Educación Primaria en contextos funcionales (e.g., Carraher y Schliemann, 2016; Pinto y Cañadas, 2017a) pero son escasos los estudios sobre cómo estudiantes de dicho nivel educativo perciben y generalizan la forma inversa de una función en edades tempranas. Ambas formas de una función tienen relación con los roles que tiene cada una de las variables implicadas en situaciones matemáticas. Una misma variable asume el rol de variable independiente para la forma directa y el de variable dependiente para la forma inversa, y viceversa. El estudio sobre como interpretan los estudiantes ambas formas de la función aporta también información sobre el desarrollo del pensamiento funcional. En este estudio proponemos una tarea que involucra la función y= x+4. Se trata de una función lineal, que es recomendada para trabajar con estudiantes de Educación Primaria (Carraher y Schliemann, 2016). La noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que expresan la generalización (Pinto y Cañadas, 2017a). Las estructuras pueden ser equivalentes desde el punto de vista semántico cuando representan la misma situación, aunque se expresen de forma diferente (English y Warren, 1998). Por ejemplo, x+4, x+2+2 y x+1+1+1+1 son expresiones semánticamente equivalentes.

Entre los investigadores que exploran la generalización de estudiantes de Educación Primaria en contextos funcionales, Torres, Cañadas y Moreno (2018) en un estudio centrado en las estructuras de la forma directa de una función y la generalización, analizaron las respuestas de los estudiantes a varias cuestiones sobre un problema contextualizado que involucraba la función lineal y =x+3. Los resultados muestran una variedad de estructuras identificadas por los estudiantes durante los casos particulares, 4 tipos de estructuras diferentes. Los 6 estudiantes de 2º de Educación Primaria de nuestro estudio, generalizaron verbalmente la relación involucrada. La mayoría generalizan la estructura correcta y emplean la misma estructura para casos particulares y para el caso general; observándose coherencia en sus respuestas y evidenciando capacidades en los estudiantes de 2º curso para identificar regularidades entre variables y generalizar. Sin embargo, las estructuras que se corresponden con cada una de las formas (directa e inversa de una función) son diferentes ya que la manera de expresarlas es distinta. Pinto y Cañadas (2017a) describen cómo 24 estudiantes de quinto de Educación de Primaria (10-11 años) perciben la forma inversa al trabajar con un problema que involucra una función. Concluyen que 10 estudiantes establecieron diferentes estructuras que involucran las variables en la función inversa. Por otra parte, 5 estudiantes generalizaron esta forma de la función. Son escasos los estudios sobre cómo estudiantes de Educación Primaria perciben y generalizan las formas inversas de las funciones y cómo lo hacen en comparación con su forma directa.

Las nociones de generalización y de estructura están relacionadas y permiten caracterizar el pensamiento funcional de los estudiantes. Para generalizar, se puede identificar la estructura a partir de casos particulares. Asumimos que generalizar es pasar de lo particular a lo general y

en ver lo general en lo particular (Mason, 1996). Para fomentar esta abstracción seguimos el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Partimos de situaciones que involucran casos particulares y, observando regularidades, es decir, identificando la estructura, se pretende llegar a la generalización. Diferentes autores distinguen entre distintos tipos de generalización. Asumimos la tipología identificada por Pinto y Cañadas (2017b), quienes distinguen entre generalización espontánea cuando la generalización se produce sin preguntar explícitamente por ella y generalización inducida cuando se produce al preguntar por el caso general. El diseño de las tareas o cuestionarios esperan su presencia en un momento más tardío dándose así una generalización espontánea (Pinto y Cañadas, 2017a). Nos centramos tanto en la forma directa como en la forma inversa de una función pues se considera que genera más dificultades que la directa y nos ayuda a indagar en el desarrollo del pensamiento funcional (MacGregor y Stacey, 1995). Nuestro objetivo general de investigación es describir cómo los estudiantes de 2º de Educación Primaria perciben la forma directa e inversa de una función al trabajar con un problema que involucra una relación lineal en el contexto funcional del early algebra. Nos centramos en 2º de primaria debido a que existen estudios previos que abordan la función directa e inversa en edades cercanas pero no en este nivel de Educación Primaria. Abordamos dos objetivos específicos: (a) identificar las estructuras que evidencian los estudiantes al generalizar la forma directa e indirecta de una función y (b) describir la generalización con base en esas estructuras.

Método

Llevamos a cabo un estudio de tipo cualitativo y de carácter exploratorio y descriptivo. Dentro del panorama de la investigación de diseño desarrollamos un experimento de enseñanza con sesiones de trabajo y entrevistas individuales (Steffe y Thompson, 2000). En este trabajo nos centramos en la información proveniente de una entrevista realizada a seis estudiantes al final de las sesiones del experimento de enseñanza. Para alcanzar nuestros objetivos de investigación, describimos las diferencias observadas en cuanto a las estructuras identificadas tanto en la forma directa como inversa de la función como también las generalizaciones expresadas atendiendo a si son espontáneas o inducidas.

Participantes

Los sujetos de este estudio son seis estudiantes de segundo de Educación Primaria (7-8 años) en España a los que realizamos una entrevista individual semiestructurada. Sus conocimientos previos son: números del 0 al 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con llevadas. Seleccionamos a estos estudiantes de un grupo de 24 al que aplicamos un cuestionario inicial con preguntas donde se involucraba la función $y=x+3$ en una tarea de generalización contextualizada. Según las respuestas de los alumnos, seleccionamos a seis de ellos, teniendo en cuenta las recomendaciones de la profesora y según hubiera avanzado en el proceso de generalización.

Instrumento de recogida de información

Cinco sesiones de trabajo constituyeron el experimento de enseñanza y fueron videograbadas. Además hemos realizado unas entrevistas semiestructuradas individuales a los seis estudiantes al finalizar las sesiones.

Sesiones de clase

En cada sesión planteamos una tarea de generalización con contextos diferentes y funciones lineales distintas, como presentamos en la Tabla 1.

Tabla 1

Características de la sesiones de clase

Contexto	Función
Sesión 1: máquina de bolas	y = x+3
Sesión 2: parque de atracciones 1º	
Sesión 3: parque de atracciones 2º	y = 2x+1
Sesión 4: cumpleaños	y = 2x
Sesión 5: paradas de tren	

Las funciones siguen una estructura aditiva y/o multiplicativa. Iniciamos la tarea preguntando por casos particulares del problema y, pasando por nuevos casos particulares, llegábamos a preguntar por la generalización. Algunas tareas tienen contextos novedosos y otras provienen de estudios previos que incluimos en nuestros antecedentes. En todas las sesiones del experimento usamos la misma dinámica, a saber; en primer lugar exponemos la tarea en gran grupo, después aplicamos los cuestionarios específicos de cada sesión y, por último, una puesta en común. Cada cuestionario consta de preguntas sobre una tarea de generalización diferente dada por los contextos que aparecen en la Tabla 1. Los estudiantes no recibieron realimentación sobre sus respuestas. Al aula entraron tres miembros del equipo de investigación: la profesora- investigadora, una investigadora de apoyo y otro investigador que grabó con la videocámara.

Entrevistas

Analizamos la información proveniente de una entrevista semiestructurada realizada tras el trabajo de las cinco sesiones. En la entrevista planteamos tareas que involucran una función lineal de tipo aditivo, usamos como contexto la edad de dos superhéroes cuya diferencia son 4 años (función y =x+4). Un miembro del equipo de investigación fue el entrevistador, quien comenzó introduciendo el contexto de la tarea. A continuación les mostró casos particulares (no consecutivos para evitar la recursividad en las respuestas de los estudiantes) de la tarea y avanzamos inductivamente hacia la generalización. En la Figura 1 presentamos una síntesis del protocolo de actuación de la entrevista.

FORMA DIRECTA

1º Casos particulares

- Identificar relación funcional.
- Aplicar regla funcional en casos particulares diferente

1. Casos particulares dados

   Cuando Iron Man cumplió 5 años, el Capitán América cumplió 9 Cuando Iron Man cumplió 7 años, el Capitán América cumplió 11

2. Casos particulares propuestos por el estudiante.

   Dime una edad para Iron Man (_). Si cumple esos años ¿Cuántos años cumple el Capitán América?

2º Generalización

- Expresar la generalización

¿Cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocer la edad del Capitán América?

- Razonar con la generalización

Un niño de la clase dice que "Cuando Iron Man tiene XX años, el Capitán América tiene YY años

¿Estás de acuerdo con él?

FORMA INVERSA

1º Casos particulares

- Identificar relación funcional.
- Aplicar regla funcional en casos particulares diferente

1. Casos particulares dados

   Cuando el Capitán América cumplió 5 años ¿cuántos cumplió Iron Man? Cuando el Capitán América cumplió 8 años ¿cuántos cumplió Iron Man?

2. Casos particulares propuestos por el estudiante.

   Dime una edad para el Capitán América (_). Si cumple esos años ¿Cuántos años cumple Iron Man?

2º Generalización

- Expresar la generalización

¿Cómo le explicarías a un amigo que ha de hacer para conocer la edad de Iron Man?

- Razonar con la generalización

Un niño de la clase dice que "Cuando el Capitán América tiene XX años, Iron Man tiene YY años

¿Estás de acuerdo con él?

Figura 1. Protocolo de la entrevista.

Análisis de datos

Tras transcribir las entrevistas, diseñamos un sistema de categorías basado en las estructuras identificadas por los estudiantes, tanto en los casos particulares presentados como en el caso general, y para las formas directa e inversa de la función. Consideramos que un estudiante identifica una estructura cuando responde a dos o más cuestiones siguiendo la misma regularidad o cuando generaliza. Tenemos en cuenta el tipo de generalización expresada; inducida y/o espontánea.

Resultados

Presentamos los resultados sobre estructuras evidenciadas tanto en preguntas que involucran casos particulares como las que involucran el caso general a través de tablas-resumen, que complementamos con algunos ejemplos de las respuestas dadas por los estudiantes. Detallamos las estructuras evidenciadas en la forma directa e inversa de la función a tratar. Cada estudiante puede evidenciar diferentes estructuras a lo largo de entrevista; recogemos las estructuras de cada estudiante según su orden cronológico de aparición. Expresamos las estructuras identificadas por los estudiantes mediante simbolismo algebraico, aunque ellos no emplearan ese sistema de representación, como veremos en los ejemplos posteriores. En la Tabla 2 presentamos los resultados relativos a la forma directa de la función.

Tabla 2

Estructuras identificadas en la forma directa de la función

	Estructura	
Estudiante	Casos particulares	Caso general
E1	y = x + 4	y = 4x y= x + 4
E2	y = x + x y = x + 4	y =x + 4
E3	y = x + 4	y =x + 4
E4	y = x + 4 y = x + x	y= x + 4
E5	y = x + 4	y = x + 4
E6	y = x + 4	y = x + 4

Un mismo estudiante evidenció entre una y dos estructuras diferentes. Entre los casos particulares y el caso general, observamos tres tipos diferentes de estructuras: x+4, 4x y x+x. Señalamos los casos dados por E2 y E4 que ofrecieron la misma variedad de estructuras; identificaron una relación dada por el doble, en la forma x+x, para los casos particulares e identificaron la estructura correcta en el caso general.

Los estudiantes expresaron verbalmente la generalización. En sus generalizaciones (ver Tabla 2, columna 3) identificamos las estructuras 4x y x+4. Esta última evidenciada por los seis estudiantes. En el caso E1, el estudiante expresó inicialmente que hay que "multiplicar por 4 para obtener la edad del superhéroe mayor. Esto es un indicio de dificultad apreciada en diferenciar una estructura aditiva de otra multiplicativa. Destacamos ahora el caso E4 que generaliza bajo la relación x+4 expresando: "hay que sumar más 4". Los estudiantes, E2 y E3 expresaron que deben "sumar más 4". E1 generalizó cuestiones relativas tanto a casos particulares (generalización espontánea) como generales (generalización inducida). E2, E3, E4, E5 y E6 solo generalizaron de manera inducida. Por ejemplo E5 explicó en el caso general: "Iron Man tiene 4 años menos que el Capitán América y el Capitán América tiene 4 años más que Iron Man. Se llevan 4 años". E6 generaliza expresando: "Si yo sé cuántos años tiene Iron Man y me dice que el otro tiene más 4 que él pues hago una suma de 5+4 y sale 9". En el siguiente fragmento observamos la generalización espontánea de E1, observada durante preguntas sobre casos particulares.

E (Entrevistador): cuando Iron Man cumplió 5 años el Capitán América cumplió 9, cuando Iron Man cumplió 7 años el Capitán América cumplió 11 y cuando Iron Man cumplió 3 años el Capitán América cumplió 7 años. ¿Puedes decirme alguna relación entre esos números?

E1 (Estudiante1): el Capitán América siempre le gana por 4 años más

En la Tabla 3 presentamos los resultados relativos a la forma inversa de la función.

Tabla 3

Estructuras identificadas en la forma inversa de la función

	Estructura	
Estudiante	Casos particulares	Caso general
E1	x = y - 4	NR
E2	x = 2y	NP
E3	x= y - 4	x= y - 4
E4	NP	NP
E5	x = y - 4	x = y - 4
E6	x = y - 4	x = y - 4

NR: no responde; NP: no se le pregunta.

Observamos que cada estudiante evidenció una sola estructura a lo largo de la entrevista. En total, observamos dos tipos diferentes de estructura incluyendo tanto las dadas en los casos particulares como en el caso general: y-4 y 2y. Todos evidenciaron la estructura y-4 en algún momento de su trabajo tanto en los casos particulares como en el general salvo E2, quien identificó la estructura 2y y E4 al que no se le preguntó por la forma inversa por haberse encontrado cansado y disperso en ese momento de la entrevista. Lo hemos notado mediante NP. En este caso, E2 identificó 2y (estructura equivalente) en lugar de y+y para los casos particulares. En cuanto a la generalización, los estudiantes la expresaron verbalmente. Distinguimos también en el estudio de la forma inversa de la función entre generalización inducida y espontánea. E1 no respondió en esa ocasión a la pregunta del caso general por eso notamos su respuesta con NR. A E2 y E4 no se les preguntó por el caso general ya que se encontraban distraídos en esta última parte de la entrevista y era difícil llevarla a cabo. Notamos esta situación mediante NP. Las generalizaciones dadas por los estudiantes E3 y E6 son inducidas. E6 expresaba "antes sumaba y ahora resto, yo siempre estoy restando 4". Otro ejemplo de este tipo de generalización lo da E3:

E: ¿Cómo explicarías cómo calcular la edad del Capitán América conociendo la de Iron Man? E3: cuando nació Iron Man tenía el Capitán América 4 años y después vas sumando los años. Entrevistador: ¿qué has hecho tú?

E3: una resta, aquí: 9-4, 8-4, 352-4.

Por otro lado, E5, generalizó de ambas formas: espontánea e inducida. "Antes sumaba 4 ahora resto 4" (generalización espontánea). A la pregunta que le realizamos en el caso general E5 contestó: "Siempre resto 4" (generalización inducida).

Conclusiones

Tras el análisis de los datos evidenciamos capacidades en los niños de 2º de Educación Primaria de este estudio para evidenciar estructuras involucradas en tareas de generalización que involucran funciones lineales, para las formas directa e inversa de la función. Del mismo modo que ocurre en Torres, Cañadas y Moreno (2018), los 6 estudiantes entrevistados en este estudio han identificado la estructura correcta de la relación funcional en al menos una ocasión a lo largo de la entrevista durante el estudio de la forma directa de la función tanto en los casos particulares como en el general. No obstante, los resultados sobre las estructuras identificadas durante el estudio de la forma inversa de la función son menos homogéneos. De los 6 estudiantes entrevistados cuatro identifican la estructura correcta en los casos particulares y tres en el caso general. Encontramos respuestas más incoherentes e imprecisas en el estudio de la forma inversa siendo estos resultados coherentes con los de Pinto y Cañadas (2017a). Las preguntas correspondientes se hicieron al final de la entrevista pudiendo influir la motivación o cansancio de los niños. La variedad y cantidad de estructuras identificadas es mayor durante el estudio de la forma directa de la función. La estructura x+x es evidenciada por dos estudiantes en el trabajo con casos particulares de la forma directa de la función. No identificamos estructuras equivalentes para el caso x+4 con la forma directa de la función. Se puede deber al predominio de la estructura aditiva sobre la multiplicativa. Sin embargo, con la forma inversa de la función encontramos la estructura 2y, equivalente a y+y, en una ocasión, durante el trabajo con los casos particulares. En cualquier caso, la generalización más frecuente ha sido la generalización inducida en forma directa de la función (5 de 6 estudiantes). Tan solo E1 generaliza en las formas espontánea e inducida. Durante el estudio de la forma inversa son 2 de los 3 estudiantes que responden los que presentan un tipo de generalización inducida. Es E5 quien presenta generalización espontánea e inducida. Pinto y Cañadas (2017a, 2017b) indagan en las respuestas de niños mayores a los de 2º de Educación Primaria obteniendo evidencias de generalización y por ende de capacidades relacionadas con el pensamiento funcional. Nosotros concluimos con que ahora también existen capacidades en niños de nivel de 2º de Educación Primaria. Quedaría pendiente de estudio la interpretación de los estudiantes sobre las estructuras tratando con otro tipo de función en un contexto diferente para poder valorar si la dificultad añadida en la identificación de la forma inversa de la función depende de su forma aditiva.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias y bibliografía

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in Mathematics Education. Third edition* (pp. 191-218). New York, NY: Routledge.

English, L. y Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7*(1), 69-85.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017a). Generalization in fifth graders within a functional approach. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapur: PME.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017b). Functional thinking and generalization in third year of primary school. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 472−479). Dublin, Irlanda: DCU Institute of Education and Erme.

Pólya, G. (1966). Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid, España: Tecnos

Steffe, L. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: LAE.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz- Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 574-583). Gijón, España: SEIE

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Pensamiento funcional en estudiantes de quinto grado de primaria cuando resuelven actividades con patrones numéricos

Genny Rocío **Uicab** Ballote
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
rocio.uicab@cinvestav.mx
Montserrat **García**-Campos
Universidad Pedagógica Nacional
México
mgarciac@g.upn.mx

Resumen

Esta comunicación presenta los resultados preliminares de una investigación, que indaga sobre cómo se manifiesta el pensamiento funcional en estudiantes de entre 10 y 12 años cuando resuelven actividades con patrones numéricos que involucran funciones de dos variables. Se asume presencia de pensamiento funcional cuando los estudiantes pueden expresar una correspondencia entre las dos cantidades variables involucradas. En este documento se reportan resultados del análisis de las respuestas a 13 actividades aplicadas a 31 estudiantes de una escuela primaria pública en Tekit, Yucatán, México.

Palabras clave: pensamiento funcional, patrones numéricos, correspondencia, niños de 10-12 años.

Introducción

El interés en fomentar el pensamiento algebraico en estudiantes de edades tempranas (estudiantes de Educación Primaria) no es una idea nueva, en la última década ha habido un mayor énfasis y también aceptación para desarrollar ideas algebraicas en estas edades. Existen trabajos de investigación que reportan cómo diversos niños de educación primaria generan estrategias, argumentan y justifican ciertas tareas matemáticas que le son presentadas, evidenciando en ellos, ideas algebraicas (e.g. Kieran, 2004; Carraher, Schlieman, Brizuela y Earnest, 2006; Blanton y Kaput, 2011; Brizuela y Blanton, 2014).

De acuerdo con Tanişli (2011) uno de los componentes básicos del pensamiento algebraico es el pensamiento funcional. En edades tempranas dicho pensamiento implica centrarse en la relación entre dos cantidades variables; de este modo el pensamiento funcional puede contribuir al estudio de conceptos algebraicos como el de función (Blanton y Kaput, 2004). No se trata de introducir las funciones como se trabajan en educación secundaria, sino de

aprovechar el potencial de este contenido matemático para promover el pensamiento funcional desde edades tempranas.

El presente trabajo expone cómo las respuestas de estudiantes de quinto grado de una escuela primaria en Tekit, Mérida, México, proporcionan evidencia de su pensamiento funcional, cuando resuelven actividades con patrones numéricos que involucran dos variables.

Marco de referencia

Pensamiento funcional

El concepto de pensamiento funcional fue usado por primera vez a finales del siglo XIX, principios del siglo XX por el matemático alemán Felix Klein, quien fuera líder en el movimiento de reforma de la educación matemática en Europa. Klein consideraba el pensamiento funcional como la idea central de la enseñanza matemática (Eisenmann, 2009). El foco de atención de este pensamiento son las funciones, pues la noción de función es uno de los conceptos matemáticos más importantes, siendo tema de interés para la Matemática Educativa. En la mayoría de los países este concepto aparece en el currículo a partir de la secundaria.

Existen enfoques y posturas respecto al pensamiento funcional. Para Blanton, Levi, Crites & Dougherty (2011), fomenta la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas y puede caracterizarse como el proceso de construcción, descripción y razonamiento en torno a las funciones. Si bien el pensamiento funcional incluye generalizar las relaciones funcionales entre cantidades y representar y razonar con esas relaciones para comprender el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011); Warren y Cooper (2005) hacen notar que las primeras pautas del pensamiento funcional pueden incluir ideas de cambio cualitativo (“soy más alto”), cambio cuantitativo (“soy 2 cm más alto”), relaciones entre esos cambios (si todos crecieron en la misma cantidad de cm y Juan cambió de altura de 143 a 145 cm, ¿cuánto creció Pedro?) y el uso de esas relaciones para resolver problemas (si la altura de Alison ahora es 133 cm, ¿qué altura tenía antes de que creciera?). También ayuda a desarrollar la comprensión de las relaciones entre las operaciones, particularmente la relación inversa (por ejemplo, la suma y la resta son operaciones inversas). Estos últimos autores reconocen que cuando los niños trabajan con actividades en las que pueden hacer conexiones entre las diversas operaciones, explorar el cambio con relaciones aritméticas, tienen oportunidades para conjeturar y argumentar, lo cual contribuye desde edades tempranas al pensamiento funcional en etapas posteriores.

Por lo general, en la educación primaria se da poco énfasis a las relaciones y transformaciones matemáticas como objetos de estudio. Para trabajar con relaciones y transformaciones matemáticas es necesario el concepto de función: cómo el valor de ciertas cantidades se relacionan con el valor de otras cantidades o cómo los valores son cambiados o mapeados (transformados) hacia otras cantidades (Warren y Cooper, 2005).

Para Smith (2008) el pensamiento funcional es el pensamiento representacional que se enfoca en las relaciones entre dos (o más) cantidades que varían, específicamente los tipos de pensamiento que conducen desde relaciones específicas (instancias individuales) a generalizaciones de dichas relaciones. Este autor hace una distinción entre dos tipos de pensamiento algebraico: pensamiento representacional y pensamiento simbólico. El pensamiento simbólico es considerado como la manera en que uno entiende y usa un sistema de símbolos. El pensamiento representacional es reservado para designar el proceso mental a través del cual un

individuo crea un significado referencial para algún sistema representacional. En edades tempranas, el principal interés está en el pensamiento representacional, en cómo los niños crean representaciones significativas, y al hacerlo construyen y expresan generalizaciones. El pensamiento funcional ocurre cuando los niños inventan o se apropian de sistemas de representación para representar una generalización de una relación entre cantidades variables.

Entre las actividades que pueden contribuir al desarrollo del pensamiento funcional en edades tempranas están las que involucran patrones numéricos.

Patrones numéricos

Un patrón matemático se puede describir como cualquier regularidad predecible, generalmente involucrando relaciones numéricas, espaciales o lógicas. En cada patrón, los diversos elementos están organizados de manera regular. Por ejemplo, en el patrón creciente de los números cuadrados 0, 1, 4, 9,..., los números aumentan en 1, 3, 5..., respectivamente, resultando la secuencia de números impares. La estructura matemática que subyace a un patrón matemático puede expresarse en forma de generalización –relación numérica, espacial o lógica– la cual es verdadera para cierto dominio (Mulligan y Micheltmore, 2009).

Las actividades con patrones pueden conducir al desarrollo temprano del pensamiento funcional (Warren y Cooper, 2006). Sin embargo, es importante considerar patrones en los que se involucran dos o más cantidades simultáneamente, es decir, prestar atención a cómo dos o más cantidades varían simultáneamente (Blanton y Kaput, 2004). En una relación funcional pueden identificarse las relaciones entre el patrón numérico y su posición, las cuales pueden generalizarse mediante una regla que permita encontrar cualesquiera valores, por ejemplo, el de la variable dependiente dado el valor de la variable independiente.

Objetivo de investigación

Se pretende dar cuenta del pensamiento funcional que manifiestan estudiantes de 10 a 12 años cuando resuelven actividades que involucran funciones de dos variables con patrones numéricos y en situaciones en contexto.

Metodología

El estudio es de naturaleza cualitativa (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Con el fin de obtener información de cómo se manifiesta el pensamiento funcional se analizan las producciones de los estudiantes (en su propio lenguaje) a las tareas que les fueron presentadas.

Participantes

Las actividades fueron aplicadas en diferentes fechas (durante el ciclo escolar 2017-2018), a 31 estudiantes que en ese momento tenían entre 10 y 11 años, inscritos en quinto grado de primaria en una escuela pública, ubicada en el municipio de Tekit, Yucatán, México. Las actividades fueron entregadas impresas, los estudiantes trabajaron de manera individual y no hubo intervención por parte del investigador. Se les explicó que se requería su participación para resolver unas actividades, se les solicitó leer las instrucciones cuidadosamente y exhortó resolver de acuerdo a lo que entendieran de las actividades, sin embargo también se les externó que en caso de no poder resolver alguna pregunta podían dejarlo en blanco o escribir un comentario como “no lo entendí” o “no supe qué hacer”.

Etapas para la toma de datos

Se consideran dos etapas para la toma de datos. La primera etapa, que hemos denominado diagnóstica, se conforma del diseño y aplicación de 13 actividades que involucran funciones de dos variables, de la forma $f: N \to N$. Con base en el análisis de las respuestas obtenidas en la primera etapa, algunos estudiantes serán seleccionados para llevar a cabo la segunda etapa que consistirá en una entrevista semiestructurada a través del diseño y aplicación de actividades de situaciones en contexto, que permitan indagar diversos aspectos que caractericen el pensamiento funcional que subyace en los estudiantes.

En este documento se reportan los resultados de la primera etapa cuya finalidad consistió en saber si los estudiantes pueden identificar y describir las relaciones de correspondencia entre las variables. Se centra la atención en si pueden establecer la relación entre dos conjuntos y la manera en que escriben la regla que la representa, ya sea en lenguaje natural o pre simbólico.

Diseño de las actividades de la primera etapa

Las 13 actividades se caracterizan de la siguiente forma. Cabe señalar que este tipo de actividades no forman parte del currículum oficial, fueron diseñadas para la investigación.

- De la 1 a 8 involucran a las funciones $f(x) = x$, $f(x) = 2x$, $f(x) = 2x - 1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = 3x$, $f(x) = x + 3$, $f(x) = 4x$, $f(x) = x + 4$. Se presenta el patrón numérico mediante una figura con puntos y se especifica el número de la figura correspondiente (relación de correspondencia entre el número de puntos de la figura y el número de figura). Se promueven un razonamiento inductivo para encontrar una regla de correspondencia que no se solicita explícitamente, pero que podría evidenciarse en el inciso e) al pedir el número de puntos para una figura que se encuentra alejada de las demás (ver Figura 1). Según Polya (1965) el razonamiento inductivo conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y sus combinaciones.
- Las actividades 9 y 10 involucran a las funciones $f(x) = 2x$, $f(x) = x + 2$. A diferencia de las primeras 8 actividades, se presenta el patrón con valores y se asocia a cada valor su posición. Nuevamente se promueve un razonamiento inductivo, pero el énfasis de estas actividades está en la generalización. La característica central de estas actividades es la solicitud explícita de una regla (ver Figura 2).
- Las actividades 11 a 13 involucran a las funciones $f(x) = 2x$, $f(x) = x + 2$, $f(x) = 4x$. La información se presenta a través de tablas horizontales y verticales. La característica principal de estas actividades son pequeñas situaciones en contexto. Se espera que los estudiantes puedan apreciar diferentes presentaciones de algunas funciones, por ejemplo: $f(x) = 2x$ y $f(x) = x + 2$ que aparecen en los tres grupos de actividades. También se pretende que los estudiantes encuentren –mediante la regla aritmética– no sólo la variable dependiente a partir de la independiente, sino también inversamente (ver Figura 3).

Análisis y Resultados

El análisis de las 13 actividades se realizó en dos direcciones:

- Se examinaron todos los incisos de cada actividad como ítems individuales –excepto los incisos a) y b) de las actividades 1 a 8 en virtud de que son preámbulo para promover la

relación funcional–. Bajo esa consideración se tiene el registro de 37 respuestas por cada estudiante. En la Tabla 1 se presentan las respuestas clasificadas de cada estudiante.

- Se examinaron todas las actividades desde su primer inciso hasta el último para apreciar el proceso que guía a un estudiante a establecer o no una relación de correspondencia.

Tabla 1

Clasificación de las respuestas de los estudiantes.

E	S/R	S/C	R	RAI	RAE	Total
E1	0	12	19	5	1	37
E2	4	25	4	4	0	37
E3	0	25	8	4	0	37
E4	0	6	10	15	6	37
E5	12	19	4	2	0	37
E6	0	0	16	14	7	37
E7	0	9	9	14	5	37
E8	0	0	11	19	7	37
E9	0	1	8	16	12	37
E10	0	8	17	11	1	37
E11	2	28	5	2	0	37
E12	0	8	7	16	6	37
E13	0	11	11	9	6	37
E14	0	5	18	8	6	37
E15	0	5	17	12	3	37
E16	0	0	7	16	14	37
E19	2	17	8	8	2	37
E20	2	15	10	8	2	37
E21	1	10	13	12	1	37
E22	0	6	16	10	5	37
E23	0	5	14	17	1	37
E24	0	23	5	9	0	37
E25	10	12	8	6	1	37
E26	0	17	13	7	0	37
E27	1	11	17	7	1	37
E28	0	19	14	4	0	37
E30	0	30	4	3	0	37
E31	0	29	6	2	0	37

Notas: E=Estudiante; S/R=Sin respuesta; S/C=Sin clasificar; R=Recursión; RAI=Respuesta Aritmética Implícita; RAE=Respuesta Aritmética Explícita. Los estudiantes E17, E18 y E29 contestaron en promedio 5 actividades porque solían faltar a clases, por tal motivo se consideró omitirlos.

Se identificaron tres formas de resolver las actividades:

- Recursión (R). Encontrar el valor n de la variable dependiente, apoyándose del resultado $n-1$, obtenido anteriormente.
- Regla aritmética implícita (RAI). Encontrar el valor n de la variable dependiente sin apoyarse del valor $n-1$ (recursivamente). Se interpreta el uso de una regla aritmética que relaciona a las dos variables involucradas pero, o no hay procedimientos que den cuenta de la regla o son imprecisos. Algunas respuestas suelen expresar solamente la variación de la variable dependiente (quizá esto se deba a la especificidad de las preguntas, pero se considera que implícitamente sí se relacionan a las variables).
- Regla aritmética explícita (RAE). Identificar y escribir –en lenguaje natural o pre simbólico– la relación (regla) entre las dos variables involucradas.

La referencia S/R indica que el estudiante escribió comentarios del tipo "no sé"; "éste se me complicó"; o es una pregunta que quedó sin contestar. S/C compete a una respuesta sin poder clasificar en alguna de las anteriores, por ejemplo: para la actividad cuya función es $f(x)=x+4$, (x: número de la figura, $f(x)$: número de puntos) ante la pregunta ¿cuál es el número de puntos que tiene la figura 80? un estudiante respondió "pones 2 bolitas de 80".

A continuación, se exponen las producciones de tres estudiantes con respuestas R, RAI y RAE.

El estudiante E9 en la actividad 2 (ver Figura 1), responde correctamente los incisos a) y b), se puede decir partir de lo que respondió que hay un proceso recursivo (R). En los incisos c) y d) realiza una generalización y establece una regla aritmética implícita (RAI) que le permite

encontrar el número de puntos para las figuras 10 y 25. La regla se hace explícita (RAE) en lenguaje natural al explicar cómo ha encontrado el número de puntos para la figura 100. E9 escribe: "[…] el número de figura es (debió escribir 'se')[1] multiplica en 2 y da el resultado". Lo anterior es evidencia de que E9 encuentra una relación entre el número de la figura (valor 100, que compete a la variable independiente) la cual debe multiplicarse por 2 para obtener un resultado (valor 200, que corresponde a la variable dependiente: número de puntos de la figura).

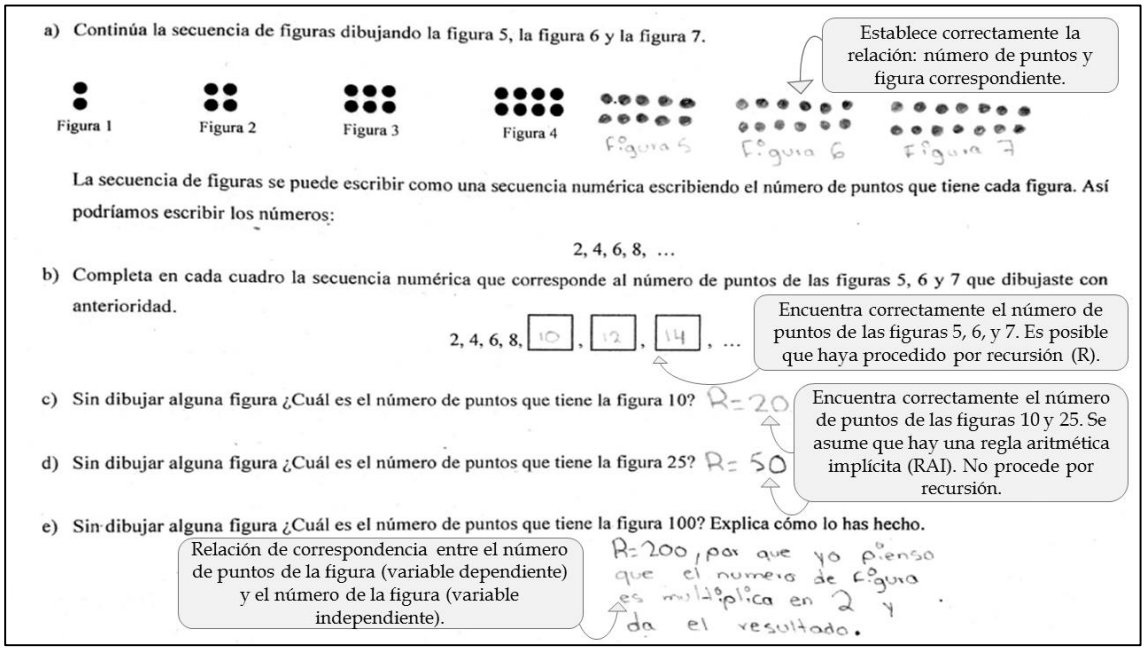


Figura 1. Respuestas de E9 en la Actividad 2. La función involucrada es $f(x) = 2x$.

El estudiante E15 en la actividad 9 empieza resolviendo el inciso a) de forma recursiva (R) explicando en el inciso b) que los números de la secuencia numérica se obtienen "sumando 2" (ver Figura 2). Cuando plantea la regla (inciso c) que permite encontrar cualquier número de la secuencia escribe en lenguaje natural: "Multiplicando por 2 el término que tiene"; esto es, puede generalizar mediante un razonamiento inductivo (en el sentido de Polya). Posteriormente en el inciso d) aplica la regla que proporcionó de forma operativa "500 x 2 = 1000", este procedimiento da evidencia de la relación que establece entre el valor que toma la variable independiente (500) con el valor resultante de la variable dependiente (1000) (RAE). Finalmente (inciso e), propone un término de la secuencia numérica y encuentra el número que le corresponde. Al hacer uso de su regla se considera, que hay evidencia de que E15 entiende que la regla expresa generalidad, es decir, con ella puede encontrar cualquier valor de la secuencia.

El estudiante E6, en la actividad 13, para encontrar la cantidad de kilos de mango que se pueden adquirir con 200 pesos resuelve mediante una proporción. La resolución de una igualdad de razones, en este caso $\frac{(200)(1)}{4} =$ Número de kilos de mango (ver Figura 3), involucra la relación entre las variables cantidad y costo (RAE). E6 también encuentra correctamente la cantidad y costos faltantes lo que manifiesta conexión entre la multiplicación y división como operaciones inversas. Asimismo, incluye los símbolos "k" y "$" para denotar kilos y costo

[1] Comentario del investigador.

respectivamente, lo que evidencia que puede expresar la relación entre las variables con lenguaje pre simbólico.

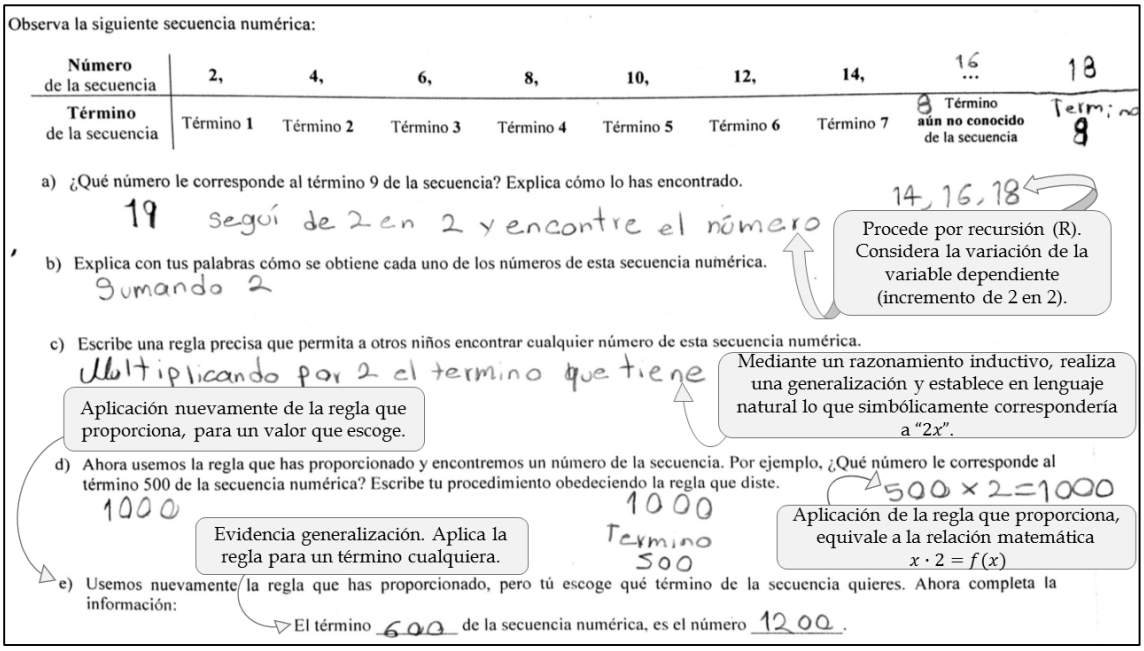


Figura 2. Respuestas de E15 en la Actividad 9. La función involucrada es $f(x) = 2x$.

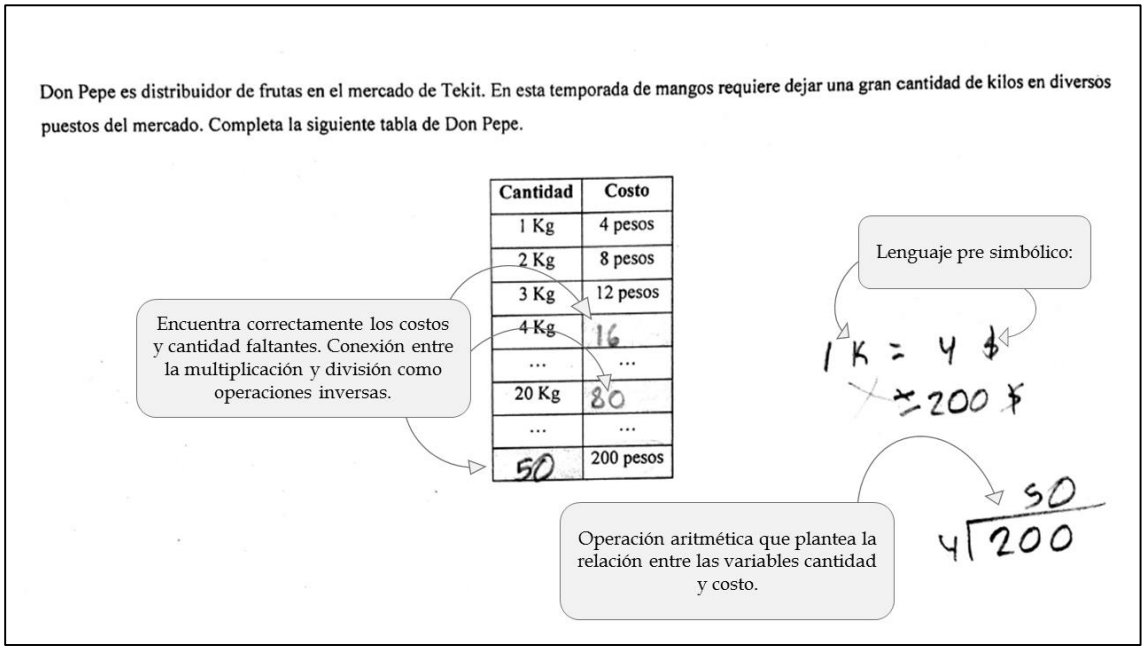


Figura 3. Respuestas de E6 en la actividad 13. La función involucrada es $f(x) = 4x$.

Reflexiones

De manera general se puede decir que los resultados del análisis de las respuestas de la etapa diagnóstica, muestran que algunos niños de quinto grado de primaria logran establecer las

relaciones entre dos variables, expresándolas en lenguaje natural. Aunque inicialmente suelen proceder de forma recursiva para encontrar una a una las relaciones, algunos de ellos pueden identificar la relación general de correspondencia y establecer una regla usando lenguaje pre simbólico. Lo anterior puede considerarse evidencia de su pensamiento funcional en una etapa básica de desarrollo.

Referencias

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. In *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: Bergen University College.

Blanton, M. L.; & Kaput, J. J. (2011). *Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades*. In Cai, J. & Knuth, (Eds.), Early Algebraization, Advances in Mathematics Education, 5-24. London: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. In B. J. Dougherty & R. M. Zbiek (Eds.), Essential understandings series. National Council of Teachers of Mathematics: Reston, VA.

Brizuela, B. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP)*, (14), 37-57.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

Eisenmann, P. (2009). A contribution to the development of functional thinking of pupils and students. *The Teaching of Mathematics*, *22*(2), 73-81.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill Interamericana: México.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Mulligan J. & Micheltmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49. http://dx.doi.org.10.1007/BF03217544

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas (reimp. 2002).

Puig, L. (2001). *Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal*. Textos Seleccionados. México: CINVESTAV.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics. http://dx.doi.org/10.4324/9781315097435

Tanişli, D. (2011). Functional Thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*, 206-223.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case of study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150-162. https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5

Warren, E. y Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9–14.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Razonamiento Covariacional al estudiar la función por partes mediado por GeoGebra

Álvaro Javier **Saa-Vernaza**
Universidad del Cauca.
Colombia.
saa_0401@hotmail.com
Edinsson **Fernández-Mosquera**
Universidad de Nariño.
Colombia.
edinfer@udenar.edu.co

Introducción

En diferentes investigaciones centradas en la noción de función y su enseñanza (Ferrrari & Farfán, 2008; Saa & Trochez, 2013), se evidencia la limitación exclusiva a la representación algebraica y se emplea el cambio al gráfico como un paso consecutivo sin dar importancia al análisis de la correspondencia directa entre dos cantidades que varían entre sí, entonces es necesario que los docentes busquen alternativas para la enseñanza de este objeto matemático, teniendo en cuenta contextos que modelen situaciones reales y así reconocer las características específicas de cada función, como forma particular de covariación. En este poster, se presenta avances de una investigación de Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Cauca, en Colombia, la cual pretende caracterizar los niveles de razonamiento covariacional asociadas a la función por partes cuando se resuelven situaciones mediadas por GeoGebra.

Algunas consideraciones del Razonamiento Covariacional

La covariación permite la comprensión del concepto de función cuando se trabaja a partir de *actividades cognitivas* que involucran la coordinación de dos cantidades variantes, atendiendo así la forma en cómo cambia una variable con respecto de la otra. Cabe resaltar que Thompson & Carlson (2017), describen la manera en que el razonamiento covariacional ha evolucionado como una construcción teórica en Educación Matemática a partir del trabajo individual y colectivo de muchos investigadores en las últimas dos décadas, proporcionando un marco fraccionado en dos partes, uno que describe los niveles de Razonamiento Variacional y el otro el Covariacional, asimismo, los comportamientos y la capacidad de razonar del estudiante.

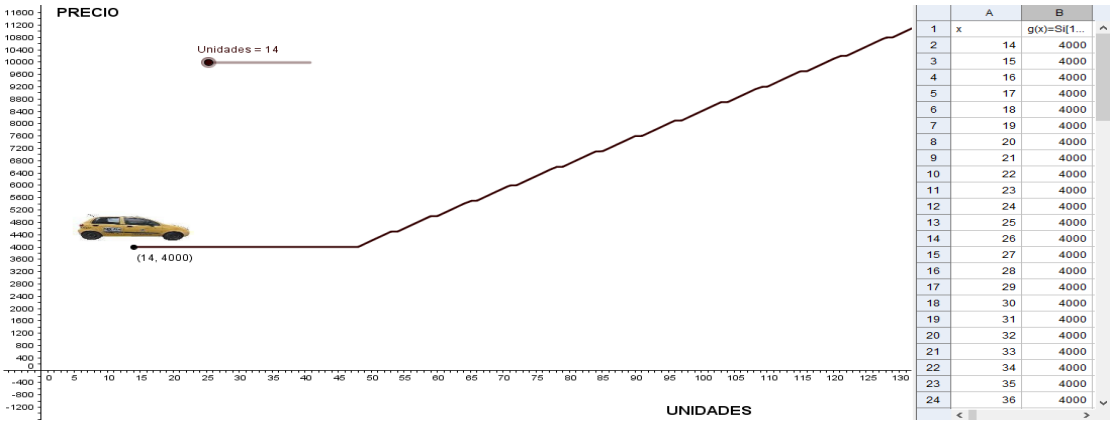
Antecedentes

Investigaciones anteriores indican que la función y su relación con el razonamiento covariacional estudiado en las matemáticas escolares, evidencian una tendencia al estudio de funciones lineales, cuadráticas y exponenciales, dejando a un lado el análisis de otro tipo de funciones como las funciones definidas por partes, tal y como lo reportan Saa y Trochez (2013) que desarrollaron una propuesta para la enseñanza de este tipo de funciones mediadas por

GeoGebra con estudiantes de grado noveno. Asimismo, se recomienda que la *Modelación Matemática* debe ser trabajada desde diversas situaciones reales, además que potencien el razonamiento covariacional en los estudiantes, de manera que, relacionen la covariación como la razón de cambio de cantidades relacionadas que varían entre sí.

Un Ejemplo de Covariación en función por partes

Se presenta a los estudiantes la función por partes definida como funciones lineales y constantes, a través de la mediación del GeoGebra. Esta actividad modela una situación real como es el cobro del servicio de un taxi, y en ella se pretende analizar la coordinación simultánea entre el cambio de una cantidad con respecto a otra, es decir, la variación de las unidades que arroja el taxímetro a medida que se mueve el taxi con respecto al precio del servicio. Ver Figura 1. Asimismo, se pretende que los estudiantes comprendan la razón de cambio promedio en diferentes intervalos de la función y la razón de cambio instantánea como resultado de refinamientos cada vez más pequeños de la razón de cambio promedio.



	A	B
1	x	g(x)=Si[1...
2	14	4000
3	15	4000
4	16	4000
5	17	4000
6	18	4000
7	19	4000
8	20	4000
9	21	4000
10	22	4000
11	23	4000
12	24	4000
13	25	4000
14	26	4000
15	27	4000
16	28	4000
17	29	4000
18	30	4000
19	31	4000
20	32	4000
21	33	4000
22	34	4000
23	35	4000
24	36	4000

Figura 1. El cobro del servicio de un taxi.

A guisa de conclusión

Esta investigación tiene el propósito didáctico de identificar las habilidades de razonamiento covariacional en los estudiantes. Asimismo, el GeoGebra se constituye en un mediador que permite visualizar matemáticamente las características propias de la co-dependencia entre variables cuando se plantean funciones definidas por partes de una manera dinámica. Finalmente, se recomienda seguir trabajando este tipo de funciones que son poco estudiadas en la escuela, mostrando que si es posible el tratamiento didáctico desde un enfoque covariacional al modelar situaciones reales.

Referencias y bibliografía

Ferrrari, M., & Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *11*(2008), 309–354. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v11n3/v11n3a2.pdf

Saa, Á., & Trochez, Á. (2013). *Una Propuesta de Enseñanza de la Función por Tramos usando el Periódico y Geogebra.* (Trabajo de Grado). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/6774/1/CD-0395402.pdf

Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation ,Covariation and Functions: Foundational Ways of Mathematical Thinking. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (p. 421–456.). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics,. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/302581485_Variation_covariation_and_functions_Foundational_ways_of_thinking_mathematically

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Comprensión del producto vectorial desde los Modos de Pensamiento: El caso de profesores en formación inicial

Marcela **Parraguez** González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
marcela.parraguez@pucv.cl

Rosario **Guerra** Martínez
Universidad Católica del Norte
Chile
r1982gm@gmail.com

Resumen

Con base en la Teoría Modos de Pensar de Sierpinska, se presentan tres modos de pensar el concepto de producto vectorial: (1) como el vector normal a otros dos vectores, (2) como una fórmula que permite calcularlo y (3) a través de dos propiedades que lo caracterizan. La finalidad de presentar estos tres modos de pensar el producto vectorial tridimensional, es mostrar evidencias con sustento teórico de la comprensión del concepto producto vectorial en profesores en formación inicial, que pertenecen a dos casos de estudio, y de cómo ellos se sitúan en estos modos, para dar respuesta a tres situaciones que se les presentan. Los resultados muestran que los profesores en formación inicial se sitúan en uno o dos modos de pensar para responder, sin mayor interacción entre los tres modos.

Palabras clave: producto vectorial, modos de pensamiento, comprensión.

Introducción

El producto vectorial nace con del descubrimiento de los Cuaterniones, que hiciera uno de los fundadores de la matemática en el año 1843 –Sir William Rowan Hamilton–. En esos años, cuando Hamilton trabajaba sobre mecánica, comenzó una búsqueda incansable sobre la forma de extender la comprensión geométrica de los números complejos en el plano, a una comprensión geométrica en tres dimensiones. Sin embargo, Hamilton, redirige su investigación en la búsqueda de una terna o número complejo tridimensional, pero, durante muchos años no logró resultados satisfactorios para la geometría tridimensional, en particular en dotar de una estructura al producto vectorial. En este proceso de búsqueda, Hamilton observa que, si bien la propiedad de conmutatividad es inherente al producto, él tuvo que aceptar que esta propiedad no se cumple

siempre para el producto en un espacio tridimensional, y para avanzar en su cometido él tuvo que aceptar que $ij = -ji$ (con i, j vectores en $\mathbb{R}^3$).

Además, al intentar entender el producto de vectores en el espacio, se dio cuenta de que eran necesarias cuaternas en lugar de ternas, fue así cómo nacen los *Cuaterniones de Hamilton*, números hipercomplejos cuatro dimensionales. Números con una parte escalar y una parte vectorial. Hamilton al definir las operaciones entre ellos, en particular la multiplicación de cuaterniones, considerando solamente la parte vectorial o compleja del cuaternión, dio origen a lo que se conoce como el producto vectorial o el producto cruz.

Con base en lo anterior, la historia del producto vectorial está entrelazada con la de los cuaterniones. Según Martínez-Sierra y Benoit (2008), en la historia sobre una epistemología del producto vectorial, se distinguen tres etapas, que a continuación brevemente se sintetizan.

La *primera etapa* referida a Hamilton, el descubrimiento de los cuaterniones y el nacimiento del producto vectorial.

Una *segunda etapa* que considera que la teoría de los cuaterniones, constituye una transición entre el cálculo geométrico plano, al análisis vectorial. Esta segunda etapa, fue llamada *de los defensores y detractores de los cuaterniones de Hamilton,* porque uno de los principales defensores del estudio de este tema fue Peter Guthrie Tait, físico matemático escocés y pionero en la termodinámica. Tait en 1867, publica un libro llamado *Tratado elemental sobre cuaterniones*, donde desarrolla de forma más simple la teoría propuesta por Hamilton, específicamente en uno de sus capítulos explica los principios de la multiplicación de los cuaterniones, como la anti-conmutatividad del producto vectorial.

La *última etapa*, llamada *el nacimiento del análisis moderno*, donde se destaca Josiah Willard Gibbs, quién separa de forma definitiva la parte escalar de la parte vectorial de un cuaternión, proponiendo dos productos, el producto escalar y el producto vectorial, dando así inicio al análisis moderno.

El interés de esta comunicación es situarse en el objeto matemático producto vectorial, desde una perspectiva cognitiva desarrollada por Sierpinska (2000), llamada Teoría Modos de Pensamiento, para mostrar a la comunidad interesada diferentes formas de comprender este objeto matemático, que en muchas ocasiones es utilizado para ejemplificar que el producto de vectores no es conmutativo.

El producto vectorial en el currículo de la formación de profesores

El concepto de producto vectorial está presente en la mayoría de los programas de matemáticas para carreras como Pedagogía en Matemáticas, Ingeniería, Licenciatura en Ciencias o en Economía, y nuestra propuesta es analizarlo desde un pensar práctico y teórico que construyen sus aprendices, dispuestos estos últimos en dos estudio de casos, constituidos por profesores en formación inicial. En lo que sigue, vamos a entender que el pensamiento práctico se genera con el fin de obtener algo en concreto, en cambio el pensamiento teórico de produce en el hecho puro de pensar las relaciones sobre sistemas de conceptos.

Generalmente un programa de Geometría Vectorial, para un curso de primer año de formación de profesores, contiene un apartado que aborda el producto vectorial. Este producto vectorial no tiene una definición única, sin embargo, en muchas ocasiones se define como sigue y dicha definición se puede encontrar en textos de Geometría Vectorial, como por ejemplo en Benítez (2015), que habitualmente forma parte de las referencias de algunos de estos programas.

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Su producto vectorial $u \times v$ (en este orden) se define como el vector: $u \times v = (u_2 v_3 - v_2\, u_3,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$.

Existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender el concepto vector, pero no así de geometría vectorial y menos aún si se restringe el estudio del producto vectorial tridimensional a una postura cognitiva.

El problema central, en esta materia es que el estudiante debe trabajar con conceptos abstractos, pero su tendencia es a trabajar con procedimientos mecánicos, limitando su comprensión sobre los conceptos involucrados. Esto pone en tela de juicio el conocimiento alcanzado de la enseñanza de esta materia, y hay quienes piensan que, en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra con vectores no son exitosos (Dubinsky, Dauterman, Leron, y Zazkis, 1994). En la mayoría de las investigaciones realizadas (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, y Thomas, 1996; Weller et al., 2002) se logra poner en evidencia que, aún los estudiantes exitosos en los cursos de álgebra con geometría, no logran la comprensión de los conceptos involucrados. Y es en beneficio de los futuros profesionales, preguntarse si ¿es posible ayudar a un mayor número de aquellos a comprender uno de los conceptos básicos y particular de la geometría vectorial, como es el producto vectorial tridimensional?

En pro de alcanzar una respuesta a la pregunta anterior, la propuesta de esta comunicación radica en mostrar interpretaciones que los profesores en formación inicial ponen en juego para comprender el concepto de producto vectorial tridimensional, reconociendo en cada interpretación componentes de origen geométrico, procedimental y estructural, entendiendo cada una de estas componentes, como diferentes aspectos de un concepto básico de la geometría vectorial.

La teoría de los Modos de Pensar de Sierpinska

Los Modos de Pensamiento es una teoría de la Didáctica de la Matemática creada por Anna Sierpinska (2000), que permite interpretar los fenómenos que se relacionan con la forma de alcanzar un nivel superior de abstracción en conceptos que se relacionan con el álgebra lineal. Según esta teoría la comprensión de objetos matemáticos de un fragmento de la matemática, requiere de un pensamiento práctico, cómo también de un pensamiento teórico. A partir de allí Sierpinska identifica tres modos de comprender el álgebra lineal (Sierpinska, 2000), que son el resultado de la superación de dos obstáculos, uno que rechaza los números dentro de la geometría, y el otro, rechaza que la intuición geométrica pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético.

Con la finalidad de hacer explícito el pensar teórico del álgebra lineal y abordar sus obstáculos, Sierpinska propone tres modos de pensamiento, que constituyen formas de pensar y entender los objetos matemáticos, y cada uno de los modos constituye una vía de acceso a los diferentes significados del objeto, permitiendo tener una aproximación articulada de diferentes facetas del objeto matemático.

Sierpinska define tres modos de pensamiento a través de los cuales se hace explícito el pasamiento teórico, el modo Sintético-Geométrico que se corresponde con el pensamiento práctico, y los modos Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural que se corresponden con el pensamiento Teórico, estos se describen a continuación.

En modo Sintético-Geométrico (SG): Los objetos son representados mediante una

representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos.

En modo Analítico-Aritmético (AA): Los objetos matemáticos son representados a través de relaciones numéricas o simbólicas.

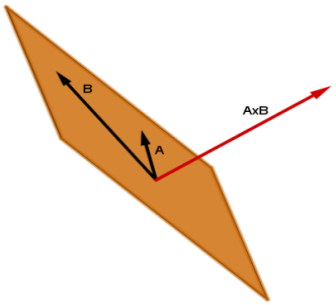
En modo Analítico-Estructural (AE): Los objetos son representados a través de las propiedades de los mismos objetos, o a su caracterización a través de axiomas, o propiedades que los determinan.

Modos de pensar el concepto de producto vectorial

El concepto de producto vectorial tridimensional (PVT), puede ser interpretado desde la matemática y con base en el estudio histórico epistemológico presentado en la introducción, a través de tres formas, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

Modos de pensar el producto vectorial tridimensional

Modo de pensar SG-PVT	Modo de pensar AA-PVT	Modo de pensar AE-PVT
	Sean $P = (a_1, a_2, a_3)$ y $Q = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. $P \times Q = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.	Sean $P, Q\ y\ R$ en $\mathbb{R}^3$ Propiedad 1: (AE-PVT-P1) $P \times Q = -(Q \times P)$ Propiedad 2: (AE-PVT-P2) $P \times Q = 0$, si y solo si, $P\ y\ Q$ son linealmente dependientes.

El modo de pensar SG-PVT está representado por lo que primero viene a la mente de un estudiante, cuando en una situación evoca al PVT. El modo AA-PVT esta descrito por aquella fórmula que los estudiantes utilizan para poder calcular el PVT, en cambio el modo AE-PVT, esta presentado a través de dos propiedades estructurales que caracterizan al PVT como objeto único de la matemática.

Importancia de abordar el producto vectorial desde los Modos de Pensamiento

Abordar el concepto de PVT en sus tres modos de pensarlos –SG-PVT, AA-PVT y AE-PVT– reporta la presencia o ausencia de un pensamiento sistémico –que integra el pensar práctico y teórico del PVT– en los aprendices de geometría vectorial, al resolver situaciones en contextos tridimensionales y fuera de ellos. Uno de los rasgos del pensamiento sistémico es que se enfoca en el establecimiento y estudio de las relaciones entre los conceptos y su caracterización dentro de un sistema (Modos de pensar el PVT) que también contiene otros conceptos (Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002).

EL conocimiento matemático incluido en los tres Modos de pensar los PVT de geometría vectorial (Tabla 1) es primordial, ya que está muy relacionado con la construcción y las dificultades del aprendizaje de los conceptos básicos de los espacios vectoriales. Esto puede ser la causa de obstáculos en la enseñanza y aprendizaje del álgebra con geometría, que sólo la

articulación –como sistema– de los tres Modos de pensarla ayudaría a remontarlos, y en consecuencia el dominio de la habilidad para articularlos se torna fundamental en el aprendizaje del álgebra con geometría tridimensional y su aplicación.

Objetivo de Investigación

La presente comunicación se sitúa en la comprensión del concepto PVT, con la intención de analizar y mostrar evidencias con sustento teórico de cómo profesores en formación inicial que han cursado la asignatura de Geometría Vectorial, se sitúan y transitan en los Modos de Pensar el PVT. El programa de asignatura de Geometría Vectorial, seguido por los estudiantes para profesor, consideró los siguientes contenidos: vectores libres, aplicaciones de los vectores libres, vectores coordenados, producto escalar, aplicaciones del producto escalar, producto vectorial, ecuaciones vectoriales y paramétricas de rectas y planos.

Método

Desde el paradigma cualitativo se ha seleccionado el estudio de casos (Stake, 2010) como método para alcanzar el objetivo propuesto, porque permite una indagación en profundidad de una realidad específica y en un contexto global.

Los criterios seguidos para la conformación de los dos casos de estudio fueron: (a) Ser estudiante de Pedagogía en Matemáticas; (b) Haber sido estudiante del curso Geometría Vectorial y (3) Accesibilidad de los investigadores. Cada caso quedó constituido tal como se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2

Participantes y casos de estudio

Casos	Participantes	Nivel	Características	Identificación
Caso I	5 estudiantes de Pedagogía en Matemáticas	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Geometría Vectorial y eximido de dar examen.	E1, E2, E3, E4, E5
Caso II	4 estudiantes Pedagogía en Matemáticas	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Geometría Vectorial y rindió examen.	E6, E7, E8, E9

Recogida de datos

En esta indagación se utilizó como instrumento de recogida de datos un cuestionario escrito constituido por tres actividades matemáticas, como se muestra en la Tabla 3. Cada actividad fue diseñada con la intención de situarla a lo menos en un determinado modo de pensar el PVT.

Tabla 3

Actividades del cuestionario

Actividades	Objetivos
A1) De los vectores $A = (0,2,5),\ B = (19,0,0)\ y\ C = (0,5,3)$ en $\mathbb{R}^3$, uno de ellos es perpendicular a los	Indagar cómo piensa o entiende el estudiante el modo SG-PVT. (Cómo se sitúa en el modo SG-PVT)

otros dos, ¿Cuál? Justifica.	Determinar si el estudiante privilegia el modo AA-PVT por sobre el modo SG-PVT.
A2) Sean $A = 2i - j + 2k$ y $B = 3i + 4j - k$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determine $A \times B$.	Indagar cómo piensa o entiende el estudiante el modo AA-PVT. (Cómo se sitúa en el modo AA-PVT)
A3) Dados los vectores $A = (3,1,0)$ y $B = (5,7,0)$ Determine explícitamente un vector C perpendicular a los vectores A y B. ¿Hay más de un vector C que cumpla la condición? Justifica.	Indagar cómo piensa o entiende el estudiante la propiedad 1 o propiedad 2 del modo AE-PVT. (Cómo se sitúa en el modo AE-PVT)

Evidencias

Con la finalidad de mostrar un trabajo representativo de lo realizado por los estudiantes de los casos de estudios, es que hemos seleccionado algunos episodios de sus argumentos observables en las tres actividades, que se corresponden con el trabajo realizado por E6 y E2 para la primera actividad, por E4 y E9 para la segunda actividad y por E7 para la tercera actividad.

Primera Actividad. Cinco de los nueve profesores en formación inicial responden desde un modo AA-PVT. Tres responden desde un SG-PVT, de los cuales dos responden correctamente.

El estudiante E6 responde situándose desde un modo SG-PVT, aunque no dibuja correctamente los vectores pedidos, como se muestra en la Figura 1.

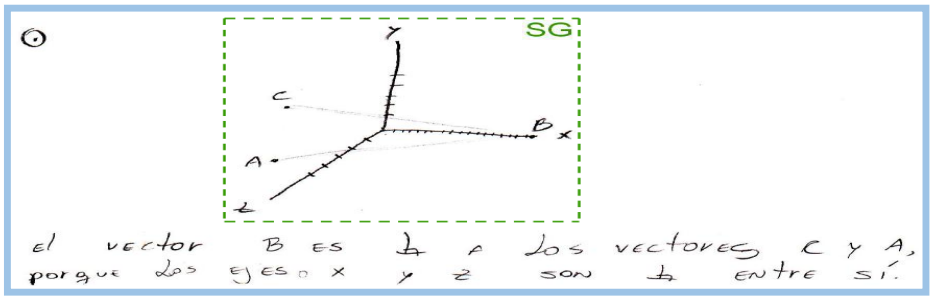


Figura 1. Respuesta del E6 a la actividad A1.

El Estudiante E2 responde incorrectamente desde un modo SG-PVT, como se muestra en la Figura 2.

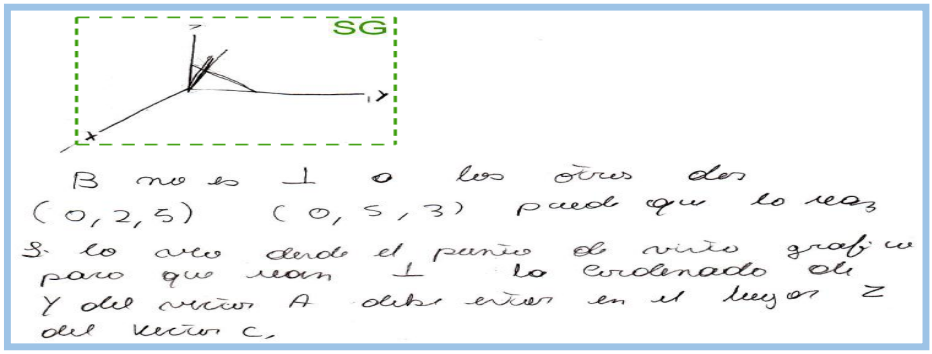


Figura 2. Respuesta del E2 a la actividad A1.

Segunda Actividad. Tres de los nueve estudiantes se sitúan desde un AA-PVT, de los cuales sólo 1 contesta correctamente.

El estudiante E4 se sitúa desde un modo AA-PVT, como se muestra en la Figura 3.

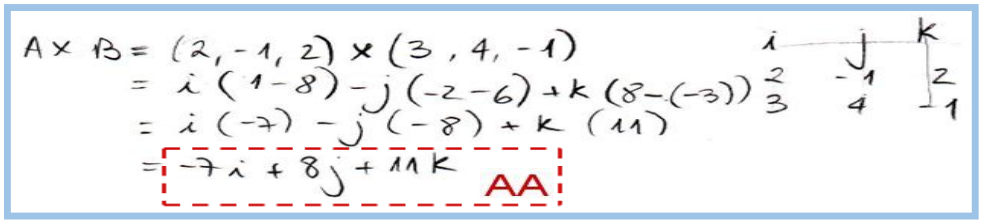


Figura 3. Respuesta del E4 a la actividad A2.

El estudiante E9 se sitúa incorrectamente desde un modo de pensar AA-PVT, ya que entrega como resultado un escalar (y no un vector), como se muestra en la Figura 4.

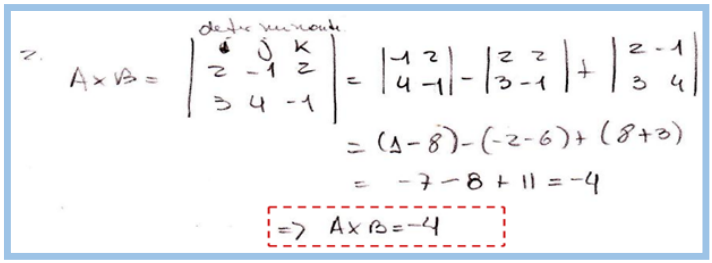


Figura 4. Respuesta del E9 a la actividad A2.

Tercera Actividad. Sólo cuatro de los nueve estudiantes responden a esta pregunta y el resto rafirman que C puede ser cualquier vector.

El estudiante E7 muestra en su respuesta una de las propiedades del modo AE-PVT-P1, al reconocer la simetría alternada (no conmutativa). Aunque no logra determinar el conjunto solución, como se muestra en la Figura 5.

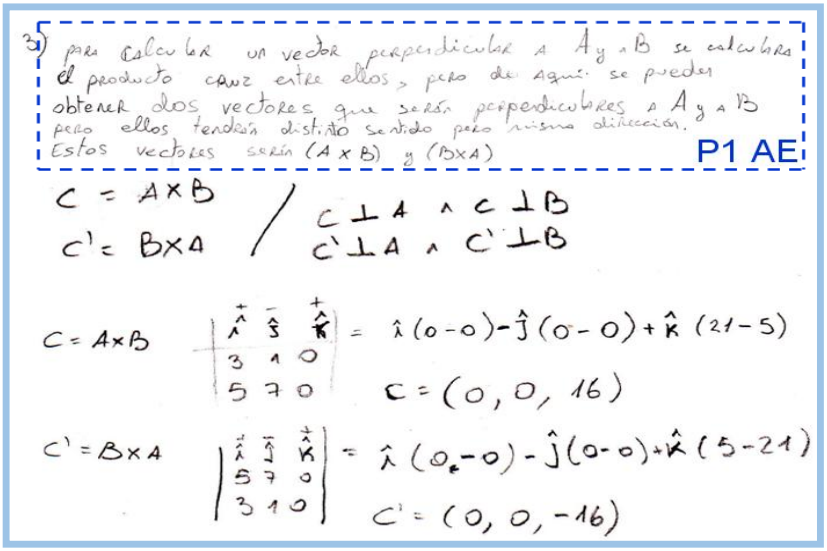


Figura 5. Respuesta del E7 a la actividad A3.

Conclusión

De las evidencias mostradas podemos concluir que en general los estudiantes para profesores privilegian el modo AA-PVT por sobre el modo de pensar SG-PVT, y además ellos presentan dificultades para entender al objeto matemático de PVT en sus distintos modos de comprenderlo: geométrico, aritmético y estructural. Con respecto a esto último, las principales dificultades identificadas en las respuestas de los profesores en formación inicial para situarse en cada uno de los modos, se muestra a través de los siguientes hechos.

En el **modo AA-PVT** los estudiantes para profesor no determinan correctamente las componentes del producto resultante (como vector) llegando a mostrar en sus respuestas (Figura 4) que el PVT no es un vector, sino un escalar.

En el **modo SG-PVT** los profesores en formación de los casos no logran coordinar las componentes de los vectores dados en el problema (Figura 1), con el sistema de ejes coordenados, así como tampoco con las componentes del vector resultante (Figura 2).

En el **modo AE-PVT**, las dificultades que presentaron los profesores en formación, se relacionan con que ellos no logran precisar un conjunto solución para A3 –que se relaciona con la Propiedad 1–, por ello responden que hay sólo un vector perpendicular o hay dos vectores (Figura 5) o cualquiera. No obstante, en los pocos argumentos mostrados por los estudiantes en A3, no se alcanzar a evidenciar una coordinación entre el modo **SG-PVT** con **AE-PVT**, pues de hecho ellos no perciben que los vectores de A3 al tener componentes reales, tiene igual dirección, pero distinto sentido. Mostrando esto último, que los profesores para profesor no comprenden el modo **AE-PVT**.

Agradecimientos

La investigación presentada ha sido financiada por el Proyecto FONDECYT Nº 1180468.

Referencias y bibliografía

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. and Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.). *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.

Benítez, R. (2015). *Geome*tría *vectorial*. México: Trillas.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U., and Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Goup Theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 267-273.

Martínez-Sierra, G. y Benoit, P. (2008). Una epistemología del product vectorial del cuaternión al análisis vectorial. *Latin-American Journal of Physics Education*, *2*(2), 201-208.

Sierpinska, A. (2000). "On some aspects of students' thinking in linear algebra", in J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, 209-246. Dortrecht: Kluwer Academic.

Sierpinska, A., Nnadozie A. and Oktaç A. (2002). A Study of relationships between theorical thinking and high achievement in linear algebra. Concordia University: Montreal.

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ª Ed.). Barcelona: Labor.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Versión disponible en: http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Explorando la función lineal a través de la física

María Fernanda **Molina**
Institución educativa Presbítero Horacio Gómez Gallo
Colombia
fernanda310@yahoo.com
Victor Hugo **Gil** Avendaño
Universidad del Valle
Colombia
victor.gil@correounivalle.edu.co
Jairo **Carvajal**
Institución educativa Presbítero Horacio Gómez Gallo
Colombia
jacama0660@gmail.com
Edinsson **Durán** García
Institución educativa Presbítero Horacio Gómez Gallo
Colombia
edidugar@hotmail.com

Introducción

Como maestros encargados de orientar la actividad matemática en la educación básica secundaria y media buscando el desarrollo de pensamiento matemático en nuestros estudiantes, hemos experimentado que la enseñanza y aprendizaje de las funciones, concepto central de estos grados de escolaridad, nuestros estudiantes experimentan múltiples dificultades y errores, las cuales van desde la identificación de las cantidades variables y constantes junto con sus relaciones en situaciones contextualizadas, hasta representar gráficamente cualquier modelo de función lineal y analizarlo para realizar juicios sobre determinada situación.

Para enfrentar esta problemática nos propusimos diseñar una secuencia didáctica que fundamentada en referentes de orden didáctico, curricular y matemático, les proponía a los estudiantes analizar la función lineal partir del movimiento rectilíneo uniforme, a través del planteamiento de conjeturas, exploraciones prácticas, toma de datos, y análisis de la información a partir de distintas representaciones, entre otros aspectos.

Metodología

La secuencia didáctica, que fue implementada con 30 estudiantes del grado 10° de la Institución educativa Presbítero Horacio Gómez Gallo, del municipio de Jamundí, Valle del

Cauca, y cuyo propósito era favorecer el aprendizaje de algunos aspectos de la función lineal a partir del estudio del movimiento rectilíneo uniforme, esta secuencia estuvo configurada por cinco tareas, cada una con preguntas de distinta índole y con distintos propósitos, que buscaban que los estudiantes: describieran la variación lineal e identificaran las variables, expresaran dicha variación lineal mediante una expresión algebraica, luego realizaran un vínculo entre las funciones lineales y las ecuaciones lineales, con el ánimo de comparar modelos de variación lineal, para posteriormente representar los modelos en un sistema de coordenadas cartesianas acompañado del software Geogebra, y por último se validaron los modelos en diferentes sistemas de representación (verbal, analítico, tabular y gráfico).

Resultados y conclusiones

- La secuencia didáctica propició, por un lado, un escenario ideal para que los estudiantes se iniciaran de manera natural desde un contexto de las ciencias experimentales en el estudio de la función lineal: identificación de las cantidades y sus relaciones, la manera de covariación de las cantidades, algunas características de las funciones lineales, entre otros; y por otro lado, mejoró el ambiente de aula en el que los estudiantes demostraron agrado por el trabajo practico, el planteamiento de conjeturas y sus validaciones a partir del uso de las matemáticas.
- Se requiere cambiar la concepción de enseñanza de la función lineal por una en la cual se parta de los pre-saberes de los estudiantes para razonar, conjeturar, formular estrategias y resolver problemas en diversos contextos, para culminar con la formalización del concepto de función lineal y sus diversas propiedades operatorias.

Referencias y bibliografía

Álvarez Manilla, J. M., Valdés Krieg, E. & Curiel de Valdés, A. B. (2006). Inteligencia emocional y desempeño escolar. *Revista Panamericana de Pedagogía*, 9, 9-33.

Azcárate, C., & Piquet, J. D. (1990). Funciones y gráficas. *síntesis.*

Blomhøj, M. (2004). Modelización matemática-una teoría para la práctica. *Revista de Educación Matemática*, *23*(2).

Ministerio de Educación Nacional**.** (1998). *Lineamientos curriculares para el área de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia**.** (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación de Colombia.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 23-58.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enseñar en Telebachillerato el método gráfico para el sistema de ecuaciones lineales 2x2

David Alfonso **Páez**
CONACyT-Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
dapaez@correo.uaa,mx
Teresa de Jesús **Cañedo** Ortiz
Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
tjcanedo@correo.uaa.mx
Daniel **Eudave** Muñoz
Universidad Autónoma de Aguascalientes
México
deudave@correo.uaa.mx

Resumen

El estudio tiene como objetivo describir el conocimiento matemático que el profesor de Telebachillerato tiene para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a través del método gráfico. Como marco referencial se tomó la discusión sobre el concepto de conocimiento matemático. Se reporta a un profesor como estudio de caso a profundidad, centrado en la enseñanza de la representación gráfica para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. El docente fue videograbado en dos sesiones de clases con el propósito de generar una reflexión sobre su práctica docente. Los resultados muestran que este actor educativo posee un conocimiento básico para trabajar este tipo de métodos, el cual puede generar obstáculos conceptuales y epistemológicos en los estudiantes, tal como considerar solo los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$, donde $x, y \neq 0$, para trazar cualquier gráfica en el plano cartesiano o determinar si el sistema de ecuaciones tiene o no solución.

Palabras clave: conocimiento, resolución de problemas, sistema de ecuaciones, análisis y reflexión sobre la enseñanza, pensamiento matemático.

Antecedentes

Uno de los problemas que interesa a la comunidad de investigadores en educación matemática, en torno a la formación y desarrollo de los profesores, es el conocimiento requerido

para enseñar matemáticas (Shulman, 1986; Ball, Thames & Phelps, 2008), por ejemplo, en álgebra. Al respecto, Doerr (2004) menciona lo siguiente:

> La investigación sobre el aprendizaje del álgebra ha tendido a enfocarse en la naturaleza algebraica de las tareas matemáticas, el desarrollo de ideas de los alumnos y, en algunos casos, en la influencia de la tecnología, pero raramente los profesores, y la naturaleza y el desarrollo de su conocimiento y práctica docente, son objetos de estudio. (p. 270)

En el presente estudio se aborda el conocimiento del profesor de Telebachillerato (TB, México) para resolver ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante el método gráfico, pues aunque su perfil en ocasiones es ajeno a las matemáticas tiene la responsabilidad de enseñar esta asignatura (INEE, 2015) y ello le exige tener conocimientos disciplinares necesarios (NCTM, 2014; SEMS, 2015).

La investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales con dos incógnitas ha sido abordada por diversos investigadores en educación matemática (Schoenfeld, Smith & Arcavi; 1993; Sierpinska, 2000, entre otros), y se ha reportado que los estudiantes de secundaria y de Educación Media Superior (EMS) tienen dificultades para comprender y resolver este tipo de sistemas. Autores como Trigueros (2012) afirman que la mayoría de las dificultades de los estudiantes son producto de memorizar procedimientos o algoritmos sin comprender su significado; por su parte, Mora (2001, citado en Arellano & Oktaç 2009) considera que los estudiantes suelen tener dificultades para representar gráficamente sistemas de ecuaciones líneas con dos incógnitas. Para Arellano y Oktaç (2009), en los cursos de álgebra de EMS se le da más importancia a los procedimientos y algoritmos de tipo algebraico para dar soluciones a sistemas de ecuaciones lineales, dejando en menor medida las representaciones gráficas como procedimientos de solución, lo cual genera que el estudiante tenga "dificultades de interpretación al enfrentarse en el contexto algebraico o que requieran de una reinterpretación de los conceptos algebraicos" (p. 357).

Las dificultades relacionadas con el método gráfico para dar soluciones a sistemas de ecuaciones lineales están relacionadas con la falta de separación entre el pensamiento sintético-geométrico y el analítico-aritmético (Sierpinska, 2000). Ante las dificultades que tiene los estudiantes en relación con el sistema de ecuaciones, se recomienda que el profesor debe propiciar espacios adecuados para que el alumno desarrolle este tipo de pensamientos de modo que pueda transitar de uno al otro, así como enseñar y generar reflexión sobre los diferentes métodos matemáticos para dar solución al sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de modo que se le dé importancia al método gráfico.

Algunas dificultades son producto de cómo se enseñan las matemáticas. Doerr (2004) asegura que existe:

> Una ineficacia del aprendizaje del álgebra como procedimiento desconectado del significado y del propósito; la mayor parte del álgebra de la escuela todavía es enseñada con tales procedimientos desconectados. […] Uno de los principales impedimentos para el cambio en cómo el álgebra es enseñada en las escuelas parece ser la falta de un cuerpo substancial de investigación acerca del conocimiento y la práctica de los profesores en la enseñanza del álgebra. (pp. 267-268)

De acuerdo con lo anterior, el presente estudio tiene como objetivo describir el conocimiento matemático que el profesor, en contextos vulnerables, como lo es en TB, tiene para resolver este tipo de sistemas mediante representaciones gráficas.

Marco conceptual

La enseñanza de las matemáticas requiere de profesores que tengan un conocimiento matemático y didáctico cuya finalidad es desarrollar un aprendizaje en los estudiantes de acuerdo con los objetivos curriculares (Ball et al., 2008; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; NCTM, 2014; Shulman, 1986). La noción de conocimiento matemático para la enseñanza hace referencia al "conocimiento […] que el profesor utiliza en clase para producir enseñanza y crecimiento en el alumno" (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 374). Diversos investigadores consideran que el conocimiento matemático está relacionado con los estándares curriculares de modo que le permita al profesor identificar errores matemáticos (procedimentales, algorítmicos o conceptuales), ya sea en los alumnos o en el libro de texto, así como para usar términos o nociones relacionadas con las matemáticas, o determinar la validez de un argumento matemático y seleccionar representaciones matemáticas adecuadas (Ball et al., 2001; Carrillo, Clements, Contreras & Muñoz, 2013). Para Shulman (1986), "éste se refiere a la cantidad y la organización del conocimiento [disciplinar] per se en la mente del profesor. […] Va más allá del conocimiento de los factores o los conceptos de un dominio. […] El profesor necesita no sólo entender que algo es así; el profesor debe entender por qué es así" (p. 99).

Además, el conocimiento matemático va más allá de los estándares curriculares. Ball et al. (2001) plantean que la enseñanza de las matemáticas demanda un conocimiento especializado de matemática en el profesor: "Las exigencias de la labor de enseñanza de las matemáticas crean la necesidad de un cuerpo de conocimiento matemático especializado para la enseñanza" (p. 11). Por su parte, en coincidencia con Ball et al., Carrillo et al. (2013) afirman que el conocimiento matemático del profesor abarca tres dominios: a) del tema, el cual hace referencia a los significados, definiciones, ejemplos que caracterizan el tema que se aborda en la clase, b) de la estructura matemáticas, definido como el sistema integrado de conexiones que le permite al profesor comprender y desarrollar conceptos matemáticos; c) y de la práctica matemática, que se refiere a las formas de conocer, crear o producir matemáticas, en otras palabras, es la comunicación, el razonamiento y la prueba.

Metodología

El estudio aquí reportado es de carácter exploratorio sobre la práctica docente en matemáticas. Se reporta la práctica de un profesor de TB como un estudio a profundidad; sin embargo, conviene mencionar que estos datos pertenecen a un proyecto de investigación más amplio y centrado en la reflexión sobre la práctica de enseñanza, en el cual participan varios docentes. Como parte de la metodología del proyecto, el profesor, a quien hemos llamado Juan (seudónimo), fue videograbado impartiendo matemáticas en dos sesiones de clases de primer semestre de TB; para ello, el profesor determinó los contenidos matemáticos a trabajar en cada sesión (Método gráfico para resolver sistema de ecuaciones con dos incógnitas y Teorema de Pitágoras), así como las fechas de observación. El propósito de las observaciones fue tener una aproximación puntual de la actividad que ocurre en el salón de clases en contextos desfavorables, como lo es el subsistema TB en México[1]. Las videograbaciones se llevaron a cabo tratando de afectar en lo más mínimo el escenario y el contexto natural donde se da el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Stake, 1999). El análisis está centrado en identificar y describir

[1] Los TB atienden a jóvenes entre los 15 y 18 años de edad, en comunidades rurales de pocos habitantes, que por lo general tienen condiciones económicas y sociales precarias. Su plantilla docente está conformada, principalmente, por profesionales que poco o nula experiencia en docencia (INEE, 2015).

el conocimiento que el profesor implementa en cada actividad desarrollada en las sesiones de clase observadas.

Análisis de datos

En primer semestre de TB se tiene el objetivo de que los alumnos recurran a la representación gráfica como un método matemático para dar solución al sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de modo que tengan la habilidad para identificar gráficamente si el sistema tiene una, ninguna o infinitas soluciones (SEMS, 2017, 2013). Para ello, el profesor tiene el libro de texto como un recurso principal, el cual le proporciona información para mostrar cómo funciona tal método (Cfr. Garrido, Llamas & Sánchez, 2015, pp. 290-295), o por lo menos tiene que echar mano de su conocimiento matemático para "comunicar conceptos y métodos con claridad para la solución del sistema de ecuaciones […] y ofrecer ejemplos pertinentes a la vida de los estudiantes" (SEMS, 2013, p. 39). Una muestra de esto es el profesor Juan, quien se apoya en su conocimiento para enseñar este método matemático a los estudiantes de TB.

La práctica de Juan está encaminada a enseñar el método gráfico sólo para el sistema de ecuaciones lineales (2 por 2) que tiene una solución y cuyas graficas en el plano de coordenadas cartesianas XY contengan los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$, tal que $x, y \neq 0$. De modo que, de acuerdo con el desarrollo de la clase, el objetivo es obtener las coordenadas del punto de intersección de ambas gráficas y las cuales satisfacen al sistema de ecuaciones, lo que para Juan es encontrar los valores x, y en el cruce de las dos gráficas:

> Profesor: *Cuando tengo dos ecuaciones de primer grado, que ya las tengo graficadas, uno de los objetivos es encontrar ¿qué?*
>
> Alumnos: *El valor de cada incógnita…*
>
> Profesor: *El valor de y. Entonces esos valores de y, cuando ya están graficadas las ecuaciones, ¿es donde se cruzan o no se cruzan?*
>
> Alumnos: *Donde se cruzan…, donde se cruzan para saber qué valor es.*
>
> Profesor: *¡Muy bien! Es para saber qué valor es.*

Es importante menciona que en ningún momento de la clase Juan explícita los términos *punto de intersección* o *coordenadas del punto de intersección*, sólo hace referencia a como valores desconocidos o incógnitas, las cuales los define a partir de la intersección (cruce) de ambas gráficas; tal vez, eso se debe a que el interés principal de Juan es obtener los valores numéricos que satisfagan al sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, por ejemplo, les dice a los estudiantes: "Lo que quiero es encontrar los valores de x, y. […] ¿Y esos valores que desconozco qué me representan? Los valores de x, y son los valores donde se cruzan [ambas gráficas]".

El conocimiento matemático que muestra Juan para trabajar el método gráfico, con ecuaciones lineales, abarca dos dimensiones que interactúan entre sí: ubicar la gráfica de cada ecuación en el plano de coordenadas cartesianas y obtener las coordenadas (valores) del punto de intersección de ambas gráficas.

Representación gráfica de las ecuaciones con dos incógnitas

Juan muestra que tiene un dominio acerca de la ubicación de rectas en el plano cartesiano. De acuerdo con su conocimiento, la representación gráfica de cada ecuación lineal inmersa en el sistema a solucionar se obtiene dados dos puntos sobre el plano; sin embargo, Juan considera que

tales puntos son $(x, 0)$ y $(0, y)$, donde las coordenadas 0, de modo que da por hecho que estos pertenecen y ubican, en el plano, la gráfica de cada ecuación. Para determinar las coordenadas x, y, Juan acude al procedimiento de igualar a cero cada incógnita de ambas ecuaciones con la finalidad de obtener, por separado, el valor de la otra incógnita (véase Figura 1); por ejemplo, para el sistema $2x + 3y = 8$ y 5, Juan plantea lo siguiente:

> Profesor: *Vamos a empezar con la ecuación uno [*2 8*], igualar a cero el valor de* x*. Entonces, para cuando la x vale cero, ¿cuánto vale y [señala en el pizarrón* – *(véase Figura 1)]?*
>
> Alumnos: *Dos enteros dos tercios.*
>
> Profesor: *Ya saque para* x *igual a cero. ¿Cuál me falta?*
>
> Alumnos: *Para y igual a cero […].*
>
> Profesor: *Ahora hay que hacer lo mismo con la ecuación dos [*$3x + y = 5$*]…*

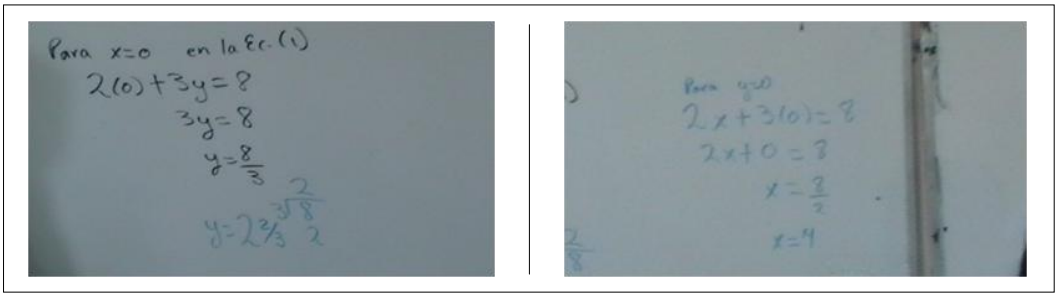


Figura 1. Proceso de igualación para obtener los puntos)que corresponden a la gráfica de la ecuación $2x + 3y = 8$.

Este tipo de conocimiento de Juan es especializado (Ball et al., 2001), pero básico para la construcción de rectas relacionadas a partir de la ecuación. Su conocimiento muestra posibles limitantes a presentarse y generar obstáculos epistemológicos, pues toda gráfica lineal se puede ubicar en el sistema de coordenadas cartesianas dados dos puntos cualesquiera $[P_1(x, y)$ y $P_2(x, y)]$ (Cuevas, Mejía, Pluvinage & Zubieta, 2005); además, al trabajar sólo con gráficas que pasan por $(x, 0)$ y $(0, y)$, deja de lado la familia de gráficas lineales que intersecan en el origen del plano cartesiano $[(0,0)]$ o que tienen pendiente cero o indefinida.

El tener las coordenadas de cada par de puntos y ubicar estos en el plano cartesiano le permite a Juan mostrar gráficamente a las ecuaciones del sistema y la intersección de éstas (véase Figura 2). Así, para el sistema de ecuaciones $2x + 3y = 8$ y $3x + y = 5$, desde su representación gráfica, el punto de intersección es $(1,2)$.

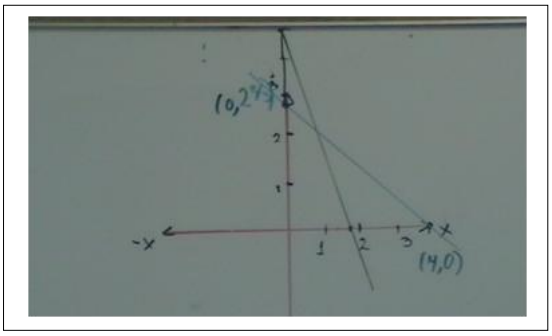


Figura 2. Representación gráfica del sistema y en el plano cartesiano.

En contraste con este procedimiento matemático de Juan, el libro de texto de TB plantea la *tabulación* como la estrategia para graficar este tipo ecuaciones en un determinado intervalo de valores en la variable *x*: "Para realizar el gráfico de cada una de las ecuaciones del sistema, es necesario: 1. Despejar a *y* de ambas ecuaciones; 2. Hacer una tabla para ambas ecuaciones con los mismo valores de *x*; 3. Graficar ambas rectas […] [en] el mismo plano" (Garrido et al., 2015, p. 290).

Coordenadas (valores) del punto de intersección de ambas gráficas

Para obtener los valores que satisfacen al sistema de ecuaciones en la representación gráfica, Juan recurre a segmentos de rectas paralelos a los ejes del plano cartesiano (véase Figura 3). Este recurso le permite visualmente obtener las coordenadas del punto de intersección de ambas gráficas, pues cada segmento de recta va del eje que le corresponde al cruce de las dos gráficas. El uso de tal recurso muestra que Juan parte del hecho de que en el eje de las abscisas y de las ordenas se encuentran las coordenadas $x = 1, y = 2$, respectivamente, y que los segmentos de recta concurren en el punto $(1,2)$, el cual hace referencia al cruce de las gráficas y, por lo tanto, los valores que satisfacen el sistema:

> Profesor: *¿Qué es lo que tenemos que hacer para encontrar la horizontal, que vienen siendo el valor de la horizontal?*
>
> Alumna: *En el valor de x o y.*
>
> Profesor: *¡Muy bien!, en el valor de x, ¿pero cuál punto voy a tomar?*
>
> Alumnos: *Donde se cruzan [las gráficas]…*
>
> Profesor: *Este punto [*$(1,2)$*]. ¡Muy bien! Ustedes con su regla, ¿si alcanzan a visualizar que este 1 [del eje de las abscisas] viene siendo la x? ¿Cuánto vale entonces x? […] x es igual a 1, y es igual a 2. Esos serían los valores.*

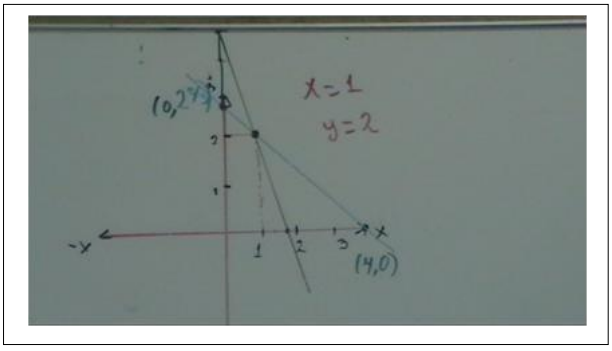


*Figura 3.*Segmento de recta como recurso para obtener los valores de las ecuaciones.

Los segmentos de recta, al ser paralelos a los ejes, le proporciona a Juan la pareja ordenada de los valores a obtener. Para ello, el argumento de usar este recurso está centrado en el diseño o trazo del plano cartesiano, donde los valores numéricos de los ejes deben estar a la misma distancia entre sí, pues como dice Juan: "¿dónde está el margen de error? En que cuando hagan la gráfica, lo hagan lo más exacto que puedan. Si están manejando la libreta de cuadritos, pues en los cuadritos que sean los números. Entre más amplio lo dejen o más grade, mejor". Sin embargo, este argumento difiere con lo que sucede en el salón de clases, pues en algunos otros sistemas de ecuaciones Juan traza al tanteo el plano cartesiano y las gráficas correspondientes.

Conclusiones

El profesor de TB, al estar frente a grupo, y al igual que cualquier otro docente en matemáticas, se le exige poseer un conocimiento disciplinar que le permita enseñar y argumentar la matemática de acuerdo con los objetivos curriculares; sin embargo, la realidad muestra que en muchas ocasiones este conocimiento es insuficiente o difiere con lo que se espera que los estudiantes deben aprender en el salón de clases. La práctica de Juan da evidencia de que este actor educativo posee un conocimiento especializado que le permite usar y mostrar la relevancia del método gráfico para encontrar los valores de las incógnitas del sistema de ecuaciones lineales; sin embargo, este conocimiento es básico en términos de cómo determinar y ubicar las gráficas en el plano de coordenadas cartesianas, lo cual puede generar obstáculos conceptuales y epistemológicos en los estudiantes, tal como considerar solo los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$, donde $\neq 0$, para trazar cualquier gráfica en el plano cartesiano o determinar si el sistema de ecuaciones tiene o no solución.

Aunque Juan tiene el interés de que los estudiantes vean la relevancia del método grafico como un procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones, existe una falta de conocimiento sobre la relevancia de este procedimiento gráfico, así como determinar y mostrar si el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene uno, más o ninguna solución, así como una argumentación y demostración de si $(x, 0)$ y $(0, y)$ pertenecen a las gráficas de las ecuaciones con dos incógnitas. Los resultados muestran que el profesor Juan, al igual que otros profesores de TB, requiere de una formación constante sobre el conocimiento matemático que enseñan en este subsistema de México, de modo que contribuyan a la calidad de educación.

Referencias y bibliografía

Arellano, F. & Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. En L. Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 357-365). DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. & Muñoz, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Cuevas, C. A., Mejía, H. R., Pluvinage, F. C. B. & Zubieta, G. (2005). *Geometría analítica dinámica*. USA: Oxford University Press.

Doerr, H. M. (2004). Knowledge and the teaching of algebra. En S. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 267-290). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Garrido, M., Llamas, L. C. & Sánchez, I. (2015). *Matemáticas I.* DF: SEP. Disponible en https://www.dgb.sep.gob.mx/servicios-educativos/telebachillerato/LIBROS/1-semestre-2016/Matematicas-I.pdf

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. C. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge:

conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Instituto Nacional de Evaluación para la Educación (INEE). (2015). *Los docentes en México. Informe 2015.* México, DF: INEE. Disponible en publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/I/240/P1I240.pdf.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Estado Unidos de América: NCTM.

Schoenfeld, A., Smith, J. & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. En R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 4, pp. 55-175). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Shulman, L. S. (1986). These who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15/29. 4-14. doi: https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Sierpinska, A. (2000).On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier. (Ed.), *On the teaching of linear algebra in Question* (Cap. 7, pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.doi: dOI: https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Stake, R. E. (1999). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS). (2013). *Matemáticas I. Serie: Programas de estudio.* Distrito Federal: SEMS.

Subsecretaría de Educación Media Superior (2015). *Documento base. Telebachillerato Comunitario*. México: SEMS.

Subsecretaría de Educación Media Superior (2017). *Matemáticas I. Programa de estudio primer semestre*. Distrito Federal: SEMS.

Trigueros, M. (2012). Sistema de ecuaciones: ¿Qué nos dice la investigación sobre su aprendizaje? En U. Malaspina (Coord*.), Resúmenes del VI Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las matemáticas* (pp. 6-7). Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú. Disponible en http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2012/02/Resumen_coloquio_2012-1.pdf

Agradecimientos

La presente investigación se realizado dentro del Programa de Investigaciones Educativas de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México, PIE 17-7. Agradecemos la colaboración de la doctora Mercedes María Eugenia Ramírez Esperón, de la Coordinación de Telebachilleratos en Aguascalientes, de los profesores que participan en el proyecto, y de las asistentes Martha Cinthia García Gaytán y María Guadalupe Capetillo Plascencia.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O Ensino de Polinômios na Perspectiva da Filosofia de Wittgenstein

Gabrielle Janaina Barros de **Menezes**
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA)
Brasil
janaina.menezes@unifesspa.edu.br

Walber Christiano Lima da **Costa**
UNIFESSPA / UFPA
Brasil
walber@unifesspa.edu.br

José Wanderson Sousa de **Carvalho**
UNIFESSPA
Brasil
josecarvalho@unifesspa.edu.br

Marisa Rosâni Abreu da **Silveira**
Universidade Federal do Pará (UFPA)
Brasil
marisabreu@ufpa.br

Resumo

O presente artigo tem como objetivo apresentar reflexões acerca do ensino de polinômios na perspectiva da filosofia de Wittgenstein. Sabemos que a matemática por apresentar uma linguagem específica necessita de tradução para a linguagem natural que faça sentido para o aluno**.** O aprendizado de polinômios apresenta muitas codificações que precisam ser compreendidas, mas esta compreensão depende do contexto em que estão inseridas. Para este estudo, embasamo-nos nos conceitos da filosofia de Wittgenstein, tais como: *jogos de linguagem* e *seguir regras*. Como resultados deste estudo, constatamos que se o aluno compreender as regras matemáticas em meio a jogos de linguagem, ele terá maiores facilidades no sucesso da aprendizagem de polinômios.

Palavras chave: polinômios, filosofia de Wittgenstein, seguir regras, ensino, aprendizagem.

Introdução

Ao longo de nossas trajetórias enquanto professores de matemática da educação básica, deparamo-nos com dificuldades na aprendizagem. Segundo Gatti (2008) a formação inicial por si só é insuficiente para formar um professor, ou seja, a construção do ser professor passa pela construção diária de seu ofício. Assim, segundo a autora é necessário ao professor ter um domínio do conteúdo, planejamento de suas práticas, reorganização de situações inesperadas, uma boa formação pedagógica para a apresentação de conteúdos e com as dificuldades que os alunos possam apresentar de aprendizagem.

Sobre a formação pedagógica, importante ressaltar o papel de um bom uso da linguagem em sala de aula. Percebemos que muitas vezes os professores no afã de tentarem aproximar o cotidiano dos alunos com o conteúdo matemático, acabam por criar barreiras comunicativas, dificultando o aprendizado. Silveira (2014) aponta que no ensino de matemática é necessário que todos os professores possam perceber as linguagens que participam em sala de aula que favorecem a aprendizagem. A autora ainda destaca que ao lembrar das linguagens, devemos entender que se faz necessária a reflexão para que haja uma boa tradução dos leitores dos textos matemáticos.

Na Educação Matemática Brasileira, o estudo de Álgebra vem sendo alvo de relevantes pesquisas, pois ao longo da história, segundo Lins e Gimenez (1997, p. 9), "a aritmética e álgebra se relacionam de forma diferente das leituras tradicionais, do tipo álgebra é a aritmética generalizada ou álgebra é a estrutura da aritmética". No entanto ambas se complementam. Sabemos enquanto professores a dificuldade de ensinar conceitos algébricos, pois muitas vezes é difícil para o aluno compreender a linguagem matemática empregada nos conceitos algébricos e textos matemáticos, dificuldades estas que terão grande impacto no estudo de equações e funções entre outros conteúdos.

Centurión (1994) destaca que os conceitos algébricos nas series iniciais tendem a ser mais facilmente entendido pelos alunos, porém nas series finais do ensino fundamental devido à linguagem matemática ser codificado, o que dificulta a aprendizagem dos alunos. Brasil (1998) por sua vez ressalta que o aluno deve reconhecer representações algébricas, expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema, favorecer as possíveis soluções, traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa. Entendemos o que Brasil (1998) esquece de observar que o aluno sozinho não terá a possibilidade de compreender todos estes aspectos, ou seja, ele precisa da atuação do professor para que possa aprender melhor os conteúdos algébricos.

Silveira (2014) afirma que a linguagem matemática possui a característica de ser codificada e para ser traduzida necessita de uma linguagem natural, no caso do Brasil se relacionarmos com as salas de aula a tradução ocorrerá para a Língua Portuguesa. Sabemos que as dificuldades no ensino e na aprendizagem da álgebra perpassam pela utilização de incógnitas e variáveis, causando aversão de muitos alunos. No entanto, sabemos que não é tarefa fácil, pois um dos transtornos maiores no 8º ano no estudo de monômios e polinômios a dificuldade ocorre em traduzir os conceitos algébricos de uma forma que faça sentido para os alunos, e no que diz respeito ao papel do professor, é que o mesmo precisa criar estratégias que visem que os alunos aprendam as regras matemáticas.

Assim, o presente artigo tem como objetivo apresentar reflexões acerca do ensino de polinômios na perspectiva da filosofia de Wittgenstein. Para tanto, neste estudo de caráter

bibliográfico, trazemos à luz alguns conceitos do filósofo como o conceito de jogos de linguagem e de seguir regras, além de alguns autores da educação matemática como Silveira (2014) e Teixeira Junior (2016).

Um pouco da filosofía da linguagem de Wittgenstein

O presente tópico objetiva apresentar um recorte da filosofia de Wittgenstein, mais precisamente dois dos conceitos presentes em uma das obras do filósofo: *Investigações Filosóficas*. *Jogo de linguagem* para Wittgenstein, em sua obra é o conjunto da linguagem e das atividades que estão entrelaçadas entre si:

> A expressão "jogo de linguagem" deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida. Tenha presente a variedade de jogos de linguagem nos seguintes exemplos, e em outros:
>
> Ordenar, e agir segundo as ordens –
>
> Descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas –
>
> Produzir um objeto de acordo com uma descrição (desenho) –
>
> Relatar suposições sobre o acontecimento –
>
> Levantar uma hipótese e examiná-la –
>
> Apresentar os resultados de um experimento por meio de tabelas e diagramas –
>
> Inventar uma história; e ler –
>
> Representar teatro –
>
> Cantar cantiga de roda –
>
> Adivinhar enigmas –
>
> Fazer uma anedota; contar –
>
> Resolver uma tarefa de cálculo aplicado –
>
> Traduzir de uma língua para outra
>
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar (1979, p.18-19).

Assim, para o filósofo traduzir de uma língua para outra é um jogo de linguagem. Em sala de aula é importante destacar que os alunos precisam traduzir o texto matemático exposto na sala para assim poderem ter sucesso em suas aprendizagens. A partir da leitura do texto, podemos entender que o aluno aprenderá os conteúdos algébricos como polinômios se entender o que esta sendo dito, ou seja participar dos jogos de linguagem que estão sendo tratados em sala de aula.

Wittgenstein (1979, p.187-188) ainda afirma:

> Dois empregos da palavra "ver"
>
> O primeiro: "O que você vê ali?" – "Vejo isto" (segue-se uma descrição, um desenho, uma cópia). O segundo: "Vejo uma semelhança nestes dois rostos" – aquele a quem comunico isto deve ver os rostos tão claramente como eu mesmo.

> [...] Mas podemos também ver a ilustração ora como uma, ora como outra coisa. – Portanto, nós a interpretamos e a *vemos* como a *interpretamos*.

Então imaginemos a seguinte situação: o professor está ensinando polinômios e um determinado momento no quadro ele utiliza a seguinte expressão: $3x^3y+5x^2-x$. O aluno ao se deparar com essa expressão terá várias possibilidades de leitura, porém a tradução que podemos considerar adequada versa sobre entender que é um trinômio de grau 4. Como o aluno que fez a tradução adequada chegou a essa conclusão? Entendemos que para que o mesmo chegasse a essa conclusão é porque anteriormente a este exemplo o professor ensinou em sala que o $3x^3y$ apresenta no *y* grau *1* que somado ao grau do *x* dá o resultado 4º grau. A partir de Wittgenstein (1979) vemos que para que essa tradução tenha sido correta, o aluno precisou seguir uma regra anteriormente ensinada pelo professor, do contrário, ele não teria a visualização *y* ter grau *1*, haja vista que ele não está vendo literalmente o número *1*. Assim, adentramos em outra parte conceitual da filosofia de Wittgenstein que é o *seguir regras.*

Silveira (2014) destaca que é pela linguagem do aluno que iremos entender se o mesmo aprendeu o conteúdo, ou seja, se seguiu a regra matemática que foi necessária na tradução do respectivo texto matemático. Assim, para a autora se vê como fundamental a comunicação em sala de aula para que se verifique o resultado da tradução do aluno.

Para Wittgenstein, seguir uma regra é análogo a traduzir, ou seja, quando eu sigo uma regra eu estou participando de um jogo de linguagem. Assim, entendemos que para que o aluno possa participar dos jogos de linguagem envolvendo polinômios, precisam ser ensinados as regras que devem seguir para a partir daí conseguirem sucessos em suas aprendizagens. Sabemos que na educação brasileira é um desafio discutir sobre os aspectos da linguagem, haja vista que quando pesquisamos sobre ensino e aprendizagem é comum nos depararmos com n "formulas milagrosas" que garantem sucesso dos alunos a partir do construtivismo ou da cognição. Acreditamos que apostar nos aspectos filosóficos da linguagem é um caminho que tende a discutir e apresentar resultados tanto científicos quanto em sala de aula, pois o aprendizado dos alunos se dá a partir do domínio das regras matemáticas.

O ensino de polinômios e a realidade em sala de aula

O presente tópico tem como papel e objetivo de apresentar um recorte histórico sobre o ensino de polinômios, trazendo alguns exemplos que fazem interseção com a realidade das salas de aula brasileiras na contemporaneidade. Sabemos que é um desafio destacar o país, haja vista suas dimensões continentais, porém traremos alguns exemplos que comumente vemos em algumas leituras e em nossas experiências docentes.

Inicialmente destacamos que alguns autores da educação matemática dizem que no ensino da álgebra devemos refletir que o aluno já passou pelos conceitos básicos da aritmética. Assim Rocha (2010, p. 90) destaca que "Quando o número é representado por uma letra, isso não é tão fácil para o aluno imaginar e escrever. Por exemplo: quando se pede o triplo de 4, quase que de imediato a pessoa questionada responde e responde 12, talvez a única dificuldade seja lembrar quanto é três vezes quatro. Entretanto, quando se pede o triplo de *x*, talvez a pessoa rebata com outra pergunta: quanto vale *x*?" Com isso, Rocha (2010) remete a ideia de que muitas das dificuldades dos alunos em álgebra podem estar em não ter dominado inicialmente das regras e

técnicas da aritmética. Vemos com isso que vira como uma "bola de neve", ou seja, se não aprendeu determinado conteúdo, tenderá a ter dificuldades e poderá não aprender os conteúdos posteriores da matemática.

Corrobora com este pensamento Garcia (1997) que destaca que "a passagem da aritmética à álgebra é fonte de conflitos e fracassos na matemática escolar". Tal fenômeno tende a ocorrer nas séries iniciais quando os alunos acabam devem ter a um nível de abstração menor do que quando estavam nas séries finais do ensino fundamental. Por exemplo, no ensino de polinômios os alunos se deparam com as letras e números, entrelaçados pela linguagem matemática.

Sobre o ensino de álgebra, Klüsener (2007) aponta que no momento em que se misturam números e letras no ensino de matemática, muitos alunos apresentam índices de erros grandes do que quando apenas números e operações faziam parte de seus estudos.

Teixeira Junior (2016, p. 122) em sua tese intitulada "A terapia de Wittgenstein e o ensino de álgebra" defende que o ensino da álgebra seja visto sob a óptica da filosofia de Wittgenstein:

> A álgebra não se desenvolve a partir de problemas concretos, talvez isso estivesse mais próximo dos avanços dos logaritmos e trigonometria, mas que se utilizaram dos avanços algébricos ou de uma linguagem simbólica mais econômica. Um dos poucos usos cotidianos que colaboraram no desenvolvimento da álgebra está na matemática financeira que buscou modelos para previsões econômicas e de aplicações financeiras que envolvem juros. Mas até nesse caso há muitos exemplos de problemas formulados como desafios, e não necessariamente problemas reais.

Assim, o autor critica de forma clara as concepções construtivistas de um ensino de álgebra e que as contextualizações muitas vezes ao invés de contribuírem com a aprendizagem dos alunos, acabam por criar uma ideia de que toda a matemática pode ser contextualizada, e que se determinado assunto não apresenta fácil contextualização, não serve para ser ensinado para o aluno. Com isso, entendemos que Teixeira Junior (2016) corrobora com Silveira (2005) que o caminho da aprendizagem da matemática passa a partir da prática de exercícios da própria matemática.

Silva (2009) aponta uma grande resistência dos professores às inovações, e que essas inovações podem auxiliar, complementar o tradicionalismo, permitindo maior um dinamismo nas aulas de Matemática. Entendemos que tais inovações não dizem respeito apenas as tecnologias, por exemplo, mas sim também a estratégias diferenciadas e também uma aposta para que o uso da linguagem em sala de aula seja clara, evitando confusões e traduções equivocadas. Sabemos que o aluno pode errar uma questão, porém sabemos também que o mesmo pode chegar a esse erro devido falta de clareza por exemplo no uso da linguagem por parte do professor.

O ensino de polinômios e os desafios da linguagem

O tópico a seguir apresenta nossos resultados teóricos da pesquisa. Sabemos e como já exposto que a linguagem matemática muitas vezes é de difícil compreensão e acreditamos que a filosofia de Wittgenstein pode trazer contribuições favoráveis a aprendizagem dos alunos em sala de aula.

Sá (2009) destaca que as reflexões sobre nossas práticas e dificuldades de ensino e de aprendizagem em sala de aula favorecem para melhoria das práticas de ensino. A partir daí,

inquieta-nos a respeito do estudo e ensino de monômios e polinômios para o 8º ano do Ensino Fundamental, pois compreender a linguagem matemática presente nos conceitos algébricos pode parecer simples para os professores, mais muitas vezes acaba sendo difícil para o aluno. Por exemplo, um professor coloca no quadro as seguintes expressões: "qual a diferença entre monômios e polinômios? ou, "x é igual a x^2?". O docente ao explicar que partes literais de graus diferentes não podem ser somadas nem subtraídas irá fazer sentido para o aluno se anteriormente ele entender o que é uma parte literal e o que é um coeficiente. Com isso, vemos implícita as palavras de Wittgenstein (1979), pois o aluno irá entender se fizer sentido a ele, ou seja se ele já estiver participando do jogo de linguagem em sala de aula, do contrário esse fará traduções equivocadas que farão ao insucesso na aprendizagem do conteúdo.

Silveira (2014, p.58) em sua obra fala sobre interpretação de textos matemáticos:

> A interpretação do texto matemático consiste em traduzir os símbolos para a linguagem natural e, posteriormente, conferir sentido às palavras imersas em regras gramaticais e regras matemáticas. Fidelidade na tradução dos símbolos e liberdade limitada na produção de sentidos, já que os sentidos dependem das regras matemáticas que devem ser obedecidas. No exercício matemático, traduzem-se os símbolos da linguagem matemática para a linguagem natural. Este jogo de linguagem é necessário porque a linguagem natural não dá conta de explicar os conceitos matemáticos.

Certa vez em uma sala de aula surgiu o questionamento dos alunos por não entenderem situações como $2x.\ 3y = 6xy$, a relação de x por y é complexo sem a compreensão das regras para a multiplicação de monômios com partes literais diferentes, visto que é necessário multiplicar os coeficientes e agrupar a parte literal. Acerca disso, Wittgenstein (1989, p.100) afirma que "Toda a explicação tem o seu fundamento no treino (os educadores deviam lembrar-se disto)". Com isso, vemos que os alunos treinando, exercitando a partir do exemplo conceituado pelo docente, tendem a ter acertos nas questões.

Duarte (2008, p. 80) destaca que "é, portanto, necessário que o processo de aprendizagem da matemática desenvolva essa capacidade de trabalhar com níveis cada vez maiores de abstração". Assim, entendemos que para que sejam alcançados tais níveis de abstração, faz-se necessário uma preocupação com os usos das linguagens de forma cada vez mais clara em sala de aula por parte do professor e aí cabe ao aluno participando do jogo, exercitando, poder traduzir adequadamente os textos matemáticos e consequentemente tendo sucesso na disciplina.

Considerações finais

O presente artigo teve como objetivo apresentar reflexões acerca do ensino de polinômios na perspectiva da filosofia de Wittgenstein. Compreendemos que a matemática, mais especificamente o ensino de polinômios apresenta algumas particularidades que dizem respeito à linguagem matemática empregada no conteúdo. Constatamos ainda que se o aluno aprender a regra matemática, ou seja, ser inserido ao jogo de linguagem matemático envolvendo polinômios terá maiores facilidades da aprendizagem.

Sabemos que este estudo é apenas um recorte que apresenta de forma geral sobre o ensino e a aprendizagem dos polinômios, porém acreditamos que a partir das leituras feitas e nossas contribuições, pois destacamos a filosofia de Wittgenstein como um caminho científico, que

aponta que é a partir do uso de conceitos como jogos de linguagem e seguir regras, podermos perceber que o ensino e aprendizagem é possível pelo viés da linguagem.

Referências y bibliografia

Brasil. (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries) Matemática. Brasília, DF, 142 p.

Centurión, M. (1994). Números e Operações. São Paulo: Scipione.

Duarte, N. (2008). O ensino de matemática na educação de adultos. São Paulo: Cortez.

Garcia, F. F. (1997). Aspectos históricos del passo de la aritmética al álgebra. Revista de Didática de las Matemáticas, Graó, Barcelona, n. 14, ano IV, Outubro.

Gatti, B. A. (2008). Análise das políticas públicas para formação continuada no Brasil, na última década. Revista Brasileira de Educação, n. 37, p. 57- 69, jan./abr.

Klüsener, R. (2007). Ler e escrever: compromisso de todas as áreas. Porto Alegre: Editora da UFRGS.

Lins, R.C, Gimenez, J. (1997) Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas – SP. Ed. Papirus.

Rocha, F. de O. (2010). Aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do ensino fundamental: método da substituição. 171f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação matemática. Unidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Sá, P. F. (2009) Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental. Belém: EDUEPA.

Silveira, M. R. A. da. (2005). Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática. 176 f. Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Silveira, M. R. A. da. (2014). Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.16, n.1, p.47-73.

Teixeira Júnior, V.P. (2016). A terapia de Wittgenstein e o ensino de álgebra. 357 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Unidade Federal do Pará, Belém.

Wittgenstein, L. (1989). Fichas (Zettel). Lisboa: Edições 70, 1989.

Wittgenstein, L. (1979). Investigações Filosóficas. Trad. José Carlos Bruni. 2.ed. São Paulo: Abril Cultural.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Gráficos de funções utilizando o GeoGebra em *smartphones*

Bruno Guimarães **da Silva**
PROFMAT, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
guimaraespmat@gmail.com
Augusto Cesar de Castro **Barbosa**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
accb@ime.uerj.br
Cláudia Ferreira Reis **Concordido**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
concordido@ime.uerj.br

Dentre os aparelhos eletrônicos, um dos que possui maior destaque atualmente é o s*martphone* (NUNES, 2013), não só pela sua tecnologia, como também pela demanda da população. Dessa forma, é aconselhável que professores, pais e até a escola, como um todo, prestem atenção ao uso desse dispositivo por crianças e adolescentes. Embora o aluno não deva usar nenhum aparelho eletrônico em sala de aula, "o professor vem disputando com o *smartphone* a atenção dos alunos, tal disputa vem trazendo prejuízo ao ambiente e à aprendizagem do alunado" (PIRES, 2016, p. 1). Sendo assim, pensamos ser útil lançar mão desse recurso tecnológico em sala de aula.

Por outro lado, um assunto sempre presente nos exames de admissão às universidades é o estudo das funções. Além disso, tem-se a fácil percepção da contextualização deste conteúdo no dia a dia das pessoas. Assim, o tema escolhido para este trabalho foi o estudo de gráficos de funções por meio do *software* Geogebra em *smartphones*. O Geogebra tem sido bem aceito por professores e alunos por vários motivos, dentre os quais podemos destacar a possibilidade de tornar a Matemática mais “palpável”, em aulas mais interesantes e com maior interação, potencializando assim o trabalho do professor.

Foram realizadas quatro atividades em três turmas de 9º ano do Ensino Fundamental e uma turma do 1º ano do Ensino Médio, em duas unidades de um colégio particular da zona oeste do Rio de Janeiro. Para as atividades sugeridas, foram selecionadas as funções afim e quadrática.

A atividade 1 (em torno de 25 min) consistiu em revisar o significado dos coeficientes das funções afins e relacionar as mudanças nos valores desses coeficientes através dos deslizadores do Geogebra, com as consequentes alterações nos gráficos. Esta atividade foi orientada pelo professor de modo que os coeficientes linear e angular fossem alterados separadamente, a fim de que fosse possível ao aluno concluir o que cada uma dessas alterações produziu no gráfico.

A atividade 2 (em torno de 25 min) teve como foco a revisão do significado dos coeficientes das funções quadráticas e relacionar as mudanças nos valores desses coeficientes com as consequentes alterações nos gráficos das funções. Ao construir a função, o aplicativo gera seu gráfico e automaticamente cria três "deslizadores", um para cada coeficiente, de modo análogo ao que ocorreu com a função afim da atividade 1. Aqui também foi orientado aos alunos que permitissem a variação de cada coeficiente separadamente para examinar o impacto nos gráficos das funções.

Na atividade 3 (em torno de 30 min) estudou-se o discriminante e sua relação com os zeros da função quadrática. Para tal atividade, os alunos digitaram no aplicativo GeoGebra, nos seus celulares, a função $y = ax^2 + bx + c$, e, em seguida, digitaram $\Delta = b^2 - 4ac$. De acordo com sinal do discriminante, verificaram as posibilidades de interseção da parábola com o eixo *X*.

A atividade 4 envolveu a análise do vértice da parábola, assim como de seu eixo de simetria. Esta atividade requer um maior domínio das construções no GeoGebra, pois além da parábola, é preciso traçar uma reta paralela ao eixo *X*, que intercepte a parábola em dois pontos quaisquer, A e B, e construir a mediatriz para o segmento $\overline{AB}$. O principal objetivo dessa atividade é perceber que a intersecção da mediatriz com a parábola é o ponto de mínimo ou de máximo do gráfico (vértice V). Além disso, espera-se que o aluno perceba que a abscissa do ponto V é a média aritmética das abscissas do ponto A e B e que as ordenadas completam o conjunto de informações acerca da simetria da curva, dando sentido às fórmulas das coordenadas do vértice.

A maior dificuldade encontrada no uso do *smartphone* foi o tamanho da tela e do teclado, implicando erros na construção dos gráficos. Outro problema encontrado foi a existência de diferentes aplicativos, com interfaces e comandos distintos. Uma sugestão que minimizaria tais dificuldades seria a prévia realização de um minicurso de GeoGebra.

As atividades proporcionaram uma experiência que o aluno não poderia adquirir em uma aula expositiva, como, por exemplo, "manusear" as funções, transformando-as a seu critério. O aluno teve a oportunidade de lembrar os conhecimentos adquiridos não apenas através da memória visual do quadro, do livro ou do caderno, mas também das experiências e visualizações individuais criadas para cada função. Ele pôde comprovar na prática o que é dito pelo professor ou, nos casos dos alunos com maior gosto pela Matemática, verificar as demonstrações realizadas pelo professor em sala. Uma ótima vantagem que o uso do GeoGebra no celular pode proporcionar é a transformação da sala de aula clássica em um laboratório de matemática (ARAÚJO, 2015), o que é especialmente importante em escolas sem este tipo de infraestrutura.

Os autores agradecem à FAPERJ pelo apoio financeiro.

Referências e bibliografia

Araújo, J. R. S. (2015). *Uso de smartphones e tablets como ferramenta do ensino de matemática: o software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado em Matemática) – UFAC – Acre.

Nunes, V. W. N. (2013). Tecnologias digitais na educação: subversão ou submissão. *Revista Appai*, 80, 2-3.

Pires, J. D. (2016). *Uma proposta de aplicativo para o ensino do conceito de funções usando Smartphones e Tablets*. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – USEB – Bahia.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: análise de uma tarefa

William José Gonçalves
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
williamboatematica@gmail.com
André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
andrelt@utfpr.edu.br
Daniel Daré Luziano da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
dlsilvadaniel@hotmail.com
Alessandro Jacques Ribeiro
Universidade Federal do ABC, câmpus Santo André
Brasil
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo

Assumindo que aprender Cálculo Diferencial e Integral (CDI) implica analisar de forma coordenada as variações de duas grandezas interdependentes (raciocínio covariacional – RC), apresentamos resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi desvelar ideias do RC mobilizadas durante as discussões coletivas desencadeadas pelo trabalho com uma tarefa matemática em uma turma de CDI. Realizamos uma análise qualitativa, de cunho interpretativo, a partir de recortes da produção escrita e trechos de diálogos de um grupo de estudantes no trabalho com uma dessas tarefas. Concluimos que o grupo analisado mobilizou ideias relacionadas ao RC, como a constituição das quantidades envolvidas na situação e o processo de medição dessas quantidades, a compreensão de que as quantidades envolvidas variam continuamente e sua coordenação, reconhecendo a direação de crescimento e mudanças na taxa de crescimento. Porém, o grupo não foi capaz de esboçar corretamente um gráfico que representasse a relação envolvida em uma das situações da tarefa.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, Tarefas Matemáticas, Raciocínio Covariacional.

Introdução

Durante praticamente os três anos do Ensino Médio, e ao ingressar no Ensino Superior, ao cursar a disclina de CDI, transitamos por um conceito "formal" de função que, em pouco – ou em nada - "carrega" sua essência: o aspecto covariacional das grandezas envolvidas. Oehrtman, Carlson e Thompson (2008) evidenciam que o uso da definição atual como introdução ao conceito de função no âmbito escolar é inadequada, por tratar-se de uma resposta a problemas que os estudantes sequer podem conceber, uma vez que foi motivada largamente por debates entre matemáticos na busca de respostas à questões internas da própria Matemática.

Uma função relaciona-se a um conceito matemático que descreve como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra. Tal relação pode ser descrita por palavras, símbolos matemáticos e representações, como gráficos ou tabelas. Para Carlson, Jacobs, Coe, Larsen e Hsu (2003, p. 124), o raciocínio covariacional (RC) contempla "as atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades que variam quando se presta atenção às formas como cada uma delas muda em relação à outra". Conforme destacam Thompson e Carlson (2017), ideias de variação e covariação são epistemologicamente necessárias para que se desenvolvam conceito útil e robusto de função, e servem como bases conceituais para elaboração de conceitos do CDI.

Nessa acepção, elencamos como objetivo da pesquisa a investigação das possibilidades do desenvolvimento de ideias do RC em estudantes de CDI 1, promovidas pelo trabalho com tarefas matemáticas. Procuramos aqui desvelar ideias do RC que foram mobilizadas durante as discussões coletivas desencadeadas pelo trabalho com uma tarefa, recorte do trabalho de dissertação do primeiro autor (Gonçalves, 2018).

Referencial teórico

Em uma abordagem tradicional para quantificar uma função dinâmica do mundo real, o estudante geralmente recebe uma tabela de valores de amostragem, plota pontos no plano cartesiano e, em seguida, usa o gráfico (união de pontos) para estender a tabela. Em um curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), o aluno é então questionado sobre a dinâmica da situação do mundo real que requer a extração de informações dinâmicas de um gráfico estático, como taxa de crescimento e decrescimento, por exemplo. Quando se trata de situações dinâmicas, a maioria dos alunos esbarram na dificuldade de visualização da situação e de como se relacionam as variáveis (Goldenberg, Lewis, & O'Keefe, 1992).

Uma abordagem possível para apoiar o pensamento dos alunos, no intuito de ajudá-los a imaginar relacionamentos entre quantidades que mudam continuamente, seria levá-los a pensar em pequenas mudanças nas quantidades como forma de promover seu raciocínio com variação contínua. Porém, para Thompson e Carlson (2017), apoiados em trabalhos de Castillo-Garsow, isso não é suficiente, uma vez que, para pensar em variação contínua envolve deve-se, necessariamente, pensar em movimento.

Assim, um conceito presente nessa discussão é o de movimento fictivo: "aquele em que o objeto, apesar de estático, pode ser mais bem compreendido pelo movimento dinâmico que sugere" (Frant, Silva, & Powell, 2013, p. 36). Por exemplo, ao dizermos que uma estrada "vai" de um extremo ao outro do país, nada realmente se move, ainda que falemos como se algo

estivesse se movendo (em função do uso de um verbo de movimento: "ir"). Thompson e Carlson (2017) indicam que "Quando se desenvolve uma imagem refletida de algo se movendo fictivamente, a imagem permanece presente, mas tácita, como uma varredura de atenção que está envolvida ao pensar em todos os elementos de um conjunto (p. 431)". As concepções de tempo implicam e se baseiam no movimento fictivo. Desse modo, concepções de "variação contínua dos alunos podem ser afetadas por sua capacidade de conceber tempo como uma quantidade e, quando eles estão pensando em medidas específicas de tempo quantificado, pelo seu conceito de número" (Thompson & Carlson, 2017, p. 431).

Nosso foco, respaldados por elementos trazidos no quadro teórico proposto pelos autores supracitados, foi pensar tarefas que oferessem aos estudantes de CDI possibilidades para o desenvolvimento de ideias do RC, com base na ideia de "movimento fictivo". Tal forma de pensar é fundamental na compreensão de fenômenos que envolvem quantidades que se relacionam, e que servem de base para a elaboração de conceitos do CDI (como derivadas e integrais, além da resignificação do próprio conceito de função).

No que se refere ao uso de tarefas no ensino de Matemática, da forma como Ponte (2014) propõe, estamos entendendo tarefas como "elementos organizadores de quem aprende, sendo em sua maioria propostas por professores e, uma vez propostas, devem ser interpretadas pelos alunos podendo originar atividades diversas" (p. 14). Assim, tarefas são "ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática", podendo ou não ter "potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar" (Ponte, 2014, p. 16). Acerca do papel das discussões coletivas no trabalho com tarefas matemáticas, Ponte (2017, p. 34) destaca que "tanto a investigação como a prática profissional mostram como momentos de discussão são essenciais para a compreensão matemática por parte dos alunos".

Com base nas ideias presentes em trabalhos desenvolvidos em nosso grupo de pesquisa, como Trevisan e Mendes (2018), temos defendido a organização de ambientes de ensino e de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas. Para esses autores, o termo "ambiente de aprendizagem" refere-se ao contexto em que ao indivíduo são oferecidas oportunidades para aprender. Já os "episódios" são momentos em que os estudantes são organizados em grupos e a eles são propostas tarefas, não sejam precedidas da apresentação de definições ou exemplos similares, que contribuam para a exploração intuitiva de ideias matemáticas e possibilitem uma posterior sistematização de conceitos.

Procedimentos metodológicos

A discussão que trazemos neste artigo é parte intregrante de um estudo mais amplo (Gonçalves, 2018), o qual foi desenvolvido numa perspectiva qualitativa, de cunho interpretativo. Tal estudo, intitulado "Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino", teve por objetivo investigar os processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de ambientes de ensino e de aprendizagem de CDI, considerando as condições reais às quais estamos sujeitos. Assim, trabalhamos com a criação de tarefas e, intrinsecamente associado a isso, investigado formas de utilizá-las em sala de aula, bem como aprendizagens por ela propiciadas (Trevisan e Mendes, 2018), que oportunizem aos estudantes reinventar o CDI (Freudenthal, 1973), que permitam a criação de conceitos e teoremas fundamentais utilizados intuitivamente antes que sejam descritos

com precisão ou provadas.

Para esse estudo foram organizados cinco episódios de resolução de tarefas junto a uma turma de Engenharia de uma Universidade Federal do Paraná (Brasil), ingressantes no curso no 2º semestre de 2017 e matriculados na disciplina de CDI 1[1]. Cada episódio se consistiu a partir de um encontro composto por 3 aulas de 50 minutos, o qual foi organizado buscando-se atender pressupostos de um ambiente de ensino e de aprendizagem pautado em episódios de resolução de tarefas: aos alunos, organizados em grupos de 3 a 5 integrantes, foram propostas sequências de tarefas sem que houvesse alguma explicação prévia de conteúdos. Para a organização das tarefas, levamos em consideração um conjunto de ideias do RC que poderiam ser mobilizadas nas tarefas propostas, a constar:

- (i) Constituir quantidades envolvidas na situação (reconhecer atributos de uma situação passíveis de medição);
- (ii) Raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades;
- (iii) Imaginar medidas de quantidades variando continuamente;
- (iv) Coordenar duas quantidades que variam juntas:
    - (a) reconhecer que as quantidades se relacionam;
    - (b) reconhecer direção de crescimento - ambas crescem/decrescem, por exemplo;
    - (c) reconhecer a existência de taxas de variação - cresce mais rápido/mais lento, ou cresce a uma taxa crescente ou decrescente;
    - (d) identificar eventuais mudanças na taxa de crescimento.

Visto que esses estudantes já haviam tido contato com uma definição formal de função em seu Ensino Médio, nosso intuito, por meio da realização dessas tarefas, era que (re)significassem esse conceito. Em todas elas, buscou-se mobilizar a articulação entre múltiplas representações (linguagem natural, tabela, gráfico), no intuito de coordenar a variação das quantidades envolvidas, reconhecendo a existência de taxas de variação e eventuais mudanças nessas taxas.

A tarefa que foi selecionada para análise neste artigo, que compõem o último episódio (ocorrido em novembro de 2017), tem o seguinte enunciado: *Construir um gráfico que relacione o perímetro e a área de uma praça supondo que ela tenha formato: (a) Circular; (b) Quadrado.*

Para coleta de dados fizemos uso da produção escrita dos estudantes e do áudio de um dos grupos (composto por três estudantes, aqui nomeados C1, C2 e C3) enquanto trabalhavam com a tarefa, bem como das anotações feitas pelos pesquisadores em seu diário de campo. Para fins de análise, organizamos recortes que ilustrem o potencial das tarefas em termos de fomentar discussões que envolvem ideias do RC.

[1] Essa disciplina é ofertada no 1º semestre do curso, e contempla em sua ementa o estudo de funções, limites, derivadas e integrais em uma variável real.

Análise dos dados

O grupo iniciou a discussão analisando o caso da praça circular (item a), conforme transcrição a seguir:

[1] C1: O perímetro de um círculo é $2\pi r$.
[2] C2: O comprimento.
[3] C1: E a área é $2\pi r^2$
[4] C2: Não, é πr^2.
[5] C1: Só a fórmula pra gente pensar na fórmula. Se aumenta o raio, a área vai aumentar muito mais do que aumenta o perímetro, então, se a gente for construir uma relação entre a área e o perímetro; conforme o perímetro está crescendo, a área está crescendo muito mais. Porque o raio aumenta pros dois. Vamos supor, aumenta 5 pros dois. Esse aqui [área] vai ser 5 ao quadrado, 25, esse aqui [perímetro] vai ser 10, não é dobro, mas esse aqui [área] aumenta mais depressa que esse [perímetro]...faz sentido?
[6] C2: Faz. E quanto mais o raio vai aumentando mais a área vai aumentando.
[7] C1: Os dois aumentam juntos. E a área aumenta pra cima, aumenta aumentando. Aumenta crescendo.

Em seu diálogo, mostraram reconhecer que a taxa de crescimento da área em relação ao raio é maior que a do perímetro. Nesse caso, utilizaram o "raio" implicitamente para analisar como área e perímetro se relacionam. Nesse viés, mostraram perceber que existe uma covariação entre as grandezas observadas. Os gráficos apresentados pelo grupo, após discussão, tinham formas diferentes, conforme Figura 1. No lado esquerdo, podemos observar que o gráfico cresce a uma taxa crescente. No lado direito cresce também, porém a uma taxa decrescente. Embora eles tenham pensado de forma correta, os elementos discutidos parecem não ter sidos suficientes para embasar o formato do gráfico e sua relação com o modo como as grandezas envolvidas se relacionam.

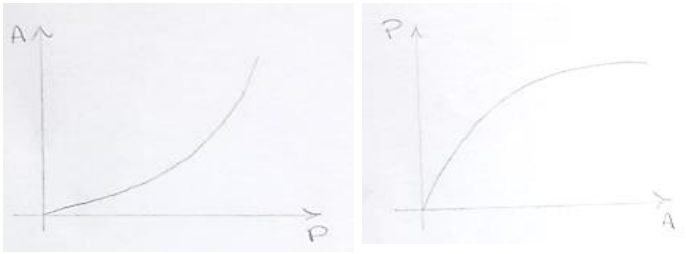


Figura 1. Gráficos apresentados pelo grupo, relacionando área e perímetro da praça circular.
Fonte: autores.

Continuando a discussão, agora do item (b):

[8] C2: E se for um quadrado?
[9] C3: Agora, nesse caso, o perímetro cresce mais que a área.
[10] C2: A área do quadrado é base vezes altura. E o perímetro é a soma de todos os lados.
[11] C3: É, porque ó! A área é lado ao quadrado e o perímetro é quatro vezes o lado.
[12] C2: Não importa o valor. Mesmo que o lado seja 20, temos que 20^2 é 400.
[13] C3: Não... Não sempre. Põe lado igual a 2, por exemplo, a área fica 4. O perímetro fica 8.... É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro.
[14] C2: A gente vai encontrar esse maior? Tipo o ponto máximo?
[15] C3: Hã?
[16] C2: A gente vai encontrar esse ponto?

[17] C3: Ah, tinha que encontrar...
[18] C2: Derivar.
[19] C3: Eu acho que não precisa é só, tipo, um esboço, sabe? É só a gente imaginar assim ó.

O grupo conseguiu nesse trecho de discussão, reconhecer que o perímetro cresce mais rapidamente que a área até certo momento (trechos [9] e [13]), ainda não identificado. Chegam a transitar por ideias do CDI, como mostrado em [14] e [18] tendo lembranças que algum item do CDI encontro os pontos de máximos, chegam a mencionar derivada.

[20] C3: Então a área tipo vai... Não sei, no começo ela vai bem baixinha.
[21] C2: A gente faz tipo, esse crescimento aumentar.
[22] C3: E começa pequeno.
[23] C2: Daí quando o lado é 3, o perímetro 12, a área é 9. Quando o lado é 4, o perímetro é 16 e a área é 16.
[24] C4: Depois que ela começa...
[25] C2: No 4.
[26] C2: Daí quando é 4 as duas são iguais... E daí depois a área aumenta.

Observando as falas do grupo, aquilo que era dúvida no início da discussão parece ser resolvido agora. O grupo reconhece que perímetro e área relacionam-se a uma taxa crescente. Porém, ao pensar em separado na relação "perímetro-lado" e "área-lado", inferem, de forma equivocada, que há uma mudança na taxa de crescimento, construindo uma representação gráfica na qual aparece um ponto de inflexão (Figura 2), conforme diálogo abaixo.

[33] C1: Se a gente fizer o contrário, tem que ser por área e tempo?
[34] C2: Sim. Tem.
[35] C3: Pode ser área por perímetro.
[36] C2: É mais fácil.
[37] C1: Pode ser perímetro por área. A gente coloca, o perímetro cresce mais quando passa do quatro e o perímetro cresce quando passa do 4, fica mais bonito.
[38] C2: Tá ótimo.
[39] C1: Esse aqui se a gente quiser fazer perímetro por área, a área cresce mais que o perímetro, então o perímetro cresce menos conforme a área aumenta.

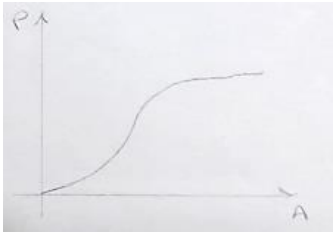


Figura 2. Gráfico apresentado pelo grupo, relacionando área e perímetro da praça quadrada.
Fonte: autores.

Interpretação e discussão dos dados

Na resolução proposta, o grupo utilizou o "raio" implicitamente para analisar como área e perímetro se relacionam, no caso da praça circular, e o "lado", no caso da praça quadrada. Nesse viés, mostraram reconhecer que existe uma covariação entre as grandezas observadas, concebendo o movimento fictivo (Frant, Silva, & Powell, 2013), na qual as grandezas envolvidas (no caso, o perímetro e a área), apesar de serem estáticos, foram compreendidas pelo movimento

dinâmico que a situação sugere .

Para a praça quadrada, inferimos que os alunos reconhecem a covariação entre as grandezas de forma que ambas possuem a mesma direção de crescimento, porém, inferem equivacadamente que a taxa de crescimento do perímetro em relação à área altera-se conforme aumenta o lado do quadrado (*É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro*). Chegam a tratar de taxa de crescimento para ambos os casos de forma "intuitiva" e também percebem que as taxas envolvidas se alteram (Carlson et al., 2003).

Em suas discussões, os estudantes utilizam de forma superficial algumas ideias do CDI associadas a conceitos que já se havia se sistematizado durante as aulas. Se observarmos, são listados alguns termos próprios do CDI, como, por exemplo, "ponto máximo" e "derivar"; em especial, ao reconhecerem de forma implícita a existência de uma taxa de variação que está se modificando. Emboram cheguem mencionar o termo "derivar", não parece ser claro o que significa numa situação como essa o conceito de derivada, e como se relaciona com a representação gráfica, uma vez que o gráfico da Figura 2 não está correto. Na fala mencionam ser importante achar esse ponto onde o perímetro deixa de crescer mais rápido que a área (*Ah, tinha que encontrar...*), embora optem por buscá-lo por tentativa e erro.

Para o grupo, o momento chamado por eles de "4" representa a mudança da taxa de crescimento entre as grandezas, o que os leva a construir um gráfico com um suposto ponto de inflexão. Em sua discussão, cogitam a possibilidade de inverter os eixos. Tal fato é interessante e importante enquanto reconhecimento de um olhar covariacional, afinal parece que se desprendem da obrigatoriedade definir alguma grandeza que "deva" ser representada no eixo horizontal (Thompson & Carlson, 2017).

Considerações finais

De modo geral, o grupo analisado mobilizou ideias relacionadas ao RC que havíamos planejado para esta tarefa:

(i) constituindo quantidades envolvidas na situação, por exemplo: *Agora, nesse caso, o perímetro cresce mais que a área*;

(ii) raciocinando sobre o processo de medição dessas quantidades, como exposto em *A área do quadrado é base vezes altura. E o perímetro é a soma de todos os lados*;

(iii) fazendo os traços no papel, inferimos que o grupo compreende que, nessa situação, as quantidades envolvidas variam continuamente, uma vez que, ao invés de marcar pontos e uni-los, constrem uma curva contínua;

(iv) coordenando duas quantidades que variam juntas, (a) reconhecendo que as quantidades se relacionam (utilizando, implicitamente, as variáveis "lado" e "raio" para relacionar perímetro e área); (ii) reconhecem a direção de crescimento (lado e perímetro crescem "na mesma direção" - *Os dois aumentam juntos*); (iii) identificam mudanças de taxas de crescimento, conforme fragmento de fala: *É como se no início o perímetro fosse maior do que a área e no final, mais para frente, a área fosse maior que o perímetro*.

Entretanto, embora os estudantes reconheçam na discussão sobre a praça quadrada que, a partir de dado "momento" a área cresce mais rápido que o perímetro (como ocorre com a praça circular), eles não são capazes de reconhecer que o esboço do gráfico seria o mesmo para as duas situações, assumindo de forma equivocada uma mudança na taxa de crescimento (e a representação gráfica utilizando um ponto de inflexão).

Assim, embora durante a discussão, os estudantes tenham mostrado compreender elementos relacionados ao RC, eles não souberam como representar graficamente a relação entre as grandezas enredadas. Esse "faltar mão" é uma questão que emergiu de nossos dados e que permanece em aberto, demandando maior aprofundamento teórico, tanto na busca de compreendê-la, quanto para subsidiar reformulações nas tarefas propostas. Apesar disso, reconhecemos as potencialidades de tarefas como essa utilizada em nossa pesquisa, para uma ressignificação do conceito de função, visto que ampliam a abordagem usualmente presente em livros tanto do Ensino Médio quanto de CDI que tratam desse conceito.

Referências

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E.(2003) *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos*: una marco conceptual y un estudio. EMA, 121-156.

Frant, J. B., Silva, W. Q., & Powell A. B. (2013) Explorando tarefas com tecnologias digitais para o ensino de fenômenos periódicos: quando o movimento fictivo se torna factível. *Revista Educação e Cultura Contemporânea*, 10, 2, 29-49.

Freudenthal, H (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gonçalves, W J. (2018) *Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo Diferencial e Integral*: possibilidades de desenvolvimento a partir do uso de tarefas. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina.

Goldenberg, P., Lewis, P., & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of a process understanding of function. In: Dubinsky, E., & Guershon, H. (Ed.). *The concept of function*: Aspects of epistemology and pedagogy, 235-260.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W.(2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In: Carlson, M. P., & Rasmussen, C. (Eds.). *Making the connection*: Research and practice in undergraduate mathematics Washington, DC: Mathematical Association of America, 27-42.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: Ponte, J. P.(Ed.) Práticas profissionais dos professores de Matemática. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 13-30.

Ponte, J. P. (2017). Discussões Coletivas no Ensino-Aprendizagem de Matemática. In: GTI (Ed.). A *Prática dos Professores*: planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: APM, 33-56.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017) Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In Cai, J. (Ed.). *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 421-456.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2018) Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautados em episódios de resolução de tarefas: uma proposta de caracterização. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 11, 209-227.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Raciocínio covariacional em aulas de Cálculo: propostas de tarefas

Daniel Daré Luziano da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
dlsilvadaniel@hotmail.com
André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
andrelt@utfpr.edu.br
William José Gonçalves
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina
Brasil
williamboatematica@gmail.com

Muitas das dificuldades estudantes apresentam na compreensão de conceitos matemáticos é que esses são "passados" de forma expositiva e o conhecimento matemático resume-se assim a um conjunto de fórmulas e normas pré-estabelecidas, em que eles são meros repetidores de processos. Elegemos como foco de discussão matemática deste trabalho o pensamento funcional, cuja gênese envolve atentar-se às quantidades que variam e na relação entre essas quantidades. Há duas formas de abordagem de relações no conceito de função: a covariação entre quantidades (análise coordenada das variações de duas grandezas interdependentes) e a correspondência entre quantidades (Thompson & Carlson, 2017)

Em uma abordagem tradicional para quantificar uma função dinâmica do mundo real o estudante geralmente recebe uma tabela de valores de amostragem, plota pontos no plano cartesiano e, em seguida, usa o gráfico (união de pontos) para estender a tabela. Em um curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), o aluno é então questionado sobre a dinâmica da situação do mundo real que requer a extração de informações dinâmicas de um gráfico estático como taxa de crescimento e decrescimento, por exemplo. Quando se trata de situações dinâmicas, a maioria dos alunos esbarram na dificuldade de visualização da situação e de como se relacionam as variáveis.

Para Thompson e Carlson [2017, p. 422], "ideias de variação e covariação em valores de variáveis não se encaixam na definição matemática de função atual de hoje", pois adotam os passos de determinação de pontos, produtos cartesianos e o significado de Dirichlet de necessidade de lei de correspondência entre os valores de x e y. A partir disto, redescobrem o conceito de função a partir da óptica da lente covariacional: "uma função, covariacionalmente, é

uma concepção de duas quantidades que variam simultaneamente, de modo que existe uma relação invariante entre seus valores que tem a propriedade de que, na concepção da pessoa, cada valor de uma quantidade determina exatamente um valor do outro" (Oehrtman, Carlson, & Thompson,2008; Thompson e Carlson, 2017, p. 422). Assim o conceito de função passa ser dependente de como a pessoa concebe a relação entre duas quantidades, de modo que ela tenha um atributo que possa ser medido. Vai muito além de um número atribuído. Pensar em quantidades que variam não é pensar em tabelas de números que aumentam ou diminuem grandezas, mas sim em objetos que se alteram continuamente.

Assumindo a necessidade em se "desconstruir" o ensino tradicional de CDI e a possibilidade de organização de ambientes de ensino e de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas (Trevisan e Mendes, 2018), desenvolveu-se uma pesquisa que objetivou a produção de aplicativos que pudessem subsidiar a organização de tarefas matemáticas (Ponte, 2014), a partir de uma abordagem covariacional do conceito matemático de função.

Os aplicativos desenvolvidos e as tarefas organizadas, que serão apresentadas neste pôster, ajudam a mobilizar o RC, e assim contribuem para uma ressignificação do conceito de função, necessária ao entendimento de conceitos próprios do CDI. Para sua organização, aplicou-se uma busca sistemática de aplicativos que possibitassem a exploração do RC, em sites e plataformas, como o "GeoGebra - Aplicativos Matemáticos". Em seguida, realizou-se adaptação de alguns dos recursos encontrados e desenvolvimento de novos aplicativos para cumprirem os objetivos determinados em tarefas encontradas na revisão de literatura ou desenvolvidas pelos autores.

A título de exemplo, trazemos o enunciado de uma das tarefas propostas a estudantes de CDI 1: *Investigar possibilidades de se construir uma praça em forma retangular dentro de um terreno quadrado de 80m de largura, sendo que cada vértice da praça deve estar sobre um dos lados do terreno.*. O trabalho com essa tarefa possibilitou a vários grupos de estudantes mobilizar ideias relacionadas ao RC, como a constituição das quantidades envolvidas na situação e o processo de medição dessas quantidades, a compreensão de que as quantidades envolvidas variam continuamente e sua coordenação, reconhecendo a direção de crescimento e mudanças na taxa de crescimento.

Referências

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W.(2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In: Carlson, M. P., & Rasmussen, C. (Eds.). *Making the connection*: Research and practice in undergraduate mathematics Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 27-42.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: Ponte, J. P.(Ed.) Práticas profissionais dos professores de Matemática. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, pp. 13-30.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017) Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In Cai, J. (Ed.). *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 421-456.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2018) Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautados em episódios de resolução de tarefas: uma proposta de caracterização. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 11, pp. 209-227.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Atividades investigativas com o GeoGebra: reflexões no estudo do gráfico da função quadrática

Elisama de Mendonça **Felipe**
Colégio Pedro II/SEEDUC-RJ
Brasil
lisa-rj@hotmail.com
Edite Resende **Vieira**
Colégio Pedro II/Projeto Fundão – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
edite.resende@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta reflexões geradas por atividades que compõem uma sequência didática aplicada em uma turma do 1º ano do Ensino Médio Regular. Tais relatos compõem a pesquisa de mestrado intitulada 'Interpretar e explorar o gráfico da função quadrática com o GeoGebra: reflexões em uma sequência didática sob a perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica' cujo objetivo foi verificar em que medida o software GeoGebra poderia contribuir para a interpretação do gráfico da função quadrática. A tecnologia dos dispositivos móveis, fundamentada pelos estudos de Marcelo Bairral, viabilizou a realização do trabalho, possibilitando a utilização do referido aplicativo no ambiente escolar. As atividades foram elaboradas e analisadas de acordo com a prática educativa segundo Antoni Zabala e sob a perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. As atividades produziram reflexões que contribuíram para a construção do conhecimento matemático.

Palavras chave: função quadrática, interpretação gráfica, GeoGebra, sequência didática, dispositivos móveis

Introdução

Na prática diária de sala de aula, é possível observar a dificuldade apresentada por muitos alunos, do 1º ano do Ensino Médio em ler e analisar os gráficos de uma função quadrática. E quando uma dificuldade de aprendizagem é detectada pelo professor, cabe a ele refletir sobre tal circunstância, para que seja possível utilizar estratégias apropriadas e recursos educacionais adequados, que possam contribuir para amenizar tais dificuldades encontradas pelos alunos.

De acordo com Duval (2012), as transformações de representações em outras representações semióticas são atividades cruciais da atividade matemática, e a dificuldade dos alunos em compreender Matemática surge da diversidade e complexidade dessas transformações.

Atualmente, observamos o quanto os hábitos da sociedade vêm sendo modificados pelo avanço das tecnologias, em especial as digitais. E as tecnologias móveis, em especial os *smartphones*, estão presentes em toda parte, uma vez que integram o cotidiano da maioria das pessoas e são visivelmente populares entre os alunos, pois é bastante comum vê-los manuseando seus dispositivos no ambiente escolar. Sendo assim, vislumbrou-se o potencial dos dispositivos móveis como recursos pedagógicos que podem vir a contribuir com o contexto educacional e especificamente com a educação matemática.

O software GeoGebra com os recursos da visualização e da associação entre as representações algébrica e gráfica da função foi visto como um instrumento pedagógico que pode vir a contribuir com a interpretação do gráfico da função quadrática. No entanto, para orientar o processo de interpretação do gráfico da função quadrática foi elaborada uma sequência didática que culminou no produto educacional da pesquisa, que é um caderno de atividades intitulado "A interpretação do gráfico da função quadrática: apreendendo com o GeoGebra".

Princípios Teóricos

A leitura das representações gráficas requer dos alunos consciência da correspondência entre as variações visuais do gráfico da função e de sua relação com as variações na escrita algébrica. Duval (2011b) evidencia diversos estudos que apontam a dificuldade dos alunos na leitura e interpretação dos gráficos das funções, de modo que os alunos não conseguem a partir da representação gráfica encontrar a equação de uma reta, até mesmo em casos mais simples. Segundo o pesquisador, não se deve procurar o porquê dessas dificuldades no conceito, mas "[...] na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica" (Duval, 2011b, p. 97).

No trecho a seguir, Duval (2011b) ressalta a importância da abordagem de interpretação global como sendo a mais apropriada, pois depende de uma análise semiótica visual e também algébrica, além de destacar o porquê das dificuldades dos alunos com as representações gráficas:

> A abordagem de interpretação global atém-se ao conjunto traçado/eixos, formando uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação da imagem leva a uma modificação na expressão algébrica. Assim, observa-se a importância de acompanhar simultaneamente tais modificações. Desse modo, conclui-se que "com esta abordagem não estamos mais na presença da associação 'um ponto – um par de números', unidade significativa da expressão algébrica" (Duval, 2011b, p. 99).

Duval (2011b) ressalta a importância da abordagem de interpretação global como sendo a mais apropriada, pois depende de uma análise semiótica visual e também algébrica. Tal abordagem exige que a atenção esteja centrada em um conjunto de propriedades e não sobre valores tomados um a um. Por esta razão, Duval (2011b) destaca a importância da utilização dessa abordagem para que o professor alcance o objetivo de uma utilização adequada dos gráficos cartesianos com seus alunos.

Os dispositivos móveis tornaram-se objetos indispensáveis na sociedade atual, e principalmente no cotidiano dos estudantes. Bairral, Assis e Silva (2015), afirmam que:

> As tecnologias digitais móveis vêm ganhando cada vez mais espaço na vida dos indivíduos. São celulares com *touchscreen, notebooks, tabletes e iPads* que também assam a fazer parte do cotidiano da maioria dos nossos alunos. Embora algumas dessas interfaces não sejam novas, a presença desses dispositivos móveis - principalmente com *touchscreen* – parece assumir uma posição de destaque no ambiente escolar por parte dos discentes, pelo menos, em seu uso pessoal

(Bairral; Assis; Silva, 2015, p. 21).

Diante desse cenário, temos a possibilidade de aproveitar um objeto presente no dia a dia do aluno como um recurso educacional que pode vir a contribuir com a aprendizagem, especificamente a aprendizagem matemática.

Na Educação Matemática, sua utilização faz diferença para alunos e professores. Bairral, Assis e Silva (2015) ressaltam o quanto o uso dos aplicativos para dispositivos *touchscreen* é importante nos processos de ensinar e de aprender Matemática:

> Uma maneira de colocar literalmente a matemática na ponta dos dedos é a utilização dos aplicativos em *tablets* e *iPads.* A tecnologia *touchscreen* possibilita um contato e uma apropriação diferenciada por parte dos usuários, pois são as novas configurações cognitivas e espacialidades com os movimentos – os toques – na tela (Bairral; Assis; Silva, 2015, p. 33).

Os aplicativos disponíveis para *smartphones* e *tablets*, em especial, para o estudo de geometria plana, espacial, álgebra e de funções, proporcionam novas perspectivas de aprendizagem, configurando um ambiente mais instigante e desafiador para o aluno na resolução de atividades matemáticas.

Hohenwater e Preiner (2007) alegam que o propósito fundamental do GeoGebra é proporcionar duas representações de cada objeto matemático em sua janela algébrica e gráfica. Dessa forma, mudando um objeto em uma dessas janelas, sua representação será imediatamente atualizada na outra, possuindo a relevante característica das múltiplas representações, destacada pelos autores. Sobre esse aspecto do GeoGebra, Duval (2011a) assinala que:

> Sem um trabalho específico de análise para aprender a reconhecer as variações qualitativas do contínuo visual traçado e a colocá-las em relação com as variações de alguns tempos simbólicos da escrita algébrica, as representações gráficas não permitem nem ver, nem compreender nem antecipar o que as equações exprimem. E reciprocamente para as equações (Duval, 2011a, p. 114).

A partir desse contexto, reconhecemos a importância de um estudo que priorize as múltiplas representações no conteúdo das funções e a importância do GeoGebra como um instrumento que possibilita esta prática recomendada por Duval (2011a).

Por ser um software de Geometria Dinâmica, é possível com o GeoGebra visualizar tanto a representação algébrica quanto a representação gráfica de uma função. Nesse ambiente, os alunos poderão explorar as propriedades da função quadrática, identificar os coeficientes e analisar o comportamento da função, estabelecendo relação entre as representações gráfica e algébrica.

Metodologia: princípios e percurso

Trata-se de uma pesquisa qualitativa do tipo pesquisa-ação que foi realizada com 33 alunos do 1º ano do Ensino Médio de um Colégio Estadual do Rio de Janeiro.

Segundo Alves-Mazotti e Gewandsznajder (2004), as investigações qualitativas necessitam de um planejamento cuidadoso, a fim de que o pesquisador não se perca em uma grande quantidade de dados. Por esta razão, foi realizada uma intensa pesquisa bibliográfica a fim compreender o tema e traçar estratégias adequadas para a realização da pesquisa.

De acordo com Engel (2000), a pesquisa-ação busca agregar a pesquisa à prática, ou seja, é um modo de se fazer pesquisa a partir da prática quando se pretende melhorá-la. Logo, mostra-

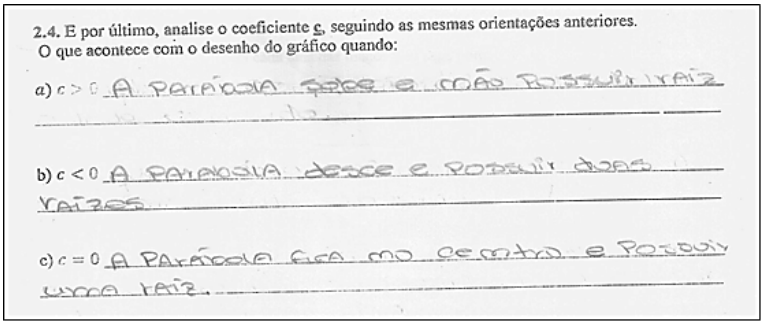
se apropriada ao professor regente que pretende aprimorar sua prática docente.

A sequência didática foi o recurso metodológico adotado para orientar todo o processo mediado pelo software GeoGebra. De acordo com Zabala (1998), as sequências de atividades ou sequências didáticas são recursos metodológicos que propiciam a análise da prática, pois permitem o estudo e a avaliação de maneira processual "[...] ao mesmo tempo que são instrumentos que permitem incluir as três fases de toda intervenção reflexiva: planejamento, aplicação e avaliação" (Zabala, 1998, p. 18). Segundo o autor, as sequências didáticas "[...] são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores quanto pelos alunos" (Zabala, 1998, p. 18).

A sequência de atividades foi aplicada entre os meses de agosto e setembro de 2017, que compõem o 3º bimestre letivo. Foram realizados 8 encontros no total, iniciando com uma aula de ambientação ao GeoGebra, seguindo com as 11 atividades e finalizando com a aplicação de um questionário que buscou revelar as percepções dos alunos quanto ao experimento. As Atividades foram organizadas por etapas de acordo com a característica previamente planejada e com os conceitos matemáticos que se pretendia explorar e investigar. Os dados foram coletados por meio da observação participante, de gravações de áudio e vídeo, das anotações de campo e dos registros feitos pelos alunos, e analisados à luz das teorias que fundamentam este estudo.

Análise e discussão

Nessa seção serão analisados alguns episódios referentes a aplicação de duas atividades da sequência didática, atividade 2 (figura 1) e atividade 8 (figura 3) e uma das perguntas do questionário (gráfico 1) respondido pelos alunos após a aplicação da sequência didática.


2.4. E por último, analise o coeficiente c, seguindo as mesmas orientações anteriores.
O que acontece com o desenho do gráfico quando:

a) $c > 0$ A PARÁBOLA SOBE E NÃO POSSUI RAIZ

b) $c < 0$ A PARÁBOLA DESCE E POSSUI DUAS RAÍZES

c) $c = 0$ A PARÁBOLA FICA NO CENTRO E POSSUI UMA RAÍZ.

Figura 1. Atividade realizada pelo aluno 1B.

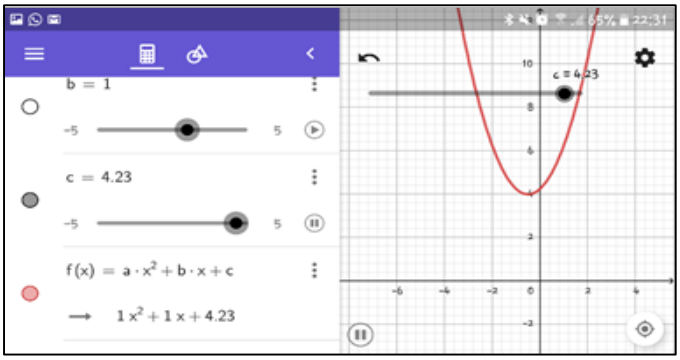


Figura 2. Atividade representada no GeoGebra.

Analisando o coeficiente 'c', (figuras 1 e 2) os alunos conseguiram observar que o gráfico se movimentava pelo eixo y, subindo e descendo, mas encontraram dificuldades em se expressar para relatar tanto oralmente quanto por meio da escrita.

O aluno 1B (figura 1) observou a movimentação do gráfico e ainda a variação do número de raízes de acordo com a localização do gráfico no plano cartesiano, o que grande parte dos alunos também observou. O aluno 1B, também não registrou a localização do gráfico no plano cartesiano de maneira formal, ou seja, em linguagem matemática. Para Powell e Bairral (2006), a escrita força os interlocutores a refletir sobre suas experiências matemáticas, a construir e reconstruir o sentido num processo mediado pelo professor e assim, ele passa a expressar suas ideias com mais clareza, sabendo selecionar o tipo de linguagem apropriada para descrever suas percepções.

Fica evidente a dificuldade do aluno em expressar o que foi analisado mesmo com linguagem própria e mais ainda em linguagem matemática. Os alunos foram incentivados a reescrever seus registros, sempre após uma discussão que os levassem a uma melhor compreensão do que estava sendo proposto. Foi um processo que consistiu no diálogo, na escrita e na reescrita dos registros.

Duval (2011a), evidencia que redação em Matemática exige um trabalho de tomada de consciência das operações discursivas, próprias do pensamento matemático. Ele ainda acrescenta que a falta da produção escrita em Matemática a torna desanimadora e inútil para os alunos.

Por sua vez, Powell e Bairral (2006) alegam que a escrita auxilia os alunos a adquirirem um rico vocabulário, proporcionando oportunidades para trabalharem conceitos e termos matemáticos, além de os tornarem mais confiantes com a Matemática, incentivando-os a aprofundarem no estudo da mesma.

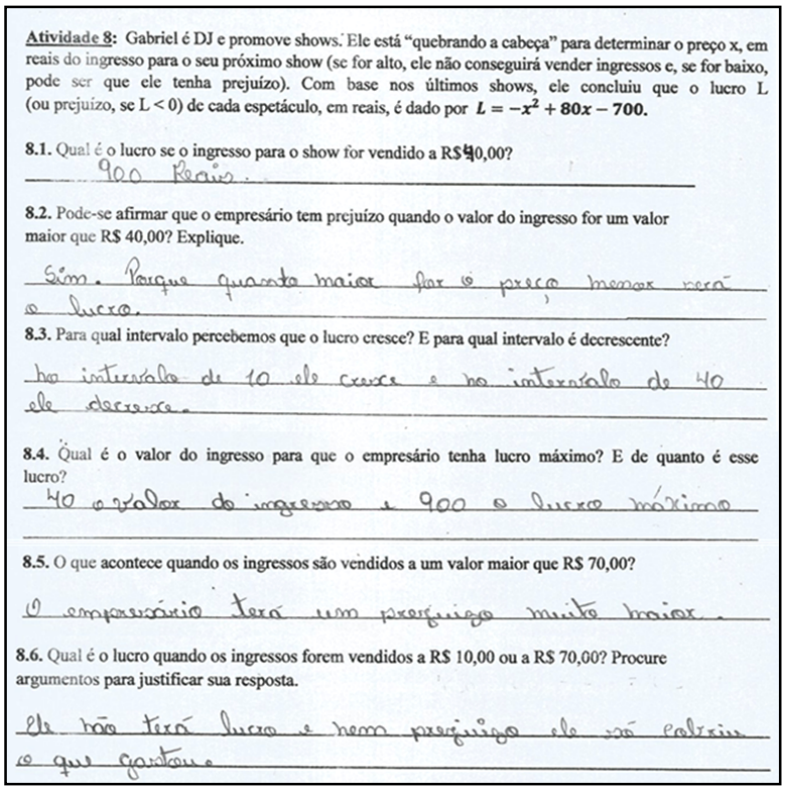
Na atividade 8 (figuras 3 e 4), foi necessário a professora orientar a turma diversas vezes passando pelos grupos, promovendo debates, tirando dúvidas e efetuando as devidas orientações. Essa atividade trabalhou o estudo do sinal da função quadrática de forma contextualizada, trazendo questões de lucro e prejuízo.

O significado das palavras 'intervalo' e 'período' fez parte das indagações dos discentes. A dificuldade em compreender enunciados e o significado de algumas palavras não aconteceu apenas nessas atividades, uma vez que tal problema já foi relatado em atividades anteriores.

Duval (2011a) evidencia o problema do obstáculo da linguagem no ensino da Matemática, afirmando que as dificuldades que envolvem a compreensão dos enunciados dos problemas são sistemáticas e recorrentes. Ele ainda acrescenta que as línguas naturais cumprem ao mesmo tempo duas funções: comunicação e função cognitiva. Sendo assim, o problema de compreensão de um enunciado passa pela decodificação de informações que foram codificadas no enunciado. Entretanto, o autor também afirma que "compreender não é codificar uma sequência de palavras ou frases, mas discriminar as unidades de sentido em função dos diferentes níveis de organização dos discursos e eventualmente, reformulá-los" (Duval, 2011a, p. 75).

No item 8.3 (figura3) realizada pelo aluno 3D é perceptível a dificuldade do mesmo em descrever o intervalo. Quando ele diz que "no intervalo de 10 ele cresce", quis dizer que para

valores de x maiores que 10, a função é crescente, e quando diz que "no intervalo de 40 ele decresce", quis dizer que para valores de x maiores que 40, a função começa a decrescer.



Atividade 8: Gabriel é DJ e promove shows. Ele está "quebrando a cabeça" para determinar o preço x, em reais do ingresso para o seu próximo show (se for alto, ele não conseguirá vender ingressos e, se for baixo, pode ser que ele tenha prejuízo). Com base nos últimos shows, ele concluiu que o lucro L (ou prejuízo, se L < 0) de cada espetáculo, em reais, é dado por $L = -x^2 + 80x - 700$.

8.1. Qual é o lucro se o ingresso para o show for vendido a R$40,00?

900 Reais.

8.2. Pode-se afirmar que o empresário tem prejuízo quando o valor do ingresso for um valor maior que R$ 40,00? Explique.

Sim. Porque quanto maior for o preço menor será o lucro.

8.3. Para qual intervalo percebemos que o lucro cresce? E para qual intervalo é decrescente?

No intervalo de 10 ele cresce e no intervalo de 40 ele decresce.

8.4. Qual é o valor do ingresso para que o empresário tenha lucro máximo? E de quanto é esse lucro?

40 o valor do ingresso e 900 o lucro máximo

8.5. O que acontece quando os ingressos são vendidos a um valor maior que R$ 70,00?

O empresário terá um prejuízo muito maior.

8.6. Qual é o lucro quando os ingressos forem vendidos a R$ 10,00 ou a R$ 70,00? Procure argumentos para justificar sua resposta.

Ele não terá lucro e nem prejuízo ele só cobrirá o que gastou.

Figura 3. Primeira situação da atividade 8, realizada pelo aluno 3D.

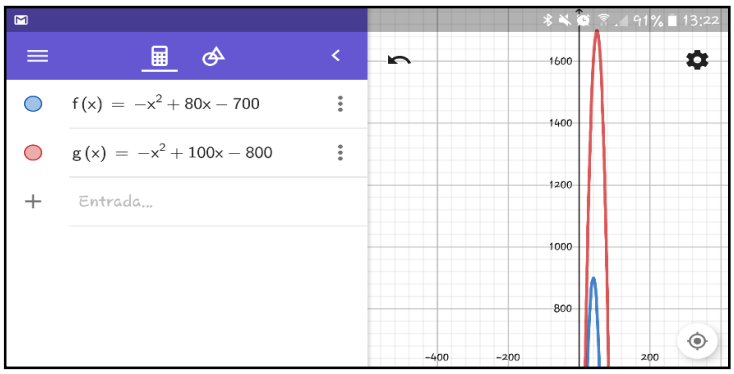


Figura 4. Primeira situação da atividade 8, em azul, no GeoGebra.

Em relação ao registro escrito realizado pelos alunos, Duval (2011a) argumenta que a passagem da expressão oral para a escrita é um salto muito grande para os alunos e a maioria deles encontra dificuldades em fazê-lo. Nesse sentido, Powell e Bairral (2006) também enfatizam que a escrita é uma importante ferramenta para desenvolver a cognição e estimular a aprendizagem matemática, e por esta razão este estudo prezou pelos registros escritos dos alunos não apenas na atividade 8, mas também nas demais atividades.

Em relação ao questionário os discentes foram indagados acerca dos conceitos

relacionados à função quadrática que passaram a ser melhor compreendido por eles com o uso do GeoGebra (gráfico 1):

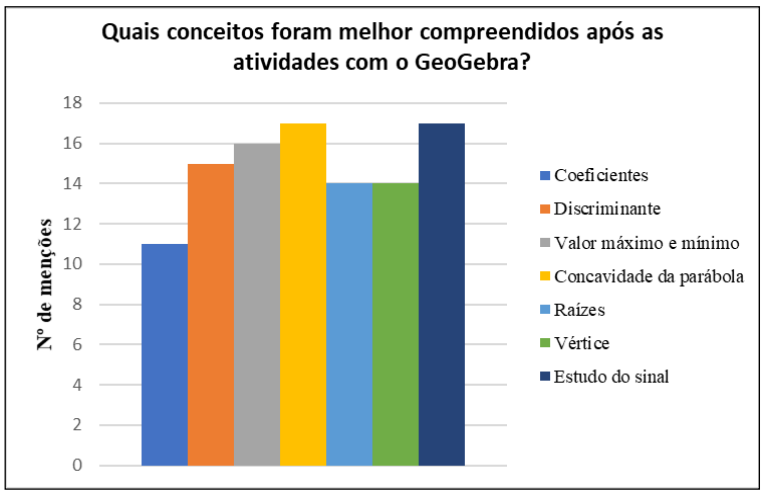


Gráfico 1. Conceitos mais citados pelos alunos

Os alunos verificaram que muitos conceitos, antes pouco compreendidos, passaram a fazer mais sentido após o experimento. Podemos observar no gráfico 1, que tais conceitos não se apresentam de modo tão discrepante em relação aos mais mencionados e nem entre si. O conceito que se encontra mais distante dos demais é o dos coeficientes, embora mais de 10 alunos disseram compreendê-los melhor após a realização das atividades.

No início da aplicação das atividades, os conceitos mais conhecidos pelos alunos eram o vértice e o discriminante, e os menos lembrados foram a concavidade e a própria parábola, gráfico da função quadrática. Já após a realização das atividades, observa-se, no gráfico 1, que os alunos disseram compreender melhor o estudo do sinal, que não havia sido citado no início do experimento e que a concavidade da parábola também foi melhor compreendida pelos alunos.

Considerações finais

As atividades organizadas em uma sequência didática orientaram todo o processo deste estudo, contribuindo para uma melhor utilização dos recursos do software e também no desenvolvimento dos conceitos e propriedades que envolvem a função quadrática.

A visualização e o dinamismo oferecidos pelo GeoGebra foram fatores determinantes na realização das atividades, pois essas características viabilizaram a interpretação do gráfico da função quadrática, o que foi constatado pela professora pesquisadora e também relatado pelos próprios alunos. A possibilidade de visualizar as representações algébrica e gráfica, simultaneamente, permitiu aos alunos relacionar cada gráfico com sua respectiva função, o que exigiu dos alunos um conhecimento de cada uma das variações visuais relacionadas a cada representação algébrica. Além disso, a possibilidade de inserção de várias funções oferecida pelo GeoGebra, ou seja, dos visores algébrico e gráfico comportarem mais de uma função ao mesmo tempo, proporcionou associar e comparar diferentes funções, criando assim um ambiente propício para o levantamento de conjeturas acerca das representações gráficas. Isso demonstra que a tecnologia digital quando utilizada com um direcionamento, visando o desenvolvimento de habilidades e competências específicas, pode vir a fazer a diferença, contribuindo para a aprendizagem discente.

Logo, por todos os aspectos analisados durante todo o processo, podemos concluir que o software GeoGebra contribuiu para interpretação do gráfico da função quadrática, entretanto, ficou evidente que o aplicativo por si só não seria capaz de promover um resultado satisfatório. A figura do professor concorreu por demais nesse contexto discussão e reflexão. Assim, ao se utilizar uma tecnologia, seja ela qual for, como recurso pedagógico, é fundamental que o professor se aproprie dessa tecnologia, desenvolva uma metodologia que oriente toda a prática educativa e busque alcançar o objetivo proposto.

Referências bibliográficas

Alves-Mazotti, A. J., Gewandsznajder, F. (2004). *O método nas ciências naturais e sociais, Pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira, Thompson Learning.

Bairral, M., Assis, A., Silva, B. C. (2015). *Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática.* Seropédica: Ed. UFRRJ.

Duval, R. (2011a). *Ver e ensinar matemática de outra forma:* entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. (ORG). Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM.

_____. (2011b). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112. Acesso em fevereiro 10, 2017, em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96/21794.

_____. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revista Eletrônica de Educação Matemática.* Florianópolis, v. 07, n.2, p.266-297. Acesso em outubro, 22, 2017, em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266.

Engel, G. I. (2000). Pesquisa-ação. *Educar em revista*, Curitiba, n.16, p. 181 - 191. Editora da UFPR. Acesso em janeiro, 16, 2018, em http://www.educaremrevista.ufpr.br/arquivos_16/irineu_engel.pdf.

Hohenwarter, M., Preiner, J. (2007, mar 15). Matemática dinâmica com o GeoGebra. *O jornal de Matemática Online e suas Aplicações*, v.7. Acesso em janeiro, 12, 2018, em https://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/dynamic-mathematics-with-geogebra.

Powell, A., Bairral., M. (2006). *A escrita e o pensamento matemático:* interações e potencialidades. Campinas, SP: Papirus.

Zabala., A. (1998). *A prática educativa:* como ensinar. Porto Alegre: Artmed.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Uma investigação sobre o conhecimento da álgebra e a Resolução de Problemas em anais de dois eventos

Beatriz Rodrigues de **Almeida**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
biarodriguesdsa@gmail.com
Roger Ruben Huaman **Huanca**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
roger@uepb.edu.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar os resultados parciais da pesquisa "Analisando o conhecimento da álgebra e a resolução de problemas: uma pesquisa do encantamento à aprendizagem". Projeto de Iniciação Científica onde busca-se desenvolver abordagens alternativas para à aprendizagem de álgebra. Inicialmente, realizou-se um mapeamento onde foram separadas algumas propostas sobre álgebra dos eventos CONEDU e do CONAPESC em três categorias: álgebra como métodos e técnicas para resolver problemas; álgebra como relação entre grandezas; e álgebra como aritmética generalizada. No momento, estão sendo desenvolvidas abordagens para cada categoria. Partiu-se da hipótese que um aprendizado eficiente de álgebra passa pela compreensão profunda de diferentes categorias nas escolhas de estratégias para que a resolução de problemas algébricos seja feita de forma consciente e não puramente mecânica. Também pretende-se realizar intervenções em escolas públicas do Cariri Paraibano após elaboração de planejamento fundamentado no levantamento destes dados advindos dos eventos, visando a contribuição do avanço no processo de aprendizagem de álgebra.

Palavras-chave: Aprendizagem de álgebra, Resolução de Problemas, Trabalhos em anais de eventos, Álgebra, Educação Matemática.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo apresentar os primeiros resultados do projeto "Analisando o conhecimento da álgebra e a resolução de problemas: uma pesquisa do encantamento à aprendizagem", vinculado ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Cientifica – PIBIC. Este projeto visa elaborar abordagens alternativas para a aprendizagem de álgebra na Educação Básica. Para isso, escolheu-se algumas propostas/trabalhos dos seguintes eventos: Congresso

Nacional de Educação – CONEDU e do Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências – CONAPESC, para poder categorizá-los no contexto da álgebra. Destacam-se estes dois eventos por duas razões: a primeira por ter sido realizado no nordeste do Brasil, localidade onde estava sendo iniciado o Curso de Licenciatura Plena em Matemática da primeira autora, encontrando nestes eventos, a oportunidade de apresentar trabalhos científicos e a segunda razão, por utilizar o mapeamento dos trabalhos como parte do Projeto de Iniciação Científica.

A tomada de consciência das propostas em relação à álgebra destes eventos trouxe reflexões significativas a respeito da aprendizagem da álgebra na Educação Básica. Desta forma, pode-se discutir abordagens que priorizem as tais manifestações, de modo que seja possível propor metodologias alternativas para a aprendizagem de álgebra propriamente dita de maneira eficaz.

Esta comunicação cientifica visa desenvolver e apresentar considerações a respeito das atividades categorizadas. Cabe ressaltar que inicialmente dá-se maior ênfase às manifestações relacionadas à interpretação das variáveis presentes na atividade algébrica, com isso, objetiva-se relacionar algumas características destas manifestações com algumas propostas algébricas discutidas na Educação Básica.

Este trabalho é uma importante contribuição para pesquisas a respeito da aprendizagem da álgebra, no sentido que, além de dar conta de relacionamentos aritméticos e geométricos, como método analítico, também poderá ser amplamente valorizado para o estudo de outras ciências. Nesse sentido, analisar as propostas relacionadas à aprendizagem da álgebra permitirá ter um suporte para entender a dinâmica das ações que os alunos desenvolvem, em relação à resolução de problemas, conforme pode ser auferido no referencial teórico adiante.

Referencial Teórico

No artigo "Reformular a álgebra da escola secundária: por que e como?" House (1994) no início, começa destacando:

> "A álgebra" escreveu um aluno precoce da sétima série, "é muito difícil e, apesar de muito instrutiva, noventa por centro das vezes também é muito frustrante. Significa horas de aulas que nem chegamos de perto a entender." Um colega acrescentou: "Não sei grande coisa de álgebra, mas quem se importa?" (HOUSE, 1994, p. 1).

Observa-se que há muito tempo a álgebra desfruta de um lugar de destaque no currículo de Matemática, representando para muitos alunos a finalização de anos de estudo da aritmética e o início de mais anos de estudo de outras áreas da matemática. Então, o que é Álgebra? Não é tarefa fácil conceituar, porque a palavra álgebra tem sido definida e usada por matemáticos e professores de diferentes formas, dependendo da época e interesse acadêmico. Também, porque mesmo com o grau de independência que ganhou no início do século XIX, não pode ser assumida como uma matéria totalmente independente.

Sabe-se que a matemática é uma manifestação semiótica do desenvolvimento da sociedade e na qual ela é utilizada; consequentemente, a Álgebra, deve ser assumida como uma ferramenta – de organizar, manipular e tratar situações problemáticas – importantes para a sociedade, com caraterísticas próprias, que indicam uma forma particular de pensar e atuar.

Por exemplo, os matemáticos árabes, em particular AI-Khwarizmi (780-850) e Al-Khayyam (1048-1131), que propuseram o termo "*Kitab al-jabr wa al-muqabala*" (RASHED, 1994), expandido por todo ocidente simplesmente como Álgebra. E posteriormente, alguns matemáticos medievais como: François Viète, com sua arte analítica e Thomas Harriot que, independente de Galileu Galilei, aplicou a teoria da proporcionalidade e o método analítico para formular e solucionar problemas de corpos cadentes e de balística (SCHEMMEL, 2008; STEDALL, 2003). Também é importante destacar o matemático renascentista René Descartes, com seu trabalho de geometria analítica. Nesse sentido, para os árabes, a álgebra era vista como a arte de resolver problemas, ou seja, achar valores para as incógnitas em equações polinomiais, mas foram os matemáticos medievais e da modernidade que construíram a álgebra como é conhecida nos dias de hoje.

Derbyshire (2006) disse que, a álgebra é uma das formas mais antigas de pensar matematicamente, sendo hoje um dos instrumentos mais importantes para a solução de problemas em diferentes campos das ciências naturais. Além disso, nos dias de hoje, ela é uma das áreas de maior abstração e generalização da matemática, cujas raízes acham-se fundamentalmente em três elementos: no conceito de número e operações; nas formas de raciocínio proporcional; e no método analítico para a resolução de problemas e a demonstração de teoremas matemáticos.

Para Bos (2001), a álgebra refere-se às teorias e práticas matemáticas que envolvem incógnitas, empregando técnicas e operações algébricas, solução de equações e tratando com números que faz parte da aritmética ou as operações algébricas que são aplicáveis à geometria. Nesse sentido, a álgebra poderia ser assumida como um tipo de prática que trata com incógnitas, números indeterminados e quantidades em geral, ou seja, podem ser operadas como se tratasse de operações aritméticas generalizadas.

Para Usiskin (1995), as diferentes concepções da álgebra podem, de acordo com a interpretação de suas variáveis, ser classificadas em quatro grupos: aritmética generalizada; métodos e procedimentos para resolver problemas; relações entre grandezas e estudo das estruturas. Tais conceitos são demonstrados individualmente adiante.

Na concepção de álgebra como aritmética generalizada, este conceito representa o entendimento da álgebra como generalização dos conhecimentos aritméticos (USISKIN, 1995), ou seja, os objetos algébricos são compreendidos como sendo resultados da ampliação das ideias da aritmética.

A álgebra como estudo de métodos e procedimentos para resolver certos tipos de problemas, talvez seja a manifestação de álgebra mais comum durante as aulas de matemática, pois, de acordo com Usiskin (1995), esta interpretação trata de compreender quais procedimentos devem ser utilizados para resolver certos problemas relacionados à álgebra, sejam eles contextualizados ou não.

Na álgebra como estudos de relações entre grandezas o estudo das funções é, provavelmente, o maior representante desta concepção, a qual explora o estudo de como as grandezas se relacionam (USISKIN, 1995). Nesse sentido, talvez devido à sua natureza intrinsicamente algébrica, alguns educadores em matemática acham que a álgebra deveria ser introduzida através da utilização da variável.

Na álgebra como estudo das estruturas, tem-se de acordo com Usiskin (1995), uma interpretação que trata de entender quais as concepções matemáticas, tais como equivalências entre expressões, simplificações e outras atitudes matemáticas que podem ser úteis ou não para resolver um determinado problema.

No mapeamento das propostas utilizar-se-ão três dos conceitos acima mencionados, que são: álgebra como aritmética generalizada; a álgebra como estudo de métodos e procedimentos para resolver certos tipos de problemas; e a álgebra como estudos de relações entre grandezas, os quais foram propostas, foco deste trabalho. Assim, como já mencionado, acredita-se que o desenvolvimento dessas concepções para a aprendizagem de álgebra seja uma contribuição importante para uma aprendizagem cada vez mais significativa.

Procedimentos Metodológicos

Segundo Alves-Mazzotti (1998, p. 131), "a principal característica das pesquisas qualitativas é o fato de que estas seguem a tradição 'compreensiva' ou 'interpretativa'". Assim, ao utilizar a abordagem qualitativa, a primeira autora deste artigo fez a análise das propostas selecionadas, em um contexto particular em relação à aprendizagem da álgebra.

Também, Goldenberg (2003) afirma que uma pesquisa de caráter qualitativo consiste em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender o que está se querendo coletar. Nesse sentido, esta pesquisa se enquadra nos termos de uma abordagem qualitativa, já que o objetivo da pesquisa é apresentar resultados dos eventos CONEDU e CONAPESC nos últimos dez anos, de modo a contribuir para a aprendizagem de álgebra, buscando desenvolver abordagens alternativas por meio deste levantamento.

Conforme já foi dito, este trabalho apresenta os resultados iniciais do PIBIC. Sendo importante destacar que o projeto mencionado é constituído de várias etapas, mas, neste artigo está sendo apresentada apenas a primeira etapa, ou seja, a análise das propostas/trabalhos de dois eventos. Contudo, vale salientar que, ambos os eventos exibem trabalhos de diversas áreas. Inicialmente para a seleção das propostas buscou-se pelo título ou palavras-chave onde consta o termo "álgebra", o que resultou dessa primeira busca foi uma pequena quantidade de trabalhos. Então, novamente pesquisou-se pelas seguintes palavras-chave: "resolução de problemas", "funções" e "equações". Já nessa segunda busca ou mapeamento, foram encontradas uma quantidade maior de propostas que continham as diferentes concepções desejadas para a investigação. Diante das 136 propostas obtidas na busca dos dois eventos, foram selecionadas 17 (dezessete) propostas. Após a leitura, apenas 4 (quatro) foram selecionadas para este artigo.

Tabela 1

Propostas selecionadas dos eventos CONEDU e CONAPESC

Propostas	**Título da Proposta e autor(es)**	**Anais do evento e local publicado**	**Ano**
P_1	**Proposta:** Ensino-Aprendizagem de álgebra através da Resolução de Problemas: uma proposta para educação de alunos surdos. **Autores:** Virgínia Eugênia da Silva; Dennefe Vicencia Bendito e Eduardo Gomes Onofre.	CONEDU João Pessoal/PB	2017

P_2	**Proposta:** A Resolução de Problemas como estratégia para desenvolver a criatividade, envolvendo um problema de conjuntos. **Autores:** Beatriz Rodrigues de Almeida e Roger Ruben Huaman Huanca.	CONEDU João Pessoal/PB	2017
P_3	**Proposta:** Aprendendo volume e aplicando no sistema de captação e armazenamento de água de chuva da escola Vidal de Negreiros: uma intervenção no 6º ano. **Autores:** Vanessa Lays Oliveira dos Santos; Fabíola da Cruz Martins; Vilmara Luiza Almeida Cabral; Emily de Vasconcelos Santos.	CONAPESC Campina Grande/PB	2017
P_4	**Proposta:** Estratégias utilizadas por licenciandos em Matemática na Resolução de Problemas de Partilha. **Autor:** Estevão Luis Paiva Da Silva.	CONAPESC Campina Grande/PB	2016

Fonte: Organizado pela primeira autora.

Resultados obtidos

Durante a coleta de dados da pesquisa, foram selecionadas para a investigação, quatro propostas tratando da aprendizagem de álgebra. A seguir, são apresentados os resultados obtidos após o levantamento das propostas.

A **P_1** foi trabalhada na concepção da álgebra como aritmética generalizada. Segundo os autores dessa proposta, geralmente, as dificuldades encontradas tendem a ser: foco da atividade algébrica e a natureza das respostas, o uso da notação e da convenção das variáveis e os tipos de relações e métodos usados em aritmética. Entretanto, nessa proposta a grande dificuldade dos alunos aprenderem álgebra, está inteiramente relacionada às dificuldades já apresentadas no estudo da aritmética. Os autores da P_1 têm como objetivo nesta proposta relatar e entender como o aluno surdo a partir de suas experiências, poderá construir seu conhecimento e assim, por sua vez, sua autonomia. Os relatos apresentados na P_1 dizem que a Resolução de Problemas juntamente com a álgebra assume um papel importante no processo de Ensino-Aprendizagem dos alunos, independente das suas particularidades. Neste caso, optou-se por interpretar as atividades levando, também, a estratégia de resolução das atividades por alguns alunos surdos.

Observa-se na **P_2** conceitos que associam as concepções da álgebra com os estudos de relações entre grandezas, pois, na linguagem da teoria dos conjuntos, x e y são consideradas variáveis mudas já que qualquer símbolo poderia ser substituído em seu lugar. A proposta P_2 teve como objetivo expor as possibilidades da Resolução de Problemas, além de ampliar a criatividade do aluno, envolvendo um problema de conjuntos. Os autores desta proposta trabalharam de maneira significativa, reflexiva e colaborativamente as potencialidades do ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas.

A **P_3** pode ser categorizada na concepção da álgebra como estudos de relações entre grandezas, pois, esta proposta está relacionada à forma prática do cálculo de áreas e volume, interpretação e resolução de problemas e construções de gráficos. Além disso, trata-se de um projeto que concorreu ao prêmio Mestres da Educação, no ano de 2015, desenvolvido para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental da escola estadual Vidal de Negreiros – Cuité/PB. A P_3 também enfatiza a relação das aplicações cotidianas da álgebra, por exemplo, na questão da falta de água, onde calcularam o volume do reservatório da escola e obtiveram como resultado,

uma capacidade para 90.000 litros de água e apesar da utilização do número π (pi), não tiveram muitas dificuldades na resolução dos problemas. Comprovando-se que, nessa proposta houve a aprendizagem significativa dos alunos.

A quarta proposta tem relação à álgebra como estudo de métodos e procedimentos para resolver certos tipos de problemas. A pesquisa realizada pelo autor da $\mathbf{P}_4$ teve como objetivo investigar as estratégias utilizadas por licenciandos em matemática na resolução de problemas de partilha. Essa proposta utilizou um teste piloto "que já tinha sido aplicado no trabalho de Câmara e Oliveira (2010)", contendo sete problemas de partilha, que foram aplicados a três turmas do ensino superior no estado da Paraíba. O autor da P_4 propicia um confronto com outras propostas que dialogam sobre problemas algébricos, buscando verificar a influência das variáveis dos problemas de partilha – do número das relações, natureza das relações e do tipo encadeamento – no rendimento dos alunos, verificar a influência das variáveis dos problemas de partilha no tipo de estratégia adotada pelos licenciandos em matemática e comparar o rendimento e as estratégias utilizadas pelos alunos da graduação em matemática com os alunos do Ensino Fundamental I. Nesse sentido, o autor desta proposta trabalhou de maneira a investigar as dificuldades em resolver problemas de estrutura algébrica.

Considerações acerca dos dados coletados

Este trabalho está apenas no início, mas acredita-se que o conhecimento das diversas maneiras de abordar o encantamento como instrumento para a aprendizagem de álgebra é um trabalho de grande importância, e, neste artigo foram apresentados resultados parciais da pesquisa: "Analisando o conhecimento da álgebra e a resolução de problemas: uma pesquisa do encantamento à aprendizagem". Os PCN's colocam o estudo da álgebra como um espaço bastante significativo para que os estudantes desenvolvam e exercitem suas capacidades de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (BRASIL, 1998).

Apesar da crescente dificuldade de aprender a álgebra, foi possível constatar que as propostas selecionadas para este artigo, buscavam entender qual seriam as dificuldades quanto à aprendizagem desta, obtendo como resultado a identificação das dificuldades associada à aprendizagem em aritmética. No entanto, outras propostas buscavam soluções satisfatórias de sanar estas dificuldades do alunado por meio de metodologias como a Resolução de Problemas. Contudo, todos os autores estão preocupados com a aprendizagem significativa do alunado com o assunto Álgebra.

Destacamos como exemplos os estudos a respeito de notação, que caracterizam um estudo de aritmética generalizada; a resolução de equações caracterizadas pelo estudo de técnicas; e a relação entre áreas e dimensões de uma figura geométrica, relações entre grandezas.

Ao finalizar este trabalho, esperamos que as futuras investigações tomem por base os resultados desta pesquisa contribuindo assim, para uma aprendizagem de álgebra cada vez mais eficiente e significativa.

Referências e Bibliografia

Almeida, B.R; Huanca, R.R.H. (2017). A Resolução de Problemas como estratégia para desenvolver a criatividade, envolvendo um problema de conjuntos. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (CONEDU). João Pessoa. *Anais eletrônicos* João Pessoa: Realize, Disponível em:

<http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV073_MD1_SA13_ID8569_16102017105233.pdf>. Acesso em: 13 out. 2018.

Alves-Mazzotti, A. (1998). Parte II – O Método nas Ciências Sociais. In: A. J. Alves-Mazzotti, F. Gewamdsznadjder. *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira.

Bos, H.(2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* New York: Springer Science+Business Media.

Brasil.(1998). Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais – terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília, DF: MEC, SEF.

Derbyshire, J. (2006). *Unknown quantity: a real and imaginary history of algebra*. USA: Penguim book Plume.

Goldenberg, M. (2003). *A arte de pesquisar*: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 7. ed. Rio de Janeiro: Editora Record.

House, P. A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: Coxford, A. F.; shulte, A. P (org.). *As ideias da álgebra*. (pp. 1-8). Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo.

Rashed, R. (1994). *The development of arabic mathematics*: between arithmetic and algebra. Tradução A. F. W. Armstrong. USA: Springer Science+Business Media Dordrecht.

SantoS, V. L. O; Martins, F.C.; Cabral, V.L.A.; Santos, E.V. (2017). Aprendendo volume e aplicando no sistema de captação e armazenamento de água de chuva da escola Vidal de Negreiros: uma intervenção no 6º ano. In: CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS (CONAPESC), Campina Grande. *Anais eletrônicos.* Campina Grande: Realize, 2017. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conapesc/trabalhos/TRABALHO_EV070_MD1_SA1_ID1037_30042017200236.pdf>**.** Acesso em: 13 out. 2018.

Schemmel, M.(2008). *The english Galileo*: Thomas Harriot's work on motion as an example of preclassical mechanics. USA: Springer Science + Business Media B.V.,v. 268. (BOSTON STUDIES IN THE PHILOSOPHY OF SCIENCE).

Silva, E.L.P. (2016). Estratégias utilizadas por licenciandos em Matemática na Resolução de Problemas de Partilha. In: CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS (CONAPESC), Campina Grande. *Anais eletrônicos.* Campina Grande: Realize, 2016. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conapesc/trabalhos/TRABALHO_EV058_MD1_SA91_ID1841_05052016133155.pdf>. Acesso em: 13 out. 2018.

Silva, V.E.; Bendito,D.V.; Onofre, E.G. (2017). Ensino-Aprendizagem de álgebra através da Resolução De Problemas: uma proposta para educação de alunos surdos. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (CONEDU, João Pessoa. *Anais eletrônicos.* João Pessoa: Realize, 2017. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV073_MD1_SA13_ID1737_17102017131453.pdf>. Acesso em: 13 out. 2018.

Stedall, J. (2003). *The Greate Invention of Algebra*: Thomas Harriot's treatise on equations. New York: Oxford University Press.

Usiskin, Z. (1995). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: Coxford, A. F.; shulte, A. P (org.). *As ideias da álgebra*. (pp. 9-22). Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Propuesta para la enseñanza/aprendizaje de las coordenadas polares con GeoGebra

Ronny **Vicent** Millán
Departamento de Matemática, Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maturín
Venezuela
ronnys85@hotmail.com
Fray **Granado** Pérez
Universidad Nacional Experimental de Guayana
Venezuela
frdgp@hotmail.com
Anner **Pariche** Valdivieso
Universidad Nacional Experimental de Guayana
Venezuela
alpv2021@hotmail.com

Resumen

En matemática suele obviarse la enseñanza de sistemas de coordenadas distintos al cartesiano, particularmente el sistema de coordenadas polares. Consecuentemente, algunas aplicaciones del cálculo y en otras áreas no se desarrollan completamente. Partiendo de ello, en este trabajo presentamos la generación de una propuesta didáctica para abordar esta temática con el uso del software GeoGebra, desarrollado a partir de las ventajas de uso de las TIC y con enfoque en el autoaprendizaje. Metodológicamente es una revisión documental de trabajos previos, algunas wiki y videos tutoriales sobre el uso del software GeoGebra. En esta ponencia sólo mostraremos algunas alternativas didácticas surgidas con el uso del software. Al final se desarrolla una experiencia que se fundamente en tres momentos: 1) motivación al estudio; 2) ensayo, indagación y trabajo grupal y 3) la necesidad de incentivar una evaluación continua a través del uso del software.

Palabras clave: coordenadas polares, GeoGebra, autoaprendizaje, propuesta de clase.

Introducción

El sistema de coordenadas cartesianas goza de un lugar privilegiado en el estudio de los conceptos matemáticos (Bocco & Villarroel, 1994), de allí que no es inverosímil que en los cursos de matemática del nivel de Educación Media en Venezuela (preuniversitaria) ocurre que se trabaje casi exclusivamente con ese sistema, excluyendo otros, como el sistema de coordenadas polares (Vicent, 2016), a pesar de ello, hay que señalar que los estudiantes que transitan ese nivel sí tienen acercamientos a éste último, sobre todo en el estudio de la trigonometría en 4to año de Educación Media, pero trabajados en coordenadas cartesianas.

En consecuencia, cuando los docentes de matemática intentan movilizar lo aprendido en coordenadas cartesianas a polares, se enfrentan a que la mayoría de sus alumnos desconocen tal referencia (Vicent, 2016), por lo que éste debe buscar alternativas de enseñanza que coadyuven en la formación matemática de los aprendices. Tal tarea supone un esfuerzo en la enseñanza de este tópico necesario en la formación disciplinar, sobre todo porque el estudio de algunas curvas es más sencillo en coordenadas polares (Barrantes, 2011; Bocco & Villarroel, 1994; Vicent, 2016), además que abre el camino para el estudio de aplicaciones en otros sistemas de coordenadas, tales como las paramétricas, cilíndricas y esféricas.

Asumiendo esa tarea, el propósito de la investigación consistió en generar alternativas de enseñanza para la introducción de las coordenadas polares a través de una forma didáctica, con el uso de recursos computarizados, ya que éstos han demostrado ser medios adecuados en el estudio de la matemática (Delgado, Arrieta & Riveros 2009; García, 2011; Granado, 2016). Para tal fin, hemos recurrido al software educativo GeoGebra, ello porque diversos investigadores reportan resultados favorables de su empleo en la enseñanza/aprendizaje de ese tópico (Baptista, 2017; Barrantes, 2011; Chau & Sánchez, 2010; Pérez, 2014; Vicent, 2016).

Las TIC en la enseñanza de la matemática

El Uso de las TIC en la enseñanza de la matemática ha venido incorporándose en las instituciones educativas. Delgado, Arrieta & Riveros (2009) resaltan que las TIC son recursos esenciales para centrar la educación en el alumno, en el conocimiento, en la evaluación y en la comunidad; sugieren el aprovechamiento de los entornos virtuales en siete principios básicos con el uso de las TIC: propiciar el contacto entre estudiantes y profesores, fomentar la cooperación entre los estudiantes, propiciar el aprendizaje activo, proporcionar la retroalimentación, enfatizar el uso apropiado del tiempo, propiciar altas expectativas en el estudiante y respetar los diversos estilos de aprendizajes. Particularmente, para esta propuesta, se utilizó el software educativo GeoGebra, que ha demostrado ser versátil en el estudio de la matemática.

El logro de la propuesta dependerá de poner en marcha estrategias que fomenten el Autoaprendizaje a través del uso de las TIC. En el Informe de Seguimiento de la Educación para Todos en el Mundo de la UNESCO (2014), se hace hincapié en capacitar al alumno en pro de conseguir aprendizajes significativos y duraderos desde su propio accionar, dando origen a un paradigma pedagógico focalizado en el aprendizaje autónomo del estudiante, que precisa descubrir y desenvolver las cualidades intrínsecas de cada persona, con el fin de que desarrolle su potencial personal y profesional. La National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2015), también propone una enseñanza matemática enfocada en el aprendizaje, que promueva el libre intercambio de ideas, donde fluya la comunicación entre los actores que intervienen en los procesos educativos, luego, el aprendizaje de la matemática será más significativo cuando se derive del trabajo del estudiante, participando activamente, explorando y ensayando.

Algunos investigadores coinciden en que los medios interactivos son adecuados para el autoaprendizaje de las matemáticas (Berral & Serrano, 2004; Granados, 2016), y afirman que se requiere que los docentes inciten la experimentación, la curiosidad, la investigación, el conjeturar, verificar, entre otras actividades. Precisamente las TIC se han convertido en una clave en la transformación educativa, por ello, coincidimos con la NCTM (2015, p.78) en que el software representa una alternativa que integra a la tecnología con “las herramientas matemáticas como un recurso esencial con el objeto de auxiliar a los estudiantes a aprender, darle sentido a las ideas matemáticas, razonar matemáticamente y a comunicar su pensamiento matemático”

Camino recorrido

La propuesta que se describe -en la siguiente sección- es el resultado de la revisión documental de trabajos previos, así como también de algunas wiki y videos tutoriales sobre el uso del software GeoGebra. La información recopilada se organizó en tres fases: 1) de preparación y reconocimiento de la herramienta, 2) desarrollo de las ideas para la introducción al estudio de las coordenadas polares y 3) evaluación. En esta parte de la investigación sólo se presentan algunas alternativas didácticas surgidas con el uso del software, esto como resultado de las tres fases mencionadas y de algunos ensayos previos realizados por los investigadores con estudiantes que se inician en el nivel universitario. Para efectos de la ponencia, la experiencia se describirá como una especie de guía didáctica, para que pueda ser usada por otros docentes.

Propuesta de clase

A continuación describimos nuestra propuesta de clase. Se sugieren tres fases, llamadas 1) *fase preparativa*, de reconocimiento de la herramienta, 2) *fase de desarrollo*, que enfatiza el uso del software en la enseñanza/aprendizaje del tópico coordenadas polares y 3) *fase de cierre*, consistente en la evaluación de las competencias adquiridas:

Fase Preparativa

Antes del estudio de las coordenadas polares, posiblemente ya el alumno conoce el sistema de coordenadas cartesianas, así como también el uso del software GeoGebra, adquiriendo cierta habilidad con la herramienta y su lenguaje, en caso contrario, será necesario que en la fase preparativa presentemos los comandos y menús de entradas de la herramienta.

Actividad 0. Reconocimiento de los comandos y menús de entrada.

Una vez instalado y abierto el software (se trabajó con la versión GeoGebra 5.0), observaremos dos vistas, una Vista Algebraica y una Vista Gráfica, también un Menú de Accesos Directo, y en la parte inferior la Barra de Entrada.

Es importante que el alumno conozca estos comandos y menús de entrada para que la comunicación, en las diversas actividades, sea fluida; además, es oportuno que esta *actividad* vaya *vinculada* a la Actividad 1, esto es, hacia una motivación al estudio de la temática.

Actividad 1. Motivación al estudio del sistema de coordenadas polares.

En esta fase será importante que las estrategias que el docente exhiba permitan la *construcción de los conocimientos*, el *ensayo* o *experimentación* y el *autoaprendizaje*. Para motivar el estudio del sistema de coordenadas polares proponemos emprender un micro-proyecto. Este partirá con una tarea inicial, que consistirá en el análisis de alguna relación matemática expresada en coordenadas cartesianas, y que evidentemente su análisis sea más sencillo en polares, por ejemplo, la expresión cartesiana de la cardioide: $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$. Esta tarea deberá ser previamente preparada por grupos de estudiantes, donde el alumno movilice sus competencias matemáticas para reconocer dominio y rango de la relación, análisis de la gráfica, intervalos de crecimientos, entre otros; es importante que éste realice la gráfica a mano, con herramientas de graficación. En un segundo momento, la tarea la hilaremos al reconocimiento de los comandos y menús del software y a la graficación de la relación dada; para ello, introducimos la expresión cartesiana en la Barra de Entrada del software y comparamos sus características con lo ya obtenido; finalmente, el docente inducirá la importancia del nuevo sistema a estudiar a través de la *pregunta* y la *discusión*.

Fase de Desarrollo

En esta fase habrá que inducir los conceptos, definiciones, condiciones, propiedades y otros, mediados con el software; también, generar conclusiones, tomar notas para el micro-proyecto, alternar el uso del software con el cálculo manual, generar dudas, reflexiones y preguntas, forjar la evaluación continua y motivar el trabajo en equipo.

Actividad 2. Introducción al sistema de coordenadas polares.

Iniciemos con ubicar puntos en el GeoGebra, supongamos un punto cartesiano $P(3,4)$. Abrimos una nueva ventana GeoGebra, en la Barra de Accesos Directo seleccionamos Punto, ubicamos cualquier punto del plano de la herramienta, y, haciendo doble clic sobre él, modificamos al valor deseado, en propiedades podemos renombrarlo a P. Ahora, calculemos la distancia desde el Origen $O(0,0)$ al punto P, haciendo lo siguiente: ubicamos en el software el punto O (procedimiento análogo al realizado con el punto P); luego, para calcular la distancia entre dos puntos seguimos la ruta: Menú de Accesos Directos–Ángulo (desplegamos)–Distancia o Longitud–Clic en O–Clic en P y en la Vista Algebraica aparecerá la distancia. Aquí ya hemos obtenido un valor referencial (distancia OP) al punto dado, sin embargo sabemos que esa distancia no es única de ese punto, entonces habrá que considerar otra(s) referencia(s); dejamos abierta la discusión y solicitamos anotar las conclusiones a la que se llegue, sobre todo en torno a otros puntos y sus distancias, así como también sobre la unicidad de esta distancia.

Ahora bien, posiblemente otra referencia que se asomará en la discusión, o que el mismo docente inducirá, será el hecho de que cualquier punto en el plano cartesiano determina diversos ángulos, en particular el lado OP y el semieje positivo de las abscisas determina un ángulo. Éste se puede medir con el uso de la herramienta, siguiendo la siguiente ruta: primero agreguemos un punto cualquiera sobre el semieje positivo de las abscisas, digamos $A(3,0)$, y luego: Menú de Accesos Directos–Ángulo–Clic en A–Clic en O–Clic en P, y en Vista Algebraica aparece la medida del ángulo α, que podemos renombrar a θ; es importante que, si tenemos tiempo suficiente, se genere una discusión en torno al cálculo manual de la distancia anterior y del ángulo a través de las herramientas adquiridas en el estudio de la Trigonometría, alternando así el uso del software con las competencias matemáticas previas; asimismo, inducir conclusiones sobre la posibilidad de que estos dos valores que hemos obtenido sean suficientes para determinar un punto en el plano; también interrogarse sobre: ¿es este ángulo θ, único?, ¿qué otras posibilidades hay?; estas dudas darán pie a *activar competencias previas* en matemática.

Entonces, el alumno, con la guía del docente, extrapola y comprueba lo estudiado con el uso de la herramienta y su experimentación y generalización. El proceso deberá ser fundamentalmente inductivo, partiendo del ejemplo; asimismo, es necesario permitir que sea el estudiante quien deduzca los elementos conceptuales y procedimentales, esto es, él (el alumno) debe percatarse por ejemplo, que será suficiente, para el nuevo sistemas de coordenadas, el punto origen y el semieje positivo de las abscisas; para estos dos elementos el docente destacará que al punto O (origen) lo llamaremos polo y al semieje positivo "eje polar" y la distancia obtenida la designaremos con la letra r y lo llamaremos "radio vector", asimismo, θ es el ángulo polar o argumento principal del punto P. Concluimos que, la distancia r y el ángulo θ determinan un par (r,θ)que representa gráficamente un punto en un plano llamado coordenadas polares del punto P; por tanto, hay una relación entre el sistema de coordenadas cartesianas y el polar.

Actividad 3. Consideraciones, ideas, propiedades y transformación de coordenadas.

Lo ideal será que el alumno construya su propia experiencia, por ello, esta actividad se sugiere como tarea evaluativa, contentiva al micro-proyecto. El alumno recurrirá al software y a sus competencias en Trigonometría. Lo primero es comprobar con la herramienta la transformación de un punto cartesiano a polar; para ello seguimos lo siguiente: clic derecho sobre el punto y seleccionamos Coordenadas polares, y verificamos con los valores ya calculados; asimismo, podemos agregar la transformación de otros posibles puntos, como A y O o los puntos cartesianos $B(5{,}0)$, $C(-5{,}0)$, $D(0{,}5)$, $E(0,-5)$ y discutir en torno a ello, además alternar la tarea con el cálculo manual y la herramienta; asimismo, puede inducir otras ideas a través de inquietar al alumno con preguntas como: 1) ¿cuál sería la medida de cada ángulo si se mide en sentido contrario e igual a las manecillas del reloj?, ¿qué sentido usa la herramienta?, ¿qué ocurre en la herramienta si agrego un ángulo negativo como referencia; por ejemplo, al comparar los puntos polares $F(3{,}45°)$ y $G(3,-45°)$?; 2) ubique en la herramienta los puntos polares $H(5{,}60°), I(5{,}420°), J(5{,}780°), K(5,-315°)$ y describa ¿qué ocurre?, ¿hay allí otras posibilidades de puntos con esa(s) misma(s) característica(s)?, ¿por qué no?, o si las hay ¿cuántas posibilidades hay?, y ¿cuál expresión generaliza todos esos puntos polares?; 3) ubique en la herramienta el punto polar $L(-3{,}45°)$ y compare con el punto $F(3{,}45°)$ y responda ¿qué ocurre cuando el radio vector es negativo?, determine otras representaciones para los mismos puntos; y 4) compare el punto polar $F(3{,}45°)$ con $M(-3;225°)$, $N(-3;585°)$, $Q(-3;-135°)$ y responder ¿qué ocurre?, ¿hay allí otras posibilidades de puntos con esa(s) misma(s) característica(s)?, ¿por qué no?, o si las hay ¿cuántas posibilidades hay?, y ¿cuál expresión generaliza todos esos puntos polares?; al final, durante la discusión de esta tarea es importante que el docente induzca a comprender que el sistema de coordenadas polares no es biunívoco, ya que un punto cartesiano puede estar representado por infinitos pares de puntos polares.

Estas ideas posiblemente permearan en que el alumno deduzca las relaciones para transformar de cartesianas a polares y viceversa. Para esta actividad el docente se arma de estrategias que permitan canalizar y construir tales ideas; sugerimos hacer transformaciones manuales, tanto de puntos como de expresiones algebraicas, para que el alumno consiga tales habilidades, por ejemplo, transformar la ecuación de la cardioide que hemos analizado.

Actividad 4. Trazado de curvas en coordenadas polares.

Primero proponemos el trazado de alguna curva a mano, por ejemplo la cardioide ya estudiada en su forma polar, $r = 2(1 - \cos\theta)$. En caso de que no se cuente con la hoja de gráficos polares, el software permite elaborar una, así: en una nueva ventada, quitamos la Vista Algebraica y seguimos la siguiente ruta: Menú Principal–Opciones–Avanzado, en Preferencias, seleccionamos Preferencia–Vista Gráfica, y seleccionamos la opción Cuadrícula, en Tipo de cuadrícula seleccionamos Polar, marcamos cuadrícula visible y distancia; para el valor r sugerimos la unidad y el ángulo $\theta = \frac{\pi}{12}$, para visualizar líneas rectas que demarcan cada 15°, allí mismo puede cambiar el estilo y color del trazo si lo desea, así como también modificar otras opciones, obteniendo una página que podremos imprimir para graficar.

Ahora, para trazar curvas polares en GeoGebra, podemos elaborar una página para tal fin. En la construcción de la página es ideal que el alumno participe. En esta parte, las ideas que presentaremos son de Martínez-Esparza (2004); asimismo, es importante mencionar que para graficar curvas en coordenadas polares en GeoGebra se trabaja con Curvas Paramétricas.

Procederemos así: abrimos nueva ventana, activamos la Vista Algebraica, Vista Gráfica y una Vista Gráfica 2. Dejaremos la Vista Gráfica 2 totalmente en blanco, utilizando Preferencias.

Luego, definimos unos deslizadores. Los deslizadores permiten cambiar ciertos valores de acuerdo a los conocimientos ya adquiridos. Agregaremos dos deslizadores, así: Accesos Directos-Deslizador, y clic en Vista Gráfica 2, aparece una ventana para modificar los valores del Deslizador (nombre (a y b respectivamente), y valores Mín.:-100 y Máx.:100, en animación sugerimos Creciente). Ahora, crearemos Cajones de Entrada asociados a los dos deslizadores; ellos permitirán definir el intervalo de dominio de nuestra gráfica. Nuevamente, Accesos Directo-Deslizadores (desplegamos)-Casilla de Entrada, luego clic en Vista Gráfica 2 y aparecerá una nueva ventada, en Rótulo modificar por "Inferior" y lo vinculamos al objeto"a", análogamente, agregamos otra Caja de Entrada, denominada "Superior" y vinculamos a "b".

Ahora definimos las funciones. Vamos a tomar tres ecuaciones en coordenadas polares, que podrán ser modificables al final (tomaremos las consideradas por Martínez-Esparza): $f_1(\theta) = 2;\ f_2(\theta) = \frac{\theta}{3};\ f_3(\theta) = \cos 5\theta$. Introducimos cada una en la Barra de Entrada; sus gráficas cartesianas se verán reflejadas en la Vista Gráfica 2, pero interesa que estén en la Vista Gráfica "principal", para ello seleccionamos cada función con el botón derecho del mouse y damos clic en Propiedades–Propiedades de la función–Pestaña Avanzado, allí marcamos Vista Gráfica y desmarcamos Vista Gráfica 2. Obsérvese que las gráficas están dadas en forma cartesiana, de allí que es conveniente ocultarlas (para ocultar hacemos clic derecho sobre la gráfica y desmarcamos Objeto Visible). Ahora, definimos curvas paramétricas para cada función. Recordemos que una buena parametrización es considerar la relación $r^2 = x^2 + y^2$; entonces; podemos escribir las curvas paramétricas: $\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases}$, donde r y θ son valores ya estudiados.

Es esa parametrización la que utiliza GeoGebra para gráficas en Coordenadas Polares. Se procede: en la Barra de Entrada se introduce la sentencia "$Curva$", y seleccionamos la opción *Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)*; para la función 1, se introduce el primer parámetro, esto es el valor de x , es decir $f_1(t).\cos t$, la segunda expresión es el valor de y, o sea $f_1(t).\sin t$, luego el parámetro que hemos escogido, que es t, y el valor inicial y final serán los deslizadores "a" y "b". Una vez introducidas, con el botón derecho del mouse podemos renombrar como $Curva_1$, $Curva_2$ y $Curva_3$, respectivamente.

Es importante entender qué función cumplen los deslizadores matemáticamente hablando. Recuerde que el dominio de curvas paramétricas está dado en valores de números reales. La idea es que el parámetro t vaya tomando valores en su dominio para que construya la gráfica. Lo importante en polares es que ubique cada punto para el ángulo θ desde 0 hasta 2π. Entonces, podemos fijar el deslizador "a" en cero y mover el deslizador "b" hasta aproximadamente $2\pi \approx 6{,}3$, el cual podemos seguir aumentando, pero que, en algunas curvas polares, no tiene sentido. Entonces, el deslizador "a" da el valor inicial para el parámetro t y el deslizador "b" es el valor final; esto sugiere que el valor del deslizador "b" no puede ser mayor que el valor del deslizador "a"; para que esto último no ocurra hacemos lo siguiente: sobre el deslizador "b" seleccionarlo con el botón derecho del mouse Propiedades, y colocamos como valor mínimo "a", esto garantiza que el valor de "b" nunca podrá ser mayor que el valor de "a".

Ahora construyamos Cajones de Entrada asociados a las funciones dadas. Esto es con la intención de ocultar algunos comando, y que el alumno interactúe con el programa. Crearemos casillas de entrada con los nombres Frunción1, Función2 y Función3, respectivamente, así: Accesos Directo-Deslizador (desplegamos)- Casilla de Entrada, hacemos clic en Vista Gráfica 2 y nos aparece una ventana denominada CajaDeEntrada, en Título colocamos, por ejemplo para la

segunda función, Función_2(θ)=, y lo vinculamos a la función correspondiente. Finalmente, ocultamos la vista algebraica, y estamos listos para trabajar con nuestros estudiantes.

Las opciones de funciones son las que nos permite cambiar a nuevas funciones, los deslizadores permiten cambiar los valores del parámetro para que se observe la construcción; podemos visibilizar alguna gráfica o invisibilizarla, dependerá de lo que vayamos a trabajar. Ahora juguemos con la página ya construida, y empecemos a ver transformaciones, cambios, diferencias, intersecciones de curvas, entre otros, para luego emitir algunas observaciones; además, podemos generar una discusión sobre parametrización, valor final e inicial, entre otros.

Fase de Cierre

Para la actividad en la fase de cierre podemos retar al estudiante con ejercicios y problemas de gráficos polares y su estudio; por ejemplo, solicitar que con la ayuda del GeoGebra, construya y compare las gráficas de funciones elementales en coordenadas cartesianas y polares y generar la discusión, como: a) $f(x) = \frac{2}{x}; con\ x \neq 0$ con $f(\theta) = \frac{2}{\theta}, con\ \theta > 0$; b) $f(x) = 2.\cos 5x$ con $f(\theta) = 2.\cos 5\theta$. También, podemos estudiar algunas curvas polares elementales; por ejemplo, trazar la gráfica de la curva cuya ecuación polar es $r = 2(1 - \cos\theta)$; e inquietar sobre ¿qué ocurre si cambiamos el signo menos $(-)$ por más $(+)$?, verificar propiedades, cortes con el eje de 90°, con el eje polar y su prolongación, simetría respecto a los ejes, intersección de esta curva con otras, determinar su expresión algebraica, definirla como lugar geométrico, etcétera. Cada una de las actividades será parte del micro-proyecto. Las tareas individuales y grupales serán fundamentales para evaluar el avance de los estudiantes, por lo que, en el cierre, la evaluación continua de cada una de las actividades deberán quedar registradas.

Consideraciones finales

El uso de las herramientas TIC en matemática, particularmente del GeoGebra, requerirá de una preparación oportuna del docente. En esta ponencia, que es parte de una investigación más amplia, se muestra las bondades de la implementación de ese software educativo en la enseñanza y el aprendizaje del estudio de las coordenadas polares; aquí resaltamos los siguientes aspectos: 1) las actividades deben ser vinculantes y permitir conocer a profundidad la herramienta y los objetos matemáticos y sus significados conceptuales y procedimentales; 2) es imperante promover, a través de las TIC, la construcción de los conocimientos a través de conjeturar propiedades; 3) el autoaprendizaje será efectivo en la medida que el docente reconozca las debilidades y fortalezas de sus alumnos, así como del seguimiento oportuno y valoración de las tareas; 4) la pregunta, la discusión, argumentación, el trabajo descriptivo, el análisis, entre otras, son herramientas que están ligadas al uso de software; 5) alternar el trabajo de cálculo manual y la comprobación con la herramienta o viceversa, será clave para que el alumno sienta confianza en sí mismo; 6) cualquier contenido de matemática debe recaer en activar las competencias previas al tema a estudiar, para ello se extrapola a través de la generalización.; 7) todo el proceso deberá ser fundamentalmente inductivo, partiendo del ejemplo; 8) el docente debe promueve estrategias formativas que permitan canalizar y construir las ideas y 9) la evaluación deberá ser continua, en cada una de las actividades.

Referencias y bibliografía

Barrantes, H. (2011). Integrales en coordenadas polares y paramétricas. Recuperado de http://repositorio.uned.ac.cr/reuned/bitstream/120809/451/1/MC0178%20C%C3%A1lculo%20Integral%20-%202011%20-%20Matem%C3%A1tica.pdf

Baptista, F. T. (2017). *O ensino de coordenadas polares através do software GeoGebra* (Tesis de maestría). Universidade Estadual de Campinas, Brasil. Recuperado de: http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/325375

Berral Yerón, M. J. & Serrano Gómez, I. (2004). Cambiando la práctica docente (ordenadores, autoaprendizaje, interactividad...) para alcanzar el fin (aprender matemáticas). *Res Novae Cordubenses: estudios de calidad e innovación de la Universidad de Córdoba*, 2, 217-236. Recuperado de: https://helvia.uco.es/xmlui/bitstream/handle/10396/4995/Resnovae2_Berral.pdf?sequence=1

Bocco, M. & Villarroel, M. (1994). Coordenadas Cartesianas: ¿La única opción? *Revista de Educación Matemática*, 9(1), 18-48.

Chau Pérez, N. J. & Sánchez Gutiérrez, R. W. (2010). Coordenadas polares: curvas maravillosas. Revista Electrónica En Blanco y Negro, 1(1), 1-27. Recuperado de: http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/enblancoynegro/article/view/2191/2122

Delgado, M., Arrieta, X. & Riveros, V. (2009). Uso de las TIC en educación, una propuesta para su optimizaciób. *Revista Omnia*, 15(3), 58-77. Recuperado de: http://www.produccioncientifica.luz.edu.ve/index.php/omnia/article/download/7291/7279

García López, M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula* (Tesis de doctorado). Universidad de Almería, España. Recuperado de: https://archive.geogebra.org/en/upload/files/Tesis_MariadelMarGarciaLopez.pdf

Granado Pérez, F. (2016). *Uso de las TIC en el aprendizaje autónomo de la matemática* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maturín, Venezuela.

Martínez-Esparza, C. M. (2004). Mis curvas preferidas. Representación de curvas en coordenadas polares con GeoGebra. Recuperado de: http://www.sociedadelainformacion.com/47/motos.pdf

National Council of teachers of mathematics. (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. México: Editando libros S.A.

Pérez Acuña, U.J. (2014). *Estrategia didáctica para introducir las coordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de la parábola y la elipse* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/48870/1/9273626.2015.pdf

UNESCO. (2014). *Informe de seguimiento de la educación para todos en el mundo. Enseñanza y aprendizaje, lograr la calidad para todos*. Recuperado de: http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002256/225654s.pdf

Vicent Millán, R. J. (2016). *Estudio del Cálculo Integral en Coordenadas Polares: aportes desde las TIC* (Trabajo de ascenso). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maturín, Venezuela.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Mat ou morra: uma atividade lúdica envolvendo enigmas matemáticos

Luciana Ávila **Rodrigues**[1,3]
Universidade de Brasília
Brasil
luavila83@gmail.com

Leonardo Melo **Batista**[2,3]
Universidade de Brasília
Brasil
mbleoeleo@gmail.com

José **Teixeira** Moura Júnior[3]
Universidade de Brasília
Brasil
zetexjr@gmail.com

Resumo

É frequente, em textos acadêmicos, a discussão sobre as dificuldades de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Por outro lado, ampliam-se os estudos sobre metodologias alternativas de enfrentamento desse cenário. Esse trabalho relata resultados obtidos da execução de atividades lúdicas, desenvolvidas em oficinas, que envolveram soluções de enigmas matemáticos que permitiram exercitar e revisar conteúdos curriculares do Ensino Médio. Participaram dessas atividades estudantes do Ensino Médio de escolas públicas do Distrito Federal e ingressantes no curso de Graduação em Matemática da Universidade de Brasília (UnB). A atividade foi

[1] Professora Doutora em Matemática e Tutora do Programa de Educação Tutorial em Matemática da Universidade de Brasília (PET MAT UnB).
[2] Bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET).
[3] Parcialmente financiado por FNDE/MEC/PET.

proposta e executada por integrantes do Programa de Educação Tutorial em Matemática (PET MAT) da UnB. Como suporte para as discussões e para a fundamentação teórica foram usados os trabalhos de Tamarozzi (2001) e Terada (1998). Os resultados mostram que a maioria dos estudantes conseguiram resolver os problemas propostos e se mostraram interessados e motivados. Além disso, o material elaborado serve de apoio para profesores do Ensino Médio.

Palavras-chave: educação, Matemática, lúdico, jogos, Ensino Médio.

Introdução

É frequente, em textos acadêmicos, a discussão sobre as dificuldades de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Parte dessas dificuldades está associada ao fato de que a maioria das metodologias de ensino da Matemática se reduz a um modelo de aulas expositivas, teóricas e abstratas no qual o professor se torna o centro e o aluno tem um papel de mero expectador.

Buscando uma metodologia altenativa de ensino e aprendizagem da Matemática que permita ao aluno ser um agente ativo de seu aprendizado, propomos o presente trabalho que tem por objetivo relatar resultados obtidos da execução de atividades lúdicas, desenvolvidas em oficinas, que envolveram soluções de enigmas matemáticos e cujo material produzido poderá servir de apoio didático para profesores do Ensino Médio.

A busca pelo lúdico é, de fato, um norte a ser seguido quando se trata de melhorar a qualidade da construção do conhecimento matemático. D'Ambrosio (1996) ressalta que o papel do professor deve ser de gerenciar e facilitar o processo ensino e aprendizagem e, de uma forma natural, interagir com o aluno e contribuir com a construção do conhecimento do mesmo.

A ideia da oficina surgiu após analisar um desafio proposto em um livro do Ensino Médio onde era descrita uma situação em que uma pessoa queria passar uma informação secreta à outra e, para isso, ela a enviava duas matrizes 2x2 relacionadas em uma equação com uma incógnita. A partir daí, elaboramos uma oficina em que o conteúdo a ser abordado fizesse parte dos componentes curriculares do Ensino Médio e pudessem ser relacionados com enigmas criptografados. Os conteúdos escolhidos foram funções, funções inversas, matrizes, matrizes inversas e criptografía. Uma abordagem sobre esses conteúdos pode ser encontrada em Olgin (2011).

A criptografía é a arte ou ciência de escrever em códigos (Tamarozzi, 2001). Uma das formas de criptografar é utilizar a substituição de uma letra por um símbolo, chamado cifra. Cifrar é o ato de transformar dados em alguma forma ilegível com o objetivo de manter a informação escondida de qualquer pessoa não autorizada. Decifrar é o processo inverso, ou seja, transformar os dados criptografados na sua forma original, inteligível (Olgin, 2011).

Desde a antiguidade, os romanos já utilizavam essa técnica para transmitir códigos secretos dos seus planos de batalha. Nos dias atuais, o tema criptografía é utilizado na auditoria eletrônica, na autenticação de ordens eletrônicas de pagamentos, no código de verificação do ISBN, nos navegadores de internet, entre outras situações da vida cotidiana (Terada, 1988).

Além disso, atualmente, várias atividades envolvendo jogos de codificação são utilizadas como ferramentas de ensino. Moura (2008) defende que o jogo passa a ter o caráter de material de ensino quando considerado promotor de aprendizagem. A criança, colocada diante de situações lúdicas, aprende a estrutura lógica da brincadeira e, deste modo, aprende também a estrutura matemática presente (Moura, 2008, p.80).

A escolha do tema em estudo possibilita ao professor do Ensino Médio pesquisar e desenvolver atividades didáticas para exercitar e revisar conteúdos desenvolvidos em sala de aula através de atividades de codificação e decodificação, envolvendo conteúdos matemáticos do Ensino Médio (Olgin, 2011).

Metodologia

A atividade intitulada "Mat ou morra" surgiu a partir de um trabalho em grupo, de alunos do Programa de Educação Tutorial em Matemática da Universidade de Brasília, quando cursavam uma disciplina sobre o ensino da Álgebra. A proposta do trabalho era criar uma oficina para ser efetivamente realizada com alunos do Ensino Médio que relacionasse algum conteúdo preestabelecido no currículo de forma não tradicional e que promovesse uma aprendizagem ativa. A partir daí, a atividade foi aperfeiçoada e aprimorada e passou a fazer parte das atividades desenvolvidas pelo grupo PET MAT UnB.

A atividade foi aplicada em eventos como: a Semana Universitária da UnB, a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia (SNCT), que em particular teve como tema "A matemática está em tudo", devido ao Biênio da Matemática (2017-2018). Nesses eventos, os participantes foram estudantes do Ensino Médio de escolas do Distrito Federal (DF) e estudantes de cursos de graduação da UnB. Além disso, a atividade foi aplicada nos Circuitos de Vivências em Educação Matemática, organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Distrito Federal (SBEM/DF), que teve como público estudantes do Ensino Médio de escolas públicas do DF.

O PET MAT realiza semestralmente a Recepção aos Calouros do curso de Matemática, uma atividade cadastrada como um projeto de extensão do Departamento de Matemática da UnB. Assim, a atividade "Mat ou morra" foi adaptada para fazer parte das apresentações da recepção aos calouros, deixando de conter apenas um enigma, para se tornar uma série de enigmas que devem ser solucionados pelos calouros durante a apresentação.

Conteúdo

Os conteúdos explorados fazem parte das componentes curriculares do Ensino Médio e permeiam entre funções, funções inversas, matrizes, matrizes inversas e conceitos de criptografía necessários para conversão de código Morse em letras do alfabeto. Observamos que as

atividades propostas podem ser adaptadas com o objetivo de explorar outros componentes curriculares estudados.

A dinâmica da atividade funciona da seguinte maneira: dois estudantes formam uma dupla, são nomeados de Prisioneiro A e Prisioneiro B e ficam sentados um de frente para o outro, separados por uma mesa, cuja superfície é dividida por um muro feito de isopor, contendo escondida em sua estrutura uma tabela de conversão de código Morse em letras do alfabeto. Cada estudante possui um celular bloqueado com senha desconhecida.

Com o objetivo de desbloquear o celular do Prisioneiro B e parar um cronômetro que nele está ativo para então receber uma recompensa, os participantes deverão resolver os desafios propostos nas fichas correspondentes, cujas resoluções o guiarão a senha do celular que possuem. Um exemplo das fichas utilizadas pode ser visto na Figura 1. Nessas fichas foram explorados os conteúdos de função afim e criptografia.

Com o mesmo objetivo, de maneira alternativa, podemos propor os desafios explorando o conceito de matrizes quadradas e criptografia. Como exemplo podemos utilizar as fichas ilustradas na Figura 2.

Figura 1. Exemplo de ficha do Prisioneiro A à esquerda, e, à direita, uma ficha do prisioneiro B, ambas adaptadas para função afim.

Prisioneiro A1

Atenção! Uma bomba relógio foi ligada. Você e seu companheiro têm 15 minutos. Siga as instruções a seguir para desarmá-la.

- Seu objetivo é desbloquear o celular a sua frente e transmitir a função-chave, que aparecerá ao destravar a tela, para seu parceiro.
- Para fazer isso, use a seguinte senha criptografada:

-.. --.- . -.-.

- Sabendo que a função

$$f : D \to C,$$

definida por $f(x) = x + 2$, é uma função que manda números descriptografados do conjunto D para números criptografados do conjunto C, encontre a senha descriptografada. Use-a para desbloquear o celular, descubra a função e passe-a para sua dupla.

OBS: FAVOR NÃO RISCAR AS FICHAS, ELAS SERÃO USADAS POR OUTROS PARTICIPANTES,OBRIGADO!

Prisioneiro B1

Atenção! Uma bomba relógio foi ligada. Você e seu companheiro têm 15 minutos. Siga as instruções a seguir para desarmá-la.

- Seu objetivo é desbloquear o celular a sua frente e para o cronômetro que nele estará rodando.
- Para fazer isso, use a seguinte senha criptografada:

.... .--. -- .---

- Sabendo que a função

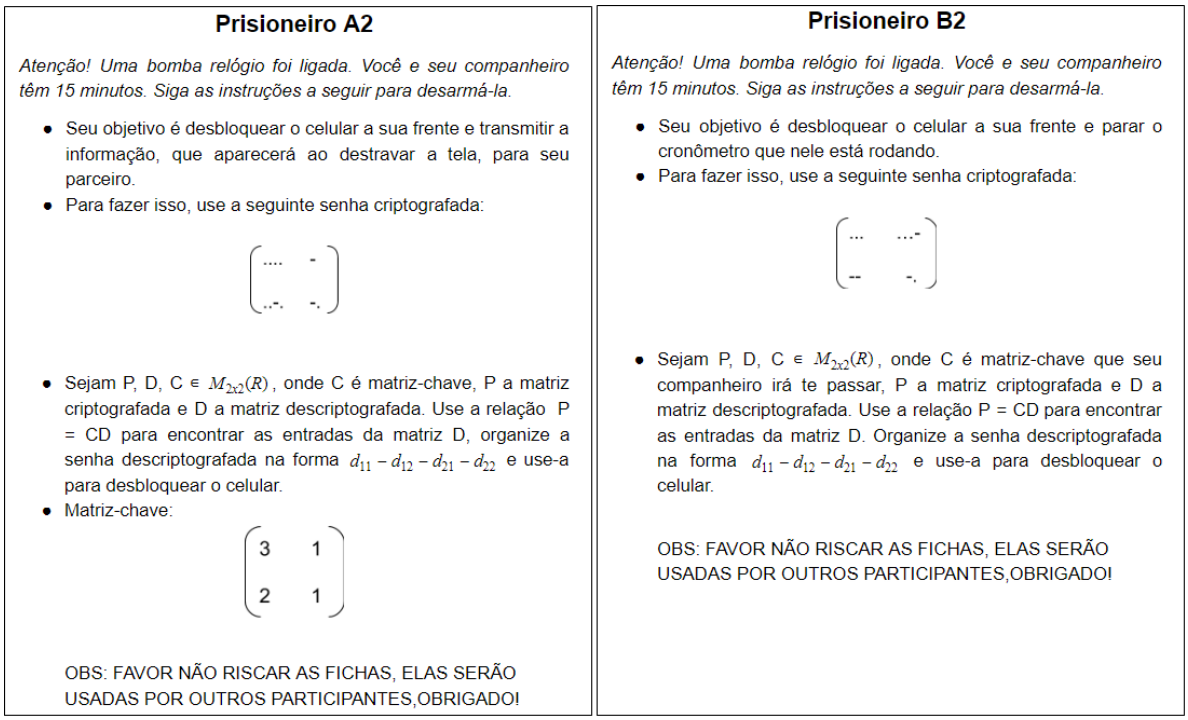
$$g : D \to C,$$

que o seu companheiro irá te passar, é uma função que manda números descriptografados do conjunto D para números criptografados do conjunto C. Encontre a senha descriptografada e use-a para desbloquear o celular.

OBS: FAVOR NÃO RISCAR AS FICHAS, ELAS SERÃO USADAS POR OUTROS PARTICIPANTES,OBRIGADO!

Fonte: Relatório de pesquisa (2018).

Figura 2. Exemplo de ficha do Prisioneiro A à esquerda, e, à direita, uma ficha do prisioneiro B, ambas adaptadas para matrizes quadradas.



Prisioneiro A2

Atenção! Uma bomba relógio foi ligada. Você e seu companheiro têm 15 minutos. Siga as instruções a seguir para desarmá-la.

- Seu objetivo é desbloquear o celular a sua frente e transmitir a informação, que aparecerá ao destravar a tela, para seu parceiro.
- Para fazer isso, use a seguinte senha criptografada:

$$\begin{pmatrix} .... & - \\ ..-. & -. \end{pmatrix}$$

- Sejam P, D, C ∈ $M_{2x2}(R)$, onde C é matriz-chave, P a matriz criptografada e D a matriz descriptografada. Use a relação P = CD para encontrar as entradas da matriz D, organize a senha descriptografada na forma $d_{11} - d_{12} - d_{21} - d_{22}$ e use-a para desbloquear o celular.
- Matriz-chave:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

OBS: FAVOR NÃO RISCAR AS FICHAS, ELAS SERÃO USADAS POR OUTROS PARTICIPANTES,OBRIGADO!

Prisioneiro B2

Atenção! Uma bomba relógio foi ligada. Você e seu companheiro têm 15 minutos. Siga as instruções a seguir para desarmá-la.

- Seu objetivo é desbloquear o celular a sua frente e parar o cronômetro que nele está rodando.
- Para fazer isso, use a seguinte senha criptografada:

$$\begin{pmatrix} ... & ...- \\ -- & -. \end{pmatrix}$$

- Sejam P, D, C ∈ $M_{2x2}(R)$, onde C é matriz-chave que seu companheiro irá te passar, P a matriz criptografada e D a matriz descriptografada. Use a relação P = CD para encontrar as entradas da matriz D. Organize a senha descriptografada na forma $d_{11} - d_{12} - d_{21} - d_{22}$ e use-a para desbloquear o celular.

OBS: FAVOR NÃO RISCAR AS FICHAS, ELAS SERÃO USADAS POR OUTROS PARTICIPANTES,OBRIGADO!

Fonte: relatório de pesquisa (2018).

Análise e Discussão dos Resultados

Constatamos, a partir da experiência e dos conhecimentos produzidos no desenvolvimentos desse trabalho, que os alunos compreenderam a proposta das atividades e conseguiram resolvê-las, demonstrando interesse e entusiasmo durante a realização das mesmas.

Como primeiro desafio, foi dada uma informação a ser decodificada usando código Morse, com isso a oficina mostrou-se desafiadora para os estudantes que participaram desde o início. A complexidade proposital com que as instruções foram escritas, usando termos corriqueiros do ambiente matemático, e o pré-estabelecimento de um tempo para a conclusão da atividade causaram uma pressão e ansiedade que podem ter influenciado positivamente no desempenho dos participantes, pois grande parte deles mostrava-se bastante entusiasmada a cada obstáculo superado e aqueles que eram capazes de concluir no tempo comemoravam com euforia ao desbloquearem o último celular e ao pararem o cronômetro. Eram até mesmo capazes de explicar o que tinham aprendido aos outros colegas que participavam da atividade depois deles.

Observamos que, ao aplicar a oficina para determinados grupos de alunos do Ensino

Médio, alguns deles tiveram dificuldades em resolver as atividades, pois não dominavam os conteúdos explorados. Para ajudar nessa situação contamos com a ajuda de monitores que auxiliavam os alunos na solução das atividades. Isso permitiu que os alunos revisitassem os conteúdos estudados no Ensino Médio ampliando a compreensão daqueles já desenvolvidos.

Por fim, a adaptação da atividade para a Recepção aos Calouros do curso de Matemática da UnB teve um *feedback* bastante positivo, visto que os estudantes recém chegados à universidade, tinham maior domínio dos conteúdos do Ensino Médio. Isso permitiu que novos enigmas fossem propostos e que a atividade proposta pudesse ser ampliada. Além disso, os calouros interagiram bastante entre si durante a resolução dos enigmas, procurando resolver em equipe as atividades propostas permitindo assim um entrosamento entre os calouros que poderá facilitar as relações durante o curso de graduação.

Considerações Finais

Podemos concluir, portanto, que os objetivos inicialmente propostos pela atividade foram alcançados. As atividades didáticas propostas na oficina oportunizaram aos participantes a ampliação e revisão de conteúdos curriculares estudados no Ensino Médio. As atividades, como foram propostas, proporcionaram o trabalho em grupo e cooperativo tanto entre os estudantes participantes quanto entre os alunos do grupo PET MAT que auxiliaram na execução da oficina.

O fato de aplicar conceitos matemáticos a uma situação real e verdadeiramente vivida pelos participantes facilitou a compreensão das novas ideias e promoveu o exercício do pensamento lógico de forma natural, uma vez que isso era necessário para a conclusão das etapas da atividade.

As atividades desenvolvidas e aplicadas na oficina são exemplos de material didático que poderá ser utilizados pelos profesores do Ensino Médio, com o objetivo de aprofundar e revisar conteúdos. Além disso, fica como sugestão, a inclusão de novos temas na aplicação da oficina. A busca de temas interesantes deve ser incentivada para que os componentes curriculares a serem desenvolvidas no Ensino Médio sejam interesantes e motivadores para o aluno.

Referências

Buzatto, A. & Spada, D. (2008). *O jogo como elemento de aprendizagem matemática*. Retrieved from: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/images/arquivos/Pster.pdf

Buchmann, J. (2002). *Introduçãp à Criptografia.* São Paulo. Berkeley.

D'Ambrosio, U. (1996). *Educação matemática: da teoria à prática*. Papirus Editora.

Iezzi, G., Dolce, O. & Pompeo, J. (2007). *Matemática: volume único*. São Paulo: Editora Atual.

Martini, R. (2001). *Criptografia e Cidadania Digital.* Rio de Janeiro. Ciência Moderna.

Moura, Manoel O. de. (2008). *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação*. (11th ed.). São paulo: Cortez.

Olgin, C. A. (2011). *Currículo no ensino médio: uma experiência com o tema criptografia*. (Dissertação de mestrado) Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil.

Parâmetros curriculares nacionais: matemática. (1997). Retrieved from: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf

Shokranian, S., Soares, M. & Godinho, H. (1999). *Teoria dos Números.* Brasília: UnB.

Tamarozzi, A. C. (2003).*Codificando e decifrando mensagens*. In Revista do Professor de Matemática 45, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática.

Terada, R. (1988). *Criptografia e a importância das suas aplicações.* Revista do Professor de Matemática (RPM). Nº 12, 1º semestre de 1988, 1-6.

Terada, R. (2000) *Segurança de Dados: Criptografia em Redes de Computadores,* São Paulo: Edgard Blucher.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Algunas perspectivas de investigación y enseñanza en el álgebra escolar

Ligia Amparo **Torres** Rengifo
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ligia.torres@correounivalle.edu.co
Cristian Andrés **Hurtado** Moreno
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
cristian.hurtado@correounivalle.edu.co

Resumen

En este taller se presentan tres perspectivas de investigación y enseñanza para la introducción y desarrollo del álgebra escolar, que potencian el desarrollo del pensamiento variacional, como son: la Generalización de patrones numéricos y geométricos, la Resolución de problemas y la Modelación matemática de fenómenos de distinta naturaleza. Estas perspectivas se han venido construyendo y desarrollando en las Licenciaturas y Maestría del Área de Educación Matemática y programas de extensión y proyección social, de la Universidad del Valle. Tienen su origen en resultados de investigaciones presentados por Kieran (2006), las propuestas curriculares nacionales en matemáticas como los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias (2006), y fundamentadas en desarrollos investigativos del campo de la Educación Matemática. En esta dirección en el taller inicialmente se presenta un panorama general de la investigación en este campo y luego se abordan con los participantes 6 propuestas de aula que abordan estas perspectivas.

Palabras clave: álgebra escolar, pensamiento variacional, generalización de patrones, resolución de problemas, modelación matemática.

Planteamiento del problema y antecedentes

La investigación en didáctica del álgebra hasta finales del siglo pasado se caracterizó por identificar y especificar las dificultades, obstáculos y errores en el tránsito del pensamiento numérico al algebraico de los estudiantes en la escuela y en los del estudio formal de esta disciplina (Gallardo y Rojano, 1988; Kieran, 1992; Ursini, 1996; Amerom, 2002; Socas, 2011; Castro, 2012; Arcavi, 2013). Es así como desde el punto de vista didáctico existe una amplia literatura que presenta gran variedad de resultados investigativos sobre este campo problémico.

Además, con relación a la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra en la escuela, sobresalen compilaciones que organizan la producción investigativa en álgebra escolar desde diferentes perspectivas, como por ejemplo, la Agenda de investigación para la Educación Matemática, de la NCTM (1989), sobre el aprendizaje y enseñanza del álgebra, editado por Sigrid Wagner y Caroly Kieran. La NCTM en esta publicación expone 15 reportes de investigación, en la segunda parte la agenda de investigación y en la última algunas consideraciones teóricas. En los reportes de investigación se enfatiza, desde la perspectiva temática, obstáculos cognitivos en el aprendizaje del álgebra, estudios cognitivos sobre el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje de esta disciplina, la incorporación de sistemas tutoriales tecnológicos y en general de las tecnologías de la información en la enseñanza del álgebra. Así mismo, las reflexiones sobre teorías acerca de los sistemas de representación matemática y las perspectivas del álgebra escolar para el año 2000. Se proponen algunos tópicos sobre la agenda de investigación, relacionados con lo cognitivo y lo curricular.

Es importante anotar que en la publicación mencionada sobresale el trabajo de Kieran, sobre las ecuaciones algebraicas y en el último apartado, se considera, el estudio del desarrollo histórico del álgebra (como sistema simbólico), para entender ciertos desarrollos u obstáculos en la escuela. Estas investigaciones y otras más sobre esta problemática fueron objeto de estudio hace algunos años en el Área de Educación Matemática, del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, para, posteriormente, y en coherencia con los desarrollos mundiales en investigación en didáctica del álgebra, centrar la atención en propuestas para un acercamiento al álgebra desde lo numérico y geométrico, y para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico y variacional en los estudiantes en la escuela, que permitieran superar o abordar las dificultades antes caracterizadas.

En esta dirección, inicialmente en el marco de los trabajos de grado, tanto de pregrado como de maestría de esta área interesados en esta problemáticas, se abordan los estudios recopilados por Bednarz, Kieran y Lee (1996) que permiten determinar diversas perspectivas de iniciación al álgebra, en las cuales se abordan aspectos fundamentales de la problemática planteada por las investigaciones antes registradas sobre el paso de lo aritmético a lo algebraico. Se propone, en estos trabajos el ingreso en una forma más natural y constructiva al álgebra en la escuela. Perspectivas valoradas por la comunidad de educadores matemáticos: el establecimiento de actividades de generalización, el trabajo con el enfoque de funciones, el desarrollo de actividades de modelación, la resolución de problemas y el enfoque desde una perspectiva histórica. La introducción del texto, hace una síntesis importante de estas perspectivas para la iniciación del trabajo algebraico en la escuela. Aquí se presenta la manera como se perciben estos enfoques incluyendo otras investigaciones en esa misma dirección como el texto de Filloy, Puig y Rojano (2008) sobre el Algebra educativa, como una aproximación teórica y empírica en este campo. Es así que, en los trabajos de pregrado y maestría que abordan estas tipo de problemáticas, se reconoce que desde la etapa inicial del proceso de construcción de pensamiento algebraico es fundamental la movilización de elementos asociados a la variación, los cuales permiten pasar del mundo de la cantidad al mundo de las relaciones, a través de la identificación de relaciones funcionales; estableciendo que el pensamiento algebraico integra el concepto de variables con todas sus connotaciones, usos y conexiones, es decir acepta la existencia de lo desconocido o lo que varía, representarlo a través de símbolos y operar sobre ello.

Una muestra de estos trabajos se presentará en el Taller, por ejemplo, en los trabajos trabajo de grado de Rivera y Sánchez (2012) y Moreno (2015) sobre **la generalización de**

patrones numéricos, se enfatiza en la aproximación temprana al álgebra, en la educación básica primaria, desarrollando elementos fundamentales del pensamiento variacional a través de situaciones problemas contextualizadas donde el trabajo con patrones numéricos posibilitan un acercamiento a las relaciones de dependencia entre cantidades y magnitudes desde la estructura multiplicativa; en los trabajos de Calderón y Dávalos (2011) y Hurtado (2014) enfocados desde la perspectiva de **la resolución de problemas** algebraicos, se explora, de una parte, la potencialidades de algunas heurísticas utilizadas por los estudiantes de grado octavo de la Educación Básica colombiana en la resolución de problemas algebraicos, y de otra, el análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real en la resolución de problemas algebraicos, para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes y; en los trabajos de grado de Angulo (2014) y de Grueso y González (2016) sobre la modelación matemática, en uno, se analiza la articulación de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal a través de procesos de modelación de fenómenos en el marco de estos proyectos, y el otro, se aborda la función como covariación a través de la modelación de fenómenos geométricos.

En esta perspectiva, en el taller que aquí se propone se abordarán las situaciones de estos trabajos para ser analizadas con los participantes y dilucidar las potencialidades y limitaciones de sus enfoques de investigación y enseñanza.

Marco teórico de referencia

El marco de referencia conceptual de estos trabajos tiene en común aproximaciones y desarrollo del trabajo algebraicos en la escuela, desde los enfoques de generalización de patrones o de leyes que rigen los números, la resolución de problemas específicos o clases de problemas, así como la modelación de fenómenos de distinta naturaleza.

Desde la perspectiva de generalización, se concibe el álgebra como el lenguaje para la expresión y manipulación de generalidades (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1999) y por lo tanto las tareas y actividades escolares para involucrar a los alumnos en el álgebra está relacionado con la generalización de patrones numéricos y geométricos y cuyo propósito es el tránsito de lo particular a lo general y viceversa. Estos trabajos, centran la atención en el proceso inductivo, como estrategia heurística para resolver problemas matemáticos. Así mismo considerar que el lenguaje numérico es una herramienta fundamental para la identificación de patrones y la forma de expresión de la generalidad se hace generalmente en forma retórica, el paso a la expresión algebraica es complejo. Es así, como el proceso de generalización comienza en cuanto se intuye un cierto esquema general subyacente, aunque todavía no se pueda expresar claramente. Este proceso lleva a hacer una conjetura sobre una gran cantidad de casos a partir de unos pocos ejemplos. El proceso de justificar la conjetura trae consigo una nueva generalización y ahora el énfasis se desplaza de intentar averiguar qué puede ser verdadero a tratar de ver por qué ha de ser verdadero. Radford (2013) también ha realizado importantes contribuciones a la perspectiva de la generalización de patrones para el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas. Para este autor la generalización de patrones, numéricos, geométricos, pictóricos, entre otros, comporta tres problemas fundamentales mutuamente relacionados. El primero de ellos es el fenomenológico, en el cual se deben considerar las determinaciones sensibles que se hacen sobre los casos particulares de la secuencia dada para tomar conciencia sobre lo que es común; el segundo es el epistemológico, sobre el cual se realizan las generalización (llamadas por él abducciones) de los aspectos comunes hallados sobre los hechos concretos, de tal modo que se produce un nuevo objeto matemático; y finalmente el tercer

problema está relacionado con los medios semióticos que se disponen para objetivar y comunicar la generalización lograda. Además, caracteriza dos tipos de generalización por las cuales es posible pasar en el tratamiento de este tipo de actividades, la aritmética, que es simplemente usada para pasar de un término de la secuencia al otro, anclada eminentemente al hecho concreto, al caso particular; y la propiamente algebraica, en la cual se deduce una fórmula que es usada apodícticamente para hallar cualquier término de la figura.

Coherente con lo anterior, es posible considerar que dentro del proceso de desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, es fundamental presentar situaciones donde se requiera establecer relaciones, identificar características comunes de los casos específicos dados y llegar a una lectura y escritura de lo general, que constituye el interés fundamental de dos de los trabajos de investigación que se compartirán en el taller.

En las investigaciones en las perspectivas de modelación, la elaboración de modelos matemáticos que den cuenta de fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas y con los que además se puedan predecir eventos futuros es considerada por autores como Freudenthal (1983). Esta actividad, al inscribirse situaciones de las matemáticas mismas, ha favorecido la construcción de teorías y el avance científico de la disciplina en cuestión. En la literatura especializada es posible encontrar diversos nombres para designar el proceso de elaboración de modelos, y aún en algunos casos, se establecen relaciones y/o diferencias entre ellos. Algunos de estos nombres son: modelación, matematización y modelaje. Este enfoque de Modelación ha cobrado en los últimos años un creciente y especial interés, más precisamente desde la Didáctica de las matemáticas, interés que ha arrojado como resultado de diversas investigaciones la identificación de diferentes perspectivas según la didáctica y los objetivos que se persigan. En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), la modelación se cataloga como un proceso presente en toda actividad matemática con el cual es posible describir las interrelaciones entre el mundo real y las matemáticas. Así, el proceso de modelación implica la identificación de una situación problemática real, la cual es puesta bajo observación con el objeto de formularla matemáticamente, es decir, encontrar los aspectos matemáticos presentes en ella; esto conducirá a la construcción del modelo, el cual será objeto de un proceso de validación a partir de su poder de predicción y descripción de los fenómenos que hacen parte de la situación problemática originaria. Para llegar a identificar las matemáticas presentes en distintas situaciones es preciso descubrir relaciones entre las variables de un problema, descubrir regularidades, transferir un problema de la vida real a un problema matemático, etc. Después de ello, el problema debe tratarse con herramientas matemáticas, para lo cual se puede representar una relación en una fórmula, utilizar distintos modelos, validarlos, entre otros aspectos. Janvier (1996) enmarca la modelación en el trabajo de construcción del lenguaje algebraico y la define como un proceso que comprende dos fases: la fase de formulación y la fase de validación. En la fase de formulación se establecen las relaciones claves entre las variables del problema, lo cual puede hacerse a partir de medidas o conjeturas; posteriormente, se ejecutan una serie de transformaciones de tipo matemático que conducen a expresar el modelo en una expresión simbólica. La fase de validación comprende la constatación de la validez del modelo a partir de la comparación con la situación que lo origina. Esta validación puede hacerse a través de mediciones, cálculos, etc, lo cual conduce a realizar ajustes en el modelo. Desde este enfoque, la fase de formulación es vital ya que en ella, desde la identificación de las relaciones claves entre las variables del problema, se deduce la regla que hace pertenecer esa relación a una familia de relaciones más general y que en últimas constituirían el modelo, en esta perspectiva se presentaran dos trabajos en el Taller.

Desde la perspectiva de resolución de problemas verbales, Bednarz y Janvier (1996) valoran el análisis de los problemas y el razonamiento usado por los estudiantes al identificar la estructura simbólica involucrada en el cálculo relacional, que permite examinar el paso de la aritmética al álgebra y estimar la dificultad de los diferentes tipos de problemas dados en álgebra. De acuerdo con estos autores la estructura de todo problema de índole algebraica propone cantidades tanto conocidas como desconocidas, relaciones entre estas cantidades y relaciones entre tipos de expresiones, muchas de las cuales son más implícitas que explicitas. La manera como estos dos investigadores aluden a la estructura general de todo enunciado de problema que requiere el uso de ecuaciones permite entonces reconocer dos actividades a las que se ven enfrentados los estudiantes al intentar resolver los problemas. De una parte, es necesario realizar una designación de las cantidades desconocidas dadas en el sistema de lenguaje natural en el nuevo sistema de representación, esto es, la elección de la, o las, incógnita(s); tal elección, a su vez, debe involucrar las relaciones posibles, tanto con los datos conocidos como desconocidos, para poner toda la información en términos de una sola variable. De otra parte, es necesario establecer una igualdad entre las relaciones existentes, es decir, nombrar de dos maneras diferentes la misma relación para obtener la ecuación. Estos investigadores llaman la atención sobre la exigencia y complejidad que se pone de manifiesto en la resolución de estos problemas, pues ello exige el análisis de las relaciones que se deben identificar en el problema, tanto en cantidad como en su naturaleza y sus vínculos, esto es, relaciones aditivas conjugadas con multiplicativas que posteriormente tendrán que operarse, mucha de las cuales son implícitas.

Metodología y propósito del taller

Este taller, como espacio de interacción entre los proponentes y los maestros, investigadores y asistentes en general, mediado por la lectura y análisis de las situaciones problemáticas para movilizar reflexiones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela, se ha organizado en cuatro momentos. Un primer momento (15 minutos) donde se presentarán los aspectos más relevantes de los enfoques de teóricos y metodológicos desde donde se abordan las situaciones y tareas de los trabajos que se presentan; un segundo momento (40 minutos) donde se trabajará la situación 1 de cada uno de los seis trabajos de grado, en grupos de 4 o 5 personas asistentes al taller, donde cada grupo abordara una situación; un tercer momento (40 minutos) donde se trabajará la situación 2 de cada uno de los trabajos, se realizará utilizando el mismo esquema del segundo momento. Finalmente, se realizará una plenaria (15 minutos) para socializar el análisis y las reflexiones de los grupos de trabajo. Al finalizar el taller se recogerán las conclusiones y las recomendaciones para mejorar cada propuesta de trabajo en el aula.

Este taller tiene como propósito compartir algunas situaciones y tareas de las propuestas de aula de los trabajos de grado de pregrado y maestría del Área de Educación Matemática, de la Universidad del Valle, los cuales se denominan: (1) Desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria: Generalización de patrones numéricos, (2) Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos, (3) Análisis de la articulación de proyectos productivos agroindustriales y las función lineal, (4) El concepto de función como covariación en la escuela, (5) Potencialidades de algunas heurísticas utilizadas por estudiantes de grado octavo en la resolución de problemas algebraicos y (6) Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la Educación Básica. Además, interactuar con los participantes a través de sus análisis y reflexiones sobre la pertinencia de las tareas, sus contenidos matemáticos y los desempeños que movilizan.

Plan de acción del taller

Algunas de las situaciones que se trabajarán en el taller son:

Del trabajo (1) de la Situación problemática 2 y 3:

Actividad 2: En búsqueda de la clave numérica

La jaula donde se encontraba encerrado Hansel estaba asegurada con un candado enorme que debía ser abierto con una combinación de 12 números. Cerca de allí, había una secuencia de números que podían ser la clave para liberar el candado, pero algunos de ellos estaban tapados y el niño no los podía ver. La secuencia es la siguiente:

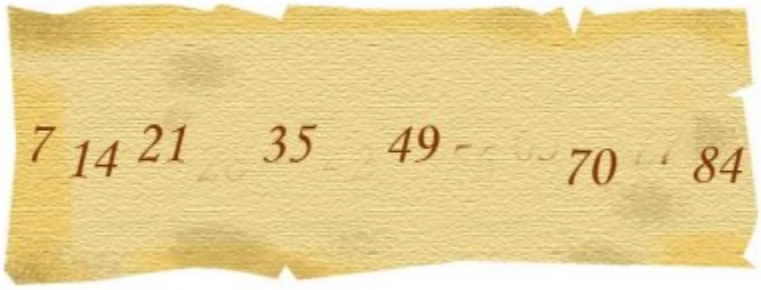


Figura 1. Secuencia numérica para completar.

1. Ayúdale a Hansel a completar la serie con los números faltantes.
2. ¿Qué tuviste en cuenta en el momento de buscar los números que faltaban para completar la que podría ser la clave del candado?
3. Hansel cree que uno de los números que completan la secuencia es el número 52, ¿estás de acuerdo con el niño? ¿Por qué?
4. Si esta serie continúa ¿Existe alguna forma de calcular cualquiera de los números que siguen? Explica tu respuesta, escribiendo la manera de hacerlo.
5. Construye una serie numérica que sea la clave para abrir una caja fuerte (no olvides que debe tener un patrón).

Situación 3: Patrones y producto con piedritas.

Actividad 1: El producto como organizador de arreglos con piedritas

Recuerda que Hansel y Gretel, cuando iban de camino a lo profundo del bosque, arrojaron un grupo de piedritas, imagina que no eran sino 500 piedritas y que riegan por el camino 240 de esas 500 piedritas en grupos a igual distancia.



1. Indica el número de piedritas que le quedaron a los niños, después de arrojar las 240 piedritas.
2. Hansel y Gretel deciden armar grupos de tres piedritas. ¿Cuántos grupos pudieron armar? ¿
3. Si no fueran grupos de tres piedritas ¿Cuántos grupos podrían formar?
4. Para hacer grupos iguales de piedritas, ¿Cuántas piedritas han de recoger a la vez?
5. Hansel y Gretel escribieron numéricamente las posibles organizaciones que podían hacer con las piedritas, pero se le borraron algunos datos. Ayúdale a completar la siguiente tabla.

Tabla 1

Organizaciones de piedritas hechas por Hansel y Gretel

Grupo de piedritas	Número de piedritas por grupo	Total
8	60	240
		240
12		240

6. Encuentra y escribe una forma de escribir el total, teniendo en cuenta que el número de grupos es a, el número de piedritas es b, y el total es c.

Los tres enfoques sobre los cuales versan las seis situaciones que se compartirán en el taller han mostrado, a través de los distintos trabajos de grado, el potencial que tienen para la introducción del álgebra en la escuela y sus procesos asociados. Este hecho, desde luego, ha nutrido la investigación que en el Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle se ha venido gestando en torno a la preocupación que la investigación en Didáctica del Álgebra ha reportado sobre las múltiples problemáticas que maestros y estudiantes enfrentan cuando el álgebra ingresa a la escuela, lo cual ha permitido que tanto la formación de los futuros maestros en las Licenciaturas de matemáticas de la Universidad, así como de profesores que están en ejercicio se nutra a partir de la reflexión conceptual y metodológica en aras de hacerles frente a dichas problemáticas.

Bibliografía y referencias

Amerom, B. (2002). Learning and teaching of school algebra. En B. Amerom, *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*, (pp. 3-32). Holanda: Freudenthal Institute.

Angulo, O. (2014). *Análisis de la articulación de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Arcavi, A. (2013). Reflexiones sobre el álgebra escolar y su enseñanza. En Rico, L., Cañadas, M., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996) (Eds). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*. Londres: Kluwer Academics Publisher.

Bednarz, N. & Janvier, C. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz et al. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 115-135). Londres: Kluwer Academics Publisher.

Calderón, N. y Dávalos, P. (2011). *Potencialidades de algunas heurísticas utilizadas por estudiantes de grado octavo en la resolución de problemas algebraicos* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra*. *A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Board.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*. Dordrecht: Reidel.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Researchs in Didactique dec Mathématiques*, *9*, 155- 188. Granada, España: Comares.

Grueso, R. & González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Hurtado, C. (2014). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la Educación Básica* (tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 225.236). Dordrecht: Kluwer Academics Publisher.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 390-419). New York:

Kieran, C. (2006). Researchs on the learning and teaching of algebra. En Angel, G. y Paolo, B. (Eds), *Handbook of researchs on the psychology of mathematics educations*. *Past, present and future* (pp. 11-50). New York: Sense Publishers.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1999). *Rutas y raíces del álgebra*. Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Traducción y Edición: Cecilia Agudelo Valderrama.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Moreno, G. (2015). *Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Agenda de investigación para la Educación matem+atica. Reston, VA: NCTM.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En Rico, L., Cañadas, M., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*.

Rivera, E. y Sánchez, L. (2012). *Desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria: Generalización de patrones numéricos* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, revista de didáctica de las matemáticas, 77*, 5-34.

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. Educación Matemática, 8(2), 33-40.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Un estudio sobre creencias de autoeficacia en la solución de tareas de Sucesiones en la Educación Básica Secundaria en Colombia

Katerine Edith **Tobio** Gutierrez
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
katerine.tobio-gutierrez@unesp.br
Martha **Mogollón** Rodriguez
URBE
Venezuela
marthamogollon2018@gmail.com
Nelson **Pirola**
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
nelson.pirola@unesp.br

Resumen

Las creencias de autoeficacia son consideradas como el juicio de las propias capacidades de cada individuo al momento de ejecutar acciones de una tarea en un dominio especifico. Este trabajo de enfoque cuantitativo de tipo descriptivo con diseño transversal tiene como objetivo estudiar las creencias de autoeficacia en la solución de tareas de sucesiones por estudiantes de Educación Básica Secundaria del municipio de Corozal (Colombia). Para la colecta de datos se diseñó un cuestionario de autoeficacia online de tipo escala Likert el cual contiene 10 tareas de sucesiones con soluciones en el contexto matemático y computacional. Para el análisis de los datos, se realizó un análisis estadístico descriptivo y probabilístico. Como resultado, se obtuvo que las creencias de autoeficacia están relacionadas con las variables, niveles de educación y género. Además, de que los estudiantes poseen creencias de autoeficacia negativa en la solución de tareas en el contexto computacional.

Palabras clave: creencias de autoeficacia, sucesiones, generalización de patrones, pensamiento algebraico, Educación Básica Secundaria.

Introducción

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, además de los aspectos cognitivos, los aspectos afectivos y actitudinales también son de gran importancia, puesto que influencian en el aprendizaje y la confianza de los estudiantes al resolver tareas matemáticas (Sander, 2018). Por lo que este estudio se desarrolla por la poca exploración de esta temática en

el campo de la Educación Matemática. Estudiando, especialmente, las creencias de autoeficacia al resolver tareas de sucesiones, puesto que las creencias de autoeficacia son uno de los factores del proceso de aprendizaje que se ha vuelto relevante en el proceso educativo (Rodrigues, 2015).

En este estudio el cuadro teórico está integrado por dos temáticas: la creencia de autoeficacia y sucesiones matemáticas. De tal forma que las creencias de autoeficacia se encuentran fundamentada por la Teoría cognitivo social, teoría desarrollada por el psicólogo canadiense Albert Bandura (1986) quien defiende la concepción del ser humano como un sujeto activo que no vive pasivamente a merced de las fuerzas del medio ambiente que lo rodea ni por los impulsos internos (cognitivo, afectivo y eventos biológicos). Y las sucesiones matemáticas son fundamentadas por autores que investigan esta temática.

Según Bandura (1986, 1994, 1997) las creencias de autoeficacia son consideradas como el juicio de las propias competencias, habilidades, destrezas, conocimiento, etc., de cada individuo al momento de desarrollar acciones requeridas para poder lograr un cierto grado de desempeño en una determinada tarea en un dominio especifico. Asimismo, Bandura identificó cuatro fuentes principales que constituyen las creencias de autoeficacia, las cuales son: experiencias anteriores, están relacionadas con las experiencias directas en el desarrollo de una tarea dada mediante la mensuración de los efectos e interpretaciones de las acciones realizadas; experiencias vicarias, las cuales son adquiridas a partir de la observación de modelos o imitación del desarrollo de una tarea por otras personas; la persuasión social, está relacionada con los juicios verbales que otros individuos realizan; por último, las reacciones fisiológicas y afectivas, que son producto de las activaciones psicofisiológicas referentes a la organización y ejecución de una tarea, como, ansiedad, estado de humor, estrés, etc. (Moreno, 2017; Sander, 2018; Pinheiro, 2018).

En el contexto educativo, las creencias de eficacia son estudiadas en tres líneas de investigación, las cuales son: la autoeficacia docente; la autoeficacia académica, relacionada al desempeño académico y el aprendizaje de los estudiantes; y la autoeficacia vocacional (Moreno, 2017). Por tanto, este trabajo nos enfocaremos en las creencias de autoeficacia académica que permita determinar las convicciones personales que posee el estudiante en relación con sus propias capacidades para organizar y ejecutar cursos y acciones requeridos para producir ciertos logros referentes a los aspectos intelectuales y de aprendizaje al realizar una determinada tarea matemática y el grado de cualidad de la ejecución de esta (Brito y Souza, 2015; Sander, 2018; Moreno, 2017). Estas capacidades consideradas por el alumno y no necesariamente están presentes en él, consiste más bien en que este las cree tener y, además poseer la disposición en contemplar las exigencias y requisitos de una dada tarea que precisa ser desarrollada, debido a que las creencias que cada persona tiene sobre sus capacidades están íntimamente relacionadas en la forma que ellas actúan (Bzuneck, 2001; Brito y Souza, 2015).

Una revisión de la literatura muestra que las creencias de autoeficacia han sido objeto de estudio en diversos campos como la psicología, administración, salud, deportes, etc., a nivel nacional e internacional. De igual manera, ha sido estudiada en la Educación Matemática con distintos contenidos específicos matemáticos, pero todavía son muy pocas investigaciones existentes en el contexto educacional colombiano, en especial, las creencias de autoeficacias en la solución de tareas de sucesiones. Destacándose trabajos que abordan la relación del constructo autoeficacia en el contexto matemático: la validación transcultural del modelo cognitivo social de elecciones vocacionales (Moreno, 2017); las actitudes (Dobarro, 2007); los objetivos en el ámbito del aprendizaje (Patrício, 2012); el desempeño en la solución de situaciones problemas (Brito y Souza, 2015; Sander, 2018); las atribuciones de éxito y fracaso (Morais, 2016); el

autoconcepto (Souza y Brito, 2008) y la enseñanza del algebra en la formación de profesores (Pinheiro, 2018). Y en el contexto computacional se tiene los estudios de López Vargas y Triana Vera (2013) y Valencia-Vallejo, López-Vargas & Sanabria-Rodríguez (2016) que abordan la relación entre autoeficacia y escenarios computacionales.

Por consiguiente, el objetivo de este trabajo es estudiar las creencias de autoeficacia en la solución de tareas de sucesiones en el contexto matemático y computacional por estudiantes de 7°, 8° y 9° grados en una Institución Educativa publica del municipio de Corozal – Sucre (Colombia). En el cual las sucesiones hacen parte de un contenido temático de estudio en el campo de la educación matemática puesto que está relacionado con el razonamiento inductivo (Cañadas, 2007; Álvarez, 2012), pensamiento lógico matemático (Morales, 2013), las estrategias de generalización de patrones y su contribución al desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de distintos niveles de educación (Zapatera, 2018).

Además, el MEN (2006) en los Estándares Básicos de Competencias en Matemática recomienda la realización de tareas de sucesiones para el análisis de los fenómenos variacionales y de generalización de patrones en niveles de Educación Básica Primaria, dado que se considera como una manera adecuada para el desarrollo de un aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos, así como su manejo simbólico antes de llegar a los grados séptimo y octavo de Educación Básica Secundaria. Conjuntamente, se entiende por tareas un segmento de la actividad de la clase, orientada para el desarrollo de un concepto matemático en particular que puede contener distintas situaciones problemas relacionadas entre sí o un trabajo amplio sobre un problema complejo (Barbosa, 2010).

Metodología

Este trabajo es de enfoque cuantitativo de tipo descriptivo con diseño transversal, debido a que se pretende describir el grado de creencias de autoeficacia que los estudiantes poseen con relación a la solución de tareas de sucesiones en el contexto matemático y computacional (Hernández Sampieri *et al*, 2014). Contiene una muestra no probabilística, debido a que los estudiantes que participaron en el estudio fueron seleccionados de una sola Institución Educativa del municipio de Corozal y no se implementaron técnicas estadísticas, puesto que no se tiene interés en la extrapolar los resultados de esta investigación (Hernández Sampieri et al., 2014). La muestra está constituida por 114 estudiantes que llevaran firmado, por los padres, el termino de consentimiento libre y esclarecido para poder participar en la investigación (54,4% son de sexo femenino y 45,6% son de sexo masculino). En el que 67 (58,7%) corresponden a 7°, 19 (16,7%) a 8° y 28 (24,6%) a 9° grado oscilando entre edades desde los 11 a los 17 años pertenecientes a la Institución Educativa Liceo Carmelo Percy Vergara sede principal del municipio de Corozal – Sucre (Colombia).

Para la colecta de datos, se diseñó un cuestionario de creencias de autoeficacia que contiene 10 tareas de sucesiones, basadas en otras escalas de autoeficacia (Dobarro, 2007; Sander, 2018) y las tareas de sucesiones (Cañadas, 2007; Zapatera, 2018; Álvarez, 2012). Este cuestionario está dividido en dos partes, la primera parte tiene 6 tareas de sucesiones con soluciones en el contexto de la matemática (Apéndice A). De manera general, estas tareas proponen encontrar elementos cercanos (Tareas 1, 4, 6A, 6B y 6F) y lejanos (Tareas 2, 3, 6C y 6G) de una sucesión dada, así como, explicar con sus propias palabras la relación directa (Tarea 6D) e inversa (6H) de las variables de la sucesión y expresar mediante una fórmula matemática la relación directa (Tarea 6E) e inversa (Tarea 6I) de las variables de la sucesión.

La segunda parte, contiene 4 enunciados (tarea 7, 8, 9 y 10) sobre la solución de las tareas de la primera parte en el contexto computacional (Apéndice A), es decir, expresar el grado de eficacia en que las tareas de sucesiones matemáticas pueden ser programada para que el computador ejecute y muestre las soluciones de la respectiva tarea, puesto que en el currículo de la Institución Educativa aborda contenidos de programación de computadores (el lenguaje Scratch). Este cuestionario presenta opciones de tipo escala Likert para expresar el grado de confianza que poseen los alumnos en el desarrollo de la solución de las tareas anunciadas, la cual varía entre 1 y 5 puntos, donde 1 hace referencia a nada confiado y 5 a totalmente confiado.

La aplicación del cuestionario fue realizada de manera digital en la sala de informática de la Institución Educativa con una duración en promedio de 20 minutos. Por ello, se realiza, primeramente, un análisis de confiabilidad del cuestionario mediante el cálculo del coeficiente Alfa de Cronbach (0,735), que es considerada aceptable este tipo de investigaciones (Hernández Sampieri et al., 2014). Posteriormente, se realizaron el análisis estadístico descriptivo y probabilísticos de los datos usando el software libre R-Studio y el paquete Rcommander.

Resultados y discusión

Para el análisis del grado de autoeficacia de los 114 estudiantes en la solución de tareas de sucesiones en contexto matemático y computacional, se realiza la suma de los puntos obtenidos por cada alumno que varía de 18 a 90 puntos, puesto que el cuestionario tiene 18 ítems (10 tareas) y la escala es de 1 a 5 puntos. Seguidamente, con los resultados de los puntos se calcula la media aritmética (62,89) y desviación estándar (8,249). Estipulándose que aquellos alumnos cuya puntuación estuviese por encima de la media, demostraban creencias de autoeficacia positiva (o favorables) en la solución de tareas de sucesiones, de lo contrario se consideran que poseen creencias negativas (o desfavorables) (Brito y Souza, 2008, 2015; Sander, 2018).

Por tanto, describiremos los resultados del grado de autoeficacia que los estudiantes consideran en cada ítem (Nº) y posteriormente de forma general. Para el análisis de cada ítem se toma que todos los estudiantes que poseen valores por encima de tres en la escala de autoeficacia presentan creencias de autoeficacia positiva (AE+) y por debajo e igual a tres, tienen creencias negativas (AE-).

Tabla 1

Distribución de frecuencias de las categorías de las creencias de autoeficacia según las seis tareas.

Nº	AE+	AE-	Nº	AE+	AE-	Nº	AE+	AE-
1	52 (45,6%)	62 (54,4%)	6A	91 (79,8%)	23 (20,2%)	6F	73 (64%)	41 (64%)
2	55 (48,2%)	59 (51,8%)	6B	85 (74,6%)	29 (25,4%)	6G	64 (56,1%)	50 (43,9%)
3	53 (47,4%)	60 (52,6%)	6C	59 (51,8%)	55 (48,2%)	6H	57 (50%)	57 (50%)
4	58 (50,9%)	56 (49,1%)	6D	57 (50%)	57 (50%)	6I	52 (45,6%)	62 (54,4%)
5	39 (34,2%)	75 (65,8%)	6E	43 (37,7%)	71 (62,3%)			

Fuente: Autoría propia.

Por ende, si analizamos las puntuaciones del grado de autoeficacia de cada tarea (Tabla 1), se observa que los estudiantes poseen una mayor creencia de autoeficacia en la realización de tareas de sucesiones, donde tiene que encontrar elementos cercanos de una relación directa (tarea 6A, 6B, 4 y 1) e inversa (6F, 6G) de las variables implicadas en la sucesión (Apéndice A). Asimismo, presentan creencias de autoeficacia negativas al encontrar la relación inversa de las variables de la sucesión que le permita hallar los términos cercanos y lejanos, y expresar verbalmente la regla general de forma algebraica. Estos resultados son muy similares al

desempeño encontrado por Zapatera (2018) de los estudiantes de 3º a 6º grado Educación Básica Primaria que resolvieron la sexta tarea que mostra que la mayoría de los estudiantes que participaron en la investigación lograron encontrar con facilidad los elementos cercanos de la sucesión y presentaron dificultades al encontrar la relación inversa de las variables de la sucesión que le permita hallar los términos cercanos y lejanos, y expresar verbalmente la regla general de forma algebraica. De esta manera, podemos afirmar que los participantes de este estudio tienen creencias de autoeficacia similar al rendimiento de los estudiantes de Educación Básica Secundaria. Aclarando, que este estudio no está abordando el rendimiento académico de los participantes en la solución de tareas de sucesiones sino sus creencias de autoeficacia.

El grado de autoeficacia negativa por parte de los estudiantes en la solución de las tareas de sucesiones puede estar asociada a la falta de aplicación y exploración de tareas que aborden patrones, regularidades y el proceso de generalización en distintas situaciones contextualizadas en sala de aula que proporcionen distintas formas de resolver problemas de generalización de patrones (Zapatera, 2018); el desarrollo y comprensión del pensamiento inductivo (Álvarez, 2012; Cañadas, 2007); y su articulación con otros contenidos matemáticos y áreas del conocimiento en los distintos niveles de educación (Álvarez, 2012). De igual manera, no se potencializa y desarrolla los procedimientos o descriptores de los niveles de trayectoria para solucionar una tarea de sucesiones en la clase de matemáticas (Zapatera, 2018)

Tabla 2

Distribución de frecuencias de las categorías de las creencias de autoeficacia según las últimas tareas.

Nº	AE+	AE-
7	75 (65,8%)	39 (34,2%)
8	64 (56,1%)	50 (43,9%)
9	35 (30,7%)	79 (69,3%)
10	37 (32,5%)	77 (67,5%)

Fuente: Autoría propia.

En el contexto computacional, que hace parte de las últimas cuatro tareas (Tabla 2), se destaca que el 65,8% de los estudiantes poseen creencias de autoeficacia positiva con relación a su capacidad de identificar software de programación para páginas web, video juegos o aplicaciones de celulares; el 43,9% consideran que pueden usar software de programación para calcular las soluciones de las seis tareas para cualquier valor; el 30,7% creen que consiguen expresar de forma verbal la programación de las soluciones de las tareas para cualquier valor en el software conocido; y el 32,5% consideran que pueden expresar de forma escrita (código) la programación de las soluciones de las tareas para cualquier valor en el software conocido.

Según lo anterior, se considera que los estudiantes consiguen identificar software de programación de distintas aplicaciones, pero poseen creencias de autoeficacia negativas en la utilización de ellas para encontrar las respectivas soluciones de las tareas de sucesiones, esto se debe a que la enseñanza de la programación de computadores en la Institución Educativa no es articulada con los contenidos matemáticos. De acuerdo con Pérez Palencia (2017) el uso de las herramientas tecnológicas en las escuelas representan un gran potencial pedagógico, por ello no debe centrarse en su forma simple de utilización, por lo contrario, debemos aprovechar el poder computacional de estas para que fornezcan la apropiación de contenidos disciplinares, el desarrollo de los pilares del pensamiento computacional y la construcción creación de artefactos computacionales mediante la promoción de ambiente de instrucción guiada que articule

situaciones contextualizadas. Además, los estudios de López Vargas y Triana Vera (2013) y Valencia-Vallejo, López-Vargas & Sanabria-Rodríguez (2016) destacan que cuando los estudiantes trabajan en escenarios computacionales donde se diseñen e implementen andamiajes autorreguladores (autoeficacia) propician la autorregulación del aprendizaje y el logro académico.

Al hacer el análisis estadístico descriptivo general de los datos, se obtuvo que 60 (52,6%) participantes presentan tendencia a creencias de autoeficacia positivas en tareas de sucesiones en contexto matemático y computacional, de los cuales 40 (35,1%) estudiantes son de séptimo, 5 (4,4%) son de octavo y 15 (13,1%) de noveno. Mientras que 54 (47,4%) participantes presentan tendencias negativas, donde el 27 (23,7%), 14 (12,3%) y 13 (11,4%) son estudiantes de séptimo, octavo y noveno grado respectivamente.

Posteriormente, se realizó la prueba de hipótesis de Chi-Cuadrado entre las variables creencias de autoeficacia (categorizados como autoeficacia positiva y negativa), nivel educativo, género y edad con el fin de encontrar relaciones entre las variables, encontrando una relación estadística significativa entre las variables creencias de autoeficacia con: el nivel educativo (x^2=6.631; p < 0,036), es decir, que a medida que los estudiante aumenta en el nivel educativo disminuye las creencias de autoeficacia en la solución de tareas de sucesiones; y el género (x^2=4.4982; p <0.03393), resaltando que los estudiantes de género masculino (28,9%) presentan significativamente una creencia de autoeficacia más fuerte que el género opuesto (23,6%). Mientras que las variables creencias de autoeficacia y la edad son independientes (x^2= 1.6061; p < 0.448). Las relaciones encontradas en este estudio no están en concordancia con los resultados obtenidos por Brito y Souza (2015), ya que sus resultados demuestran significativamente que las niñas poseen una creencia de autoeficacia más fuerte que los niños y con los trabajos de Pinheiro (2018) y Dobarro (2007), puesto que no se identificaron diferencias significativas entre las creencias de autoeficacia, cuando fueron agrupados por género y nivel académico. Esto puede estar asociado a que estos trabajos se desarrollaron en distintos niveles académicos y con diferente contenido matemático, puesto que la creencia de autoeficacia, se hace referencia a lo que alguien cree sobre sus capacidades en realizar una tarea en un dominio especifico donde puede variar su percepción de sus capacidades dependiendo al contenido que aborda la tarea y el nivel formación académico que posee de esos contenidos (Sander, 2018).

Conclusiones

En este trabajo pretende contribuir a la comprensión de las creencias de autoeficacia en el contexto educacional. Evidenciando que las creencias de autoeficacia en la solución de tareas de sucesiones disminuyen a medida que los estudiantes avanzan en el nivel educativo y los participantes del estudio de género masculino poseen creencias de autoeficacia más fuertes que el género opuesto, pero esta, es independiente a la edad de los estudiantes. Además, los estudiantes poseen creencia de autoeficacia negativa en la solución de las tareas de sucesiones en el contexto computacional debido a la falta de articulación de los contenidos matemáticos en la programación de los computadores. Por tanto, consideramos que esta temática, creencias de autoeficacia, merece una profundización mayor, en términos de investigaciones, ya que posee fuertes influencias en el aprendizaje de las matemática en los alumnos de la Educación Básica.

Referencias y bibliografía

Álvarez, L. M. R. (2012). *Patrones y Regularidades Numéricas: Razonamiento Inductivo*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Bandura, A. (1986). Social foundations of thought and action. *Englewood Cliffs*, NJ, 1986.

Bandura, A. (1994). Self-efficacy. En Ramachaudran, V. S. (Ed.), *Encyclopedia of human behavior* (*4*, pp. 71-81). New York: Academic Press. (Reprinted in H. Friedman [Ed.], Encyclopedia of mental health. San Diego: Academic Press, 1998).

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. New York, NY, US: W H Freeman/Times Books/ Henry Holt & Co.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. (Tesis doctoral). Universidad de Minho, Braga, Portugal.

Brito, M. R F. & Souza, L. F. N. I. (2015). Autoeficácia na solução de problemas matemáticos e variáveis relacionadas. *Temas em Psicologia, 23*(1).

Bzuneck, J. A. (2001). As crenças de auto-eficácia e o seu papel na motivação do aluno. En E. Boruchovitch & J.A. Bzuneck (Org.) *A Motivação do Aluno: Contribuições da Psicologia Contemporânea* (pp. 116-133). Petrópolis: Editora Vozes.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. (Tese de doutorado). Universidade de Granada, Granada, Espanha.

Caprara, G., Barbaranelli, C., Steca, P., & Malone, P. (2006). Teachers' self-efficacy beliefs as determinants of job satisfaction and students' academic achievement: A study at the school level. *Journal of School Psychology, 44*(6), 473–490.

Dobarro, V.R. (2007). *Solução de problemas e tipos de mente matemática: relações com as atitudes e crenças de autoeficácia*. (Tesis doctoral). Universidad Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Sexta Edición. Editorial Mc Graw Hill. México.

López Vargas, O., & Triana Vera, S. (2013). Efecto de un activador computacional de autoeficacia sobre el logro de aprendizaje en estudiantes de diferente estilo cognitivo. *Revista Colombiana De Educación,* (64), 225.244.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). República de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá.

Morais, J. A. R. S (2016). *Atribuição de sucesso e fracasso e as crenças de autoeficácia Matemática: Um estudo com alunos do Ensino Médio*. (Tesis de Maestría). Universidad Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Bauru, Brasil.

Morales, R. (2013). *Pensamiento lógico matemático en alumnos de 6-7 años en tareas de seriaciones*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada, España.

Moreno, Y. C. (2017). *Validación de la teoría cognitivo social del desarrollo de la carrera en el contexto colombiano*. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Patrício, A. S. A. (2012). *Crenças de autoeficácia e objetivos: um estudo exploratório*. (Tesis de maestría). Universidad de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Pérez Palencia, M. (2017). El pensamiento computacional para potenciar el desarrollo de habilidades relacionadas con la resolución creativa de problemas. *3cTIC: cuadernos de desarrollo aplicados a las TIC, 6*(1), 38-63.

Pinheiro, A. C. (2018). *O ensino de álgebra e a crença de autoeficácia docente no desenvolvimento do pensamento algébrico*. (Tesis de Maestría). Universidad Estadual Paulista "Julio de Mesquita

Filho", Bauru, Brasil.

Rodrigues, C. S. (2015). *Crenças de autoeficácia matemática na Educação de Jovens e Adultos: um estudo com alunos de Ensino Médio de Divinópolis (MG)*. (Tesis de Maestría). Universidad Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil.

Sander, G. P. (2018). *Um estudo sobre a relação entre a crença de autoeficácia na resolução de tarefas numéricas e o sentido de número de alunos do Ciclo de Alfabetização*. (Tesis de doctorado). Universidad Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Bauru, Brasil.

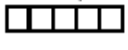
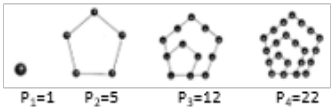
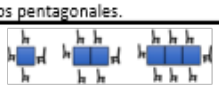
Souza, L. F. N. I., & Brito, M. R. F. (2008). Crenças de auto-eficácia, autoconceito e desempenho em matemática. *Estudos de Psicologia, 25*(2), 193-201.

Valencia-Vallejo, N., López-Vargas, O., & Sanabria-Rodríguez, L. (2016). Self-efficacy in computer-based learning environments: A bibliometric analysis. *Psychology, 7*(14), 1839-1857.

Zapatera Llinares, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(1), 87-114.

Apéndice A

Algunas tareas presentadas en el cuestionario de creencias de Autoeficacia en el contexto matemático y computacional.

Nº	Tarea	Grado de confianza				
1	Se tiene la siguiente secuencia de números: 3,7,13,21... Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia, justificando tu respuesta.	1	2	3	4	5
3	Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:  Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:  ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1432 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que hemos hecho en el dibujo?, justificando tu respuesta.	1	2	3	4	5
5	Observa los siguientes números pentagonales:  P_1=1 P_2=5 P_3=12 P_4=22 Expresar matemáticamente, mediante una formula, los números pentagonales.	1	2	3	4	5
6	Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas. 					
6A	Si continuamos la figura, dibujando otra mesa, o sea 4 mesas ¿Cuántas sillas hay?	1	2	3	4	5
6C	Sin hacer dibujos, ¿Cuántos estudiantes pueden sentarse si colocamos 100 mesas?	1	2	3	4	5
6D	Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.	1	2	3	4	5
6E	Y si colocamos m mesas ¿Cuántos estudiantes pueden sentarse?	1	2	3	4	5
6F	¿Cuántas mesas necesitaríamos en una sala de clase para sentar a 12 estudiantes?	1	2	3	4	5
6I	Expresar mediante una fórmula matemática la relación inversa de las variables de la sucesión.	1	2	3	4	5
7	Identificar software de programación para páginas web, video juegos o aplicaciones de celulares.	1	2	3	4	5
10	Expresar de forma escrita (código) la programación de las soluciones de las 6 tareas para cualquier valor en el software conocido.	1	2	3	4	5

Fuente: Autoría propia (link: https://goo.gl/forms/xqCKfJdt8AXzgyc73).

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Analizando funciones lineales a partir de situaciones del entorno[1]

Lina Marcela **Angulo** Valencia
Institución Educativa Luis Carlos Valencia
Colombia
lina-mar88@hotmail.com

Delimitación del estudio

La enseñanza de las matemáticas es por lo general atribuida a prácticas mecanizadas y memorísticas, con lo cual se descuida el desarrollo del pensamiento espacial, numérico, métrico estocástico y variacional; este último comúnmente abordado en la escuela secundaria. Esta situación se convierte en una problemática por cuanto el pensamiento variacional, tal como lo reconoce el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006), debe abordarse desde el inicio de la escolaridad e integrando las otras formas del pensamiento matemático. Desde esta perspectiva, se promueve el estudio de situaciones de variación y cambio, lo que implica, necesariamente, estudiar el concepto de función, dado que, como lo sostiene (Freudenthal) (1983), es el concepto que matematiza estas situaciones.

Sin embargo, se evidencia que, por lo general, el estudio de las funciones suele presentarse al margen del análisis de situaciones variables que posibiliten formas de analizar e interpretar la dinamicidad de las cantidades que ahí se presentan (Sierpinska, 1992), en este sentido, se tiende más a favorecer una enseñanza en la presentación de definiciones, ejemplo instrucción o estudio de modelos de funciones y posteriormente ejercicios. Por ello es necesario el desarrollo de secuencias didácticas que planteen estrategias distintas a las tradicionales para abordar en el aula el concepto de función, es necesario considerar la investigación en Educación Matemática, los intereses de los estudiantes, el contexto cercano a ellos, así como, la incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), dado que, el estudio de las funciones se puede optimizar con el uso de estos recursos. Es así como el trabajo que aquí se reporta da cuenta del diseño, implementación y análisis de resultados de una secuencia didáctica.

Marco de referencia conceptual

Para el diseño de la secuencia, así como para el análisis de los resultados fruto de su implementación con el grupo de estudiantes focalizados, se tomó como referente algunos elementos de política pública nacional (MEN, 1998, 2006), así como los cuatro primeros niveles de razonamiento covariacional presentados por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu. (2003). Los cuales exponen: nivel 1. Se relaciona con la acción mental de coordinar el cambio de una variable

[1] La realización de este trabajo fue posible gracias al *Programa de cualificación y acompañamiento a docentes del municipio de Jamundí en el diseño de Secuencias Didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en sus estudiantes*, desarrollado por la Universidad del Valle y la fundación EPSA, con los docentes Juan Diego Mena y Nivaldo Carabali y con el acompañamiento del profesor Mg. Cristian A. Hurtado Moreno.

con cambios en la otra variable, nivel 2. Hace referencia a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de una variable con cambios en la otra, n*ivel 3*. Indica la acción mental de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra y n*ivel 4*. Es la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. Además se consideran los planteamientos de Sierpinska (1992) sobre las condiciones para la comprensión del concepto de función.

Diseño metodológico y análisis de los datos

La secuencia didáctica diseñada se configura por distintas tareas agrupadas en cuatro situaciones: analizando un plan para celular, comparando planes de telefonía móvil, analizando desplazamientos gráficamente, y estudiando el crecimiento de 3 fetos; todos relacionados con situaciones de variación y cambio. Se implementó con 27 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Luis Carlos Valencia, institución rural del municipio de Jamundí en el Valle del Cauca, Colombia. Para el análisis de los resultados se procedió con una metodología cualitativa de tipo descriptiva, en la cual se consideró tanto las unidades de análisis dispuestos por los referentes conceptuales como los propósitos de las tareas de cada situación, para revisar las producciones escritas de los estudiantes así como sus argumentos en las diferentes intervenciones realizadas en el aula. En términos generales, el análisis de las producciones de los estudiantes permitió constatar que la mayoría de ellos logran pasar sin mayor dificultad por los niveles 1 al 3 de razonamiento covariacional, y varios de éstos llegan a identificar tanto analítica como gráficamente que la razón de cambio en las situaciones presentadas es constante, para lo cual el uso de Geogebra fue fundamental.

Conclusiones y Reflexiones

Se logró evidenciar el fortalecimiento de algunos procesos generales de aprendizaje en los estudiantes tales como la modelación, el razonamiento y la comunicación. En general, durante el desarrollo de las tareas se observó trabajo colaborativo entre los estudiantes, notándose interés y participación permanente. Se puso en evidencia la importancia del uso de Geogebra en el aula, ya que facilitó el análisis de aspectos importantes de la función lineal que no se habrían logrado de esta manera mediante el uso de lápiz y papel. También se puso de manifiesto la importancia del trabajo en el aula a partir de situaciones problemáticas contextualizadas, las cuales deben ser integradas en las planeaciones en tanto que los estudiantes le encuentran más sentido y significado al aprendizaje de las matemáticas.

Referencias Bibliográficas (Bibliografía y referencias)

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 8(2), pp. 121-156.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel, Dordrecht. Kluwer Academic, Plenum Publishers, New York

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). *Lineamientos curriculares para matemáticas*. Bogotá, Colombia: Autor.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia: Autor.

Sierpinska, A. (1992). Sobre la comprensión de la noción de función (Traducción de Cesar Delgado). En E. Dubinski and G. HAarel (eds.), *The Concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25, pp. 25-58 Washington, DC.: Mathematical Association of American

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Construcción del significado de las expresiones algebraicas a partir del Diseño de un experimento de enseñanza centrado en el álgebra como Actividad

Mónica **Correa** Ángel
Área de Educación Matemática, Universidad del Valle
Colegio Jefferson
Colombia
correa.monica@correounivalle.edu.co

Resumen

Este documento presenta los elementos teóricos y metodológicos que sustentan una situación de enseñanza para introducir el álgebra en nivel octavo. Esta se desarrolló en el marco de la maestría en educación matemática, y se organiza en relación con la metodología de los Experimentos de enseñanza y recoge la propuesta de Kieran (2007) y Radford (2006) sobre la concepción del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico, respectivamente. La búsqueda en la investigación se centró en un análisis pragmático del discurso, retomando elementos expuestos por van Dijk (1980) y Searle (1992, 2005, 2009) como una forma de reconocer y caracterizar, en los procesos discursivos de los estudiantes, una construcción de significado de las expresiones algebraicas; por lo que la situación de enseñanza introdujo a los estudiantes a las expresiones algebraicas mediante la comprensión y el uso con sentido de los diversos sistemas matemáticos, sin negar el desarrollo de habilidades procedimentales.

Palabras clave: Experimento de enseñanza, pensamiento algebraico, análisis pragmático del discurso, procesos discursivos, construcción de significado.

Introducción

Este trabajo presenta una propuesta de enseñanza guiada por la metodología de los Experimentos de enseñanza (Cobb, Steffe & Thompson, 2000), la cual retoma aspectos fundamentales de la práctica educativa, por ejemplo, la necesidad de reconocer al educador como sujeto crítico de su quehacer y la revisión analítica de las situaciones de clase para la enseñanza de las matemáticas. Particularmente, en esta comunicación se expone el resultado de la implementación de un Diseño que surge de una crítica de la enseñanza del álgebra, específicamente de su introducción en la escuela; pues si bien, es cierto que en el marco de distintas investigaciones y de los referentes curriculares (MEN, 1998, 2006) se explicita la necesidad de un aprendizaje del álgebra desde la comprensión de la variación y el cambio, la realidad de la enseñanza en Colombia parece no dar cuenta de esto.

La principal cuestión que dio lugar a la propuesta de enseñanza aquí expuesta fue la crítica

que se puede plantear en relación con las formas de introducción al álgebra en la escuela, pues la concepción que un educador tiene sobre el álgebra, sin lugar a dudas, determina sus prácticas de enseñanza; por ejemplo, si asume este tópico matemático como una manipulación de símbolos, entonces centrará su praxis en la movilización exclusiva de propiedades y operaciones posibles dentro del lenguaje alfanumérico. En este sentido, se retoma en este trabajo el modelo de Kieran (2007) en el que sintetiza y organiza la idea del álgebra como una *actividad,* a partir de las propuestas de otros autores, quienes han señalado que esta debe entenderse como una acción sobre los objetos que den lugar a una construcción de estos objetos algebraicos y a sus transformaciones posibles.

En coherencia con esta idea se propone el diseño de la situación de enseñanza en la que los estudiantes, a través de un proceso de análisis sobre las características de una manilla en mostacilla checa (ver *Ilustración 1*), cantidad de hilos y sus medidas, número de mostacillas y patrones tejidos, pudiesen comprender las magnitudes que se involucran en el tejido de dichas manillas, y las relaciones que se dan entre estas; para que posteriormente, mediante el diseño y elaboración de sus propias manillas, puedan avanzar en el desarrollo de un pensamiento algebraico, particularmente, en relación con tres elementos que ha propuesto Radford (2006): la designación simbólica, la indeterminancia y la analiticidad.



Ilustración 1. Manillas en mostacilla checa.

Así, la organización que se desarrolla en esta comunicación corresponde a la presentación del marco metodológico y cómo sus elementos posibilitaron el Diseño de un experimento de enseñanza; por tanto, se señalan los referentes teóricos, en particular se hace énfasis en la meta de aprendizaje planteada para el Diseño, la conjetura que guía la situación de enseñanza, el análisis local y retrospectivo.

Diseño de un experimento de enseñanza

Como se ha señalado en la introducción, los referentes centrales en esta investigación corresponden a la metodología de los Experimentos de enseñanza, la cual establece una estrecha relación entre los referentes teóricos, el diseño de una situación de enseñanza y el análisis del Diseño. Además, los referentes sobre el álgebra escolar y el desarrollo del pensamiento algebraico; y los referentes sobre un análisis pragmático del discurso. Estos se presentan a continuación con la intención de exponer su incidencia en el diseño de la situación de enseñanza, el análisis de esta y la determinación de cómo finalmente aportó a la construcción del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Así, este trabajo muestra el Diseño de un experimento de enseñanza para la introducción al álgebra en nivel octavo, el cual se fundamenta en la concepción del álgebra como una *Actividad* y un análisis pragmático del discurso para comprender el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. El diseño, que se compuso de dos situaciones, se propuso a tres grupos de estudiantes de nivel octavo, cuyas edades se encuentran entre los 14 – 15 años.

La primera situación, que es objeto de presentación en esta comunicación, se compone de tres actividades con las que se pretendía que los estudiantes conocieran los materiales requeridos

para el tejido de manillas en mostacilla, y a partir de ellos establecieran formas de calcular dichos materiales, lo cual supone que mediante estas formas los estudiantes se podrían acercar a las expresiones algebraicas. La segunda situación se propuso con el objetivo de que los estudiantes, al tener la necesidad de preparar los materiales para el tejido de su propia manilla, pusieran en juego las relaciones entre las magnitudes que tuvieron lugar en la situación 1 y avanzaran en la construcción de significado de las expresiones algebraicas.

Los Experimentos de enseñanza se enmarcan en la Investigación Basada en Diseño, y se constituyen de dos aspectos cíclicos, el primero correspondiente al diseño y planeación de su puesta en acto, y el segundo a los análisis; este último se da en dos momentos: los análisis locales y el análisis retrospectivo.

En la primera fase, *planeación del Diseño*, se establecen los elementos fundamentales que se consideran en el experimento, es decir que en esta se define el fenómeno y los elementos de análisis sobre los que gira el experimento. En particular, es indispensable en esta fase aclarar que el Diseño se concibe como todos aquellos elementos que constituyen la situación de enseñanza y no solo como el conjunto de tareas propuesto para dicha situación.

En el marco de esta metodología es fundamental la construcción de una meta de aprendizaje y una conjetura que guían el experimento, las cuales pueden ser revisadas y ajustadas en el transcurso de la implementación. Estas son expresiones que recogen las propuestas teóricas de la investigación, con la diferencia de que la primera da cuenta del propósito que se tiene con el Diseño del experimento, mientras la segunda es "una proposición en la que se determinan las condiciones que deben tener las situaciones propuestas para posibilitar el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, los procesos que se espera que ellos realicen, las intervenciones del docente y demás" (Correa, 2017, p. 32), esto implica que la conjetura expresa el qué y cómo se va a enseñar.

De manera específica, la meta de aprendizaje que se estableció para este Diseño pretendía promover la construcción de un significado de los elementos constitutivos de las expresiones algebraicas, a partir de la comprensión de las cantidades, que se involucran en el diseño y elaboración de manillas, y las relaciones entre estas (Correa, 2017). La conjetura de la primera situación establece la necesidad de identificar magnitudes para aproximarse a las expresiones algebraicas y comprender las relaciones entre ellas, para precisar aquello que se quiere enseñar; y, mediante la determinación de la cantidad de los materiales necesarios para tejer una manilla, establecer una estrategia de enseñanza, esta se expresó de la siguiente manera: "la identificación de cantidades variables y constantes, y establecer relaciones entre ellas para determinar la cantidad de materiales requeridos en la elaboración de distintos diseños de manillas, posibilita una aproximación a las expresiones algebraicas." (Correa, 2017, p. 34)

En la primera actividad de la situación 1 se propuso una búsqueda de los materiales requeridos en el tejido de manillas en mostacilla checa, lo cual permitió establecer unos elementos básicos como el telar, el hilo, aguja, las mostacillas, entre otros; lo cual generó la discusión sobre aspectos más puntuales en el tejido como, por ejemplo, conocer qué condiciones tienen los hilos que se utilizan y cómo optimizar este material. Las anteriores observaciones posibilitaron, finalmente, establecer unos acuerdos para referirse al proceso de tejer la manilla, por ejemplo, al haber dos tipos de hilos se nombró hilo vertical a aquellos que determinan el largo de la manilla e hilo de entrelazar a aquel que atravesaba las mostacillas.

En la segunda actividad, se propuso el análisis de los materiales utilizados en una manilla

que se entregó a cada pareja. Este análisis centraba la atención en el hilo vertical, el hilo de entrelazar y el número de mostacillas, particularmente en la forma de sus medidas o cantidades, como se muestra en la ilustración 2.

E10: Y el hilo que entrelaza, en la b, pues el hilo que entrelaza la fila de mostacilla (señala la forma en que se ubica este hilo en la manilla), que pasa doble, sola es 0.8 (indica la operación que han realizado en su hoja) y lo multiplicamos por 2 porque pasa dos veces por la misma línea, y entonces da 1.6 y el 1.6 por el número de filas (señala en la manilla cómo se ubican las filas) lo multiplicamos, que son 56, y nos dio 89.6.

Ilustración 2. Expresión de los estudiantes sobre la forma de calcular el hilo de entrelazar

En cuanto a la actividad tres, los estudiantes establecieron algunas generalidades sobre el cálculo de los hilos y la cantidad de mostacilla, lo cual les permitió avanzar hacia el desarrollo del pensamiento algebraico en tanto a las formas de nombrar las magnitudes, las operaciones que proponen y, sobre todo, la posibilidad de no necesitar conocer el valor de una cantidad determinada para realizar dichas operaciones.

Respecto a la segunda fase, la e*xperimentación*, se incluye no solo la puesta en práctica de la situación de enseñanza propuesta, sino que se considera como parte de la experimentación las reuniones previas que tiene el equipo investigador para revisar la propuesta, ultimar detalles tanto de la conjetura como los métodos de selección de la información, entre otras.

En esta fase de experimentación tienen un lugar crucial los **análisis locales**, los cuales dieron lugar al reconocimiento de las magnitudes señaladas anteriormente (hilo vertical, hilo de entrelazar, y número de mostacillas), y las expresiones lingüísticas utilizadas por los estudiantes para referirse a las formas de calcular las cantidades asociadas a estas. Particularmente, los análisis locales posibilitaron el reconocimiento de unos elementos pragmáticos del discurso para comprender la construcción de significado de las expresiones algebraicas que los estudiantes habían desarrollado a través de la situación de enseñanza.

Finalmente, el **análisis retrospectivo**, se realiza al finalizar la aplicación de las situaciones de enseñanza, apunta al estudio de los resultados obtenidos en dicha aplicación, es decir configurar cuáles son los aportes a los que se llega, cuáles son las observaciones resultantes de la actividad, las limitaciones del experimento y los posibles caminos que se siguen. En esta fase se plantean dos propósitos esenciales: comprender la situación de enseñanza en su globalidad y reconocer los cambios generados a partir de las intervenciones del equipo investigador (Molina, 2011).

Para estos dos análisis se presentan, a continuación, los referentes teóricos que dieron lugar a la comprensión de la construcción que realizaron los estudiantes de las expresiones algebraicas a partir de la situación propuestas. Dichos referentes corresponden a una perspectiva sobre el álgebra escolar y el desarrollo del pensamiento algebraico y a un análisis pragmático del discurso; con base en estos, se pudo reconocer en las expresiones discursivas de los estudiantes relaciones entre las cantidades involucradas, las cuales vistas desde la perspectiva de Radford (2006) permiten establecer un acercamiento al álgebra escolar entendida como una actividad y no como una manipulación de símbolos.

Una perspectiva sobre el álgebra escolar

Como se ha señalado anteriormente, la situación de enseñanza surge de reconocer el álgebra como una actividad, cuyo sustento fundamental es el modelo de Kieran (2007) en el que la enseñanza del álgebra escolar implica tres tipos de actividades: Generacional, Transformacional y Global/meta – nivel (GTG). Este modelo defiende ante todo la idea de enseñar el álgebra con apoyo en estas tres actividades y hace hincapié en la posibilidad de plantear situaciones de enseñanza que involucren dos o tres tipos de actividades. Dichas actividades mantienen una relación cíclica, en la que hay una construcción constante de significados y una manipulación de los objetos algebraicos en contextos específicos.

Particularmente, en este trabajo el diseño propuesto se relaciona con la *actividad Generacional*, en tanto que pretendió que los estudiantes construyeran un significado de las expresiones algebraicas a partir del establecimiento de relaciones entre cantidades que se involucran en el diseño y la elaboración de manillas. Con esta propuesta, se espera que los estudiantes logren una construcción del pensamiento algebraico, el cual Radford (2006) ha caracterizado con tres elementos: el sentido de la indeterminancia, esto dado que se reconoce en el álgebra objetos como las variables, los parámetros y la incógnita; la analiticidad, en el sentido de poder operar con estos objetos; y la designación simbólica, en cuanto a la posibilidad de designar con determinados signos. Esto conlleva a asumir el pensamiento algebraico como una forma de reflexionar matemáticamente, por lo que se puede suponer la necesidad de reconocer el razonamiento y el lenguaje algebraico como inherentes al pensamiento algebraico, como lo ha señalado Radford (2006).

Un análisis pragmático del discurso

Un análisis pragmático del discurso se ocupa no solo de las emisiones que realizan los hablantes sino de establecer una conexión con el contexto de enunciación, en la cual se identifica una situación en la que un hablante interactúa con otros, razón por la cual aquello que es enunciado cumple con unas condiciones y características particulares. Así, una propuesta en el marco de un análisis pragmático involucra a los *Actos de habla* como unidad mínima del discurso (Searle, 2005, 2009) y el reconocimiento de una *Intencionalidad* (Searle, 1992) al decir lo que se dice o al hacer cierto tipo de movimientos o gestos.

Debido a lo anterior, se presentan dos elementos del análisis del discurso: primero, se parte de reconocer que los discursos o conversaciones no se dan a través de Actos de habla independientes, sino que es a través de una Secuencia de actos de habla que un hablante puede expresar una idea alrededor de un tema, específicamente los elementos constitutivos de las expresiones algebraicas; y segundo, la posibilidad de abstraer del discurso de los estudiantes Macroactos que den cuenta de la construcción que han realizado de dicho significado. Estos Macroactos están asociados principalmente a un acto global o idea principal que se expresa mediante una Secuencia de actos.

> Un Macroacto de habla es un acto de habla que resulta de la realización de una secuencia de actos de habla linealmente conectados. Los actos de habla se dicen linealmente conectados si i) el discurso que los realiza es linealmente coherente y ii) satisfacen las condiciones para las secuencias… (van Dijk, 1996, p. 72)

Así, mediante un análisis del discurso se desarrolló el análisis local de la implementación de la situación 1, lo cual dio lugar al reconocimiento de expresiones lingüísticas que dan cuenta distintos procesos para calcular las cantidades asociadas a cada magnitud. Con base en la

implementación, se identificaron tres procesos sobre la forma de calcular la medida del hilo vertical y el hilo de entrelazar.

Tabla 1

Procesos de los estudiantes para calcular las medidas de las cantidades involucradas en el tejido de manillas.

		Cálculo de la medida el hilo vertical	**Cálculo de la medida el hilo de entrelazar**
Procesos realizados por los estudiantes	P1	Toma en cuenta la medida del hilo en el que se teje el diseño y la medida del hilo que se necesita para realizar la trenza de amarre, incluyendo unos centímetros adicionales porque con la trenza se encoje el hilo.	Toman la medida del largo de la manilla (correspondiente a la parte en la que hay mostacillas) y lo dividen entre la medida de una mostacilla (0.2 cm), para conocer cuántas filas habría en la manilla y estas multiplicarlas por el número de columnas, multiplicado por 2.
	P2	Solo toma en cuenta la medida del hilo en el que se teje el diseño y la medida del hilo que se necesita para realizar la trenza de amarre	Es el producto de las filas por 2 por el número de columnas
	P3	Solo toma en cuenta la medida del hilo en el que se teje el diseño, sin incluir en la medida del hilo unos centímetros adicionales para amarrar la manilla.	Se obtiene al multiplicar la fila por 2, sin considerar las veces que este debe pasar por toda la manilla.

Así, con base en los procedimientos realizados y las distintas expresiones de los estudiantes para referirse a las formas en que calcularon las cantidades correspondientes a las magnitudes involucradas en el tejido de manillas en mostacillas checas, se planteó el análisis retrospectivo en el que se estableció una relación entre la propuesta de desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2006) y las expresiones tanto lingüísticas como no lingüísticas, para identificar una construcción de significado de las expresiones algebraicas que surgieron en el Diseño.

Análisis retrospectivo

La realización de este análisis retrospectivo inició con la determinación de las Secuencias de actos de habla que enunciaron los estudiantes para referirse a las formas de calcular la medida de las magnitudes involucradas (análisis local), en este proceso surgieron distintas Secuencias de actos de habla, que permitieron identificar las formas en que los estudiantes comprenden las relaciones entre las magnitudes. Esto implicó reconocer distintas funciones de los Actos de habla, para luego establecer el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes en tanto a la indeterminancia, designación de objetos y analiticidad que se promueve a través de este Diseño.

Por ejemplo, se pueden identificar expresiones en las que los estudiantes señalan que el número de hilos verticales está asociado al número de columnas más uno, lo cual es muestra de que reconocen que hay cantidades que, aunque sus valores no siempre son conocidos, se pueden operar con un valor constante. En relación con este mismo componente, los estudiantes indican que el número de mostacillas se puede obtener del producto entre número de columnas y número de filas, más, el número de mostacillas que hay en la zona de cierre de la manilla.

Expresiones como *"Aquí para saber cuánto hilo de entrelazado es el ancho de la manilla*

por dos por el número de filas", permiten señalar que los estudiantes identifican relaciones entre las cantidades sin necesidad de indicar unos casos específicos, lo que refleja un acercamiento a la construcción de expresiones algebraicas en un lenguaje natural, lo cual responde de manera parcial a la meta de aprendizaje propuesta, y da cuenta de la conjetura planteada para la situación 1, y posibilitó que en la situación 2 los estudiantes lograran después de las discusiones de clase, reconocer el sentido que tienen las expresiones algebraicas en un lenguaje alfanumérico, tal como se muestra en la Ilustración 3.

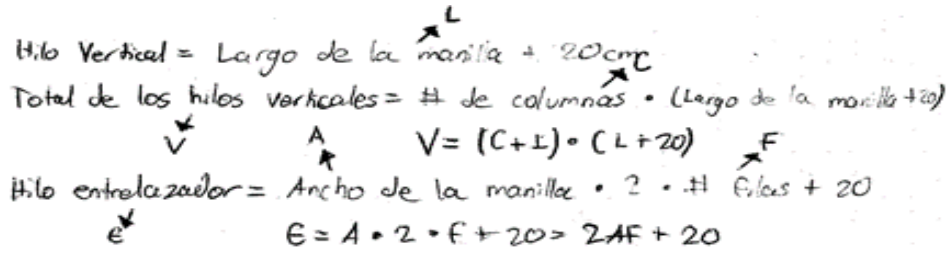


*Ilustración 3.*Producción de los estudiantes.

Conclusiones

Un primer resultado recoge la postura que se planteó sobre la concepción del álgebra como *actividad*, pues si bien se reconocen las perspectivas funcional, resolución de problemas, modelación y generalización como perspectivas potentes para la enseñanza; es necesario examinar en la práctica docente formas de ahondar en situaciones que, de alguna manera, engloben distintos aspectos que son propios del álgebra, tal como lo hacen dichas perspectivas de forma puntal. Es decir, se propone finalmente que la enseñanza del álgebra se pueda abordar en relación con las actividades Generacional, Transformacional y Global meta, debido a que en este marco se pueden potencializar las perspectivas antes mencionadas, y que los maestros propongan situaciones integradoras que den cuenta de la riqueza del álgebra no solo en sus formas de representación, sino en el desarrollo de un pensamiento algebraico.

La gestión de la profesora, durante las discusiones de cierre de la situación 1, se centró en establecer con los estudiantes formas de expresión más generales de las relaciones que habían planteado; esto conllevó a plenarias en las que los estudiantes ponían de manifiesto las formas de calcular las medidas de los hilos. En este sentido, se llegó a afirmaciones como: el hilo vertical es el largo de la manilla más 20 cm por el número de columnas más 1; y el hilo de entrelazar es el ancho de la manilla por 2, por el número de filas más 20 cm. Dichas expresiones, en las plenarias, fueron transformándose en representaciones propiamente algebraicas al convenir con los estudiantes que las cantidades como el largo de la manilla, el número de columnas, el número de filas, y demás cantidades se pueden representar mediante signos (letras) cuyas relaciones se marcan con operaciones. En este sentido, se resalta el lugar del investigador como profesor que se propone en los Experimentos de enseñanza, debido a que se posibilita una continuidad entre las situaciones propuestas en la investigación y otras actividades de clase, cuestión que en el trabajo investigativo permitió identificar un avance importante en planteamiento y resolución problemas en términos alfanuméricos como las ecuaciones e inecuaciones.

En relación con el diseño de la situación surgen inquietudes sobre otras formas de llevar a cabo la implementación de esta, pues bien podría plantearse que los estudiantes aprendan a tejer estas manillas y que luego se realice un análisis de este proceso en términos matemáticos. Así mismo, queda abierta una tercera situación sobre el análisis de los patrones que se tejen; dicho

análisis implicaría, por un lado, que con base en los diseños de manillas identificar la organización de los colores, esto es reconocer una variación de las mostacillas según el lugar que ocupan y la forma que producen, y por otro, promover la explicación sobre cómo fue pensado el diseño, potencializando la lengua natural para referirse a los aspectos que componen los patrones y las formas visuales de reconocerlos.

Finalmente, el trabajo investigativo permitió desarrollar una serie de actividades con las cuales los estudiantes lograron avanzar en su formación de pensamiento algebraico. Los análisis desarrollados pusieron en juego diversas perspectivas teóricas que permitieron avanzar en la comprensión del papel de la lengua natural en la formación de pensamiento matemático.

Referencias y bibliografía

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. *Approaches to algebra* (pp. 3-12). Springer Netherlands.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. *A. Kel & R. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education, Cap. 12* (pp. 307 - 326). N Jersey: Lawrence Earlbaum.

Correa, M. (2017). *Un experimento de enseñanza para la introducción al álgebra. Análisis del discurso para la comprensión de la construcción de significado de las expresiones algebraicas*. Trabajo de maestría no publicado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

van Dijk, T. A. (1996). Estructuras y funciones del discurso: Una introducción interdisciplinaria a la lingüística del texto y a los estudios del discurso. México, D.F: Siglo XXI editores.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. *The handbook of research on mathematics education*. (Vol. 2,707-762). Greenwich, Conn: Information Age.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29,1, 75-88. MEN. (1998). Lineamientos curriculares. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional

MEN (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking & Learning*, 5, 1, 37-70.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, North American chapter (Vol. 1, pp. 2-21).

Searle, J. (1992). Intencionalidad, un ensayo en la filosofía de la mente. Madrid, España: Tecnos

Searle (2005). Una taxonomía de los actos ilocucionarios. *La búsqueda del significado: Lecturas de filosofía del lenguaje* (pp. 415- 430). Madrid, España. Tecnos.

Searle, J. (2009). Actos de habla ensayo de filosofía del lenguaje. Madrid, España: Ediciones Cátedra.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Sobre la configuración de un modelo local para identificar y caracterizar formas de pensamiento algebraico

Johnny Alfredo **Vanegas** Díaz
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
johnny.vanegas@correounivalle.edu.co

Resumen

La presente comunicación se inscribe en el marco del *early algebra* y se ocupa de una problemática asociada con la naturaleza del pensamiento algebraico. Inicialmente se discute la problemática existente en torno a la naturaleza del pensamiento algebraico y se deja entrever que atender este asunto puede verse como una posibilidad teórica para generar análisis profundos sobre las filiaciones, rupturas y discontinuidades entre la aritmética y el álgebra. Seguidamente se presentan y discuten las reflexiones teóricas que dieron lugar a la configuración de un modelo de algebrización, que incluye tres componentes fundamentales: *lo relacional*, *lo analítico* y *lo notacional*, el cual puede resultar útil para identificar y caracterizar formas de pensamiento algebraico, específicamente aquellas que emergen en la actividad matemática desplegada por los estudiantes como resultado del trabajo con tareas relativas a las ecuaciones lineales. Finalmente se exponen algunas reflexiones y se presentan nuevas ideas para seguir investigando.

Palabras clave: early algebra, formas de pensamiento algebraico, resolución de ecuaciones lineales, modelo de algebrización

Introducción

Desde hace unas décadas se viene considerando un cambio de perspectiva, hacia un álgebra para todos, como una red de conocimientos y habilidades que los estudiantes pueden desarrollar a través de todo su ciclo escolar (Kaput, 2000). Este enfoque, reconocido internacionalmente como *early algebra* plantea: a) la introducción de formas de pensamiento algebraico en la matemática escolar, pretendiendo la algebrización del currículo; y b) nuevos puntos de vista entre la aritmética y el álgebra que promuevan continuidad entre estos dominios (Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006; Kaput, 2000).

En consonancia con la visión del early algebra se apertura un nuevo espacio curricular para las matemáticas del siglo XXI; se incorpora un nivel de coherencia, profundidad y poder a la matemática escolar, tanto curricularmente como cognitivamente, y finalmente, se marginan los

cursos abruptos, aislados y superficiales del álgebra de la escuela secundaria (Kieran, 2004).

Si bien, la algebrización del currículo aliviana, en gran medida, la remarcada transición de la aritmética al álgebra, también es cierto que genera un nuevo campo de discusión en torno a: 1) la naturaleza del pensamiento algebraico y 2) la manera en que dicho pensamiento puede ser desarrollado en el ámbito escolar (Aké, 2013). Aunque ambos aspectos se encuentran íntimamente relacionados, el énfasis de esta comunicación está puesto sobre el primero de ellos, entre otros aspectos, porque durante los últimos años, numerosas investigaciones (e.g., Carraher et al., 2006; Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi, 2014) han señalado la importancia de clarificar y profundizar en la comprensión de los procesos involucrados en el pensamiento algebraico.

En el marco de las consideraciones anteriores, esta comunicación aporta al señalado panorama de discusiones teóricas –alrededor de la naturaleza del álgebra escolar–; al poner de manifiesto el proceso constitutivo de un modelo local de algebrización, que incluye tres componentes fundamentales: *lo relacional*, *lo analítico* y *lo notacional*.

Contextualización de la problemática de interés

Diferentes investigaciones en el campo de la Educación Matemática dejan entrever que se conoce poco sobre la naturaleza del pensamiento algebraico. La complejidad detrás de una definición precisa y concisa del pensamiento algebraico es producto de la amplia gama de objetos y procesos relacionados, así como de las diversas formas de concebir el pensamiento en general (Radford, 2012). Por su parte, Aké (2013), indica que es necesario clarificar la naturaleza del álgebra escolar y responder a cuestiones, tales como: ¿Qué formas de razonamiento son algebraicas? y ¿Cuáles son las características de esas formas de razonamiento?. En esta misma dirección, Vergel (2014) pone de manifiesto la necesidad de identificar y caracterizar las formas de pensamiento algebraico que emergen en estudiantes jóvenes cuando trabajan con generalización de patrones.

Si bien, desde la perspectiva de la *generalización de patrones* hay numerosas investigaciones (e.g., Radford, 2014; Vergel, 2014) que presentan resultados entorno al pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes; se conoce muy poco acerca de las formas de pensamiento algebraico de estos estudiantes, frente a situaciones inscritas en el contexto de las ecuaciones. De hecho, pese a que existe un claro conceso que actividades relativas a la formación y manipulación de expresiones simbólicas tienen relación directa con formas de pensamiento algebraico, sigue siendo discutible los **contornos** de la actividad algebraica en actividades que incluyen la resolución de problemas y la equivalencia de expresiones aritméticas (Aké, 2013). En consecuencia, parece necesario incursionar en el contexto matemático de las ecuaciones y re-descubrir por qué este contexto sigue ofreciendo elementos de estudio que son importantes para comprender la actividad algebraica desplegada por los estudiantes.

Abordar el estudio del pensamiento algebraico desde un contexto simple, como es: la resolución de ecuaciones lineales, contribuye a la generación de espacios para indagar sobre las formas en que los estudiantes hacen explicito su pensamiento algebraico, pues tal como lo indican, Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue (2005) hay mucho que aprender de las generalizaciones que hacen los estudiantes acerca de las propiedades de los números y las operaciones y de cómo ellos exploran y trabajan con relaciones entre cantidades.

Hacia la construcción de un modelo de algebrización

Algunas conceptualizaciones sobre el pensamiento algebraico

Dentro de la diversidad de perspectivas teóricas, se pueden reconocer diferentes maneras de entender y conceptualizar el pensamiento algebraico. Por un lado, Radford (2014) en el marco de la *teoría de la objetivación* define el pensamiento algebraico como una forma particular de reflexionar matemáticamente, la cual se manifiesta a través de diferentes recursos semióticos de objetivación, incluso sin hacer uso del simbolismo alfanumérico. De hecho, Vergel (2014) siguiendo esta misma dirección, señala que tales manifestaciones, que dan cuenta del proceso de conocer, no pueden ser descritas únicamente en términos de prácticas discusivas y por lo tanto, hace énfasis en la importancia que trae consigo los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas. Por otra parte, Godino et al. (2014), en el marco del *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* (EOS) prefieren hablar en términos del razonamiento algebraico. Definen este tipo de razonamiento como una zona transicional, desde la aritmética hasta el álgebra, en la que se admite la presencia de tipos de tareas, objetos y procesos algebraicos de una forma gradual pero creciente.

Aportes desde la resolución de problemas y la modelación matemática

Lins (1992) desarrolla una caracterización del *pensamiento algebraico* que incluye: *pensar aritméticamente*, *pensar internalistamente* y *pensar analíticamente*. Fundamenta tal caracterización en una revisión de literatura sobre investigaciones previas concernientes a dos tópicos: a) desarrollo histórico del álgebra y conocimientos matemáticos en culturas matemáticas culturalmente situadas (e.g., aspectos de la cultura matemática griega, china, etc.) y b) aprendizaje y enseñanza del álgebra (e.g., dificultades causadas por el uso de la notación literal). Para este autor, el *pensamiento algebraico* es una forma de modelación y de manipulación de modelos, como una vía de organización del mundo que involucra diversas manifestaciones. En concreto, el pensamiento algebraico puede entenderse como una "intención"; es decir, una manera en la cual una persona quiere hacer las cosas. Incluso si los conceptos o métodos necesarios para llevar a cabo esa intención no están disponibles o desarrollados.

Aritmética generalizada y pensamiento relacional

Jacobs, Franke, Carpenter, Levi, & Battey (2007) caracterizan el pensamiento algebraico desde la perspectiva de la aritmética generalizada y el estudio de las relaciones. La caracterización del *pensamiento relacional* incluye, la observación de expresiones y ecuaciones en su totalidad, en lugar de los procedimientos que se llevan a cabo paso a paso. Implica cierto nivel de conocimiento de las operaciones y de las propiedades de los números, pero no necesariamente una comprensión completa de ellas y de sus definiciones formales. La idea es que al poner la atención sobre las relaciones y propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas, en lugar de centrarse en los procedimientos de cálculos de respuestas, se puede hacer más coherente la enseñanza y el aprendizaje con los tipos de conocimientos que apoyan el aprendizaje del álgebra, y al mismo tiempo, apoyar y mejorar el aprendizaje de la aritmética (Carpenter et al., 2005).

Identificación de los componentes constitutivos de un modelo de algebrización

En el presente marco conceptual, el pensamiento algebraico remite a la descripción de una actividad matemática que abarca a) el trabajo con ecuaciones lineales, b) significados del signo

igual, c) formas analíticas de proceder, y d) diferentes notaciones para representar los objetos matemáticos. Así, la conceptualización del pensamiento algebraico que aquí se esboza, sienta las bases para construir un modelo de algebrización que incluye tres componentes: *lo relacional*, *lo analítico* y *lo notacional*.

El *componente relacional* destaca hallazgos de diversas investigaciones, enmarcadas en la resolución de ecuaciones (e.g., Kieran, 1992), las cuales convergen en que el significado relacional del signo igual es fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico. Al parecer una comprensión más rica del signo igual, que la proporcionada por la aritmética tradicional, genera mayores oportunidades de éxito con el álgebra de las ecuaciones.

Por otra parte, el *componente notacional* para ser indispensable en la comprensión de la actividad algebraica desplegada por los estudiantes (Godino et al., 2014; Van Amerom, 2003; Vergel, 2014). Si bien, es necesario orientar una buena parte de la enseñanza del álgebra hacia el aprendizaje y comprensión de las reglas sintácticas, también hay que reconocer que el álgebra implica trabajo con otras formas notacionales que incluyen representaciones visuales y materiales, tales como: dibujos, tablas y diagramas.

Finalmente, el *componente analítico* es considerado por la presencia de la analiticidad como un aspecto distintivo del pensamiento algebraico (Lins, 1992; Radford, 2014) que tiene sus orígenes históricos en la formalización del "método analítico" definido por Vieta y Descartes, alrededor del siglo XVI. La lógica de este método es diferente a la utilizada para resolver problemas aritméticos. En el método analítico, las relaciones entre las cantidades se describen empleando los datos conocidos y los desconocidos de manera similar, construyendo relaciones equivalentes a partir de ellos, hasta que se obtiene una respuesta al problema.

Configuración de un modelo de algebrización

La revisión de literatura en torno al pensamiento algebraico (e.g., (Aké, 2013; Godino et al., 2014; Lins, 1992; Vergel, 2014), así como la mirada a diversos trabajos de investigación enmarcados en el contexto de la resolución de ecuaciones (e.g., (Andrews & Sayers, 2012; Van Amerom, 2003) posibilitan la construcción de un modelo de algebrización. La estructura de este modelo se basa en articulación de tres componentes algebraicos que lo constituyen: a) *componente relacional*, b) *componente analítico* y c) *componente notacional* (Fig. 1).

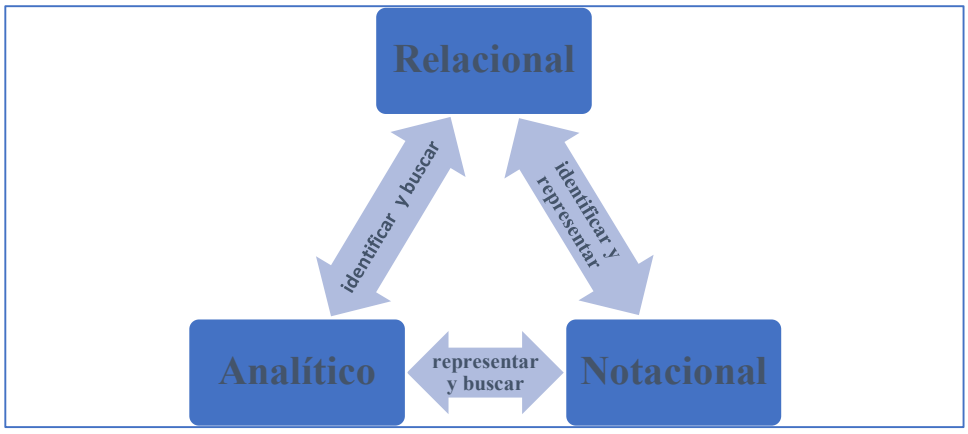


Figura 1. Modelo de algebrización

Individualmente cada componente aborda una dimensión ontológica de las nociones matemáticas, en términos de dos categorías: *operacional* y *estructural* (Sfard, 1995; Sfard & Linchevski, 1994). Aunque se reconoce el hecho de que esa diferenciación es evidente en algunos casos, y objeto de debate en otros, metodológicamente resulta útil. En primer lugar, la delimitación aporta elementos para construir un puente entre la aritmética y el álgebra. Y en segunda instancia, se constituye en una herramienta para identificar formas de pensamiento algebraico, en diferentes niveles de concreción.

El *componente relacional* incluye dos significados asociados al signo igual. La literatura de investigación revela que gran parte de los estudiantes de Educación Básica carecen de un *significado relacional* del signo igual y en su lugar, presentan un *significado operacional* (Jacobs et al., 2007)

El *significado relacional* indica una equivalencia entre dos expresiones que se encuentran a ambos lados del signo igual. En contraste, el *significado operacional*, sitúa el signo igual como un operador, es decir, una instrucción para realizar una operación. La consideración de dos significados para el signo igual, tiene consonancia con numerosos estudios. La tabla 1 ilustra algunas investigaciones, cronológicamente organizadas, que destacan este hecho.

Tabla 1.

Investigaciones que reportan dos significados relativos al signo igual

Investigaciones	**Significados del signo igual**	
	Operacional	**Relacional**
(Kieran, 1992)	El signo igual anuncia un resultado	El signo igual representa una equivalencia
(Jacobs et al., 2007)	Una señal para realizar el cálculo que le precede.	Indicador de una relación entre dos expresiones

El *componente notacional* está conformado por dos categorías que integran las cuatro formas de representación más resonantes en la literatura de investigación. Estas cuatro formas de representación pueden concebirse como una colección de herramientas que están a disposición de los estudiantes al momento de resolver un problema (Van Amerom, 2003) y son consideradas en diversos estudios para explorar perspectivas del pensamiento algebraico de los estudiantes (e.g., Huntley, Marcus, Kahan, & Miller, 2007). Además, se pueden poner en correspondencia con las fases del desarrollo histórico del álgebra, enmarcando las *notaciones singulares* tanto, en la fase retórica como en la sincopada, y las *notacionales simbólicas* en la fase simbólica del álgebra (Van Amerom, 2003).

Las *notaciones simbólicas*, involucran el uso de símbolos alfanuméricos (literales) para representar los objetos desconocidos y las relaciones matemáticas entre las cantidades. En contraste, las *notaciones singulares*, implican representaciones concretas, gráficas y verbales; y las letras aparecen, únicamente, como etiquetas o abreviaciones para designar un objeto.

Desde la visión adoptada para el *componente notacional* se rescata la importancia que posee la notación simbólica como un sistema de representación básico de las matemáticas y un indicador de pensamiento algebraico (Brizuela & Schliemann, 2004); como una forma de expresar los *objetos* y *procesos* algebraicos en niveles superiores de algebrización (Aké, 2013).

Además, al igual que otras investigaciones (e.g., Kieran, 2004; Van Amerom, 2003) se reconoce que el pensamiento algebraico está asociado con diferentes formas de representación que desbordan el marco de la *notación simbólica*. Al respecto, Kieran (2004) señala que el álgebra simbólica-literal puede ser usada como herramienta o apoyo cognitivo de creación y para sostener un discurso en la escuela, pero insiste en que se puede estar involucrado en actividades algebraicas sin utilizar, en absoluto, algún símbolo literal, por ejemplo; al analizar las relaciones entre cantidades.

Finalmente, el *componente analítico* enmarca dos categorías: *contextual* y *sintáctica*. Según, Cai & Knuth (2011), un análisis detallado de las formas en las cuales los problemas se resuelven usando aritmética y álgebra puede ayudar a reconocer aspectos claves del pensamiento algebraico. En palabras de Radford (2012, 2014), dicho análisis es decisivo en la identificación de la *analiticidad* como componente fundamental del pensamiento algebraico. Además, tal como indica Lins (1992), la forma analítica de abordar un problema parece ser una constante dentro del pensamiento algebraico.

En términos generales, la conceptualización del *componente analítico* se basa en ideas de Radford (2012) y Vergel (2014) sobre la *analiticidad*; como forma de trabajar los objetos indeterminados o el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos. Desde esta postura, la analiticidad no emerge, exclusivamente, de manera *sintáctica*, sino que además, tiene presencia en escenarios donde lo indeterminado empieza a ser objeto de discurso (Vergel, 2014). Por lo tanto, el *componente analítico*, está asociado al carácter operatorio de lo desconocido, pero también se refiere a las deducciones que se hacen a partir de ciertas premisas.

De esta manera, se entiende la *analiticidad sintáctica* como la forma de operar con los objetos indeterminados a través de las reglas sintácticas del álgebra. Así, lo desconocido es el punto de partida del proceso de solución, en el que el símbolo, en sí mismo, es el objeto de manipulación. En cambio, la *analiticidad contextual* implica una forma de trabajo que no opera con la sintaxis algebraica. Si bien, pueden usarse literales para representar lo desconocido, los cálculos se realizan utilizando, esencialmente, las operaciones y sus inversas sobre cantidades conocidas, de tal manera que lo desconocido no está involucrado, directamente, en los cálculos. El énfasis está puesto sobre las cantidades y sus relaciones.

Por un lado, la *analiticidad contextual*, en correspondencia con las ideas de Vergel (2014) está implicada en argumentos escritos por los estudiantes, que no necesariamente remiten a una forma simbólica. Por otra parte, la *analiticidad sintáctica* le asigna un lugar protagónico a la *notación simbólica*. De este modo, la *analiticidad sintáctica* guarda cierta relación con los planteamientos de Filloy, Puig, & Rojano (2008), quienes argumentan que el carácter analítico del uso de los sistemas de signos, para reducir el enunciado del problema a una forma canónica, es una característica de lo algebraico. De hecho, Godino et al., (2014) consideran que en un nivel propiamente algebraico se opera de manera analítica/sintáctica sobre un lenguaje simbólico-literal.

Las conexiones entre los componentes algebraicos se delimitan sobre la base de la perspectiva de la *resolución de problemas* y *la modelación matemática*. Los términos *identificar*, *buscar* y *representar* se entienden como acciones fundamentales que emergen y se desarrollan al interior de los procesos de *matematización* en sus dos fases. Por un lado, se corresponden con la *matematización horizontal* en aspectos, tales como: a) la identificación de la matemática que es relevante respecto al problema, b) la búsqueda y hallazgo de regularidades, relaciones y patrones,

y c) la esquematización, formulación y visualización del problema desde diferentes puntos de vista. Por otra parte, guardan alguna relación con actividades propias de la *matematización vertical*, tal como: el uso de diferentes representaciones sujetas a estrategias de reflexión, generalización, prueba y simbolización (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Desde esta visión, el trabajo con tareas relativas a las ecuaciones lineales, implica *identificar* las relaciones entre las cantidades, que son relevantes en el contexto de la tarea; *buscar* nuevas relaciones matemáticas a través de las formas analíticas de proceder y *representar* las relaciones matemáticas mediante las formas notacionales.

Reflexiones finales y nuevas rutas de investigación

Es importante resaltar algunos aspectos, sobre la configuración del modelo, que se encuentran permeando la discusión pero que no son evidentes. En primer lugar, se trata de un modelo "local" que no pretende constituirse en un marco explicativo global, pues no aborda cuestiones asociadas, por ejemplo, a la resolución de problemas funcionales. En segundo lugar, no se sugiere que la actividad con ecuaciones y/o sistemas de ecuaciones lineales, pueda estudiarse, únicamente, mediante los componentes señalados y sus relaciones. La indeterminancia, en el sentido de Radford (2012) es propio de lo algebraico, pero agrega una variable que por sí misma resulta compleja de aislar. Finalmente, el modelo se basa en la resolución de problemas y modelación matemática, como perspectiva de introducción del álgebra escolar, lo cual no sugiere que está perspectiva sea independiente, o más importante que otras perspectivas que han sido consideradas en el estudio del pensamiento algebraico.

Por otro lado, al tratarse de una primera versión del modelo, indudablemente se requieren otros estudios que ayuden a consolidar una mejor interpretación de los componentes algebraicos identificados, o bien proponer otros, que posibiliten la exploración y comprensión de la actividad algebraica desplegada por los estudiantes.

En síntesis, está comunicación pone de relieve que una conceptualización del pensamiento algebraico a partir de los tres componentes: *relacional*, *analítico* y *notacional*, podrían proveer un adecuado modelo para intentar explicar y comprender la actividad algebraica desplegada por los estudiantes cuando trabajan con la resolución de situaciones relativas a las ecuaciones lineales. De hecho, la implementación de este modelo permitió reconocer, al menos, cuatro formas de pensamiento algebraico que guardan una estrecha relación con la manera en que los estudiantes trabajan con los componentes algebraicos y sus conexiones, poniendo de manifiesto la riqueza del modelo para explorar, describir y caracterizar la actividad algebraica; pero ello será objeto de otra comunicación.

Referencias

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Granada.

Andrews, P., & Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(4), 476–488. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.002

Brizuela, B., & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2001), 33–40. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/10.2307/40248456

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. New York: Springer.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(1), 53–59. http://doi.org/10.1007/BF02655897

Carraher, D. W., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87–115.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. (A. Bishop, Ed.) *Saudi Med J* (Vol. 43). New York: Springer. http://doi.org/10.1073/pnas.0703993104

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de Las Ciencias*, *32*(1), 199–219. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/eos/niveles_algebrizacion.pdf

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(2), 115–139. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.005

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary cchool. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258–288. Retrieved from http://homepages.math.uic.edu/~martinez/PD-EarlyAlgebra.pdf

Kaput, J. J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum* (pp. 1–20). Washington, DC: National Academy Press.

Kieran, C. (1992). Learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Nottingham.

Radford, L. (2012). On the Development of Early Algrebraic Thinking. *Pensamiento Numerico Y Algebraico*, *6*(4), 117–133.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277. http://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 15–39. http://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). Educational Studies in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2), 191–228. http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000028403.25781.79

Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 63–75. http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005237.72281.bf

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). the Didactical Use of Models in Realistic. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9–35. http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Análisis Ontosemiótico de la noción Ecuación Lineal en libros de texto mexicanos

Graciela Rubi **Acevedo** Cardelas
Universidad de Sonora
México
grasick@gmail.com
Ramiro **Ávila** Godoy
Universidad de Sonora
México
ravilag@mat.uson.mx

Introducción

Los resultados aquí mostrados son parte de una investigación más amplia, cuyo objetivo es contrastar las acciones operativas y discursivas llevadas a cabo por los profesores en su planeación con respecto a las realizadas en su implementación en el aula, en el caso de la enseñanza de la ecuación lineal. Una de las acciones implementadas para desarrollar dicha contrastación ha sido una revisión documental de textos que sustentan y apoyan el trabajo de los docentes, es decir, tanto los referentes curriculares como libros de texto. Aquí se presentan los resultados de la revisión y análisis de los libros de texto seleccionados.

Enseñanza de las Ecuaciones Lineales

Dentro de las investigaciones referentes a la visión que los profesores tienen respecto a la enseñanza del álgebra (Tunks & Weller, 2009), se identifica que ésta es concebida, por algunos profesores, como un conjunto de reglas para manipular variables, postura que se ve reforzada por los mismos libros de texto. Así, para muchos profesores, el álgebra consiste en determinar cantidades desconocidas y no se le ve como una actividad de razonamiento que involucra la indeterminación.

Esto se ve reflejado en el campo particular de la enseñanza de las ecuaciones lineales donde se observa que las experiencias previas de aprendizaje y de enseñanza de los profesores les indican que deben dedicar la mayor parte del tiempo en la escuela a desarrollar habilidades procedimentales en vez de conceptuales. Para Attorps (2005) hay dos posibles explicaciones a este hecho: una es que muchos libros de texto no dan suficiente apoyo para este tipo de enseñanza, otra es que los maestros pueden no ser suficientemente competentes en sus conocimientos conceptuales matemáticos.

Tradicionalmente, en la enseñanza de las ecuaciones lineales si un estudiante logra resolver un tipo de ecuación, el profesor le proporcionará ecuaciones más complejas, sin importar si el estudiante la resolvió por prueba y error o a través de operaciones inversas (Linsell, 2009). Otro aspecto que considerar es la importancia del contexto y cómo las preguntas hechas en contexto

resultan más sencillas que sus equivalentes simbólicos.

En el caso de las ecuaciones aritméticas —con incógnitas solo en un miembro de la ecuación— los estudiantes necesitan comprender las operaciones inversas y sus características (Linsell, 2009), mientras que para las ecuaciones algebraicas —con incógnitas en ambos miembros de la ecuación— se requiere tanto que los alumnos comprendan que las expresiones en ambos lados del signo igual son de la misma naturaleza (o estructura) como que sean capaces de operar con la incógnita como una entidad y no como número (Filloy & Rojano, 1989). En ese sentido, las ecuaciones aritméticas son procedimentales mientras que las algebraicas son estructurales. (Kieran, 1992). Sin embargo muchos estudiantes no logran esta transición, siendo incapaces de operar espontáneamente con o en la incógnita por lo que terminan constreñidos a realizar operaciones sin sentido con símbolos que no entienden (*cognitive gap*) (Herscovics & Lichevski, 1994) aunque Pirie & Martin (1997) sostienen que esto se puede deber más a una didáctica inapropiada que a una insuficiencia cognitiva.

En cuanto a las investigaciones relacionadas con las aproximaciones de resolución de ecuaciones algebraicas, utilizar la metáfora de la balanza es de los recursos más reportados, pues ésta ayuda a los estudiantes a ver la ecuación como un todo en vez de una instrucción a operar, ayuda a los estudiantes a resolver ecuaciones algebraicas desde la perspectiva de hacer lo mismo en ambos miembros de la ecuación; sin embargo, el uso de números negativos sólo tiene cabida de manera artificial (Vlassis, 2002).

Por su parte, el método de "cambiar de lado, cambiar de signo" se centra en transponer la ecuación de manera que la incógnita quede del lado izquierdo del signo igual, este movimiento arbitrario de la incógnita a la izquierda perpetúa las concepciones operacionales del signo igual y no promueve que los estudiantes comprendan que dicho movimiento no cambia la igualdad de la ecuación (Capraro & Joffrion, 2006 referido en Andrews & Xenofontos (2017)).

En cuanto a la estrategia de "ensayo y error", aunque promueve una comprensión de la naturaleza relacional del signo igual y el rol de la incógnita en contexto (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005) y puede ser apropiado como una estrategia inicial en un proceso de enseñanza, es ineficiente y no promueve el aprendizaje de estrategias generales de resolución de ecuaciones (Filloy & Rojano, 1989). Esta estrategia también permite validar los resultados, sin embargo, en cuanto se abandona como técnica de resolución también lo hace para verificar la solución (Kieran, 1992).

Lo reportado en esta sección sirve como referente para indagar en qué medida los libros de texto que se analicen propician una solución a las dificultades que han sido reportadas o si, por el contrario, influyen en su generación.

Análisis de libros de texto

A pesar de que, en educación primaria y secundaria, los docentes cuentan con orientaciones curriculares, la realidad es que la mayoría de los profesores usan los libros de texto como principal recurso didáctico (Kajander & Lovric, 2009). Dichos textos determinan tanto el material que debe ser cubierto como la manera en la que será presentado. De hecho, en lugares como el País Vasco "el 90 por ciento de los centros declara tener un libro de texto para las asignaturas de matemáticas, que es utilizado 'para todo' en un 67% de los casos, fuera de un 11% que sólo lo utilizan 'para los problemas'" (Ruiz de Gauna Gorostiza, Dávila Balsera, Etxeberria Murgiondo, & Sarasua Fernández, 2011).

Una línea de investigación en Matemática Educativa ha sido el análisis de libros de texto, con el fin de responder a diversas cuestiones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Picado & Rico, 2011), por ejemplo, el Proyecto 2061, una iniciativa de la American Association for the Advancement of Science (referido por Kajander & Lovric, 2009) menciona que la mayoría de textos usados para enseñar álgebra tienen potencial para ayudar al aprendizaje de los alumnos, aunque también presentan serias debilidades. De hecho, concluyen que ningún libro de texto hace un trabajo satisfactorio en favorecer que los estudiantes superen conocimientos previos inadecuados o carentes.

A pesar de haber interés por analizar el contenido y explorar la forma en que los libros de texto son usados en el aula, muy pocos investigadores han optado por realizar un análisis profundo de lo que hay en dichos libros, enfocándose en cómo el material es presentado y qué tipo de aprendizaje es promovido (Kajander & Lovric, 2009).

Esto último se ha convertido en un referente para este artículo, donde se tiene el interés de identificar los elementos que son movilizados en los libros de texto y la manera en que interactúan unos con otros, a fin de poder caracterizar lo que se espera aprendan los estudiantes.

Marco Teórico

El marco teórico utilizado en esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemáticos (Godino J. D., 2017), a continuación, se refieren las herramientas teóricas, propias de este enfoque, que se han utilizado para analizar el tratamiento propuesto en los libros de texto mexicanos para la noción de ecuación lineal.

El EOS asume una visión antropológica y pragmatista de las matemáticas, que se ve reflejada en la noción de práctica matemática, la cual se refiere a "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino & Batanero, 1994). Dichas prácticas pueden ser realizadas por un sujeto o en el seno de una institución —conjunto de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas—.

Los objetos matemáticos adquieren un estado derivado de las prácticas que lo preceden; es decir, que los individuos adquieren su experiencia a través de las prácticas matemáticas y de ellas emergen los objetos matemáticos. Una forma de conceptualizar las prácticas matemáticas es considerarlas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual se leen y producen textos matemáticos, y una práctica discursiva que permite reflexionar sobre la práctica operativa (Font, D. Godino, & Gallardo, 2013).

Dentro de los significados institucionales, entendidos en términos de los sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización en el seno de una institución (Godino, Batanero, & Font, 2008), se encuentran los Significados Institucionales de Referencia, Pretendido, Implementado y Evaluado. En el caso particular del Significado Institucional de Referencia, este es considerado como el sistema de prácticas usado como referencia para elaborar el significado pretendido, dado que esta investigación es parte de una mayor que tiene como interés contrastar el Significado Institucional Pretendido con el Implementado, es necesario el caracterizar el Significado Institucional de Referencia. Dado que los docentes con los que se trabaja utilizan como principal fuente para su planeación los libros de texto, es a partir de ellos de donde se ha caracterizado dicho Significado.

Cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...), lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...), conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...), proposiciones (enunciados sobre conceptos), procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...) y argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...) (Godino, Batanero, & Font, 2008), los cuales son considerados objetos primarios.

Al realizar y evaluar una práctica matemática, se analiza el conjunto formado por todos los objetos primarios articulados en los que se considera una configuración ontosemiótica, es decir, una red de objetos primarios (intervinientes y emergentes) de los sistemas de prácticas. Cuando estos objetos son movilizados por parte de un sujeto en sus prácticas matemáticas, dicha configuración será cognitiva, mientras que cuando se trata de objetos matemáticos institucionales, la configuración será epistémica (Parra Urrea & Pino-Fan, 2017).

Metodología

Como se ha mencionado anteriormente, este trabajo es parte de una investigación más amplia que pretende contrastar el Significado Institucional Pretendido con el Implementado de la noción de Ecuación Lineal. Para caracterizar el significado institucional de referencia, se ha estudiado el libro de texto que utiliza una de las docentes que es sujeto de investigación: Block Sevilla, D., García Peña, S., & Balbuena Corro, H. (2018). *Matemáticas 1.* México: SM.

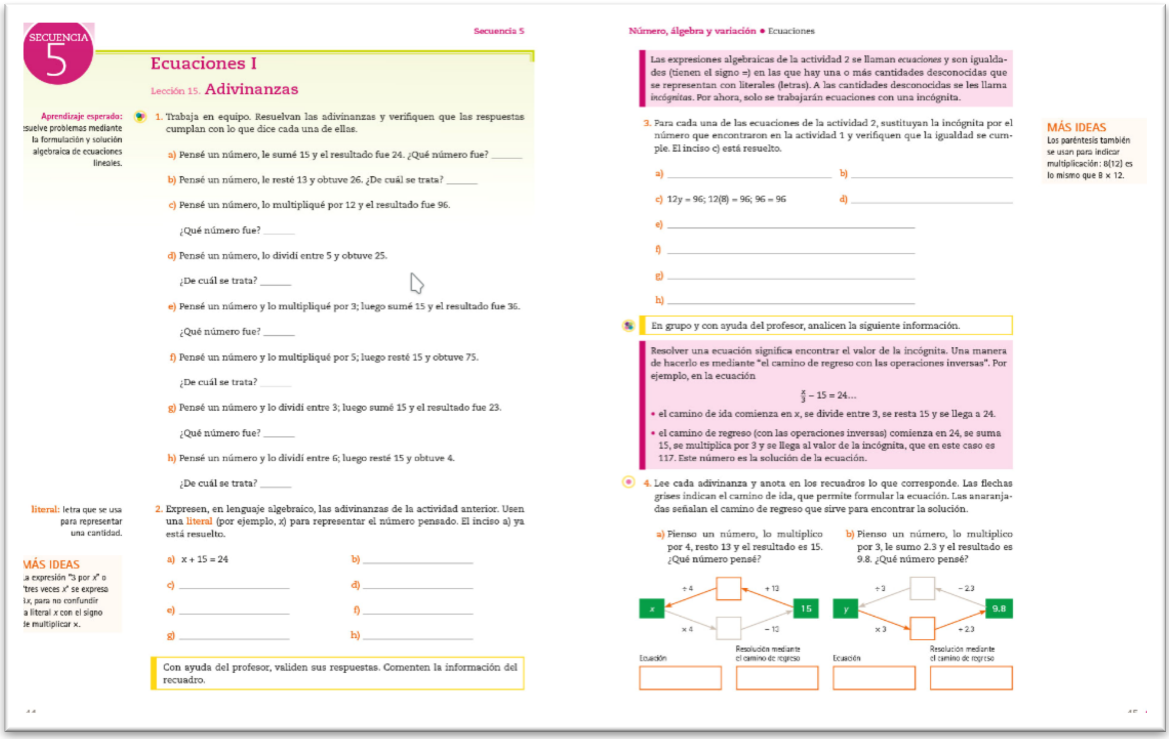
El análisis de este texto cobra importancia, debido a que en el ciclo 2018-2019 se instauró un Nuevo Modelo Educativo (SEP, 2017), que tuvo como consecuencia modificaciones a los planes y programas de estudio y en consecuencia a los libros de texto. El análisis de dichos textos será de utilidad para comprender los alcances de esta nueva propuesta y abona en la posible mejora de la misma.

Esta investigación, de tipo cualitativa, se centra en el análisis del mencionado texto, el cual divide en dos partes el estudio de las ecuaciones lineales, la Secuencia 5 llamada Ecuaciones 1, subdividida a su vez en cuatro lecciones; mientras que la Secuencia 12 llamada Ecuaciones II se ha subdividido en tres lecciones. Cada una de estas siete lecciones representa una Unidad de análisis en este trabajo.

Para lograr los objetivos de esta investigación se establecieron cuatro fases: 1) identificar los objetos primarios intervinientes y emergentes de cada Unidad de análisis, 2) construir una configuración epistémica de cada Unidad de análisis, 3) construir la trayectoria epistémica de la enseñanza de las ecuaciones lineales y a partir de lo anterior 4) caracterizar el Significado Institucional de Referencia de la noción de ecuaciones lineales.

Resultados

Por cuestión de espacio, en este reporte se presentan la identificación de objetos primarios y configuración epistémica de la Unidad de análisis 1 (figura 1), entendiendo que este mismo trabajo se realizó con las unidades subsecuentes.



SECUENCIA 5

Secuencia 5

Ecuaciones I

Lección 15. **Adivinanzas**

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales.

1. Trabaja en equipo. Resuelvan las adivinanzas y verifiquen que las respuestas cumplan con lo que dice cada una de ellas.

a) Pensé un número, le sumé 15 y el resultado fue 24. ¿Qué número fue? _____

b) Pensé un número, le resté 13 y obtuve 26. ¿De cuál se trata? _____

c) Pensé un número, lo multipliqué por 12 y el resultado fue 96.

¿Qué número fue? _____

d) Pensé un número, lo dividí entre 5 y obtuve 25.

¿De cuál se trata? _____

e) Pensé un número y lo multipliqué por 3; luego sumé 15 y el resultado fue 36.

¿Qué número fue? _____

f) Pensé un número y lo multipliqué por 5; luego resté 15 y obtuve 75.

¿De cuál se trata? _____

g) Pensé un número y lo dividí entre 3; luego sumé 15 y el resultado fue 23.

¿Qué número fue? _____

h) Pensé un número y lo dividí entre 6; luego resté 15 y obtuve 4.

¿De cuál se trata? _____

literal: letra que se usa para representar una cantidad.

2. Expresen, en lenguaje algebraico, las adivinanzas de la actividad anterior. Usen una literal (por ejemplo, *x*) para representar el número pensado. El inciso a) ya está resuelto.

a) $x + 15 = 24$ b) _____

c) _____ d) _____

e) _____ f) _____

g) _____ h) _____

MÁS IDEAS

La expresión "3 por *x*" o "tres veces *x*" se expresa 3*x*, para no confundir a literal *x* con el signo de multiplicar ×.

Con ayuda del profesor, validen sus respuestas. Comenten la información del recuadro.

Número, álgebra y variación • Ecuaciones

Las expresiones algebraicas de la actividad 2 se llaman *ecuaciones* y son igualdades (tienen el signo =) en las que hay una o más cantidades desconocidas que se representan con literales (letras). A las cantidades desconocidas se les llama *incógnitas*. Por ahora, solo se trabajarán ecuaciones con una incógnita.

3. Para cada una de las ecuaciones de la actividad 2, sustituyan la incógnita por el número que encontraron en la actividad 1 y verifiquen que la igualdad se cumple. El inciso c) está resuelto.

a) _____ b) _____

c) $12y = 96$; $12(8) = 96$; $96 = 96$ d) _____

e) _____

f) _____

g) _____

h) _____

En grupo y con ayuda del profesor, analicen la siguiente información.

Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la incógnita. Una manera de hacerlo es mediante "el camino de regreso con las operaciones inversas". Por ejemplo, en la ecuación

$\frac{x}{3} - 15 = 24$...

- el camino de ida comienza en *x*, se divide entre 3, se resta 15 y se llega a 24.
- el camino de regreso (con las operaciones inversas) comienza en 24, se suma 15, se multiplica por 3 y se llega al valor de la incógnita, que en este caso es 117. Este número es la solución de la ecuación.

4. Lee cada adivinanza y anota en los recuadros lo que corresponde. Las flechas grises indican el camino de ida, que permite formular la ecuación. Las anaranjadas señalan el camino de regreso que sirve para encontrar la solución.

a) Pienso un número, lo multiplico por 4, resto 13 y el resultado es 15. ¿Qué número pensé?

b) Pienso un número, lo multiplico por 3, le sumo 2.3 y el resultado es 9.8. ¿Qué número pensé?

MÁS IDEAS

Los paréntesis también se usan para indicar multiplicación: 8(12) es lo mismo que 8 × 12.

Figura 1. Block, D., García, S., & Balbuena H. (2018). Unidad de análisis 1. Recuperado de https://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=2473#page/47

En la tabla 1 se aprecian los objetos primarios intervinientes y emergentes identificados en la Unidad de análisis 1:

Tabla 1

Situaciones problema asociadas a la Unidad de análisis 1

Objeto primario	Interviniente	Emergente
Situaciones problema	SP1.1 Problemas donde se debe adivinar un número que es el resultado de aplicar, en un primer momento una operación y, posteriormente, dos operaciones, donde tanto los números dados como los resultados, son naturales. SP1.2 Representar, en lenguaje algebraico, las adivinanzas de la actividad anterior. SP1.3 Para cada una de las ecuaciones de SP1.2, sustituir la incógnita por el número que se encontró en SP1.1 y verificar que la igualdad se cumple. SP1.4 Plantear y resolver ecuaciones del tipo de SP1.1 completando un diagrama, como se observa en la Fig. 1.	No se encontraron.
Lenguaje	Verbal: para plantear las situaciones problema, para introducir definiciones y para describir procedimientos.	Algebraico: Para plantear las ecuaciones lineales referentes a los problemas planteados.

	Diagramático: para hacer ostensivas las operaciones inversas relacionadas con cómo se plantea la ecuación y cómo se resuelve.	
Conceptos	Cantidad desconocida.	Expresión algebraica, ecuación, literales, incógnitas, solución de una ecuación, noción de igualdad como equivalencia entre expresiones.
Proposiciones	No se encontraron.	Propiedad de sustitución de la igualdad.
Procedimientos	Suma, resta, multiplicación, división.	Resolver una ecuación mediante operaciones inversas.
Argumentos	No se encontraron.	No se encontraron.

Una vez que se identificaron los objetos intervinientes y emergentes, se procedió a realizar la configuración epistémica de cada Unidad de análisis. La configuración epistémica relativa a la Unidad de análisis 1 se muestra en la figura 2, esta nos permite observar la movilización que tienen cada uno de los objetos primarios que fueron identificados en esta Unidad de análisis.

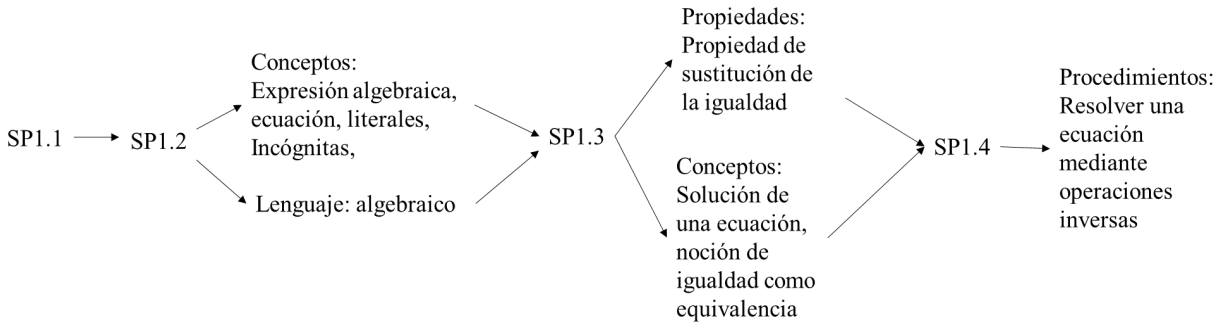


Figura 2. Configuración epistémica asociada a la Unidad de análisis 1

Al tener las configuraciones epistémicas relativas a cada Unidad de análisis, se procedió a conjuntarlas en una trayectoria epistémica, lo cual fue de relevancia ya que a partir de ésta fue posible determinar el Significado Institucional de Referencia asociadas a los libros de texto.

Conclusiones

Se concluye que los sistemas de prácticas asociados a la noción de ecuaciones lineales en el libro de texto comienzan con el alumno resolviendo adivinanzas, lo cual sirve para ir movilizando los saberes previos de los estudiantes, de tal manera que al "adivinar" sean capaces de encontrar relaciones entre la solución y el "candidato a solución" tales como "la solución debe ser un número mayor (o menor) que…", además se va construyendo la noción de *solución de una ecuación*.

Al pedir que esas adivinanzas se escriban como ecuaciones, emerge el lenguaje algebraico

y conceptos como *ecuación*, *literal*, *incógnita*. Cabe destacar que el paso de las adivinanzas a la modelación en una ecuación de las mismas podría estar lejano a la zona de desarrollo próximo de los alumnos, a pesar de que se plantee trabajar en equipo.

Cuando se pide al alumno sustituir la incógnita por el número encontrado en la primera actividad emerge el concepto de *solución de la ecuación* como aquel número que hace que la igualdad sea cierta, así como la noción del signo igual como una equivalencia de expresiones.

En la última actividad de esta Unidad de análisis se propone completar un diagrama donde a través de flechas y colores se hace ostensivo el procedimiento para modelar y resolver la ecuación, así como las operaciones inversas que se ponen en juego. A pesar de que este recurso resulta útil para que los alumnos comprendan ambos procedimientos (modelación y resolución), el texto cae en lo que menciona Attorps (2005) de no dar suficiente apoyo para un tipo de enseñanza que favorezca lo conceptual, ya que el procedimiento es establecido por el texto, es decir, no se favorece que sean los alumnos quienes desarrollen sus propias estrategias de resolución.

Referencias y bibliografía

Andrews, P., & Xenofontos, C. (2017). Beginning teachers' perspectives on linear equations: A pilot quantitative comparison of Greek and Cypriot students. *Paper presented to the tenth Congress of European Research in Mathematics Education*. Berlin.

Attorps, I. (2005). Secondary school teachers' conceptions about algebra teaching. *Paper presented at the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Block Sevilla, D., García Peña, S., & Balbuena Corro, H. (2018). *Matemáticas 1*. México: SM. Disponible en https://libros.conaliteg.gob.mx/content/restricted/libros/carrusel.jsf?idLibro=2473#page/1

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 19-25.

Font, V., D. Godino, J., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 97-124.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En P. A.-M. J. M. Contreras (Ed.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 7-37.

Herscovics, N., & Lichevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 59-78.

Kajander, A., & Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 173-181.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of*

Mathematics (págs. 390-419). New York: Macmillan Publishing.

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A., & Stephens, A. (2005). Middle school students‟ understanding of core algebraic concepts: equivalence and variable. *ZDM* (37), 68-76.

Linsell, C. (2009). Students' knowledge and Strategies for Solving Equations. *Findings from the New Zeland Secondary Numeracy Project 2008*, 29-43.

Parra Urrea, Y., & Pino-Fan, L. (2017). Análisis Ontosemiótico de libros de texto chilenos: el caso del concepto de función. En P. A. J. M. Contreras (Ed.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Picado, M., & Rico, L. (2011). Análisis de Contenido en Textos Históricos de Matemáticas. *PNA*, 6(1), 11-27.

Pirie, S. E., & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, 34(2), 159-181.

Ruiz de Gauna Gorostiza, J., Dávila Balsera, P., Etxeberria Murgiondo, J., & Sarasua Fernández, J. (2011). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(2), 245-276.

SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral.* México: SEP.

Tunks, J., & Weller, K. (2009). Changing Practice, Changing Minds, from Arithmetical to Algebraic Thinking: An Application of the Concernsbased Adoption Model (CBAM). *Educational Studies in Mathematics*, 161-183.

Vlassis, J. (2002). The Balance Model: Hindrance or Support for the Solving of Linear Equations with One Unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 341-359.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática

Jhonatan Elias Posso Torres
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
jhonatan.posso@correounivalle.edu.co
Ligia Amparo Torres
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ligia.torres@correounivalle.edu.co

Resumen

Esta comunicación es el reporte de una investigación donde se analizan aspectos del razonamiento covariacional desarrollados en estudiantes de grado noveno de la educación básica, al modelar fenómenos mediante la función cuadrática. Al estudiar la variación desde el enfoque covariacional, asociada a la función cuadrática, en situaciones de la vida cotidiana, las matemáticas y otras ciencias, se movilizan aspectos del razonamiento durante los procesos de modelación, que pueden ser identificados y caracterizados. Para esto, se elaboró y se trabajó con estudiantes dos situaciones contextualizadas tomando como referencia aspectos curriculares de la educación en Colombia, aspectos didácticos en relación a la modelación y el razonamiento covariacional, y aspectos disciplinares de las matemáticas afines a la función. En los primeros análisis[1], los estudiantes experimentaron acercamientos a la situación (modelación situacional), uso de *modelos de* (modelación referencial), revelando indicios valiosos de las primeras acciones mentales al atender la covariación entre cantidades.

Palabras clave: Variación, covariación, razonamiento covariacional, modelación, función, función cuadrática.

[1] *Nota:* Al momento del diseño de esta comunicación se continúa realizando los análisis de los registros de los estudiantes respecto al trabajo de la primera situación y la aplicación de la segunda, por lo cual se espera que el día de la presentación se puedan exponer los resultados y conclusiones finales de la investigación.

Problemática

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar son procesos que históricamente han presentado diversas dificultades en las clases, algunas relacionadas con obstáculos epistemológicos en la historia de las matemáticas *per se* y otras identificadas con aspectos metodológicos, cognitivos y de aula, entre otros. Algunas dificultades tienen que ver con la forma como ciertos docentes presentan los contenidos en relación al álgebra, ya que se limitan a explicar el tema y poner ejercicios donde se privilegia el cálculo aritmético principalmente, convirtiéndose en rutinas repetitivas de ejercitación que carecen de sentido; en relación a esto, Castro (2012) indica que de esta manera el álgebra no se enseña a través de una progresión lenta sino como mecanismo manipulador enfatizado en el cálculo.

Andrade (1998) concluye que algunos textos escolares de matemáticas poco contribuyen al conocimiento del concepto de función, pues ilustran la variable como una letra que representa una cantidad desconocida o un número generalizado, no se comprende la relevancia de la variable producto de la ruptura que hay del paso de la aritmética al algebra, ya que "para lograr la variable fue necesario el uso de la letra como incógnita y luego como cantidad general, antes de pasar a representar la variación" (p. 248); Castro (2012) afirma que las primeras aproximaciones escolares donde no se comprende que representan las letras y los símbolos algebraicos empleados en modelos, pueden entorpecer la construcción apropiada del concepto de variable y el estudio de la variación.

Chevallard (1984, 1989), Bolea (2002), Sutherland et al. 2000 (citados en Ruiz Munzón, N; Bosch, M. y Gascón, J., 2007, p. 1) revelan en los resultados de sus investigaciones la ausencia del "juego" entre parámetros y variables, complicaciones para identificar o establecer relaciones entre variables y parámetros solicitados y la manipulación de modelos algebraicos principalmente en forma de reglas, ocasionando un acercamiento inapropiado a la comprensión de la noción de función en general y función cuadrática en particular, "dificultando el estudio de familias de funciones y el uso de estas familias como modelos de relaciones entre magnitudes" (Ruiz Munzón, N; Bosch, M. y Gascón, J., 2007, p. 1).

Respecto al estudio y trabajo con los modelos algebraicos, análisis como el llevado a cabo por Carlson 1998, Monk y Nemirovsky 1994, Thompson 1994a (citados en Carlson *et al*., 2003, p. 122-123) evidencian que incluso estudiantes de nivel de pregrado tienen dificultad para modelar relaciones funcionales de situaciones de variación continua entre variables y que según Kaput 1994 y Rasmussen 2000 (citados en Carlson *et al*., 2003, p. 123) "esta habilidad es esencial para interpretar modelos de eventos dinámicos" y comprender otros conceptos matemáticos de mayor complejidad.

Problemáticas como las expuestas permiten plantear la pregunta:

¿Qué aspectos del pensamiento variacional se desarrollan en estudiantes de grado noveno a través de una propuesta de aula que involucra la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática?

Referentes teóricos y metodológicos

El marco teórico comprende el análisis de aspectos que implican el desarrollo del pensamiento variacional, el estudio de la variación, la comprensión del concepto de función y de función cuadrática desde tres perspectivas las cuales son: Perspectiva curricular, didáctica y disciplinar (de las matemáticas).

Los documentos curriculares de la educación escolar colombiana como son los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) promueven el desarrollo del pensamiento numérico, del pensamiento espacial, del pensamiento métrico, del pensamiento aleatorio y del pensamiento variacional; todos mediados por cinco procesos: Formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Para esto, el docente debe tener la posibilidad de proponer a los estudiantes un contexto enriquecido de situaciones las cuales pueda explorar, realizar representaciones, realizar abstracciones, llevar a cabo el proceso de modelación matemática, entre otras posibilidades (MEN, 1998). Vasco (2003) señala la modelación como la utilización más poderosa del pensamiento matemático, que va más allá de la aplicación de algoritmos conocidos y que es fundamental para el aprendizaje del álgebra escolar, el estudio de la variación y de las funciones, además, plantea que el enfoque covariacional permite la captación y modelación de la covariación entre cantidades del magnitud, y que al momento que el estudiante lleva a cabo estas actividades también piensa de manera dinámica, formándose sistemas mentales propios del pensamiento variacional.

El razonamiento covariacional es el marco conceptual propuesto por Carlson et al. (2003) y se define como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p.124). En el desarrollo de este tipo de razonamiento se presta especial atención a la covariación entre cantidades de magnitud que se relacionan de manera funcional en eventos dinámicos, analizando la razón de cambio, de tal manera que se llega a formar imágenes de los cambios hasta modelar las relaciones funcionales; los cinco tipos de acciones mentales pueden llegar a ser evidenciadas y clasificadas en cinco niveles de acuerdo a este marco conceptual, tal como también lo evidencian posteriormente Dolores y Salgado (2009) y Villa (2012) en sus respectivos trabajos.

Las siguientes son las características de las acciones mentales en el marco del razonamiento covariacional:

Tabla 1
Acciones mentales del razonamiento covariacional

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios de otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio.

	incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de la concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y las concavidades son correctos)

Nota. Tomado de Carlson et al. (2003, p.128).

Las acciones mentales evidenciadas en los estudiantes conllevan a alcanzar los niveles de razonamiento covariacional, los cuales se describen como:

Tabla 2

Niveles de razonamiento covariacional

Nivel	Descripción del nivel de razonamiento covariacional
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5) Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Nota. Tomado de Carlson et al. (2003, p.129).

Por otra parte, la modelación entendida como un proceso mediante el cual se pueden producir modelos mentales, gráficos y analíticos, entre otros (Vasco, 2003) es pertinente en el estudio de la covariación, ya que facilita asociar las imágenes o modelos mentales con

expresiones en los variados registros de representación. En la Educación Matemática Realista[2] se plantea que es fundamental que el estudiante pueda matematizar (organizar la realidad con medios matemáticos, incluida la matemática misma) distintas situaciones planteadas en contextos realistas (imaginables, que tienen sentido para el estudiante) ya sean situaciones cotidianas, de las matemáticas y de otras ciencias y para ello se establecen niveles de matematización (situacional, referencial, general y formal), que permiten la comprensión de la situación y consolidan el proceso de modelización, constituyendo la matematización en una actividad fundamental en el aprendizaje de las matemáticas (Freudenthal, 1973).

Aspectos experimentales

El trabajo de investigación se desarrolla en una institución educativa de carácter oficial de la ciudad de Santiago de Cali, departamento del Valle del cauca, Colombia, con un grupo de estudiantes de grado noveno de la educación básica secundaria. La institución queda ubicada en la zona rural de la ciudad en el corregimiento El Hormiguero, los estudiantes son habitantes del lugar y de veredas aledañas, ubicados en zonas de estrato 1.

Las actividades de experimentación están constituidas por dos situaciones, una en contexto de la vida cotidiana y otro en contextos geométrico, compuestas por tareas organizadas de tal forma que promovieran procesos de modelación y movilizaran aspectos del razonamiento covariacional. Dichas situaciones son presentadas a los estudiantes por tareas, en copias donde se pueda llevar a cabo la lectura de las mismas, además, el desarrollo por parte de los estudiantes fue escrito en hojas aparte.

La primera situación que será la analizada a continuación, está organizada a partir de un contexto de la vida cotidiana de la siguiente manera:

Situación 1:
¿Los ingresos de un gimnasio aumentan o disminuyen?
El gimnasio *Hércules* cuenta con 150 socios inscritos los cuales pagan, cada uno, una mensualidad de $60.000. Michael, el dueño del gimnasio, desea incrementar sus ingresos por lo que ordena un estudio de mercado cuyo resultado recomienda reducir la mensualidad, ya que por cada $1.000 que disminuya se inscribirán cinco nuevos socios.
¿Cuál es el máximo ingreso económico que el gimnasio *Hércules* puede recibir si sigue las recomendaciones del estudio?

La situación se diseñó para desarrollarse en cuatro tareas. La primera tarea teniendo como referencia el proceso de modelación de la Matemática Realista, se diseñó para que los estudiantes exploraran y comprendieran la situación a partir de los primeros acercamientos a esta, realizando algunos cálculos iniciales, identificando cantidades como el número de rebajas, tratar de realizar los primeros esquemas y expresar sus primeras ideas o argumentaciones respecto a la situación; esta situación está comprendida en el nivel situacional de modelación y no se esperaba que los estudiantes manifestaran algún tipo de acción mental de acuerdo al marco del razonamiento covariacional, pero constituía parte importante para el surgimiento de las

[2] Corriente didáctica que nace en los años 60 cuyo fundador es Hans Freudenthal, promueve la enseñanza de las matemáticas conectada con la realidad, llevando a cabo procesos de matematización de la realidad con medios matemáticos en niveles de matematización horizontal y vertical.

primeras acciones mentales.

En la segunda tarea se proponía la siguiente tabla:

Tabla 3

Tabla de relaciones del valor de la mensualidad y número de socios

Valor de la mensualidad en pesos	60.000	59.000	58.000			46.000
Número de socios	150			165	180	

A partir de la tabla se esperaba que los estudiantes la completaran e identificaran las primeras regularidades presentes en las cantidades de las magnitudes indicadas, escribiendo algunas expresiones para determinar los valores faltantes, identificando las primeras relaciones de dependencia como es el caso de que la cantidad total de socios dependía de la cantidad de rebajas realizadas y el valor de la mensualidad como resultado de esa rebaja. Además, al cuestionar a los estudiantes acerca de cómo se comportaban los ingresos a medida que se inscribían socios nuevos y se reducía la cuota de la mensualidad, se buscaba hacer una primera aproximación a la pregunta ¿Cómo cambia?; esta situación está inscrita en el nivel situacional de modelación al continuar en el descubrimiento de regularidades y la esquematización de la situación.

En la tercera tarea se presentaba la siguiente tabla:

Tabla 4

Tabla de relaciones entre cantidades

Cantidad de rebajas	Valor de la rebaja (en pesos)	Valor total de cada rebaja (en pesos)	Valor inicial de la mensualidad (en pesos)	Valor de la mensualidad según rebajas (en pesos)	Cantidad inicial de socios	Cantidad de socios nuevos	cantidad total de socios según cantidad de rebajas	Ingreso total inicial (en pesos)	Ingreso total según mensualidad y número de socios (en pesos)
0	1.000	0	60.000	60.000	150	0	150	9.000.000	9.000.000
1	1.000	1.000	60.000	59.000	150	5	155	9.000.000	9.145.000
2	1.000	2.000	60.000	58.000	150	10	160	9.000.000	9.280.000
3									
4		4.000			150		170		
5						25			
	1.000	15.000			150		225		
⋮									
x		$1000x$							

En la tarea 3 se esperaba que los estudiantes completaran la tabla y a partir de la información identificaran las regularidades presentes en la misma, identificando relaciones de dependencia entre cantidades, como por ejemplo de que el valor total de cada rebaja dependía de multiplicar el número de rebajas por $1000, hasta obtener las primeras expresiones o modelos como $1000x$ en este caso. En esta tarea se esperaba que los estudiantes presentaran un nivel referencial de modelación al emplear modelos gráficos y notacionales de la situación para analizar las dependencias y los cambios en las cantidades, desarrollando a su vez las primeras acciones mentales (AM1) inscritas en el nivel 1 de razonamiento covariacional (N1)

En la cuarta tarea se planteaba la siguiente gráfica:

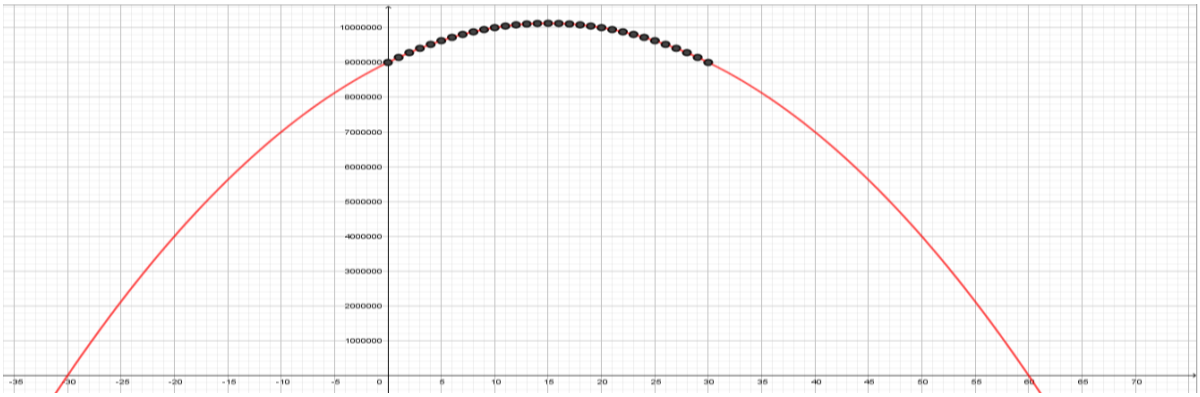


Figura 1. Gráfica de número de rebajas vs ingresos totales.

A partir de la gráfica se pretendía que los estudiantes continuaran identificando las relaciones de dependencia en la situación de tal manera que se analizara cómo cambian los valores de acuerdo a las rebajas realizadas. Estos modelos empleados son aún modelos particulares de la situación y por tanto se desarrollan en el nivel referencial de modelación y de acuerdo a la información suministrada, los estudiantes podían llevar a cabo algunas argumentaciones acerca de la dirección del cambio en ciertos instantes, atendiendo a la covariación entre las variables y estos planteamientos pretendían acciones mentales de segundo nivel (AM2), coordinando la dirección del cambio de una variable con los cambios de otra y propiciando un paso a un segundo nivel de razonamiento covariacional.

Discusión de resultados

Los primeros resultados de los análisis de los registros de los estudiantes son el producto de las aproximaciones al contexto de la situación. Estos evidencian, principalmente, que los primeros cálculos y cuestiones acerca de la situación en la tarea 1 fueron abordados de manera natural por los estudiantes, llevando a cabo procedimientos que son similares a las prácticas habituales en clases de matemáticas, pero que para este caso constituye principalmente el acercamiento a las características básicas de la situación planteada para el estudio posterior de la covariación. De acuerdo al nivel situacional de modelación, los estudiantes percibieron características de las magnitudes como la cantidad de socios, valor de la mensualidad y la última en identificar de manera clara fue el número de rebajas, mostrando ciertas dificultades al comprender esta última como una de las magnitudes en cuestión y que para el propósito de esta situación constituye un elemento fundamental en el proceso de modelación y posteriormente el análisis de la covariación.

En la tarea 2, al emplearse una tabla como otro registro de trabajo de situaciones con

relaciones funcionales, la mayoría de estudiantes tuvo facilidad para completar la tabla mediante cálculos e identificar las relaciones de dependencia, como la del total de socios en relación con la cantidad de rebajas, el total de ingresos en relación al total de socios, con el propósito de comprender el papel que advierte la cantidad de rebajas en la identificación de dependencias y la construcción de los primeros modelos mentales y algebraicos, aspecto clave en el estudio de la covariación. En los resultados de las tareas 1 y 2 no se evidenciaron de manera clara acciones mentales relacionadas con el razonamiento covariacional.

En el desarrollo de la tarea 3 la mayoría de estudiantes realizaron los cálculos y completaron con cierta facilidad la tabla que comprendía suficiente información de las cantidades en el estudio de la situación. Los primeros modelos de (modelación referencial) la situación fueron desarrollados por algunos estudiantes, por ejemplo al realizar preguntas como: Escribe una expresión que permita calcular el valor total de cada rebaja, según una cantidad de veces (x). Lo anterior permitió evidenciar resultados de estudios previos en los cuales se hace mención a la dificultad que muestran los estudiantes en la construcción de modelos de situaciones problema, esto debido a las rutinas habituales de trabajo y ejercitación en forma mecánica principalmente de ejercicios de cálculo aritmético durante los niveles educativos anteriores al año lectivo en estudio. En la misma tarea se movilizaron en los estudiantes las primeras acciones mentales del razonamiento covariacional, AM1, en las cuales justificaron las relaciones entre cantidades presentes y en relación a esto establecer la coordinación de los valores de una variable en relación a los cambios de la otra, acciones mentales esenciales para el desarrollo de las siguientes tareas.

Referencias y bibliografía

Andrade, C (1998). Dificultades en el aprendizaje de la Noción de variación. *Revista EMA*, 3 (3), 241-253.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA,* 8(2), 121-156.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Dolores, C., Salgado, G., (2009). Elementos para la graficación covariacional. *Números, Revista de didáctica de las matemáticas*. 72, 63-74.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel Publishing Co.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos en Competencias Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ruiz Munzón, N; Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con WIRIS. En L. Ruiz–Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 677–702). Jaén, España: Universidad de Jaén.

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau* (Vol. 9).

Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis,* 31, 9-25.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Razonamiento Covariacional mediado por GeoGebra en Estudiantes de Quinto Grado de Educación Primaria (11-12 años)

Iván Eduardo **Gálvez** Giraldo
Institución Educativa Juan María Céspedes
Colombia
ivan.galvez@correounivalle.edu.co
Diana Marcela **Tamayo** González
Institución Educativa Juan María Céspedes
Colombia
diana.m.tamayo@correounivalle.edu.co

Resumen

En esta comunicación se presentan los resultados de una investigación que centró la atención en caracterizar el razonamiento covariacional que los estudiantes de un grupo de quinto grado (11-12 años) manifestaron al desarrollar tareas de variación y cambio. Para este estudio, se usó el marco conceptual propuesto por Carlson et al., (2003) y se diseñó una situación dinámica mediada por GeoGebra y contextualizada en apartes de "La vuelta al mundo en 80 días" de Julio Verne, adaptada mediante un cómic. A partir de observaciones directas y del análisis de episodios de la interacción entre estudiantes e investigadores, se constató que la totalidad de estudiantes lograron identificar qué cambia, qué no, y la dirección de cambio, pero no todos dieron cuenta de la cuantificación del cambio de las magnitudes involucradas en el estudio. Estos resultados alimentan la reflexión acerca del desarrollo de razonamiento covariacional desde los primeros grados de escolaridad.

Palabras clave: razonamiento covariacional, variación, covariación, GeoGebra.

Presentación del problema y Justificación

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar han sido y siguen siendo objeto de interés para múltiples investigadores en el campo de la educación matemática. En buena parte esto se debe a la complejidad que distintas investigaciones como las de Kieran (1992), Molina (2007), Socas (2011), Castro (2012), entre otras, han puesto de manifiesto en torno a su enseñanza y aprendizaje. Es así como se encuentran en la literatura reportes que expresan diferentes obstáculos, dificultades y errores encontrados en el aprendizaje del álgebra pese al gran empeño que los maestros suelen colocar en su enseñanza. La toma de conciencia sobre estas y otras situaciones ha generado que un buen número de trabajos hayan intentado explicar el origen de estas problemáticas y buscar alternativas para hacerles frente.

Es así como Kieran (1992), afirma que buena parte de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar están asociadas, entre otras razones, con el significado de las letras y el cambio de convenciones entre la aritmética y el álgebra donde se privilegia lo sintáctico por encima de lo semántico, descuidando con ello sus aspectos conceptuales y su conexión con otras áreas del conocimiento. Tal manipulación mecánica de símbolos en álgebra podría explicar lo encontrado por Doorman y Gravemeijer (citado por Villa & Vahos, 2010), quienes afirman que un gran número de las dificultades que presentan los estudiantes en los cursos de cálculo tienen su génesis en la escasa familiarización con la construcción de modelos, propósitos, convenciones y formas de representación en las situaciones y problemas a resolver.

Este panorama general de investigaciones en didáctica del álgebra se ratifica con la experiencia pedagógica de los autores de la investigación que aquí se reporta. En efecto, el trabajo docente en la Institución Educativa donde se realizó el estudio muestra cómo tradicionalmente el abordaje del álgebra se deja para unos años en particular, por lo general, para grado octavo de la educación básica secundaria (estudiantes que oscilan entre los 13 y 14 años de edad). Lo anterior ha contribuido a la inconexión entre la aritmética y el álgebra, dejando de lado el abordaje de procesos tan importantes como son el estudio de la variación y el cambio, la generalización y la modelación, entre otros aspectos.

En atención a lo anterior, Godino y Font (2003) son claros en indicar que no se trata de implementar el álgebra desde la educación básica primaria pero sí de favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico. Igualmente, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 1998, 2006) proponen el inicio del desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos como un logro para alcanzar desde los primeros grados de escolaridad. Esto es, entre otras cuestiones, una matemática escolar que permita analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones de variación y cambio en diversos contextos, para lo cual la incorporación de las nuevas tecnologías puede jugar un papel relevante. Así, Vasco (2006) afirma que las reinterpretaciones dinámicas de representaciones gráficas y tabulares por medio de pantallas computacionales son una de las maneras como puede desarrollarse el pensamiento variacional. Esto implicaría cambios metodológicos que, a diferencia de estilos tradicionales, permitan una interacción directa de los estudiantes con las herramientas tecnológicas de tal modo que se acerquen, mediante la visualización, al estudio de la variación y el cambio.

Con la intención de analizar el pensamiento variacional de un grupo de estudiantes y, específicamente, cómo enfrentan situaciones de variación y cambio, esta investigación buscó identificar algunos rasgos del razonamiento covariacional en un grupo específico de estudiantes de quinto grado de la educación básica Colombiana, para lo cual se diseñó una situación dinámica en la que interviene el software GeoGebra.

Marco Teórico de Referencia

Para Posada y Obando (2006) el análisis de la covariación debe incluirse en la relación entre multiplicación y proporcionalidad e integrando el estudio de las magnitudes de tal manera que no se produzca una desvinculación entre la proporcionalidad y las funciones. Esto se puede significar mediante la representación tabular visibilizando la relación directa entre la multiplicación y proporcionalidad directa simple, relación que puede ser descrita de diferentes formas como son la verbalización, la comparación de representaciones y el empleo de variables (Confrey y Smith, 2016).

Carlson et al.,(2003) definen el razonamiento covariacional como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra*"*(p.124). En este referente se tienen en cuenta cinco acciones mentales con sus comportamientos asociados, que a su vez están relacionados con los niveles de desarrollo del razonamiento covariacional, en el cual se requiere de la construcción de imágenes de dos variables, de manera que el estudiante identifique los cambios simultáneos de una con respecto a la otra. Así, en este marco se describen las acciones mentales involucradas cuando sujetos ponen en juego su razonamiento covariacional al estudiar situaciones dinámicas.

Las acciones mentales dentro del marco conceptual de Covariación

Las imágenes de covariación proveen un medio para clasificar los comportamientos de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de covariación. El análisis de este conjunto de acciones mentales y comportamientos permite determinar la habilidad de razonamiento covariacional de un estudiante para una tarea en particular. Para describir las acciones mentales y sus respectivos comportamientos, se presenta la Tabla 1:

Tabla 1

Acciones mentales en la covariación (Carlson, et al., 2003, p.128)

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos asociados
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., *y* cambia con cambios en *x*).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función.

Conforme a la tabla anterior, un estudiante se encuentra en un nivel determinado cuando sustenta las acciones mentales asociadas a ese nivel, dando cuenta también de las anteriores en el

contexto de la tarea. A partir de la Acción Mental 1 (AM1), donde se identifica de manera verbal lo que está cambiando, las acciones mentales van incrementando su nivel de complejidad hasta llegar a la Acción Mental 5 (AM5).

Niveles de razonamiento covariacional dentro del marco conceptual de Covariación

Para describir la evolución del razonamiento covariacional y clasificar a las acciones mentales que se manifiestan en un estudiante frente a una tarea de carácter covariacional, Carlson et al., (2003) describen cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.

Tabla 2

Niveles de Razonamiento Covariacional (Tomado de Carlson, et al., 2003, p.129)

Niveles del razonamiento Covariacional
Nivel 1 (N1). Coordinación En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). Razón instantánea En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

De este modo, la evolución de la imagen de covariación sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado. Es así como dentro de una tarea particular, si el razonamiento empleado por un estudiante se clasifica en el nivel 4 (N4), está en la capacidad de razonar en dicha acción mental, en conjunto con los razonamientos de la AM1 a la AM3. Por consiguiente, el estudiante está en la capacidad de coordinar la razón de cambio promedio de una función con los cambios uniformes en los valores de entrada de la variable, lo que implica, haber identificado lo que cambia y cómo cambios en una variable producen cambios en otra, la relación en las

direcciones de cambio de las variables y además cuantificar los cambio de una variable con respecto a la otra.

Diseño metodológico de la investigación

El trabajo de investigación se inscribió dentro del enfoque de investigación cualitativo de tipo descriptivo – interpretativo (Louis, & Lawrence, 1990). La situación que se diseñó fue implementada con 15 estudiantes con edades entre 11 y 12 años de una institución educativa de carácter público del municipio de Tuluá, Valle del Cauca, Colombia, con un análisis basado tanto en las respuestas ofrecidas por los estudiantes al resolver cada una de las tareas propuestas en la situación, como en los diálogos ofrecidos por ellos al justificar sus actuaciones a partir de las intervenciones realizadas por los investigadores (grabadas en video); se procedió a revisar los datos recogidos tomando como unidades de análisis los niveles de razonamiento covariacional, fruto del marco conceptual adoptado para este estudio.

El diseño de la situación se hizo a partir de cinco tareas dispuestas en cuatro archivos de GeoGebra, en las cuales se estudiaba de manera dinámica la distancia y el tiempo, la primera como variable dependiente de la segunda. Cada una de las tareas, a excepción de la primera, ponían en juego las primeras cuatro acciones mentales descritas por Carlson et al.,(2003), todas contextualizadas en apartes del libro "La vuelta al mundo en 80 días" de Julio Verne. En su orden, las tareas desarrolladas por los estudiantes fueron: *Tarea 1. Comprendiendo la situación* (Figura 1), con la que se buscaba contextualizar a los estudiantes mediante un cómic en la narrativa dispuesta en los apartes del libro en mención, haciendo énfasis en una persecución en elefante llevada a cabo en Bombay por el detective Fix a Phileas Fogg; *Tarea 2. Reconociendo relaciones entre magnitudes* (Figura 2), en donde se indagó sobre qué magnitudes cambiaban cuando se recreaba en GeoGebra la persecución en elefante, lo que pone en juego AM1; *Tarea 3. Identificando cómo cambian las magnitudes*, con el propósito de identificar la dirección de cambio de las magnitudes estudiadas en la persecución, propio de AM2; *Tarea 4. Cuantificando los cambios de magnitudes variables*, apareciendo por primera vez en registros tabulares valores numéricos para las distancias recorridas y para el tiempo, favoreciendo así la identificación de patrones de covariación entre ambas cantidades, comportamiento propio de AM3. Finalmente la *Tarea 5*. *Estudiando los cambios de las relaciones entre magnitudes*, se puso en juego la coordinación de la razón de cambio promedio entre la distancia recorrida por los personajes con incrementos uniformes en el tiempo, lo que corresponde con acciones asociadas a AM4.

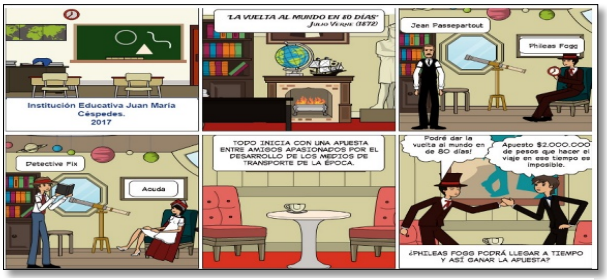


Figura 1. Fragmento del Cómic: Contextualización Tarea 1 (Adaptación propia)



Figura 2. Fragmento Tarea 2: Reconociendo relaciones entre magnitudes

Análisis de resultados

Las respuestas ofrecidas por los estudiantes (E1, E2,…E15) a las preguntas de cada tarea se clasificaron conforme a qué tan lejos o cerca se encontraban de las respuestas esperadas en el contexto de cada acción mental del referente conceptual adoptado, lo cual, a su vez, permitía identificar el nivel de razonamiento covariacional puesto en juego al responder a ellas.

Las producciones de los estudiantes en la Tarea 1, dejó notar que todos comprendieron la situación narrada mediante el cómic, especialmente, que se trataba de una persecución entre dos personajes: el detective Fix a Phileas Fogg, y cuál fue el propósito que dio origen a tal evento.

A partir de las respuestas dadas en la Tarea 2 (en la cual se evaluó la AM1), se constató que el 80% (12) de los estudiantes lograron identificar que en la medida en que cambia el tiempo (representado por el deslizador) la posición de los personajes cambia. Esto se hace evidente en sus producciones escritas, tal como se ilustra a modo de ejemplo en la Figura 3.

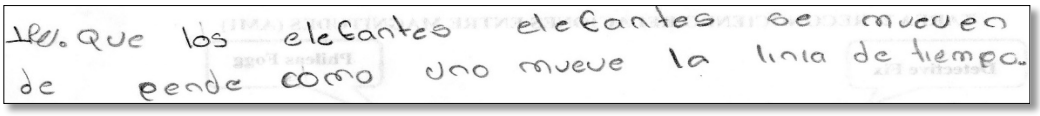


Figura 3. Respuesta de uno de los estudiantes al ítem 2 de la Tarea 2 (¿Qué está variando o cambiando en la situación?)

En la Tarea 3 (que evaluaba la AM2), 12 estudiantes (80%) centraron su atención en la disminución de la distancia que separa los personajes (Fix y Phileas Fogg) a medida que transcurre el tiempo, lo cual se interpreta como la identificación de una correlación inversa entre estas magnitudes. Además de esto, los estudiantes identificaban que a medida que el tiempo aumentaba también lo hacían las distancias recorridas de cada personaje (ver Figura 4).

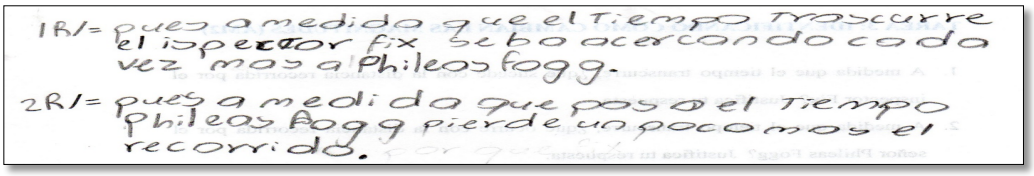


Figura 4. Ejemplo de respuestas ofrecida por un estudiante a los ítems 1 y 2 de la Tarea 3

A partir de las producciones realizadas por los estudiantes en la Tarea 4 (que se indagaba por la AM3), se indagó sobre cómo ellos daban cuenta de la cuantificación de los cambios de las cantidades presentes en la persecución y de la forma cómo covariaban dichas cantidades. En las producciones de los estudiantes se observaron que fácilmente 2 de ellos (13.3%) manifestaron que mientras el tiempo cambia de 1 hora en 1 hora las distancias cambian de 5 km en 5 km para el inspector Fix (Figura 5), y de 4 km en 4 km para el señor Phileas Fogg, es decir, reconocieron que cambios en la magnitud *tiempo* determinan cambios simétricos en la *distancia recorrida* por los personajes. Los demás estudiantes también reconocieron esto, pero no de manera inmediata.

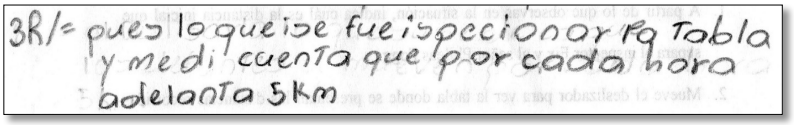


Figura 5. Respuesta de un estudiante al ítem 3 de la Tarea 4

Obsérvese cómo estos dos estudiantes establecen la razón entre las distancias recorridas y el tiempo, identificando en el primer caso la razón *5 kilómetros / 1 hora*, y para el segundo caso la razón 4 *kilómetros / 1 hora*. De ahí que estos 2 estudiantes logran identificar la covariación que se presenta entre las cantidades de ambas magnitudes (tiempo y distancia recorrida).

Finalmente, en la Tarea 5 (AM4) ante solicitudes como: *"Describe la relación que hay entre la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg para cada hora transcurrida"* cuya intención fue indagar sobre el comportamiento de la velocidad que tuvo el señor Phileas Fogg durante toda su huida, se logró apreciar que 3 estudiantes identificaron que las distancias recorridas por el personaje son distintas para cada unidad de tiempo y parecieron tener una noción intuitiva de la velocidad cuando asociaron los cambios de las distancias recorridas a elementos como el cansancio o la energía de los elefantes, tal como se muestra a manera de ejemplo en la Figura 6.

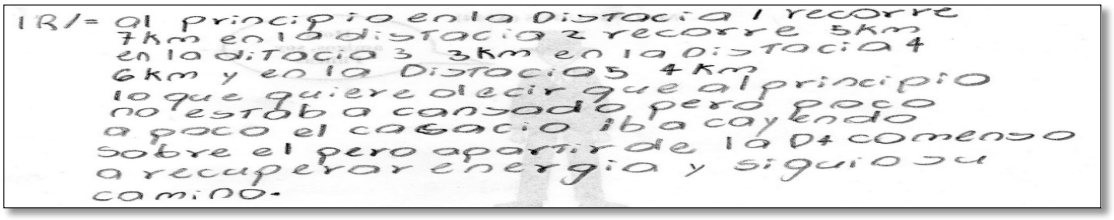


Figura 6. Producción de un estudiante al ítem 1 de la Tarea 5 (Describe la relación que hay entre la distancia recorrida por el señor Phileas Fogg para cada hora transcurrida)

Conclusiones

Las producciones escritas y verbalizaciones de los estudiantes dejaron ver la emergencia de características relacionadas con el razonamiento covariacional enmarcado en esta propuesta (Figuras 6). Si bien, conforme al marco conceptual adoptado (Carlson et al., 2003) los estudiantes de esta investigación no dieron cuenta de un nivel 4 de razonamiento covariacional (Razón de Cambio Promedio), se pudo constatar que todos pasaron por N1 y N2 de este razonamiento, sustentados por AM1 y AM2, esto es, la coordinación del valor y dirección de cambio de una magnitud con los cambios en la otra. Asimismo, 9 estudiantes presentaron características asociadas a N3, sustentadas por AM1, AM2 y AM3, siendo esta última la coordinación de la cantidad de cambio de una magnitud con los cambios en la otra magnitud. De estos 9 estudiantes, 2 tuvieron un acercamiento intuitivo a la velocidad por medio de la comparación de las 2 magnitudes que aparecían en escena, pero sin llevar a cabo la coordinación de la razón de cambio promedio de la distancia recorrida (magnitud de salida) con los incrementos uniformes del tiempo (magnitud de entrada), es decir, sin una verdadera construcción de esta nueva magnitud (la velocidad). Este hecho sugiere que la construcción de la razón de cambio como una nueva magnitud independiente de las que la generan, es asunto complejo y que requiere tiempo.

La vinculación entre el deslizador y la generación de las tablas (Tarea 4) permitió a los estudiantes la identificación de patrones y relacionar la simulación con la representación tabular (tiempo y distancia recorrida) para cada uno de los personajes (Figura 5). Ese asunto aportó al reconocimiento de la variación de las magnitudes en todos los estudiantes y, en algunos casos, la forma en cómo dichas magnitudes covariaban. Por tal razón, la representación tabular posibilitó el reconocimiento de la variación de cada una de las magnitudes y en algunos casos de la

covariación dada entre ellas. En este sentido pudo verificarse lo que propone el MEN (2006) cuando reconoce la importancia de usar tablas y gráficas como formas de acercamiento temprano al desarrollo de pensamiento variacional.

La incorporación del cómic en la contextualización de la situación junto a las interacciones con los archivos de GeoGebra propició una actitud receptiva en los estudiantes hacia la implementación de las tareas, facilitándose la indagación en las características del razonamiento covariacional. Esta articulación de la literatura, las matemáticas, la tecnología e incluso las ciencias al intentar abordarse la construcción intuitiva de la velocidad, contribuyó a un acercamiento al desarrollo de este razonamiento en los estudiantes.

Referencias y bibliografía

Aké, L. P. (2014). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros de formación*. Universidad de Granada.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. Revista EMA, 8(2), 121-156.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema, 26*(46), 483-511.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419. New York: Macmillan

Louis, C. y Lawrence, M. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, La muralla.

Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores P. Bolea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII*, 53-69. SEIEM. La Laguna.

Posada, F. y Obando, G. (2006). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico*. pp. 79-107.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. In C. *Vasco, Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*. (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Verne, J. y Dios, M. F. (1999). *La vuelta al mundo en 80 días* (Vol. 2). Edaf.

Villa-Ochoa, J. A. y Vahos, M. R. (2010). *Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales*. Educação matematica pesquisa, 12(3), 514-528.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Construcción del concepto de función desde la Teoría APOE: La coordinación entre representaciones como apoyo

Hellen Catherine **Serrano** Iglesias
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
hellen-serrano@hotmail.com
Solange **Roa-Fuentes**
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander; Grupo de investigación EDUMAT-UIS
Colombia
sroa@matematicas.uis.edu.co

Resumen

Este documento muestra los avances de una propuesta de investigación que busca caracterizar las *estructuras* y *mecanismos* mentales que evidencian estudiantes de secundaria (14 a 15 años) al resolver tareas matemáticas que requieren de la coordinación entre representaciones estáticas y dinámicas del concepto de función. Para ello, se exponen los elementos que componen la Teoría APOE (Arnon et al., 2014) y algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación (Duval, 2004), que fundamentan teóricamente esta propuesta. Además, se muestra una adaptación del Ciclo de Investigación de la teoría APOE que direcciona el desarrollo de este proyecto.

Palabras clave: función, coordinación, representaciones, registros, APOE, secundaria.

Introducción

El concepto de función es una de las ideas fundamentales de las matemáticas actuales, ya que muchos de los otros conceptos de matemáticas y otras ciencias giran alrededor de este. Especialmente, se puede encontrar el concepto de función en los cursos de matemáticas de la escuela y la universidad. Sin embargo, este concepto es uno de los más difíciles de comprender (Eisenberg, 1991, Carlson y Oehrtman, 2005, Hitt, 2005, Sánchez, 2009). Una de estas dificultades es la falta de coordinación entre sus diferentes representaciones (Guzmán, 1998, Duval, 2004, Sánchez, 2009, Oviedo et al., 2012, Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Ramírez-Leal, 2016). Por ello, se hace necesario poner el foco en investigaciones previas, en las cuales se haya trabajado sobre el concepto de función.

Estudios sobre el concepto de función en Didáctica de las Matemáticas

Sin hacer un análisis exhaustivo, dentro de estos estudios se pueden citar autores como Eisenberg (1991), Carlson y Oehrtman (2005), Hitt (2005), Sánchez (2009), quienes insisten que los estudiantes siguen teniendo una comprensión débil del concepto de función. Por ejemplo, Carlson y Oehrtman (2005) proporcionan una visión general de lo que implica conocer y aprender el concepto de función. Los autores afirman que el concepto es difícil de comprender para los estudiantes porque en su enseñanza se hace mucho énfasis a los procedimientos. Aseguran Carlson y Oehrtman (2005): "este fuerte énfasis procedimental no ha sido efectivo para construir concepciones de funciones fundamentales, las que permiten la interpretación significativa y el uso de la función en varios escenarios representativos y novedosos" (p. 2).

Para contribuir sobre este fenómeno de estudio se han tomado como referentes teóricos la teoría APOE (Arnon et al., 2014) y los Registros de Representación Semiótica (Duval, 2004), ya que se consideran complementos uno del otro. Por un lado, la teoría APOE es un modelo que describe cómo se pueden aprender conceptos matemáticos; es un marco utilizado para explicar cómo puede construirse en la mente de un individuo un concepto matemático. Por otro lado, la teoría cognitiva de Duval estudia fenómenos relativos al conocimiento, es un marco para medir niveles de comprensión de los estudiantes.

Estudios sobre las representaciones semióticas y el concepto de función

Los estudios realizados bajo la teoría de registros de representación, generalmente muestran que una de las dificultades en el aprendizaje del concepto de función, es el paso de un sistema de representación a otro. Es decir, a los estudiantes se les dificulta conectar, o bien, articular los diferentes registros de representación, lo que hace que se limite el estudio del concepto de función, y por ende, la comprensión del mismo. Guzmán (1998), Duval (2004), Sánchez (2009), Oviedo et al. (2012), Prada-Núñez, Hernández-Suárez y Ramírez-Leal (2016), entre otros autores así lo confirman en sus investigaciones. Se puede ver por ejemplo, el trabajo de Guzmán (1998), que toma el marco de las representaciones semióticas para su estudio. Allí la autora considera tres registros para analizar algunas representaciones de las nociones de funciones: gráfico, algebraico y lenguaje natural. Los resultados muestran que los estudiantes recurren a un solo registro, en especial, el algebraico. Además, las respuestas de los estudiantes se limitan al registro en el cual se plantea la pregunta, según la autora, esto se debe a que no logran coordinar dos o más registros.

Estudios sobre el concepto de función visto desde la Teoría APOE

Un estudio preliminar hecho por Dubinsky (1991) sobre funciones, es fundamentado en la Teoría APOE y en la comprensión que él tiene del concepto desde el punto de vista matemático. Su intención es ilustrar el poder explicativo de la teoría y establecer pautas para el trabajo empírico posterior. Dubinsky manifiesta que una serie de actividades matemáticas pueden lograr que el estudiante construya un Esquema de función, más aún, estas actividades pueden requerir que el Esquema se reconstruya a un nivel más alto en el que una función, más allá de ser un Proceso interiorizado, es un Proceso que puede ser tratado como un Objeto por el sujeto como resultado de la encapsulación (Dubinsky, 1991).

En general, Dubinsky ha observado que una parte importante al entender una función, es construir un Proceso que se pueda utilizar para dar sentido a un cierto tipo de fenómeno. Este Proceso, necesariamente requiere de la interiorización o encapsulación por parte del individuo.

En otras palaras, más allá de replicar algún procedimiento, se requiere de mecanismos de abstracción reflexiva para que el individuo pueda construir el concepto de función.

Se resalta que aunque inicialmente las investigaciones realizadas bajo la Teoría APOE se enfocaron en el estudio de pensamiento matemático avanzado, donde según Romero (2016) se espera que los estudiantes ya cuenten con estructuras abstractas sobre las cuales trabajar, hoy se pueden encontrar investigaciones en el nivel de secundaria, y otras más, que se proponen por ejemplo, con poblaciones con discapacidad auditiva.

Las investigaciones presentadas hasta aquí junto con otras ya realizadas por varios autores, han reportado diversos acercamientos al concepto de función. Existen estudios didácticos, cognitivos, históricos, epistemológicos, entre otros, para explicar fenómenos de enseñanza y aprendizaje, relacionados a este concepto.

Estos y otros estudios han reportado diversos acercamientos al concepto de función. Existen estudios didácticos, cognitivos, históricos, epistemológicos, entre otros, para explicar fenómenos de enseñanza y aprendizaje, relacionados a este concepto.

Para continuar, se describen las estructuras y mecanismos mentales que explican la construcción de conocimiento matemático y su rol en el diseño de una descomposición genética. Además se explica de manera general el Ciclo de Investigación que propone la teoría. Por otra parte se discuten elementos fundamentales de la teoría de Registros de Representación que son usados para estudiar fenómenos relativos al conocimiento.

Referente Teórico

Elementos de la Teoría APOE

Estructuras y mecanismos mentales: Teoría APOE y construcción de conocimiento matemático

En términos de APOE, una *estructura mental* es cualquier estructura relativamente estable que usa un individuo para dar sentido a situaciones matemáticas (Arnon et al., 2014). Dicha estructura es construida en la mente del individuo y puede seguir desarrollándose gracias a lo que se denomina: *mecanismo mental* (medio por el cual se desarrolla una estructura mental). En esta teoría, las estructuras son definidas como: Acción, Proceso, Objeto y Esquema, de ahí el acrónimo de APOE, y los mecanismos como: interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, desencapsulación, tematización y generalización.

Una *Acción* es una transformación guiada por un conjunto de instrucciones externas al individuo. Estas Acciones se realizan paso a paso, cada paso es fundamental y no es posible omitir ninguno. Dichas Acciones pueden ser básicas o complejas dependiendo del contexto y la experiencia de cada individuo. En el caso de las funciones, por ejemplo, si un individuo sustituye algunos valores del dominio en funciones de las que conoce su expresión algebraica, y encuentra su imagen, se considera que tiene una concepción Acción del concepto.

Los *Procesos* son Acciones interiorizadas que se construyen usando el mecanismo de interiorización o de coordinación. A medida que las Acciones se repiten y el individuo ya no depende de instrucciones externas, sino que ahora tiene control sobre ellas se dice que la Acción ha sido interiorizada en un Proceso (Arnon et al., 2014). Esto es, el individuo tiene la capacidad de omitir, invertir o imaginar el paso a paso, sin tener que realizar explícitamente cada uno de ellos. Para el caso de las funciones, el individuo puede pensar en un elemento de entrada que es

transformado dada una regla, para generar un elemento de salida. El mecanismo de interiorización le permite al individuo considerar que todos los elementos del dominio han sido transformados. Cuando el individuo construye un Proceso es consciente y reflexivo sobre las Acciones que realiza.

El mecanismo de *encapsulación* va más allá de la concepción Proceso, este ocurre cuando un individuo busca aplicar acciones sobre un Proceso. Para el caso del concepto de función, este mecanismo permite realizar composiciones y aplicar transformaciones sobre funciones. Es decir, generar nuevas funciones a partir de funciones conocidas.

La *desencapsulación* se da cuando un individuo necesita regresar al Proceso que dio origen al Objeto, siempre que sea necesario.

El mecanismo *coordinación*, fundamental en la construcción de algunos Objetos y más aún, en esta investigación, se puede evidenciar cuando el individuo tiene dos o más Procesos y necesita construir un único Proceso que pueda ser encapsulado.

El mecanismo de *reversión* permite a un individuo revertir un Proceso existente dando origen a un nuevo Proceso. Un ejemplo de este mecanismo puede darse cuando el individuo necesita trabajar sobre la función inversa.

Los *Esquemas* son un conjunto de otras estructuras mentales (Acciones, Procesos, Objetos, otros Esquemas) que contienen las descripciones, la organización y los ejemplos de dichas estructuras que un individuo ha construido alrededor de un concepto matemático. Finalmente, el mecanismo *tematización* es el que posibilita a un individuo aplicar transformaciones al Esquema construido.

Las relaciones entre estas estructuras y mecanismos son generalmente presentadas como aparece en la Figura 1.

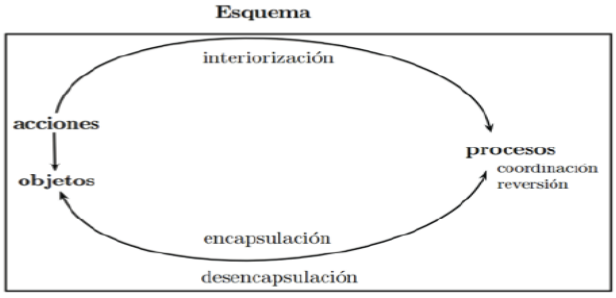


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de contenido matemático (Arnon et al., 2014, p. 18)

La relación entre los elementos que se muestran en la figura 1 es considerada por Dubinsky (1991), citado en Arnon et al. (2014), como un "sistema de retroalimentación circular". Del mismo modo Asiala et al. (1996, citado en Arnon et al., 2014), describen la interacción entre las estructuras y los mecanismos que la generan: La construcción de un Objeto matemático inicia cuando un individuo manipula Objetos construidos previamente; esta manipulación está definida por las Acciones que puede realizar sobre él. Dichas Acciones al ser interiorizadas por el individuo son estructuradas en Procesos que posteriormente son encapsulados para formar Objetos. Los Objetos, pueden desencapsularse para regresar sobre el Proceso que le dio origen. Por último, las Acciones, los Procesos y los Objetos pueden ser organizados en Esquemas.

Las estructuras y mecanismos mentales que constituyen la Teoría APOE, fueron descritos con el fin de dar paso al desarrollo de modelos teóricos que un individuo construye para aprender un concepto. Estos modelos son llamados *descomposiciones genéticas.*

Descomposición Genética

Una descomposición genética en palabras de Arnon et al., es "un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar para aprender algún concepto matemático específico" (p. 27).

Estas descomposiciones pueden ser fundamentadas desde experiencias de aprendizaje o enseñanza, hasta el análisis de libros de texto. Las descomposiciones genéticas también pueden fundamentarse en resultados de investigaciones previas, el desarrollo histórico epistemológico de los conceptos matemáticos, entre otros aspectos que definen los conceptos matemáticos y su didáctica. Las descomposiciones genéticas de un concepto o noción matemática no son únicas, están determinadas por la experiencia de los individuos resolviendo situaciones más o menos relacionadas con un concepto o noción particular.

Ciclo de investigación basado en la Teoría APOE

Las investigaciones fundamentadas en APOE involucran tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de instrucción, y recolección y análisis de datos.

Inicialmente, en el ciclo de investigación, se propone un *análisis teórico* del desarrollo cognitivo del concepto a estudiar, en el caso de esta investigación: el concepto de función. Esta primera componente de análisis teórico, genera una descomposición genética preliminar basada en la comprensión matemática del concepto de función desde diversas maneras: como lo comprende el investigador, los libros de texto, como se comprende históricamente, a través de las experiencias como docente, o de investigaciones hechas previamente, entre otras. Esta descomposición genética preliminar guía el *diseño e implementación de enseñanza* que es justamente la segunda componente de este ciclo de investigación. La enseñanza está orientada, en palabras de los autores, a "promover la abstracción reflexiva en lugar de obtener respuestas correctas" (Arnon et al., 2014, p. 58). Si esta descomposición preliminar es una buena aproximación a la construcción del concepto de función, la tercera etapa, *recolección y análisis de datos*, va a permitir la validación de la descomposición genética y su implementación en la enseñanza. En esta implementación, se recolectan los datos para dar respuesta a dos interrogantes: ¿Los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto en cuestión? (Arnon et al., 2014, p. 94).

Si el investigador concluye que en efecto, los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética preliminar, pero no aprendieron el concepto en cuestión, el análisis teórico es reconsiderado y modificado. Pero si ni siquiera realizan las construcciones descritas por la descomposición genética preliminar, la enseñanza debe ser reconsiderada y modificada. Es decir, este ciclo puede ser repetido hasta dar respuesta afirmativa a los dos interrogantes propuestos y tener como resultado, una descomposición genética validada.

Elementos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

Una *representación* es interpretada por Duval como una "codificación de la información". Además, Duval asegura que "no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin

recurrir a la noción de representación" (Duval, 2004, p.25). Por otro lado, Duval se refiere a la *semiosis* como una implicación de la variedad de signos que pueden ser utilizados para ponerlos en correspondencia. En efecto, los sistemas semióticos, que permiten que se cumplan las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación (representación de alguna cosa, transformar las representaciones, y convertir las representaciones) se denominan *registros de representación semiótica*.

El autor analiza entonces, las representaciones semióticas en las que se llevan a cabo todos los aprendizajes sujetos a una enseñanza, ya que dichas representaciones permiten una "mirada del objeto". Las representaciones semióticas pueden ser: esquemas, figuras, gráficos, expresiones simbólicas, etc. Además, Duval afirma que la propiedad más importante de esas representaciones es su transformabilidad en otras representaciones que guardan todo el contenido de la representación inicial, o que guardan solo una parte de ese contenido. Particularmente, esta transformabilidad se da con las actividades cognitivas de las representaciones semióticas, las cuales son descritas a continuación.

Actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis

Las actividades de *formación, tratamiento* y *conversión* que se presentan en este apartado, son fundamentales para el análisis de un aprendizaje conceptual. Dicho aprendizaje centrado en el cambio y la coordinación de los distintos registros de representación, resulta muy beneficioso en la comprensión de conceptos (Duval, 2004, p. 49).

La primera actividad, la *formación* de una representación semiótica, es el medio de selección de unos signos que establecen lo que se quiere representar. Esto es, el medio para expresar una representación mental o para evocar un objeto real. Por ejemplo, se realiza la actividad de formación cuando se representa una función en lenguaje algebraico. La segunda actividad, la actividad de *tratamiento*, consiste en transformar una representación inicial en otra representación terminal dentro del mismo registro, con el fin de "expandir" la información brindada. En el caso de las funciones, cuando se pasa de escritura conjuntista a escritura funcional, se está haciendo tratamiento de la representación, ya que ambas escrituras hacen parte del registro algebraico. La tercera actividad conocida como *conversión*, consiste en transformar una representación dada en un registro, a otra representación de un registro distinto al inicial, por ejemplo, trasformar una función del lenguaje algebraico a un esquema gráfico, pero sin ser reducida a un algoritmo. Esta actividad puede favorecer la coordinación de los registros de representación.

Método

El método que será usado para la investigación, es el ciclo de investigación de la Teoría APOE (Arnon et al., 2014) con algunas adaptaciones en el diseño e implementación de enseñanza. En dicha componente se puede ver el rol que juega la Teoría de Duval en esta propuesta de investigación.

A continuación se describe el desarrollo de cada una de estas componentes.

Análisis teórico

El objetivo principal de esta componente, es diseñar una descomposición genética preliminar del concepto de función basada en estudios de libros de texto, investigaciones previas y experiencia propia, que determine un camino viable para los estudiantes. Es decir, dicha descomposición debe ser realizable por los estudiantes, para que puedan construir el concepto de

función.

Para el diseño de la descomposición genética, se toma como guía el trabajo realizado por Roa-Fuentes y Asuman Oktaç (2010) en el cual dan a conocer el procedimiento que siguieron para diseñar una descomposición genética sobre el concepto de transformación lineal.

Después de realizar la descomposición genética preliminar, se pasa a la siguiente componente del ciclo de investigación: diseño e implementación de un modelo de enseñanza.

Diseño e implementación de un modelo enseñanza

Los individuos que participan en esta investigación son estudiantes que cursan noveno grado (14 – 15 años) en la institución pública Fundación Colegio de las Américas, ubicada en el municipio de Bucaramanga.

Inicialmente, se genera un espacio para que los estudiantes se familiaricen con un ambiente dinámico, específicamente, con el software de geometría dinámica GeoGebra. Siguiendo el ciclo metodológico de ACE (estrategia pedagógica que consta de tres componentes: Actividades, discusión en Clase, y Ejercicios), se busca introducir actividades en el aula para promover los mecanismos asociadas a la abstracción reflexiva. Las actividades buscan potenciar la construcción de estructuras mentales propuestas en la descomposición genética preliminar. Estas actividades debido a que están fundamentadas en la teoría de Duval, incluirán problemas de situaciones nuevas que involucren la transformación de estructuras previas y que permitan la coordinación entre las diferentes representaciones del concepto de función. En la discusión en clase, se espera que los estudiantes reflexionen sobre el trabajo que están desarrollando. Finalmente, se dejan tareas extra-clase para que refuercen el trabajo que han realizado.

Recolección y análisis de datos

Para la validación de la descomposición genética preliminar y la implementación de la enseñanza, se usan tres instrumentos: 1. Prueba diagnóstica, 2. Prueba pos-instrucción, y 3. Entrevista semiestructurada.

La prueba diagnóstica evalúa las construcciones previas a la enseñanza sobre el concepto de función y si estas construcciones son las propuestas en la descomposición genética preliminar. Asimismo la prueba diagnóstica evaluará las habilidades de los estudiantes en los registros de representación. Con la prueba pos-instrucción se espera caracterizar las concepciones desarrolladas por los estudiantes y se pretende responder a los interrogantes planteados en el ciclo de investigación: ¿Los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto en cuestión? (Arnon et al., 2014, p. 94). Se recuerda que para validar la descomposición genética preliminar, la respuesta a estos dos interrogantes debe ser afirmativa. Finalmente, la entrevista semiestructurada se propone para que los estudiantes tengan la oportunidad de defender sus respuestas en la prueba pos-instrucción. Más aún, la entrevista es el instrumento que ayuda a validar las construcciones mentales que se caractericen en la descomposición genética.

Reflexiones iniciales

Dado que las investigaciones realizadas bajo la Teoría APOE, inicialmente se enfocaron en el estudio de pensamiento matemático avanzado (matemáticas universitarias), se esperaba que los estudiantes ya contaran con estructuras abstractas sobre las cuales trabajar. Esta propuesta, por el contrario, pretende trabajar con estudiantes que tienen sus primeros acercamientos

formales al concepto de función, para que estos logren construir estructuras más sólidas del concepto.

La descomposición genética diseñada, podría servir como herramienta para describir y predecir el pensamiento matemático de un individuo genérico, es decir, la descomposición genética puede ser usada por cualquier estudiante que tenga las características generales del grupo en el que se pretende llevar a cabo la enseñanza, esto es, "está al alcance" de cualquier estudiante que curse noveno grado. No es una forma que solo pueda usar un individuo con características particulares. Dicha descomposición también podría ser una herramienta para elaborar secuencias de enseñanza, incluso, secuencias elaboradas por el profesor mismo.

Se hace énfasis en que este documento muestra los avances de una propuesta de investigación, por ende, ésta sigue en construcción.

Referencias y bibliografía

Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory*. New York: Springer.

Carlson, M. & Oehrtman, M. (2005). Research Sampler 9: Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 140-152). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 5-21.

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En Cortés C. Et Hitt F. (Éds), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, 81-108. México: Morevallado.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria, 13,* 29-36.

Prada-Núñez, R., Hernández-Suárez, C. A. y Ramírez-Leal, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. *Revista Científica*, *25*, 188-205. doi: 10.14483/udistrital.jour.RC.2016.25.a3

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 89-112.

Romero Félix, C. F. (2016). *Aprendizaje de transformaciones lineales mediante la coordinación de representaciones estáticas y dinámicas*. (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

Sánchez, B. I. (2009). Las representaciones sociales como base para el diseño de una secuencia de aprendizaje sobre el concepto de función. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, *4*, 45-71.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El concepto de función como covariación en la escuela secundaria

Ronald Andrés **Grueso**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ronald.grueso@correounivalle.edu.co

Resumen

La presente comunicación es un reporte de un trabajo de grado de maestría de la Universidad del Valle y muestra aspectos teóricos, el diseño y algunos resultados de la implementación de una secuencia de actividades relacionada con el estudio de la función a través de situaciones de covariación, en grado noveno de una Institución Educativa de Colombia.

La secuencia consta de tres situaciones, cuyo diseño se fundamentó en el marco conceptual del razonamiento covariacional y se basó en una situación problema sobre la maximización del área de un rectángulo inscrito en una forma cuadrada. En algunos resultados se pudo evidenciar la importancia de enseñar la función desde una perspectiva de dependencia y cambio sin hacerlo únicamente desde la correspondencia. Igualmente, que la consideración de la razón de cambio, les permitió a algunos estudiantes poder caracterizar el comportamiento y tendencia de una función.

Palabras clave: Razonamiento covariacional; modelos teóricos locales; Covariación; Concepto de Función.

Introducción y contextualización de la problemática

En la literatura se encuentra un acervo considerable de investigaciones sobre el concepto de función, específicamente, estudios asociados a su enseñanza y aprendizaje. En este sentido, se puede citar estudios como los de Kaput (1992), Dubinsky & Harel (1992), Sierpinska (1992), Carlson (1998), Hitt (1998), Guzmán (1998) y Ruiz (1994). En dichas investigaciones, además de caracterizar las distintas dificultades que tienen los estudiantes al abordar dicho concepto, se propone la enseñanza de la función desde una perspectiva variacional que privilegie la relación de dependencia entre magnitudes.

A pesar de estas propuestas y otros estudios sobre la enseñanza del concepto de función, en la actualidad, se sigue abordando la función desde una perspectiva de correspondencia o de asignación. Además, muestran que su enseñanza obedece a ideas netamente algorítmicas o

estáticas, sin privilegiar que la comprensión del concepto de función va más allá de las letras o de los símbolos que lo representan. Lo que significa, que su estudio se continua haciendo de forma estática, donde predomina la importancia por generar habilidades en la sintaxis y en los procesos algorítmicos, más que en la comprensión de su significado y elementos constitutivos.

En consecuencia, no se puede desconocer que los estudiantes, además de cometer errores en el manejo y tratamiento de funciones, no tienen claro dicho concepto; por consiguiente, enseñar y aprender este concepto es una tarea compleja, dispendiosa y de mucho cuidado, tal como lo expresan López y Sosa (2008)

La enseñanza del concepto de función actualmente gira alrededor del registro algebraico, la internación de este registro con otros, como el grafico, suele ser limitado a una simple ejemplificación. Por ello, se sugieren tratamientos alternativos del concepto, como el numérico, geométrico, etc., con especial énfasis en el aspecto discursivo para la resolución de problemas y la modelación de fenómenos (p. 317)

De otra parte, los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas (1998) en Colombia proponen que: "Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para "enlazar" patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio" (p.51). Sin embargo, esta directriz no se concretiza en las propuestas de enseñanza para trabajar el concepto de función en el aula. Además, direccionan, para los procesos de enseñanza, la movilización de diferentes registros de representación y las transformaciones que son consecuencia del cambio de un registro a otro. "El cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación". (Duval, 2004, p.62). Pese a lo anterior, es frecuente que en la escuela, la función se aborde desde dos o tres registros de representación (algebraico, tabular y gráfico) de forma aislada, es decir, sin considerar las implicaciones que tienen las variaciones de un registro en los de otro registro. Así pues, ni siquiera el estudio de una gráfica cartesiana puede asegurar el acercamiento dinámico a la función, si dicha gráfica sólo se considera como el conjunto de unas parejas ordenadas en un plano cartesiano. Si no se estudia el comportamiento de los cambios, la gráfica puede esconder la *covariación*. Cuando hay una relación de dependencia entre dos magnitudes, la *covariación*, debe entenderse como el estudio de los cambios de una magnitud atendiendo a los cambios de la otra (Carlson, 2003).

Por otra parte, el quehacer de la enseñanza para un docente, está permeado por distintas mediaciones que acompañan o complementan su intervención directa con los estudiantes. Un ejemplo particular de un recurso usado con frecuencia es el libro de texto, que en muchas ocasiones se convierte en una fuente para preparar sus clases y actividades a proponer, por consiguiente, muchas de las definiciones y ejercicios son tomados de forma explícita de dicho texto escolar. Es por esta razón que los libros de texto pueden ser un indicador de lo que pasa en una clase promedio, y de ahí la importancia de estudiar y analizar la forma en que estos textos presentan un concepto tan relevante para el desarrollo del pensamiento variacional, como lo es la función. En la mayoría de los libros utilizados en Colombia, privilegian el concepto de función desde una perspectiva estática, donde la correspondencia y asignación son aspectos centrales bajo un enfoque conjuntista. Como consecuencia, se presenta una definición formal que propone una abstracción de los fenómenos de cambio, a través de la generalización de cuantificaciones y notaciones matemáticas. Aunque se suelen presentar aplicaciones, estas aparecen desligadas de la necesidad de introducir el concepto, es decir, después de trabajar lo algorítmico se establecen ejemplos que sirven de guía para resolver problemas de aplicaciones, lo cual implica la

contemplación, desde la instrucción, de la discriminación de unas estrategias estandarizadas. De esta manera, la covariación difícilmente se logra trabajar desde la propuesta de enseñanza de los textos.

Teniendo en cuenta la problemática descrita en este estudio, que se hizo en el marco de un trabajo de grado para optar por el título de Magíster en Educación Matemática, se trata de dar respuesta a la siguiente pregunta: *¿Qué elementos o rasgos del concepto de función se identifican, en un grupo de estudiantes de grado 9°, a través del desarrollo de situaciones problema de covariación?*

Algunos elementos teóricos de referencia

El marco teórico y metodológico usado en el estudio fue el de los Modelos Teóricos Locales (MTL) Filloy (1999), entendiendo que los MTL se fundamentan en la observación experimental y la replicabilidad de diseños experimentales. Asimismo, en la determinación de un MTL, se hace énfasis en la caracterización de cuatro componentes interrelacionados entre sí, y la consideración de unas etapas durante la observación experimental. Las cuatro componentes teóricas son: Componente de enseñanza del Modelo Teórico Local o, de forma abreviada, Modelo de enseñanza. Componente de cognición del Modelo Teórico Local o Modelo para los procesos cognitivos. Componente de competencia formal del Modelo Teórico Local o Modelo de competencia formal y Componente de comunicación del Modelo Teórico Local o Modelo de comunicación. Dentro de cada componente se consideran elementos o referentes teóricos para ayudar a documentar la problemática y poder proponer una secuencia de enseñanza que consolide o sea acorde a dichos referentes.

El modelo de competencia formal, está direccionado por un análisis fenomenológico de la función. En este orden de ideas, en el modelo de competencia formal, el análisis fenomenológico del concepto de función se hace a partir de la fenomenología histórico-epistemológica y la fenomenología pura. De esta manera, se menciona de forma breve el transitar del concepto de función a través de la historia, para contemplar de forma paralela su visión epistemológica y por consiguiente, las distintas concepciones que ha tomado, lo cual dará indicios de sus usos, formas de difusión y posibles obstáculos epistemológicos. Asimismo, se hace énfasis en la concepción actual y usos del concepto de función. Para ello, se detalla cómo se concibe el concepto de función desde el saber sabio, antes de ser transpuesto a un contexto escolar.

En el Modelo de enseñanza se estudia y analiza el marco legal curricular que propone el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), en particular, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006). Este acercamiento al marco legal curricular se hace con el fin de identificar su papel en el estudio y enseñanza del concepto de función. Igualmente, se hace revisión del concepto de función en algunos libros de texto y revisión de la propuesta curricular de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta con el propósito de caracterizar el modelo de enseñanza predominante en el sistema educativo y que, en últimas, ha permeado la enseñanza que han recibido los estudiantes que son objeto de observación en este estudio.

En el modelo cognitivo y de Comunicación, es vital reflexionar y analizar sobre la forma en que los estudiantes aprenden y logran adquirir o acumular conocimientos matemáticos nuevos. Para ello, se requiere contar con un instrumento bien estructurado, soportado en un marco conceptual, que permita clasificar las actuaciones de los estudiantes en torno a las actividades de covariación. Este modelo se apoya fundamentalmente en el Razonamiento

Covariacional (Carlson, et al. 2003). Este razonamiento es definido como: "Actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p. 130).

El estudio y desarrollo del razonamiento covariacional va ligado a fenómenos o situaciones dinámicas que no necesariamente deben ser modeladas en un software como Cabri o GeoGebra. Estas situaciones dinámicas permiten que el estudiante construya imágenes de dos variables dependientes de una función que cambia simultáneamente con el cambio imaginado de una variable independiente, por ejemplo el área de la sombra de un edificio con respecto a la hora del día. Como no se puede percibir directamente lo que piensan los estudiantes, los comportamientos se convierten en el mayor insumo para saber qué acción mental se encuentra asociada. Por ejemplo, para Carlson, los estudiantes deben ser capaces de analizar patrones de cambio en varios contextos y esto debe ir ligado a cómo los estudiantes interpretan y construyen enunciados. Así pues, Carlson contempla cinco acciones mentales relacionadas con el grado de evolución que muestra el estudiante al desarrollar tareas que implican la covariación. Las acciones mentales en orden ascendente de complejidad, están dadas por la coordinación: del valor de una variable con los cambios de la otra, dirección del cambio entre las cantidades, cantidad de cambio entre las variables, razón de cambio promedio de la función que relaciona las variables, razón instantánea de dicha función.

Además de estas cinco acciones mentales, Carlson propone cinco niveles de Razonamiento covariacional donde se puede evidenciar el grado de pensamiento covariacional desarrollado por el estudiante. Para la covariación, propone que cada nivel se va alcanzando de acuerdo a su desarrollo en la sustentación de las anteriores acciones mentales, por ejemplo, si un estudiante está en el nivel 3, es porque manifiesta los tres comportamientos que sustentan cada uno de estos tres niveles, es decir que de manera acumulada muestra las características de las acciones mentales uno, dos y tres (AM1, AM2 y AM3).

Para la clasificación de los estudiantes, Carlson también manifiesta que hay que tener cuidado con los pensamientos pseudo-analíticos ya que estos derivan comportamientos pseudo-analíticos. Un comportamiento pseudo-analítico se entiende como un comportamiento que no está ligado a los características o propiedades de un concepto, más bien está ligado a la memoria del estudiante porque seguramente lo vio, pero no lo comprende, es decir, está ligado a procesos más mecánicos o algorítmicos, por ello, al mostrar estos comportamientos, se pueden clasificar a los estudiantes de manera errónea.

A continuación se explicitan los niveles de razonamiento covariacional que guiaron el estudio.

Tabla 1
Niveles de razonamiento covariacional

NIVELES	CARACTERÍSTICAS
Nivel 1 Coordinación	Las imágenes de la Covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 Dirección	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. (AM1 y AM2).

Nivel 3 Coordinación Cuantitativa	Las imágenes de la Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. (AM1, AM2 y AM3).
Nivel 4 Razón Promedio	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada (AM1 hasta AM4).
Nivel 5 Razón Instantánea	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de los puntos de inflexión (AM1 hasta AM5).

Tomado de Carlson et al. (2003)

En cuanto a las demás componentes que integran el MTL, El modelo de competencia formal, está direccionado por un análisis fenomenológico de la función. En este orden de ideas, en el modelo de competencia formal, el análisis fenomenológico del concepto de función se hace a partir de la fenomenología histórico-epistemológica y la fenomenología pura. En cuanto al modelo de enseñanza, se estudia y analiza el marco legal curricular que propone el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), en particular, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006). Este acercamiento al marco legal curricular se hace con el fin de identificar su papel en el estudio y enseñanza del concepto de función. Igualmente, se hace revisión del concepto de función en algunos libros de texto y revisión de la propuesta curricular de la Institución Educativa.

Al indagar sobre el aprendizaje y estudio del concepto de función, mediante la secuencia de tareas que proponen los componentes de los MTL, este estudio o investigación es de carácter cualitativo y cuantitativo en el marco de un enfoque descriptivo en la medida en que se quieren detallar procesos, actitudes y aptitudes de los estudiantes al desarrollar unas tareas propuestas. La primera fase consiste en identificar la problemática y posteriormente hacer un análisis previo del problema.

Como consecuencia del análisis previo, en una segunda fase, se formula una hipótesis que a su vez, sugiere el diseño de una propuesta de aula a partir de la articulación de los componentes mencionados anteriormente. Dicha propuesta se implementa con 22 estudiantes de grado 9° de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta (de carácter rural) de la ciudad de Yumbo. De acuerdo con el análisis previo de la fase 1, la secuencia de tareas se enfoca en poder tener en cuenta en cada pregunta, la forma de que las posibles respuestas puedan ser analizadas en el marco del Razonamiento Covariacional y por ende, permitan dar una respuesta a la hipótesis. A partir de los resultados, se categorizan las actuaciones de los estudiantes mediante una tipificación de las respuestas, para posteriormente analizar esos resultados a la luz de unas variables de análisis predeterminadas por los referentes teóricos mencionados en cada componente del MTL.

El análisis de los resultados permite, que en una fase final, se puedan consolidar unas conclusiones y reflexiones didácticas en términos, también de los referentes teóricos y la posible respuesta a la hipótesis planteada.

Algunas conclusiones y reflexiones

Tanto la fenomenología pura como la epistemológica, proponen una definición que actualmente, está en términos de una visión conjuntista, sin embargo, para el diseño de las tareas de covariación se retoma la definición dinámica, pues lo histórico la presenta como prevalente, además, el no hacerlo, sería desconocer el largo camino que ha sido necesario recorrer para llegar a las definiciones clásicas que respondían a la necesidad de estudiar el movimiento. Adicional a lo anterior y pese a la definición conjuntista, en la revisión de la literatura, los usos que se proponen se dan en el marco del estudio del cambio. La puesta en escena de tareas en torno a la covariación permitió evidenciar en los razonamientos de los estudiantes, el acercamiento a nociones asociadas al concepto de función, como: variables independientes, variables dependientes, dominio, rango, máximos y mínimos relativos, monotonía en el comportamiento creciente o decreciente de una función.

Con las tareas de covariación se logró que los estudiantes pasaran del reconocimiento de una relación entre magnitudes, a capturar la covariación como tal. En este orden de ideas, es importante resaltar que los puntos en el plano cartesiano representan relaciones entre magnitudes, a su vez, la comparación de dos puntos da cuenta del cambio, cambio que relacionado con otros de la misma gráfica, da cuenta de la variación. Así pues, con las tareas se logró que los estudiantes analizaran los cambios de los cambios, es decir, que compararan los cambios; esto implicó el reconocimiento de la correlación de la forma de cambio entre dos cambios.

En el estudio realizado, el razonamiento covariacional (Carlson, 2003) fue una herramienta importante para clasificar las actuaciones de los estudiantes como consecuencia de comportamientos asociados a determinadas acciones mentales, para posteriormente situar a los estudiantes en unos niveles de razonamiento covariacional. Esto pone de manifiesto la importancia de que los profesores puedan contar con herramientas que permitan poder clasificar y observar las actuaciones de los aprendices, en procura de poder analizar los procesos cognitivos que subyacen a las respuestas de sus estudiantes y que por consiguiente le permitan reflexionar y reorientar sus prácticas pedagógicas.

La metodología propuesta para la aplicación y evaluación de las tareas de covariación, se caracterizó por tener en algunos momentos trabajos en parejas (trabajo colaborativo) lo cual permitió la discusión y confrontación de saberes que posteriormente condujo a la institucionalización de saberes.

El trabajo con la covariación se puede articular en instrumentos de intervención en el aula, sin importar la edad. Esto se vio reflejado cuando los estudiantes enunciaban aspectos relacionados con el comportamiento de los cambios y no necesariamente requerían de pre-requisitos de carácter sintáctico del álgebra escolar.

De acuerdo al marco conceptual de Carlson, el nivel N5 no fue abordado en las tareas, lo cual es una limitación en el estudio de la razón instantánea y su relación con la función derivada. De esta manera, un posible estudio futuro podría estar basado en el diseño y posterior aplicación, de actividades donde las respuestas esperadas estén relacionadas con la función derivada y casos asociados al límite cuando la variación de una variable tienda a ser cero.

La puesta en escena de tareas en torno a la covariación permitió que los estudiantes, con preguntas específicas se fueran encaminando y obteniendo avances en las formas del razonamiento que usaban. En dichos razonamientos fue evidente el acercamiento a nociones asociadas al concepto de función, como: variables independientes, variables dependientes, dominio, rango, máximos y mínimos relativos, monotonía en el comportamiento creciente o decreciente de una función. Esta conclusión se hace a partir de los resultados de las actuaciones de los estudiantes en las tres tareas de la situación 2, donde las preguntas también tenían la intención de observar elementos presentes en el discurso de sus explicaciones para poder tener más información acerca de la forma en que están entendiendo o comprendiendo alguna situación. Asimismo, estos comportamientos observados en los estudiantes dan cuenta del porqué se les clasificó en el nivel N3 de razonamiento covariacional del marco conceptual propuesto por Carlson, puesto que los estudiantes, en sus actuaciones, dieron cuenta de la comprensión del comportamiento de los cambios desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo.

Algunos estudiantes llegaron a reconocer que para esbozar una gráfica, no necesariamente se debe tener una expresión algebraica que la soporte predeterminadamente. Esto se evidenció cuando ellos esbozaban la forma de la curva dependiendo del comportamiento de los cambios de una variable respecto a la otra, en términos de la coordinación cualitativa y cuantitativa de las cantidades involucradas.

En relación con la hipótesis que se pretendía contrastar en el MTL inicial, se puede afirmar que en efecto, el concepto de función se puede y se debería trabajar a partir de tareas de covariación, ya que estas permiten observar el comportamiento dinámico que subyace a dicho concepto. El desarrollo del pensamiento variacional y en particular, el aprendizaje de la función, se ve potencializado a partir del estudio del razonamiento covariacional.

Teniendo en cuenta que el estudio de la función es el eje principal para la comprensión del cálculo, es importante destacar que la función debe ser estudiada no sólo desde la definición de sus elementos asociados, sino también desde los aspectos dinámicos que ella modela o representa. En este orden de ideas, el estudio del comportamiento de los cambios posibilita que la función realmente sea el epicentro del estudio del cálculo. En la escuela, normalmente, la función se muestra aislada de otros aspectos como los límites, la derivada y las integrales, es decir, el cálculo diferencial e integral pierde sentido si no se le ha adjudicado al concepto de función su carácter dinámico.

Referencias y bibliografía

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, *8*(2), pp. 121-156.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in collegiatemathematicseducation*, *3*, pp. 114-62.

Dubinsky, E., & Harel, G. (Eds.) (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington: Mathematical Association of America.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Filloy, E. (1999). Modelos Teóricos Locales: Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa. En *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamericana.

Grueso, R. A., y González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela* (Tesis de Maestría). Universidad del valle, Cali.

Guzmán, I. (1998). Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1(1), 5-21.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), pp. 123-134.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En Grouws,D. (Ed.) Handbook on research in mathematics teaching and learning. 515-556. New York: Macmillan.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, (21), pp. 308-318.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Serie Lineamientos curriculares*.* República de Colombia. Bogotá, D.C. Colombia. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. En MEN, Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.

Ruíz Higueras, L. (1994). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Ph D. Universidad de Granada.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA Notes # 25 (pp. 3–58). Washington, DC: Mathematical Association of America

Villa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), 9-25

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Dificultades en la comprensión de la función por tramos en estudiantes universitarios

Roger Leandro Díaz Villegas
Universidad Nacional de Cañete
Perú
rdiaz@undc.edu.pe
Candy Clara Ordoñez Montañez
Universidad Nacional de Cañete
Perú
cordonez@undc.edu.pe

Introducción

Actualmente, observamos que la mayoría de los estudiantes ingresantes a las diferentes universidades de nuestro país, en su estadía, presentan dificultades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y, la Universidad Nacional de Cañete (UNDC) no es ajena a esta problemática. Existen investigaciones como la de Yam (2009) que manifiesta que los estudiantes presentan diversos obstáculos en la adquisición de un nuevo conocimiento y en el uso del concepto de función. Según Chumpitaz (2013) asegura que los universitarios de la carrera de ingeniería muestran obstáculos en el aprendizaje de la función por tramos. En este estudio nos basaremos en la Teoría de Duval por los elementos teóricos que permite la investigación en el aprendizaje de la función por tramos. Así, por la relevancia ya evidenciada, nos planteamos investigar: ¿Qué dificultades presentan los estudiantes del ciclo I de contabilidad en la comprensión de la noción de función por tramos cuando transitan por los distintos registros de representación semiótica?

Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (RRS)

La Teoría propuesta por Raymond Duval se enfoca en el uso de los registros de representación semiótica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, Duval (2006) incide que en la actividad matemática lo importante no es la representación de un objeto matemático, sino las transformaciones que pueden realizarse: tratamiento y conversión. Según Duval la comprensión de un objeto matemático se basa en el uso de al menos dos RRS. Nuestro objeto matemático en estudio, función por tramos, se basa en los RRS: verbal, gráfico y algebraico.

Metodología

El trabajo se realizó con 10 estudiantes (entre 17 a 25 años) que se encontraban cursando el ciclo I de la carrera de Contabilidad de la UNDC. Ellos no contaban con conocimientos previos sobre función por tramos. Estos estudiantes participaron de manera voluntaria en esta investigación luego de realizarse una convocatoria a todos los estudiantes del curso de Matemática básica.

La metodología aplicada en este estudio está dada en un enfoque cualitativo con estas etapas: 1) Aplicación de la sesión de clase: a partir de una situación problemática se trabajó la construcción de la noción de función por tramos tanto en su representación verbal, tabular, algebraica y gráfica. 2) Elaboración de la actividad: se diseñó 3 tareas. La tarea 1 buscó transitar del registro verbal al

algebraico, es un problema referido al pago del impuesto a la renta de un trabajador peruano. La tarea 2 buscó transitar del RRS gráfico al algebraico. El gráfico propuesto es una función que está compuesto por secciones de una función lineal, cuadrática y constante. La tarea 3 trató transitar del RRS gráfico al verbal. A partir de un gráfico propuesto se buscó que los estudiantes inventen una situación, el cual evidencien: relacionar las variables independientes y dependientes, describir el comportamiento de la gráfica, corresponder a cada valor del registro de partida un único valor en el registro de llegada y asociar las unidades. 3) Experimentación y 4) Resultados.

Experimentación y resultados

Se realizaron dos sesiones, la sesión 1 y 2 con una duración de 4 y 3 horas, respectivamente.

Respecto a la tarea 1 se observó en los estudiantes las siguientes dificultades: expresan parcialmente la situación como representación algebraica de una función por tramos, por ejemplo: no expresan completamente la regla de correspondencia, ausencia del dominio o no describen el significado de las variables empleadas en la expresión matemática. Para la tarea 2, los estudiantes determinaron parcialmente la regla de correspondencia, especialmente, las dificultades halladas han sido obtener la regla de correspondencia cuando una de las secciones de la gráfica es una función cuadrática con un vértice que no es (0,0) y, otras de las dificultades han sido para representar el dominio de la función. En el caso de la tarea 3 observamos que los estudiantes inventan situaciones que relacionan las variables (independientes y dependientes) y asocian las unidades, por ejemplo, los metros que recorre una liebre depende de la velocidad que emplee. Sin embargo, la dificultad encontrada es que en sus problemas solo asocian valores enteros de las variables, es decir, consideran los puntos (3;3), (4;3), etc. y no consideran (3;3.2), (4;3.7), etc.

Conclusiones

La pregunta de investigación, se responde: Las respuestas de las tareas evidencian que los estudiantes del I ciclo de contabilidad presentan dificultades para la comprensión de la noción función por tramos cuando estos transitan por los distintos registros de representación semiótica.

Las dificultades encontradas en las respuestas de los estudiantes respecto a cada tarea son distintas. La tarea 3 resultó ser la de mayor dificultad para los estudiantes, pues el hecho de transitar del registro gráfico al verbal, demanda una interpretación global de la gráfica y comprensión del significado de la relación que existe entre las dos variables. Consideramos, que esta dificultad se debe a que este tipo de tareas son poco trabajadas tanto en las clases y en los libros de textos. Por otro lado, en la tarea 2, la dificultad para los estudiantes es lograr asociar la representación gráfica de cada curva con su respectiva regla de correspondencia. Para conseguir lo esperado en las tareas debemos tomar las sugerencias dadas por Tocto (2015), en base a su investigación y sus resultados obtenidos, el de utilizar el RRS tabular para luego transitar del RRS gráfico y al RRS algebraica.

Referencias y bibliografía

Chumpitaz, L. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.* Revista la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. 9(1), pp. 143-168.

Tocto, E. (2015). *Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria.* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú).

Yam Huh, E. (2009). *Función definida por partes. Un análisis histórico – didáctico referente a su tratamiento escolar.* (Tesis de licenciatura). Universidad Autónoma de Yucatán, México.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Del Contexto Geométrico al Razonamiento Funcional

César **Briseño** Miranda
CINVESTAV-IPN
México
cbriseno@cinvestav.mx
Ernesto **Sánchez** Sánchez
CINVESTAV-IPN
México
esanchez@cinvestav.mx

Resumen

En este trabajo se identifican los tipos de razonamientos [cuantitativo, inductivo y representacional] surgidos en estudiantes de bachillerato al resolver tareas que involucran situaciones geométricas dinámicas. Se trata de un estudio de tipo cualitativo surgido desde una concepción de la Teoría Fundamentada, que permite identificar la manera en cómo los estudiantes se acercan —desde el punto de vista cognitivo— al Esquema de Función diseñado [por los autores] en este trabajo. Los resultados muestran que las tareas, los conocimientos previos de los estudiantes y el adecuado uso de los ambientes de trabajo, ambiente Tecnológico Digital como complemento del ambiente de Lápiz y Papel, promueven [en conjunto] la interrelación de los registros de representación que son esenciales para promover los razonamientos asociados con los conceptos involucrados.

Palabras clave: Tipos de razonamiento, relación funcional, bachillerato, lápiz-y-papel, tecnológico digital.

Introducción y planteamiento del problema

Diversos autores (p.ej, Doorman & Drijvers, 2011; Freudenthal, 1983; Weigand & Weller, 2001) afirman que el concepto de función es una de las nociones más potentes y útiles dentro de las Matemáticas y su manejo integral se relaciona con la capacidad no sólo de comprender y utilizar sus representaciones, sino también de relacionarlas entre sí y transitar de una a otra con fluidez. El tránsito entre diferentes representaciones constituye un instrumento importante para el aprendizaje de los conceptos matemáticos y, en particular, las variadas representaciones del concepto de función se han enriquecido y vuelto más accesibles y manipulables con ayuda de la tecnología (Cuoco & Goldenberg, 1997). De acuerdo con la NCTM (2000), si no se promueve la transición entre los diferentes registros será menos probable que los estudiantes favorezcan su razonamiento e identifiquen la relación de los diferentes registros de representación, lo cual provocaría que sea más probable el desarrollo de conceptos erróneos.

Un problema que surge cuando se emplea el ambiente *Tecnológico Digital* (TD) en la enseñanza, consiste en cómo integrar las habilidades que los estudiantes han adquirido para trabajar en ambiente de *Lápiz y Papel* (LyP). En este trabajo, se diseñaron tareas para promover en los estudiantes, el uso de distintos registros de representación con base en sus conocimientos previos y sus habilidades en ambiente LyP. Estas tareas se implementaron y se recogió el registro escrito con sus respuestas. La base de las tareas fue el reconocimiento de la variación de áreas de figuras geométricas en función del desplazamiento de un punto, con la finalidad de obtener su expresión algebraica que pueda explorarse con ayuda del ambiente TD.

Antecedentes

Hay una gran cantidad de investigaciones sobre el concepto de función. Aquí sólo mencionaremos algunos trabajos representativos. En el análisis del concepto de función, Freudenthal (1983, p. 496) la enfatiza en su relación con la variación, considerando que es la relación de elementos que varían libremente a elementos que varían bajo restricción. Para Cañadas y Molina (2016, p. 211), el trabajo con funciones depende de y aporta comprensión sobre las variables, la manipulación de fórmulas y la relación entre diferentes representaciones. La comprensión del concepto de función es un aspecto crítico del razonamiento algebraico y la construcción de relaciones funcionales es una actividad que debe aprovechar el poder de las capacidades de los estudiantes para razonar acerca de las cantidades y el uso de múltiples representaciones, con la finalidad de fomentar una comprensión profunda del concepto de función (Ellis, 2011; Kieran, 1992).

Por un lado, diversos autores (e.g., Ellis, 2011; Kieran, 1992) afirman que los estudiantes demuestran una visión limitada del concepto de función, a pesar de que algunos sean capaces de detectar patrones, ya que es posible que no puedan formalizar esos patrones correctamente escribiendo ecuaciones o expresiones algebraicas apropiadas. Por otro lado, los estudiantes tienen problemas para interrelacionar correctamente las representaciones tabulares, gráficas y algebraicas de las relaciones funcionales y pueden volverse excesivamente dependientes de un tipo de registro; se restringen a una manipulación algebraica que produce una limitación en el desarrollo de este concepto, de tal manera que los estudiantes no pueden hacer una conexión adecuada entre las distintas representaciones; la falta de conciencia algebraica hace que el razonamiento con funciones sea complejo (Doorman & Drijvers, 2011; Ellis, 2011).

La utilización de diversos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, diagramas, gráficos cartesianos o figuras geométricas son esenciales para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 2006; entre otros). La única manera de tener acceso a los objetos matemáticos y tratar con ellos es a través de sus representaciones semióticas (Duval, 2006). Para que los estudiantes comprendan y utilicen formas pertinentes de representaciones, deben entender el significado de éstas (e.g., en representaciones geométricas se requiere comprender el significado de las rectas, los números y variables, entre otras). Debido al uso de diversos sistemas de representación no son fáciles de emplear en la actividad matemática, por ello es necesario que los alumnos tengan conocimiento considerable de los símbolos y convenciones de ellas de modo que esas representaciones adquieran sentido para los estudiantes (Eisenberg, 1992). Algunos investigadores (e.g., Doorman & Drijvers, 2011; Ellis, 2011; Freudenthal, 1983) afirman que para lograr razonar y comunicarse en torno al tema de funciones se requiere conocer y emplear de manera adecuada su notación; cada una resalta aspectos específicos del concepto de función asociado.

En general, no hay una sola concepción de función para la enseñanza, pues se puede caracterizar de diferentes maneras según el aspecto en que se quiera enfatizar; por ejemplo: como regla de correspondencia, como parejas ordenadas, como una curva en el plano cartesiano o como covariación de cantidades. En la presente investigación nos hemos centrado en las primeras tres caracterizaciones. Con la finalidad de desarrollar en los estudiantes el sentido de función se debe promover la habilidad de visualizar gráficas de funciones, sin embargo, la mayor parte de los estudiantes cuando trabajan en ambiente LyP no pueden conectar la gráfica de la función con su descripción analítica, ya que se requieren habilidades de nivel superior en el análisis y desarrollo del argumento cognitivo que el procesamiento visual de ideas matemáticas proporciona para identificar esa interconexión (Eisenberg, 1992). El uso del ambiente TD promueve la interconexión entre conceptos, ya que permite generar ejemplos que invitan a la clasificación, reconocimiento de patrones, generalización e indagación de relaciones (Doorman & Drijvers, 2011), pero la efectividad del aprendizaje matemático con tecnología depende en gran medida del tipo de estudiantes.

Diseño y metodología

En el estudio participaron 16 alumnos de bachillerato (17 años en promedio) que se encontraban inscritos en la asignatura de Matemáticas VI (Cálculo Diferencial e Integral) y cursaban el sexto año con orientación a las carreras universitarias de fisicomatemáticas. Los alumnos trabajaron en parejas, formando ocho equipos a los que referiremos como: E1, E2, E3… E8. Las tareas se elaboraron con la idea de guiar a los estudiantes para que construyan una expresión algebraica surgidas de un patrón de covariación emergente a partir de una situación geométrica [función] y obtengan su expresión simbólica, después, con ayuda del ambiente TD, pudieran explorarla mediante su representación gráfica empleando algunas transformaciones. La tarea implementada para este trabajo se divide en dos momentos: (i) trabajo en ambiente estático con el recurso de *Lápiz y Papel*, (ii) trabajo en ambiente dinámico con el recurso *Tecnológico Digital* (GeoGebra). En seguida se expone la primera de tres actividades que se implementaron.

Actividad

La actividad a realizar en un ambiente de *Lápiz y Papel,* fue la siguiente: La Figura 1 muestra el segmento $\overline{AB}$ cuya longitud es 10 unidades. Coloca un punto Q sobre el segmento $\overline{AB}$. Dibuja el cuadrado *AQCD* cuya longitud de sus lados es el segmento $\overline{AQ}$. Enseguida, dibuja el cuadrado *QBEF* cuya longitud de sus lados es el segmento $\overline{QB}$.

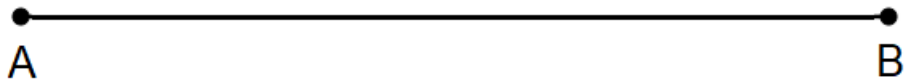


Figura 1. Segmento $\overline{AB}$ empleado en la primera actividad.

a) Con base en las características de la figura obtenida, determina el área del polígono *ABEFCD*. Explica tu procedimiento.

b) Coloca en el segmento un punto R diferente al del problema anterior. Calcula el área del polígono *ABEFCD* y compárala con la obtenida en el inciso anterior. ¿Cuál es mayor o son iguales? Explica tu procedimiento [Hay que notar que no se pide la expresión algebraica sino el cálculo del área].

c) ¿De qué depende el valor del área del polígono *ABEFCD*? Justifica tu respuesta.

d) Suponiendo que un punto P se desplaza a lo largo del segmento $\overline{AB}$ y se forman distintos

polígonos *ABEFCD* con las características mencionadas en el enunciado inicial ¿El área del polígono *ABEFCD* es constante? Explica tu razonamiento

e) Calcula el área para los casos en que $\overline{AB} = 10$ y $\overline{AP} = 2, 4.5, 7.3$

f) ¿Qué expresión permite calcular el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

g) La expresión simbólica propuesta en el inciso anterior. ¿puede representarse gráficamente? En caso afirmativo, ¿qué tipo de gráfica se obtendrá? Explica tu razonamiento

h) Elabora la representación gráfica de la expresión simbólica obtenida en el inciso anterior.

La actividad a realizar con ayuda de *GeoGebra* consistió en lo siguiente:

a) [Instrucciones para construir en *GeoGebra* la figura solicitada].
b) Mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$: observa los valores involucrados en la "Vista gráfica" y contesta ¿qué sucede al mover el punto? ¿cómo se comporta el polígono *ABEFCD*? Explica tu razonamiento.
c) De acuerdo con la configuración del polígono *ABEFCD*, calcula su área para cualquier punto P que se coloque sobre el segmento $\overline{AB}$. Explica tu procedimiento
d) [Obtén con *GeoGebra* las áreas de los polígonos que se calcularon en *Lápiz y Papel* y compara].
e) ¿Cómo son los resultados usando *Lápiz y Papel* (segunda columna) comparados con los resultados dados por el software (tercera columna)? Explica.
f) ¿Qué expresión permite calcular el área del polígono *ABEFCD* para cualquier punto P ubicado en el segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.
g) Elabora la gráfica de la expresión simbólica obtenida en el inciso anterior. ¿Qué sucede con la gráfica al duplicar el valor del segmento $\overline{AB}$. ¿Cuál es su expresión simbólica?

Los datos y su análisis

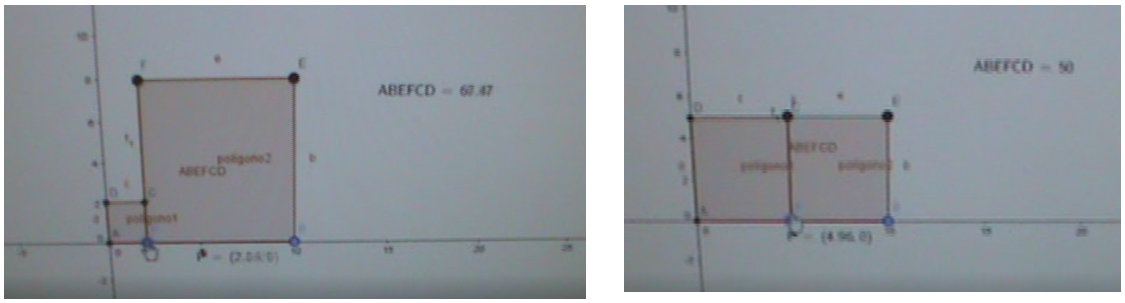
Los datos que se analizaron son las respuestas a las preguntas formuladas, que los estudiantes escribieron en sus hojas de trabajo y que mediante las respuestas registradas en grabaciones de video de las discusiones entre los estudiantes y entre estudiantes e investigador. Estas se transcribieron en archivos electrónicos para poder manipularlas, se codificaron comparando las respuestas entre sí y se agruparon cuando se identificaron rasgos similares, con base en la *Teoría Fundamentada* (Glaser & Strauss, 1967/2008; Birks & Mills, 2014), que recomienda no adherirse a alguna teoría preestablecida sino generar conocimientos y construir una teoría [local] con base en los datos. Mediante este proceso se determinaron las categorías que forman parte de los resultados propuestos al identificar los tipos de razonamiento que llevaron a cabo.

Resultados

Los participantes identificaron el comportamiento del polígono cuando se mueve el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$. Con ayuda del software los estudiantes se dan cuenta que el área del polígono ABEFCD varía de manera no lineal y encuentran que el área mínima se alcanza en el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (véase Figura 2).

A continuación, ofrecemos ejemplos de respuestas que dan cuenta de diferentes tipos de razonamiento de los estudiantes, que llamaremos: *Razonamiento cuantitativo, Razonamiento*

inductivo y Razonamiento representacional. Cuando estos tipos de razonamiento se integran en un solo razonamiento decimos que se alcanza el *razonamiento funcional*.



(a) (b)

Figura 2. Desplazamiento del punto P sobre el segmento $\overline{AB}$, por parte de E2: (a) identifican cómo cambia el área del polígono; (b) el área mínima del polígono se localiza en el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

El *razonamiento cuantitativo* involucra cantidades concretas; se presenta cuando se reconocen rasgos comunes en secuencias de figuras y se determinan valores numéricos mediante el cálculo de área del polígono *ABEFCD*. Este tipo de razonamiento se presentó cuando los estudiantes calcularon los valores del área del polígono *ABEFCD* para varias posiciones del punto P con base en una expresión general previamente construida. Posteriormente verificaron que sus resultados son válidos con ayuda del software. Una de las formas en que el software (*GeoGebra*) influyó [de manera positiva en la reflexión de los alumnos] fue provocando conflictos en los estudiantes que habían obtenido un resultado diferente en la actividad previa de *Lápiz y Papel*; por ejemplo, en los equipos 1 y 4 (véase *Figura 3*) surgió la necesidad de modificar y adecuar la expresión algebraica original y se promovieron los *razonamientos cuantitativo* e *inductivo* de manera simultánea.

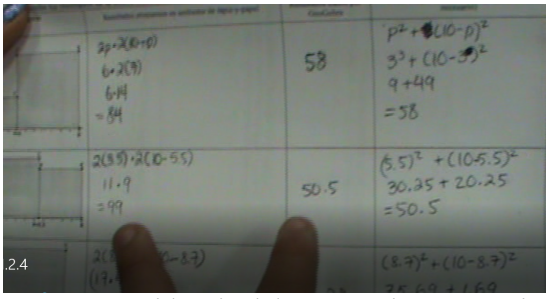
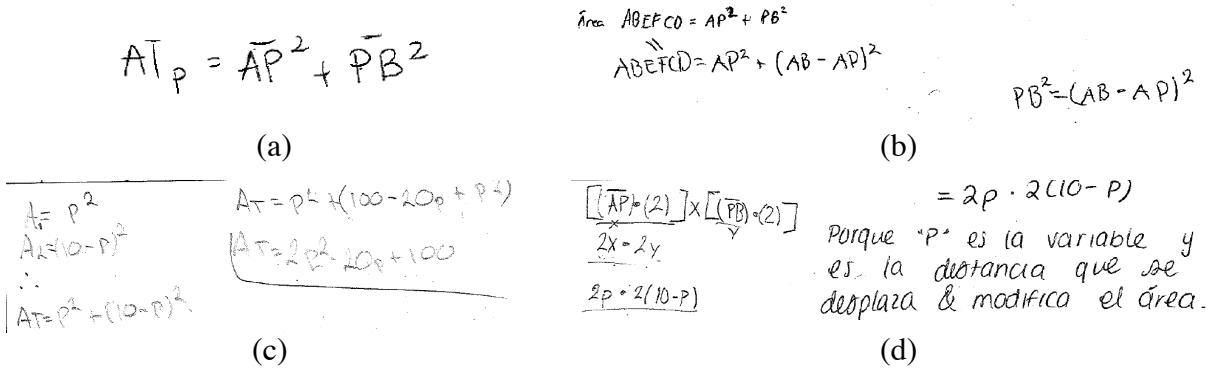


Figura 3. Evidencia del razonamiento cuantitativo. Respuestas del Equipo 4 al comparan los resultados propuestos en LyP respecto a los dados por el ambiente TD.

Diremos que se presenta un *Razonamiento inductivo* cuando a partir de los casos particulares se formula una expresión simbólica general. La mayoría de los estudiantes utilizan notación geométrica (véase *Figura 4.a*), otros combinan esta notación con expresiones verbales (véase *Figura 4.b*) y finalmente, sólo un Equipo utiliza una notación algebraica (véase *Figura 4.c*); también hay quien hace mezclas con los diferentes tipos de notación (véase *Figura 4.d*). El *razonamiento inductivo* se manifiesta con mayor claridad cuando los estudiantes representan simbólicamente el área del polígono *ABEFCD*. Tres equipos expresan el área del polígono utilizando símbolos y notación propia del contexto geométrico, con el cual fue formulado el problema, a saber: $\overline{AP}$, $\overline{AB}$ y p. Otros equipos dan la expresión para $\overline{PB}$ en términos de $\overline{AP}$ y $\overline{AB}$. Dos equipos utilizan notación algebraica; mientras que otro expresa el área en notación funcional. Un estudiante, E3 realiza operaciones en su expresión original, desarrollando el binomio y

simplificando (véase *Figura 4.c*). Finalmente, hay dos equipos que muestran dificultades; el primero, E1 representan el área del polígono como la suma de las áreas de los dos cuadrados, mientras que el segundo, E4 calculan el área del polígono como el producto del doble de cada uno de sus lados (véase *Figura 4.d*).

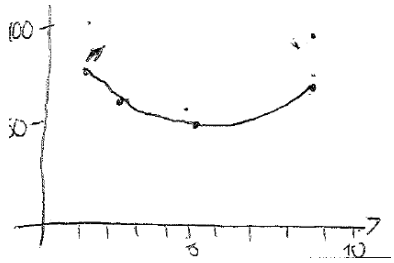


(a) (b)

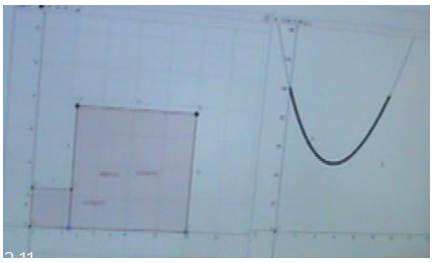
(c) (d)

Figura 4. Evidencias del *razonamiento inductivo* para el cálculo de área del polígono *ABEFCD* en *TD*. (a) Respuesta dada por E2. (b) Respuesta dada por E8; (c) Respuesta dada por E3; (d) Respuesta dada por E4.

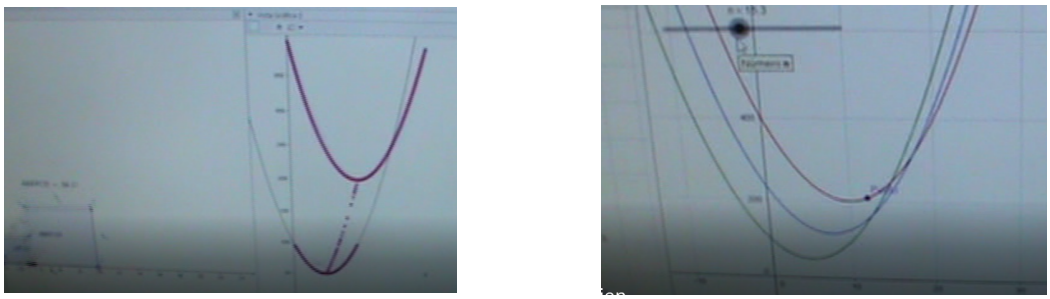
El *razonamiento representacional* se presenta cuando los estudiantes vinculan las diferentes representaciones, en especial, la expresión algebraica con su representación gráfica (véase *Figura 5.a*); de modo les permite ir construyendo la noción de función. Para propiciar este tipo de razonamiento, se pidió a los estudiantes reformular la expresión simbólica del área del polígono de modo de uniformizar la notación para ser introducida en el software. Esto implica, sustituir el segmento $\overline{AP}$ por "x", y hacer las demás sustituciones, como $\overline{AB}$ por 10, etc. Al emplear el software y generar la representación gráfica, el total de los equipos indican que al activar el rastro y desplazar el punto P sobre el segmento $\overline{AB}$, se genera una parábola (véase *Figura 5.b*). Con base en los resultados e inferencias previas, los equipos definen el comportamiento de la gráfica al aumentar al doble la longitud del segmento $\overline{AB}$ y argumentan que dada la configuración geométrica del problema cuando se aumenta el segmento $\overline{AB}$ seguirá manteniéndose una representación gráfica relacionada con una parábola y el valor mínimo de área del polígono *ABEFCD* se encontrará, en todo momento, cuando el punto P se encuentre a la mitad del segmento $\overline{AB}$ (véase *Figura 6.c*).



(a)



(b)



(c) (d)

Figura 5. Evidencia del *razonamiento representacional*. (a) Respuesta dada por E1 en *LyP*; (b) gráfica que proporciona el software *GeoGebra* a E1; (c) Comportamiento de la gráfica al aumentar al doble la longitud del segmento $\overline{AB}$ dada por E6. (d) Modificación del valor asignado al deslizador "*n*" empleado por E5.

En seguida, el Equipo 5 propuso en *notación geométrica* la expresión $y = x^2 + (n - x)^2$ se aprovechó para que todos los equipos exploraran el efecto del parámetro "*n*" en la representación gráfica. Se utilizó el comando "*slider*" para encontrar que la forma parabólica de la gráfica se conserva y que el vértice se desplaza a lo largo de un segmento de recta. En la *Figura 6.d* se observan los resultados de algunas de las exploraciones.

El razonamiento funcional integra todos los razonamientos anteriores y emerge cuando se les pregunta a los participantes cuál es la expresión algebraica para definir el comportamiento de área del polígono *ABEFCD* para cualquier longitud del segmento $\overline{AB}$. Al proponer expresiones algebraicas para el polígono con un parámetro, cuatro equipos proponen representar al parámetro con una variable algebraica: *n*, *z* ó *b*. Cinco equipos expresan el área del polígono como una combinación de variables [algebraica y geométrica]; un equipo mantiene totalmente una notación geométrica $\overline{AP}$ y $\overline{AB}$. Otro equipo expresa el área del polígono de dos maneras diferentes: algebraica y geométrica. Cuando se les entrevista explican que para los diferentes valores de $\overline{AB}$ se mantendrá la forma parabólica que representa la variación del área del polígono cuando cambie "*x"* (véase *Figura 6*). En general, con base en la expresión simbólica que cada equipo obtuvo, explicaron que cuando la longitud del segmento $\overline{AB}$ cambia, la gráfica se comporta con características similares a la original (como parábola).

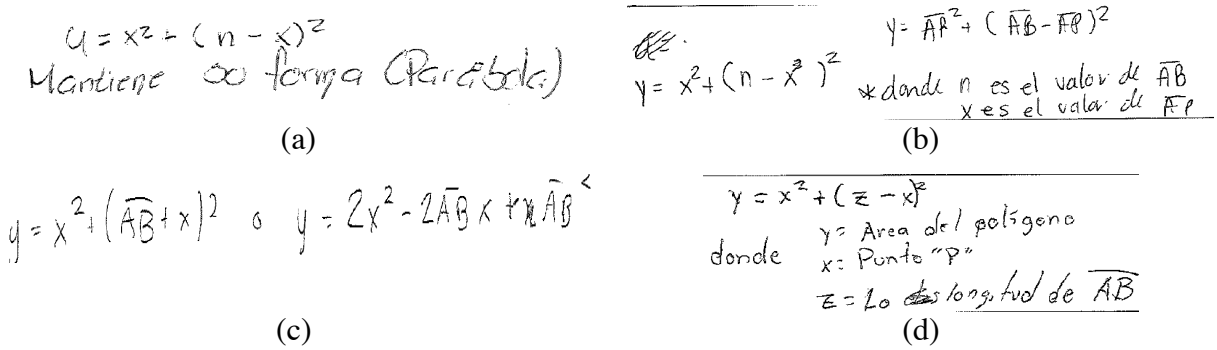


Figura 6. Representación simbólica para cualquier valor del segmento $\overline{AB}$: (a) Respuesta dada por E1. (b) Respuesta dada por E5. (c) Respuesta dada por E6; (d) Respuesta dada por E7.

Conclusiones

La actividad propuesta llevó, a los estudiantes, a reconocer que la parábola expresa la relación entre la magnitud del segmento $\overline{AP}$ y el área del polígono *ABEFCD*; para hacerlo tuvieron que aplicar los diferentes tipos de razonamiento que hemos caracterizado. En primer lugar,

encontrar numéricamente áreas particulares y percibir que la relación no era constante o lineal. En segundo lugar, hallar una expresión algebraica que expresara la relación general de la covariación entre el lado y el área del polígono. Esta expresión se daba con un lenguaje simbólico geométrico o algebraico y geométrico, y fue necesario que lo transformaran en un lenguaje algebraico para representar su gráfica con ayuda del software. En cada uno de esos pasos algunos estudiantes tuvieron más dificultades que otros, pero en conjunto en el avance de la actividad lo comenzaron a lograr. Cabe destacar que el papel del ambiente Tecnológico Digital (*TD*) contribuyó a consolidar las representaciones que los estudiantes propusieron en ambiente de *Lápiz-y-Papel*, permitiéndoles corregirlas y refinarlas. El papel de las tareas fue crucial para movilizar los conocimientos de los estudiantes y para promover su razonamiento, permitiendo su integración con ayuda de la tecnología digital y, como consecuencia generando nuevos conocimientos sobre el concepto de función.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52 (3),* 215-241.

Birks, M., Mills, J. (2015). Grounded Theory. A Practical Guide. Los Angeles: SAGE.

Cañadas, M. C. & Molina, M. (2016). Approach to the conceptual framework and background of functional thinking in early years. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Homenaje a Luis Rico (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cuoco, A. A. & Goldenberg, E. P. (1997). Dynamic Geometry as a Bridge from Euclidean Geometry to Analysis. In J. King, D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research,* MAA Notes 41, (pp. 33–46). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Doorman M., Drijvers P. (2011) Algebra in Function. In: Drijvers P. (eds) *Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown* (pp. 119 – 135). SensePublishers.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 103–131.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes 25, (pp.153-174). Washington DC: Mathematical Association of America.

Ellis A.B. (2011) Algebra in the Middle School: Developing Functional Relationships Through Quantitative Reasoning. In: Cai J., Knuth E. (eds) *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (pp 215-238). Springer, Berlin, Heidelberg.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967/2008). The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research. New Brunswick, USA: Aldine Transactions.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390-419). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The Council.

Weigand, H-G., & Weller, H. (2001). Changes of working styles in a computer algebra environment-The case of functions. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*, 87–111.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Movilización de las Concepciones en la Actividad Matemática para la Enseñanza del Álgebra Temprana

July Marcela **Londoño** Ospina
Universidad de Antioquia
Colombia
jmarcela.londono@udea.edu.co
Sandra Milena **Zapata**
Universidad de Antioquia
Colombia
sandra.zapata@udea.edu.co
Carlos Mario **Jaramillo** López
Universidad de Antioquia
Colombia
carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Resumen

A la luz de la necesidad de aportar a la transformación del currículo de la educación básica primaria, en el contexto rural, frente a la inclusión del álgebra temprana, el objetivo de esta investigación es analizar cómo el maestro moviliza sus concepciones en la actividad matemática para la enseñanza del álgebra en la educación básica primaria, teniendo como fundamentación teórica la perspectiva de la objetivación de Radford y los medios semióticos que permiten promover formas de pensamiento algebraico.

Está fundamentada en un paradigma cualitativo y el método fenomenológico; se realizará por medio de encuentros de formación con maestros, a través de la estrategia microcentro rural; la producción de los datos se hará sobre las tareas de formación, utilizando técnicas como: grupos de discusión, la observación, la entrevista, los diarios y el mural de situaciones. Se espera aportar a las investigaciones sobre cómo preparar profesores de primaria para enseñar álgebra.

Palabras clave: álgebra temprana, actividad matemática, concepciones, currículo, enseñanza, formación de maestros, medios semióticos, microcentro rural, movilización, objetivación.

Planteamiento del problema

En la educación del contexto rural, donde el maestro multigrado es quien se encarga de los grados que corresponden al ciclo de educación básica primaria y al nivel de preescolar, con estudiantes en diferentes situaciones de aprendizaje, contextos familiares y sociales, se requiere pensar en la escuela como un escenario propicio de educación integral, en el cual necesariamente el maestro reflexione sobre su práctica pedagógica, currículo, didáctica, saber, ambientes educativos, metodologías y demás aspectos que en ella le permiten educar en y para el contexto. Según Moretti (2007) "El profesor se constituye profesor al objetivar su necesidad de enseñar y por lo tanto de organizar la enseñanza para favorecer con la praxis pedagógica, la transformación de la realidad escolar" (p. 213).

En este sentido, puede ser pertinente pensar en el colectivo de maestros o redes académicas que se conforman en las instituciones educativas como escenarios para el dialogo, la reflexión y la puesta en escena del devenir del maestro en su práctica pedagógica; tal es el caso de la estrategia microcentro rural, que promueve la formación de maestros, posibilita el compartir y la socialización de experiencias pedagógicas significativas, buscando soluciones a las dificultades que se presentan en el aula, a la vez que propende por el mejoramiento continuo de la calidad educativa. Esta estrategia de microcentro rural se adoptó en la I.E.R Zoila Duque Baena de la vereda Chagualal, Municipio de Abejorral, con la participación de 24 maestros rurales, formados en diferentes áreas específicas y con atención a los modelos de escuela nueva, posprimaria y escuela graduada, maestros convocados por el rector y la docente investigadora quien coordina la estrategia pedagógica; estos espacios de reflexión propician la formación, el diálogo de experiencias compartidas y la movilización de sus pensamientos, conocimientos y hacer educativo.

Así entonces, desde los microcentros rurales, una mirada sobre la práctica no escapa al escenario de la educación matemática, donde se hacen conversatorios y se abren espacios de discusión que permiten explicitar situaciones que a diario convergen en el aula; una reflexión sobre el currículo y los pensamientos matemáticos que en él emergen, como posible espacio de consolidación para una propuesta de unificación de criterios en la enseñanza que se imparte en las diferentes sedes educativas que hacen parte de la institución, ha permitido dilucidar la visión sobre lo que se enseña en la básica primaria, encontrando como un factor relevante la primacía del pensamiento numérico, pues este es considerado en las concepciones de los maestros de primaria, parte elemental del currículo (mallas curriculares, planes de área, planeaciones de los maestros, entre otros) como la base principal donde el estudiante aprende lo que debe saber al finalizar el grado quinto y enfrentarse a la secundaria, por ello probablemente otros pensamientos como el espacial, métrico, aleatorio, variacional y sistemas algebraicos ocupan un espacio secundario.

Algunas razones que enmarcan estas concepciones de los maestros se asocian posiblemente a la importancia que estos dan al pensamiento numérico en la básica primaria, así como a motivos relacionados a la durabilidad de los periodos académicos, el cual, mediado por diferentes actividades extracurriculares se hace corto y obstaculiza el poder ampliar la enseñanza hacia pensamientos como el espacial, que se trata con alguna frecuencia, en comparación con las reducidas ocasiones en que se incorpora el pensamiento variacional o sistemas algebraicos a la enseñanza de las matemáticas; como resultado de lo anterior, una mirada sobre el álgebra, desde los primeros grados de escolaridad, no se tiene en cuenta en el currículo y en la actividad de enseñanza como necesidad e interés de aprendizaje y con ello, según los maestros de

matemáticas de la básica secundaria de la institución, se hacen más evidentes las dificultades de los estudiantes en la posterior formación de este nivel.

En este sentido, investigaciones como las de Wagner & Kieran (1989); Bednarz, Kieran y Lee (1996); Kieran (2007); Filloy, Rojano y Puig (2008) ponen de manifiesto diversas dificultades de los niños en el paso de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. Estas investigaciones han descrito aproximaciones al razonamiento algebraico que, posteriormente, permitieron aportar datos experimentales y justificaciones teóricas para apoyar la inclusión del álgebra desde la escuela primaria. Así, este campo de la investigación puede convertirse entonces en un escenario para la discusión, el análisis y la puesta en común en las actividades con los profesores del microcentro rural, quienes al movilizar sus concepciones sobre el álgebra pueden conocer otras maneras de enseñarla en la escuela, más allá de letras complejas, a través de la emergencia de pensamiento algebraico desde la mirada de otros mundos posibles alrededor de las matemáticas.

En otros escenarios, una posible causa de las concepciones de los maestros que enseñan matemáticas radica en la formación disciplinar como licenciados en otras áreas específicas: ciencias naturales, lenguaje, educación física, ciencias sociales, las cuales dificultan el tener el saber disciplinar para llevar de manera asertiva y pertinente la enseñanza de las matemáticas a la práctica en el aula; es así como los maestros en las reflexiones generadas en el microcentro rural manifiestan la necesidad de tener un conocimiento disciplinar sobre el álgebra y la manera de cómo enseñarla de forma armónica con el pensamiento aritmético, considerando que este ha sido la base fundante de lo que los estudiantes aprenden en matemáticas en los niveles de la educación básica primaria.

En este sentido, la incorporación del pensamiento algebraico al aula requiere de una nueva visión del maestro como agente de cambio e impulsor de un nuevo cambio curricular, como lo afirma Radford (2000) “necesitamos profundizar en nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización” (p. 38), para brindar al estudiante las posibilidades de educación que le serán posiblemente pertinentes en su proceso formativo y que al maestro le permitan ampliar su conocimiento y concepción sobre el pensamiento algébrico, en tanto “la forma de saber de un profesor llevaba consigo unas actitudes hacia la iniciación del trabajo algebraico, hacia sus estudiantes y hacia la introducción de cambio en su enseñanza, y una percepción específica de su eficacia personal” (Agudelo, 2005, p. 402).

En coherencia con estos planteamientos, el inicio del trabajo algebraico escolar en el marco de una enseñanza basada en la comprensión y el significado de la misma no debería centrarse en la presentación de simbolizaciones prefabricadas llamadas expresiones algebraicas, sino en la organización de actividades para el aula que involucren activamente a los estudiantes en procesos matemáticos, donde el pensamiento algebraico pueda surgir y ser comprendido; indiscutiblemente es aquí, donde el maestro, a partir de la reflexión de su actividad de enseñanza matemática, puede permear posibles transformaciones futuras en la forma de enseñar el álgebra. Radford (2003) propone que los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, tabular, incluso gestual; para que esto suceda es necesario que el maestro “provea formas apropiadas de apoyo profesional que le permita producir cambios en las prácticas curriculares” (Blanton y Kaput, 2005).

Es pertinente entonces, comprender cómo el maestro puede llevar el álgebra a la práctica

de la básica primaria desde su conocimiento matemático y la movilización sobre su actividad de enseñanza, para ello se debe dar una mirada amplia sobre su formación, sus concepciones en la actividad matemática y específicamente sobre la manera cómo concibe el álgebra y sus formas de llevarla al aula, en tanto, como lo plantea Agudelo (2005) "los profesores no ven sus concepciones de las matemáticas escolares como el factor determinante crucial de su práctica de enseñanza" (p.403).

Con el panorama de ideas expuesto, en el cual se consideran las reflexiones que se suscitan en la práctica de los maestros de la I.E.R Zoila Duque Baena y las distintas investigaciones, que vislumbran en la incursión del álgebra temprana una necesidad manifiesta para el campo de la educación matemática, se propone para la presente investigación la pregunta: ¿Cómo el maestro moviliza sus concepciones en la actividad matemática para la enseñanza del álgebra en la educación básica primaria? y el objetivo propuesto es analizar cómo el maestro moviliza sus concepciones en la actividad matemática para la enseñanza del álgebra en la educación básica primaria.

Horizonte teórico

Indagar sobre los principales elementos teóricos que sustenten la investigación implica rastrear teorías que posibiliten acercarnos a la manera como el maestro moviliza su comprensión y concepciones sobre el álgebra temprana, para encontrar medios posibles de llevarla al aula en la básica primaria, como un nivel de enseñanza a través de medios de expresión que permitan al estudiante entenderla y aprenderla, para iniciar con ella un proceso ameno y pertinente hacia la básica secundaria. Bajo esta mirada, para Ponte (2006) iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años, exige una profundización de la comprensión del álgebra, de lo que esta envuelve y de donde está presente y, también, de sus relaciones con otros temas matemáticos, para fomentar el establecimiento de conexiones del álgebra con toda la matemática, fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos.

Es así como, después de un rastreo bibliográfico, acompañado de una reflexión sobre el problema de investigación, se vislumbra que la teoría de la objetivación, como una aproximación histórico-cultural, puede enmarcar el camino sobre el abordaje del álgebra temprana en esta investigación para la formación de los maestros. Desde esta teoría el conocimiento es producto de un tipo específico de actividad humana (Radford, 2006), precisamente, de una muy específica: el pensamiento, una actividad reflexiva y sensible mediada por signos, materializada en la corporeidad de las acciones, gestos y artefactos; partiendo de estas premisas hacemos un entretejido dinámico entre lo que se puede ir constituyendo como pensamiento algebraico para el maestro y como este puede hacerlo posible en el aula a través de diferentes medios de expresión. Según Radford (2006), "el pensamiento es una reflexión, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios" (p. 108).

En esta perspectiva, los procesos de objetivación (Radford, 2009) indican un proceso que tiene como objetivo mostrar alguna cosa (un objeto) a alguien; en esta investigación se trata de mirar la manera como el álgebra puede ser concebida por el maestro para posteriormente ser enseñada en el aula. Pero, ¿cuáles son los medios para mostrar el objeto?, ¿cuáles son los medios posibles para enseñar el álgebra? Radford (2003) los llama medios semióticos de objetivación; esto es, objetos, artefactos, términos lingüísticos y en general signos que se utilizan para comunicar o hacer visible una intención y para llevar a cabo una acción. Para Radford (2003), los medios

semióticos de objetivación son todos los medios utilizados por los individuos que se encuentran en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones.

Así, pensar en tareas de formación, concebidas por Ponte et al. (2009), como tareas de aprendizaje profesional para los maestros, implica propender por medios posibles para que las concepciones del maestro sobre el álgebra puedan darse en otros escenarios y a partir de otros medios para su enseñanza, al respecto Radford (2010) reconoce tres formas de pensamiento algebraico o estratos caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos y lenguaje natural. Estas formas de pensamiento algebraico para Radford (2010) son el pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico.

Desde las anteriores consideraciones, se pretende que las tareas de formación con los maestros sean diseñadas a través de medios semióticos de objetivación que respondan a cada uno de los niveles de pensamiento algebraico propuestos por Radford, teniendo en cuenta que una experiencia de formación al maestro puede proporcionar el desarrollo del conocimiento matemático de los alumnos y su conocimiento didáctico (Ponte y Chapman, 2008), permitiría un escenario para movilizar su actividad de enseñanza, desde la reflexión de su ser y que hacer profesional, su práctica y la manera como concibe la matemática y el álgebra.

Para ello, se requiere de la formación continuada del maestro en la educación matemática, independiente de no tener su formación de pregrado en esta área; dicha formación se convierte en factor fundamental para desarrollar buenas prácticas educativas, saber y saber hacer en el estudiante, pues ser maestro multigrado en el modelo de escuela le exige enseñar todas las áreas y formar de manera íntegra en sus respectivos ámbitos, saberes y dimensiones, así lo requiere su formación académica, personal y social. Al respecto, investigaciones como las de Ponte y Chapman (2008) evidencian como en los últimos años se ha desarrollado una mejor comprensión de los procesos por los cuales se aprende a enseñar Matemáticas y se desarrolla la identidad profesional del profesor durante su formación.

Horizonte metodológico

Está investigación está fundamentada en un paradigma cualitativo, el cual, según Denzin, Guba y Lincoln (1994) "posibilita indagar en situaciones naturales, intentando dar sentido o interpretar los fenómenos en los términos del significado que la personas les otorgan" (p.10). En este sentido, realizar una investigación cualitativa se enfoca en la posibilidad de alcanzar transformaciones en las circunstancias de los sujetos y aportar a un mejoramiento en los procesos cotidianos que desarrollan. Así mismo, se adopta el método fenomenológico, en el cual, de acuerdo con Álvarez – Gayou (2003) tiene como propósito principal explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias, permitiendo así, en esta investigación, a través de la formación continuada de maestros, desarrollar e implementar tareas de formación que posibiliten el dialogo, la reflexión y la movilización de concepciones, prácticas y actividad de enseñanza sobre el fenómeno del álgebra temprana, para entender lo que sucede en su inclusión a la básica primaria.

La investigación se desarrollará con seis maestros a través de la estrategia microcentro

rural como escenario de formación continuada para maestros en el contexto rural; desde el trabajo colaborativo, la reflexión en la enseñanza, la producción e intercambio de experiencias, entre otras acciones, que permitan explorar, describir y comprender lo que lo maestros tienen en común de acuerdo con sus experiencias compartidas a priori y posterior a las tareas de formación. Para ello, se proponen diferentes encuentros con temas de discusión sobre la incursión del álgebra temprana a la actividad de enseñanza. El trabajo de campo se realizará con los maestros de la Zona Santa Ana, pertenecientes a cuatro sedes educativas de la I.E.R Zoila Duque Baena, dichos encuentros se llevarán a cabo dos veces al mes, desde febrero y hasta junio del año 2019. Los sitios de encuentro se proponen de manera aleatoria en cada una de las sedes, para facilitar el desplazamiento de los maestros protagonistas y un compartir de experiencias, el reconocimiento de sus contextos educativos y un ambiente propicio para la discusión, el dialogo y el trabajo formativo.

La producción de los datos se hará sobre las experiencias de los participantes en las tareas de formación a través del reconocimiento en los enunciados desde las voces de los maestros protagonistas de la investigación, utilizando técnicas como: grupos de discusión, la observación, la entrevista semiestructurada, los diarios reflexivos y el mural de situaciones. Las voces de los maestros protagonistas según Bajtín (2009), sus enunciados, sentires, expectativas y utopías, permitirán analizar los comportamientos y narrativas personales en la manera como llegaron a constituirse maestros. Así mismo, se pretende llegar a reconocer como ha sido su experiencia en la actividad de enseñanza de las matemáticas en la básica primaria, y a través del modelo de escuela nueva como estrategia multigrado propia del contexto rural; y de manera específica analizar cuáles son las concepciones que subyacen entorno a la incursión del álgebra temprana en el currículo de la básica primaria.

Los grupos de discusión, la entrevista semiestructurada y el mural de situaciones serán técnicas que en el trabajo de campo pretenden identificar las unidades de significado, donde el maestro, a partir de sus concepciones, discusiones, reflexiones y tareas de formación, valida o refuta medios de objetivación posibles para comprender el álgebra temprana, la manera como puede ser incorporada a la actividad de enseñanza y su importancia desde los primeros grados de escolaridad. Estas tareas de formación sobre el álgebra temprana serán llevadas al campo aplicado de la práctica de cada maestro, por ello los diarios reflexivos serán una técnica importante para develar las reflexiones de lo que subyace al aula y lo que sucede en el aprendizaje de los estudiantes en la aplicación de las mismas. Conforme se realice el trabajo colaborativo de formación con los maestros, se llevará a cabo la sistematización de los registros y triangulación de datos que surjan conjuntamente con ayuda de herramientas como el Atlas Ti y en forma digital en la interpretación de experiencias y datos, que posibiliten el análisis de las categorías.

Resultados esperados

Se espera que los resultados encontrados durante el desarrollo de la investigación permitan identificar cómo el maestro moviliza sus concepciones en la actividad matemática para la enseñanza del álgebra en la educación básica primaria, aportando así a la línea de formación de maestros, y a los estudios que reportan investigaciones sobre cómo preparar profesores de primaria para enseñar álgebra temprana.

Así mismo, desde el conocimiento teórico se busca que la investigación dilucide aportes pertinentes a la manera como el maestro moviliza sus concepciones y la actividad matemática

desde la Teoría de la objetivación y los medios semióticos de representación para el pensamiento algebraico en la perspectiva de Radford.

La investigación por tener influencia en los maestros pretende contribuir a nivel local en el desarrollo del Plan Educativo Municipal de Abejorral, desde la línea estratégica de formación de maestros y motivar con ella a la reestructuración de la red de matemáticas municipal y a nivel regional, nacional e internacional participar a través de reportes de investigación en eventos como Foros, Congresos, CIAEM 2019, RELME 2019.

Referencias y bibliografía

Álvarez-Gayou, J. (2003). Cómo hacer investigación cualitativa: Fundamentos y Metodología. México: Paidós.

Agudelo, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos (as) sobre los factores determinantes de su práctica de enseñanza en el álgebra escolar. (Recuperado el 10 de agosto de 2018 de: http://funes.uniandes.edu.co/1505/1/123_Agudelo2005Explicaciones_RevEMA.pdf)

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. México: Publimex.

Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (1996) Approaches to Algebra: perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. Journal for Research in Mathematics Education. 36(5), 412-446.

Denzin, N., Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). *Competing paradigms in qualitative research*. Handbook of qualitative research. Park, CA: SAGE Publications.

Filloy, E.; Rojano, T. & Puig, L. (2008). Educational algebra: A theoretical and empirical approach. Berlin: Springer.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. En F. L. Jr, Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Charlotte NC: New Age Publishing; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Moretti, V. D. (2007). A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. En M. O. Moura, A atividade pedagógica na teoría Histórico-Cultural (p.213). Brasilia: Liber Livro.

Ponte, J. (2006) En "El álgebra en la formación inicial de profesores de los primeros años: Una experiencia de formación". Recuperado en: http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/view/914.

Ponte, J. y Chapman, O. (2008) En "Conocimientos y prácticas de los profesores de matemáticas". p. 256.

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., & Chapman, O. (2009). Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in. (R. Even, & D. Ball , Edits.) The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, 185 - 209. doi:10.1007/978-0-387-09601-8 17.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática, 12*(1), 51-69.

Radford, L. (2003) Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. Mathematical Thinking and Learning, 2003.Vancouver, v. 5, n. 1, p 37 – 70.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A semiotic perspective. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2009). No! He starts walking backwards!‘‘: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-009-0173-9.

Radford, L. (2010). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. Educational Studies in Mathematics, Berlin, v. 42, n. 3, p. 237 - 268.

Wagner, S., & Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. In: Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Reston, VA: NCTM-LEA. p. 220 – 237.

Educación Matemática en la educación superior

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Derivada clássica e derivada fraca: uma análise da compreensão dos conceitos com base na teoria APOS

Janice **Rachelli**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
janicerachelli@gmail.com
Vanilde **Bisognin**
Universidade Franciscana
Brasil
vanildebisognin@gmail.com

Resumo

Neste artigo apresentamos resultados de uma investigação, desenvolvida com estudantes brasileiros de um curso de mestrado em ensino de Matemática, que teve por objetivo analisar como se dá a compreensão do conceito de derivada clássica e derivada fraca. A teoria APOS foi utilizada na pesquisa como referencial teórico e metodológico. Para tanto, seguimos os passos da metodologia de pesquisa proposta pela teoria: Análise teórica, Planejamento e implementação e Coleta e análise de dados e utilizamos o ciclo de ensino ACE como metodologia de ensino no desenvolvimento de atividades em sala de aula. Os dados obtidos, por meio dos registros dos alunos e das observações anotadas no diário de campo, nos permitiram identificar mecanismos mentais de abstração reflexionante e estruturas mentais, previstos na decomposição genética e que foram desenvolvidos pelos estudantes na resolução das atividades. Além do mais, há evidências de que as atividades propostas facilitaram a compreensão dos conceitos.

Palavras-chave: derivada clássica, derivada fraca, teoria APOS, decomposição genética, ciclo de ensino ACE.

Introdução

A derivada tem sua origem associada aos estudos de Newton e Leibniz, no século XVII, sobre a teoria das fluxões, a determinação de tangentes e o estudo de diferenciais. Com a necessidade de formalização dos conceitos do Cálculo, Cauchy, no século XIX, definiu a função derivada como o limite da razão incremental. Desde então, este conceito, tornou-se um instrumento indispensável à descrição científica de fenômenos das ciências físicas, naturais,

tecnológicas e sociais. Muitos desses fenômenos envolvem taxas de variação e podem ser descritos com a utilização do conceito de derivada clássica[1].

A derivada fraca[2], introduzida por Sobolev, no século XX, surgiu da necessidade de desenvolver uma análise matemática para tratar de problemas e teorias associadas a equações diferenciais parciais em que a noção de derivada fosse global e não pontual como a de derivada clássica.

Os conhecimentos sobre os conceitos tratados no Cálculo e nas Equações Diferenciais, em particular, os conceitos de derivada clássica e derivada fraca, são essenciais na formação dos estudantes em diferentes carreiras do ensino superior, como engenharias, física e matemática, tanto em cursos de graduação como em cursos de pós-graduação, pois servem de fundamentos para disciplinas científicas que utilizam a matemática como ferramenta na resolução de problemas. Nisso reside o interesse e a importância em investigar os processos de ensino e aprendizagem desses conceitos.

Com relação ao ensino e aprendizagem da derivada, pesquisas na área da Educação Matemática apontam dificuldades apresentadas, no seu estudo, pelos alunos (Pino-Fan, Godino & Font, 2015; Vega, Carrillo & Soto, 2014) e destacam a utilização de diferentes teorias e metodologias para serem utilizadas em sala de aula como forma de facilitar a aprendizagem (Asiala et al., 2001; Ferrão & Manrique, 2014; Vrancken & Engler, 2014). Uma dessas teorias é a APOS, a qual vem sendo utilizada por pesquisadores como forma de conhecer as dificuldades dos alunos com os conceitos matemáticos do ensino universitário e analisar as construções mentais utilizadas na aprendizagem desses conceitos.

Nesse sentido, o presente estudo, que é parte de uma pesquisa de doutorado concluída (Rachelli, 2017), tem o objetivo de analisar como se dá a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Para isso, levamos em conta a evolução histórica do conceito de derivada e utilizamos a decomposição genética para a elaboração de situações de ensino que possibilitam analisar se os estudantes constroem mecanismos de abstração reflexionante e estruturas mentais que favoreçam a compreensão dos conceitos.

Quadro teórico

A base teórica na qual fundamentamos este estudo é a teoria APOS. Tendo como base as ideias de Piaget (1995) sobre a abstração reflexionante, a teoria APOS busca compreender como ocorre a construção de um novo conceito matemático pelo aluno e como ele utiliza este conhecimento para a construção de novos conceitos.

Duas ideias são chaves neste modelo teórico: a de construções mentais e de mecanismos mentais no qual os indivíduos realizam estas construções. Para Dubinsky (1991), a partir de situações matemáticas problemáticas os alunos são encorajados à construção dos objetos matemáticos, cujas soluções envolvem ações, processos, objetos e relações entre esquemas que se constituem para resolver determinada situação. Assim, os esquemas mentais dos alunos evoluem, à medida que novos esquemas são formados e nos quais o conhecimento matemático cresce.

A interação entre as estruturas e os mecanismos para a construção do conhecimento

[1] Entendemos a derivada clássica como a definida pelo limite da razão incremental.
[2] O conceito de derivada fraca pode ser encontrado em Medeiros & Miranda (1988).

matemático é descrita da seguinte forma: a compreensão de um conceito matemático começa com a manipulação de objetos mentais ou físicos para formar ações; ações são então interiorizadas para formar processos, os quais são, por sua vez, encapsulados para formar objetos. Os objetos podem ser desencapsulados e voltar a serem processos dos quais eles foram formados. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas (Asiala et al., 1996).

Na teoria APOS, a análise do conceito matemático específico leva à chamada decomposição genética desse conceito, que descreve as estruturas e os mecanismos mentais que um estudante precisa construir para aprender um conceito matemático específico. Geralmente, começa como uma hipótese, tendo como base as experiências dos pesquisadores no ensino e aprendizagem do conceito, o conhecimento sobre a teoria APOS, os conhecimentos matemáticos, o desenvolvimento histórico do conceito e as pesquisas publicadas anteriormente. A decomposição genética busca uma descrição detalhada de como o sujeito poderá fazer a construção do conhecimento.

Para cada conceito matemático, são elaboradas sequências de ensino que se organizam no que se denomina ciclo de ensino ACE composto por três componentes: (A) Atividades, (C) Discussão em classe e (E) Exercícios. De acordo com Arnon et al. (2014), para as atividades que constituem o primeiro passo do ciclo, os estudantes trabalham cooperativamente em grupos, em tarefas projetadas para fazerem as construções mentais sugeridas pela decomposição genética. O foco dessas tarefas é promover a abstração reflexionante. Nas discussões em sala de aula, a segunda parte do ciclo, os alunos desenvolvem, discutem e refletem sobre as atividades designadas pelo professor. Como o professor guia as discussões, ele pode fornecer definições, explicações e apresentar uma visão geral do que está sendo discutido. Os exercícios, a terceira parte do ciclo, consistem em problemas considerados padrão, que servem para reforçar as atividades de sala de aula. Os exercícios ajudam no desenvolvimento contínuo das construções mentais sugeridas pela decomposição genética. Eles também orientam os alunos a aplicar o que aprenderam e a considerar ideias matemáticas relacionadas.

Metodologia

No desenvolvimento deste estudo seguimos os pressupostos de uma pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e empregamos as três componentes da metodologia de pesquisa proposta pela teoria APOS (Arnon et al., 2014): Análise teórica, Planejamento e implementação e Coleta e análise dos dados.

Na Análise teórica, elaboramos a decomposição genética dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca tendo como base a compreensão matemática e as construções históricas, as pesquisas de Asiala et al. (2001), García, Gavilán e Llinares (2012) e Vega, Carrillo e Soto (2014) e livros didáticos de Cálculo e Equações Diferenciais, a qual descrevemos sucintamente no que segue. Mais detalhes podem ser encontrados em Rachelli (2017).

Para a derivada clássica, é desejável que o aluno tenha como pré-requisitos conhecimentos algébricos e geométricos sobre funções. A construção do esquema da derivada se inicia a partir do esquema de função em que o estudante deve desenvolver ações de substituir os valores da função em pontos específicos e calcular a variação da função e a razão das variações. Essas ações devem ser interiorizadas em um processo, ao considerar o limite da razão incremental, para obter o conceito de derivada. Esse processo deve ser coordenado para obter a derivada por meio do limite e encontrar a derivada de funções utilizando regras de derivação. Com a encapsulação

obtém-se a definição da derivada da função f no ponto a e a função derivada $f'(x)$. O aluno deverá coordenar as diversas interpretações de $f'(a)$ e utilizar o conceito de derivada em outros contextos como, por exemplo, nas equações diferenciais. Assim, a interiorização das ações necessárias para entender o processo da derivada, a coordenação das diversas interpretações, a encapsulação do processo da derivada, a coordenação e a generalização do esquema da função com sua derivada, a reversibilidade do processo, em que, conhecendo as características do objeto derivada, é possível obter as propriedades da função, são mecanismos mentais de abstração reflexionante indispensáveis para construir o esquema da derivada.

Para a derivada fraca, o aluno deverá ter conhecimentos sobre a derivada e a integral de uma função, o cálculo da integração por partes e a definição de função com suporte compacto. A construção do esquema da derivada fraca envolve ações de substituir a função e os intervalos na equação integral, a coordenação da fórmula de integração por partes com o teorema fundamental do Cálculo e com a definição de funções com suporte compacto e a encapsulação deste processo de obter a derivada fraca w a partir da equação integral $\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b w(x)\varphi(x)dx$.

Na etapa de Planejamento e implementação, elaboramos situações de ensino compostas por doze atividades que tratam das construções históricas, do conceito e interpretações da derivada, da solução de equações diferenciais e do conceito de derivada fraca.

Apresentamos, a seguir, duas das atividades propostas e uma descrição das construções mentais a serem efetivadas pelos estudantes quando da realização destas atividades.

Atividade 1. Uma corda elástica de comprimento $L = 20$ é puxada e depois colocada em movimento a partir da posição inicial u_0. Suponha que

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 10 \\ -\frac{1}{2}(x-20), & 10 < x \le 20 \end{cases}.$$

a) A função u_0 é derivável no sentido clássico? Por quê?
b) A função u_0 é derivável no sentido fraco? Qual é a sua derivada fraca?
c) O que você pode concluir quanto aos resultados obtidos em (a) e (b)?

Na Atividade 1(a), o aluno deverá utilizar o esquema da derivada clássica para verificar se a função u_0 é derivável. Para tanto poderá desenvolver ações e processos para por meio do limite da razão incremental mostrar que a função u_0 não é diferenciável em $x = 10$ ou, por meio da interpretação geométrica da derivada observar que o gráfico da função u_0 apresenta um ponto anguloso em $x = 10$. Em (b) deverá utilizar a equação integral e por meio de ações e processos coordenar a fórmula de integração por partes, o teorema fundamental do Cálculo e o conceito de funções com suporte compacto, para encapsular o objeto matemático, derivada fraca da função u_0. Após, em (c), o aluno deverá coordenar os esquemas da derivada clássica e derivada fraca.

Atividade 2. Em cada uma das afirmações abaixo, verifique se são verdadeiras ou falsas. Se a afirmação for verdadeira, faça a prova, se for falsa, dê um contraexemplo.

a) Toda função real de variável real que é contínua em um ponto é também derivável neste ponto.
b) Se uma função é fracamente derivável então ela é derivável no sentido clássico.
c) A função $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$ é derivável no sentido clássico no intervalo $(-1,1)$.
d) A função $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$ é derivável no sentido fraca no intervalo $(-1,1)$.

A Atividade 2 tem como objetivo analisar a compreensão do aluno com relação aos conceitos de continuidade e diferenciabilidade e da existência da derivada clássica e da derivada fraca. Assim como na Atividade 1, é necessário que o aluno utilize construções mentais que estão associadas aos esquemas de derivada clássica e derivada fraca.

Essas atividades foram desenvolvidas junto a cinco estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática de uma universidade brasileira matriculados em uma disciplina que trata dos fundamentos do Cálculo e contempla tópicos de derivada, integral e equações diferenciais.

A coleta de dados se deu por meio do desenvolvimento das situações de ensino, em sala de aula, com a responsabilidade de uma das professoras pesquisadoras, em que utilizamos o ciclo de ensino ACE como metodologia de ensino. Em cada uma das aulas desenvolvidas, as atividades foram inicialmente discutidas em pequenos grupos e, na medida em que as dúvidas foram surgindo, a professora forneceu as definições e explicações, apresentando uma visão geral dos conceitos que estavam sendo discutidos.

Análise dos dados e resultados

A análise dos dados foi realizada a partir dos registros dos alunos nas atividades propostas e das anotações no diário de campo, em que procuramos verificar se os alunos fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética e avaliar a compreensão do conceito de derivada clássica e fraca pelos estudantes.

A fim de exemplificar como se deu a compreensão do conceito de derivada clássica e de derivada fraca, apresentamos a trajetória individual do aluno, que chamaremos de Aluno E5, em que descrevemos a forma como o estudante resolveu cada uma das atividades e as construções mentais desenvolvidas por ele.

Na Atividade 1(a), o Aluno E5 representou corretamente o gráfico da função u_0 e respondeu que a função não é derivável no sentido clássico pois "Possui um bico no ponto $x = 10$" (Figura 1). Isto evidencia sua compreensão sobre a interpretação geométrica da derivada em um ponto.

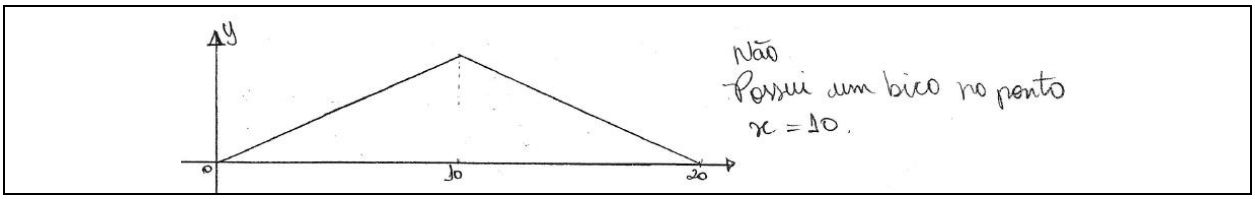


Figura 1. Resolução da Atividade 1(a) feita pelo Aluno E5.

Para resolver a Atividade 1(b), o aluno E5 escreveu que é preciso: "Achar w tal que $\int_0^{20} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{20} w(x)\varphi(x)dx$", mostrando assim, ter clareza sobre o conceito da derivada fraca de uma função. A obtenção da derivada fraca está ilustrada na Figura 2.

Observamos que para a obtenção de w, o aluno desenvolveu as seguintes construções mentais: ações de substituir a função u_0 na equação integral que define a derivada fraca considerando os intervalos [0,10] e [10,20]; interiorização dessas ações por meio do processo de integração por partes; coordenação da fórmula de integração por partes e do teorema fundamental do Cálculo, considerando φ de suporte compacto no intervalo [0,20]; encapsulação deste processo para obter o objeto matemático $w(x)$ que é a derivada fraca da função $f(x)$.

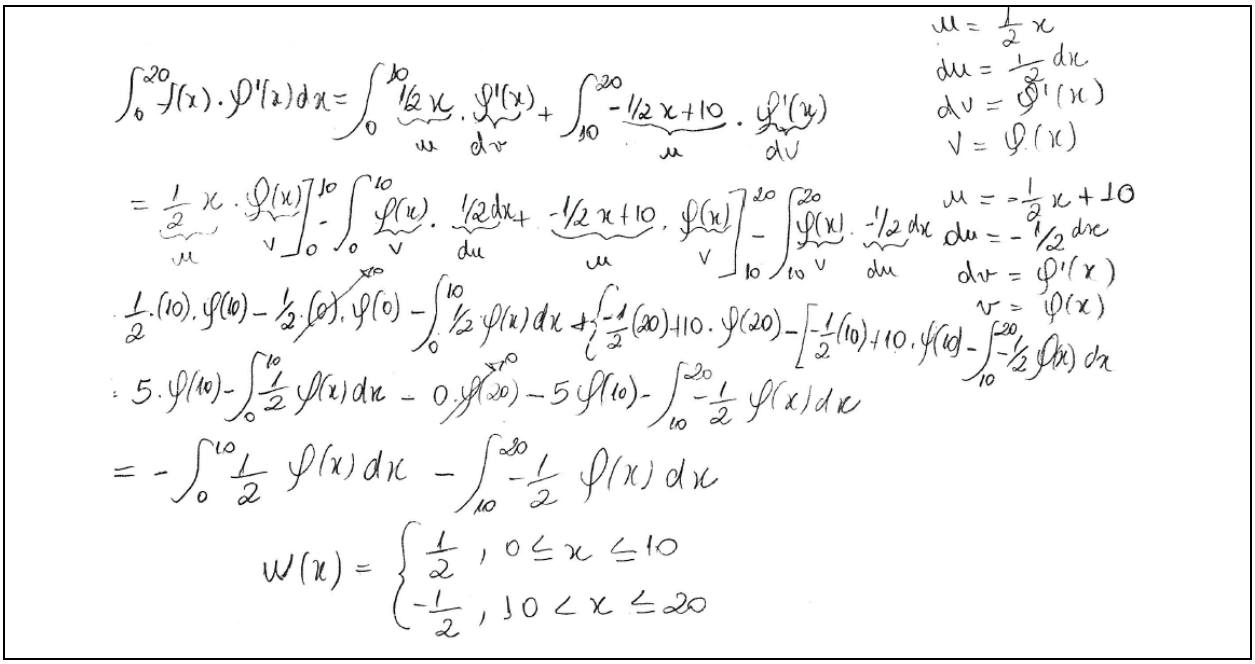


Figura 2. Resolução da Atividade 1(b) feita pelo Aluno E5.

Ao concluir sobre os resultados obtidos em (a) e (b) o Aluno E5 escreveu que a função u_0 não é diferenciável no sentido clássico no ponto $x = 10$, mas tem derivada fraca no intervalo $[0,20]$. Sua resposta nos fornece evidências de que o estudante foi capaz de coordenar os esquemas da derivada clássica e da derivada fraca, tornando clara a sua compreensão de que a derivada clássica é definida pontualmente e a derivada fraca é definida em um intervalo.

Na resolução da Atividade 2(a), após ilustrar com um contraexemplo o gráfico uma função que é contínua, porém não diferenciável, o Aluno E5, escreveu que a afirmativa é falsa e usou a justificativa: "Para a função ser diferenciável tem que existir a derivada no ponto, e neste exemplo, a função não possui a inclinação da reta tangente no ponto $x = 1$, ou seja, ela não é diferenciável no ponto $x = 1$. Porém esta função é contínua". De forma análoga, na Atividade 2(b), o Aluno E5 respondeu que a afirmativa é falsa e justificou citando como contraexemplo a função u_0 da Atividade 1, justificando que a função possui derivada fraca, mas não é derivável em $x = 10$. Isto demonstra que o aluno tem clareza do conceito de diferenciabilidade de uma função.

Para responder a Atividade 2(c), o Aluno E5 utilizou regras de derivação para encontrar a derivada de f para $x > 0$ e para $x < 0$ e a definição da derivada em um ponto para encontrar a derivada $f'(0)$, conforme pode ser observado na Figura 3.

Observamos que a decomposição genética para a derivada, prevista na Análise teórica, foi desenvolvida pelo estudante: ações de substituir os valores da função em 0 e $0 + h$, calcular a variação da função e a razão das variações $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, para interiorizar essas ações e por meio de um processo, calcular o limite e então, encapsular esse processo para obter a derivada da função em $x = 0$. Além do mais, utilizou regras de derivação para a determinação da derivada nos intervalos $(-1,0)$ e $(0,1)$.

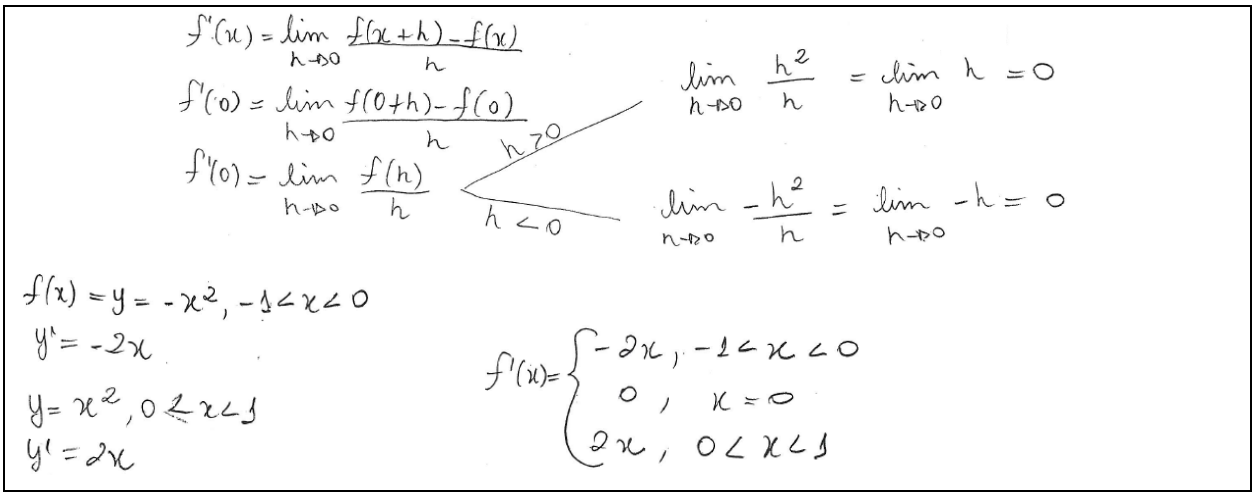


Figura 3. Resolução da Atividade 2(c) pelo Aluno E5.

Ao resolver a Atividade 2(d), o aluno E5 utilizou as construções mentais previstas na decomposição genética: substituiu a função f na equação integral que define a derivada fraca considerando os intervalos $[-1,0]$ e $[0,1]$; utilizou a fórmula de integração por partes para resolver as integrais; substituiu corretamente os limites de integração o que está de acordo com o teorema fundamental do Cálculo; usou o fato da função auxiliar φ ser infinitamente contínua e ter suporte compacto no intervalo $[-1,1]$, considerando $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ e, a partir da equação integral, obteve a derivada fraca

$w = \begin{cases} -2x, & -1 < x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ da função f.

Estas construções também foram observadas nos registros dos demais estudantes, porém, em algumas resoluções, não ocorreu coordenação dos esquemas de integração por partes com o teorema fundamental do Cálculo.

Considerações finais

Apresentamos neste artigo, resultados que se referem à compreensão do conceito de derivada clássica e derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Os dados que advieram dos registros dos alunos nas atividades propostas e das observações em sala de aula nos permitem afirmar que, mediante a decomposição genética dos conceitos, tendo como base a teoria APOS, foi possível a construção de mecanismos e estruturas mentais pelos alunos que possibilitaram a compreensão dos conceitos. Esse resultado é, para nós, surpreendente, pois acreditávamos que, pelo fato de o conceito de derivada fraca envolver conceitos e teorias muito complexas, e os alunos estarem estudando pela primeira vez esse conceito, teriam mais dificuldades, o que não se confirmou. Acreditamos que as atividades propostas, que iniciaram com questões sobre soluções de equações diferenciais e modelos matemáticos para o problema de vibrações de uma corda, em que foram discutidas condições sobre as funções e a necessidade de novas teorias para a resolução desse problema, possibilitaram o desenvolvimento de mecanismos de assimilação e de acomodação, que propiciaram aos estudantes a compreensão do conceito de derivada fraca de uma forma bastante satisfatória. Além do mais, todos os exercícios que precederam ou que foram resolvidos juntamente com os exercícios que envolveram a determinação da derivada fraca, também

reforçaram a construção do esquema da derivada clássica. Salientamos que a metodologia de ensino utilizada, tendo por base o ciclo de ensino ACE, com o desenvolvimento de atividades, discussões em classe e exercícios, e que as atividades elaboradas a partir da decomposição genética e apresentadas aos alunos, favoreceram a compreensão.

Referências e Bibliografia

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. New York, NY: Springer.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. E. (2001). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1-37.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, n. 2, p. 1-32.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: Tall, D. (Org.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ferrão, N. S. & Manrique, A. L. (2014). O uso de mapas conceituais como elemento sinalizador da aprendizagem significativa em Cálculo. *IENCI*, Porto Alegre (RS), v. 19, n. 1.

García, M., Gavilán, J. M. & Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del professor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del professor. *Enseñanza de las Ciencias*, 30.3, 219-236.

Medeiros, L. A. & Miranda, M. M. (1988). *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: Caderno Didático UFRJ.

Piaget, J. (1995). *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Pino-Fan, L. R., Godino J. D. & Font, V. (2015). Uma propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros professores sobre derivadas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 60-89.

Rachelli J. (2017). *Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APOS*. 2017. 294 f. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria.

Vega, M. A., Carrillo, J. & Soto, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p.403-429.

Vrancken, S. & Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 449-468.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may de 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-american Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Entorno virtual de aprendizaje: *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal

Enrique Vílchez Quesada
Escuela de Informática, Universidad Nacional
Costa Rica
enrique.vilchez.quesada@una.ac.cr

Resumen

En el contexto del curso de *Proyecto de Intervención* de la *Maestría en Entornos Virtuales de Aprendizaje* impartida por la Universidad Técnica Nacional de Costa Rica (UTN), se desarrolló un proceso de planificación y diseño de un entorno virtual de aprendizaje (*EVA*) para una materia perteneciente al plan de estudios de la carrera *Ingeniería en Sistemas de Información* de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA). La propuesta de curso se fundamenta en un enfoque bimodal con la innovación de introducir un *EVA* como resultado de un proyecto visionario que a mediano plazo circunscribe a la cátedra *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* en el marco de una propuesta pedagógica disruptiva relacionada con los beneficios que ofrece el aprendizaje virtual. Este trabajo comparte su desarrollo, la visión de futuro que integra y esencialmente el entorno virtual creado como un insumo novedoso y original para otros escenarios con características similares.

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, bimodal, matemática, discreta.

Introducción

El presente trabajo describe el proceso de diseño y desarrollo de un entorno virtual de aprendizaje para la materia *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* que forma parte del plan de estudios de la carrera *Ingeniería en Sistemas de Información* de la Universidad Nacional de Costa Rica. Este entorno responde a una serie de necesidades pedagógicas sentidas en el contexto de la cátedra *EIF-203* reconociendo el impacto positivo que puede tener el uso de las tecnologías digitales dentro del marco de una planificación didáctica seria y en concordancia con el modelo pedagógico integrado de manera institucional en la UNA.

La propuesta posee una fundamentación que abarca el planteamiento de un problema y su justificación, una prospectiva, una respuesta pedagógica y aspectos operativos inmersos dentro de un proyecto educativo que traslada a la cátedra del curso *EIF-203* a un escenario donde se abandona la presencialidad como el único dominio de enseñanza y aprendizaje para dar paso a la virtualidad en una combinación enriquecedora de ambos espacios formativos.

La Universidad Nacional de Costa Rica desde su fundación ha sido tradicionalmente una institución universitaria de naturaleza presencial, por lo que el planteamiento de este proyecto

constituye una innovación pedagógica disruptiva. Esta innovación encontró su desarrollo bajo una perspectiva pedagógica que reconoce el aprendizaje como un resultado social y activo (Becerra y otros, s.a.), de construcción de conceptos y resolución de problemas, aproximando los contenidos de clase a situaciones reales simuladas por el uso de las tecnologías con fines educativos. Lo anterior, resignifica el ejercicio docente hacia experiencias de aprendizaje donde los educandos ocupen una posición central en la dinámica de una red de conexiones dentro de un ecosistema digital como nicho subyacente de la eclosión de un nuevo conocimiento y sus aplicaciones.

El entono virtual de aprendizaje creado para el curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal, se ha implementado en el aula virtual institucional de la UNA, ofreciendo refrescantes alternativas de aprendizaje en las clases diseñadas. No se presentan resultados de campo pues aún la experiencia no se ha extendido a ningún grupo experimental.

El problema

En el contexto de la cátedra del curso *EIF-203* surge un problema pragmático muy claro; continuar con la materia *Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal o volverla a impartir con sus características netamente presenciales.

El problema trasluce elementos de mayor complejidad, creemos y demostramos en el año 2013 (Vílchez y González, 2014) que el curso *EIF-203* fortalece las competencias de los alumnos en cuanto al uso de recursos didácticos innovadores, además de mejorar sus condicionamientos cognitivos generando oportunidades para favorecer el autoaprendizaje y el coaprendizaje. Sin embargo, ¿por qué en años posteriores los resultados no han sido, en algunos casos, los esperados? Tenemos algunas hipótesis y este es el problema que debemos resolver. Consideramos que el curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* ofrece verdaderamente los espacios de enseñanza y aprendizaje descritos, pero para ello, el perfil docente, la propuesta pedagógica, los insumos tecnológicos ofrecidos por la institución a profesores y estudiantes, la normativa que rige la implementación de estas modalidades, la resistencia al cambio y la herencia cultural de un sistema educativo predominantemente presencial y positivista, requieren de un análisis de construcción de futuro que albergue los retos y alternativas de solución enmarcados no solo en la coordinación de la materia, sino también, en la unidad académica en su conjunto y en la universidad en general (Prieto, 2008).

Justificación

Construir futuro en la Escuela de Informática de la Universidad Nacional de Costa Rica, no significa ir en concordancia ciega con las nuevas o relativamente nuevas tendencias hacia el uso de las tecnologías digitales, significa pensar y repensar la manera en cómo ellas pueden impactar el futuro de la educación para las ingenierías (Ulate y Vílchez, 2010).

Buscamos soluciones en el mediano y largo plazo que tengan una repercusión en las prácticas educativas de los docentes y por tanto en las prácticas de aprendizaje de los estudiantes. Con frecuencia llamamos a nuestros actuales educandos “nativos digitales”, sin embargo, qué significa realmente ser un nativo digital, ¿bastará con haber crecido presionando botones y conviviendo con pantallas?, pareciera que esta es la convicción irracional de muchos. Ciertamente en esta época confusa nos encontramos con “cafres digitales” e “ilustrados digitales”, ¿qué estamos formando?, somos conscientes de lo que queremos y la dirección contextual que deben llevar las tecnologías hacia la estructuración de una sociedad conformada por personas competitivas, críticas y altruistas (Prieto y Van de Pol, 2006). Creemos que los

pasos de transformación de esta utopía a un escenario real, inicia con acciones concretas, aventureras, pero no descabelladas, ambiciosas, pero no descontextualizadas, en el marco de lo idealizable, pero no de lo desproporcionado (Vílchez, 2014). A esto precisamente, aspira responder el proyecto del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal, hay razones muy puntuales ya mencionadas en el apartado anterior, para justificar la continuidad de este trabajo dada su importancia y aportes institucionales.

En el año 2018 ante las dificultades presentadas, las limitaciones detectadas y la necesidad de no desperdiciar los recursos económicos y humanos de la UNA, se hizo fundamental hacer un alto en el camino, no para negar la responsabilidad ya adquirida, sino para establecer un replanteamiento de esta cátedra, en cuanto a la estructura curricular del curso, lo que podemos actualmente lograr con las condiciones institucionales, la necesidad de crear un perfil docente y a partir de él la capacitación que posibilite a los profesores de la unidad académica dar un salto seguro y firme que consolide el curso con sus características virtuales. Nos encontramos ante un océano de oportunidades que con el tiempo creemos convergerán evolutivamente a una oferta de servicios, en temas relacionados con la calidad en la docencia semipresencial en Costa Rica.

Propuesta pedagógica

En la cátedra del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal, el uso, construcción y aplicaciones en el ámbito educativo de diversos recursos didácticos digitales, se fundamenta en el reconocimiento del aprendizaje como un producto social (Vygotsky, citado por Espiro, 2008a) y como un proceso activo (Ausubel y Bruner, citados por Espiro, 2008a) a partir del cual los alumnos construyen o reconstruyen ideas, conceptos, soluciones, estrategias, conjeturas y aplicaciones de la teoría a situaciones reales o hipotéticas en los diversos contextos que caracterizan al sistema productivo nacional en el campo de las tecnologías de la información.

En este curso se fomenta la construcción social del conocimiento mediante el trabajo en equipo, cooperativo y colaborativo. Se espera que los alumnos se apropien de habilidades y destrezas de investigación, que les permita tener una mayor independencia sobre sus propias estructuras de pensamiento, aprendizaje de estrategias de aprendizaje (aprender a aprender) y el desarrollo de un pensamiento crítico a través del ejercicio dialógico, el respeto por los saberes individuales y colectivos, y la creación conjunta de nuevas ideas, tal y como nos lo plantea la educación liberadora propuesta por Paulo Freire (Espiro, 2008b).

El andamiaje citado por Bruner y el aprendizaje significativo desarrollado por Ausubel, en muchas de las estrategias didácticas que caracterizan a este curso, cobran una posición central tanto en el ejercicio de la tutoría virtual y presencial, como en las actitudes que se espera desarrollar en los educandos. El docente asumirá el reto de elaborar y seleccionar materiales de apoyo a través de su experiencia personal y el trabajo colaborativo con los otros docentes que forman parte de esta cátedra (lecturas, presentaciones, *links*, recursos de la Web 2.0, problemas, entre otros) que inciten el descubrimiento de técnicas y métodos donde el alumno encuentre los espacios necesarios para una construcción y aplicación personal y colectiva de los conocimientos relacionados con el campo de la matemática discreta.

Esta propuesta pedagógica toma en consideración también, la importancia del aprendizaje receptivo y el condicionamiento operante propuesto por Skinner (Espiro, 2008a), en el ejercicio de la tutoría virtual estimulando la práctica de una conducta social adecuada y los fundamentos de una comunicación asertiva, respetuosa y tolerante, utilizando las distintas herramientas de comunicación tanto sincrónicas como asincrónicas del aula virtual. Además, se reconoce el valor

del aprendizaje memorístico como puente para conciliar los conocimientos teóricos previos, con estrategias de enseñanza no mecanicistas.

Finalmente, se reconoce en el conectivismo la teoría de aprendizaje (Siemens, 2004) que permite comprender las interacciones sujeto-sujeto, sujeto-red, sujeto-artefacto, artefacto-artefacto, sujeto-comunidad, comunidad-comunidad implicadas en las nuevas formas de interacción e integración cognitiva que emergen como un producto de la expansión de los ecosistemas digitales (en mucho favorecida por la Internet) caracterizados por nuevas estructuras de comunicación, interrelación y operacionalización de procesos en la adquisición de conocimientos y génesis de nuevo contenido. Los entornos de aprendizaje actuales fundamentados en una dinámica sociocultural globalizada no pueden ser explicados intentando llenar los vacíos que las teorías clásicas del aprendizaje han dejado, como es el caso del conductismo, el cognitivismo y el constructivismo. En la teoría del conectivismo (Siemens, 2004) se reconoce en este proyecto la esencia de comprender cómo se puede dar un paso evolutivo de una sociedad de la información a una sociedad del conocimiento, a través de un aprendizaje en red.

Objetivos

El objetivo general que se ha dispuesto para la implementación y redireccionamiento del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal, es el siguiente: desarrollar un proceso formativo en los educandos hacia el uso y aplicación de distintos tipos de recursos didácticos y software como apoyo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta, a través de una construcción individual y social del conocimiento que promueva una conciencia crítica y constructiva, de las aplicaciones y limitaciones que tienen las tecnologías digitales y el conocimiento matemático discreto para resolver problemas en el ámbito de la informática.

Por otra parte, los objetivos específicos son:

- Utilizar distintos tipos de tecnologías digitales (*Second Life*, plataforma *LMS* y *Augment*) y software especializado (*Wolfram Mathematica* y paquete *VilCretas*) como apoyo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta.
- Construir soluciones a problemas no triviales de matemática finita y sus aplicaciones en ingeniería en sistemas de información y ciencias de la computación a través del uso de distintas tecnologías digitales y software especializado.
- Identificar ventajas y desventajas del uso de tecnologías digitales y software especializado para resolver problemas contextualizados en el campo de la ingeniería en sistemas de información y las ciencias de la computación.

Entorno virtual de aprendizaje creado para el curso *EIF-203*

El *EVA* construido para la materia *EIF- 203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal se ha basado en un modelo propuesto por el *Instituto Latinoamericano de Desarrollo Profesional Docente: Aprende Virtual* bajo la tutoría de la profesora *Mariela Delauro* (Delauro, 2011). Las etapas que lo caracterizan están sustentadas en:

- Propuesta del proyecto: el problema, la prospectiva, manifiesto pedagógico, objetivos, resultados esperados, aspectos operativos, evaluación y seguimiento, cronograma y presupuesto.
- Desarrollo del proyecto: selección y justificación de las herramientas tecnológicas a utilizar, planificación de las clases a implementar, redacción de las clases y capturas de pantalla del *EVA*.

- Documentos elaborados: guía didáctica de la materia y módulos didácticos.

A manera de ejemplo, se muestra una de las clases elaboradas como parte de este proceso de sistematización.

Clase 1: Los grafos … más allá de un conjunto de puntos y aristas

Introducción

La presente clase está destinada a **estudiar** los **conceptos principales** relacionados con la teoría de grafos **¡Los grafos son más que simples puntos y aristas en el plano!** Si bien es cierto, su representación se fundamenta en este tipo de diagramas **bidimensionales** o **tridimensionales**, las aplicaciones de los grafos reflejan su **diversidad** geométrica derivando en **propiedades matemáticas** interesantes de estudiar.

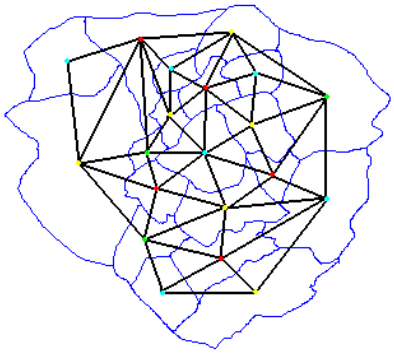


Figura 1. Mapa con un grafo.

Por ejemplo, la imagen anterior, muestra un grafo sobre un **mapa de regiones** indicando cómo se relacionan entre sí, al asumir los **lados** del grafo como una **carrera** que las une. ¿Será posible pasar una única vez por cada **ciudad**, pasar una única vez por cada **carretera**, conocer **cuántas** trayectorias distintas unen un par de regiones específicas o si pensáramos en añadir a las aristas la distancia entre las ciudades, habrá trayectorias que nos **beneficien más** como viajeros para recorrer menos kilómetros? Preguntas como éstas son las que aborda la teoría de grafos. Les comparto el siguiente **video introductorio** donde de una manera muy amena, el matemático español *Eduardo Sáenz de Cabezón* de la Universidad de La Rioja, nos muestra a la luz de esta teoría: ¿qué tienen en común *Andrés Iniesta*, *Tyrion Lannister* y los amigos en una red social como *Facebook*? Video: https://youtu.be/lp-1rvtRYQg

Entonces, ¿podemos **jugar** con los grafos? El profesor *Sáenz de Cabezón* ha dejado explícito el mensaje: ¡desde luego que **sí**! Observando las figuras presentadas a continuación, ¿será posible dibujar cada una **sin levantar el lápiz del papel**?:

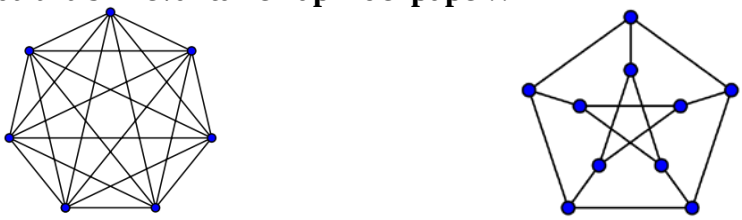


Figura 2. Ejemplos de grafos.

La teoría de grafos, **justifica** que el primer grafo de la figura 2 **sí** es posible **trazarlo** sin levantar el lápiz del papel, pero, por el contrario, el segundo grafo es **imposible**.

Aunque la teoría de grafos permite resolver **problemas muy divertidos**, conforma un insumo teórico con **aplicaciones muy importantes** para estudiar diversas situaciones de naturaleza científica en muchas áreas con cierto rango de **complejidad** y una de ellas son las **ciencias computacionales**. Lo anterior demanda en primera instancia, estudiar los **conceptos principales** de esta teoría, aspecto en el cual se **centrará** los distintos recorridos de aprendizaje de la presente clase. El **viaje comienza** … con la invitación de sumergirse de manera **proactiva** en las actividades de la semana dentro del contexto del *Taller 5 de resolución de problemas* del presente curso.

Actividades: *Taller 5 de resolución de problemas*

Se iniciarán las labores académicas de la semana dando **lectura reflexiva y minuciosa** a la *Unidad Didáctica* del tema que nos ocupa, abarcado desde la página 1 hasta la página 39 de dicho documento (Vílchez, 2018). La lectura es de **naturaleza obligatoria**. Existen otros recursos complementarios en esta aula virtual que se sugiere revisar: el libro del profesor *Juan Félix Ávila Herrera* (Ávila, 2005) y el texto diseñado por el docente *Eithel Trigueros Rodríguez* (Trigueros, 2015).

El grupo se ha dividido de manera **aleatoria** en una serie de **subgrupos de cuatro personas como máximo** (ver la lista de los subgrupos **adjunta** a la clase). Cada subgrupo tendrá la tarea de investigar **teóricamente** y de forma **práctica** los conceptos de: grafo, adyacencia, incidencia, tipos de grafos, valencias, ruta, circuito, circuito y camino de *Euler*, circuito y camino de *Hamilton* y, grafo conexo. Los subgrupos trabajarán de manera **colaborativa** en una *wiki* (ya **habilitada** en el espacio del aula virtual del tema de grafos), la **construcción** de un documento con **dos páginas** de extensión máxima, que **resuma** las definiciones y aplicaciones de los términos anteriormente citados, además de incorporar **explicaciones** sobre el uso del software *Wolfram Mathematica* en la **creación** de grafos y **resolución** de circuitos, circuitos y rutas de *Euler*, circuitos y rutas de *Hamilton* y cálculo de valencias. El plazo para la realización de esta tarea es de **cinco días** y se entregará formalmente el documento a más tardar el **día viernes** por un miembro del subgrupo (el **coordinador**) mediante un **enlace** destinado para ello. El **nombre** del archivo enviado será: *Número de subgrupo_Conceptos*.

El día sábado se ¡gestará un **encuentro** en el metaverso ***Second Life***!, con la intención de dotar un espacio de **realidad virtual** donde cada subgrupo exponga las ideas principales del documento diseñado de forma colaborativa. El punto de reunión será: http://maps.secondlife.com/secondlife/Exploratorium/170/181/26, correspondiente a ***Exploratorium***, un recurso para **explorar conceptos matemáticos** y de la **ciencia** en general. Se **debatirá** en tiempo real las ideas de cada uno de los subgrupos, el profesor tomará un rol de **moderador** dando la palabra, ordenando las secuencias y brindado al final, un **resumen** con todo el contenido expuesto. Se invitará a los estudiantes que así lo deseen, acompañar al docente a la galería ***Imaginary*** ubicada en ***Exploratorium***, que consiste en una **réplica** de una galería con ese mismo nombre, desarrollada por el *Instituto Matemático de Oberwolfach*, ubicado en Alemania.

Finalmente, se ha **habilitado un foro** donde se pretende compartir **aplicaciones** de la teoría de grafos sobre la ingeniería en sistemas de información o ciencias computacionales, además, de otras áreas de carácter científico. Es fundamental participar en el foro desde el **primer día** de la semana (lunes) con el objetivo de garantizar una **reciprocidad** oportuna y apropiada en las interacciones. Hay que responder de manera **puntual** a lo solicitado y **revisar** la redacción de las ideas y la ortografía antes de una publicación. **No es válido** incluir una participación mediante un archivo adjunto.

Foro

Este espacio tiene como propósito **analizar** las **aplicaciones** de la teoría de grafos en la ingeniería en sistemas de información o ciencias computacionales, además, de otras áreas de carácter científico. Investigue dichas aplicaciones y comparta sus conclusiones **mostrando al menos un ejemplo particular**. No es válido **repetir** aplicaciones ya planteadas por otros compañeros ¡Los espero con sus **valiosos aportes** hasta **finalizar** la semana en marcha!

En adición al ejemplo anterior se crearon dos clases más dentro del *EVA* diseñado para el curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal. Se presentan a continuación las conclusiones de este trabajo.

Conclusiones

En la Universidad Nacional de Costa Rica existen pocas propuestas pedagógicas a nivel de grado, relacionadas con cursos con un formato bimodal. El presente proyecto ha aportado a sufragar estas falencias, a través de una formulación pionera en el campo de la matemática discreta.

Los docentes de la cátedra del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* poseen a nivel general, poca experiencia con respecto a la implementación de estrategias de enseñanza apoyadas en entornos virtuales de aprendizaje. La presente propuesta ha contribuido con un enfoque innovador, homogéneo y sistemático que permitirá en futuras versiones de la materia incorporar a todos los participantes de la cátedra, con la intención de promover e impulsar experiencias educativas basadas en un enfoque bimodal.

La Escuela de Informática de la Universidad Nacional de Costa Rica, reconoce en una visión de futuro la necesidad de transformar sus prácticas de enseñanza y aprendizaje, dando cabida al uso de ecosistemas digitales como mecanismos de flujo para preparar a futuros ingenieros en sistemas de información, no solamente en conocimientos de naturaleza científica, sino también, en el aprendizaje de habilidades y destrezas relacionadas con competencias de la era digital, tales como: la validación de fuentes, la generación de inferencias, la transformación, uso y aplicabilidad del conocimiento, la autonomía y el aprender a aprender.

El entorno de aprendizaje virtual desarrollado como producto principal de este proyecto reconoce:

- La importancia de un proceso de planificación serio hacia la consolidación de nuevos formatos educativos, que sirvan de complemento a la presencialidad.
- La integración del uso de las tecnologías digitales como recursos que pueden favorecer positivamente el aprendizaje de conocimientos matemáticos, cuando han sido plasmados en el marco de acción de una propuesta pedagógica clara y responsable.
- La necesaria transformación didáctica en las instituciones de enseñanza superior a través de estrategias metodológicas centradas en el alumno y en las conexiones que ellos conforman dentro los procesos de aprendizaje.
- La importancia de la adquisición de conocimientos tácitos en la población estudiantil como recursos para el tratamiento de la incertidumbre característica de los mercados laborales actuales, que demandan personas capaces de aprender a lo largo de la vida y en compañía de otros.

El curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* bajo un enfoque bimodal constituye una iniciativa pedagógica en un campo de conocimiento árido y de naturaleza fáctica,

pretendiendo incentivar una permutación en los roles asumidos típicamente por profesores y alumnos en cursos de matemática a nivel universitario. El proyecto hace la invitación expresa de favorecer escenarios educativos donde prevalezca la observación, el análisis, la resolución de problemas, la creatividad, el descubrimiento y la puesta en ejecución de formas de razonamiento personales nutridas por la riqueza que provee el trabajo colaborativo y su consecuente búsqueda de conceso.

La propuesta de diseño y desarrollo del entorno de aprendizaje virtual para la materia *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática* representa un modelo que otras cátedras de los cursos de la carrera de *Ingeniería en Sistemas de Información* de la UNA, pueden adoptar a futuro, hacia la conformación de un nuevo plan de estudios que favorezca formalmente otros enfoques bimodales.

Referencias y bibliografía

Ávila, J. (2005). Estructuras de matemática discreta para computación. Costa Rica: UNA.

Becerra, M., Bavio, E. y otros (s.a.). Comisión asesora de educación a distancia. Informe final. Argentina: Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

Delauro, M. (2011). Nuevos escenarios, nuevos roles docentes, nuevas competencias. Instituto Latinoamericano de Desarrollo Profesional Docente: Aprende Virtual.

Escuela de Informática (2018). Misión y visión. Recuperado de: http://www.escinf.una.ac.cr

Espiro, S. (2008a). Aprendizaje. Especialización en Entornos Virtuales de Aprendizaje. Virtual educa.

Espiro, S. (2008b). Aprendizaje adulto. Especialización en Entornos Virtuales de Aprendizaje. Virtual educa.

Prieto, D. (2008). Planificar para construir futuro. Especialización en Entornos Virtuales de Aprendizaje. Virtual educa.

Prieto, D. y Van de Pol, P. (2006). *E-learning comunicación y educación. El diálogo continúa en el ciberespacio*. Costa Rica: Radio Nederland Training Centre.

Siemens, G. (2004). Conectivismo: Una teoría de aprendizaje para la era digital. Recuperado de: http://clasicas.filos.unam.mx/files/2014/03/Conectivismo.pdf

Trigueros, E. (2015). Material segunda parte: teoría y práctica. Costa Rica: UNA.

Ulate, G. y Vílchez, E. (2010). Una retrospección y visión de futuro sobre el uso e implementación de las tecnologías de la información y la comunicación, para el aprendizaje virtual en el contexto de la División de Educología de la Universidad Nacional de Costa Rica. *Revista Electrónica Educare*, *14*(1), 19-36. Recuperado a partir de http://revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/article/view/1506

Vílchez, E. y González, E. (setiembre-febrero, 2014). Percepción estudiantil sobre una metodología asistida por computadora en las áreas cognitivas del álgebra lineal y la matemática discreta. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, *14*(1), 1-16. doi: http://dx.doi.org/10.18845/rdmei.v14i1.1565

Vílchez, E. (mayo-agosto, 2014). Estrategias de enseñanza para el curso *EIF-203 Estructuras discretas para informática* a través del uso de las redes sociales *Facebook* y *Twitter*. *Revista Electrónica Educare*, *18*(2), 39-70. doi: http://dx.doi.org/10.15359/ree.18-2.3

Vílchez, E. (2018). Guía didáctica: teoría de grafos. Costa Rica: UNA.

Universidad Nacional de Costa Rica. (2007). Modelo pedagógico. Recuperado de: http://www.una.ac.cr/index.php/acerda-de/estrategia-institucional/2012-10-02-15-21-57

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Teorema Fundamental do Cálculo: aplicações para o cálculo de área utilizando o GeoGebra

Natália Oliveira do **Nascimento**
Universidade Federal de Uberlândia, Campus Pontal
Brasil
natalia-non@hotmail.com
Rogerio Fernando **Pires**
Universidade Federal de Uberlândia, Campus Pontal
Brasil
rfpires25@hotmail.com

Resumo

Este trabalho teve por objetivo apresentar recursos para um ensino que vislumbra o estudo de métodos que podem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo. A pesquisa de caráter qualitativa foi fundamentada nas ideias de modelagem matemática e modelação defendidas por Bassanezi e por Biebemgut e Hein. No processo de modelação do problema proposto (o cálculo da medida da área de dois lagos), foi utilizado o GeoGebra que possibilitou calcular a medida das áreas a partir das imagens dos lagos. Os resultados mostraram que a modelagem e a modelação podem ser estratégias bastante interessantes no ensino e na aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo, Modelagem, Modelação, GeoGebra.

Introdução

É indiscutível o fato de que há uma constante evolução nos mais variados setores da sociedade e, paralelamente, a educação, que exerce papel fundamental, também está avançando. A educação não atua somente no desenvolvimento de um país, mas na formação de cada cidadão, ajudando na prosperidade social, econômica e cultural, seja no momento de ensinar operações básicas, conhecimento histórico, linguagens de comunicação e até mesmo ao instigar o pensamento crítico. Assim, mais pesquisas vêm sendo desenvolvidas na área com intuito de aperfeiçoar as técnicas usadas em sala de aula como forma de promover o interesse e colaborar para a aprendizagem dos conteúdos apresentados aos alunos no Ensino Fundamental, Médio e Superior.

A Matemática é uma disciplina com alto índice de rejeição. Para Tatto e Scapin (2004), no convívio com os alunos percebe-se, empiricamente, a aversão que ocorre quando se deparam com a matéria. E isso se dá em todos os níveis de ensino; desde o aluno que ingressa nos anos iniciais até o ensino superior, identificamos tal rejeição na afirmação de que a Matemática é difícil. Consequentemente, estudantes escolhem profissões que, necessariamente, não envolvem o raciocínio matemático. Essa rejeição não surge por acaso; o ser humano tende a repelir aquilo que não provoca prazer ou instiga a curiosidade, problema proveniente da forma tradicional e às vezes arcaica de como os conteúdos matemáticos são apresentados em sala de aula. Por conseguinte, isso reflete na formação de alguns profissionais já capacitados em outras áreas, como engenheiros, químicos, biólogos, pedagogos e outros, que levam essa aversão para a vida profissional e involuntariamente propagam o negativismo com relação à Matemática.

No entanto, existem elementos que provocam o interesse dos alunos, como uma aula motivadora, conteúdos práticos, apoio familiar, incentivo, entre outros. Outro aspecto importante que contribui é o aluno reconhecer a aplicabilidade do conteúdo no seu cotidiano, seja para calcular a área de um terreno, olhar os juros de um cartão de crédito ou calcular uma distância percorrida. Em esferas superiores, por exemplo, essa aplicação pode ser mostrada para um graduando em biologia com um gráfico do crescimento de uma célula, para os futuros químicos no cálculo do gradiente de concentração, na cartografia e escala de mapas para os geógrafos e outros. Todos esses exemplos estão relacionados com conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Partindo dessa alegação, o presente trabalho apresenta recursos para um ensino que vislumbra o estudo de métodos que podem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Portanto, é possível destacar que a modelação matemática, uma dessas ferramentas, se apresenta para ajudar no processo de ensino e aprendizagem.

Aporte Teórico

É notória a importância da modelagem matemática como metodologia de ensino em todos os níveis, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior, pois ela estimula o senso crítico, a curiosidade e o espírito investigativo do aprendiz ao abordar situações que envolvem fenômenos realísticos. Nessa direção, Bassanezi (2006) afirma que o interesse pela Matemática, inicialmente, provém de estímulos externos a ela, vindos do "mundo real". Para ele, a Matemática Aplicada é o caminho. Os conteúdos matemáticos apresentados, por si sós, não são suficientemente interessantes para a maioria dos alunos de Ensino Fundamental, Médio e Superior. Conforme Bassanezi (2006, p. 16), os professores devem valorizar o que ensinam, e completa: "[...] que o conhecimento seja ao mesmo tempo interessante, por ser útil, e estimulante, por ser fonte de prazer".

Com o intuito de trazer esse pensamento para os estudantes e possibilitar o desenvolvimento na disciplina, surge o uso da modelagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A modelagem matemática é o processo de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e obter resoluções que possam ser aplicadas ao mundo real. Biembengut e Hein (2007) abordam a importância da reestruturação nos métodos de ensino que forneçam elementos que desenvolvem o pensamento crítico e independente. A partir disso, a

Matemática atua como meio de emergir a criatividade, a facilidade na resolução de problemas e a capacidade de modelar.

A modelagem produz efeito na interdisciplinaridade, é visível a sua influência no processo de pesquisas em outras ciências. Um profissional que desfruta do conhecimento matemático consegue transitar com facilidade entres os campos de aplicabilidade das mais diversas ciências, por exemplo, a Física e a Química, de forma mais imediata. Na educação, o método possibilita aos alunos o vislumbre de aspectos lúdicos e aplicações dos conteúdos, aliando teoria e prática. A Matemática pode ser usada como uma ferramenta que consegue sintetizar e generalizar ideias, inicialmente visualizadas de forma empírica, em teorias sólidas. Cada vez mais, teorias matemáticas são desenvolvidas, mas nem sempre têm uma aplicação imediata. Segundo Biembengut e Hein (2007), a Matemática e a realidade são conjuntos distintos e a modelagem surge como uma ponte entre elas.

Biembengut e Hein (2007) apresentam uma divisão clara de três etapas do processo: a primeira é a interação, em seguida a matematização e por último o modelo matemático. A primeira etapa consiste no reconhecimento da situação-problema, estudo do assunto a ser trabalhado, análise das variáveis e outras situações de conhecimento profundo do material a ser modelado. Depois de compreendida a situação, a segunda etapa, a matematização, trabalha a formulação do problema encontrado e sua resolução em termos do modelo. Para concluir, no modelo matemático, são realizadas a interpretação da solução e a avaliação da confiabilidade do modelo. A partir dessa divisão, espera-se que a modelagem seja capaz de incentivar a pesquisa, promover a habilidade em formular e resolver problemas, aplicar o conteúdo matemático e desenvolver a criatividade.

Os conteúdos e teorias matemáticas são apresentados como acabados e completos, o que leva a um ensino desvinculado da realidade e do processo histórico de construção. Bassanezi (2006, p. 36) esquematiza a forma como um teorema é ensinado, na seguinte ordem: “enunciado – demonstração – aplicação”. De acordo com o autor, o processo deveria ser o inverso, semelhante ao que originou o teorema, ou seja, primeiro a motivação (externa ou não à Matemática), formulação e validação das hipóteses acompanhadas de questionamentos e, por fim, seu enunciado. Uma forma de sanar essa deficiência presente no ensino seria a aplicação da modelagem matemática de maneira efetiva e prevista no processo. Apesar de seus inúmeros benefícios, a modelagem depara-se com diversos obstáculos no ambiente escolar.

Tais obstáculos são variados e partem desde processos burocráticos até mais especificamente a resistência dos estudantes. Os cursos regulares possuem orientações e cronogramas de conteúdos que devem ser trabalhados em sala de aula, tornando a aplicação da modelagem inviável por requerer um tempo maior e nem sempre seguir o programa. Outro problema identificado é o possível desinteresse dos alunos ao se defrontarem com um novo método com o qual não tiveram contato anterior. Além disso, muitos professores não se sentem capacitados para desenvolver a modelagem, em razão de não terem tido contato com ela na sua formação ou até mesmo em virtude do receio de prejudicar o seguimento do curso. Existe também a possibilidade de o aluno encontrar como solução conteúdos que ainda não possuem base matemática suficiente que viabilizem novos conhecimentos em temas mais específicos.

Para alguns educadores matemáticos, por exemplo, D’Ambrosio (1996), Grande (2013), Pires e Silva (2014), a Matemática torna-se mais atrativa e efetiva na sociedade quando se tem uma aplicabilidade de seu conteúdo. Nesse sentido, é indispensável proporcionar aos alunos momentos que possibilitam a interdisciplinaridade. Posto isso, surge a modelação como solução. Biembengut e Hein (2007) consideram a modelação matemática uma estratégia que abrange o

conteúdo programático e consegue adaptá-lo a uma determinada situação. Inicialmente, é preciso que o professor tenha conhecimentos prévios de seus alunos, desde o domínio matemático até mesmo o contexto socioeconômico em que eles estão inseridos. Os objetivos gerais são semelhantes à modelagem matemática, como despertar o interesse pela Matemática e desenvolver habilidade para resolver problemas, estimular a criatividade e realizar pesquisas. Entretanto, ela se diferencia da modelagem, por exemplo, quando se trabalha com ela no seu sentido literal, em princípio, no momento da escolha do tema, não se sabe qual o ferramental matemático necessário para a obtenção do modelo. Quando isso ocorre em cursos regulares em que se tem uma grade de conteúdos a ser cumprida, pode ser prejudicial, pois o conhecimento matemático exigido no processo pode não estar contemplado nessa grade.

Em contrapartida, na modelação, no momento da escolha do tema, o professor já sabe qual é o modelo que os alunos devem criar e os conhecimentos matemáticos utilizados estão todos previstos na grade de conteúdos do curso, ou seja, aos alunos cabe uma recriação de modelos já existentes. No entanto, a modelação não deixa de comtemplar a espinha dorsal do processo de modelagem, que é a investigação por meio da Matemática.

Com base nos referenciais citados, estudo do conteúdo e observações, esta pesquisa envolveu a modelagem científica e a modelação no ensino-aprendizagem A disciplina-base para o desenvolvimento é o Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente o Teorema Fundamental do Cálculo que será aplicado no cálculo de áreas. Aliado a isso, será usado o *software* GeoGebra com o intuito de auxiliar a modelação de imagens via satélite, verificar a veracidade dos cálculos realizados e empregá-lo como uma ferramenta para o desenvolvimento de atividades de ensino voltadas para o Teorema Fundamental do Cálculo.

Desenvolvimento

Com o intuito de fazer uma modelação utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, o primeiro passo foi o reconhecimento do tema e as suas possíveis aplicações. Lima (1999) traz o seguinte enunciado:

- Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : I \to \mathbb{R}$ são equivalentes:

(1) F é uma integral indefinida de f, isto é, existe $a \in I$ tal que:
$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, $\forall\, x \in I$.

(2) F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

A aplicação mais direta da integração pela diferenciação é o cálculo de áreas e volumes. Com o objetivo de vislumbrar uma aplicação acessível e que aproximasse o aluno da realidade no processo de ensino e aprendizagem no Ensino Superior, escolheu-se para ser calculada a medida da área de dois lagos presentes em um parque municipal situado em Ituiutaba, interior de Minas Gerais. Nesse momento, fica visível a etapa da interação com a situação a ser modelada, conforme apontam Biembengut e Hein (2007).

O Parque Municipal do Goiabal foi adotado por intermédio das Unidades de Conservação (UC), criadas a partir do Sistema Nacional de Unidades de Conservação da Natureza

(SNUC) (Lei n.º 9.985, de 18 de julho de 2000). O parque foi inaugurado em 1986, no município de Ituiutaba-MG, com o objetivo de preservar o ecossistema natural, proporcionar um momento de lazer e turismo, a fim de valorizar o meio ambiente e suas particularidades, além de possibilitar a realização de pesquisas científicas. Apesar da sua importância histórica e ambiental, o parque não é reconhecido de forma consciente pela comunidade e assim não alcança seus objetivos iniciais. Faz-se necessário um plano de gestão, no qual são levantadas as suas funções, feitas adaptações, reestruturações e, por fim, uma divulgação adequada do espaço, além da valorização do espaço por parte da população.

Para a realização desse estudo que visou a modelação usando o TFC, foram usados recursos tecnológicos que deram dinamismo à construção do modelo e confiabilidade aos resultados, análise de informação e visualização do processo. Portanto, foram usados recursos de imagens via satélite, disponibilizadas pelo Google, e os cálculos via GeoGebra. O GeoGebra é um *software* de Matemática gratuito e de fácil acesso, utilizado como ferramenta nos mais diferentes níveis de ensino, que trabalha aspectos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo, combinados em uma única aplicação.

O aplicativo permite adicionar imagens e a partir delas desenvolver equações que representam funções por meio de pontos colocados estrategicamente, como na imagem a seguir:

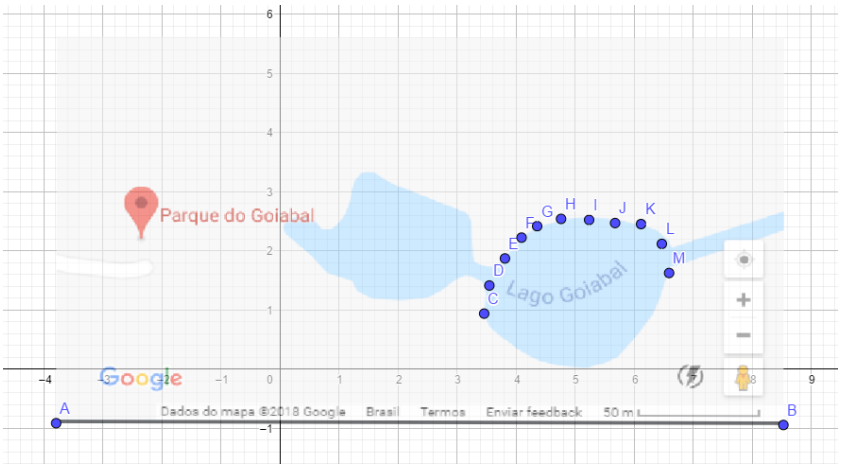


Figura 1. Primeiro passo após imagem inserida no GeoGebra

Na Figura 1, foram dispostos com o auxílio do GeoGebra pontos sobre uma parte da margem de um dos lagos e, depois de realizado um ajuste de curva, foi possível obter a equação que descreve algebricamente a curva que contém os pontos dispostos inicialmente. A Figura 2, a seguir, mostra a curva ajustada sobre os pontos.

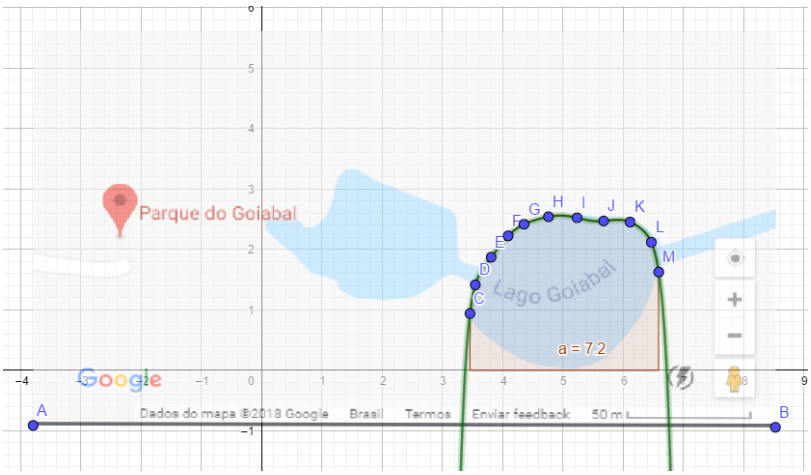


Figura 2. Curva ajustada pelos pontos

A figura anterior mostra a curva ajustada sobre os pontos, cuja equação que a representa algebricamente é $f(x) = -0{,}15x^{10} + 7{,}51x^{9} - 169{,}85x^{8} + 2266{,}84x^{7} - 19756{,}2x^{6} + 117481{,}99x^{5} - 482724{,}84x^{4} + 1353250x^{3} - 2476971{,}29x^{2} + 2673057{,}34x - 1291500{,}63$. Essa equação é o modelo matemático que possibilitou a resolução do problema proposto inicialmente (calcular a área dos lagos do Parque do Goiabal). No aplicativo, na barra de entrada, seleciona-se a opção Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, < Valor de x Final>), em que em foram completados respectivamente com a f(x), o valor 3,46 que corresponde ao limite inferior de integração e 6,59 que corresponde ao limite superior de integração, obtendo assim o valor da área da região sob a curva, que é de 7,2.

No entanto, como é possível observar na Figura 2, existem duas regiões cujas áreas foram incluídas no cálculo, porém não fazem parte do lago. Logo, as áreas dessas regiões devem ser descontadas do valor da área da região considerada e, para tanto, foram aplicados os mesmos procedimentos para calcular a medida das áreas das regiões que não pertencem ao lago. Depois, esses valores foram subtraídos do valor encontrado inicialmente. Esses procedimentos foram sintetizados na forma de imagem, que podem ser observados na Figura 3.

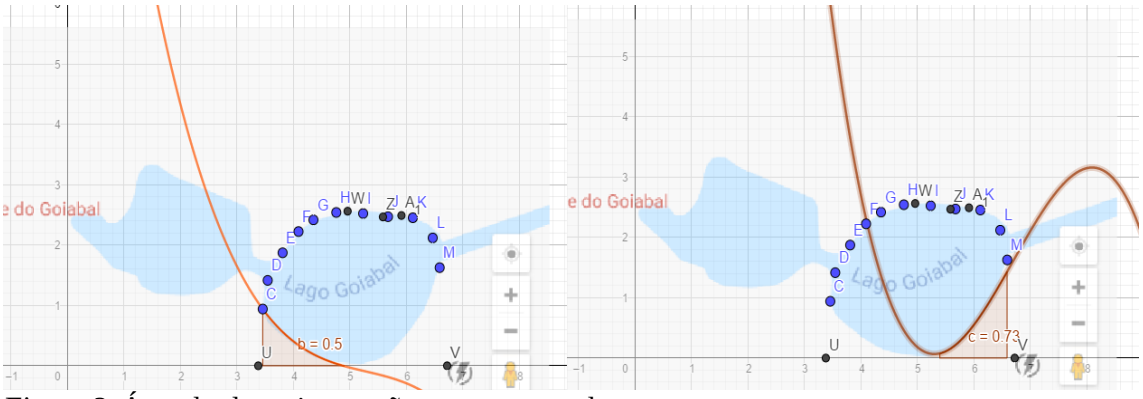


Figura 3. Área das laterais que não pertencem ao lago

Observando a Figura 3, nota-se que as áreas das regiões que não pertencem ao lago são respectivamente 0,5 e 0,73. Então, a área do lago é determinada por A = 7,2-(0,5 + 0,73) = 5,97.

Nesse procedimento, fica claro o uso da matematização, etapa da modelação proposta por Biembengut e Hein (2007), por meio da formulação e da resolução do problema proposto.

Encontrada a medida da área do lago, o último passo é a interpretação da solução do modelo, parte essencial para a compreensão e finalização do processo a partir dos resultados obtidos. Assim, é necessário, nesse caso, fazer uma conversão e adequar os cálculos e os valores obtidos com a escala equivalente a medida real. Ao ser capturada via satélite, a imagem apresentava uma escala de medida 2 cm que representava 50 m na realidade, e com os ajustes feitos no GeoGebra a escala passou a representar 2 unidades no *software* que expressa 50 m na realidade. Dessa forma, correspondendo a 25 m cada unidade na escala, a área real do lago passa a ser $H = A * (25)^2 = 3731{,}25\ m^2$. As mesmas etapas foram realizadas em um segundo lago, também presente nas figuras, e a área obtida foi de $2656{,}25\ m^2$.

Apesar da confiabilidade do cálculo realizado pelo GeoGebra e da resolução e segurança dos dados obtidos pela imagem via satélite, as áreas encontradas são valores aproximados, podendo variar para mais ou para menos. Ao usar a ferramenta do ajuste de pontos para traçar a curva e chegar à equação que representa algebricamente a função, foi possível perceber que, quanto mais precisos e mais próximos os pontos estão, maior será a aproximação final das medidas reais das áreas dos lagos. Esse processo possibilitou comparações no decorrer da realização das etapas e permitiu visualizar as estratégias usadas pelo *software* no ajuste de imagem e, consequentemente, na lei de formação da função a partir da curva para o cálculo de áreas por imagem no GeoGebra.

Em suma, o desenvolvimento dessa tarefa propiciou evidenciar no processo de modelação cada uma das etapas propostas por Biembengut e Hein (2007): a interação, a matematização e o modelo matemático.

Considerações Finais

O Teorema Fundamental do Cálculo é um conteúdo debatido largamente nas pesquisas em Educação Matemática, quando o foco é o Ensino Superior, e um dos conceitos que mais causam dificuldades na sua compreensão por parte dos estudantes. Pesquisas como a de Anacleto (2007) e Grande (2013) mostram que grande parte das dificuldades envolvidas na compreensão do TFC está ligada à maneira abstrata pela qual ele é apresentado, com a seguinte ordem: enunciado do teorema – demonstração – aplicações, cujo processo poderia ser realizado seguindo uma ordem inversa.

Nesse sentido, Bassanezi (2006) argumenta que o ensino da Matemática passa a ser mais interessante a partir do momento em que se procura iniciar o processo de construção do conhecimento partindo de uma motivação inicial (interna ou externa a própria Matemática). Ele ainda enfatiza que um caminho para que o ensino desperte o interesse do estudante e parta de situações reais é a modelagem matemática.

De posse das ideias defendidas por Bassanezi (2006) e Biembengut e Hein (2007) e com o objetivo de realizar um processo de modelação que, relacionado ao TFC, a pesquisa aqui descrita buscou apresentar, o processo de modelagem pode ser reproduzido em sala de aula ao se abordar o teorema em questão. Entre os principais resultados encontrados ao desenvolver este estudo, está o de perceber a motivação, da primeira autora do trabalho, em aprofundar seus conhecimentos sobre TFC. Ela é aluna do curso de Licenciatura em Matemática e acabou de cursar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Além disso, em cada passagem do

desenvolvimento do estudo foi possível observar e compreender cada uma das etapas da modelação descritas por Biembengut e Hein (2007).

Por fim, atendo-se aos limites da investigação aqui descrita, foi constatado que a modelagem/modelação desperta o espírito investigativo, a curiosidade e a autonomia do estudante, uma vez que o estudo do conteúdo partiu de um problema real vivenciado pela primeira autora.

Referências e bibliografia

Tatto, F., & Scapin, I.J. (2004). Rejeição à Matemática: causas e alternativas de intervenção. *Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões-URI*: Porto Alegre.

Biembengut, M.S., & Hein, N. (2007). Modelagem Matemática no Ensino. (4a ed). São Paulo: Contexto.

Bassanezi, R.C. (2006). Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.

D'Ambrosio, U. (1996). Educação Matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus.

Grande, A.L. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. *Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*: São Paulo.

Pires, R.F. (2014). Função: Concepções de professores e estudantes dos Ensinos Médio e Superior. *Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*: São Paulo.

Pires, R.F., & Silva, B.A. (2014). Função: Concepções daquele que ensina e daquele que aprende. *Revista de Educação Matemática e Tecnologia, v.5, n.3, 1-25*.

Lima, E.L. (1999). Análise Real.(4ª ed). *Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)*: Rio de Janeiro.



Conhecimentos docentes em ação no Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo)

Barbara Lutaif **Bianchini**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
barbara@pucsp.br
Gabriel Loureiro de **Lima**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
gllima@pucsp.br
Eloiza **Gomes**
Instituto Mauá de Tecnologia
Brasil
eloiza@maua.br

Resumo

O objetivo deste artigo, de caráter teórico-bibliográfico, é o de evidenciar os conhecimentos docentes necessários para a execução das tarefas demandadas do professor que deseja atuar em conformidade ao Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo), que faz parte da teoria Matemática no Contexto das Ciências, referencial que fundamenta este estudo. A análise realizada nos permite concluir que, apenas conhecimentos de conteúdo e do MoDiMaCo não são suficientes ao docente. A maior parte das tarefas requer a mobilização de conhecimentos de conteúdo, didáticos, pedagógicos e tecnológicos, sempre de maneira simultânea e articulada. Diante deste cenário, é fundamental planejar e executar uma formação para aqueles que atuam em cursos de Engenharia, de forma a contemplar a diversidade necessária de conhecimentos que esses profissionais devem ter disponíveis para, quando for o caso, mobilizá-los.

Palavras-chave: educação matemática, engenharia, formação de professores, conhecimentos docentes, Matemática no Contexto das Ciências, MoDiMaCo.

Introdução

No *Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA)* e também naquele intitulado *A Matemática na Formação Profissional*, sediados na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e congregando pesquisadores desta universidade e também do Instituto Mauá de Tecnologia, temos desenvolvido, tomando por base a teoria *A Matemática no Contexto das Ciências* (MCC), investigações em duas direções: (i) pesquisas de caráter teórico-bibliográfico e (ii) estudos visando compreender quais conceitos da Matemática são mobilizados nas diferentes Engenharias, de que forma se dá tal mobilização e como construir, a partir disso, *eventos contextualizados* para o ensino de Matemática nestes cursos.

Nas pesquisas de caráter teórico-bibliográfico, uma das temáticas com a qual temos trabalhado diz respeito às competências a serem desenvolvidas pelos futuros engenheiros ao longo do curso. Temos refletido também sobre as competências que os docentes que ministram aulas de Matemática nas Engenharias precisam desenvolver para atuar em consonância ao *Modelo Didático da Matemática em Contexto* (MoDiMaCo) intrínseco à MCC.

Em Bianchini, Lima, Gomes e Nomura (2017), apresentamos considerações a respeito da ideia de educação baseada em competências e discutimos o desenvolvimento de competências matemáticas pelo futuro engenheiro, adotando duas diferentes perspectivas: a do *Mathematics Working Group* da *Société Européenne pour La Formation des Ingénieurs* (SEFI) e a da teoria MCC.

Em Gomes, Bianchini, Lima e Nomura (2017), assumimos a concepção de Camarena (2011) de que, possibilitar ao graduando em Engenharia que ele desenvolva competências, significa permitir que ele, como futuro profissional, construa alicerces "para enfrentar uma situação-problema fazendo uso da integração de toda sua bagagem de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que são mobilizados em suas estruturas cognitivas" (Camarena, 2011 como citado em Bianchini et al., 2017, p. 69). Tomando esta ideia como premissa, postulamos que para atuar em consonância ao MoDiMaCo, ministrando aulas de Matemática contextualizadas, "de forma a estabelecer inter-relações entre aquele conteúdo que está sendo trabalhado e os demais já estudados ou a serem desenvolvidos nas disciplinas não matemáticas que dele requerem, e também com a futura prática profissional do graduando" (Gomes et al., 2017, p. 338), o docente deve, em circunstâncias distintas e a partir de diferentes ações, construir "conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que lhe possibilitem exercer sua prática de forma a efetivamente permitir ao estudante de determinada modalidade de Engenharia que este construa os alicerces para seu exercício profissional futuro" (Gomes et al., 2017, p. 338).

Entra em jogo, portanto, a necessidade de reflexões acerca da formação do professor que ensina Matemática aos futuros engenheiros. No Brasil, especificamente, essa temática vem ganhando destaque e, dentre as ações que ratificam essa afirmação, podemos citar a criação de um Grupo de Trabalho, no âmbito da Associação Brasileira de Educação em Engenharia (ABENGE), visando refletir a respeito da formação inicial e continuada de docentes que atuam em cursos de Engenharia. Com o objetivo de contribuir com essas discussões, em Gomes et al. (2017), nos detivemos à uma das componentes das competências docentes: os *conhecimentos*. Com base no trabalho de Silva e Lima (2015) que, fundamentados em Shulman (1987), Mishra e Koehler (2006) e Ball, Thames e Phelps (2008), apresentam definições para quatro categorias de conhecimentos docentes: de *conteúdo* (CC), *didático* (CD), *pedagógico* (CP) e *tecnológico* (CT), propusemos, quando necessária, uma ampliação de tal categorização, tendo como foco refletir a respeito da

construção – e das circunstâncias em que esta ocorre – de conhecimentos por parte daqueles que lecionam Matemática em cursos de Engenharia segundo a MCC e o MoDiMaCo.

Dando continuidade a essa investigação, em Lima, Bianchini e Gomes (2018), ampliamos nossas reflexões a respeito das categorias de conhecimentos docentes. Postulamos que, para desempenhar cada uma das tarefas inerentes ao MoDiMaCo, os professores precisam mobilizar, muitas vezes de maneira simultânea, conhecimentos pertencentes às diferentes categorias anteriormente explicitadas. Salientamos então a necessidade de, em pesquisas futuras, evidenciar as categorias de conhecimento efetivamente demandadas em cada uma dessas tarefas para que, a partir disso, seja possível "planejar formações docentes institucionais ou estratégias de autoformação para que os professores que lecionam Matemática em cursos de Engenharia possam efetivamente construir tais conhecimentos de maneira sistematizada" (Lima et al., 2018, p. 133).

Adotando como procedimento metodológico a análise, à luz das categorias de conhecimentos docentes explicitadas em Gomes et al. (2017), das tarefas apresentadas em Lima et al. (2018) e que necessariamente deverão ser cumpridas pelo professor que desejar atuar em concordância com o MoDiMaCo, o objetivo do presente artigo, de caráter teórico-bibliográfico, é aclarar as diferentes categorias de conhecimentos docentes requeridas em cada uma dessas tarefas. Para isso, inicialmente apresentamos algumas considerações a respeito da MCC, do MoDiMaCo e das diferentes categorias de conhecimentos docentes.

A MCC e o MoDiMaCo

Na teoria Matemática no Contexto das Ciências (MCC), desenvolvida pela pesquisadora mexicana Patrícia Camarena, o processo educativo é concebido como um sistema complexo no qual interatuam questões curriculares, epistemológicas, didáticas, cognitivas e docentes. Esta teoria foi idealizada especialmente para embasar reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática em cursos universitários nos quais essa ciência está presente na forma de disciplinas de serviço. O pressuposto filosófico educacional da MCC, segundo Camarena (2008) é que, ao final destes cursos, os estudantes possam realizar a 'transferência dos conhecimentos' da Matemática para as áreas que os requerem, permitindo o desenvolvimento de competências profissionais e laborais. Como ressaltam Bianchini et al. (2017) a ideia central é proporcionar aos estudantes um ensino de Matemática contextualizado, levando-se em consideração as particularidades do curso de graduação no qual as aulas estão sendo ministradas e a futura atuação profissional de seus egressos.

A MCC contempla um modelo didático denominado MoDiMaCo – Modelo Didático da Matemática em Contexto –, no qual as principais ferramentas para o ensino da Matemática são os *eventos contextualizados,* que, de acordo com Camarena (2013), são problemas ou projetos que desempenham papel de entes integradores entre disciplinas matemáticas e não matemáticas, convertendo-se em ferramentas para o trabalho interdisciplinar no ambiente de aprendizagem.

Para atuar em consonância ao MoDiMaco, o docente precisa desempenhar algumas tarefas, conforme apresentado em Camarena (2017) e Lima et al. (2018). Em conformidade com o que apresentamos na introdução deste artigo, nosso objetivo é explicitar quais conhecimentos o professor deve mobilizar para realizar tais tarefas. Consideramos quatro categorias de conhecimentos docentes e todas as suas possíveis interseções. Desta forma contamos com 15 possibilidades de categorização destes conhecimentos, a respeito dos quais passamos a tratar.

Categorias de conhecimentos docentes

Tomando por base os estudos de Shulman (1986, 1987), Mishra e Koehler (2006) e Ball, Thames e Phelps (2008), Silva e Lima (2015) categorizam os conhecimentos docentes em: de *conteúdo* (CC), *didático* (CD), *pedagógico* (CP) e *tecnológico* (CT). Além disso, exibem outras onze categorias obtidas a partir de intersecções dois a dois (6), três a três (4) e das quatro originais (1): *conhecimento didático do conteúdo* (CDC), *conhecimento pedagógico do conteúdo* (CPC), *conhecimento tecnológico do conteúdo* (CTC), *conhecimento didático tecnológico* (CDT), *conhecimento pedagógico tecnológico* (CPT), *conhecimento didático pedagógico* (CDP), *conhecimento didático pedagógico do conteúdo* (CDPC), *conhecimento didático tecnológico do conteúdo* (CDTC), *conhecimento didático pedagógico tecnológico* (CDPT), *conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo* (CPTC) e *conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo* (CDPTC). Na sequência, retomaremos as definições de CC, CP, CD e CT apresentadas em Lima et al. (2018) por estas serem as bases para a compreensão das interseções de tais conhecimentos. Para maiores detalhes a respeito dessas interseções sugerimos consultar Lima et al. (2018).

Os *conhecimentos de conteúdo* (CC), no caso do docente que leciona Matemática nas Engenharias, referem-se a conhecimentos a respeito de Geometria Analítica, Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Numérico, Probabilidade e Estatística, etc.

No caso dos *conhecimentos pedagógicos* (CP), estes se referem àqueles relacionados a aspectos globais dos processos de ensino e de aprendizagem, como gestão de sala de aula, à importância de se valorizar os conhecimentos prévios dos estudantes, questões relacionadas à cognição, diferentes métodos para avaliação da aprendizagem, dentre outros.

Em relação aos *conhecimentos didáticos*, no contexto específico da Engenharia e da MCC, estes são concebidos como os relacionados às teorias da Didática da Matemática, aos processos de ensino e de aprendizagem específicos dos conceitos matemáticos e, simultaneamente, a como ensinar Matemática, a partir da *Didática do Contexto* (que dá suporte ao MoDiMaCo), em determinada modalidade específica de Engenharia.

Finalmente, os *conhecimentos tecnológicos* estão ligados à adaptação do docente às tecnologias e às habilidades em empregá-las nos processos de ensino e de aprendizagem. Convém salientar que estamos considerando especificamente as tecnologias digitais de informação e comunicação. Passamos então, a seguir, a evidenciar os conhecimentos docentes que, em nossa visão, os professores que optam por conduzir suas aulas em acordo com o MoDiMaCo devem mobilizar na realização de cada uma das tarefas inerentes a tal Modelo.

Tarefas intrínsecas ao MoDiMaCo e conhecimentos docentes nelas requeridos

Atuar segundo o MoDiMaCo requer do professor a execução de uma série de tarefas, distribuídas em três momentos distintos: (i) a construção do evento contextualizado, (ii) o trabalho em sala de aula com o evento construído e (iii) o trabalho após a aplicação do evento. Para a realização dessas tarefas, como será evidenciado por meio dos Quadros 1, 2 e 3, não basta o docente conhecer apenas o conteúdo. Uma vez que está sendo pressuposta a atuação conforme um modelo didático específico, a mobilização de conhecimentos didáticos também é assumida como premissa.

Em relação ao momento de construção de um evento contextualizado, conforme pode ser

observado por meio do Quadro 1, a maioria das tarefas requer a mobilização simultânea e articulada de diferentes categorias de conhecimentos docentes. Ao menos duas se fazem presentes: conhecimentos de conteúdo e didáticos. Das oito tarefas apresentadas neste quadro, quatro requerem a articulação de todas as categorias de conhecimentos anteriormente explicitadas. Uma (a tarefa VIII) pressupõe a mobilização de três categorias, mas pode também contemplar a quarta, uma vez que, a nosso ver, o professor deve, na medida do possível, levar em conta, no planejamento da avaliação, as potencialidades dos recursos tecnológicos para avaliar, de diferentes maneiras, aquilo que o estudante possa ter aprendido por meio do evento contextualizado trabalhado.

Quadro 1

Tarefas relacionadas à construção do evento contextualizado

Tarefa	**Conhecimento Requerido**
I. Identificar situações da Engenharia a partir das quais os eventos contextualizados possam ser construídos.	CDC
II. Analisar as situações identificadas para: verificar se nelas estão presentes os conteúdos matemáticos com os quais se deseja trabalhar; identificar se os estudantes possuem os conhecimentos prévios necessários para trabalhar com o evento a ser proposto e se tal situação realmente tem potencial para possibilitar que os graduandos estabeleçam uma vinculação entre os conhecimentos prévios e os emergentes.	CDPC
III. Estabelecer o papel do evento contextualizado que está sendo construído (diagnóstico, motivação, construção de conhecimentos, reforço de conhecimentos, avaliação, superação de obstáculos, etc.).	CDPC
IV. Iniciar a elaboração da *história do evento contextualizado* (descrição do evento, seu papel, conhecimentos matemáticos e do contexto presentes, conhecimentos prévios requeridos, possíveis maneiras de resolução do evento, obstáculos que os alunos poderão enfrentar, possíveis questões a serem colocadas pelos estudantes e as respostas, em forma de perguntas, que poderão ser dadas a eles).	CDPTC
V. Planejar instrumentos (que podem ser outros eventos com esse papel) para diagnosticar, reforçar e, se for o caso, construir, conhecimentos prévios em relação ao tema a ser trabalhado ou para identificar e então superar possíveis obstáculos que podem ser enfrentados pelos estudantes.	CDPTC
VI. Planejar possíveis atividades de aprendizagem a serem trabalhadas, se for o caso com o auxílio de ferramentas tecnológicas, caso o docente perceba que, durante a resolução do evento, os estudantes apresentam dúvidas e não conseguem mais avançar sem sua intervenção.	CDPTC
VII. Planejar as atividades de aprendizagem visando à descontextualização do conteúdo trabalhado (considerando que elas devem: (a) possibilitar aos estudantes transitarem entre representações em diferentes registros do conceito a ser construído; (b) considerar os distintos enfoques dos temas e conceitos matemáticos; (c) estabelecer analogias com conhecimentos que o estudante já possui e vinculações com conhecimentos prévios necessários para a construção do conceito que está sendo estudado; (d) auxiliar o estudante a superar obstáculos que porventura possui; (e) utilizar tecnologias digitais para reforçar ou mediar a aprendizagem).	CDPTC
VIII. Planejar como fará a avaliação das aprendizagens e construir as atividades ou instrumentos a serem utilizados com essa finalidade.	CDP(T)C

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Camarena (2017) e Lima et al. (2018)

Em relação às tarefas a serem cumpridas pelo docente, durante o trabalho em sala de aula com um evento contextualizado, os conhecimentos demandados são explicitados no Quadro 2. Assim como na preparação dos eventos, requer-se do professor muito mais do que conhecimentos de conteúdo e didáticos (inerentes ao profissional que atua conforme o MoDiMaCo). Os conhecimentos pedagógicos atrelados aos didáticos se tornam fundamentais especialmente nas tarefas IX e X que exigem, respectivamente, a constituição de grupos de trabalho colaborativos a partir de critérios específicos e a clareza a respeito do que significa trabalhar de forma colaborativa. Das seis tarefas mencionadas no Quadro 2, três (XII, XIII e XIV) pressupõem a mobilização simultânea de pelos menos três diferentes categorias de conhecimento e em duas delas (XII e XIII) – aquelas referentes ao fechamento do trabalho com o evento – conhecimentos didáticos, pedagógicos, tecnológicos e de conteúdo devem ser articulados.

Quadro 2

Tarefas relacionadas ao trabalho, em sala de aula, com o evento planejado

Tarefa	**Conhecimento Requerido**
IX. Identificar, dentre os estudantes, os líderes emocionais, os intelectuais e os operativos para, em seguida, constituir as equipes colaborativas para o trabalho com o evento, compostas por três estudantes (um líder emocional, um intelectual e um operativo).	CDP
X. Explicar às equipes o que é esperado de cada uma delas e o que significa trabalhar de maneira colaborativa.	CDP
XI. Caso seja a primeira vez que os alunos estejam trabalhando eventos contextualizado, o docente deverá guiá-los a partir das etapas de resolução dos eventos (vide Camarena 2017). Por outro lado, se os estudantes já estão habituados aos eventos contextualizados, o professor deverá permitir aos estudantes que trabalhem de maneira mais autônoma ou, se for o caso, os auxiliar naquelas etapas em que já sabe que eles apresentam mais dificuldades.	CDC
XII. Analisar quando, se necessário, propor atividades complementares ao evento e de que maneira a utilização de tecnologias de informação e comunicação (TIC) pode auxiliar nesse processo e quais são as mais adequadas para esse fim.	CDPTC
XIII. Caso os estudantes não consigam concluir a resolução do evento conforme um cronograma preestabelecido pelo docente, este deverá avaliar se as equipes darão ou não continuidade a essa resolução nas próximas aulas ou em um fórum virtual de discussão.	CDPTC
XIV. Por sua vez, quando os estudantes concluem a resolução do evento, a tarefa do docente é, por meio de questionamentos, levá-los a refletir sobre suas aprendizagens, as formas como construíram suas resoluções, os erros cometidos, como estes foram superados e o que foi possível aprender com eles.	CDPC

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Camarena (2017) e Lima et al. (2018)

Considerando o trabalho a ser realizado pelo professor após a aplicação do evento contextualizado, todas as tarefas a ele relacionadas exigem a mobilização simultânea e de forma articulada de pelo menos três categorias de conhecimentos, conforme evidencia o Quadro 3. Em algumas das tarefas apresentadas neste quadro (XVI e XVII), utilizamos a notação (T) para indicar que, embora não seja indispensável para sua realização, os conhecimentos tecnológicos podem também ser mobilizados. Convém salientar inclusive que, em nossa visão, levar em conta, sempre que possível, as potencialidades dos recursos tecnológicos para cada uma de suas ações no

processo de ensino e de avaliação da aprendizagem deve ser uma preocupação do professor, em especial daqueles que lecionam em cursos de Engenharia.

Quadro 3

Tarefas relacionadas ao trabalho a ser realizado após a aplicação do evento contextualizado

Tarefa	**Conhecimento Requerido**
XV. Trabalhar com as atividades de aprendizagem, explicitadas em VII, visando à descontextualização do conteúdo matemático que está sendo abordado.	CDPC
XVI. Para a avaliação da aprendizagem, o professor deve construir um diário de bordo para cada uma das equipes e cada um dos estudantes. Não serão consideradas apenas as aprendizagens em termos de conteúdos matemáticos, mas também o desenvolvimento de habilidades e atitudes.	CDP(T)C
XVII. Retomar, complementar e, se necessário, alterar a história do evento, elencando outras formas de resolução porventura apresentadas pelos estudantes; os tempos efetivamente despendidos para resolvê-lo; os obstáculos enfrentados; os questionamentos mais frequentes por parte dos estudantes; as respostas, em forma de perguntas, que o docente deve apresentar frente às dúvidas dos alunos; e, se de fato, o evento cumpriu com seu papel, em que aspectos deve ser reformulado ou se, em função de seus resultados em sala de aula, deve ser descartado.	CDP(T)C

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Camarena (2017) e Lima et al. (2018)

Considerações Finais

Nas pesquisas de caráter teórico-bibliográfico que estamos desenvolvendo, uma das vertentes exploradas é a que diz respeito à formação de professores e aos conhecimentos requeridos pelos docentes que ministram aulas de Matemática nas Engenharias em consonância ao MoDiMaCo ligado à MCC. Neste artigo nos propusemos a evidenciar aqueles conhecimentos necessários a esses professores na execução de tarefas relacionadas à construção de um evento contextualizado, ao trabalho com tal evento em sala de aula e ainda ao trabalho após a aplicação do evento e que, consequentemente, devem ser desenvolvidos durante as formações desses docentes.

A análise realizada nos permite concluir que, apenas conhecimento de conteúdo não basta. Além de conhecimentos relativos aos conceitos matemáticos que irão ensinar em sala de aula, as formações devem inicialmente oportunizar aos professores o desenvolvimento de um dos aspectos dos conhecimentos didáticos, a saber, aquele referente ao MoDiMaCo. Afinal, um profissional que atuará a partir dos preceitos de determinado modelo didático, em primeiro lugar, precisa conhecer profundamente tal modelo.

Mas, novamente, associações de conhecimentos acerca do conteúdo e do MoDiMaCo não são suficientes aos docentes que desejam conduzir suas aulas segundo este modelo. A maior parte das tarefas anteriormente mencionadas requer a mobilização desses conhecimentos, e também daqueles relativos a outros aspectos didáticos, pedagógicos e tecnológicos, sempre de maneira simultânea e articulada.

Concebemos que a formação docente em relação ao MoDiMaCo, de forma a contemplar

também questões didáticas, pedagógicas e tecnológicas, pode ser realizada a partir de diferentes estratégias, como, por exemplo, a aprendizagem colaborativa. Devem ser valorizadas reflexões a respeito da importância de considerar os conhecimentos prévios dos estudantes, das diferentes teorias, tanto as mais gerais de aprendizagem quanto às da didática da Matemática, das potencialidades das ferramentas tecnológicas para o ensino e para a aprendizagem de conceitos matemáticos, das diferentes estratégias e modalidades de avaliação, de avaliações que levam em consideração não somente aprendizagem de conteúdos, mas também o desenvolvimento de habilidades e de atitudes. Em suma, assumindo que os conhecimentos de conteúdo já deveriam ter sido construídos pelos docentes em suas formações iniciais, devemos planejar formações continuadas que deem conta da construção simultânea e articulada de conhecimentos didáticos, pedagógicos e tecnológicos.

Consideramos relevante um apontamento específico em relação à utilização de tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem. Além de concebermos que elas podem ser utilizadas também nos momentos de avaliação, em nossa visão, é importante empregar os recursos tecnológicos não somente para ilustrar aspectos relativos aos objetos matemáticos que estão sendo estudados, e nem muito menos para reproduzir, por exemplo, com a utilização de apresentações multimídias, o que tradicionalmente é feito com lousa e giz. Devemos, por meio das tecnologias, explorar os aspectos principais das noções que estão sendo trabalhadas, estabelecer conjecturas, pensar sobre a Matemática, construir conhecimentos com o auxílio desses recursos e dar condições para que os estudantes aprendam a incorporá-los em seu cotidiano na universidade e fora dela, especialmente no ambiente de trabalho.

Referências e bibliografia

Bianchini, B. L., Lima, G. L., Gomes, E. & Nomura, J. I. (2017). Competências matemáticas: perspectivas da SEFI e da MCC. *Educação Matemática Pesquisa*, 19 (1), 49-79. doi: 10.23925/1983-3156.2017v19i1p49-79

Camarena, P. G. (2008, novembro). Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. *Actas del Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*. Lima, Peru, III.

Camarena, P. G. (2013). A treita anõs de la teoria educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias". *Inovación Educativa*, 13(62), 17-44. Recuperado em 20 setembro, 2018, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000200003

Camarena, P. G. (2017). Didáctica de la matemática en contexto. Educação Matemática Pesquisa, 19(2), 1-26. doi: 3156.2017v19i2p1-26

Gomes, E., Bianchini, B. L., Lima, G. L., & Nomura. J. I. (2017, julho). Competências a serem desenvolvidas pelos professores de Matemática dos cursos de Engenharia: primeiras reflexões. Anais do Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM). Madrid, Espanha, VIII.

Lima, G. L., Bianchini, B. L., & Gomes, E. (2018). Conhecimentos docentes e o Modelo Didático da Matemática em Contexto: reflexões iniciais. *Educação Matemática e Debate*, 2(4), 116-135. doi: https://doi.org/10.24116/emd25266136v2n42018a06

Silva, M. J. F.; & Lima, G. L. (2015). Conhecimentos desenvolvidos em um curso de licenciatura em Matemática na modalidade a distância. In P. R. Scott & Ángel Ruíz (Eds.). *Educación Matemática en las Amérias* (Vol. 2, 113-124). República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Habilidade de visualização: um comparativo por meio da resolução de tarefas, com foco na rotação

Raquel Polizeli **Corradi**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Brasil
raquelpolizeli@utfpr.edu.br
Valdeni Soliani **Franco**
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
vsfranco@uem.br
Vinícius Murilo **Fratucci**
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
murilofratucci@hotmail.com
Yesica Milena **Garzón** Pacheco
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
yesicamilenagarzonpacheco@gmail.com

Resumo

Nesse artigo busca-se identificar, por meio da resolução de tarefa, a mobilização da habilidade de visualização rotação mental, observando se há diferenças entre as unidades de análise estudadas. É um trabalho de cunho qualitativo, pautado no paradigma interpretativo, que segue a modalidade estudo de casos múltiplos, cujas unidades de análise são um grupo formado por acadêmicos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade do norte do Paraná e outro com integrantes que já cursaram as disciplinas de geometria do curso. A análise dos dados segue os pressupostos da Análise de Conteúdo. Concluiu-se haver uma diferença significativa entre os grupos. Aqueles que já cursaram as disciplinas de Geometria tiveram um melhor desempenho se comparado aos ingressantes. Isso leva-nos a inferir, nesse caso, que cursar as disciplinas de Geometria pode ter contribuído para compreensão de conceitos de Geometria envolvidos na tarefa e o desenvolvimento da habilidade de visualização pesquisada.

Palavras chave: educação matemática, ensino de geometria, habilidades de visualização, raciocínio espacial, superfície de rotação.

Habilidades de Visualização: uma introdução

Essa pesquisa é parte dos estudos desenvolvidos no grupo de pesquisa Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, em que um dos assuntos de interesse no momento é a visualização em Geometria. Pesquisas ligadas à educação matemática têm enfatizado a importância da visualização e do raciocínio visual para o ensino e a aprendizagem matemática, em particular da Geometria, como é retratado pelos autores Flores et al (2012, p. 33). Também para Santos (2014) a visualização pode dar concretude na aquisição do conhecimento matemático por meio da analogia, pois o pensamento é capaz de construir por meio dela diferentes interpretações de um conceito matemático.

A leitura, inicialmente de Presmeg (1986, 2006) e Godino (2011) aguçaram a curiosidade sobre o assunto no grupo, que vem estudando outros autores como Gutiérrez (1992, 1992 b,1996), Fernández (2011,2014), Kawamoto (2016), entre outros.

Gutiérrez (1996) redefine e amplia o conceito de visualização em matemática, considera-a como um tipo de atividade do raciocínio, capaz de integrar quatro elementos principais que são as imagens mentais, as representações externas, os processos de visualização e as habilidades de visualização. Ele considera imagens visuais (físicas ou mentais) como objetos que são criados, usados e transformados na atividade de visualização espacial. Afirma que dependendo das características do problema de matemática a ser resolvido e das imagens criadas, os alunos devem poder escolher entre várias habilidades visuais (HV). As principais habilidades listadas pelo autor são:

- "Percepção figura-fundo" ou Percepção de figura e contexto (PFC): a capacidade de identificar uma figura específica isolando-o de um fundo complexo.
- "Constância perceptiva" (CP): a capacidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) são independentes de tamanho, cor, textura ou posição, e permanecer inconfundível quando um objeto ou imagem é percebido em diferentes orientações.
- "Rotação mental" (RM): capacidade de produzir imagens mentais dinâmicas e de visualizar uma configuração em movimento.
- "Percepção de posições espaciais" (PPE): A capacidade de relacionar um objeto, imagem ou imagem mental para si mesmo.
- "Percepção de relações espaciais" (PRE): a capacidade de relacionar vários objetos, imagens, e/ou imagens mentais para o outro, ou simultaneamente para si mesmo.
- "Discriminação visual" (DV): a capacidade de comparar vários objetos, imagens, e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles.

Fernández (2011, 2014), pauta-se também nos estudos de Gutiérrez e centra-se no estudo da visualização e no raciocínio espacial em futuros professores, graduandos em licenciatura da Universidade de Santiago de Compostela (Espanha). Já Kawamoto (2016), em seu estudo, teve por objetivo verificar se alunos de 3ª série do Ensino Médio mostram ter desenvolvido habilidades de visualização em Geometria Espacial e se, quando questionados ou não, preocupam-se em justificar o raciocínio feito. Por não encontrar outras pesquisas realizadas com foco no ensino superior no Brasil, essas leituras levaram aos questionamentos: Como estão os alunos, ingressantes e egressos do curso de Matemática, em relação às habilidades de

visualização em Geometria? Há indícios de diferenças na mobilização de habilidades de visualização na resolução de tarefas de geometria, entre os ingressantes em um curso de formação inicial em Matemática e aqueles que já fizeram as disciplinas de geometria desse curso?

Desta forma o objetivo deste artigo é, por meio da resolução de uma tarefa, identificar a mobilização de habilidades de visualização, em particular a rotação, na resolução da tarefa proposta, observando a existência ou não de diferenças entre os dois casos que serão estudados, em que os participantes estão ou estiveram ligados a uma determinada universidade ao norte do estado do Paraná.

Desenvolvimento da pesquisa

Esta é uma pesquisa qualitativa, que segue o paradigma interpretativo, realizada na modalidade estudo de casos múltiplos. Como procedimento de coleta de informações aplicou-se uma tarefa baseada em questões presentes nos trabalhos de Kawamoto (2016) e Fernández (2011).

Uma das unidades de análise deste estudo de casos é constituído por 27 acadêmicos de uma das três turmas do curso de Matemática de uma Universidade ao norte do Paraná, que ingressaram no ano de 2018 (estes participantes estão denotados por I1, I2, ..., I27) e a outra é constituída por 15 acadêmicos que estão nos anos finais do curso e que já terminaram as disciplinas de Geometrias, bem como egressos que terminaram o curso de Matemática, referido acima, no ano de 2017 (estes participantes estão denotados por J1, J2, ..., J15).

O uso do estudo de casos justifica-se por, como Yin (2005, p. 32), entendermos que "o estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real". E que o propósito de um estudo de caso é reunir informações detalhadas e sistemáticas sobre um fenômeno (PATTON, 2002). Seguindo as especificações de Yin (2005) viu-se pelo objetivo dessa pesquisa que essa se encaixa nos preceitos do estudo de casos múltiplos, visto que nossa motivação é identificar as habilidades visuais dos acadêmicos ingressantes e daqueles que já cursaram as disciplinas de geometria da grade de Matemática, como eles as utilizam nas justificativas das resoluções das tarefas, comparando os dois grupos.

Os dados foram obtidos por meio da aplicação de uma tarefa e categorizados segundo a Análise de Conteúdos, por entendermos do mesmo modo como Câmara (2013), que segundo a perspectiva de Bardin, essa é uma técnica metodológica aplicável em discursos diversos e a todas as formas de comunicação, seja qual for à natureza do seu suporte. Nele o analista precisa entender o sentido da comunicação, como se fosse o receptor normal, porém, e principalmente, precisa desviar o olhar, buscando outra significação, outra mensagem, passível de se enxergar por meio ou ao lado da primeira. Essa metodologia, segundo Bardin (2011), é composta por três fases básicas a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados. Sendo a primeira fase a etapa de organização, a segunda é marcada pela escolha das unidades de codificação, adotando-se os procedimentos de codificação, classificação e categorização, por fim, a terceira fase do processo, é a fase analítica, envolve o tratamento dos resultados, englobando a inferência e interpretação.

E que há muitas variações na maneira de conduzir as três fases da análise propostas por Bardin e que a forma de tratar as unidades também se diferencia, alguns procuram desenvolver a

análise da estrutura lógica do texto ou de suas partes, e outros, ainda, centram sua atenção em temáticas determinadas.

A seguir apresentaremos a tarefa considerada para obtenção dos dados, seguida das análises e resultados obtidos.

Resultados

A seguinte tarefa foi aplicada nessa investigação:

Desenhe, aproximadamente, quais corpos obteremos girando as seguintes figuras em relação aos eixos indicados.

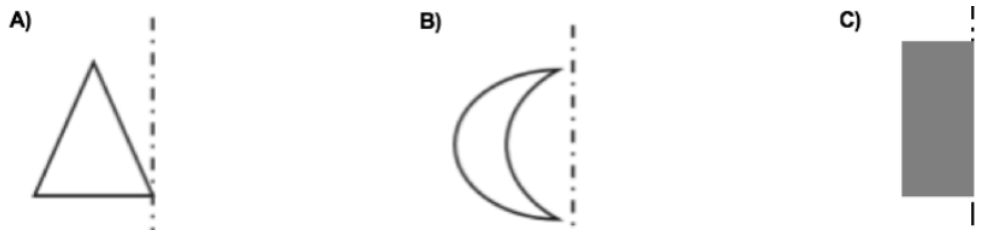


Figura 01: Imagens da tarefa aplicada.
Fonte: Os autores.

A seguir estão os objetivos estabelecidos visando nortear a categorização para análise.

Objetivos:

1. Categorizar as resoluções nas possíveis configurações cognitivas:
   a. Compreendeu que era uma superfície e acertou:
   i. as três superfícies, ou
   ii. duas, ou apenas
   iii. uma superfície;
   b. Não compreendeu que era uma superfície e fez:
   i. reflexão (considerando o eixo de rotação como eixo de simetria), ou
   ii. rotação no plano (desconsiderando o eixo de rotação dado), ou
   iii. não fez nem rotação nem reflexão.
2. Verificar se os participantes mobilizam habilidades de visualização (HV), em especial a rotação mental (RM): se por meio da representação figural ou descrição em língua natural, dá indícios que produz imagens mentais dinâmicas e se é capaz de visualizar uma configuração em movimento.

Nas tabelas 1 e 2 a seguir, apresenta-se uma categorização pautada nos objetivos 1 e 2 (O1 e O2) em que estão sinalizados com X os itens os quais concluiu-se terem sido alcançados pelos participantes. Entende-se também que marcado X no objetivo O-a-iii, o participante mobiliza a HV de RM, ou seja, alcançou o O2. No caso de terem sido marcados O-a-i ou O-a-ii entende-se que há indícios de mobilização da RM. Sendo a Turma J, o grupo composto pelos participantes que já cursaram as disciplinas de geometria e a Turma I os alunos ingressantes.

Tabela 1

Dados da análise da Tarefa – Turma J

	O1-a			O1-b			
Sujeitos	a-i	a-ii	a-iii	b-i	b-ii	b-iii	OBS

J1		X		Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Apresenta RM.
J2			X	
J3			X	
J4		X		Apresenta RM.
J5	X			Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Erra o desenho no item A. Há indícios de RM.
J6	X			Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Escreve para especificar detalhes da superfície. Há indícios de RM.
J7		X		Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Apresenta RM.
J8	X			Erra o desenho nos itens A e B. Há indícios de RM.
J9		X		Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Erra o desenho nos itens A e B. Apresenta RM
J10	X			Não faz a superfície B corretamente, falta a circunferência que daria o efeito tridimensional, mas em A e C há indícios de RM.
J11		X		Apresenta RM. Será mostrado a seguir como pensou J11.
J12		X		Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Escreve para especificar detalhes da superfície. Apresenta RM.
J13		X		Apresenta RM.
J14	X			Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Erra o desenho no item A. Há indícios de RM.
J15		X		Faz o desenho fora da reta suporte no item B. Apresenta RM.

Fonte: os autores. 2018.

Pode-se observar na tabela 1 que aproximadamente 87% dos participantes da turma J conseguiram visualizar a superfície de revolução em pelo menos um dos 3 itens da tarefa, ou seja mobilizaram a RM. Desses 53% responderam o esperado na tarefa e apenas 13%, aproximadamente, não identificaram a resposta como superfície e entenderam o eixo de rotação como um eixo de simetria, apresentando como resposta uma figura plana simétrica à inicial.

Um exemplo de solução desta turma, está na figura a seguir.

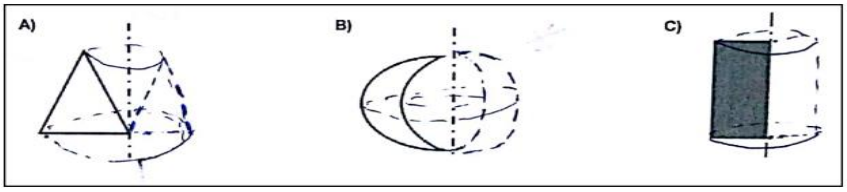


Figura 02: Exemplo de resposta do participante J11, da turma J, que apresenta RM.
Fonte: autores. 2018.

Tabela 2

Dados da análise da Tarefa – Turma I

Sujeito	O1-a			O1-b			OBS
	a-i	a-ii	a-iii	b-i	b-ii	b-iii	
I1	X						Porém desenha e apaga as figuras simétricas nos itens A e B. Há indícios de RM
I2				X			
I3		X					Porém não desenha, mas descreve verbalmente a superfície. Há indícios de RM
I4				X			
I5					X		Faz rotação similar a simetria central, em relação ao ponto "sul" da figura em relação ao eixo de rotação e translada as figuras.
I6				X			
I7					X		Aplica giro de 180º em torno do eixo, e um giro de 90º no plano.
I8				X			
I9				X			
I10				X			
I11						X	Será descrito a construção de I11 na sequência.
I12			X				Porém não desenha, mas descreve verbalmente a superfície. Apresenta RM.
I13				X			
I14				X			
I15				X			
I16					X		Aplica um giro de 90º no plano, com centro de rotação bem definido.
I17				X			Faz reflexão nos 3 itens, porém no item A faz como uma representação plana frontal.
I18						X	
I19					X		Faz rotação de 180º, com centro de rotação bem definido.
I20					X		Em B e C, faz rotação de 90º, com centro de rotação bem definido. Em A faz uma rotação de 180º e uma translação.
I21				X			
I22				X			
I23				X			
I24				X			Considera o simétrico nos itens B e C. Em A temos b-iii.
I25			X				Não desenha, mas descreve verbalmente a superfície. No item A, desenha a vista superior. Apresenta RM.
I26				X			
I27			X				Apresenta RM

Fonte: os autores. 2018.

Na tabela 2, pode-se observar que aproximadamente 81% dos participantes da turma I não identificaram a resposta como superfície, desses aproximadamente 55% entenderam o eixo de

rotação como um eixo de simetria, 18% fizeram uma rotação no plano e cerca de 7% não fez rotação ou reflexão. Apenas cerca de 11% responderam o esperado, 4% conseguiram apresentar a superfície em 2 itens e outros 4% apresentaram a superfície em um dos itens. Vale destacar que I11, utilizando uma descrição por meio da língua natural, mostra que entende o que significa rotação em torno de um eixo, mas não vê a construção de uma superfície tridimensional, mas sim visualiza o movimento da superfície plana com um único ponto de vista, descrevendo cada momento o que acontece, por exemplo, dizendo que "quanto mais próximo de 90º, a figura se aproxima de uma 'reta'". Fica claro que este participante quer dizer que quando a figura plana faz uma rotação de 90º, parecerá para ele (como um observador em um ponto de vista fixo) um segmento de reta, descrevendo assim, o que ele verá em cada momento. Isto indica que ele mobiliza a RM, porém não compreende o que significa a superfície. Desse modo, considerando I11, há indícios de que cerca de 23% dos integrantes da turma I mobilizaram a RM.

A figura a seguir destaca a resposta de I11.

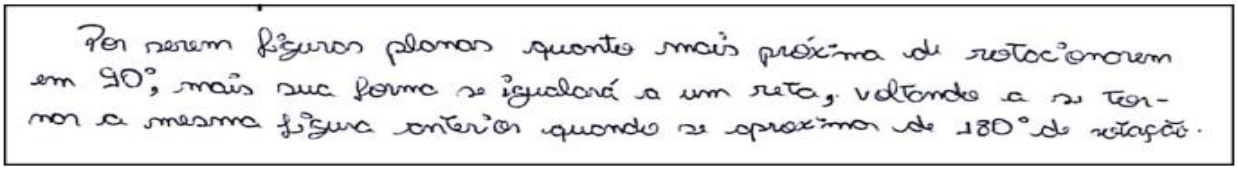


Figura 03: Exemplo de resposta de um participante da turma I.
Nota: Apesar da resposta não ser a desejada, este participante mostra RM. Fonte: autores.2018.

Discussões

Pela análise realizada infere-se que a maior parte dos integrantes da turma J mobiliza a habilidade de visualização de rotação mental, sendo apenas cerca de 13% aqueles que não apresentam indícios de mobilização desta. Nota-se que esses participantes apresentam uma boa compreensão dos conceitos de Geometria envolvidos na tarefa. No caso dos participantes da turma I, pode-se inferir que 81% não demonstram a mobilização da RM, e apenas 23% aproximadamente aparentam fazer a mobilização. Acredita-se que podem haver falhas na compreensão dos conceitos de Geometria envolvidos na tarefa. Conclui-se, considerando a turma I de ingressantes e a turma J daqueles que já terminaram as disciplinas de Geometrias, que nesse caso há uma diferença significativa entre ambos. Os integrantes da turma J tiveram um melhor desempenho se comparado ao da turma I, o que leva a inferir que o fato de já haver cursado as disciplinas de Geometria do curso de Matemática contribuiu para uma melhor compreensão de conceitos de Geometria e também, pode ter contribuído para o desenvolvimento da habilidade de visualização de rotação mental.

Considerações Finais

Infere-se com esse estudo, que para as unidades de análise investigadas aqui, há uma diferença significativa entre o grupo dos ingressantes e o daqueles que já cursaram as disciplinas de Geometria do curso de Matemática. Os que já cursaram as disciplinas de Geometria, nesse estudo, tiveram um melhor desempenho se comparado ao grupo dos ingressantes, o que leva a crer que o fato de já haverem cursado as disciplinas de Geometria pode ter contribuído para uma melhor compreensão de conceitos de Geometria envolvidos na tarefa e para o desenvolvimento da habilidade de visualização de rotação mental.

A análise do desempenho da turma I nos leva também a refletir se a falta de conhecimento teórico de Geometria requerido na tarefa prejudica nas resoluções, e até mesmo na mobilização e no desenvolvimento das habilidades de visualização.

Pretende-se dar continuidade a essa pesquisa buscando aprimorar os instrumentos de coleta de dados e de análise, com um grupo menor de colaboradores. Pretende-se elaborar mais tarefas direcionadas a analisar a mobilização de outras habilidades de visualização, não só a rotação mental, visando uma maior precisão na verificação de quais habilidades são mobilizadas pelos ingressantes e pelos pesquisados que já cursaram as disciplinas de Geometria do curso de Matemática.

Referências e bibliografia

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo.* São Paulo: Edições 70.

Câmara, R. H. (2013). Análise de conteúdo: da teoria à prática em pesquisas sociais aplicadas às organizações. *Gerais: Revista Interinstitucional de Psicologia*, 179-191.

Fernández, M. T. (2011). Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial. 465 f. Santiago de Compostela, Espanha: Universidad de Santiago de Compostela.

Fernández, M. T. (2014). Atendiendo habilidades de visualización en la Enseñanza de la geometría. *IX Festival Internacional de Matemática* (pp. 21-33). Quepos, Punteranas, Costa Rica: Universidad de Santiago de Compostela. Acesso em 13 de 03 de 2018, disponível em http://revistas.tec.ac.cr/index.php/memorias/article/view/2505/2293

Flores, C. R., Wagner, D. R., & Burato, I. C. (2012). Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. *Educ. Matem. Pesq, 14*, 31-45.

Godino, J. D., Gonzato, M., & Blanco, M. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 99-117.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., & yFernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 2*, 109-130.

Grande, J. D. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 14-20.

Gutiérres, A., Guillén, G., Cárceres, M., & Jaime, A. (1992). *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* Valencia, Espanha: Institución Valenciana de Estudios e Investigación "Alfonso el Magnánimo".

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Kawamoto, M. (2016). Habilidades de visualização em Geometria espacial: um diagnóstico com alunos de 3º ano do Ensino Médio. 180. São Paulo.

Patton, M. G. (2002). *Qualitative Research and Evaluation Methods* (3 ed.). CA: Sage: Thousand Oaks.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics 6*, 42-46.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Emergency from psychology*.

Santos, A. H. (2014). Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização. 97 f. Curitiba, Paraná, Brasil:

Habilidade de visualização: um comparativo por meio da resolução de tarefas, com foco na rotação

Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) Universidade Federal do Paraná.

Yin, R. K. (2005). *Estudo de caso: planejamento e métodos* (3 ed.). Porto Alegre: Bookman.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A experiência do Cálculo no universo das histórias em quadrinhos

Tatiane da Silva Evangelista
Universidade de Brasília
Brasil
tatilista@gmail.com

Resumo

O presente trabalho apresenta histórias em quadrinhos (ou tirinhas) cujo enredo abordam contéudos de Cálculo. Essas tirinhas foram idealizadas com o objetivo de melhorar o aprendizado de graduandos na disciplina de Cálculo de várias variáveis, de identificar e de analisar as ações dos estudantes no seu uso. A fim de fomentar a confecção das tirinhas, serão apresentados aspectos das histórias em quadrinhos e da aprendizagem significativa. Por fim, um questionário foi realizado, com os alunos, a fim de coletar informações quanto à metodologia implementada e podendo-se concluir que, o universo das tirinhas, no ensino de Cálculo, tornou o estudo mais significativo, descontraído e eficaz.

Palavras chaves: educação superior, Cálculo, HQ, ensino e aprendizagem.

Introdução

O elevado índice de reprovação, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, constitui uma dura realidade que incomoda os docentes e os discentes dos cursos de exatas das principais universidades. Estudos que procuram as causas deste problema foram realizados, destacando-se o trabalho de Mello (2001), o qual aponta os seguintes motivos: a crença dos alunos e professores de que a reprovação e fracasso são normais nessa disciplina, a escassez dos conhecimentos prévios que deveriam ter sido adquiridos pelos estudantes nos níveis de ensino anteriores, a falta de interesse e motivação por parte dos alunos, a falta de uma boa formação dos profesores, a grande quantidade de novos conceitos trazidos pela disciplina e a escassez de metodologias de ensino alternativas.

Diante da situação estabelecida, faz-se necessário uma reflexão a respeito dessas dificuldades notadas e um redirecionamento do trabalho para que se possa dar um suporte maior aos estudantes e tentar sanar essa problemática. Nesse bojo, as universidades têm adotado algumas iniciativas, sendo as principais: implantação de disciplinas preparatórias (por exemplo,

Pré-Cálculo) e implantação de monitorias.

Atualmente, a utilização de atividades lúdicas vem conquistando espaço no ensino superior. Assim, o objetivo desse artigo é relatar uma experiência lúdica que usa das histórias em quadrinhos (HQ),como recurso didático para o ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de várias variáveis para os cursos de Engenharias da Universidade de Brasília (UnB), campus Gama (FGA- Faculdade do Gama).

Inicialmente, faremos um breve referencial teórico do conceito de HQ e aprendizagem significativa. Em seguida, relatamos as características dos alunos envolvidos no curso de Engenharia, em que o trabalho foi desenvolvido, e o relato da experiência. Por fim, mostraremos os resultados obtidos e as conclusões.

Referencial teórico: histórias em quadrinhos e aprendizagem significativa

Nesta seção, apresenta-se duas linhas de pesquisa que fornecem sustentabilidade teórica ao trabalho: as histórias em quadrinhos e a aprendizagem significativa.

Sob um ponto de vista mais geral, uma HQ ou quadrinhos ou tirinhas são narrativas feitas com desenhos sequenciais, em geral no sentido horizontal, com textos curtos de diálogo (balões) e algumas descrições da situação. Os aspectos essenciais de uma HQ são: balões, onomatópeia, diagramação, recordatórios e calha ou sarjeta.

O uso das HQ no ensino já é reconhecido pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (BRASIL, 1996) e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 2002). Segundo Vergueiro (2004) existem vários motivos para que as HQ's possam auxiliar no ensino, tais como: as palavras e as imagens, juntas, ensinam de forma mais eficiente; os quadrinhos auxiliam no desenvolvimento do hábito de leitura; a linguagem quadrinhística obriga o leitor a pensar e imaginar; os quadrinhos podem ser utilizados em qualquer nível escolar e com qualquer tema, etc. Na literatura encontra-se vários trabalhos usando as HQ no ensino fundamental e médio, mas a nível universitário são poucos.

Nesse sentido, destacamos os trabalhos de Oliveira (2010) e Felix (2016) que relatam experiências em sala de aula para acadêmicos. Ambos propõem a produção de HQ pelos alunos. Destaca-se que no trabalho de Felix (2016), além de propor a confecção de HQ, usando as habilidades de desenho dos alunos, também eram apresentados alguns recursos tecnológicos que facilitam a criação, oportunizando fazer associações com conteúdos matemáticos e com a resolução de problemas. O objetivo principal era a produção de HQ para a resolução de problemas matemáticos relacionados com situações cotidianas dos estudantes.

Nessa perspectiva, as HQ's desse artigo, que serão apresentadas nas próximas seções, trata-se de tirinhas (HQ menores com três quadrinhos) humorísticas que propuseram aos estudantes a identificar, a analisar e a usar o conteúdo matemática no enredo da tirinha para em seguida, usar para a resolução de problemas matemáticos, fato este que reforça o esboço de considerações sobre aprendizagem significativa.

Dentre as diversas definições de aprendizagem significativa, destaca-se aquela apresentada por Ausubel (2002), o qual afirma que a aprendizagem significativa é o processo que se caracteriza pela associação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não-literal e não-arbitrária. Nesse procedimento, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior

estabilidade cognitiva.

Caso essa junção não seja efetivada, ocorrerá uma aprendizagem mecânica, apoiada em tarefas constituídas de associações puramente arbitrárias, que exigem do aluno a reprodução do conceito que lhe foi "transmitido", sem que este faça associações a conhecimentos previamente adquiridos. Novamente segundo Ausubel (2002), as condições para que haja a aprendizagem significativa são: o material e aprendizagem devem apresentar significado lógico e disponibilidade de conteúdo de significado psicológico. Nessa perspectiva, as tirinhas podem, assim, favorecer a passagem do lógico ao psicológico, tornando-se uma das justificativas da elaboração de nossa proposta. Entendemos, dessa forma, que as HQ's em sala de aula devem dar ênfase a situações problemáticas que favoreçam a apreensão de novos conceitos, acentuando a lógica dos conteúdos, identificando também suas relações com outras disciplinas e com outras noções matemáticas que estejam relacionadas de alguma forma aos assuntos em estudos. A interpretação e a compreensão de ideias matemáticas, a nosso ver, podem ser facilitadas quando ao invés de as apresentarmos como verdade perfeita e acabada, destacarmos as ideias que possam levar os discentes a construírem relações necessárias à apreensão dos conceitos em estudo. Sendo assim, acreditamos que o envolvimento dos alunos em atividades estruturadas como aquelas baseadas nas tirinhas possibilitem a exploração e a descoberta em um processo de investigação que contribua para que os estudantes façam conexões entre informações novas e antigas. Tendo em vista a estruturação teórica organizada até este ponto, na próxima seção será relatado a experiência do uso das tirinhas na disciplina de Cálculo.

Característica dos discentes da disciplina de Cálculo da FGA

A experiência foi desenvolvida na Faculdade do Gama (FGA), que é uma extensão da Universidade de Brasília (UnB) na região administrativa do Gama da capital federal. Abriga cinco cursos da área de engenharia: aeroespacial, automotiva, eletrônica, energia e software.

A FGA faz parte do projeto de expansão das universidades federais, o Reuni. Entrou em funcionamento no segundo semestre de 2008. O ingresso dos alunos se dá por três formas:

a) Vestibular: Normalmente o edital de abertura inscrição é lançado em abril e a prova é em junho. Para quem passa no vestibular, as aulas iniciam-se no 2º semestre do ano. São 280 vagas.

b) PAS (Programa de Avaliação Seriada): O PAS ocorre em três etapas, sendo que a primeira prova é feita durante o primeiro ano do ensino médio, a segunda avaliação durante o segundo ano do ensino médio e a terceira prova durante o terceiro ano do ensino médio. Quem passa começa as aulas no 1º semestre do ano. São 140 vagas.

c) SiSU (Sistema de Seleção Unificado): Através da nota do ENEM, o candidato concorre a 140 vagas para os cursos da FGA e quem passa na prova começa as aulas no 1º semestre do ano.

Em geral, todo semestre ingressam-se 280 alunos. Cada turma de Cálculo da FGA é composta em média por 120 alunos. Esses alunos ingressam no primeiro ano do curso com muita dificuldade em conceitos básicos da Matemática Elementar.

Vale a pena destacar, que o uso dessa metodologia foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Faculdade de Saúde da UnB, sob o protocolo CAEE 72644517.7.0000.0030.

Relato da experiência

A ideia das HQ's surgiu a partir da insatisfação da autora do desempenho dos estudantes na disciplina de Cálculo 3, quando lecionava no segundo semestre 2016, cujo conteúdo aborda conceitos de Cálculo Diferencial e Integral para várias variávies. Na tabela abaixo, consta o desempenho de aprovação, reprovação e trancamento na disciplina no ano mencionado. O índice de trancamento de 30% foi um alerta à professora, pois ficou bem claro que os alunos estavam desestimulados com a disciplina ministrada de forma tradicional – professor no quadro com aulas expositivas, de exercícios e avaliações presenciais.

Tabela 1

Estatística do desempenho dos alunos da FGA na disciplina Cálculo 3 – 2 º/2016- antes do uso HQ

Alunos	Aprovação	Reprovação	Trancamento
119	58%	12%	30%

Fonte: arquivo da autora. 2016.

No primeiro semestre de 2017, iniciou-se o uso de HQ's na disciplina de Cálculo 3 lecionado pela autora. A abordagem das HQ's foi organizada em quatro etapas.

Na primeira etapa, oferecemos a grupo de quatro a cinco graduandos tirinhas confeccionadas pela própria docente, em média eram quatro tirinhas. Essas tirinhas abordavam um único tema do conteúdo de Cálculo abordadas de maneiras distintas (algumas com contextos teóricos e outras com aplicações práticas). Para cada uma das HQ's, os graduandos resolviam as questões em grupos. Nesse momento inicial, procuramos situar essa ferramenta didática como complemento às aulas na resolução de exercícios e fixação da teoria. Depois de feita as atividades, a docente discutia com a turma todas as tirinhas.

Na segunda etapa, que ocorreu de forma não presencial, foi proposto aos alunos a construção de HQ's de próprio punho. Nessa atividade não presencial, os graduandos escolhiam o tema para a elaboração das tirinhas e fizeram essa atividade em grupo de quatro a cinco estudantes. Foi agendado um dia para que os alunos entregassem essa atividade por escrito.

Na terceira etapa, em sala de aula, foram analisadas as tirinhas feitas pelos alunos. Em grupos, os discentes exploravam as tirinhas de cada grupo da turma. Nessa etapa, foram exploradas tirinhas abordando conteúdos distintos. No final, a docente discutia todas as HQ's com a turma.

Na quarta etapa, foi aplicado um questionário, composto de quatro questões para avaliar a percepção dos alunos na utilização das HQ's na disciplina de Cálculo, nos cursos de engenharia da FGA. Esta pesquisa apresentou questões onde os alunos responderam o quanto concordavam com as afirmativas, através de uma escala Likert (Rensis Likert, psicólogo americano que concebeu em 1932 uma metodologia para mensurar a atitude dos seus pacientes e hoje isto é utilizado em metodologias científicas pesquisa).

Participaram dessas atividades 341 alunos dentre os semetres 1º/2017, 2º/2017 e 1º/2018. Enfatiza-se que o objetivo essencial deste trabalho é a apresentação dos relatos das experiências didáticas utilizando as HQ's no processo ensino e aprendizagem de Cálculo. Sendo assim, outro estudo sobre uma análise estatística, tanto descritiva como inferencial, ficará como perspectiva.

A seguir, apresentamos duas tirinhas desenvolvidas nesse trabalho com temas distintos.

Tema 1: Teorema da Mudança de Variável em coordenadas polares



Figura 1. Tirinha: o triângulo amoroso.

Tema 2: Derivadas parciais de 1ª ordem



Figura 2. Tirinha: o quadrado.

Os discentes se divertiram muito com as tirinhas apresentadas acima. A primeira tirinha, aborda o uso do Teorema da Mudança de Variável em coordenadas polares para o cálculo de integral dupla. A maioria dos alunos concluiram que o pivô da triangulação amorosa (o jacobiano) é fundamental para a resolução de exercícios que usa esse teorema como suporte teórico. Foi uma atividade relevante, pois os alunos sempre esqueciam de determinar o jacobiano na solução de problema e depois, dessa tirinha nunca mais esqueceram. A segunda tirinha, reforça a definição de derivadas parciais de 1ª ordem. É interessante relatar, que nessa tirinha o teor humorística motivou aos discentes a clareza da formalidade desse conceito tão importante no cálculo de derivadas de varias variáveis.

Em ambas tirinhas, os estudantes conseguiram identificar, analisar e usar os conteúdos matemáticos abordados de maneira clara, divertida, eficiente e significativa.

Resultados da pesquisa

Com a finalidade de coletar informações quanto ao uso do universo das tirinhas no ensino de Cálculo os estudantes que participaram dessa atividade, por semestre 100 alunos, responderam um breve questionário (voluntariamente) que abordava as seguintes questões:

a) Questão 1: O uso de HQ é adequada para o desenvolvimento do conteúdo da disciplina.

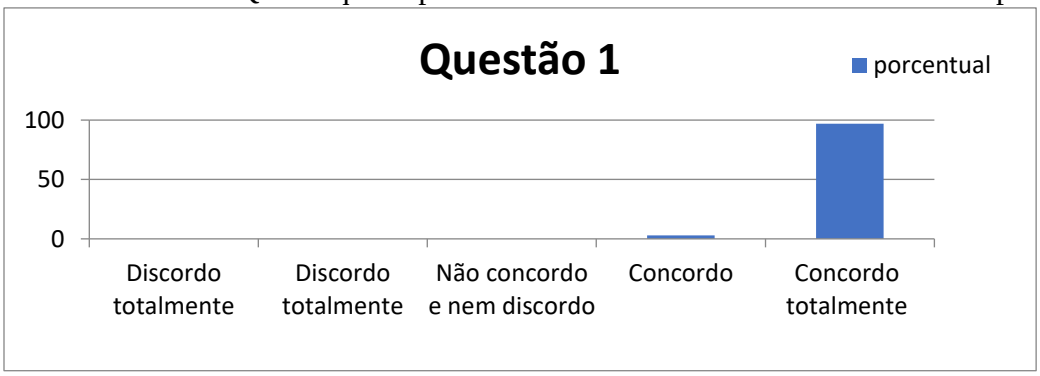


Figura 3. Demonstrativo gráfico das respostas da questão 1.

b) Questão 2: A metodologia aplicada na disciplina de Cálculo 3 contribui de forma significativa para sua formação acadêmica geral.

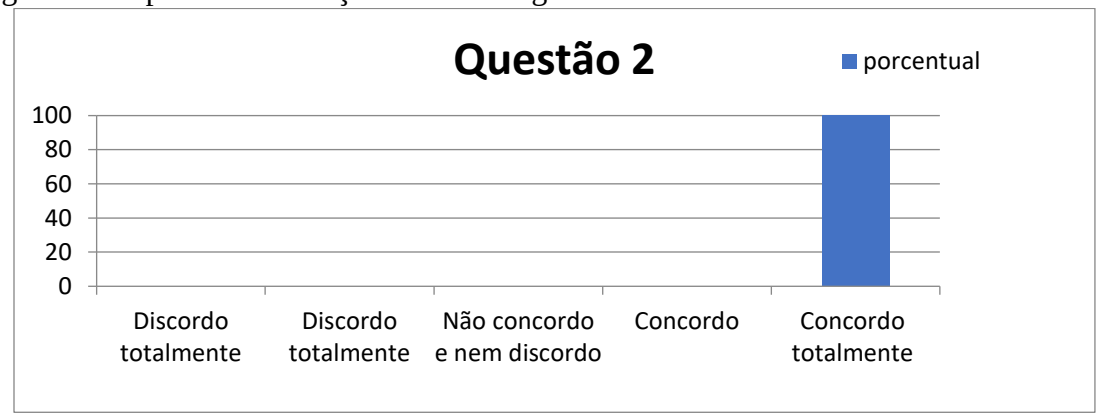


Figura 4. Demonstrativo gráfico das respostas da questão 2.

c) Questão 3: A utilização dessa metodologia estimulou o comprometimento com a disciplina como assiduidade e atenção às dúvidas.

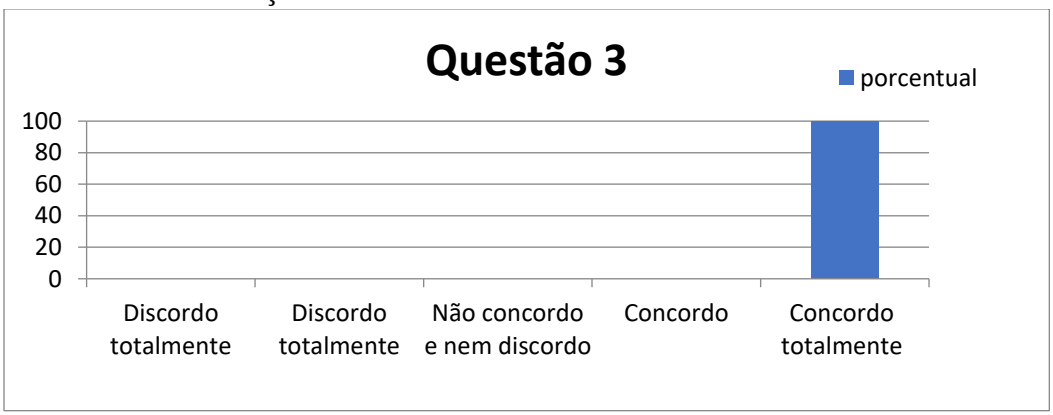


Figura 5. Demonstrativo gráfico das respostas da questão 3.

d) Questão 4: O uso de HQ deveria ser usada em outras disciplinas.

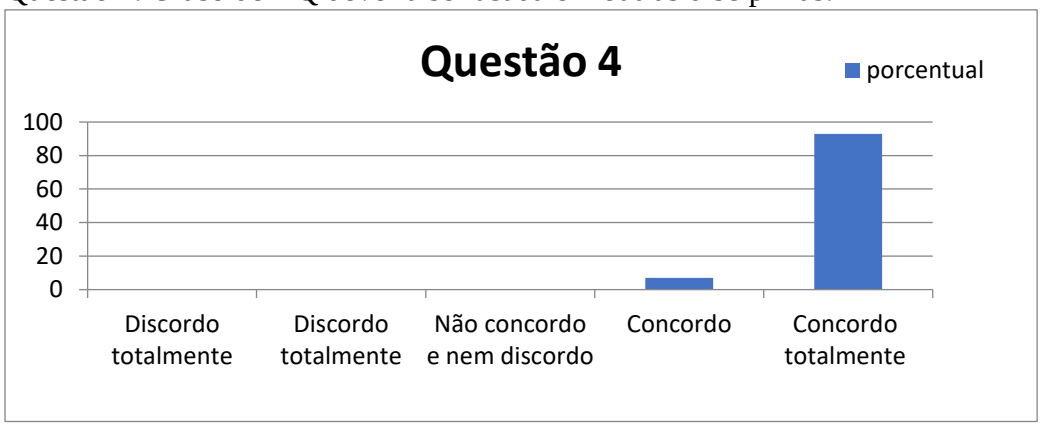


Figura 5. Demonstrativo gráfico das respostas da questão 4.

A análise dos dados consolidados da pesquisa nos permite concluir que com relação ao objeto principal da pesquisa, o uso de HQ's na disciplina de Cálculo, melhorou o índice de aprovação dos alunos e também, a frequência dos alunos aumentou em sala de aula, o que nos possibilita concluir que houve um interesse maior na participação destes, o que possivelmente refletiu uma melhoria nos resultados obtidos em termos de aprovação na disciplina, após a implantação do uso das HQ's, como pode-se ver na Tabela 2 comparada com a Tabela 1.

Tabela 2

Estatística do desempenho dos alunos da FGA na disciplina Cálculo 3 – após o uso das HQ's

Semestre	Alunos	Aprovação	Reprovação	Trancamento
1º/2017	128	61%	34%	5%
2º/2017	123	70%	27%	3%
1º/2018	90	83%	14%	3%

Fonte: arquivo da autora. 2017 e 2018.

Quanto à avaliação da percepção dos alunos, na aplicação dessa metodologia, os resultados da pesquisa mostram que o uso das HQ's, obteve uma avaliação muito positiva. Os resultados demostraram que além da questão objetiva de melhoria nas aprovações, em ambas as disciplinas, a motivação para as aulas e a aceitação à metodologia ficaram refletidas nas respostas de "Concordo Totalmente".

Um destaque importante na pesquisa é em relação as médias finais na disciplina e a assiduidade/interesse dos alunos, em sala de aula, o que reforça a ideia de que na percepção deles, a quebra do paradigma da aula tradicional funcionou positivamente.

Conclusão

Com os resultados obtidos no presente trabalho, foi possível observar que, tanto por parte dos alunos, quanto pela docente, o uso de HQ, no processo ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo, proporciou momentos de descontração, despertando o interesse dos alunos, o que possibilitou um melhor aprendizado dessa matéria. A abordagem apresentada tornou mais fácil ao estudante criar associações e generalizações dessas atividades com os conteúdos algébricos

relacionados. Podemos afirmar que o uso das tirinhas possui um grande potencial para trabalhar com a resolução de problemas e revisão de conteúdos matemáticos, por meio das situações ilustradas, permitindo ao aluno desenvolver o senso crítico, diante da temática apresentada, desenvolver o raciocínio lógico, ao diagnosticar as mensagens dos quadrinhos, estimulando a investigação e associações com outras disciplinas.

Assim sendo, acredita-se que a utilização das HQ's, inseridas nas aulas de matemática possibilitam despertar nos estudantes maior interesse e motivação em aprendê-la, através da forma descontraída que aborda diferentes conceitos, contribuindo para a melhora no ensino e aprendizagem de matemática. A observação do comportamento dos alunos frente aos problemas propostos, e também do comprometimento por eles demonstrado na procura por solução, corrobora os dizeres de Dewey (1959), em relação ao fato da aprendizagem ocorrer efetivamente somente nos casos em que há um problema real para se resolver. No ensino de matemática, as práticas reais propiciam um ambiente no qual o conteúdo deixa de possuir um caráter estritamente abstrato e passa a ser visto como algo rotineiro, aplicável no dia a dia e de fácil acesso.

Referências

Ausubel, D. P.(2002) Adquisición y retención del conocimento: Una perspectiva cognitiva. Barcelona ed. Paidós.

Brasil.(1996) Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei n 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

Brasil. (2002)Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. p. 59 – 86.

Dewey, J. (1959). Democracia e educação: introdução à filosofia da educação. 3a. ed. São Paulo: *Nacional.* Tradução de Godofredo Rangel e Anísio Teixeira.

Felix, G. (2016) produção de histórias em quadrinhos para a resolução de problemas matemáticos: o relato de uma experiência na iniciação à docência. *Anais do congresso Encontro Nacional de Educação Matemática*.

Mello, J.; Mello, M. & Fernandes, A.(2001). Mudanças no ensino de Cálculo I: Histórico e Perspectivas. Niterói: *Cobenge*, .

Oliveira, L; (2010) História em quadrinhos e matemática, essa conexão é possível? *Anais congresso Encontro Nacional de Educação Matemática*.

Vergueiro, W.; Rama, A. (2004) Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula. São Paulo: *Contexto*.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Objetos matemáticos no ensino e na aprendizagem da Matemática: dos modelos concretos à realidade virtual

André Lúcio Grande
Faculdade de Tecnologia de Mauá – Fatec-Mauá
Brasil
andreluciogrande@gmail.com

Resumo

Este trabalho objetiva apresentar um breve panorama do uso de alguns modelos físicos e recursos computacionais voltados ao ensino e a aprendizagem da Matemática em suas diversas áreas, particularmente no Cálculo Diferencial e Integral (CDI), procurando destacar suas potencialidades e contribuições na construção do conhecimento. Diversas pesquisas em educação matemática evidenciam a importância da utilização de tais modelos e recursos no sentido de auxiliar a visualização e a compreensão dos conceitos tanto geométricos quanto algébricos dos objetos matemáticos. Como referencial teórico foram utilizadas as ideias ligadas ao papel da visualização relacionadas ao ensino do CDI defendidas por David Tall. Esta pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, tendo como procedimentos metodológicos a pesquisa documental acerca do tema em questão além do uso do software GeoGebra. Como resultados, destacamos que a utilização por parte profesores e estudantes de tais objetos matemáticos apresenta contribuições significativas na construção do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Modelos Matemáticos, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Visualização, GeoGebra.

Introdução

Os conceitos geométricos bem como algébricos dos objetos matemáticos abordados nos diversos cursos ministrados pelos profesores nas diferentes modalidades de ensino exigem por parte dos estudantes a visualização e a abstração cada vez maiores desses objetos de estudo, com o intuito de concretizar os temas envolvidos buscando assim uma melhor compreensão dos mesmos.

Para que essa visualização se torne possível, muitos professores passaram ao longo do tempo a elaborar e utilizar em suas aulas objetos matemáticos no sentido de explorar muitas propriedades tanto geométricas quanto algébricas desses objetos. Esse fato pode ser constatado,

por exemplo, nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Descritiva, Diferencial ou Algébrica e na Topologia.

O uso de materiais manipulativos, quer sejam concretos ou virtuais, favorece em grande medida a visualização dessas propriedades, auxiliando na construção do conhecimento matemático. No caso dos modelos físicos, esses são fabricados com materiais simples como madeira, plástico,gesso ou fios, e podem representar objetos matemáticos como por exemplo curvas ou superficies. Por seu turno, os objetos virtuais podem ser obtidos utilizando-se de recursos computacionais, que representam determinados modelos concretos.

De um modo geral, deve-se considerar que a questão da visualização foi responsável pela elaboração de muitas ideias por grandes descobertas, assim como levou os matemáticos a alguns resultados enganadores.

A visualização, em linhas gerais, no ensino e aprendizagem do CDI ou na Geometria Analítica permite interpretar informações por meio da construção das representações visuais, de *softwares,* entre outros recursos didáticos.

Pesquisas em educação matemática ressaltam a importância do uso de objetos matemáticos no que tange à importância e ao papel da visualização no proceso de ensino e a aprendizagem da Matemática.

Tall (1991; 2002) discute em seus trabalhos o papel da visualização do contexto do ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) nos últimos anos e suas possíveis contribuições procurando relacioná-lo com as noções de intuição e rigor.

Por visualização, o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentamente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que pensou. Tall (2002) considera a visualização não só relevante à Matemática como à Educação Matemática.

Para isso, o autor ressalta o uso do computador como uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados a explorações sensoriais por meio de percepções, visualização e intuições, se constituindo um "organizador genérico" de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente em que os estudantes podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos.

Sendo assim, essa pesquisa tem por objetivo apresentar um breve panorama do uso de alguns modelos físicos e recursos computacionais voltados ao ensino e a aprendizagem do CDI e da Geometria Analítica, procurando destacar suas potencialidades bem como contribuições para a construção do conhecimento matemático. Posteriormente, será apresentado um exemplo do estudo da representação de um objeto matemático construido no software GeoGebra destinado ao ensino das superficies regradas, particularmente o caso do hiperboloide de uma folha.

Modelos matemáticos concretos: breve contexto histórico

A utilização dos professores e pesquisadores de modelos matemáticos concretos no ensino e aprendizagem é uma prática recorrente nos últimos séculos em diversas universidades em todo o mundo, fruto do desenvolvimento cada vez maior da Matemática em suas áreas afins,

particularmente nos diversos ramos da Geometria como a Descritiva, Analítica, Diferencial e Algébrica.

Na Europa o uso de modelos concretos e instrumentos diversos iniciou-se no século XVII e XVIII. Podemos destacar alguns exemplos tais como os modelos de Théodore Olivier (1793-1853), que estudou na Escola Politécnica de Paris e tornou-se em 1829 um dos fundadores da Escola Central de Artes e Manufacturas. Como professor de Geometria Descritiva da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra atuou na elaboração de modelos de matemática que criou para o auxiliar no ensino da geometria. Alguns destes modelos são de superfícies regradas, tendo partes amovíveis de modo a ilustrar aos estudantes como essas superfícies são geradas.



Figura 1. Modelo do hiperboloide de uma folha (Théodore Olivier)

Olivier ressaltava a utilidade dos seus modelos no ensino da Geometria Descritiva, permitindo aos alunos melhor compreender as propriedades geométricas das superfícies que estudavam. Segundo o autor:

> "É assim que começamos a compreender que, quando queremos falar aos alunos das propriedades de uma superfície, a primeira coisa a fazer é colocar sob os seus olhos o relevo dessa superfície, para que eles vejam distintamente aquilo de que queremos falar-lhes". (Tenreiro, 2015)

Nessa afirmação do autor podemos ressaltar a importância da construção do modelo concreto, no caso representando uma superficie, buscando evidenciar algumas propriedades geométricas do objeto matemático.

Assim como Olivier, o matemático alemão Felix Klein (1849 – 1925) ao lecionar na universidade de Göttingen, na Alemanha em 1886, desenvolveu modelos geométricos e outros objetos ilustrativos tendo sua utilizadade para fins didáticos, contribuindo para a popularização dos mesmos. Um de seus modelos mais conhecidos diz respeito à superfície diagonal de modelo do Clebsch, definida pelas equações:

$$\begin{cases} {x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 + {x_4}^3 + {x_5}^3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Essa superfície cúbica apresenta 27 retas contidas na mesma, representada pelo modelo a seguir:

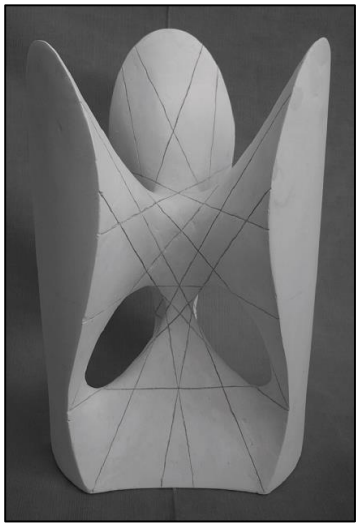


Figura 2. Modelo da superfície diagonal de Clebsch

No Instituto Henri Poincaré, inaugurado em 1928 em Paris, foram adquiridos junto ao Laboratório Superior de Geometria da Faculdade de Ciências da Universidade de Paris alguns modelos matemáticos construídos por Martin Shilling em Leipzig e por Joseph Caron (1849 – 1924) professor de geometria descritiva da universidade para fins educacionais voltados ao ensino prático.

Esses modelos físicos foram confeccionados utilizando dentre outros materiais como madeira, fios, papel e gesso e destinavam-se ao estudo de alguns tópicos como curvas e superfícies, abordadas nos cursos de geometria descritiva, auxiliando na visualização das propriedades geométricas dos mesmos.



Figura 3. Modelos Matemáticos – Instituto Henri Poincaré

Além dos materiais concretos exemplificados anteriormente, nas últimas décadas com o advento cada vez maior dos recursos computacionais no ensino da Matemática, os modelos matemáticos passaram a ser desenvolvidos de maneira virtual, com o uso de computadores, laptopos, tablets, celulares e aplicativos. A seguir mostraremos a utilização do software GeoGebra no estudo das superficies regradas e suas possíveis representações.

Um estudo das superfícies regradas utilizando recursos computacionais

Um exemplo da utilização de modelos matemáticos pode ser dado no estudo das superfícies regradas. Quando desejamos definir ou descrever uma superfície quase que inevitavelmente caímos da redundância da utilização do próprio termo ou evocamos uma superfície plana como exemplo. Podemos definir uma superfície como um conjunto de pontos do espaço euclidiano, sendo bidimensional e que qualquer ponto da mesma pode ser descrito localmente por duas coordenadas. Intuitivamente, podemos obter por exemplo outras superfícies pela deformação ou rompimento de uma folha de papel ou a colagem de alguns pedaços de papel.

As superfícies podem ser classificadas de várias maneiras, tais como superfícies de revolução, paralelas, mínimas ou regradas. Podemos considerar que a palavra regrada possui o significado de "sujeita a regras". Uma superfície regrada é aquela é ser formada por retas, o que lhe confere uma "regra" própria para ser gerada. Elas podem ser completamente determinadas pelo movimento de uma reta no espaço.

Como exemplo de superfícies regradas, temos: cilindro, cone, paraboloide hiperbolico, hiperboloide de uma folha, helicoide ou conoide.

Segundo Struik (1988), o primeiro estudo das superfícies regradas foi efetuado por Gaspar Monge (na obra aplicações da Análise à Geometria), que estabeleceu as equações diferenciais parciais que satisfazem todas as superfícies regradas (de terceira ordem).

Matematicamente, podemos considerar uma superfície regrada como sendo um subconjunto S do espaço euclidiano que para cada $k \in \mathbb{R}$ existe uma reta

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{R}} r_k$$

Para demonstrarmos algebricamente que uma superfície regrada é formada por uma família de retas, vamos considerar por exemplo o hiperboloide de uma folha, cuja equação na forma canônica ao longo do eixo Oz é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Sem perda de generalidade, tomando os valores $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, temos a seguinte equação:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Reorganizando nos dois membros da equação e fatorando os termos algébricos, temos:

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2$$

$$(x+z)(x-z) = (1+y)(1-y)$$

$$\frac{(x-z)}{(1-y)} = \frac{(1+y)}{(x+z)} = k$$

Sendo k uma constante real não-nula, teremos as seguintes situações:

$i)\ \frac{(x-z)}{(1-y)} = k \Rightarrow (x-z) = k(1-y) \Rightarrow x + ky - z = k \qquad (\pi_1)$

$ii)\ \frac{(1+y)}{(x+z)} = k \Rightarrow (1+y) = k(x+z) \Rightarrow kx - y + kz = 1 \quad (\pi_2)$

As equações obtidas em i e ii representam dois planos π_1 e π_2 cujos vetores normais são, respectivamente, $n_1 = (1, k, -1)$ e $n_2 = (k, -1, k)$. Como esses vetores não são proporcionais, os planos π_1 e π_2 são transversais e, portanto, a cada valor de *k*, obtemos a intersecção entre ambos dada por uma reta r_k obtida da seguinte maneira:

$$r_k: \begin{cases} x + ky - z = k \\ kx - y + kz = 1 \end{cases}$$

Essa demonstração algébrica pode ser considerada, em grande medida, trabalhosa. O uso de recursos computacionais pode facilitar a visualização e a compreensão das propriedades geométricas desse objeto de estudo.

Tall (2002) afirma que o uso do computador constitui uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados às explorações sensoriais por meio de percepções, visualizações e intuições. Para o autor, o computador se torna um "organizador genérico" de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente (ou micromundo) em que os alunos podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos. Por meio de um software, portanto, os alunos entram em contato com o objeto matemático.

Com isso, para representarmos geometricamente a situação descrita anteriormente, podemos utilizar o *software* GeoGebra no intuito de auxiliar a visualização e a compreensão do fato das superfícies regradas, tal como o hiperboloide de uma folha, serem formadas por uma união de retas, bem como obter as secções da superficies por meio de planos paralelos aos planos xy, yz e xz, para visualizar que a intersecção dessa superficie com esses planos podem geram curvas como a elipse e a hipérbole.

Além disso, o GeoGebra permite de maneira dinámica a interação com o objeto de estudo, pois ao variarmos os parámetros a, b e c da equação do hiperboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ podemos visualizar as alterações geométricas que ocorrem na superficie em questão, conforme a figura a seguir:

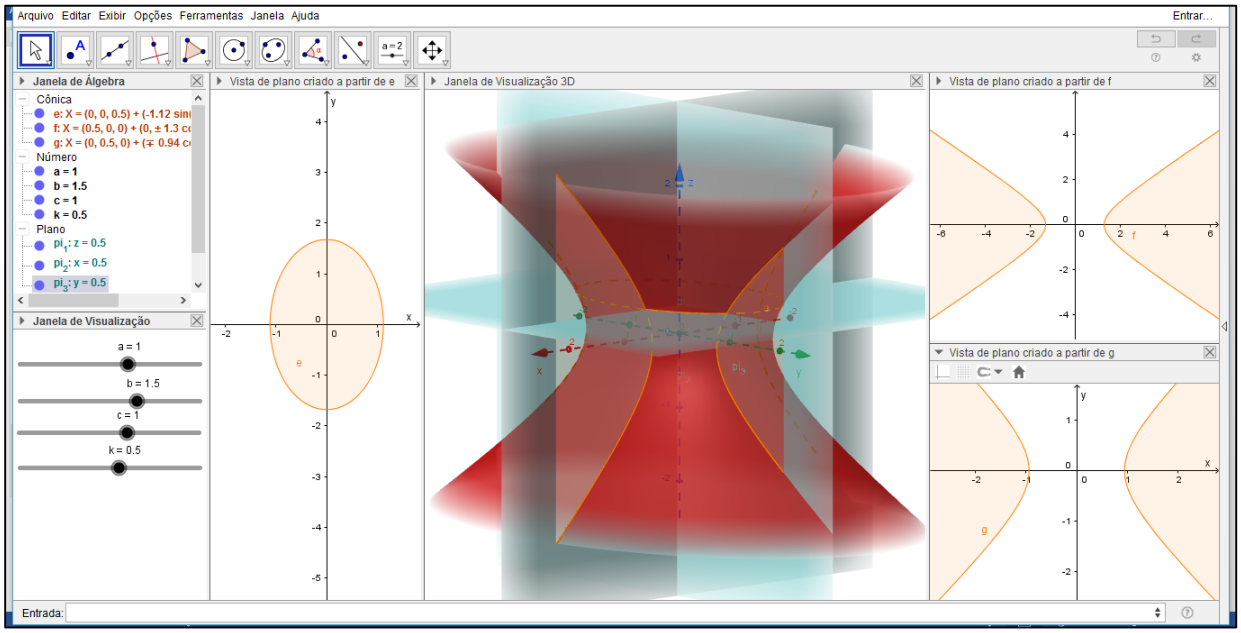


Figura 4. Hiperboloide de uma folha representado no GeoGebra

Considerações Finais

Esta pesquisa apresentou, utilizando-se de exemplos do contexto histórico, da gama de possibilidades de utilização de modelos matemáticos, quer sejam concretos ou virtuais, no sentido auxiliar na visualização e compreensão dos conceitos geométricos e analíticos abordados nos diversos cursos no ensino superior e em suas diversas modalidades, como no Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Descritiva ou Diferencial, por exemplo.

Devemos ressaltar que os modelos matemáticos podem não trazer o rigor matemático exigido em provas e demonstrações, mas possibilita em grande medida desenvolver intuições, gerar conjecturas e testar hipóteses, elementos essenciais para a construção do conhecimento matemático.

A construção de objetos físicos que representam algumas superfícies regradas se revelou um elemento responsável por "concretizar" o objeto de estudo em questão além de permitir elaborar intuitivamente algumas conjecturas e hipóteses sobre as propriedades geométricas de tais superfícies. Já a utilização do GeoGebra auxiliou simular a obtenção das superfícies regradas como o hiperboloide de uma folha, por exemplo, mostrando sua característica de ser formada por retas, assim como contribuiu na formalização das hipóteses e conjecturas intuídas anteriormente.

Destacamos que o ensino e a aprendizagem da Matemática sedimentados em princípios e ideias ligadas ao uso da intuição e do pensamento visual permitem aos estudantes, em grande medida, uma maior participação na construção do conhecimento científico.

Referências e bibliografia

Creswell, J. W. (2010). Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Magda França Lopes. 3ª. ed. Porto Alegre: Artmed.

Carmo, M. P. (2010) Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM.

Grande, A. L. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo

Struik, D. J. (1988). Lectures on Classical Differential Geometry. 2nd ed. New York: Dover Publications.

Tall, D. O. (Ed) (2002). Advanced Mathematical Thinking. Londres, Dordrecht, Kluwer.

Tall, D.O. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In: *Visualizations on Mathematics* (ed. Zimmermann e Cunninghan), M.A.A. Notes No. 19, 105-119.

Tenreiro, C. (2015). Os "Modelos de Olivier" do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. *Gazeta da Matemática. 176, 32-38.*

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Una mirada cognitiva a la construcción de los conceptos de Eigenvectores y Eigenvalores a partir de las transformaciones lineales

Alexander **Betancur** Sánchez
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
alexanderbetancursanchez@gmail.com
Solange **Roa** Fuentes
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander Grupo EDUMAT - UIS
Colombia
sroa@matematicas.uis.edu.co

Resumen

Se presenta una propuesta de investigación que estudia la construcción de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor a partir de la transformación lineal. Para esto se toma una mirada cognitiva orientada por los resultados de investigación reportados sobre el concepto involucrados, se estudia cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción de los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector en estudiantes universitarios de primer año cuando resuelven actividades en el contexto de la teoría de Modelos y Modelación; actividades diseñadas desde la Teoría APOE. Se propone completar el ciclo de investigación de la teoría APOE, hacer sugerencias didácticas y actividades que incluyan problemas en contexto según la teoría de Modelos y Modelación.

Palabras clave: eigenvector, eigenvalor, transformación lineal, teoría APOE, teoría de Modelos y Modelación.

Introducción

El aprendizaje y la enseñanza de los conceptos del álgebra lineal es el interés de investigadores desde diferentes miradas teóricas. En este documento se presenta una mirada cognitiva de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor a la luz de las investigaciones reportadas, se identifica un camino para la construcción sobre la transformación lineal. Después se describe la problemática de la investigación, los elementos teóricos tomados de la teoría APOE, Modelos y Modelación y la metodología de la investigación con el propósito de completar el ciclo propuesto por la teoría APOE.

Acercamientos sobre la transformación lineal

Investigadores que han estudiado los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor han desarrollado acercamientos mediante el concepto de transformacional lineal como estructura base para su aprendizaje. Por ejemplo, Klasa, J. y Klasa, S. (2002) reportan una investigación que estudia la articulación de los modos de pensamiento, geométrico, computacional y algebraico del álgebra lineal. Los conceptos de transformación lineal, Eigenvectores y Eigenvalores se introducen mediante el uso de los softwares *Cabri* y *Maple*. En el entorno de *Cabri* los estudiantes exploraron a profundidad las construcciones mostradas en *Maple*, para transformaciones lineales $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, además el vector resultante bajo la transformación lineal dada. Igualmente Klasa, J. y Klasa, S. (2002) muestran el trabajo realizado por los estudiantes sobre el siguiente problema: "Dada una circunferencia unitaria con centro en el origen , explorar el lugar geométrico que generan los vectores unitarios del plano al aplicar la transformación *T*" (ver figura 1). La actividad propuesta orientaba a los estudiantes a identificar cuándo los dos vectores $w\ y\ T(w)$ son colineales, la condición sobre la matriz asociada a la transformación lineal para que los ejes de simetría sean las líneas de Eigenvectores y el estudio de la convergencia de la órbita de una matriz estocástica para un vector estocástico (Klasa y Klasa, 2002).

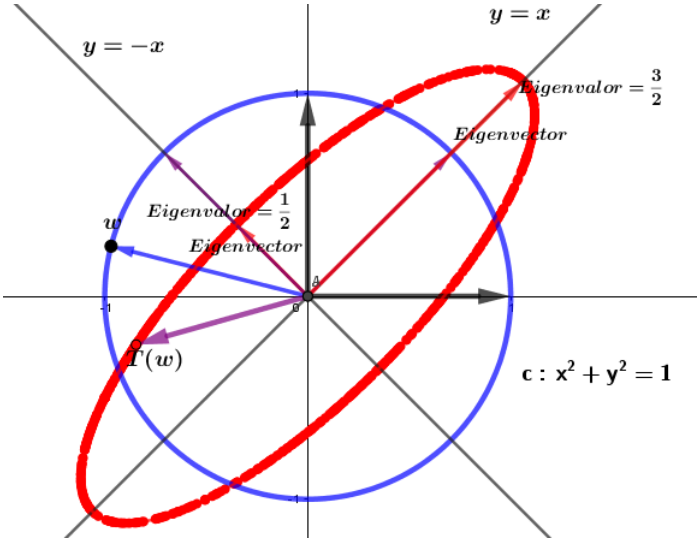


Figura 1. Exploración en Cabri de las líneas de simetría mediante Eigenvectores (Klasa & Klasa, 2002, p.7)

En esta vía Klasa (2010) estudia el diseño de una estrategia de enseñanza sobre los conceptos de transformación lineal, Eigenvectores y Eigenvalores, cónicas, formas cuadráticas y cambio de base, utilizando nuevamente los softwares *Maple* y *Cabri*. La investigadora reporta resultados del diseño de actividades. En este escrito solo se hace referencia a transformaciones lineales, Eigenvectores y Eigenvalores, con el objetivo de identificar cómo emergen los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor a partir de transformaciones lineales. Klasa (2010) usa *Maple* y *Cabri* para estudiar las propiedades de linealidad y relacionarlas con las propiedades del álgebra de matrices. La definición y relación se expresan de la siguiente manera:

Definición. Sea V y W dos espacios vectoriales sobre el campo K, $T\colon V \longrightarrow W$ es una transformación lineal si cumple las siguientes condiciones:

(i) $T(kv) = kT(v)$ para cualquier escalar k y vector v
(ii) $T(v + v') = T(v) + T(v')$

Estas propiedades pueden ser comparadas con propiedades del algebra de matrices:

(i) $A \bullet (kv) = k(A \bullet v)$ donde $\bullet$ es producto de matrices
(ii) $A \bullet (v + v') = A \bullet v + A \bullet v'$

En la exploración de propiedades para la transformación lineal en *Cabri*, la investigadora busca que los estudiantes determinen a partir de la animación, cuándo los vectores v y $T(v)$ son colineales. Para hallar el Eigenvalor los alumnos calculan la longitud de v y $T(v)$ con *Cabri* y realizan el cociente $\frac{||T(v)||}{||v||}$. De esta manera, la definición que resulta de Eigenvectores y Eigenvalores a partir de la transformaciones lineales es: "Un vector v no nulo es un *Eigenvector* de una transformación lineal $T: V \to V$ si tenemos la igualdad $T(v) = cT(v)$ para algún escalar c, llamado entonces el *Eigenvalor* asociado" (Klasa, 2010, p. 2104).

Otros estudios han centrado su perspectiva en las características que deben cumplir los cursos de álgebra lineal en programas de ciencias e ingeniería. En particular Soto y García (2002) analizan en la Universidad de Sonora (México) los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector. Los autores consideran un esquema (ver figura 2) para el estudio de dichos conceptos a partir de la transformación lineal. Usando el ambiente dinámico de *Cabri Geometry* II Soto y García (2000) examinan la conversión entre la representación por una transformación lineal, la matriz asociada y el polinomio característico de Eigenvalores y Eigenvectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. De la exploración en el ambiente dinámico se encuentra que los estudiantes no identifican inicialmente los Eigenvectores como vectores sobre la misma línea asociada; esto causando dificultades con reconocer Eigenvalores negativos.

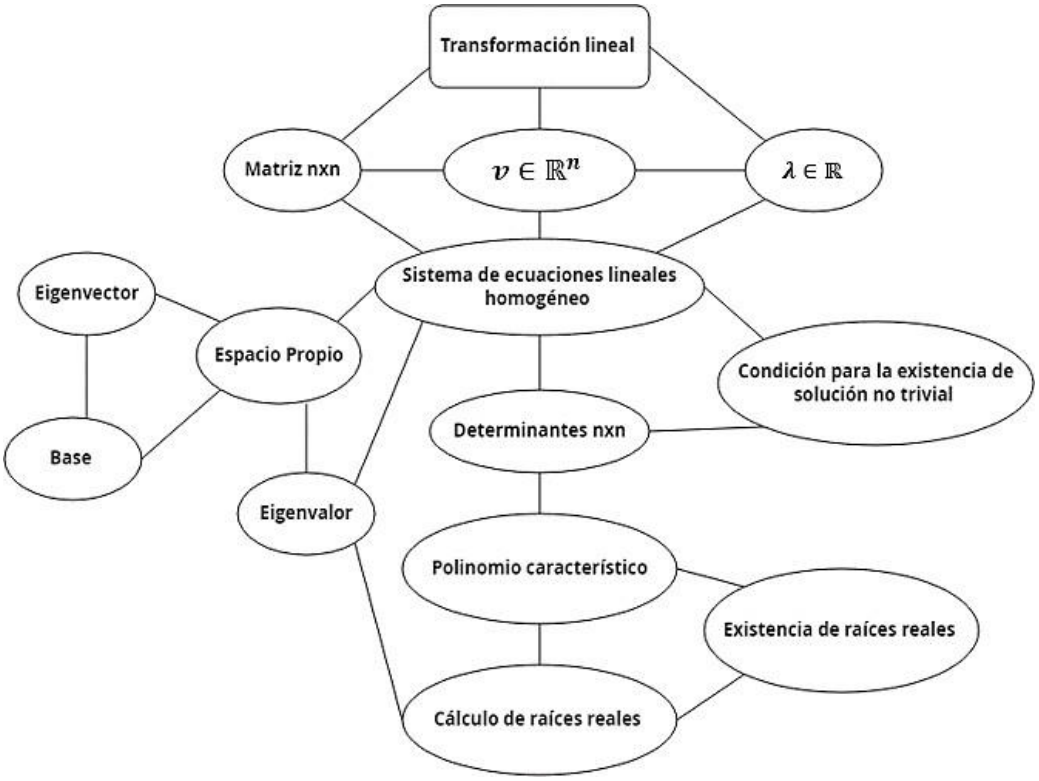


Figura 2. Esquema para los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor (Soto y García, 2002, p.3)

Un acercamiento más reciente se presenta en Camacho y Oktaç (2016), las autoras presentan avances de una investigación doctoral donde se analizan las estructuras mentales necesarias para un profesor resolver problemas sobre Eigenvalores y Eigenvectores en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. En la investigación las autoras definen de manera explícita subespacios invariantes pues surge de manera natural el concepto de Eigenvector y Eigenvalor. La definición considerada es la siguiente:

> Si T: $V \longrightarrow V$ es una transformación lineal, un subespacio W de V es T invariante si $T(x) \in W\ \forall x \in W$ es decir, $T(W) \subseteq W$. En $\mathbb{R}^2$ los subespacios invariantes no triviales son de dimensión 1. Rastrear estos subespacios es encontrar $W = \{\lambda w | w \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}\}$. (Camacho & Oktaç, 2016, p. 255)

Con base en el panorama expuesto, se da paso al problema de investigación que se propone estudiar en esta investigación.

Planteamiento del problema

La preocupación por estudiar cómo se enseñan y aprenden los conceptos del álgebra lineal ha ocupado los intereses de diversos investigadores (Dorier, 2000). Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) manifiestan las críticas de los estudiantes al enfrentar cursos de álgebra lineal cuando ingresan a la universidad; estas se refieren al "uso del formalismo, la abrumadora cantidad de nuevas definiciones y la falta de conexión con lo que ya saben en matemáticas" (p. 86). Los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector hacen parte del componente básico de un curso de algebra lineal (Harel, 2000), entre los acercamientos de investigación sobre cómo se aprenden y enseñan los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector Soto y García (2002), Klasa (2010) y Camacho y Oktaç (2016) lo hacen sobre transformaciones lineales utilizando un contexto de tecnologías computacionales para diseñar y desarrollar actividades de aprendizaje. Desde otro acercamiento Larson, Zandieh y Rasmussen (2008) y Salgado y Trigueros (2014, 2015) diseñan y desarrollan actividades de aprendizaje en un contexto de modelación según la teoría de Modelos y Modelación, en su acercamiento prevalece la construcción de Eigenvectores y Eigenvalores sobre las matrices. El uso de la teoría de Modelos y Modelación ha incluido otros conceptos del álgebra lineal como sistemas de ecuaciones lineales (Possani, Trigueros, Preciado & Lozano, 2010), combinación lineal, conjunto generador y espacio generado (Salgado, 2015). Estos investigadores han utilizado de forma complementaria la teoría APOE y la teoría de Modelos y Modelación para estudiar la construcción de conceptos en el álgebra lineal.

En el contexto de la universidad Industrial de Santander (UIS) se han desarrollado investigaciones usando la teoría APOE con el propósito de estudiar la construcción de conceptos del álgebra lineal en estudiantes de primer año de ciencias e Ingeniería. Roa-Fuentes y Parraguez (2017) investigan las estructuras y mecanismos mentales para que los estudiantes construyan un teorema que relaciona las transformaciones lineales y las matrices, González-Rojas y Roa-Fuentes (2017) proponen un esquema de transformación lineal a partir de interiorización de acciones concretas. En busca de continuar con el estudio de conceptos en álgebra lineal se revisaron algunos libros de texto para identificar cómo desarrollaban los conceptos de Eigenvectores y Eigenvalores, de esta revisión y la reportada en la literatura se plantea la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción de los conceptos de Eigenvalor y Eigenvector en estudiantes universitarios de primer año cuando resuelven actividades en el contexto de la teoría de Modelos y Modelación?

En este reporte se presentan avances de la fase inicial de la investigación que busca dar una mirada cognitiva a los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor con el propósito de proponer un camino hipotético de construcción de los conceptos, llamado en la teoría APOE una Descomposición Genética (DG).

A continuación, se presentan elementos teóricos desde la teoría APOE y la teoría de Modelos y Modelación que guían los intereses de este estudio.

Teoría APOE y Modelos y Modelación

En las ideas de Piaget sobre el desarrollo de las estructuras lógico matemáticas de un individuo Dubinksy (Arnon et al., 2014) identificó la *abstracción reflexiva* como mecanismo principal para la construcción de conceptos en matemáticas. En la teoría APOE se distinguen los mecanismos interiorización, coordinación, encapsulación y reversión, los cuales permiten a partir objetos previos en el estudiante realizar la construcción de las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE) para generar nuevos objetos (Arnon et al., 2014).

La comprensión de un concepto matemático se describe por los avances en cada etapa propuesta por APOE. En general, para un concepto matemático C un estudiante tiene una concepción Acción de C si depende de indicaciones externas para realizar transformaciones a los Objetos y/o construcciones previas que posee; en esta etapa los pasos y las transformaciones no se pueden imaginar ni modificar. Si el estudiante reflexiona sobre las acciones que realiza, hace modificaciones y ajustes a sus acciones permitiéndole realizar transformaciones en su mente sin necesidad de realizarlas paso a paso, se dice que el estudiante ha interiorizado la Acción y tiene una concepción Proceso de C. Cuando el estudiante reflexiona sobre el Proceso que ha construido capturando una totalidad de este, se dice que ha encapsulado el proceso en un Objeto, y por tanto tiene una concepción Objeto del concepto C. Con respecto a ese concepto C el conjunto de acciones, procesos, objetos y otras construcciones realizadas se relacionadas coherentemente conformando una estructura. Al modelo que describe estas construcciones se denomina descomposición genética (DG), en esta se precisan los mecanismos y estructuras previas necesarias para avanzar en las etapas de comprensión del concepto (Arnon et al., 2014). Las actividades de enseñanza propuestas a partir de la DG se desarrollan según el ciclo de instrucción ACE (Actividades, Discusión en Clase, Ejercicios), el cual inicia con un trabajo en grupo por los estudiantes, se discute entre estudiantes y estudiantes - profesor los resultados encontrados, finalmente se proporciona ejercicios y actividades que los estudiantes realizan como tarea (Salgado & Trigueros, 2014).

En la teoría APOE no se hace mención explícita al contexto de aprendizaje de conceptos matemáticos, sin embargo, no se rechaza el uso de estos. Salgado y Trigueros (2015) consideran viable el uso complementario de la teoría APOE con la teoría de Modelos y Modelación (Lesh &Doerr, 2003), la cual plantea el diseño y uso de actividades que generan modelos para construir conceptos matemáticos. Investigadores y docentes que han trabajado con esta teoría han consolidado unos principios que caracterizan las actividades que producen modelos, estos se han denominado principio de realidad, construcción de modelos, autoevaluación, documentación, simplicidad y generalización (Lesh & Doerr, 2003).

Esta investigación en curso utiliza de forma complementaria la teoría de Modelos y Modelación y APOE, la primera para el diseño de problemas en contexto y la segunda para

diseñar actividades con base en la DG. Esto con el fin de buscar que los estudiantes potencien las construcciones en gestación a partir del trabajo con el modelo y permitan analizar como los estudiantes logran hacer las construcciones necesarias para llegar a comprender el concepto.

Metodología

En esta investigación se sigue el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE (Arnon et al., 2014) que consiste en un análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza y recolección y análisis de datos. Los tres elementos del ciclo de investigación se relacionan como se muestra en la *figura 3*. Para esta investigación sobre Eigenvectores y Eigenvalores se plantea realizar el ciclo completo con el propósito de analizar las estructuras y mecanismos en la construcción de estos conceptos en estudiantes universitario de primer año.

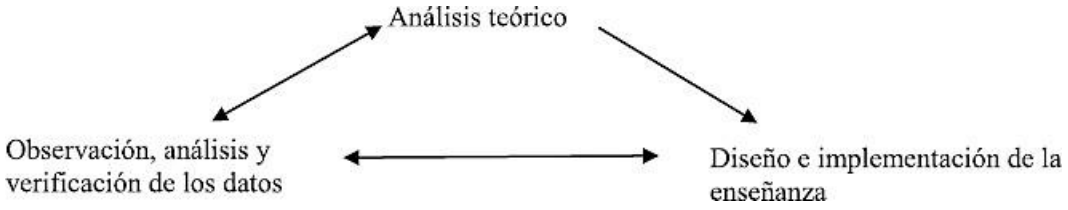


Figura 3. Ciclo de investigación (Arnon et al., 2014)

El análisis teórico como primer componente del ciclo de investigación estudia en profundidad el concepto de interés tomando como referentes libros de texto, reportes de investigación, la experiencia como docente y revisión histórico- epistemológica del concepto para proponer una DG como un modelo cognitivo que describe las estructuras y mecanismos involucrados en la construcción. En el de caso esta investigación el análisis de libros de texto se concentra sobre los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor y su construcción sobre la transformación lineal. En los reportes de investigación se considera en particular los estudios de Salgado y Trigueros (2014, 2015) sobre el diseño y validación de una DG para valores, vectores y espacios propios de una matriz. Estos y otros aspectos se agrupan para diseñar un camino hipotético en el aprendizaje de Eigenvectores y Eigenvalores sobre las transformaciones lineales.

Construida la DG en el análisis teórico se diseñan problemas en contexto con la teoría de Modelos y Modelación. Como se ha mencionado en la descripción de los elementos teóricos, el diseño de los instrumentos y actividades restantes con base en las construcciones prevista por la DG preliminar. Dado que el interés de la investigación es realizar el ciclo completo, la implementación de la instrucción seguirá el ciclo ACE propuesto por la teoría APOE (Arnon et al., 2014). En la investigación se hace seguimiento a un grupo de aproximadamente 30 estudiantes que cursan álgebra lineal II en la Universidad Industrial de Santander (Colombia). En pequeños grupos se analiza una situación en contexto diseñada según la teoría de Modelos y Modelación, del análisis realizado por los alumnos se hacen discusiones orientadas por el docente, posteriormente se desarrollan las actividades diseñadas según la DG para potenciar las construcciones en gestación que surgen del problema en contexto. Con los ejercicios entregados como tarea, los estudiantes continúan reflexionando sobre el concepto y se enfrentan a nuevos problemas en contexto, este ciclo de instrucción continua hasta que se desarrollen todas las actividades diseñadas para el concepto (Salgado & Trigueros, 2014).

Obtenidos los datos mediante videograbaciones de las secciones de instrucción, hojas de trabajo de los estudiantes, cuestionario y entrevistas, se analizan las construcciones realizadas por los estudiantes según la DG preliminar. En busca de responder cómo aprendieron los estudiantes lo conceptos se valida o refina la DG. El propósito es describir mejor las estructuras y mecanismos mentales para la construcción de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor. La realización del ciclo completo permite plantear sugerencias didácticas para el desarrollo de cursos de álgebra lineal y las conexiones necesarias para la comprensión de los conceptos de Eigenvector y Eigenvalor.

Reflexiones finales

A partir de las investigaciones realizadas en álgebra lineal con respecto al concepto de Eigenvector y Eigenvalor se identifica una estrategia y camino posible su construcción sobre las transformaciones lineales. Desde la teoría APOE se considera que no existe un único camino cognitivo (DG) para la construcción de conceptos en matemáticas, por eso en esta investigación estudiamos un camino alterno al reportado por Salgado y Trigueros (2014, 2015).

El desarrollo del ciclo completo propuesto por la teoría APOE nos permitirá proponer un modelo cognitivo que describa las estructuras y mecanismos mentales para la construcción de Eigenvalores y Eigenvectores sobre las transformaciones lineales , diseñar actividades que favorezcan las construcciones previstas en la DG tomando también situaciones en el contexto de la teoría de Modelos y Modelación y validar o refinar la DG preliminar con el propósito que sea más acorde con las construcciones que realizan los estudiantes para comprender los conceptos. Del análisis a las construcciones realizadas por los estudiantes se proponen sugerencias para el desarrollo de la instrucción en los cursos de álgebra lineal y actividades de aprendizaje que pueden ser implementadas por otros docentes que enseñan en cursos de álgebra lineal.

Referencias y Bibliografía

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-1-4614-7966-6.

Camacho., G & Oktaç, A. (2016). Exploración de una transformación lineal de R2 en R2. El uso de geometría dinámica para ampliar o adecuar construcciones mentales. En *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 253-266). Florina, Grecia

Dorier, J. L. (Ed.). (2000). *On the teaching of linear algebra* (Vol. 23). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 85-124). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

González-Rojas, D. E., & Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las ciencias*, 35(2), 0089-107. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

Klasa, J., & Klasa, S. (2002). Linear transformations and eigenvectors with Cabri II via Maple V. *The 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level).* Recuperado de http://server.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap256.pdf.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear algebra and its applications*, 432(8), 2100-2111. doi:10.1016/j.laa.2009.08.039

Larson, C., Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2008). A trip through eigen land: Where most roads lead to the direction associated with the largest eigenvalue. *Proceedings of the 11thAnnual Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education.* SIGMA ON RUME. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/crume2008/Proceedings/Larson%20SHORT.pdf

Lesh, R. y Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivist: A Models & Modelling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving*. New Hampshire: Lawrence Erlbaum Associates

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2125-2140. doi:10.1016/j.laa.2009.05.004

Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación universitaria*, 10(4), 15-32. doi: 10.4067/S0718-50062017000400003

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática*, 26(3), 75-107.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Soto, J. L., & García, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in $R^2$and R^3. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. Recuperado De http://mat.uson.mx/depto/publicaciones/reportes/pdf/reporte10.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Construcción y deducción de la fórmula del plano tangente a una superficie apoyado en GeoGebra 3D

Reiman **Acuña** Chacón
Instituto Tecnológico de Costa Rica y Universidad de Costa Rica
Costa Rica
reiacuna@itcr.ac.cr,
Bolívar **Ramírez** Santamaría
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
bolivar.ramirez@ucr.ac.cr

Resumen

La obra aquí consignada detalla la elaboración de un taller en el que se utiliza el software GeoGebra 3D para la construcción y deducción de planos tangentes a superficies dadas (no parametrizadas). La propuesta del trabajo se desarrolla por medio de una guía impresa o digital a dos columnas, en la cual los participantes postularán paso a paso el diseño de diferentes ejercicios junto con la ayuda de los facilitadores. Se concluye haciendo un análisis constructivo del trabajo realizado y la ponderación de limitaciones o recomendaciones por parte del público participante.

Palabras clave: GeoGebra 3D, planos tangentes, tecnología, recurso didáctico, superficies.

Introducción

En el ámbito de la Educación Matemática es bien conocido el paquete computacional GeoGebra que, desde su lanzamiento, ha tenido un enorme auge como un recurso didáctico al combinar elementos de Aritmética, Geometría, Álgebra, Análisis, Cálculo, Probabilidad y Estadística. Más recientemente, este software ha ofrecido una vista geométrica en tres dimensiones, la cual puede estar sujeta a experiencias pedagógicas provechosas y de gran valor en la enseñanza y aprendizaje.

En este sentido, Madrid (2015) indica que las diversas ventajas de GeoGebra "… han motivado su utilización durante los últimos años en numerosas experiencias en el aula en distintos niveles educativos para favorecer la comprensión de distintos contenidos…" (p. 32). Aunado a ello, los profesores concuerdan que el software desde su interfaz en 3D facilita el

aprendizaje sobre objetos tridimensionales, permitiendo un mayor éxito en el proceso de generar nuevas estructuras cognitivas en los educandos (Baltaci y Yildiz, 2015).

En fin, este software de geometría dinámica permite manipular de forma virtual superficies en tres dimensiones, lo que favorece el razonamiento matemático por medio de los modelos visuales, beneficiando el aprendizaje significativo.

En concordancia con lo expuesto anteriormente, si se revisan textos y cursos universitarios que estudian temas relacionados al cálculo diferencial en varias variables, es casi una constante que se toquen contenidos a fines a planos tangentes a superficies, pero desde una perspectiva algebraica y simbólica, dejando de lado la parte visual.

Por lo anterior, este taller tiene como objetivo la construcción y deducción de planos tangentes a superficies dadas (no parametrizadas) apoyado en la visualizacion por medio del sofware GeoGebra en tres dimensiones.

Aspectos Teóricos

Una adecuada práctica visual en el proceso de enseñanza y aprendizaje para ciertos contenidos de Matemática puede contribuir a mejorar la comprensión de estos, además que permite indagar y profundizar más lo estudiado (Rojas y Esteban, 2012). Bajo esta premisa, no simplemente se trata de ver, sino que la persona quien aprende, sea capaz de representar, modelar, transformar, razonar, documentar y comunicar la información visual en su pensamiento y lenguaje.

De hecho, desde hace más de 20 años existen especialistas en Educación Matemática que han insistido en una buena visualización en aquellos contenidos que lo ameriten. Así lo menciona Hitt (1998), al escribir que "Es importante promover el uso de varios sistemas de representación, y el uso reflexivo de nuevas tecnologías que permitan dar significado concreto a las nociones matemáticas" (p. 42).

Abonado a ello, el uso correcto de la visualización por medio de algún paquete computacional, además de estimular el razonamiento matemático, posee un carácter motivador, ya que promueve el interés hacia los temas estudiados y es un mecanismo efectivo para salir del aprendizaje memorístico y repetitivo (Rojas y Esteban, 2012).

Dado lo anterior, es necesario facilitar la comprensión de un concepto matemático con ayuda de una imagen visual, que puede ser aportada por alguna herramienta informática, y que a su vez permita hacer relaciones y conversiones entre la parte gráfica y la parte algebraica, insistiendo que "El uso reflexivo y creativo de las nuevas tecnologías permite dar un significado concreto a las nociones matemáticas" (Gatica y Ares, 2012, p. 105).

Dado lo anterior es imperativo buscar "… herramientas que ayuden a la visualización de los conceptos, como es el caso del uso de la computadora para aprovechar el dinamismo que ofrece y favorece actvidades de manipulación" (Gatica y Ares, 2012, p. 93), siendo el uso de GeoGebra 3D un excelente insumo para este fin, ya que brinda a los educandos una visualización más clara y por ende permite una mejor comprensión (Mora, 2018).

De la página oficial de GeoGebra[1], se lee explícitamemte

[1] Consultar en https://www.geogebra.org/about

> GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. GeoGebra es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países. GeoGebra se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo.

En este punto, y como se escribió brevemente en la introducción, el uso adecuado de GeoGebra es sumamente beneficionso en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, principalmente en los procesos de visualización, por lo que enfatizar más en ello es reiterativo. Lo novedoso es su interfaz en tres dimensiones, la cual es un instruento que se puede explotar pedagógicamente aún más.

Por otro lado, y por la naturaleza de este taller y para efectos del mismo, es un menester tener claro las definiciones de los conceptos matemáticos que se van a manipular:

- Las cuádricas son superficies cuadráticas, de las cuales se usarán las más elementales y con ecuaciones sin términos mixtos, es decir, que representan superficies no rotadas. Entre ellas: el elipsoide, el paraboloide hiperbólico, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de dos hojas y el cono.
- Se llama plano tangente a una superficie S en un punto P de la misma, al plano que contiene todas las tangentes a las curvas trazadas sobre la superficie por el punto P.
- Al punto $P \in S$, definido anteriormente, se le llama punto de tangencia.

Metodología del taller

Para el abordaje de este taller es necesario que el participante tenga los siguientes conocimientos previos:

- Nociones de cálculo diferencial e integral en varias variables, específicamente, que pueda calcular el gradiente para una superficie dada.
- Nociones de álgebra lineal, específicamente, geometría vectorial, donde pueda calcular la norma de un vector, el producto punto y sepa definir un plano vectorialmente.

Para efectos del taller, las nociones anteriores se pueden consultar en Pita (1995) y Mora (2017). Por otro lado, es importante advertir que la naturaleza del taller consistirá en generar un conocimiento didáctico a docentes como a estudiantes en el área de la Educación Matemática, por medio de la herramienta tecnológica descrita, con el fin de realizar clases amenas y comprensibles. De igual forma, cualquier interesado en el área puede proveerse de ideas para esta actividad.

Con esto, el modelo de esta taller es pedagógico. De acuerdo con Alfaro y Badilla (2009), el taller pedagógico se considera como una modalidad didáctica que permite compartir diferentes experiencias académicas, intercambiar criterios, conocimientos e ideas entre los participantes. Dentro de éste se permite realizar diversos ejercicios y actividades, que permitan un proceso de enseñanza y aprendizaje, y que deben ser previamente planificadas, de tal forma que los partícipes "aprendan haciendo" y construyan sus propios significados, lo cual conlleva a la validación de sus procesos cognitivos.

Así, el taller estará caracterizado por momentos (o etapas) que permitan abordar la importancia del tema. De esta manera, se desarrollarán tres momentos en el mismo.

El primero consiste en hacer una breve explicación del GeoGebra 3D; esto es, el uso de las herramientas básicas y la construcción de algunas superficies y planos, como se muestra en la Figura 1.

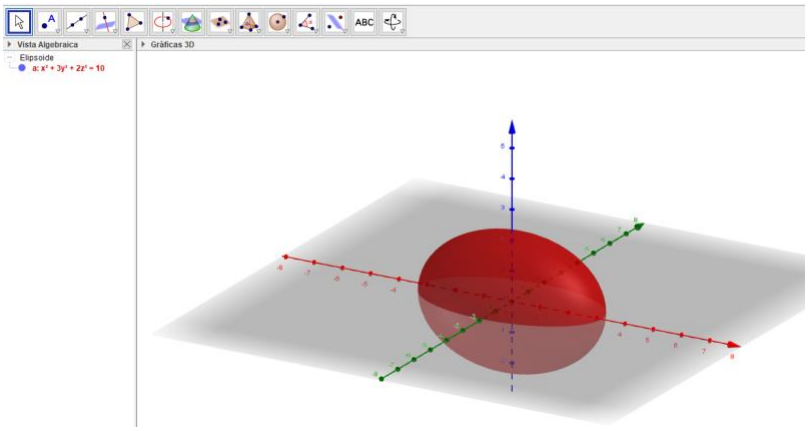


Figura 1. Vista de una superficie en GeoGebra 3D.

El segundo momento de este taller consiste en el uso de una guía. Esta guía contiene una serie de ejercicios en los cuales, para cada uno, existen dos columnas. La primera columna debe llenarse con las instrucciones algebraicas para la deducción del plano tangente y la segunda columna se llena con imágenes recortadas del GeoGebra 3D de su visualización. Ver Figura 2.

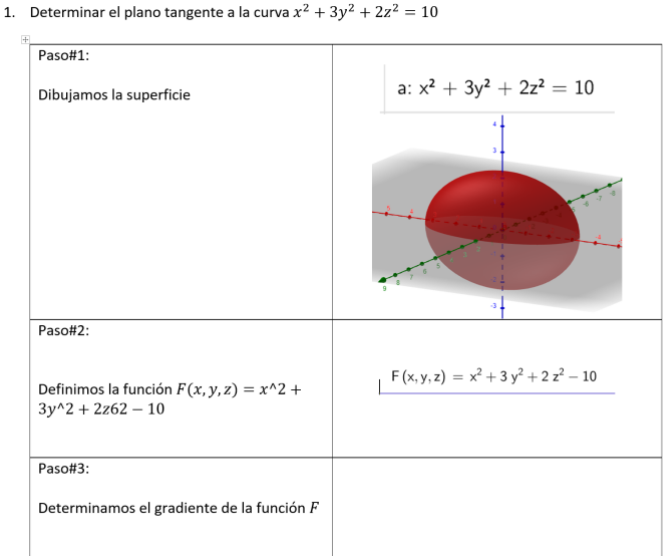


Figura 2. Vista de una superficie en GeoGebra 3D.

En tal caso, habrán tantos recortes como pasos necesarios para lograr la deducción. Realizado esto, se usará el GeoGebra 3D para animar mediante un botón la aparición del texto y, simultáneamente, la aparición del plano tangente a la superficie dada. La Figura 3 muestra la idea final de lo que se desea hacer.

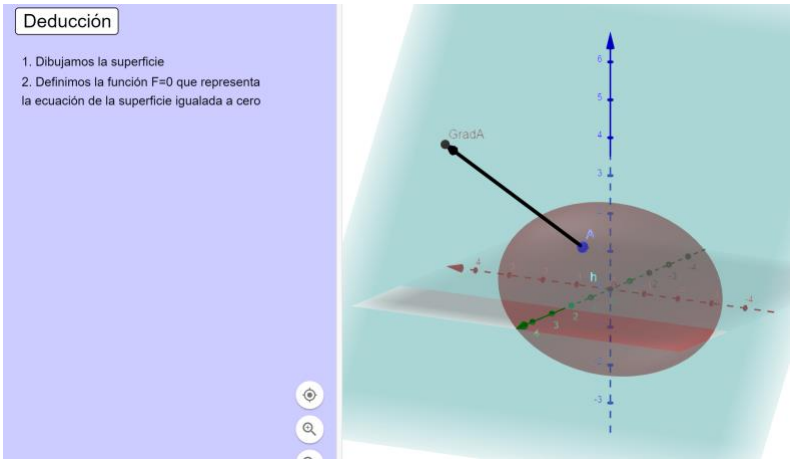


Figura 3. Deducción del plano tantente en GeoGebra 3D. Paso a paso.

Para el tercer momento de este taller los participantes junto a los facilitadores realizarán un análisis del trabajo documentado mediante un cuestionario, el cual será brindado por los autores del taller. Con esto, se da término a la actividad en el tiempo dispuesto para dicha sesión.

Es importante considerar que " la implementación de tecnologías que permitan a los estudiantes ser diseñadores activos mediante el uso de programas, aplicaciones y demás, facilita que desarrollen mejor las habilidades de comprensión en todos los campos del conocimiento al que se expongan" (Caro, 2015, p. 739) por lo que la vinculación de la tecnología al taller pedagógico exhorta un control y flexibilidad sobre los tiempos en relación al alcance de las deducciones que se produzcan.

Conclusiones

El desarrollo de este taller permite reflexionar a los partícipes sobre la implementación de actvidades didácticas, donde se utiliza GeoGebra en tres dimensiones, y sus bondades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos donde la visualización es un componente pedagógico significativo.

Asimismo, la experiencia de abordar el taller es una forma de exhortar a la comunidad docente en Matemática para buscar nuevos tratamientos metodológicos en temas que así lo requieran, donde se haga un uso reflexivo y adecuado de las tecnologías de información y comunicación, como es en este caso, GeoGebra 3D.

Referencias y bibliografía

Alfaro, A. & Badilla, M. (2009). *El taller pedagógico, una herramienta didáctica para abordar temas alusivos a la Educación Ciudadana*. Proyecto de investigación: Conceptualización y percepción de la Educación Cívica por parte de los docentes de Estudios Sociales y los y las estudiantes de décimo y undécimo años de la Enseñanza Media. San José, Vicerrectoría de Investigación, Universidad de Costa Rica.

Baltaci, S. & Yildiz, A. (2015). GeoGebra 3D from the perspectives of elementary pre-service mathematics teachers who are familiar with a number of software programs. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, *10*(1), 12-17.

Caro, A. (2015). Introducción a la Geometría 3D con GeoGebra 5.0. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, 1*(1), *738-742.*

Gatica, S. & Ares, O. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Revista de Educación Matemática y TIC, 1*(2), 88-107.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Educación Matemática, 10*(02), 23-45 .

Madrid, M. (2015). Enseñando geometría: GeoGebra en 3D en la formación de maestros. *Épsilon-Revista de Educación Matemática, 32*(2), 31-38.

Mora, L. (2018). Parametrizaciones de curvas y superficies: Construcción de sólidos con GeoGebra 3D. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 19*(1), 1-18. doi: https://doi.org/10.18845/rdmei.v19i1.3852

Mora, W. (2017). *Cálculo en varias variables. Visualización interactiva*. (1er. Ed.). Revista digital Matemática, Educación e Internet. Recuperado de https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/LibrosCDF/CalculoEnVariasVariables/CDF2017-Internet-WMora-ITCR-CalculoVariasVariables.pdf

Pita, C. (1995). *Cálculo Vectorial*. (1er. Ed.). Juárez: Prentice Hall Hispanoamérica S.A.

Rojas, L. & Esteban, V. (2012). Geogebra y Applets Aplicados a la enseñanza y aprendizaje del cálculo. Simposio Ibero americano de aplicaciones y tecnologías de la información y comunicación.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O conhecimento matemático para o ensino: um olhar a partir dos professores em formação continuada

Eleni **Bisognin**
Universidade Franciscana
Brasil
eleni@ufn.edu.br

Luis Sebastião **Barbosa** Bemme
Universidade Franciscana
Brasil
luisbarbosab@yahoo.com

Vanilde **Bisognin**
Universidade Franciscana
Brasil
vanildebisognin@gmail.com

Silvia Maria de Aguiar Isaia
Universidade Franciscana
Brasil
silviamariaisaia@gmail.com

Resumo

Neste artigo são apresentados resultados parciais de uma pesquisa realizada com professores em formação continuada sobre o conhecimento matemático para o ensino. Foram apresentadas quatro questões aos professores participantes de um curso de pós-graduação em Ensino de Matemática, envolvendo padrões e regularidades, com o propósito de analisar seus conhecimentos comuns e especializados conforme Ball e colaboradores, sobre esse conteúdo. Para análise das respostas foram elencadas algumas categorias relativas ao conhecimento matemático. Os resultados mostram que a pesquisa realizada identificou saberes importantes e fundamentais que compõem o conhecimento matemático específico do professor, mas, apesar de as ideias desenvolvidas por (Shulman, 1986) Ball e colaboradores, serem discutidas em programas de formação de professores quanto ao aspecto teórico, ainda são necessárias investigações sobre a prática, principalmente quanto ao conhecimento matemático para o ensino.

Palavras chave: Conhecimento matemático para o ensino, Formação continuada de professores, Padrões e regularidades.

Introdução

Muitas pesquisas, com diferentes referenciais teóricos estão sendo desenvolvidas atualmente sobre a formação de professores e o conhecimento matemático que um professor deve ter para ensinar matemática. (Sánchez, 2011) coloca que a pergunta central dessa área de pesquisa é: "que tipo de conhecimentos e habilidades uma pessoa precisa para ser um bom professor de Matemática"? O autor coloca ainda que há um reconhecimento de que possuir um conhecimento matemático é uma condição necessária para ser um bom professor de Matemática, mas só essa condição não é suficiente. Muitos outros conhecimentos são necessários tais como o conhecimento matemático para o ensino, o conhecimento pedagógico para o ensino, entre outros.

O conhecimento matemático dos professores sobre os tópicos que irão ensinar é um dos aspectos importantes para promover a aprendizagem dos alunos e irá influenciar de modo significativo o modo de planejar as tarefas que serão trabalhadas em sala de aula.

(Shulman, 1986), diferencia três categorias de conhecimentos que compõem a base para o ensino: o conhecimento específico do conteúdo; o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular. Nesse trabalho, a partir das ideias sobre o conhecimento matemático para o ensino, tendo como referencial teórico os trabalhos de (Ball; Thames; Phelps, 2008; Moreira & David, 2005) y (Shulman, 1986, 1987), solicitou-se a oito professores de Matemática, cursando mestrado ou doutorado em Ensino de Matemática, que respondessem a quatro questões referentes ao conteúdo de padrões e regularidades. Neste artigo, são discutidas as respostas dadas por esses professores, com base em alguns critérios elencados, com vistas a analisar o conhecimento matemático para o ensino do conteúdo em pauta.

Referencial teórico

Ser professor é uma tarefa complexa e sua formação não se extingue com a conclusão de uma graduação ou pós-graduação na respectiva área. Para entender as necessidades do professor em sua prática, é necessário investigar seu conhecimento dos conteúdos com os quais trabalha, bem como da metodologia de ensino de tais conteúdos e de como estes se distribuem no currículo da disciplina, nos diferentes níveis de ensino. Esse conhecimento é produzido no decorrer dos cursos de formação inicial e continuada, mas também nas práticas desenvolvidas ao longo de sua trajetória de professor.

Quanto ao conhecimento dos professores, segundo Serrazina (2012), há um consenso de que é indispensável que o professor domine os conteúdos matemáticos que irá ensinar. No entanto, além de conhecer os tópicos que irá ensinar é também necessário saber como ensiná-los.

Nas últimas décadas há muitos estudos sobre o conhecimento do professor para ensinar Matemática. Dentre eles estacamos os trabalhos de (Ball; Thames; Phelps, 2008); (Serrazina, 2012); (Trivilin, Ribeiro, 2015); (Moreira e David, 2005) y (Cury, Bisognin, 2017). Esses trabalhos têm como referencial teórico as ideias de (Shulman, 1986, 1987).

(Shulman, 1986), apresenta três categorias de conhecimento do professor: conhecimento do conteúdo da disciplina, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular, sendo que o segundo tipo de conhecimento foi definido como aquele que "que vai além do

conhecimento da disciplina em si para a dimensão do conhecimento da disciplina para ensinar". (p. 9, grifo do original). Inspirados nos trabalhos de (Shulman, 1986), os autores (Ball,Tames e Phelps, 2008), estabelecem o que chamam de "conhecimento matemático para o ensino", definido como "o conhecimento matemático necessário para levar adiante o trabalho de ensinar Matemática". (p. 395). Os mesmos autores levantam a hipótese de que o conhecimento do conteúdo, mencionado por Shulman, possa ser subdividido em duas categorias ("conhecimento comum do conteúdo" e "conhecimento especializado do conteúdo") e que o conhecimento pedagógico do conteúdo possa ser dividido em "conhecimento do conteúdo e dos estudantes" e "conhecimento do conteúdo e do ensino".

O conhecimento comum do conteúdo não é exclusivo do professor de Matemática. Por exemplo, um profissional de outros cursos da área de Ciências Exatas pode saber o conteúdo matemático que vai ser ensinado, reconhecer respostas erradas ou definições inadequadas apresentadas em livros-texto.

O conhecimento especializado do conteúdo compreende os conhecimentos e habilidades matemáticas exclusivos do professor. Por exemplo, distinguir entre as representações de padrões e regularidades e saber apresentá-las para os alunos de diferentes níveis de ensino. (Ball, Thames e Phelps, 2008), salientam que reconhecer uma resposta errada é conhecimento comum do conteúdo, mas prestar atenção nos seus padrões e pensar nos seus significados é conhecimento especializado do conteúdo.

Metodologia

A pesquisa relatada parcialmente neste artigo, faz parte de um projeto mais amplo, envolvendo pesquisadores bem como orientandos de mestrado e doutorado do Programa de Pós-Graduação da área de Ensino, sobre o conhecimento matemático para o ensino.

Inicialmente foram apresentadas a oito professores em formação continuada, alunos de um programa de pós-graduação em Ensino de Matemática, quatro atividades sobre o conteúdo de padrões e regularidades e foi solicitado aos mesmos que apresentassem as soluções das atividades propostas.

Numa segunda etapa, com base nos pressupostos teóricos descritos, analisou-se as respostas dos professores e como os professores mobilizaram os conhecimentos matemáticos para resolução das questões. Essa análise foi feita seguindo alguns critérios adaptados (Flores-Medrano et al, 2016), referentes ao conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento especializado do conteúdo. Quanto ao conhecimento matemático do professor de Matemática, (Flores-Medrano et al, 2016), subdividem em três itens: conhecimento dos temas matemáticos, isto é, um conhecimento profundo do conteúdo; conhecimento da estrutura matemática; conhecimento da prática Matemática, isto é, como se procede e como se produz em Matemática. Quanto ao conhecimento comum do conteúdo, baseado nos autores citados, selecionou-se os seguintes critérios de análise: *a) resolvem corretamente os problemas matemáticos, isto é, se os procedimentos matemáticos empregados estão corretos; b) a linguagem e as representações matemáticas utilizadas são corretas e claramente descritas; c) não atendem aos critérios anteriormente definidos.*

Do mesmo modo quanto ao conhecimento especializado do conteúdo foram selecionados os seguintes critérios de análise: *a) apresentam ideias matemáticas; b) caracterizam um conceito incluindo imagens associadas e apresentam conhecimento sobre os distintos registros de representação; c) apresentam conhecimento sobre as propriedades do conteúdo matemático*

abordado e suas aplicações; d) ilustram com exemplos destacando aspectos matemáticos; e) expõem com clareza o raciocínio matemático utilizado; f) estabelecem conexões entre os tópicos que estão estudando com tópicos matemáticos já estudados; g) fazem generalizações; h) estabelecem relações entre os conceitos fazendo conexões entre os conteúdos analisados desde um ponto de vista avançado e um ponto de vista mais elementar; i) não atendem aos critérios anteriormente definidos.

O desenvolvimento do conhecimento comum e do conhecimento especializado do conteúdo auxilia na construção do conhecimento do conteúdo para o ensino.

As respostas das questões propostas são analisadas com base nos pressupostos teóricos aqui apresentados.

Apresentação e Análise dos Resultados

Nessa sessão do texto apresentaremos as análises e discussões a partir dos dados levantados. São analisadas apenas duas atividades devido ao espaço. A seguir, segue a questão 01.

Questão 01. Uma corda de um circo estava enfeitada com esferas e cilindros como mostrada abaixo:



a) Qual é o grupo de figuras que se repete?
b) Se forem utilizadas 30 esferas, quantos cilindros existirão? E quantos grupos?
c) Analise o quadro abaixo. Explique o raciocínio usado para completá-lo.

Número de grupos	*Número de esferas*	*Números de cilindros*	*Número total de objetos*
1	*3*	*2*	*5*
		4	
	9		
4			

d) Estabeleça uma lei em que possa ser encontrado o número de esferas e de cilindros. Faça o mesmo com o número total de objetos. Explique seu raciocínio.

O objetivo dessa questão era verificar se os alunos-professores conseguiam operar matematicamente com conceitos ligados ao conteúdo de sequência numérica, termo geral de uma sequência numérica e progressão aritmética. O Quadro 01 apresenta uma síntese das respostas enquadradas em cada um dos critérios de análise já explicitados na metodologia, vale ressaltar que uma mesma resposta, em alguns casos, foi classificada em mais de um critério.

Quadro 1
Síntese do número de resposta da questão 01 correspondente a cada critério.

Tipo de conhecimento	**Critérios de análise**	**Questão 01**				
		a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**

Conhecimento comum do conteúdo	a) Resolvem corretamente os problemas matemáticos	6	5	6	3	2
	b) A linguagem e as representações matemáticas utilizadas são corretas e claramente descritas	0	0	1	5	4
	c) Não atende aos critérios anteriormente definidos	2	3	1	0	2
Conhecimento especializado do conteúdo	a) Apresentam ideias matemáticas	6	5	7	6	6
	b) Caracterizam um conceito incluindo imagens associadas e apresentam conhecimento sobre os distintos registros de representação	0	0	1	0	0
	c) Apresentam conhecimento sobre as propriedades do conteúdo matemático abordado e suas aplicações	0	0	1	0	1
	d) Ilustram com exemplos destacando aspectos matemáticos	0	0	0	0	0
	e) Expõem com clareza o raciocínio matemático utilizado	6	5	1	5	4
	f) Estabelecem conexões entre os tópicos que estão estudando com tópicos matemáticos já estudados	0	0	0	0	0
	g) Fazem generalizações	0	0	0	0	0
	h) Estabelecem relações entre os conceitos fazendo conexões entre os conteúdos analisados desde um ponto de vista avançado e um ponto de vista mais elementar	0	0	0	0	0
	i) Não atende aos critérios definidos	2	3	1	0	2

Fonte: Dados da pesquisa.

No que tange ao conhecimento comum do conteúdo obervamos que a maioria das respostas, nas cinco alternativas, foram consideradas corretas no entanto, o ponto central dessa análise diz respeito ao fato de que os professores-alunos nem sempre conseguirem utilizar uma linguagem e uma representação matemática adequada para expressar seu modo de resolução.

Sobre essa questão pontuamos que os conhecimentos que o professor possui impacta no modo como organiza seu ensino e como orienta esses processos. Isso corrobora com que (Fiorentini, 2008) sublinha ao dizer que,

> A formação matemática, de outra parte, visa proporcionar ao futuro professor o domínio do campo conceitual da matemática historicamente produzida. Essa formação, muitas vezes, limita-se ao domínio técnico-formal e, na melhor das hipóteses, enciclopédico da matemática (p. 51).

Outro aspecto preocupante que apareceu, nas alternativas dessa questão, foram as resoluções apresentadas de modo incorreto, ou seja, os professores-alunos não conseguiram compreender o que a questão solicitava, ou ainda, não possuíam conhecimento necessário para resolvê-la.

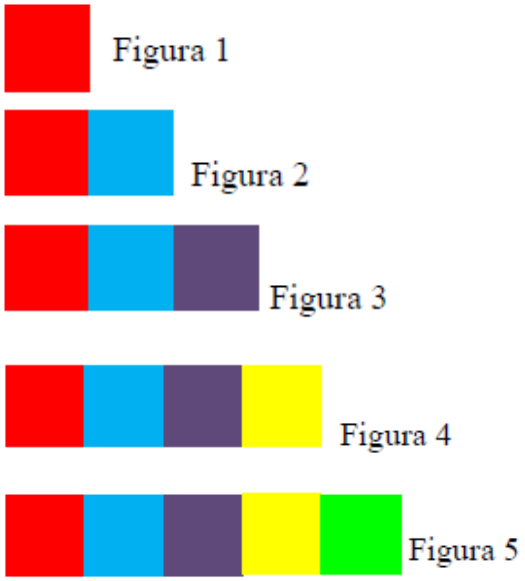
No que tange aos conhecimentos especializados do conteúdo, as respostas centram-se no fato de quase todas as resoluções, apresentaram ideias matemática e as resoluções apresentadas estavam expostas com clareza e permitia identificar o raciocínio desenvolvido.

O destaque dessa questão está no fato de que somente um professor-aluno utilizou as propriedades e suas aplicações para resolver a questão proposta, esse mesmo sujeito, em outra alternativa dessa questão, apresenta distintos registros de representação ao propor a solução pedida. Ou seja, observamos que o conhecimento matemático desse sujeito é mais elaborado e suas respostas são mais representativas para a área.

(Shulman, 1987), pontua que o professor tem que ter a capacidade de transformar o conhecimento do conteúdo que ele possui em modos pedagogicamente poderosos para os estudantes, considerando suas experiências. No entanto, acreditamos que isso só será possível se o professor tiver um sólido conhecimento da área na qual ele atua.

A seguir apresentamos a questão 02.

Questão 02. As figuras abaixo são formadas por quadrados de 1cm de lado.



a) Determine o perímetro de cada figura e escreva a sequência formada por esses valores.
b) Qual é o perímetro da Figura 6? E da Figura 8?
c) Quantos blocos terá uma figura com perímetro de 20 cm? E 30 cm?
d) É possível escrever uma lei na qual se possa encontrar qualquer elemento dessa sequência?

O objetivo dessa questão foi identificar em que medida os professores-alunos conseguiam estabelecer relação com a sequência apresentada e outros conhecimentos no campo da Matemática. O Quadro 02 apresenta uma síntese das respostas e suas classificações de acordo com os critérios definidos.

Quadro 2
Síntese do número de resposta da questão 02 correspondente a cada critério.

Tipo de conhecimento	**Critérios de análise**	**Questão 01**			
		a)	**b)**	**c)**	**d)**
Conhecimento comum do conteúdo	a) Resolvem corretamente os problemas matemáticos	5	5	6	5
	b) A linguagem e as representações matemáticas utilizadas são corretas e claramente descritas	2	2	1	2
	c) Não atende aos critérios definidos	1	1	1	1

Conhecimento especializado do conteúdo	a) Apresentam ideias matemáticas	7	7	7	6
	b) Caracterizam um conceito incluindo imagens associadas e apresentam conhecimento sobre os distintos registros de representação	0	0	0	1
	c) Apresentam conhecimento sobre as propriedades do conteúdo matemático abordado e suas aplicações	0	0	0	2
	d) Ilustram com exemplos destacando aspectos matemáticos	0	0	0	0
	e) Expõem com clareza o raciocínio matemático utilizado	4	4	3	4
	f) Estabelecem conexões entre os tópicos que estão estudando com tópicos matemáticos já estudados	0	0	1	2
	g) Fazem generalizações	0	0	0	1
	h) Estabelecem relações entre os conceitos fazendo conexões entre os conteúdos analisados desde um ponto de vista avançado e um ponto de vista mais elementar	0	0	0	0
	i) Não atende aos critérios definidos	1	1	1	1

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim como a primeira questão, o conhecimento comum do conteúdo teve maior frequência de respostas no primeiro critério. De modo geral, nesse item os resultados apresentados foram melhores, pois, somente um professor-aluno apresentou respostas equivocadas para a questão.

No que diz respeito ao conhecimento especializado do conteúdo, os resultados também não diferem muito da questão 01. O destaque dessa questão está no fato de que um professor-aluno conseguiu estabelecer generalizações em uma das alternativas, e em três momentos distintos foi possível identificar conexões entre os tópicos abordados na questão com outros pertencentes ao campo da Matemática.

Esses resultados indicam que os conhecimentos matemáticos desses sujeitos são mais refinados e, portanto, suas propostas de atividades de ensino podem favorecer os processos de aprendizagem. Sobre essa questão (Marcelo Garcia, 1999) pontua que, “Quando o professor não possui conhecimentos adequados sobre a estrutura da disciplina que está a ensinar, o seu ensino pode apresentar erradamente o conteúdo aos alunos. O conhecimento que os professores possuem do conteúdo a ensinar também influencia o que e como ensinam” (p. 87).

A seguir tecemos algumas considerações sobre os dados discutidos nesse trabalho.

Considerações finais

Nesse artigo buscamos discutir os conhecimentos – comum e especializado do conteúdo – que professores-alunos em um Programa de Pós-Graduação da área de ensino possuem sobre os conceitos de padrões e regularidades.

A organização dos dados a partir dos critérios de análise nos permitiu levantar dois pontos centrais sobre o assunto. O primeiro dele diz respeito ao fato de que os conhecimentos

específicos do campo da Matemática dos professores-alunos, ainda se mostram fragilizados, o que certamente impacta no modo como esse professor irá elaborar e propor atividades de ensino.

O segundo ponto diz respeito à necessidade de ações, em programas de pós-graduação, que permitam ao professor-aluno (re)construir conceitos da Matemática da Educação Básica. Ou seja, os programas de pós-graduação também precisam considerar a possibilidade de incluir em suas ações formativas disciplinas que permitam ao professor, em processo de formação, discutir, revisitar e se apropriar de conceitos ligados ao campo específico da área em que atuam.

Referências Bibliográficas

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G.(2008). Content knowledge for teaching: what makes it special*? Journal of Teacher Education,* 59, 5, 389-407.

Cury,H.N.; Bisognin,E.; (2017). Conhecimento matemático para o ensino: um estudo com profesores em formação inicial e continuada. *Revista Thema*.14,3, 241-249.

Fiorentini, D. A. (2008). Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil. *Revista Bolema*, 21, 43-70.

Flores-Medrano, E., Montes, M. A. (2006). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Professor em las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Revista Bolema*, 30, 204-221.

Marcelo Garcia, C. (1999). *Formação de professores: para uma mudança educativa.* Trad. Isabel Narciso, Porto Editora.

Moreira, P. C; David, M. M. M. S.(2005). *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5, 129-145.

Serrazina,M.L.M.;(2012).Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Eletrônica de Educação*, São Carlos, SP, 6,1, 266-283.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15,2, 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57,1, 1-22.

Trivilin, L. R., Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Revista Bolema*, 29, 38-59.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por licenciandos sobre números racionais

Eleni **Bisognin**
Universidade Franciscana
Brasil
eleni@ufn.edu.br

Patricia **Pujol** Goulart Carpes
Universidade Franciscana
Brasil
patriciacarpes@unipampa.edu.br

Resumo

Neste trabalho são apresentados resultados parciais de uma pesquisa que visa identificar e discutir os conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais mobilizados por licenciandos de Matemática. Foram propostas questões aos participantes de uma oficina a fim de mobilizar conhecimentos do professor para ensinar números racionais. Os dados foram obtidos por meio dos registros escritos das soluções das atividades e foram analisados considerando-se a dimensão didática com ênfase na faceta epistêmica do modelo de Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM) definido por Godino, pela qual é possível a identificação e análise de níveis de conhecimento do professor. Os resultados apontam que os licenciandos, em sua grande maioria, apresentam concepções errôneas e/ou não reconhecem as diferentes representações do número racional. Embora os alunos tenham apresentado dificuldades na resolução das atividades propostas durante a oficina, eles tiveram a oportunidade de (re)conhecer e refletir sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar esse tópico.

Palavras chave: Números racionais, dimensão epistêmcia, formação inicial de professores.

Introdução

O presente trabalho tem como propósito apresentar resultados parciais de uma investigação que visa identificar e analisar os conhecimentos didático-matemáticos sobre

números racionais mobilizados por licenciandos em Matemática, durante uma formação realizada, tendo por base a perspectiva dos Conhecimentos Didático-Matemáticos, (CDM), desenvolvido por (Godino e colaboradores, 2009).

Em se tratando de um conteúdo específico, o conjunto dos números racionais, consideram-se pertinentes os conhecimentos do professor voltados diretamente ao tema. Segundo (Romanatto, 1997), a compreensão efetiva desse conjunto numérico deve perpassar por uma teia de relações nele incidentes ou emergentes. Desse modo, os números racionais devem ser compreendidos pelos seus diferentes significados, assim como, pelas suas possíveis representações – fração, decimal, porcentagem, pictórica, tendo em vista sempre a limitação de notação que cada representação de número racional pode apresentar

Pelas várias contextualizações que os números racionais permeiam, seus significados são distintos. (Kieren, 1980) aponta que a compreensão completa dos números racionais requer não só a compreensão de cada um dos significados separados, mas como eles se relacionam. Os construtos (ou significados) dos números racionais apontados pelo autor são parte/todo, quociente, medida, operador e razão.

A formação proposta aos licenciandos em Matemática na forma de uma oficina, intentou vislumbrar possibilidades de contextualizações dos números racionais para que os mesmos pudessem ter uma compreensão melhor deste conjunto, bem como estimular os conhecimentos pertinentes ao professor ao ensinar os números racionais, tais como: possíveis questionamentos aos alunos de suas concepções errôneas, emprego de diferentes tipos de registros - o que pode facilitar a compreensão, pois um registro pode ser mais familiar ao aluno do que outro e conhecimentos matemáticos específicos – o todo dividido em partes iguais, a soma de todas as partes recompõe o todo ou calcular partes de um todo (operar sobre uma quantidade).

As pesquisas voltadas para a formação inicial de professores têm crescido nos últimos anos e tem apontado para os diferentes e complexos conhecimentos que o professor dever ter para ensinar de forma idônea um tópico específico e, assim, facilitar a aprendizagem de seus alunos. Neste sentido, nesse trabalho, toma-se o modelo denominado Conhecimentos Didático-Matemáticos do professor, apresentado por (Godino, 2009), para analisar os conhecimentos didático-matemáticos mobilizados pelos licenciandos em Matemática sobre os números racionais, pois esse modelo considera distintas dimensões no processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo específico de Matemática.

Referencial teórico

O ensino de um conteúdo específico de Matemática requer do professor uma apropriação de uma teia de conhecimentos, por muitas vezes complexa, que envolvem conhecimentos didáticos e matemáticos. Entretanto, quais seriam os conhecimentos necessários para um processo de ensino idôneo? Diante desta complexidade, (Pino-Fan e Godino, 2015), elaboraram um sistema de catogorias para analisar os conhecimentos do professor de matemática, denominado Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM). As categorias elaboradas estão relacionadas com os tipos de ferramentas teóricas de análise do enfoque ontossemiótico do conhecimento e instrução matemática – EOS (Godino, 2017; Godino, Batanero & Font, 2007).

O modelo interpreta e organiza os conhecimentos do professor a partir de três dimensões: dimensão matemática, dimensão didática e a dimensão meta didático-matemática. A dimensão matemática refere-se a solidificação dos conhecimentos de tópicos específicos de matemática pelos professores. É subdividida em conhecimento comum, aquele que é suficiente para responder uma questão mais elementar, e no conhecimento ampliado, aquele que vincula um

objeto de estudo com um nível mais avançado.

A dimensão didática é composta por seis facetas, sendo: a epistêmica (conhecimento especializado de matemática), a cognitiva (conhecimento de aspectos cognitivos dos alunos), a afetiva (conhecimento de aspectos emocionais, atitudes, crenças dos alunos), a interacional (conhecimento sobre as interações na sala de aula), a mediacional (conhecimento dos recursos e meios que potencializam a aprendizagem do aluno) e a ecológica (conhecimento sobre aspectos curriculares e sociais que influenciam a gestão da aprendizagem dos alunos).

A faceta epistêmica articula diferentes conhecimentos da matemática escolar com maior profundidade e amplitude, além disso, via esta faceta o professor deve ser capaz de mobilizar diversar representações de um objeto matemático, resolver a tarefa mediante distintos procedimentos, vincular o objeto matemático com outros objetos matemáticos de nível educativo que se ensina ou de níveis anteriores ou posteriores, compreender e mobilizar a diversidade de significados parciais para um mesmo objeto matemático (que integram o significado holístico para este objeto, proporcionar diversas justificativas e argumentos, e identificar os conhecimentos postos em jogo durante a resolução de uma tarefa matemática (Pino-Fan; Godino, 2015, p. 13).

A faceta meta didático-matemática é composta pelos conhecimentos sobre os critérios da idoneidade didática (avalia um processo de ensino e aprendizagem) e os conhecimentos sobre as normas e metanormas (a promoção da reflexão, da avaliação e da detecção das melhores potencialidades da prática).

Em se tratando de uma formação inicial de professores, (Godino et al, 2013), elaboraram um guia onde explicitam os componentes e indicadores da idoneidade de um programa de formação de professores. Desse modo, se o professor adquire competência em aplicar este instrumento pode ter facilitada sua tarefa de planejar, implementar e avaliar processos instrucionais idôneos. Os componentes de guia são as seis facetas (epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediaciona e ecológica).

O guia apresenta indicadores para cada faceta implicada no processo de formação, a fim de precisar a faceta epistêmica, na qual será base para análise dos dados dessa pesquisa, toma-se os seus indicadores para detalhar. A faceta epistêmica é composta pelo conteúdo matemático, ecológico, afetivo, interacional, mediacional e cognitivo.

Os indicadores do conteúdo matemático num processo de formação consideram as situações-problema para a construção do conhecimento matemático, assim como, o selecionar e adaptar problemas que gere significado ao objeto de estudo (considerando as representações, argumentações e procedimentos). O conteúdo ecológico deve prever conhecimento das orientações curriculares, postura crítica e investigativa perante as inovações didáticas. (Godino et al, 2013)

O conteúdo cognitivo deve prever as etapas, as dificuldades recorrentes, obstáculos epistemológicos e conhecimentos prévios dos alunos para aquele nível de ensino do tópico específico de estudo. O conteúdo afetivo deve prever a competência em buscar situações pertinentes ao campo de interesse dos alunos e que sejam utéis na vida cotidiana dos mesmos. O conteúdo interacional deve prever a importância do diálogo e comunicação para a aprendizagem. O conteúdo mediacional deve prever reconhecer a importância dos recursos didáticos na aprendizagem de Matemática, assim como, as limitações e gestão do tempo. (Godino et al, 2013).

Nesse trabalho será utilizado o modelo denominado Conhecimentos Didático-Matemáticos para analisar os conhecimentos didático-matemáticos mobilizados pelos licenciandos em

Matemática sobre os números racionais.

Metodologia

A presente pesquisa tem uma abordagem qualitativa, isto é, ao pesquisador qualitativo os dados numéricos são interpretados de forma crítica, não os toma apenas pelo seu valor facial (Bogdan; Bilklen, 1994). Os dados apontados são próprios dos sujeitos da pesquisa e do contexto sociocultural de que participam e que, via uma análise qualitativa, oportuniza sua compreensão e discussão. Nesta ótica, o pesquisador é passível de apontar limitações e potencialidades na sua análise, assim como não possui um roteiro pré-determinado, rígido, a ser seguido.

Para tal análise foi desenvolvido um encontro de formação durante a Semana Acadêmica do curso de Matemática – Licenciatura de uma Instituição de Ensino Superior (IES) pública do Estado do Rio Grande do Sul, Brasil. A proposta constitui-se de uma oficina, de quatro horas, que visava mobilizar os conhecimentos didático-matemáticos sobre os números racionais dos participantes, futuros professores de Matemática.

Nesta oficina participaram 26 licenciandos e foi organizada em dois momentos. O primeiro tratando de como os participantes entendem/definem um número racional e como empregam esse conhecimento em uma situação-problema. Cada participante elaborou a sua resposta e, após, foi socializado com o grande grupo.

No segundo momento, os licenciandos se organizaram em trios e receberam duas situações-problema. Como havia 8 trios e 1 dupla, a cada 3 grupos receberiam os mesmos problemas. O passo seguinte foi unir os grupos com os mesmos problemas para que esses novos grupos elaborassem uma solução, ou seja, que fossem rediscutidos os procedimentos e estratégias de solução. E, por fim, foi compartilhado entre todos, as soluções e encaminhamentos elaborados e concomitantemente os formadores foram indicando e discutindo as possiblidades e definição do significado que o número racional assumiu nas situações-problema.

A seguir são apresentados os resultados dessa oficina. Os dados foram levantados por meio dos registros das atividades supracitadas dos licenciandos.

Resultados e discussões

A formação de professores de Matemática, em específico, tem avançado nas úlitmas décadas e apontando os conhecimentos que os professores devem possuir para um processo de ensino. Por meio do modelo CDM, toma-se, neste estudo, para análise dos dados a faceta epistêmica, pois engobla os conhecimentos comum, ampliado e especializado do professor em um tópico específico de matemática.

Via a faceta epistêmica é possível a identificação e análise de níveis de conhecimento do professor: o nível de aplicação e o nível de identificação. O primeiro no qual o licenciando deve fazer uso de diversas representações, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos, empregar diversos significados parciais do objeto matemático para resolver atividades, neste caso com os números racionais. O segundo nível se refere a competência dos professores/licenciandos para identificar conhecimentos (linguísticos, conceitos, propriedades, procedimentos, argumentos) que emergem da resolução de uma atividade, neste caso de números racionais (Pino-Fan, Font; Godino, 2014).

Deste modo, para a análise dos dois níveis de conhecimentos supracitados, toma-se o primeiro momento da oficina no intuito de melhor descrever, discutir e compreender os dados, isto é, a mobilização (ou não) dos conhecimentos didáticos-matemáticos envolvendo os números

racionais.

A primeira atividade tem o caráter de identificar/compreender o entendimento de número racional pelo licenciando, isto é, toma-se o primeiro nível de aplicação do conhecimento necessário ao professor de matemática do tópico específico, número racional. Ressalta-se que todas as atividades da oficina foram planejadas para o nível de Ensino Fundamental. Logo, toma-se o conhecimento do professor para esse nível de ensino.

As representações e conceitos apresentados pelos licenciandos, nesta oficina, muitas vezes se demonstraram inconsistentes, pois apenas uma parte, 27% dos participantes, apresentaram conceitos/argumentos coerentes para definirem o conjunto numérico dos números racionais. As falas dos alunos comprovam esse dado.

> São números que seguem um padrão entendido pela razão. São formados em uma representação fracionária de $\frac{a}{b}$ sendo a $a \in Z, b \in Z^*$. (Aluno A).

> São os decimais exatos e as dízimas periódicas. São os números na forma fracionária $\frac{a}{b}$, onde $a \in Z, b \in Z^*$. (Aluno B).

Todas as representações adotadas para identificar um número racional foram na forma de fração. Um aluno apenas citou os números decimais como representação do número racional (Aluno B). Não foi sugerida a representação de porcentagem do número racional ou considerando, ainda, no campo de definição/argumentação não foi explorado a ideia de classes de equivalência.

O restante dos participantes, que estão em semestres distintos (início ou fim da graduação) não identificam/compreendem os números racionais ou, ainda, apresentam algumas concepções erronêas sobre os mesmos. Eles os identificam como números fracionários, mas não como dízimas periódicas; identificam que pode ser um número decimal, com número de casas finito, mas não pode ser inteiro ou, ainda, que está contido no conjunto dos números irracionais.

> Números que são usados para representar resultados "quebrados", partes de algo. Usados em ocasiões onde se usa no lugar de nº inteiros. (Aluno C)
> Podemos reconhecer por números racionais aqueles que podem ser expressos pela forma de fração de modo que estejam divididos entre numerador e denominador. (Aluno D).

O Aluno D apresentou um conceito importante sobre os números racionais, de divisão (numerador e denominador). Entretanto, não mencionou quais números podem assumir o dividendo e divisor.

A segunda atividade visava mobilizar o segundo nível de conhecimento, de identificação. O quadro 1 ilustra uma situação-problema e possíveis encaminhamentos do professor.

Quadro 1
Atividade proposta aos licenciandos

Ana deu um meio de suas balas para sua irmã e Jorge deu também a sua irmã um quarto de suas balas. Quem deu mais balas? *A aluna 1* apresentou como resposta a essa situação que Jorge deu mais balas, pois deu o dobro de balas que Ana. *A aluna 2* apresentou como resposta que Ana tinha dado mais balas, pois deu a metade de suas balas e Jorge deu menos da metade de suas balas.
a) No seu entendimento, qual erro a Aluna 1 cometeu? Escreva como tu explicarias à aluna o erro cometido e quais encaminhamentos daria para a solução correta. b) A resposta da Aluna 2 poderia estar correta, porém sua justificativa não é suficiente para garantir que a resposta esteja correta. O que tu questionarias à aluna para garantir que sua resposta esteja correta? c) Quando tu ensinas os números racionais, quais são as dificuldades de aprendizagem mais recorrentes dos alunos?

Fonte: da pesquisa.

Todos os participantes identificaram o erro da Aluna 1, consideraram apenas os denominadores das frações para realizar a comparação da quantidade de balas dada. Os encaminhamentos propostos pelos licenciandos vão desde considerar que a fração ½ > ¼ seja pela divisão ou pela representação pictórica (retângulo dividido em partes iguais). Assim como, em questionar qual o todo (a quantidade de balas de cada pessoa) para daí, sim, saber quem deu mais balas. Sete alunos não apresentaram encaminhamentos para que a Aluna 1 pudesse compreeender corretamente a situação.

> Para explicar a ela a forma de encontrar a solução correta, diria para imaginar uma laranja, cortá-la em tantas vezes quanto é o denominador, pegar um só pedaço e ver qual é o maior. (Aluno E).
>
> Pegaria um pacote de balas e dividiria em 2 partes, de modo que o aluno perceba a quantidade dessa divisão. Em seguida usando o mesmo pacote dividiria em 4 partes iguais, e de mesmo modo perceber a quantidade de balas. (Aluno F).
>
> Explicaria a aluna que nesse caso ½ é maior que ¼, pois ao fazer a divisão entre numerador e denominador desses números certifica-se disso. (Aluno F).

Nos encaminhamentos para a resposta da Aluna 2, cerca de 46% dos licenciandos, apresentaram entendimentos pertinentes para elucidar a situação, isto é, apenas citaram que a Aluna 2 deveria perceber que não está definido a quantidade de balas. Apenas dois licenciandos apresentaram o questionamento ao aluno. A seguir, apresenta-se as duas questões propostas.

> Não é suficiente, pois não há a informação do total de balas que Ana tinha e nem do total de balas que Jorge tinha. Questionaria: " E se o nº de

> balas de Ana for diferente do nº de balas de Jorge? (Aluno G).
>
> E se Jorge tivesse mais balas que Ana? Mas para a resposta estar correta: se eles realmente tivessem o mesmo número de balas, demonstre com desenho e frações a quantidade de balas dadas. (Aluno H).

Os outros 64% dos participantes apresentaram respostas inconsistentes ou errôneas, tais como: "a quantidade de balas de Ana teria quer ser maior que as de Jorge", "que a aluna demonstrasse como ela chegou a este resultado", "eu pediria para ela fazer uma representação" e " pediria para a aluna responder os valores das divisões de ½ e ¼ para que assim visse que 0,5 é maior que 0,25". Nota-se que no último caso o licenciando não considera qual é o todo de balas.

Para o item c) da atividade, dificuldades de ensino e aprendizagem envolvendo os números racionais, cinco participantes não apresentaram resposta. Quatro participantes não citaram o âmbito da dificuldade, mas consideram como dificuldades reconhecer e resolver frações, as operações, a comparação de frações com denominadores distintos. Dez participantes se referem às suas próprias dificuldades de aprendizagem, sendo elas: nomenclatura, soma e subração de frações, ordenação dos números racionais e conversão de fração para decimal. Seis participantes citaram dificuldades de ensino, sendo operações com frações, comparar e reconhecer uma fração como divisão. Percebe-se que o licenciando fala em dificuldade em aprendizagem (a sua própria) ou em ensino – dificuldade dos alunos (para quem já teve essa experiência em estágios por exemplo). Não mencionam ambos: ensino e aprendizagem. E quando falam em ensino, apontam as dificuldades dos alunos e, não as suas no ato de ensinar (pode ser pelo fato que não haja dificuldade ou por não refletirem sobre suas práticas de ensino).

Considerações finais

O presente trabalho teve como propósito apresentar e discutir os conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática participantes de uma oficina sobre números racionais. Por meio das atividades propostas durante a oficina, sua resolução e discussão percebe-se que os licenciandos têm a perspectiva da consolidação dos conhecimentos matemáticos para atuação na docência. Entretanto, na perspectiva didática há um sombreamento. Dúvidas no que exatamente esses conhecimentos se referem ou como são "adquiridos".

A discussão de quais são os conhecimentos que o professor deve ter para ensinar um tópico específico de matemática, para uma prática idônea, não é adquirido apenas numa oficina. Há distintos e/ou complementares estudos sobre quais e como esses conhecimentos se mobilizam na formação inicial ou continuada de professores.

Baseado na faceta epistêmica do CDM e dos dados dessa formação, verificou-se que os licenciandos tem uma preocupação maior em expor o conhecimento matemático, isto é, apresentar uma solução (normalmente cálculo como argumentação). E quando questionados sobre os encaminhamentos do professor para elucidar uma questão ou outra estratégia de solução ou registro, percebeu-se a limitação dos mesmos.

O denominado conhecimento especializado do professor, presente na faceta epistêmica, é um dos conhecimentos que diferencia o professor de Matemática. A situação elaborada para a distribuição de balas entre os irmãos emprega um conhecimento comum, a quantidade de balas para cada um. Entretanto, cabe ao professor, elaborar a questão ao nível de conhecimento dos alunos, assim como, quais serão os conhecimentos emergentes da situação e os diferentes

registros de representação. Neste sentido, é cabível ao professor, questionar as diversas estratégias dos alunos buscando uma formalização dos conceitos/temas abordados.

Por fim, ressalta-se que durante a oficina foi possível (re)conhecer os conhecimentos necessários ao professor para ensinar: os matemáticos e os didáticos. No tema específico dos números racionais, os licenciandos tiveram a oportunidade de ter um olhar não apenas de aluno, mas, também, de professor.

Referências e Bibliografia

Bogdan, R.C.; Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação Matemática*: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educacion Matemática***.** Nº 20.

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2007) The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education,* 39, 1-2.

Godino, J. D. (2017) Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teoricas para la educacion matematica. 2017. In CONTRERAS et al (Eds.). *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>. Acesso em 20 jun 2018.

Godino, J.D. et al. (2013). Componentes e indicadores de idoneidade de programas de formação de professores em educação matemática. *REVEMAT*. Florianópolis, 8, 1, 46-74.

Kieren, T. (1980). Personal Knowledge of rational numbers: its intutive and formal development .In: Hiebert, J and Behr, M. (eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 162-180.

Pino-Fan, L.R; Font, V.; Godino, J. D. (2014). *El conocimiento didático-matemático de los professores*: pautas y critérios para su evaluacion y desarrollo. Disponível em < http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2014/09/Pino-Fan-et-al.-2014_Extracto-sin-portada.pdf> Acesso em 18 mai 2018.

Pino-Fan, L.R.; Godino, J.D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del professor. *Paradigma*, XXXVI, 1, 87-109.

Romanatto, M.C. (1997). *Número racional*: relações necessárias a sua compreensão. 169f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Investigando estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I

Lilian **Nasser**
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
lnasser.mat@gmail.com

Angela **Biazutti**
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
biazuttiac@gmail.com

Marcelo **Torraca**
SEEDUC-RJ, Colégio Santa Mônica- RJ
ProjetoFundão, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
torraca@gmail.com

Jeanne **Barros**
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
ProjetoFundão, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
jeanne@ime.uerj.br

Resumo

Tem-se observado nos últimos anos um alto índice de reprovaçãona disciplina Cálculo I, ministrada para calouros de cursos na área de Ciências Exatas, tanto em universidades públicas como particulares. O presente trabalho relata os caminhos para desenhar um roteiro a ser usado nessa disciplina, na fase inicial de aulas, que possa auxiliar os alunos que apresentam lacunas de aprendizagem, oriundas da Escola Básica. Pretende-se ainda utilizar este material para produzir um guia destinado a professores de Matemática deste nível, sugerindo abordagens para os conteúdos de modo a preparar melhor os futuros alunos de cursos de graduação na área de Ciências Exatas. Foi elaborado um teste diagnóstico para investigar a natureza das dificuldades, aplicado a 237 alunos de duas universidades do estado do Rio de Janeiro.

Palavras-chave: evasão e reprovação em Cálculo I; teste diagnóstico; atividades virtuais.

Introdução

Nos cursos de nível superior da área de Ciências Exatas, como Ciência da Computação, Matemática, Engenharias, dentre outras, nas universidades brasileiras, a disciplina inicial que aborda os fundamentos do cálculo diferencial e integral tem apresentado historicamente índices de aprovação insatisfatórios. A situação parece estar se agravando, visto que, no último semestre, foi observado um índice superior a 50% de reprovação em turmas de duas universidades públicas do Rio de Janeiro, sendo uma federal e outra estadual. É necessário, portanto, procurar as causas para estes resultados e sugerir soluções que possam ser utilizadas, tanto na sala de aula quanto fora dela, para reverter esta situação que pode, também, implicar em aumento dos índices de evasão.

Professores em outras universidades, que já se depararam com este problema, concluíram que a causa principal é um déficit na aprendizagem dos conteúdos da Escola Básica, conteúdos estes necessários para a compreensão dos tópicos estudados na disciplina Cálculo I. Para resolver o problema, incluíram na grade curricular uma disciplina denominada Pré-Cálculo, assim denominada pois contém as ferramentas básicas, em nível do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, para os alunos que iniciam os estudos de cálculo diferencial e integral. Foi verificado, entretanto, que o problema simplesmente mudou de lugar (Diefenthäler, 2017). Os altos índices de reprovação passaram a ocorrer nesta disciplina básica. A explicação parece ser que os alunos ficam desmotivados para estudar um conteúdo que já conhecem, segundo a opinião deles.

Em sua pesquisa, Gonçalves (2007) procurou evitar uma disciplina extra de pré-Cálculo, e propôs uma estratégia para a disciplina de Cálculo I, em que os professores fizeram alterações em suas disciplinas, implantaram mais trabalhos e provas em períodos mais curtos, para que os alunos pudessem assimilar melhor os conteúdos. “Tal iniciativa tem indicado resultados mais satisfatórios, pois as notas das primeiras avaliações melhoraram, apesar de a evasão manter-se semelhante à de outros semestres”. (p. 49)

De modo semelhante, este trabalho sugere uma forma para tentar suavizar a transição dos alunos entre o Ensino Médio e o Superior, a partir de uma abordagem inicial da disciplina de Cálculo I, usando aplicações para motivar os alunos e cobrir lacunas de aprendizagem. O nosso objetivo é elaborar um roteiro contendo problemas a serem abordados em sala e material a ser disponibilizado em plataforma digital, complementando cada aula. Os problemas estudados envolvem, em geral, máximos e mínimos ou taxas de variação média de funções, contextualizados e contemplando interdisciplinaridade, exigindo modelagem matemática das situações-problema. A princípio podem ser resolvidos utilizando somenteconteúdosda Escola Básica. O material complementar, disponível on-line, tem*links* para diversas atividades envolvendo tópicos de Matemática desse nível.Desta forma, os alunos que tiverem dificuldades com conteúdos anteriores, poderão cobrir estas lacunas, com auxílio dos monitores da disciplina de Cálculo I.

Para obter informações mais claras sobre as dificuldades principais dos alunos,foi elaborado um teste-diagnóstico, contemplando exemplos de problemas a serem propostos no roteiro e seguindo as ideias do referencial teórico adotado neste trabalho. Este teste foi aplicado a 237 alunos, de turmas de vários cursos na área de Exatas (Engenharia, Computação, Física, Meteorologia, Matemática, Estatística, Atuária), na primeira semana de aula da disciplina inicial de Cálculo I. A análise dos resultados dos testes é apresentada e comentada, e são indicados os próximos passos do estudo para atingir o objetivo final.

Referencial Teórico

O alto índice de evasão e repetência na primeira disciplina de Cálculo não é recente, e tem sido investigado por diversos pesquisadores como Even (1990), Robert e Schwarzenberger(1991), Rezende (2003), Gonçalves (2007), Nasser (2009) e Nasser, Sousa e Torraca (2012). Esses trabalhos investigam as principais causas para as dificuldades na transição do Ensino Médio para o Superior, que se refletem nas dificuldades na disciplina de Cálculo I. Mais recentemente, Masola e Allevato (2016) apresentaram um trabalho que "retratao que algumaspesquisas discutem com relação às dificuldades de aprendizagem de alunos ingressantes no Ensino Superior." Esses pesquisadores apontam alguns caminhos para minimizar essas dificuldades: "a avaliação diagnóstica, o trabalho com grupos colaborativos, a análise de erros, o trabalho com Matemática articulada ao cotidiano profissional, e as contribuições dos recursos tecnológicos e dos livros textos". (Masola e Allevato, 2016, p. 64)

A pesquisa deNasser, Sousa e Torraca (2012), desenvolvida num ambiente de grupo colaborativo, recomenda que "as dificuldades na transição para o Ensino Superior, em especial na disciplina de Cálculo, podem ser amenizadas por abordagens adequadas de tópicos do Ensino Médio, tais como Funções e Geometria" (p. 1).

Observa-se que a maioria dos problemas do Cálculo depende de uma representação visual adequada, como os problemas típicos de "máximos e mínimos", "taxas relacionadas" e de "área entre curvas". Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas na sua representação geométrica e na identificação de relações entre os elementos da figura.

De acordo com Duval, uma das causas das dificuldades em Cálculo é a falta depercepção da relação entre os objetos matemáticos e as diversas formas de registro de suarepresentação. Duval (2009) afirma que

> não pode haver compreensão matemática sem se distinguir um objeto de sua representação, pois jamais deve-se confundir objetos matemáticos (números, funções, retas) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, desenhos de figuras) que parecem apenas ser o meio, de que o indivíduo dispõe, para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para se tornarem visíveis ou acessíveis a outros, pois, em matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática. (p. 15)

Duval (2009) distingue dois tipos de transformação nas representações semióticas: o tratamento e a conversão. O tratamento é definido como uma transformação da representação no próprio registro onde ela foi formada, ou seja, é uma transformação interna. Por outro lado, a conversão envolve uma transformação de uma representação em outro tipo de registro. De acordo com Duval (2003),"há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato" (p. 31).

No caso da aprendizagem de funções, a teoria de Duval (2009) aponta a necessidade de levar os alunos a dominar as representações verbal, gráfica, tabular e analítica, e a articular a transição entre esses registros. Uma das causas das dificuldades deve-se à passagem da expressão analítica da função para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto, o que acarreta problemas na passagem inversa. A prática sistemática dessa abordagem não favorece a interpretação global, que é, em geral,deixada de lado,uma vez que depende de análise semiótica

visual e algébrica. Isso ajuda a compreender porque a maioria dos alunos apresenta dificuldades na utilização correta das representações gráficas, mesmo no Ensino Superior.

Por outro lado, Sierpinska (1992) afirma que há 16 obstáculos a se transpor para a aquisição do conceito de função. Um desses obstáculos é a concepção ingênua de que "*o gráfico de uma função não precisa ser exato*". Essa concepção explica alguns dos problemas observados nas tentativas de alunos de Cálculo I de traçar gráficos de funções simples. Outro obstáculo, apontado também por Sierpinska, é a concepção de que "*apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções"*. De fato, muitos alunos só reconhecem como funções as relações que são representadas por uma expressão algébrica, e apresentam dificuldades, por exemplo, ao lidar com funções definidas por várias sentenças, tão úteis na representação de problemas reais.

As teorias de Duval e Sierpinska nortearam nossa pesquisa, sendo decisivas, inclusive, na escolha das questões do teste diagnóstico.

Metodologia

O teste diagnóstico, composto de três questões, foi aplicado a 237 alunos de vários cursos de graduação, em duas universidades públicas do Rio de Janeiro, com o objetivo de detectar as principais dificuldades dos alunos ingressantes ao lidar com funções na resolução de problemas, e fornecer subsídios aos pesquisadores para o desenvolvimento do roteiro para as primeiras aulas do curso. O teste foi aplicado no início das aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, com aproximadamente 1h30m de duração.

Análise das respostas à 1ª questão

A primeira das questões (Figura 1), a mais simples, de resolução imediata, foi escolhida com o objetivo de verificar se o aluno consegue identificarseu domínio e imagem, além devalores e zeros de uma função. Optamos por fornecer a representação gráfica da função.

Questão 1: Considere o gráfico da função f da figura abaixo e responda:

a) O valor de f (-1) é:_____.

b) O valor de f (3) é: _____.

c) Os valores de x tais que f (x) = 2 são: _____ e _____.

d) Marque na figura os valores de x tais que f (x) = 0.

e) O domínio da função f é_____ e a imagem da função f é _____.

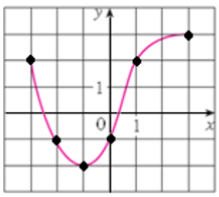
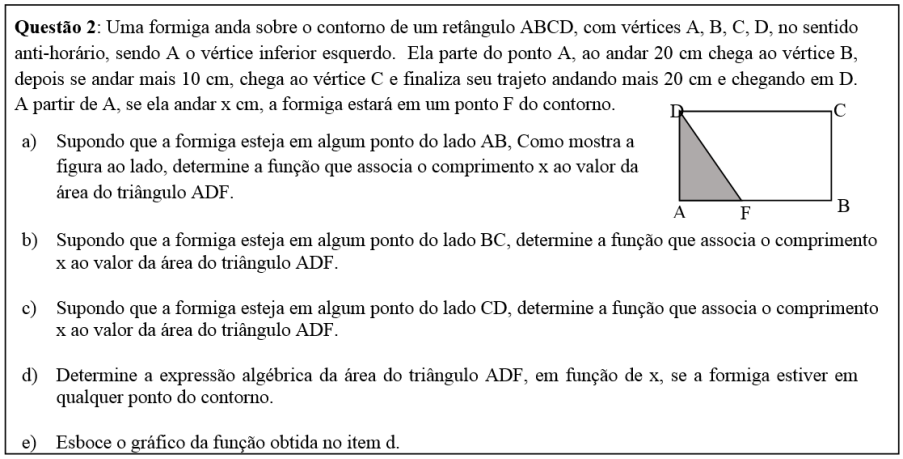


*Figura 1.*Primeira questão: Análise da representação gráfica.

Constatamos uma alta porcentagem de acertos nos itens (a), (b) e (c), ultrapassando os 70%. Houve dificuldade em mostrar no gráfico os zeros da função (item d), com apenas 54% de acertos.Em alguns casos, houve troca da ordenada pela abscissa, ou seja, os alunos marcaram o valor de $f(0)$ em vez de assinalar os valores de x tais que $f(x) = 0$. Vários alunos consideraram o domínio e imagem como conjuntos discretos. Menos da metade da amostra acertou o item (e), em que se registrou 46% de respostas corretas para o domínio e 42% para a imagem da função exibida no gráfico.Essa dificuldade pode estar associada ao fato de que, na Escola Básica, os alunos trabalham quase que exclusivamente com funções polinomiais ou trigonométricas, considerando como domínio o conjunto dos números reais. Ou então trabalham com funções definidas num domínio discreto, associando cada ponto à sua imagem.

Análise das respostas à 2ª questão

As questões 2 e 3 foram selecionadas/escolhidas para verificar se os estudantes seriam capazes de articular a transição entre as representações verbal, analítica e gráfica. O quesito da linguagem se mostrou um bloqueio para realizar essa transição, visto que o item dessas questões que alcançou o melhor resultado foi o item (a) da 2ª questão, com 51% de acertos, talvez porque apresentava uma figura representando a situação (veja a figura 2). Um dos alunos, inclusive, afirmou que não conseguiu ver a diferença entre os itens (a), (b) e (c) da Questão 2.



Questão 2: Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD, com vértices A, B, C, D, no sentido anti-horário, sendo A o vértice inferior esquerdo. Ela parte do ponto A, ao andar 20 cm chega ao vértice B, depois se andar mais 10 cm, chega ao vértice C e finaliza seu trajeto andando mais 20 cm e chegando em D. A partir de A, se ela andar x cm, a formiga estará em um ponto F do contorno.

a) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado AB, Como mostra a figura ao lado, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

b) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado BC, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

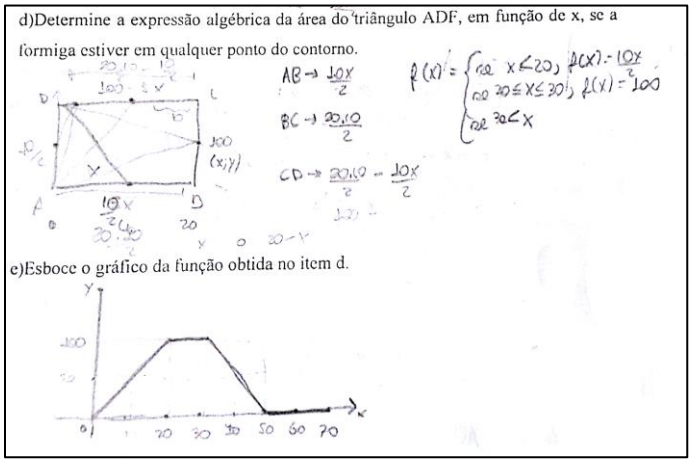
c) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado CD, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

d) Determine a expressão algébrica da área do triângulo ADF, em função de x, se a formiga estiver em qualquer ponto do contorno.

e) Esboce o gráfico da função obtida no item d.

*Figura 2.*Segunda questão: adaptada da OBMEP 2014 (2ª fase, questão 2, nível 3).

No item (b), a maioria dos alunos não percebeu que a área não dependia de *x*, gerando uma função constante. O índice de acertos nesse item foi de apenas 21%, sendo que 30% deixaram em branco. O índice de acertos do item (c) foi ainda menor, de apenas 11%. Mas o item que apresentou o menor número de acertos foi o (d): apenas 8% conseguiram escrever a expressão da função área, que era uma função de várias sentenças. Esse resultado comprova o obstáculo prescrito por *Sierpinska*, de que os estudantes têm a crença de que uma função deve ser definida por uma única expressão analítica. O item (e), que pedia o gráfico da função da variável *x* que dava a área do triângulo, teve o maior índice de respostas em branco (54%) e apenas 14% de acertos. Entretanto, nota-se uma curiosa discrepância nos resultados: apesar de 14% dos alunos acertarem o gráfico,apenas 8% conseguiram escrever corretamente a expressão analítica da função definida por várias sentenças, como a resposta mostrada na figura 3.



d)Determine a expressão algébrica da área do triângulo ADF, em função de x, se a formiga estiver em qualquer ponto do contorno.

e)Esboce o gráfico da função obtida no item d.

Figura 3. Tentativa incorreta de exprimir a função, e seu gráfico.

Análise das respostas à 3ª questão

A terceira questão apresentava um problema muito explorado nadisciplinade Cálculo I, com a diferença de que o papelão tem forma quadrada. Para resolvê-la, os alunos deveriam interpretar o enunciado e fazer uma figura que permitisse visualizar a situação, para então determinar a expressão algébrica da função (item (a)) do volume da caixa em função do lado dos quadrados recortados dos cantos do papelão e depois identificar seu gráfico no item (b).Assim, era preciso fazer a conversão do registro verbal para o analítico, usando uma figura para compreender a variação do parâmetro e encontrar a expressão analítica da função.

Questão 3: Com um retângulo de papelão de 8cm de comprimento por 5cm de largura, deseja-se construir uma caixa retangular sem tampa. Para isto de cada ponta do papelão é cortado um quadrado de x cm de lado, com um dos vértices de cada quadrado sendo um dos vértices do retângulo de papelão.

a) Determine a expressão algébrica da função que fornece o volume da caixa, em função do lado x do quadrado.

Figura 4. Enunciado da questão 3 com o item (a).

O item (a) da terceira questão alcançou 43% de acertos, o que indica que possivelmente alguns alunos já tivessem tido contato com esse problema anteriormente, ainda que no caso do papelão de forma quadrada, o que dá origem a uma caixa com base quadrada. Neste problema, a exploração dos valores possíveis para x e os formatos correspondentes da caixa obtida, na atividade virtual, ajuda muito na compreensão do enunciado, e na transição da representação verbal para a analítica, que corresponde à identificação da função que expressa o volume da caixa em termos de *x*. A figura 5 mostra as alternativas dadas no item (b) para o gráfico da função volume do item (a).

b) Dentre os gráficos abaixo escolha o que melhor representa geometricamente o gráfico da função obtida no item a. Justifique o porquê de sua escolha.

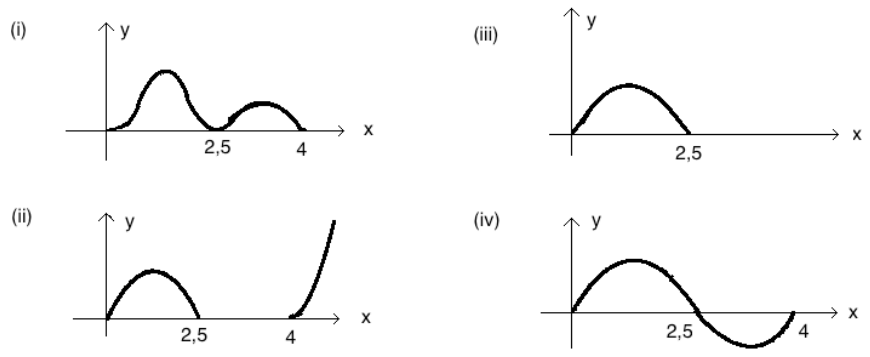


Figura 5. Item (b) da terceira questão: transição do registro analítico para o gráfico.

Apesar de o índice de acertos da expressão algébrica ter alcançado 43%,somente 26% dos

alunos escolheram o gráfico correto (iii) no item (b), mostrado na figura 5, o que indica uma dificuldade maior na conversão do registro analítico para o registro gráfico. Uma razão possível para este resultado remete à análise das respostas da questão 1, que mostra a dificuldade dos alunos no que se refere à compreensão dos conceitosde domínio e imagem. Cerca de 20% dos alunos escolheu o gráfico (iv), não observando que os valores de *x* deveriam ser menores que 2,5. Esse foi o comportamento do aluno cuja resposta está reproduzida na figura 6.

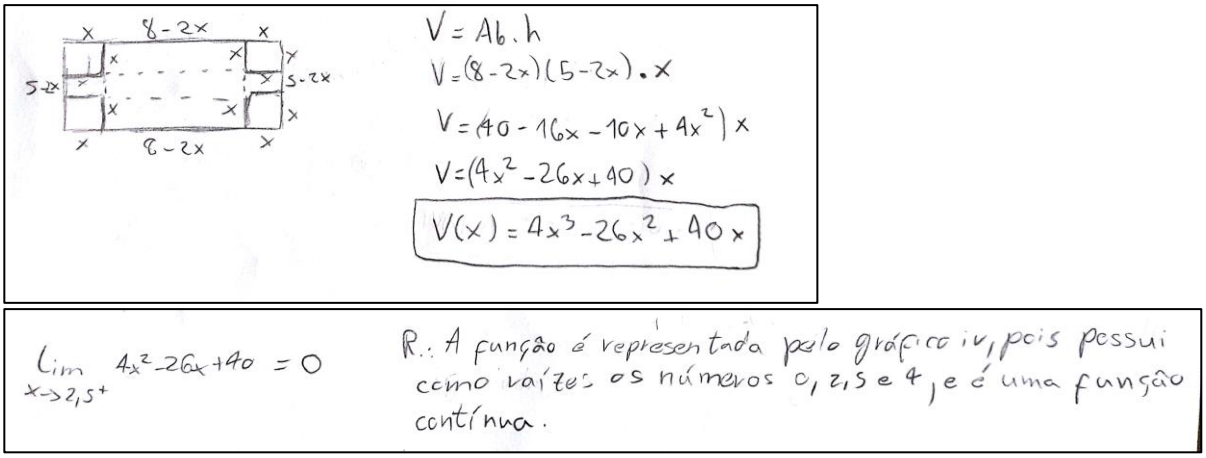


*Figura 6.*Resposta dada à terceira questão: registro analítico correto, mas escolhaincorreta do gráfico.

Ainda na terceira questão, um aluno apenas esboçou a figura do retângulo com os quadradinhos marcados nos cantos e escreveu: “Tenho muita dificuldade em questões com funções, não tive esta matéria de forma aprofundada no ensino médio, logo, não saberia responder corretamente as questões. Estou estudando todas as matérias do ensino médio em casa, para conseguir uma base para estudar Cálculo I”. Esse depoimento indica a necessidade de rever as estratégias usadas no Ensino Médio, corroborando osobjetivos da nossa pesquisa.

Próximos passos

Analisando os resultados do teste diagnóstico à luz dos referenciais teóricos de Duval e Sierpinska, é possível identificar as dificuldades dos alunos ingressantes em Cálculo I, no conteúdo de funções e suas representações. As principais dificuldades observadas foram a leitura e interpretação de enunciados de problemas, e a modelagem desses problemas, envolvendo a conversão da representação verbal para a analítica, em termos de funções afim, polinomiais e de várias sentenças. Em alguns casos foi observada também a dificuldade com o trato algébrico, que foi causa de erros nessa transição.

A partir dessas observações, é possível identificar diretrizes para um roteiro que será desenvolvido para orientar os docentes, utilizando algumas atividades virtuais criadas pela professora Ângela Rocha, e já disponibilizadas na página do Instituto de Matemática da UFRJ (IM/UFRJ).Por exemplo, é preciso conscientizar professores do Ensino Médio de que o conteúdo de funções deve ser explorado de forma mais abrangente, como sugerido por Duval (2003, 2009). Outro ponto a observar é que os exemplos trabalhados na disciplina de Cálculo devem refletir situações reais, em que as funções nem sempre são bem-comportadas como as funções polinomiais. Essa estratégia possibilita a exploração de situações do cotidiano, como a variação

dos valores cobrados de Imposto de Renda, em função do salário mensal recebido. Recomendamos propor situações representadas por funções definidas por mais de uma sentença, funções descontínuas, e explorar seus gráficos. Também é preciso reforçar as noções de domínio e imagem de uma função, ultrapassando obstáculos, como os sugeridos por Sierpinska (1992).

Portanto, os próximos passos deste trabalho são o exame das atividades virtuais disponibilizadas na página do IM/UFRJ e a coleta de problemas contextualizados que levem à superação das dificuldades apontadas por Duval e Sierpinska. Este roteiro, com certeza, será muito útil, tanto para professores do Ensino Médio quanto para docentes de Cálculo I.

Referências

Diefenthäler, A. T. (2017. DisciplinaPré-Cálculo: umolhar a partir do desempenho dos acadêmicos.Disponível em:
http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/4238/Andressa%20Tais%20Diefenthäler.pdf?sequence=1

Duval, R.(2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, p.11-33.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Gonçalves, C. F. (2007). Dificuldades em matemática ao ingressar no Ensino Superior. Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática no Centro Universitário La Salle, Canoas, RS.

Masola, W. J &Allevato, N. S. G (2016). Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na Educação Superior. Revista Brasileira de Ensino Superior, 2(1): 64-74.

Nasser, L.(2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. &Nasser, L (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*, SBEM, p. 43-58.

Nasser, L., Souza, G. &Torraca, M.A. (2012). Transição do EnsinoMédio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo?Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação *Matemática* (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil.

Rocha, A., Material para ensino de Pré-Cálculo, página: http://www.im.ufrj.br/precalculo, acessada em 24/09/2018

Sierpinska, A. (1992).*On understanding the notion of function*. In: Dubinsky, E; Harel, G (Ed.) *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy*. MAA Notes, p.25-58.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

O grupo de estudos de Cálculo como alternativa de apoio a estudantes do ensino superior

Paulo Eduardo Monteiro **Sulczinscki**
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília.
Brasil
paulo_pems@hotmail.com
Paulo Victor Ximenes de **Oliveira**
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília.
Brasil
paulovictorximenes@gmail.com
Raquel Carneiro **Dörr**
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília.
Brasil
raqueldoerr@gmail.com

Resumo

Esta comunicação científica traz o relato de uma investigação realizada com estudantes de um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral em uma universidade pública brasileira. Ela está inserida em um projeto mais amplo que tem como objetivo geral conhecer e descrever as alternativas educacionais dadas a estudantes iniciantes dessa instituição a fim de que possam superar suas dificuldades, sanar lacunas de conhecimento em conteúdos matemáticos básicos e, com isso, alcancem sucesso em suas aprendizagens. O intuito deste trabalho é reforçar entre professores e educadores matemáticos do ensino superior, a necessidade do desenvolvimento de estratégias de acolhimento a estudantes iniciantes que têm os cursos de Matemática como componentes de seus currículos.

Palavras-chave: ensino superior, aprendizagem, cálculo, matemática básica, conhecimento matemático.

Contexto, justificativa e objetivos da pesquisa

Esta comunicação científica traz um relato de uma investigação realizada com estudantes de um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral em uma universidade pública brasileira. Ela faz parte de um projeto mais amplo de pesquisa que tem como objetivo geral conhecer e descrever as alternativas educacionais dadas a estudantes iniciantes dessa instituição a fim de que

possam superar suas dificuldades, sanar lacunas de conhecimento em conteúdos matemáticos básicos e, com isso, alcancem sucesso nas aprendizagens do Cálculo[1].

Diferentes pesquisadores têm observado o fato de que, em geral, se os estudantes que ingressam na vida universitária já possuem uma preparação adequada em determinados temas matemáticos básicos, certamente poderão ter mais chances de sucesso (Dörr, 2017; Dreyfus & Eisenberg, 1990; Tall, 1993).

O Cálculo é uma continuação do estudo das Funções. A introdução desse conteúdo é iniciada nos anos finais do Ensino Fundamental. Portanto, se esse tópico, juntamente com outros tantos como Geometria Analítica, Trigonometria e alguns da Álgebra (por exemplo, resolução de equações e inequações), além das habilidades em manipulações algébricas, estiverem bem consolidados nas aprendizagens anteriores, os estudantes poderão conseguir um melhor desempenho no curso em termos das aprendizagens adquiridas e de aprovações.

Na mesma medida em que o Cálculo é conhecido por suas importantes e múltiplas aplicações em variadas áreas do conhecimento (Stewart, 2011; Thomas, Weir & Hass, 2009), ele também é reputado como sendo difícil e com uma alta taxa de reprovação (Alvarenga, Dörr & Vieira, 2017). Em particular, na universidade em que está sendo realizada a pesquisa, foi verificado que, nos dois semestres de 2014, as taxas médias de aprovação nas dezenove turmas foram de 50.05% e 47.7%, respectivamente. No segundo semestre de 2015 essa taxa foi de 53.7%.

Do ponto de vista pessoal, o insucesso leva à frustração e ao desencorajamento para continuar os estudos. Além desses aspectos, os altos níveis de reprovação e evasão trazem um custo adicional às universidades, pois, no semestre seguinte, novas turmas devem ser criadas para atender àqueles que reprovaram (Dörr, 2017).

Portanto, esta pesquisa vem de encontro a um cenário local de altos índices de reprovação. Tendo em vista o objetivo geral do projeto de pesquisa, este trabalho apresenta uma experiência realizada com estudantes de Cálculo, participantes de uma atividade de extensão universitária ocorrida no primeiro semestre de 2018. Nela foram trabalhados, concomitantemente, assuntos da Matemática do ensino básico, associados aos temas do Cálculo que estavam sendo introduzidos no curso regular.

Como consequência, o relato tem o intuito de reforçar entre professores e educadores matemáticos do ensino superior, a necessidade do desenvolvimento de estratégias de acolhimento a estudantes iniciantes que têm cursos de Matemática como componentes de seus currículos de graduação. Em especial, pode-se considerar como sujeitos desta pesquisa, aqueles que apresentam deficiências em conteúdos matemáticos básicos.

Entende-se que a implementação de atividades de apoio poderá contribuir para que os participantes avancem em suas aprendizagens, não somente no Cálculo, mas também em disciplinas de Física, Geometria ou Álgebra, pois todas elas têm em comum com a primeira o fato de terem como pré-requisito muitos conteúdos matemáticos que fundamentam a construção

[1] Cálculo: A palavra Cálculo em todo este trabalho refere-se a um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral.

dos seus novos conhecimentos no ensino superior.

Referencial teórico

Muitas são as pesquisas que têm apontado distintos fatores que justificam o fracasso de estudantes de Cálculo. Entre eles, destaca-se a falta de embasamento em conteúdos matemáticos relacionados ao ensino básico (Dörr, 2017; Dörr; Muniz & Neves, 2016).

Devido à complexidade relacionada ao entendimento das causas que influenciam o sucesso ou insucesso de discentes de Cálculo, a busca por caminhos que contribuam para a discussão e propostas de soluções que sejam aplicáveis ao grande número de estudantes envolvidos em diferentes países e, ainda, que levem em conta os recursos e culturas distintas, têm sido alvo de interesse de pesquisa entre a comunidade de educação matemática internacional (Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces & Törner, 2016; Rasmussen; Marrongelle & Borba, 2014; Törner, Potari, & Zachariades, 2014).

No Brasil, destacam-se os estudos apresentados no âmbito do Grupo de Educação Matemática do Ensino Superior (GT4), durante os Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM's). Particularmente, nas edições realizadas nos anos de 2012 e 2015 pode ser observado o aumento do número de pesquisas e de pesquisadores que buscam compreender a não aprendizagem de um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Assim, temos como exemplos, estudos que analisam as dificuldades da compreensão das noções de função, limite e derivada (Igliori &Almeida, 2013), no domínio do Teorema Fundamental do Cálculo (Vianna, 1998); a rotina e a forma que os estudantes estudam (Frota, 2010); a falta de experiências prévias, tanto com raciocínio lógico quanto com o traçado e análise de gráficos (Nasser, 2006, 2012).

O curso de Cálculo envolve a introdução e o estudo de vários conceitos inéditos e que ainda não haviam sido considerados na educação básica. Por exemplo, nele é a primeira vez que os estudantes têm contato com a ideia limite de uma função e, muitas vezes, nos procedimentos de cálculos com limites, surgem situações que não podem ser resolvidas por meros processos algébricos. Distintas, variadas e novas noções e situações cercam o seu estudo e aprendizado e tudo se torna "cheio de mistério", conforme expressão de Tall (1993, p. 2). Logo, se o aluno não compreendeu bem os conceitos de função, domínio, contradomínio e imagem, dificilmente conseguirá acompanhar o ritmo das aulas e compreender esse conteúdo fundamental para o Cálculo.

Tall (1993) sugere que seja incentivada a reconstrução do conhecimento em um nível mais sofisticado. Com isso, entende-se que esse autor está indicando a necessidade de uma melhor compreensão dos conceitos estudados. Ou seja, o aluno não deve apenas gravar uma definição, mas sim assimilar todas as noções adjacentes. Desse modo, ele recomenda, por exemplo, o uso da computação gráfica para reforçar a representação visual de certos conceitos. Isso reforça a ideia de Nasser, Sousa e Torraca (2012), de que, muitas vezes, as dificuldades dos alunos em certas questões de Cálculo não estão somente na aplicação do conceito de derivada ou integral, mas também relacionadas às concepções geométricas associadas e às relações entre os elementos visuais.

O livro de Cálculo de Stewart (2011) em seu primeiro volume começa com um teste de verificação acerca de tópicos de Álgebra, Geometria Analítica, Funções e Trigonometria. Antes de propor os itens do teste, no primeiro parágrafo, encontramos a frase "O sucesso no cálculo

depende em grande parte do conhecimento da matemática que precede o cálculo: álgebra, geometria analítica, funções e trigonometria" (p. XVII).

Um estudo feito recentemente por Feijó (2018) teve como sujeitos de pesquisa alunos do 2º ano do ensino médio de escolas públicas e estudantes de Cálculo de uma instituição universitária também pública. Nele foram apontados erros e dificuldades relacionados a assuntos da trigonometria e os consequentes obstáculos epistemológicos associados. Entre outros resultados, foi identificado que estudantes tanto do ensino médio, quanto do superior, apontam lacunas conceituais e procedimentais similares em relação aos fundamentos da trigonometria.

Lacunas nesses tópicos não serão sanadas simplesmente pela entrada dos estudantes na universidade (Lopes, 1999), nem por cursarem o Cálculo. Entretanto, os professores universitários consideram que os ingressantes já têm domínio desses assuntos ou que poderão superar suas dificuldades sozinhos.

Levando em conta que na prática, a sala de aula de Cálculo é formada por grande parte de estudantes que trazem lacunas em diferentes níveis em seus aprendizados anteriores, no tópico a seguir, será apresentada uma experiência de atividade que vem de encontro às necessidades desses sujeitos. Trata-se de um curso de extensão que foi denominado Grupo de estudos de Cálculo (GEC), em que foram abordados temas de pré-cálculo paralelamente a um curso regular de Cálculo.

Descrição do Grupo de Estudos de Cálculo

Como mencionado anteriormente, na universidade brasileira em que está sendo realizada a pesquisa, ainda há no Cálculo índices médios de reprovação em torno de 50%. Assim, com vistas a entender o porquê de indicadores tão altos e de possibilitar a sugestão e implementação de estratégias que possam contribuir para a melhora do desempenho dos estudantes, foi criado o Grupo de Estudos de Cálculo (GEC).

A equipe de trabalho do projeto de extensão GEC foi composta por uma professora coordenadora e quatro tutores, todos eles alunos de graduação em Licenciatura ou Bacharelado em Matemática, em fase de conclusão do curso.

Dentre os participantes do GEC houve calouros de diversos cursos, dos quais muitos eram repetentes da disciplina de Cálculo. No grupo haviam representantes da maioria dos cursos que têm o Cálculo como elemento curricular obrigatório. Dentre eles temos os seguintes: Administração, Ciência da Computação, Economia, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Física, Geologia, Geofísica, Matemática, Química, entre outros.

O foco das atividades do GEC não foi apenas fortalecer a base matemática dos estudantes iniciantes, mas também dar a oportunidade de estudo aos discentes que, eventualmente, não tinham estudado alguns dos tópicos abordados anteriormente. Além disso, é importante destacar que o projeto não visou somente a aprovação, mas também buscou promover entre os participantes o desenvolvimento de métodos de estudos individuais ou em grupos.

Inicialmente, foram destinadas 60 vagas aos participantes. Entretanto, no primeiro encontro, foram registradas mais de 140 assinaturas na lista de presença. O planejamento para este dia consistia em esclarecer as dúvidas dos alunos em relação ao desenvolvimento do projeto e dar início às atividades propostas, a partir da aplicação de uma lista de exercícios.

Porém, devido à alta demanda e interesse pela proposta, foi aplicado um teste de nivelamento, a fim de selecionar os alunos com maior dificuldade para integrar o projeto, e dar prosseguimento ao objetivo estipulado anteriormente. O teste era formado por 10 questões básicas de matemáticas, em que se solicitava aos participantes a resolução por escrito de problemas diretos em conteúdos de funções, resolução de equações, fatoração, trigonometria, valor absoluto, equação de retas, gráficos, entre outros. Além disso, continha perguntas de identificação pessoal do estudante, como a instituição em que estudou no ensino médio e quantidade de vezes que já havia cursado a disciplina de Cálculo.

Dentre o total de alunos participantes do primeiro encontro, apenas 110 realizaram a sondagem, e 70 foram selecionados, levando em consideração, além do menor desempenho, os aspectos de identificação citados anteriormente. O resultado foi divulgado aos participantes via e-mail. Assim, na semana seguinte iniciaram-se as atividades previstas que ocorreram durante todo o semestre em dois encontros semanais com duração de 90 minutos cada.

Ressalta-se que os alunos não selecionados, foram aqueles que obtiveram bom aproveitamento no pré-teste, e, portanto, aparentemente, não possuíam grande necessidade de realizar o curso. Mesmo assim, foram dados direcionamentos acerca de como prosseguir com os estudos de Cálculo, indicando a monitoria realizada no mesmo departamento, para sanar dúvidas pontuais.

A cada semana um tema diferente do ensino médio era abordado. Dentre eles, destacam-se: fatoração de polinômios, funções e relações trigonométricas no triângulo retângulo. As aulas eram iniciadas com uma breve explicação acerca do conteúdo. Em seguida, foram usadas listas de exercícios para resolução de situações-problema relacionadas ao tema da semana. As resoluções eram feitas em grupos de três a quatro estudantes e contavam com a mediação da equipe de trabalho.

Com a finalidade de avaliar o impacto do GEC no desempenho dos alunos, foi aplicado um pós-teste ao final do curso, comparando-o com o que foi realizado no segundo encontro. Além disso, todos os participantes que obtiveram pelo menos 70% de frequência receberam o certificado de conclusão do curso de extensão.

Portanto, foram feitas duas avaliações durante o projeto realizado no decorrer do primeiro semestre letivo de 2018. A primeira foi uma sondagem inicial, utilizada para a seleção dos participantes e a segunda foi feita ao final do curso, na qual foram repetidas algumas das questões da sondagem inicial que revelaram as maiores dificuldades dos alunos.

Por fim, a equipe sempre procurou apresentar aos estudantes as relações existentes entre os assuntos básicos que estavam sendo tratados com os do Cálculo, com o propósito de cooperar para melhor compreensão dos conteúdos.

Discussão e projetos futuros

Buscar entender e avaliar as dificuldades encontradas pelos estudantes torna-se uma tarefa complexa e desafiadora para os docentes. Não se pode afirmar que a culpa é somente da metodologia utilizada pelo professor, da instituição, dos alunos ou de qualquer outro fator. É claro que, estes são agentes influenciadores, mas a constatação que se observa pela pesquisa é o fato deste fenômeno fazer parte do cotidiano do professor de Matemática, seja qual for o nível

educacional em que ele esteja inserido. Em particular, ele é evidenciado fortemente no ensino superior, uma vez que é esperado dos estudantes ingressantes a já superação de certas dificuldades em conteúdos matemáticos do ensino básico (Silva, 2009).

Outro aspecto observado pelo grupo de pesquisa no trabalho com GEC foi o bloqueio manifestado por muitos estudantes ao realizarem certos cálculos considerados "simples" para o ensino superior, como por exemplo, no cálculo do módulo de um número, ou na obtenção da equação de uma reta.

As atividades do GEC tiveram como ponto central as aprendizagens dos educandos. Por esse motivo, não houve interação direta entre os pesquisadores e os professores de Cálculo dos estudantes participantes. Entretanto, os pesquisadores conheciam e acompanharam todo o planejamento e andamento do curso no semestre em que ocorreu a atividade prática.

Com relação ao desempenho dos estudantes no Cálculo, foi possível identificar uma evolução na compreensão de certos conteúdos, dado que durante as aulas foi criado para um espaço aberto para sanarem suas dúvidas do curso regular.

Em geral, considerando que parte do grupo era formado por repetentes, verificou-se uma melhora significativa no desempenho dos alunos participantes ao decorrer do curso. O resultado disso foi o sucesso dos estudantes na disciplina de Cálculo, corroborado pelo índice médio geral de aprovação de 58% dos participantes do GEC.

Portanto, a prática revelou uma necessidade, demonstrada inicialmente pelos próprios estudantes, em aprimorarem seu conhecimento de Matemática elementar e a importância do encorajamento às iniciativas como a proposta apresentada e experimentada pelo GEC.

Com respeito aos projetos futuros do GEC, pretende-se organizar e realizar uma análise qualitativa dos pré e pós-testes, verificando o desenvolvimento de cada participante. A análise minuciosa desse material poderá revelar elementos importantes das dificuldades dos estudantes. Para complementá-la, serão entrevistados alguns dos participantes e eventualmente, alguns dos professores de Cálculo da instituição.

Finalmente, planeja-se realizar uma pesquisa acerca do que tem sido feito na universidade em outras unidades acadêmicas com relação a atividades semelhantes à aqui descrita, a fim de que sejam feitas sugestões à comunidade acadêmica para o incentivo na implementação de projetos dessa natureza.

Referências e bibliografia

Alvarenga, K. B., Dörr, R. C., & Vieira, V. D. (2017). O ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. *Revista Brasileira de Ensino Superior, 2*(4), 46-57.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). Teaching and learning of Calculus. In *Teaching and Learning of Calculus* (pp. 1-37). Springer, Cham.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1990). Conceptual Calculus: Fact or Fiction?. *Teaching Mathematics and Its Applications, 9*(2), 63-67.

Dörr, R. C. (2017). Análises de aprendizagens em cálculo diferencial e integral: um estudo de caso de desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos em uma universidade pública brasileira

(Doctoral dissertation). Retirado de: http://repositorio.unb.br/handle/10482/25283.

Dörr, R. C., Muniz, C. A.; Neves, R. S. P. (2016). Operações Álgébricas e Funções como Obstáculos à Aprendizagem no Cálculo, *Anais do 1º Ladima*, Bonito, MS.

Feijó, R. S. A. A. (2018). Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. (Dissertação de Mestrado). Universidade de Brasília, Brasília, Brasil.

Frota, M. C. R. (2010). A Diversidade de Estilos de Aprendizagem Matemática na Sala de Aula no Ensino Superior. *X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Salvador, BA, Brasil, s.n. Recuperado de http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/MR/MR7_Frota.pdf.

Igliori, S. B. C., & de Almeida, M. V. (2013). Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *15*(3), 718-734.

Lopes, A. (1999). Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. *Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro*, (26/27), 123-146.

Nasser, L. (2006). Aprimorando o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. Atas do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Disponível em www. desenho. ufpr. br/IIISIPEM/GT4, SBEM.

Nasser, L., Sousa, G. D., & Torraca, M. A. (2012). Transição do ensino médio para o superior: como minimizar as dificuldades em cálculo. *V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD). Petrópolis, RJ*.

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go?. *ZDM*, *46*(4), 507-515.

Silva, B. (2009). Componentes do Processo de Ensino e Aprendizagem do Cálculo: saber, aluno e professor. In IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4. 2009. *Brasília, Sociedade Brasileira de Educação Matemática*.

Stewart, J. (2011). *Cálculo, vol. 1*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In *Proceedings of working group* (Vol. 3, pp. 13-28). ICME 1992. Québec, Canada.

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2009). *Cálculo, vol.1*.São Paulo: Pearson.

Törner, G., Potari, D., & Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM*, *46*(4), 549-560.

Vianna, C. C. S. (1998). Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: An exploration of definitions, theorems and visual imagery. *Unpublished doctoral dissertation). Institute of Education, University of London*.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

The Challenge of Proof in Abstract Algebra: Undergraduate Mathematics Students' Perceptions

Marios **Ioannou**
Department of Education, Alexander College
Cyprus
mioannou@alexander.ac.cy

Summary

This study aims to investigate undergraduate Mathematics students' difficulties with mathematical proof in their first encounter with Abstract Algebra. Abstract Algebra, and Group Theory in particular, is one of the most demanding mathematical fields for novice students, due to its abstract nature. This difficulty appears to have an unfavorable consequence on the proof production. For the purposes of this qualitative study, there has been used the Theory of Commognition. Analysis suggests that proof is considered a difficult task mainly due to students' incomplete grasp of the newly introduced algebraic notions, and due to problematic application of the various proving strategies. This difficulty has often a negative impact on students' engagement with pure Mathematics in general, resulting novice undergraduate students' tendency to avoid the study of other Pure Mathematics modules.

Key Words: Proof, Abstract Algebra, commognition, university Mathematics Education

Introduction

Abstract Algebra is considered by the majority of undergraduate Mathematics students as one of the most demanding modules in their curriculum, in which they face both cognitive and metacognitive challenges (Ioannou, 2012). Often, after their first encounter with Abstract Algebra, students tend to avoid further modules in this area of Mathematics. Nardi (2000) attributes student difficulty with Abstract Algebra to its multi-level abstraction and the less-than-obvious, to novice students, raison d'être of concepts such as cosets, quotient groups etc. Dubinsky et al (1994, p268) have concluded that students after their first encounter with it, they avoid any further study, since it is "the first course in which students must go beyond 'imitative behavior patterns' for mimicking the solution of a large number of variations on a small number of themes."

In addition, Abstract Algebra requires "deeper levels of insight and sophistication" (Barbeau, 1995, p139). This challenge is also due to the fact that instructors, more often than not,

do not give adequate time to students to reflect on the new material (Clark et al, 1997). Weber (2001, 2008) and Ioannou and Nardi (2010) suggest that cognitive difficulties are related to metacognitive issues concerning students' coping strategies in the learning process, for example proof production and consequently affective issues. Additionally, the students' introduction to the novel ideas of groups takes place in the unfamiliar academic context of large-scale lectures. This unfamiliarity is likely to exacerbate their difficulty with the topic (Mason, 2001). Also, as it is often suggested by research, lecturing to large student audiences has an arguable effect on student engagement.

Research on how Mathematics undergraduates cope with the complexity of university studies suggests that in proof production, an essential part of their studies in Mathematics and "the only means of assessing students' performance" (Weber, 2001, p101), students face difficulties of two categories: firstly, "they do not have an accurate conception of what constitutes a mathematical proof", and in addition they "may lack an understanding of a theorem or a concept and systematically misapply." (Weber, 2001, p102)

This study examines the difficulty students have with mathematical proof in the context of their first encounter with Abstract Algebra. Moreover, this study adopts a participationist perspective on learning, for the purposes of which there will be used the Commognitive Theoretical Framework (CTF) by Anna Sfard (2008). Presmeg (2016, p. 423) suggests, it is a theoretical framework of unrealised potential, designed to consider not only issues of teaching and learning of Mathematics per se, but to investigate "the entire fabric of human development and what it means to be human." It proves to be an astute tool for the comprehension of diverse aspects of mathematical learning, which although grounded on discrete foundational assumptions, can be integrated to give more holistic view of the students' learning experience (Sfard 2012).

Theoretical Framework

CTF is a coherent and rigorous theory for thinking about thinking, grounded on classical Discourse Analysis. It involves a number of different constructs such as metaphor, thinking, communication, and commognition, as a result of the link between interpersonal communication and cognitive processes (Sfard, 2008). In mathematical discourse, objects are discursive constructs and form part of the discourse. Mathematics is an *autopoietic system of discourse*, namely "a system that contains the objects of talk along with the talk itself and that grows incessantly 'from inside' when new objects are added one after another" (Sfard, 2008, p129). Moreover, CTF defines discursive characteristics of Mathematics as the *word use*, *visual mediators*, *narratives*, and *routines* with their associated metarules, namely the *how* and the *when* of the routine. In addition, it involves the various objects of mathematical discourse such as the *signifiers*, *realisation trees*, *realisations*, *primary objects* and *discursive objects*. It also involves the constructs of *object-level* and *metadiscursive level* (or metalevel) *rules*. Thinking "is an individualized version of (interpersonal) communicating" (Sfard, 2008, p81). Contrary to the acquisitionist approaches, participationists' ontological tenets propose to consider thinking as an act (not necessarily interpersonal) of communication, rather than a step primary to communication (Nardi et al. 2014).

Mathematical discourse involves certain objects of different categories and characteristics. *Primary object* (p-object) is defined as "any perceptually accessible entity existing independently of human discourses, and this includes the things we can see and touch (material objects,

pictures) as well as those that can only be heard (sounds)" (Sfard, 2008, p169). *Simple discursive objects* (simple d-objects) "arise in the process of proper naming (baptizing): assigning a noun or other noun-like symbolic artefact to a specific primary object. In this process, a pair <noun or pronoun, specific primary object> is created. The first element of the pair, the signifier, can now be used in communication about the other object in the pair, which counts as the signifier's only realization. *Compound discursive objects* (d-objects) arise by "according a noun or pronoun to extant objects, either discursive or primary." In the context of this study, groups are an example of compound d-objects.

Sfard (2008) describes two distinct categories of learning, namely the *object-level* and the *metalevel learning*. "Object-level learning […] expresses itself in the expansion of the existing discourse attained through extending a vocabulary, constructing new routines, and producing new endorsed narratives; this learning, therefore results in endogenous expansion of the discourse" (Sfard, 2008, p253). In addition, "metalevel learning, which involves changes in metarules of the discourse […] is usually related to exogenous change in discourse. This change means that some familiar tasks, such as, say, defining a word or identifying geometric figures, will now be done in a different, unfamiliar way and that certain familiar words will change their uses" (Sfard, 2008, p254).

Literature Review

A distinctive characteristic of advanced Mathematics in the university is the production of rigorous and consistent proofs. The often arduous, for the majority of students (Moore, 1994; Segal, 2000), task of successfully producing and communicating their proofs is a significant obstacle in the smooth transition from secondary to university Mathematics. Proof production is far from a straightforward task to analyse and identify the difficulties students face. From a pedagogical perspective, a possible contributing factor to the students' difficulty with proof is the teaching they receive both in high schools and in universities, since "most students have not been enculturated into the practice of proving, or even justifying the mathematical processes they use" (Dreyfus, 1999, p94). In addition, from a communicational perspective, there is a chasm between the professional mathematicians and students regarding their views about issues like conviction or validity of proof (Segal, 2000; Harel and Sowder, 1998), the adequacy of an explanation or justification (Sierpinska, 1994), or the ability to distinguish between different forms of reasoning (Dreyfus, 1999). Teachers often do not aim to give their students the means to learn how to construct proofs and judge their validity. This is a task left to students (Dreyfus, 1999).

Difficulties with proof production have been extensively investigated for various levels of student expertise (from novice undergraduates to experienced doctoral students). Moore (1994) classifies novice students' difficulties with proving in three wide categories referring to: the mathematical language and notation as such; the concept understanding; and, getting started with the proof. This categorisation is in conformity with the CTF where one is able to examine the students' use of words, visual mediators, understanding of the definitions of the related notions and the related theorems and lemmas, as well as the routines with their applicability and closure conditions. Weber (2001) categorises student difficulties with proofs into two classes: the first is related to the students' difficulty to have an accurate and clear conception of what comprises a mathematical proof, and the second is related to students' difficulty to understand a mathematical proposition or a concept and therefore systematically misuse it. In his study, an examination of the performance of undergraduate (novice) and doctoral (expert) students in proof-production,

Weber (2001) indicated three types of strategic knowledge that the latter applied and the former lacked, in particular, referring to the knowledge of domain's proof techniques, the knowledge of which theorems are important and when they will be useful and the knowledge of when and when not to use 'syntactic' strategies.

Particularly difficult becomes the process of proof in the context of Group Theory, which is often considered one of the most difficult subjects for novice undergraduate Mathematics students (Ioannou, 2012, 2018). Several research studies within the last three decades have focused on the learning of Group Theory and on various aspects of students' learning experience, adopting various theoretical perspectives. For instance studies such as Dubinsky et al. (1994), Brown et al (1997) and Asiala et al (1996, 1997), which follow a constructivist approach, and within the Piagetian tradition of studying the cognitive processes, have examined students' cognitive development and analysed the emerging difficulties in the process of learning certain group-theoretic notions. Novice students are required to successfully cope with its abstract and rigorous nature and invent new learning approaches.

The abstract nature of Group Theory is, more often than not, an impediment for novice students. In order to successfully cope with learning Group Theory, students often tend to adopt techniques that would reduce the level of abstraction, which according to Hazzan (1999, p73) is an "effective mental strategy, which enables students to mentally cope with the new, abstract kind of mathematical objects". A significant number of students seem to have the tendency to work on a lower level of abstraction than the one in which concepts are introduced. By reducing the level of abstraction, students are enabled to "base their understanding on their current knowledge, and proceed towards mental construction of mathematical concepts conceived on higher level of abstraction" (Hazzan, 1999, p84). This is particularly obvious, when their first course in Group Theory progresses beyond the definition of the basic notions of group and subgroup (Ioannou, 2012).

Methodology

This study is a ramification of a larger study that focused on Year 2 Mathematics students' conceptual difficulties and the emerging learning and communicational aspects in their first encounter with Group Theory. The module was taught in a research-intensive Mathematics department in the United Kingdom.

The Abstract Algebra (Group Theory and Ring Theory) module was mandatory for Year 2 Mathematics undergraduate students, and a total of 78 students attended it. The module was spread over 10 weeks, with 20 one-hour lectures and three cycles of seminars in weeks 3, 6 and 10 of the semester. The role of the seminars was mainly to support the students with their coursework. There were 4 seminar groups, and the sessions were each facilitated by a seminar leader, a full-time faculty member of the school, and a seminar assistant, who was a PhD student in the Mathematics department. All members of the teaching team were pure mathematicians.

The lectures consisted largely of exposition by the lecturer, a very experienced pure mathematician, and there was not much interaction between the lecturer and the students. During the lecture, the lecturer wrote self-contained notes on the blackboard, while commenting orally at the same time. Usually, he wrote on the blackboard without looking at his handwritten notes.

In the seminars, the students were supposed to work on problem sheets, which were usually distributed to the students a week before the seminars. The students had the opportunity

to ask the seminar leaders and assistants about anything they had a problem with and to receive help. The module assessment was predominantly exam-based (80%). In addition, the students had to hand in a threefold piece of coursework (20%) by the end of Week 12.

The data gathered includes the following: Lecture observation field notes, lecture notes (notes of the lecturer as given on the blackboard), audio-recordings of the 20 lectures, audio-recordings of the 21 seminars, 39 student interviews (13 volunteers who gave 3 interviews each), 15 members of staff's interviews (5 members of staff, namely the lecturer, two seminar leaders and two seminar assistants, who gave 3 interviews each), student coursework, markers' comments on student coursework, and student examination scripts. For the purposes of this study, there have been used data from the interviews.

Moreover, there have been used qualitative methods of data analysis, since this approach is a dynamic, intuitive and creative process of inductive thinking, reasoning and theorising. Data analysis allowed the researcher to comprehend the context of data and refine the interpretations. The core objective of this process was to determine the codes, categories, relationships and assumptions related to the topic under study (Cohen et al. 2007). Below it follows a detailed factual description of how the data was analysed.

Lecture observation notes and Lecture notes: Lecture observation notes were handwritten during the data collection process alongside the lecture note taking. Both of these data categories were summarised in 'Lecture Summaries'. In these summaries, the researcher organised the content and systematized the presentation of lecture observation notes and included a brief index of content for each lecture. At the end of each lecture summary, there followed a commentary on issues of content, presentation, general ambiance and other incidents of interest, and were connected with the prospective focus of this study, such as communication or any form of interaction between the lecturer and the students

Interviews: Both student and staff interviews were fully transcribed. Also they were illustrated with comments regarding the mood, voice tone, emotions and attitudes, or incidents of laughter, long pauses etc. The final interview documents were called Annotated Interview Transcriptions, since they were an annotated version of the interview transcription. In these annotated versions of interview transcriptions, the researcher highlighted certain phrases or even parts of the dialogues that were related to a particular theme.

Coursework and Examination Scripts: In the data analysis process, both the coursework solutions and the exam scripts were analysed last. Coursework student solutions were analysed in detail, mostly focusing on issues such as the use of certain concepts, the use of mathematical vocabulary and symbolisation, the use of language and the style of language used, the proof production process and the use of visual imagery and external objects. Concerning the examination scripts, the same approach was followed. In parallel, the comments of the markers were also analysed. Moreover, students' solutions were scrutinised, identifying related incidences and therefore, scanning the bits that were of interest. In doing so, the researcher produced data analysis documents, by scanning all the excerpts relevant to the purposes of this study, and analysing them using CTF.

Finally, all emerging ethical issues during the data collection and analysis, namely, issues of power, equal opportunities for participation, right to withdraw, procedures of complain, confidentiality, anonymity, participant consent, and sensitive issues in interviews, have been addressed accordingly.

Data Analysis

An often-reported difficulty that seven out of the thirteen (7/13) students faced was how to start a proof, i.e. the initial step. For many students, getting help on how to start a proof is a main incentive for attending the seminars, as the following excerpt suggests.

> […] *Most of the time I can't do them, and I need a little... sort of, starting point, so I – I – but I'm – I have a good kind of understanding about what the question's asking me to do, um, before I go, so I can ask the right questions... cos it's a lot more abstract, like you don't have anything to compare it to… I mean there's a lot of imaginary stuff in it…It's like nothing you've ever experienced before* […] *I mean I've done groups before, so I know kind of – the basics of it umm, just to get a greater understanding really.* Dorabella

The above suggests that normativeness of metarules is not automatically established among all members of the mathematical community. Normativeness of metarules in a certain discursive context is objective, since it requires experience. Well-established metarules that would allow experienced mathematicians to successfully solve a mathematical task would not automatically be obvious to the majority of novice students.

Moreover, difficulty with starting a proof is possibly an indication of incomplete metalevel learning regarding the how of a routine as well as its applicability conditions. Application of metalevel rules governs the formulation and substantiation of the object-level rules. Incomplete object level learning may hinder the successful application of the involved metarules and the construction of the required proof, although this is not always the case.

As the above excerpt suggests, Dorabella, similarly to other students, seems to have neither fully developed a thorough metalevel learning of the related metarules nor does she have a clear perspective of what she wants to prove and how she is going to prove it. This is not an unexpected or rare event among novice students in university Mathematics in general (Moore, 1994), and in Group Theory in particular, since students need to achieve a transition towards a higher level of abstraction, even between different university Mathematics modules.

Moreover, the starting point of a proof is a particularly difficult step, especially when students have seen nothing similar to the proof under discussion. The following excerpt of Leonora highlights the importance of previous experience for the development of metalevel learning.

> *I don't know, I mean I think once I've done it, and been told – like – having – so I've got like an example basically, of how to do it, then – it will be in my mind, so it'll be hopefully, something I can keep repeating, but just initially starting it off and – it's – I find quite hard, I found that quite hard with like a lot of things, it's just initially start…* Leonora

The above excerpt possibly highlights the need of some students to be guided in the first steps of the learning of a new mathematical discourse of guidance and examples. For these students, examples possibly have a twofold role, first to improve their object-level learning regarding the involved d-objects, and second to enrich their experience of how metarules should be applied.

The primary importance of the starting point in proof is also in agreement with Norma's perception about proofs, considering it, as the major obstacle to be overcome. After overcoming this threshold, it is much easier both to gain perspective and to move on.

> *I do try and do something, but it – it may not be like a specific question, cos sometimes, err, I just need help in getting started, and then once I've started I'm ok, it's just – finding like the thing to do first…* Norma

This is again an example of problematic encounter with the applicability conditions in the process of proving, as possibly a result of lack of experience for the majority of novice students. Deciding about the how and the when of a particular routine, namely what course of action to follow and how to initiate and finish a proof, is an essential part of metalevel learning of a particular mathematical discourse.

Discussions with students have revealed their perception about their general approach to required object-level and metalevel learning. It was apparent in the case of five of the thirteen (5/13) students that instead of trying to grasp the related d-objects and the amenable metarules in proof production process, these students, at least at the initial stage of their learning, would excessively depend on similar examples, Internet and book use or other exogenous factors, and mechanically imitate them. This approach to proving, and learning in general is clearly expressed in the following excerpt.

> *I googled for one of the proofs, to see if it was on there, but it wasn't, but there was something similar, that then I worked out like – that you're just meant to go through and then times it by the inverses and stuff, but um – I think, some of our algebra nowadays is so... specific, that like there aren't proofs and stuff out there that's – that's easy to find now.* Amelia

Overdependence on exogenous sources for understanding instead of focusing on the endogenous change of discourse is obvious in the above excerpt. Apparently, some students need to see similar routines to the ones they have to produce in the context of an exercise. Studying similar routines possibly helps them to grasp the metarules that need to be applied in certain situations and to be able, at the first stages of their learning, to imitate. In addition, Amelia seems to realise the level of specificity and rigour that proofs in Abstract Algebra require through her effort to find similar proofs. Nevertheless she uses the 'similar' proof to her benefit in order to learn the metarules related to notions such as inverses (see Ioannou, 2012).

Regarding the issue of self-evaluation of students' produced proofs, many students, based on their experience so far, show an awareness of the quality of their proof as well as whether their proofs are correct or not, even when they closely follow a routine similar to the one they are supposed to produce. In the excerpt below, Francesca discusses the importance of a logical order of steps of a proof, without missing any.

> *You should follow the correct order though… because I remember once I was jumping steps in a proof and I was considering some steps as granted… I shouldn't though… I had to prove every step and then go to the next step… That's why I lose so many points… because I arrive at the correct result but I was missing some things…* Francesca

She seems to be aware of the normative nature of metarules and that she is expected to meet the required characteristics of explicitness and rigour. She realises that proof production is in a way a very particular activity within a certain discourse, which has well-established metarules. Even though she is willing to apply a routine that will lead her to an endorsable and valid mathematical narrative, she does not yet possess the required capability to apply the involved metarules that will allow her to achieve this, in this specific mathematical discourse.

This claim is in accordance with the analysis in Ioannou (2012), where in many occasions, students' reported intention of action is in disagreement with the action taken, even if they are aware of the inappropriateness of their actions.

Students' own evaluation of their proofs is an interesting issue from the secondary-tertiary level Mathematics transition. According to Gueudet (2008), novice students do not have the experience that will allow them to decide whether a proof is valid or not. Nevertheless the above excerpt and the ones that follow shows that students, although they may not have the capability to precisely evaluate their proofs, can say however, whether it is problematic or inadequate, based on their previous experience.

A representative example of contradiction between the reported intention of proof strategy and the applied action can be seen in the following excerpt. Manrico, although he eventually does so in practice, is nevertheless aware that a proof, which is over-dependent on visual mediators, is neither rigorous enough nor acceptable in the context of Group Theory, and consequently not in accordance with the metalevel norms.

> *Hmm. see, there – this thing – I mean – the – statement, makes sense... I drew a little picture and like – I was just like – I mean – course that's going to be in it, but – how you prove that by actual kind of – prove that mathematically rather than just drawing a picture and just saying, it is true, it's just the actual showing that...* Manrico

Even though the use of visual mediators is an important aspect of mathematical discourse and often an indication of good object-level learning, extensive use is not an adequate approach for proving a mathematical narrative, especially in the context of Group Theory, at least as it is taught in the specific Mathematics department. Excessive use of illustrations and lack of algebraic reasoning in the proofs often indicates incomplete metalevel learning.

Proof production also depends on the thorough learning of d-objects and their realization trees, as well as the good interaction between the object-level and metalevel rules. The excerpt below reveals the negative consequences on the interaction between the different realisation trees as these have been developed possibly in different modules.

> *I cannot understand many things that… for example… one of the things I cannot accept is… I am given an exercise in which I have to prove something and in the notes we are not given something that will help us or guide us to solve the exercise… or the fact that something that we see now it is related to something that we have seen several months ago…* Musetta

The above suggests that Musetta's learning lacks connectivity between the different modules in her degree. Although she is aware of this lack, her approach towards overcoming this issue is rather passive, and as her written data suggests (see Ioannou, 2012), she has not effectively achieved it. Moreover, if the d-objects and the corresponding realization trees involved in a particular discourse or other related ones have not been encapsulated, then discursive expansion has yet to be achieved. If the student is not able to construct usable and accessible realization trees, then proof production is very difficult, if not impossible to be achieved. As Ioannou (2012) suggests, mathematical learning in Group Theory requires realization trees that involve compound d-objects emerging by reification, namely regarding the shift of the focus from processes on the group-theoretic objects towards discussions of the group-theoretic objects as such and their relations.

Conclusion

This study has focused on novice undergraduate Mathematics students' difficulties with proof production in the context of Abstract Algebra. For the majority of these students, proof is an arduous task. In an abstract mathematical discourse such as Abstract Algebra, students are invited to produce proofs for several mathematical problems, both in the coursework and in the examination. As the literature (Moore, 1994; Harel and Sowder, 1998; Weber, 2001) and the discussion above suggests, proof production, especially in Group Theory, represents a particular challenge, because students have to develop several indispensable skills, such as their ability to cope with the abstract nature of this module and a certain flexibility in the application of metarules. It cannot be assumed that the majority of the students can develop these skills instantly or easily.

In addition, proof production is a new element in the students' learning experience, requiring successful application of both object-level and metalevel rules, and therefore a challenge in the secondary-tertiary transition that needs to be confronted. As the discussion above suggests, many novice students often have difficulty with the 'how' and 'when' of the required routines. Successful proof production depends on the thorough object-level learning of involved d-objects and their realization trees, as well as the successful and precise application of the governing metalevel rules, in the particular context. Evidently, students face various difficulties with the three steps of the procedure for developing a certain routine, namely, the applicability conditions, the course of action and the closure conditions. In particular, some students often face difficulties initiating a proof. It is a difficulty that frequently occurred in the context of this study and was also identified by Moore (1994). In addition, some students often have difficulty in recognising the signs that would signal the end of the proof, leaving them with a feeling of doubt. A future study will investigate students' perceptions about mathematical proof, as a way of mathematical communication.

References and Bibliography

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Mathews, D, & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2(4), 1-32.

Asiala, M., Dubinsky,E., Matthews, D.M., Morics, S., & Oktac, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal for Mathematical Behavior*, 16, 241-309.

Barbeau, E. (1995). Algebra at tertiary level. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 139-142.

Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 187-239.

Clarke, J. M., DeVries, D. J., Hemenway, C., St. John, D., Tolias, G, & Roozbeh, V. (1997). An investigation of students' understanding of abstract algebra (binary operation, groups and subgroups) and the use of abstract structures to build other structures (through cosets, normality and quotient groups). *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 181-185.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. London, New York, Routledge.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 85-109.

Dubinsky, E., Dautermann J., Leron U., & Zazkis R. (1994). On learning the fundamental concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 267-305.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 237-254.

Harel, G. and L. Sowder (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*. A. H. Schoenfeld, J. Kaput and E. Dubinsky (Eds), 7, 234-283.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 71-90.

Ioannou, M. (2012). *Conceptual and learning issues in mathematics undergraduates' first encounter with group theory: A commognitive analysis* (Unpublished doctoral dissertation). University of East Anglia, UK.

Ioannou, M. (2018a). Commognitive analysis of undergraduate mathematics students' first encounter with the subgroup test. *Mathematics Education Research Journal*, 30(2), 117-142.

Ioannou, M. & Nardi, E. (2010). Mathematics undergraduates' experience of visualisation in abstract algebra: The metacognitive need for an explicit demonstration of its significance. *In the Proceedings of 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.* North Carolina, USA.

Mason, J. (2001). Mathematical teaching practices at tertiary level. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. D. Holton (Ed). Kluwer Academic Publishers, 71-86.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

Nardi, E. (2000). Mathematics undergraduates' responses to semantic abbreviations, 'geometric' images and multi-level abstractions in Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 169-189.

Nardi, E., Biza, I., Gonzalez-Martin, A.S., Gueudet, G. & Winslow, C. (2014). Institutional, sociocultural and discursive approaches to research in university mathematics education. *Research in Mathematics Education*, 16 (2), 91-94.

Presmeg, N. (2016). Commognition as a lens for research. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 423-430.

Segal, J. (2000). Learning about mathematical proof: Conviction and validity. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 191-210.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: developing mathematical discourse - some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 1-9.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London, UK, Falmer Press.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.

Weber, K. (2008). The role of affect in learning Real Analysis: a case study. *Research in Mathematics Education*, 10, 71-85.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Uma introdução ao estudo das superfícies parametrizadas regulares utilizando o GeoGebra

André Lúcio Grande
Faculdade de Tecnologia de Mauá – Fatec-Mauá
Brasil
andreluciogrande@gmail.com

Resumo

Este minicurso objetiva realizar um estudo das superfícies parametrizadas regulares utilizando como recurso auxiliar o software GeoGebra, com o intuito de explorar e caracterizar suas propriedades geométricas, algébricas e topológicas. Pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral evidenciam as potencialidades e as possíveis contribuições do uso de softwares de geometria dinâmica no sentido de auxiliar na visualização e na compreensão dos conceitos tanto geométricos quanto algébricos dos objetos matemáticos. Como referencial teórico foram utilizadas as ideias ligadas ao papel da visualização relacionadas ao ensino do Cálculo defendidas por David Tall. Este trabalho apresenta uma abordagem qualitativa, tendo como procedimentos metodológicos a utilização do GeoGebra na construção de maneira dinâmica das superfícies tais como: regulares, regradas, de revolução e mínimas. Como resultados, ressaltamos que o estudo das superfícies com o auxílio do GeoGebra apresenta contribuições significativas na construção do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Superfícies, Cálculo Diferencial e Integral, GeoGebra, Visualização, Geometria Dinâmica.

Introdução

Em nossa prática docente nos diversos níveis de ensino da Matemática nos deparamos com situações que envolvem o conceito de superfície, quer seja nas aulas de Geometria Euclidiana, Diferencial, Analítica, Topologia ou Cálculo, dada a sua diversidade de abordagens e aplicações.

Em muitas dessas situações em grande medida ao procurarmos caracterizar ou definir as superfícies utilizamos como exemplo as superfícies planas ou empregamos o próprio termo para sua conceptualização. Utilizando-se intuitivamente de analogias físicas, podemos obter uma

superfície por exemplo pela deformação ou rompimento de uma folha de papel ou a colagem de alguns pedaços de papel.

Quanto às aplicações, destacamos sua utilização em diversas áreas, como a arquitetura, por exemplo, na construção de estruturas que se utilizam de suas propriedades geométricas.

Uma superfície pode ser definida como um conjunto de pontos do espaço euclidiano, sendo bidimensional e que qualquer ponto da mesma pode ser descrito localmente por duas coordenadas.

Dentre as várias classificações das superfícies, segundo Do Carmo (2012) são de interesse ao estudo aquelas não apresentam pontos singulares ou auto intersecções. Tais superfícies são denominadas superfícies regulares e admitem uma parametrização, sendo que as coordenadas de cada ponto dessa superfície podem ser descritas por funções de duas variáveis.

De uma maneira mais formal, utilizando-se dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, definimos uma superfície regular S da seguinte maneira:

> Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superficie regular se, para cada ponto $p \in S$, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$e uma transformação $x: U \to V \cap S$ de um conjunto aberto de $U \subset \mathbb{R}^2$ em $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:
>
> 1) x é diferenciável. Isso significa escrever que se nós escrevermos $x(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in U$.
>
> 2) x é um homeomorfismo. Se x contínua pela condição 1, isto significa que x tem uma inversa $x^{-1}: V \cap S \to U$ que é contínua, isto é, x é uma restrição da aplicação contínua $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida em um aberto W contendo $V \cap S$.
>
> 3) (Condição de regularidade). Para cada $q \in U$, a diferencial $dx_q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é um a um. (Do Carmo, 2012, p. 52).

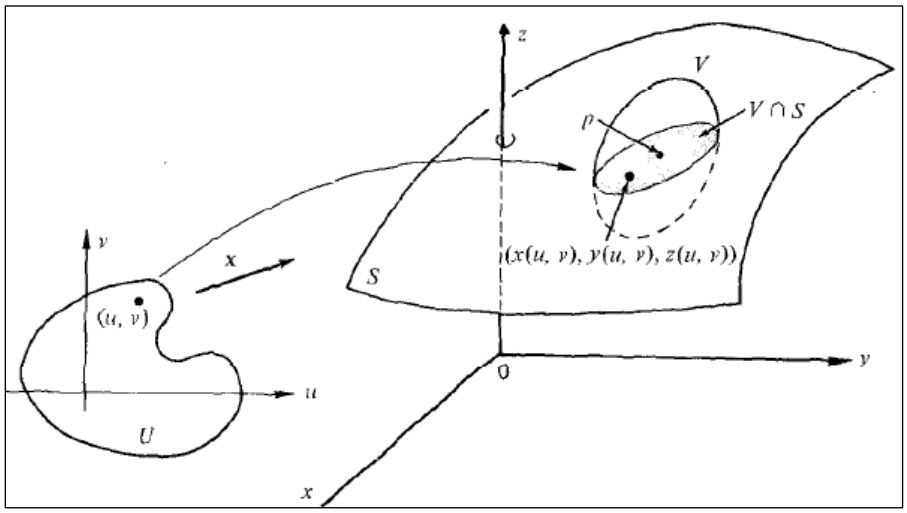


Figura 1. Superfícies Regulares

Em outras palavras, as superfícies regulares são aquelas que em cada ponto da mesma está definido um plano tangente e que consequentemente é possível se utilizar dos conceitos do

Cálculo Diferencial e Integral para se efetuar medições nessa superfície, como por exemplo distâncias, ângulos e áreas.

Uma superfície também pode ser definida do ponto de vista topológico, de uma maneira mais abstrata, como uma variedade. Uma variedade é um espaço que pode ser descrito localmente através de coordenadas, sendo o número de coordenadas ou o número de direções independentes necessárias para representar todos os pontos próximos de um ponto dado num objeto chamado de dimensão da variedade. Esse número de direções pode ser compreendido intuitivamente como o número observado por alguém que "viva" sobre a variedade, e não o número de dimensões necessárias para conter o objeto. No caso das superfícies, sua dimensão é igual a dois.

Para que as superfícies possam ser representadas, visualizadas e exploradas suas propriedades geométricas, algébricas e topológicas, faz-se necessário o uso de um recurso computacional auxiliar, que no caso desse minicurso, será utilizado o software GeoGebra, conforme será descrito a seguir.

A importância da visualização no ensino do Cálculo

O papel da visualização no ensino e na aprendizagem em Matemática é um tema que vem sendo discutido por um número cada vez maior de educadores e pesquisadores. A visualização, em linhas gerais, no ensino e aprendizagem do Cálculo permite interpretar informações por meio da construção de representações visuais, de *softwares*, entre outros recursos didáticos.

David Tall (2002) considera a visualização não só relevante à Matemática como à Educação Matemática. Por visualização o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que se pensou. Sobre a visualização o autor afirma que:

> Ao introduzir as visualizações adequadamente complexas de ideias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de aprender os conceitos, fornecendo intuições muito mais poderosas do que através de uma linguagem tradicional (TALL, 2002, p.20 – tradução nossa).

O autor afirma ainda que o uso do computador constitui uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados às explorações sensoriais por meio de percepções, visualizações e intuições. Para o autor, o computador se torna um "organizador genérico" de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente (ou micromundo) em que os alunos podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos. Por meio de um software, portanto, os alunos entram em contato com o objeto matemático.

Sendo assim, selecionou-se o software GeoGebra para a exploração das propriedades algébricas e geométricas das superfícies, visando trabalhar com os alunos conceitos intuitivos de maneira dinâmica das mesmas, o que pode contribuir para o aluno formular conjecturas e testar hipóteses sobre alguns resultados.

Por Geometria Dinâmica pode-se entender como a geometria assistida por computador, em que os objetos matemáticos, como retas, ângulos e triângulos, podem ser movidos e manipulados, ao contrário da geometria em que os objetos são construídos com instrumentos euclidianos, como régua não graduada e compasso.

O GeoGebra é um *software* gratuito de Geometria Dinâmica, escrito na linguagem JAVA e disponível em português, que apresenta uma interface entre Geometria e Álgebra. Ele possui a vantagem de dispor, ao mesmo tempo, de duas representações diferentes de um mesmo objeto matemático: a geométrica e a algébrica, por exemplo, e essas representações podem ser simultaneamente manipuladas.

O estudo das superfícies parametrizadas regulares no GeoGebra

As superfícies parametrizadas regulares podem ser classificadas de várias maneiras, tais como por exemplo superfícies de revolução, mínimas ou regradas.

As denominadas superfícies de revolução são obtidas a partir uma curva plana e conexa regular em torno de um eixo no plano que não encontra a curva. Temos, por exemplo, o plano *xz* como o plano da curva e o eixo *Oz* como o eixo de rotação.

Para obtermos, por exemplo, a superfície de revolução denominada paraboloide utilizando o GeoGebra devemos iniciar representar algebricamente uma curva, no caso a parábola, no plano xz utilizando o parâmetro $u \in [0, 5]$ com as seguinte equações paramétricas: $a(u) = (u, 0, u^2)$.

No GeoGebra, esta curva será representada geometricamente utilizando-se o seguinte comando:

Curva(<Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)

No nosso caso, teremos a seguinte expressão:

c = Curva(u, 0, u^(2), u, 0, 5)

O paraboloide de revolução será gerado pela rotação da curva a em torno do eixo *Oz* utilizando no GeoGebra o seguinte comando:

Superfície(<Curva>, <Ângulo>, <Reta>)

Para o paraboloide, considerando-se o ângulo de rotação α tal que $0 < \alpha < 2\pi$, temos que:

S = Superfície(c, α, EixoZ)

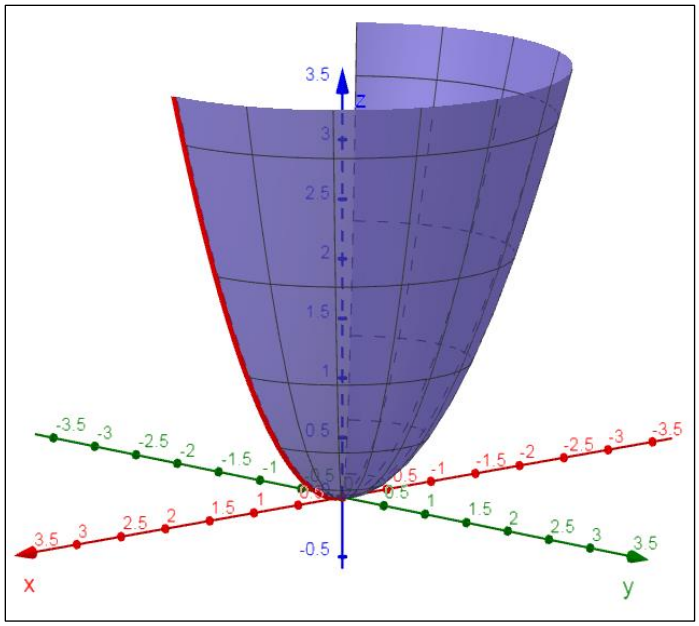


Figura 2. Superfície de Rotação no GeoGebra: Paraboloide de Revolução

Por meio dessa representação é possível estudar as possíveis interseções dessa superfície com planos paralelos, por exemplo, ao plano *xy.* Além disso, podem ser efetuadas medições, como comprimento de arcos, áreas e volume do sólido gerado pela superfície.

Outro objeto de estudo de igual interesse são as chamadas superfícies parametrizadas mínimas, que são aquela cuja curvatura média é identicamente nula. Temos como exemplos o plano, a catenoide, a helicoide, as superfícies de Enneper e superfícies Costa

A helicoide, por exemplo, é formada por semirretas que passam por um ponto P dessa superfície e são perpendiculares ao eixo z, conforme a figura a seguir.

Pode–se considerar que essa superfície pode ser gerada traçando-se uma reta paralela ao plano *xy* e que intersecta o eixo *Oz.* A helicoide possui as seguintes equações paramétricas:

$$x(u,v) = (vcos\ u, vsen\ u, au), \qquad 0 < u < 2\pi \quad -\infty < v < \infty$$

Intuitivamente, podemos considerar que x aplica uma faixa aberta de largura 2π do plano uv sobre a parte do helicoide que corresponde a uma rotação de 2π ao longo da hélice.

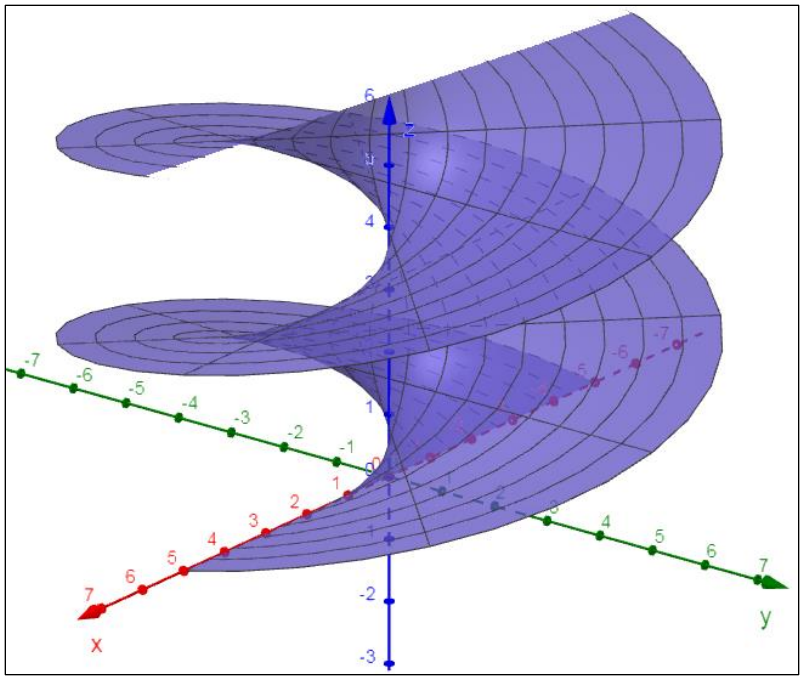


Figura 3. Superfície de Rotação no GeoGebra: Helicoide

Denominam-se superfícies regradas àquelas que se constituem um caso particular de superfícies desenvolvíveis. Podemos considerar que a palavra regrada possui o significado de "sujeita a regras". Uma superfície regrada é aquela é ser formada por retas, o que lhe confere uma "regra" própria para ser gerada. Elas podem ser completamente determinadas pelo movimento de uma reta no espaço.

Como exemplo de superfícies regradas, temos: cilindro, cone, paraboloide hiperbolico, hiperboloide de uma folha, helicoide ou conoide.

Segundo Struik (1988), o primeiro estudo das superfícies regradas foi efetuado por Gaspar Monge (na obra aplicações da Análise à Geometria), que estabeleceu as equações diferenciais parciais que satisfazem todas as superfícies regradas (de terceira ordem).

Matematicamente, podemos considerar uma superfície regrada como sendo um subconjunto S do espaço euclidiano que para cada $k \in \mathbb{R}$ existe uma reta

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{R}} r_k$$

Em outras palavras, as superfícies regradas são aquelas que em cada ponto dessa superfície passa, ao menos, uma reta contida na superfície. Ao menos localmente as superfícies regradas são o espaço constituído pelo movimento rígido de pelo menos uma reta (reta geratriz), sendo que o traço desse movimento será a superfície.

Com isso, para representarmos geometricamente uma superfície podemos utilizar o GeoGebra no intuito de auxiliar a visualização e a compreensão do fato por exemplo das superfícies regradas, tal como o hiperboloide de uma folha, serem formadas por uma união de retas, bem como obter as secções das superfícies por meio de planos paralelos aos planos xy, yz

e xz, para visualizar que as intersecções dessa superfície com esses planos podem geram curvas como a elipse e a hipérbole.

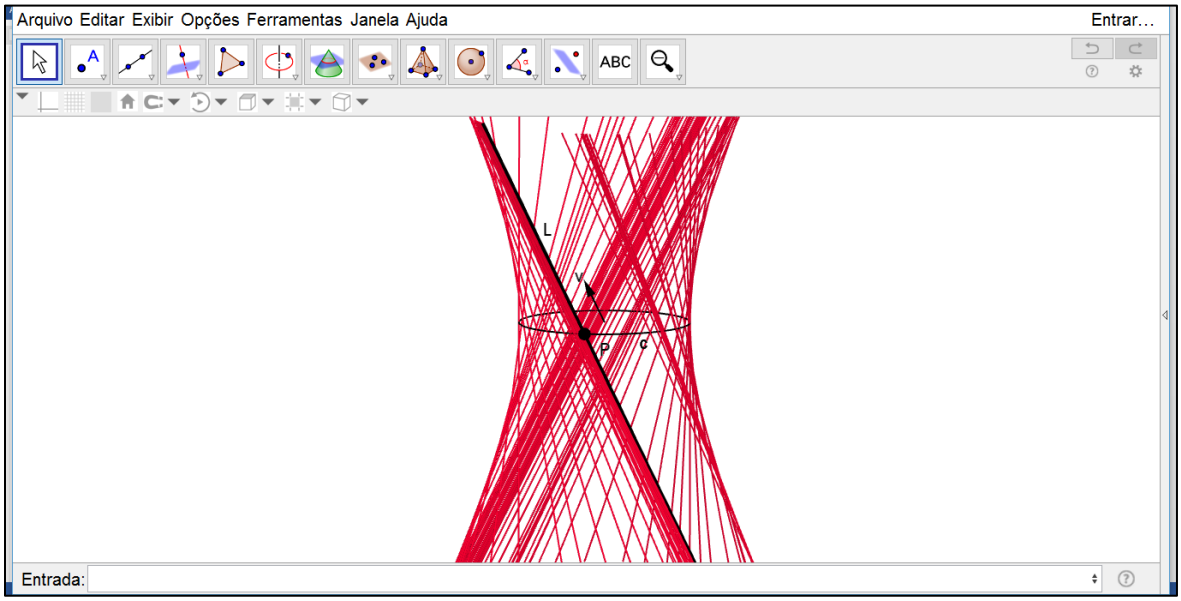


Figura 4. Superfície regrada no GeoGebra

Além disso, o software GeoGebra permite de maneira dinâmica a interação com o objeto de estudo, pois ao variarmos os parâmetros a, b e c da equação do hiperboloide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ podemos visualizar as alterações geométricas que ocorrem na superfície em questão.

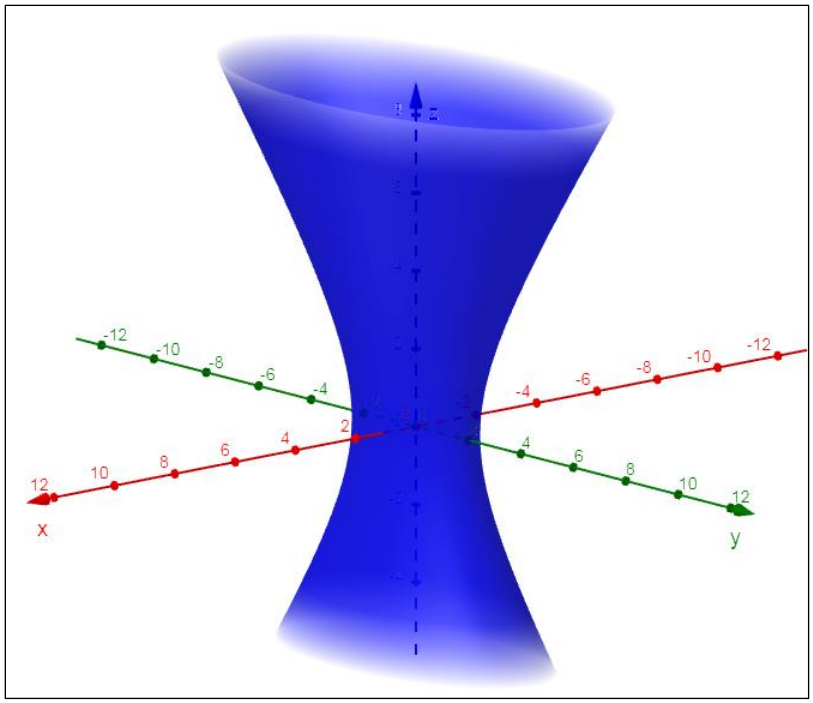


Figura 5. Superfícies regradas no GeoGebra: Hiperboloide de uma folha

Considerações Finais

Sobre o estudo das propriedades geométricas, algébricas e topológicas das superfícies utilizando o software GeoGebra, podemos considerar que o uso de tal recurso computacional auxiliar se constitui um elemento essencial responsável por "concretizar" o objeto de estudo em questão, no caso as superfícies parametrizadas regulares, além de permitir elaborar intuitivamente algumas conjecturas e hipóteses sobre as propriedades geométricas de tais superfícies. Já a utilização do GeoGebra auxiliou simular a obtenção das superfícies regradas como o hiperboloide de uma folha, por exemplo, mostrando sua característica de ser formada por retas, assim como contribuiu na formalização das hipóteses e conjecturas intuídas anteriormente.

Devemos ressaltar que o uso de um recurso computacional auxiliar – no caso do GeoGebra - pode não trazer o rigor matemático exigido em provas e demonstrações, mas possibilita em grande medida desenvolver intuições, gerar conjecturas e testar hipóteses, elementos essenciais para a construção do conhecimento matemático.

Destacamos que o ensino e a aprendizagem da Matemática sedimentados em princípios e ideias ligadas ao uso da intuição e do pensamento visual permitem aos estudantes, em grande medida, uma maior participação na construção do conhecimento científico. No caso do estudo das superfícies regulares, o GeoGebra apresenta contribuições significativas na construção do conhecimento matemático.

Referências e bibliografia

Camargo, I. Boulos, P. (2005). *Geometria Analítica – um tratamento vetorial.*3º ed. rev. e ampl. – São Paulo: Prentice Hall.

Creswell, J. W. (2010). Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Magda França Lopes. 3ª. ed. Porto Alegre: Artmed.

Do Carmo, M. P. (2010) Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM.

Grande, A. L. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo

Grande, A. L. (2016). "Geometria Gaudiana": Um estudo das superfícies regradas nas obras de Antoni Gaudi utilizando o GeoGebra. In : Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Madrid – Espanha.

Struik, D. J. (1988). Lectures on Classical Differential Geometry. 2nd ed. New York: Dover Publications.

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In: *Visualizations on Mathematics* (ed. Zimmermann e Cunninghan), M.A.A. Notes No. 19, 105-119.

Tall, D. (2002). *Using Technology to Suport and Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics.* In: Primeiro Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro – Brasil.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Reflexiones sobre el Aprendizaje Activo en la Educación Superior: el caso de cambio de rutinas en las clases de Matemáticas

Jesennia Chavarría Vásquez
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
jessenia.chavarria.vasquez@una.ac.cr
María Elena Gavarrette Villaverde
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
maria.gavarrette.villaverde@una.ac.cr

Resumen

El propósito de esta comunicación es compartir las reflexiones sobre la práctica docente, que surgieron a partir de implementar actividades innovadoras de aprendizaje activo. El trabajo es un estudio de caso único, realizado en un grupo de la Cátedra del curso de Matemática General que se impartió en el 2018 en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Se realizó un proceso colaborativo de investigación sobre la propia práctica docente, a partir de la implementación de cambios en las rutinas de clase, tales como: incorporación de Apps como Socrative y Kahoot; motivación para que los estudiantes realizaran trabajo de campo; y, la implementación de Laboratorios de Enseñanza. Una de las autoras impartió el curso y la otra autora fue mediadora para documentar, tanto las evidencias de implementación de actividades de aprendizaje activo, como las reflexiones sobre la práctica docente, emanadas a partir de las innovaciones implementadas.

Palabras clave: educación matemática, aprendizaje activo, reflexión sobre la práctica docente.

Contexto de la Investigación

El foco de atención de este trabajo es la reflexión sobre la práctica, suscitada a partir de cambios en las rutinas de clase en la educación superior, que da a lugar una investigación que surge en el marco de la participación de las autoras en el Programa STEM-LASPAU para Costa Rica, cuyo propósito principal fue "crear la capacidad de los individuos y las instituciones para que puedan implementar cambios efectivos para mejorar el acceso, la calidad y la relevancia de la educación superior" (conferencia de inauguración, Programa STEM-LASPAU-Costa Rica, 26 de octubre de 2017), así como visualizar la mediación pedagógica en el aula como un acto público de total transparencia y objeto de reflexión a través de la creación de comunidades

docentes para la mejora de los proceso de enseñanza.

Los módulos del proceso formativo comprendieron metodologías y temáticas tales como: Flipped Classroom, Instrucción entre pares, Design Thinking, Aprendizaje basado en Proyectos y Aprendizaje basado en equipos, entre otros.

El proceso formativo desarrollado en el STEM-Costa Rica, motivó estrategias innovadoras para la enseñanza y el aprendizaje estudiantil en las carreras de STEM, el desarrollo de buenas prácticas basadas en investigación y también, enriqueció la creación de comunidades de práctica entre las instituciones participantes del proceso, que se extendió desde el mes de octubre del 2017, hasta el mes de septiembre del 2018.

Dentro de las tareas de formación continua implementadas por las autoras, en el marco del proceso descrito anteriormente, se desarrolló un *estudio de caso único* para evaluar las estrategias de innovación implementadas y reseñar las reflexiones acontecidas a partir de la práctica profesional de la docente que desarrolló los cambios en las rutinas.

El Curso de Matemática General es un curso que se trabaja bajo el sistema de cátedra, y exige una dinámica de coordinación absoluta de los docentes, en cuanto al estricto cumplimiento de un cronograma previamente establecido para el abordaje de los distintos contenidos, y la aplicación de una evaluación uniforme y rígida para todos los grupos que componen la cátedra. Los resultados históricamente en las notas obtenidas por los estudiantes han sido bajos, con porcentajes de aprobación que oscilan entre un 20% y 30%.

Las autoras decidieron desarrollar el estudio justamente en el curso mencionado, dada las condiciones desafiantes que han sido descritas de severidad y control, donde existe un cronograma de avance semana a semana y aunque corresponde a un curso teórico-práctico donde la mayor parte de la clase el docente la dedica al abordaje de contenidos. La parte práctica se realiza de manera muy tradicional, en donde la mayoría de sesiones se trabajan en la clarificación de dudas o revisión de ejercicios específicos por parte del docente.

Fundamentos Teóricos y Metodológicos

John Dewey (1916, citado en Navarro, 2006) define el *aprendizaje activo* como algo que hace la persona cuando estudia. De acuerdo con Navarro (2006), a partir de esta definición original, se han ido incorporando distintas concepciones sobre el término, que abarcan diversos aspectos vinculados a tipos de interacción, que finalmente se decanta en "la realización de distintas actividades por parte de los estudiantes acompañada de la reflexión sobre las acciones que están llevando a cabo" (p. 174)

El aprendizaje activo como enfoque, se preocupa por la manera en la cual los estudiantes aprenden y por las acciones que como docentes realizamos para provocar aprendizaje en los estudiantes. No obstante, estas acciones por parte del docente, lograrán un aprendizaje en el estudiante, en la medida en que éste se implique en su proceso de aprendizaje, se empodere, o bien, se haga responsable de dicho proceso; sea capaz de resolver problemas, al sentirse desafiado por una situación particular que se le presenta, buscando soluciones que sean "viables, pertinentes y consistentes" (Jerez, Aranca, Castro, Cosmelli, Chiple, Mancilla y Valdés, 2015). Otro de los principios de este aprendizaje es lograr una implicación o participación cognitiva por parte del estudiante, es decir, que éste movilice habilidades superiores de pensamiento, en una interacción sana y positiva con otros, que provoque en él, el interés por aprender. Finalmente, el aprendizaje activo promueve el aprender haciendo, este último es el que típicamente define este

tipo de aprendizaje, sin embargo, tal y cómo se evidencia no es el único aspecto a considerar.

Para sustentar *las reflexiones sobre la práctica profesional* que acontecieron en el marco del estudio, se consideraron las ideas de Ponte (2012), quien valora los procesos formativos que sitúan en un lugar central la colaboración (debido al rol de las autoras), así como también el papel de la práctica y el de la investigación sobre la práctica profesional, destacando que los docentes aprenden a partir de su actividad y de la reflexión en torno a ella.

Por otra parte, con el afán de *comprender la práctica profesional del profesor de matemáticas* en el aula y dar una visión objetiva de la misma, se consideraron las ideas de Llinares (2000), quien advierte que es preciso identificar características de la gestión desarrollada del proceso de enseñanza-aprendizaje que puedan ser relevantes por su capacidad explicativa o su potencial para la reflexión sobre la práctica profesional.

En este caso particular, el cambio de rutinas de clase, a partir de metodologías de aprendizaje activo, permitió documentar los cambios percibidos, así como la utilización de The Classroom Observation Protocol for Undergraduate STEM (COPUS): a New Instrument to Characterize University STEM Classroom Practice (Smith MK, Jones FHM, Gilbert SL & Wieman CE, 2013).

Lo anterior por cuanto, innovar a partir de rutinas establece como pasos para su implementación, la identificación de una rutina que impacte positivamente, realizar una búsqueda documental que permita conocer e indagar respecto a experiencias de otros docentes sobre dicha rutina, o bien, consultarles a los estudiantes cómo se puede mejorar la misma; mejorar la rutina, aplicarla, comprender los ajustes que son requeridos y buscar los mecanismos para mantener dicha rutina, adaptarla a condiciones distintas y fortalecerla.

En relación con The Classroom Observation Protocol for Undergraduate STEM, consiste en un protocolo de observación de aula que permite a profesores de STEM, caracterizar de una forma confiable la manera en la cual los profesores y los estudiantes disponen del tiempo en el aula, es necesario indicar que este protocolo ha sido implementado y validado (Smith et. al, 2013).

Con respecto al sustento metodológico implementado para recopilar la información, se demarcó a través del proceso de estudios de casos, que tienen como característica básica que abordan de forma intensiva una unidad, ésta puede referirse a una persona, una familia, un grupo, una organización o una institución (Martínez, 2011), sin embargo, por las características expuestas en el apartado anterior, se delimitó el estudio a un *estudio de caso único*, destacando que la muestra es intencional y que se realiza en función de los intereses y propósitos que determinan la potencialidad del mismo, tal como lo establece Wainer (2012).

El hallazgo que se considera de mayor relevancia en este estudio fue poder innovar en la clase por medio de rutinas, es decir, con pequeños cambios acompañados de un plan que permitió evaluar el éxito o no de dicha rutina, basada en estrategias de aprendizaje activo.

De esta forma, uno de las innovaciones fue cambiar la estructura habitual de la clase, implementando un breve diagnóstico que permitiera retomar lo aprendido en sesiones previas y cerrar la clase con pequeñas asignaciones que complementen el trabajo realizado. Dicho cambio en la estructura fue complementado con el uso de aplicaciones tecnológicas como Socrative y Kahoot y en algunas sesiones se trabajó con la modalidad de Laboratorio de Enseñanza, dando lugar a una dinámica grupal más interactiva.

Los criterios contemplados para el análisis de la información recopilados a partir del estudio de caso se organizaron a través de dos indicadores: el primero de ellos está relacionado con la medición del impacto del cambio de rutinas implementado, a partir de los resultados obtenidos del trabajo en clase; y, el segundo de ellos radica en la recopilación de información por parte de la docente observadora, a partir de las reflexiones sobre la práctica profesional emitidas por la docente que llevó a cabo la implementación de las innovaciones, así como también a partir del protocolo de observación. Para efectuar el estudio, el rol de las investigadoras se estableció a priori, puesto que una de ellas impartió el curso y realizó los cambios de rutina y la otra autora fue mediadora para documentar, tanto las evidencias de implementación de actividades de aprendizaje activo, como las reflexiones sobre la práctica docente, emanadas a partir de las innovaciones implementadas.

Primer indicador: evidencias del impacto al innovar con cambios de rutinas a partir de aprendizaje activo

Durante el curso se implementó como estrategia pedagógica el laboratorio de enseñanza, la cual se realizó de dos formas. En primer lugar, se les solicitó a los estudiantes que estudiaran previamente métodos de factorización y, en la clase, se efectuó una actividad en equipo y colaborativa utilizando la aplicación Kahoot. Por otra parte, se realizó un cambio en la estructura o planeamiento de la clase, la cual iniciaba con una reflexión y cuestionamientos respecto a los conocimientos y habilidades adquiridas en sesiones anteriores y cada sesión cerraba con una asignación para la siguiente clase.

En la figura 1 se muestran evidencias fotográficas de tareas desarrolladas por los estudiantes a partir de las innovaciones propuestas. Por ejemplo, cuando se trabajó el tema de análisis de gráfica de funciones, se solicitó a los estudiantes traer la gráfica de una función que describiera el comportamiento de alguna situación atinente o relacionada a su carrera o ámbito profesional, tal como se observa en la imagen de la izquierda. Otro ejemplo, fue cuando se trabajó con el tema de ángulos de elevación y de depresión, donde se construyó un clinómetro en el aula y se asignó como actividad extraclase la construcción de un problema de trigonometría utilizando este instrumento, para el cual se solicitó, además, que los estudiantes se tomaran fotografías con la situación-problema planteada, de modo que la imagen de la derecha representa a una estudiante utilizando el clinómetro en la medición de la altura de una canasta de baloncesto, cabe destacar que el problema planteado fue construido por la estudiante y fue resuelto en clase por otros compañeros.

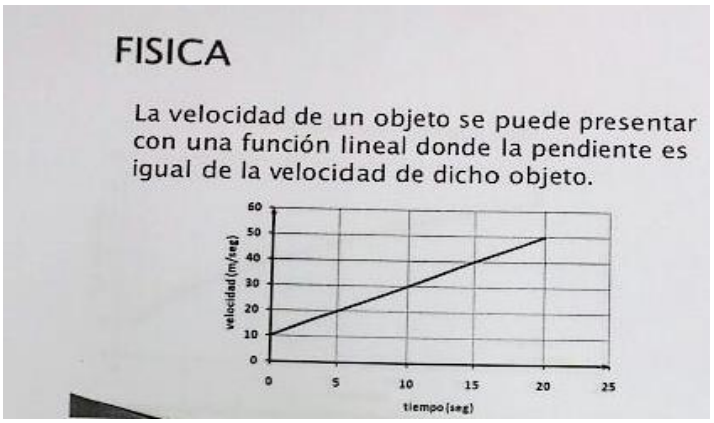




Figura 1. Evidencia fotográfica de las tareas desarrolladas por los estudiantes

Con respecto a los resultados obtenidos a partir de la implementación de actividades de aprendizaje activo, puede afirmarse que se constató como ventaja que el estudiante se haga responsable de su propio proceso de aprendizaje, se implique y participe cognitivamente logrando movilizar habilidades superiores de pensamiento, en una interacción sana y positiva con sus pares.

Además, a partir de la ejecución de dichas estrategias didácticas, se alcanzó un efecto positivo sobre los estudiantes, reflejado en una puntual asistencia y una alta responsabilidad en la entrega de las asignaciones. En actividades como la del clinómetro, por ejemplo, se reportó un 100% de entrega en dicha asignación, además, de evidenciar una alta motivación de los estudiantes materializada en los múltiples escenarios que fueron objeto de estudio por parte de ellos al plantear los problemas trigonométricos. Es importante indicar que estas asignaciones eran formativas, es decir, no tenían un porcentaje asignado de manera sumativa.

La dinámica e interacciones entre estudiantes y la docente también se vieron favorecidas, logrando un ambiente de aprendizaje adecuado, con intervenciones y participaciones de forma continua de los estudiantes, en donde existía un interés auténtico por mostrar el trabajo realizado a sus pares y que éstos realizaran los problemas que cada uno había planteado. Por otra parte, se alcanzó una mayor motivación y confianza de los estudiantes al enfrentarse a problemas, incluso en la forma de redactar los mismos.

Una de las fuentes de información que permitió constatar los efectos positivos en los estudiantes del curso corresponde al informe de resultados de la evaluación del desempeño docente, la cual es realizada por el Programa de Evaluación Académica y Desarrollo Profesional de la Universidad Nacional, a través de un cuestionario. Cabe destacar que, en una escala de excelente a deficiente, en el curso para el cual se aplicaron las estrategias de innovación, la docente obtuvo un excelente en la categorización del desempeño (que corresponde a un rango de 96 a 100). En este caso, los resultados obtenidos por la docente fueron superior a los que históricamente habían sido reportados, por ejemplo, los rubros en los cuales se obtuvo una mejora significativo fueron: en el uso de recursos educativos para el desarrollo del curso, se propicia la participación del estudiantado en la clase, se favorece la comunicación con el estudiantado ya sea de manera personal y/o virtual y la docente da seguimiento al trabajo realizado por el estudiantado.

Por otra parte, en cuanto a las opiniones de los estudiantes respecto a las fortalezas del

docente en el curso. Textualmente algunos estudiantes manifestaron comentarios como:

- ✓ *Innova la forma en que se da el curso*
- ✓ *Incentiva el trabajo en equipo en una materia que muchas veces puede ser muy individual*
- ✓ *Trata de hacer las clases dinámicas para un mejor entendimiento*

Segundo indicador: Reflexiones sobre la práctica docente a partir de la implementación de aprendizaje activo

Se mencionó con anterioridad que la innovación a partir de rutinas, potencia la reflexión de la práctica docente, en cuanto una vez identificada una rutina de efectos positivos, es necesario realizar un proceso de mejora que atienda los comentarios que los mismos estudiantes indiquen y que permita mejorarla a partir de teorías o investigaciones que se hayan efectuado en relación con la rutina identificada.

Se describen a continuación, de manera precisa los cambios percibidos en la actitud, concepción docente y de la práctica profesional cotidiana, externados por la docente que aplicó las estrategias de aprendizaje activo, puntualmente la innovación a partir de rutinas:

> *Unos de los factores de mayor arraigo al impartir cursos como Matemática General, es la preocupación por el tiempo en función de cubrir el total de contenidos que establece el programa, y que usualmente ha sido utilizado como excusa para evitar realizar cambios tanto en términos del programa como de metodología o evaluación. A partir de la implementación de rutinas, mi idea respecto a la innovación y al cambio en la docencia se han visto afectadas de manera positiva.*
>
> *En primer lugar, porque existe un cambio importante en mi idea de innovación, pasando de una concepción más general a una práctica sistemática acompañada de una adecuada evaluación del impacto. Esto me ha permitido pensar en la implementación de estrategias de aprendizaje activo como un proceso paulatino, tratando de evaluar al final su impacto.*
>
> *Por otra parte, con las actividades realizadas en el curso de Matemática General me di cuenta del cambio que he tenido desde la práctica profesional cotidiana, ya que he podido implementar en el aula diferentes actividades de aprendizaje activo, que no han restado tiempo al desarrollo de contenidos y por el contrario han potenciado habilidades en los estudiantes que hacen que me sienta satisfecha con el trabajo realizado.*
>
> *Los cambios implementados y la percepción y recepción a estas prácticas por parte de los estudiantes, me han hecho reflexionar sobre lo que constituía mi foco central en la práctica docente, preocupándome por la manera en la cual planifico cada sesión de forma que los estudiantes alcancen habilidades matemáticas y un aprendizaje significativo, y no solamente un conocimiento enfocado en contenidos.*
>
> *El uso de distintas estrategias para el aprendizaje debe enfocarse en facilitar a los estudiantes los medios para la construcción de su conocimiento, de forma tal que este se sienta, con respecto a su aprendizaje, implicado, responsable y capaz; donde, a la*

> *vez, pueda pensar por sí mismo, interactuar con otros, sentir deseos por aprender y aprender haciendo.*

Esta reflexión evidencia convicción por parte de la docente, respecto a los efectos positivos que se obtienen en la aplicación de estrategias de aprendizaje activo en el aula.

Por otra parte, con la aplicación de The Classroom Observation Protocol for Undergraduate STEM, se evidenció que la docente a partir de la implementación de estrategias de aprendizaje activo logró una buena interacción en el aula, entre todos los participantes del proceso educativo. Asimismo, se constata que el uso de aplicaciones tales como Socrative, le permiten al docente, en tiempo real, revisar la apropiación o no de conceptos y procedimientos matemáticos por parte de los estudiantes, y realizar observaciones o explicaciones a partir de dichos resultados.

La aplicación del protocolo de observación permitió constatar que la rutina de asignación de tareas fue exitosa, en el caso de la construcción de ejemplos concretos de sus diferentes carreras universitarias para el análisis de funciones; dando lugar a que la docente decidiera continuar con el ciclo que establece la implementación de rutinas, así como también establecer metas en la práctica docente para futuro.

Reflexiones Finales

La implementación de estrategias de aprendizaje activo, aunado a un proceso de reflexión de la práctica docente, permiten generar cambios paulatinos de impacto positivo, en el proceso de enseñanza y aprendizaje a nivel superior universitario. El romper un paradigma de enseñanza en la educación superior es complejo, pero el cambio por rutinas hace que el docente muestre menos resistencia y autorregule su propia práctica.

La reflexión sobre la propia mediación pedagógica, tanto del docente de manera individual, como de un grupo de docentes que apoyen y acompañen dicha reflexión, permite identificar buenas prácticas que pueden ser replicadas y mejoradas continuamente.

El proceso de innovación implica una buena actitud del docente acompañado de creatividad, y de apertura, sobre todo para visualizar el espacio de aula como un sitio de transparencia y de escrutinio público, con el objetivo de mejorar y aprender de las buenas o malas prácticas que en él se efectúen.

Al principio surge el temor de implementar actividades diferentes por parte del docente, pues puede acontecer que dichas actividades no sean exitosas, o bien, no se logre una adecuada reacción de los estudiantes, o incluso existe la tensión de ser “juzgado” por los mismos colegas. La aplicación de innovaciones, por lo tanto, requiere de un cambio de mentalidad para que sea exitoso. El proceso se caracteriza por requerir de confianza y de una inmersión en la ejecución de este, aunque en algún momento sea confuso; se debe permitir que una idea pase por prueba y error y que esto conlleve a un aprendizaje.

Las pequeñas innovaciones realizadas aportan confianza para atreverse a realizar cosas nuevas, hacer uso de distintas herramientas, investigar experiencias didácticas exitosas y el surgimiento de ideas para implementar en cursos a futuro.

Un aspecto que facilitó la reflexión de la práctica fue que se compartieran ideas y reflexiones entre las investigadoras de estudio, pues se recibió retroalimentación constante por parte de la investigadora observadora.

Referencias y bibliografía

Aránguiz, M. B; Molina, M. B; Riquelme, A. C; y Contreras, C. M. (2018). Propuesta de modelo tecnológico para Flipped Classroom (T-FliC) en educación superior. *Revista Electrónica Educare, 22*(2), 3.

Bishop, J. L., & Verleger, M. A. (2013, June). *The flipped classroom: A survey of the research.* In ASEE national conference proceedings, Atlanta, GA (Vol. 30, No. 9, pp. 1-18).

Jerez, O; Aranca, C; Castro, C; Cosmelli, J; Chiple, R; Mancilla, R; y Valdés, A. (2015). Aprendizaje activo, diversidad e inclusión. *Santiago: Universidad de Chile*.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas.En J. P. da Ponte & L. Serrazina (coord.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia*. (pp. 109-132). Secçao de Educaçao Matematica da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educaçao: Lisboa, Portugal. Recuperado de: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/857/1/Llinares-%20comprendiendo%20la%20practica%20del%20profesor.pdf

Martínez, P. C. (2011). El método de estudio de caso Estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista científica Pensamiento y Gestión, 20,* 165-193.

Muñoz Venegas, M., Cea Echeverría, P., Martínez Araneda, C., & Cárdenas Oviedo, C. (2017). *Innovando en Educación Superior: Experiencias clave en Latinoamérica y el Caribe 2016-2017*. Universidad de Chile, Facultad de Economía y Negocios. Recuperado de: http://repositoriodigital.ucsc.cl/handle/25022009/1262

Navarro, L. P. (2006). Aprendizaje activo en el aula universitaria: el caso del aprendizaje basado en problemas. Miscelánea Comillas. *Revista de Ciencias Humanas y Sociales, 64*(124), 173-196. Recuperado de: http://revistas.upcomillas.es/index.php/miscelaneacomillas/article/view/6558/6367

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Universidad Nacional. (2018). *Programa del Curso Matemática General*. Escuela de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Recuperado de: http://www.matematica.una.ac.cr/

Wainer, A. (2012). Estudios de caso único en el campo de la investigación actual en psicología clínica. *Subjetividad y procesos cognitivos, 16* (2), 214-222.

Smith, MK; Jones, FHM; Gilbert, SL; & Wieman, CE. 2013. The Classroom Observation Protocol for Undergraduate STEM (COPUS): a New Instrument to Characterize University STEM Classroom Practices. CBE-Life Sciences Education, Vol 12(4), pp. 618-627; www.cwsei.ubc.ca/resources/COPUS.htm

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Construcciones mentales para la comprensión del concepto de Ortogonalidad

Brandon Andrey **Moreno** Solares
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
brandonmss@hotmail.com

Solange **Roa** Fuentes
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander; Grupo EDUMAT – UIS
Colombia
roafuentes@gmail.com

Resumen

El interés de esta investigación está en el concepto de ortogonalidad, el cual hace parte de los cursos de álgebra lineal del primer año universitario en los programas de ingenierías y ciencias exactas. Éste ha sido poco estudiado desde la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Se presentan algunos trabajos previamente desarrollados que involucran el estudio del concepto y se toma como fundamento teórico la teoría APOE, la cual permitirá estudiar con profundidad la ortogonalidad desde lo cognitivo con el fin de identificar las construcciones previas que un estudiante debe poseer para comprensión del objeto matemático deseado y, de esta manera, contribuir a la didáctica del álgebra lineal. Finalmente, se describen algunas conclusiones, reflexiones y alcances de la investigación en curso.

Palabras clave: Teoría APOE, Ortogonalidad, didáctica del álgebra, pensamiento matemático avanzado.

Introducción

El álgebra lineal es una de las principales asignaturas del ciclo básico universitario de los programas de ingeniería y ciencias exactas. Recientemente, investigar acerca de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal ha adquirido un mayor interés y, en la actualidad, se encuentra una gran variedad de trabajos que muestran su importancia, dificultades asociadas a su enseñanza y aprendizaje y, estudios para la comprensión de conceptos específicos. A continuación, se mencionan algunos de los trabajos desarrollados tanto en la didáctica del álgebra como aquellos relacionados al objeto de interés en la presente investigación.

Aspectos generales

El álgebra lineal es considerada como una asignatura de gran dificultad, Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) mencionan que los estudiantes se sienten en otro planeta en el cual no pueden encontrar su rumbo. Un estudio realizado en 1987 por Robert y Robinet propuso un cuestionario con el fin de identificar los conocimientos e ideas de los estudiantes en torno al álgebra lineal, donde dos de las preguntas pedían a los alumnos realizar una descripción del curso y sus dificultades. En ellas se encontró que la dificultad en la comprensión de un objeto particular (Espacio vectorial), la multitud de teoremas, propiedades y definiciones, el requerimiento de pruebas, rigor, precisión, lógica y cuantificadores y, la ausencia de conexiones entre los conocimientos previos y los nuevos son los principales obstáculos en la comprensión del álgebra lineal, denominado obstáculo del formalismo.

Harel (2000) señala tres principios para el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal: el principio de lo concreto, el principio de la necesidad y el principio de la generalización. El primer principio tiene que ver con la comprensión por parte de los estudiantes de los conceptos matemáticos partiendo de contextos concretos para ellos. El principio de la necesidad hace referencia a que el conocimiento se desarrolla a partir de necesidades, intelectualmente hablando; es decir, un estudiante aprenderá un concepto matemático cuando sienta la necesidad de usarlo como una solución a una situación problema de su contexto. Finalmente, el principio de generalización tiene como objetivo permitir y fomentar en los estudiantes la generalización de los conceptos a partir de otros conceptos aprendidos en un modelo específico.

Posteriormente, Dorier y Sierpinska (2001) hicieron una compilación de investigaciones alrededor del álgebra lineal. Allí, se identifican dos tipos de dificultades: (i) dificultades conceptuales, las cuales corresponden a las dificultes asociadas a la naturaleza del álgebra lineal en sí misma, lo denominado por Hillel como “the nature of the beast”; y, (ii) dificultades cognitivas, las cuales hacen referencia al tipo de pensamiento que se necesita para la comprensión del álgebra lineal.

Para ampliar un poco más sobre los trabajos realizados en torno al aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal y las dificultades asociadas a su comprensión se recomienda leer las investigaciones de Sierpinska (2000), Hillel (2000), Sierpinska et al (2002), Dorier (1997), Dorier et al (2000), Rober y Robinet (1987), Alves Dias & Artigue (1995).

Por otra parte, se han realizado diferentes investigaciones estudiando la construcción y comprensión de algunos objetos matemáticos específicos del álgebra lineal, dentro de ellos se encuentran los conceptos de espacio vectorial (Trigueros y Oktac, 2005; Oktac et al, 2006; Parraguez y Oktac, 2010); sistemas de ecuaciones lineales (Trigueros et al, 2007); base (Kú et al, 2008); transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktac, 2010; Roa-Fuentes y Oktac, 2012); y, valores y vectores propios (Salgado y Trigueros, 2015). Como se puede observar, en los trabajos realizados con la teoría APOE en torno a los conceptos del álgebra lineal no se ha estudiado el concepto de ortogonalidad, lo cual es el interés de la presente investigación. Además, hay pocos trabajos realizados desde otras teorías que involucran el estudio de la comprensión y la construcción de dicho concepto. A continuación, se describen algunos de esos trabajos.

Acerca de la Ortogonalidad

Gueudet-Chartier (2004) presenta un estudio de libros textos referente a los conceptos de

ortogonalidad y producto punto, con el fin de observar el potencial y las limitaciones del uso de la geometría en la enseñanza del álgebra lineal. En dicho apartado, el autor destaca la carencia del aprendizaje de conceptos del álgebra lineal a partir de nociones intuitivas, por ejemplo, el caso de la definición de ortogonalidad en espacios con producto interno que no tiene una noción intuitiva asociada que le permita a los estudiantes establecer un vínculo entre el álgebra lineal y la geometría. En esta investigación se invita a considerar las otras áreas de la matemática con el fin de mejorar la enseñanza del álgebra lineal y más aún la geometría, así conceptos como el de espacios con producto interno u ortogonalidad se podrían estudiar bien a través de este enfoque.

Adicionalmente, el grupo de educadores matemáticos llamado "Linear Algebra Curriculum Study Group" (LACSG), cuyo objetivo era estudiar las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, generó un conjunto de recomendaciones para un primer curso de álgebra lineal, para las cuales se tuvo en cuenta aspectos pedagógicos y epistemológicos acerca del aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal; la experiencia de los docentes y algunas recomendaciones por personas pertenecientes a otros campos. Referente a las recomendaciones del LACSG y el concepto de ortogonalidad en un primer curso de álgebra lineal se encuentra que se debe abordar los conceptos de producto interno, incluyendo la ortogonalidad, conjuntos bases y matrices ortogonales, proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, entre otros Harel (2000).

Posteriormente, Bagley y Rabin (2013) realizaron un trabajo de investigación en torno a tres formas de pensamiento en un curso de álgebra lineal las cuales ellos denominaron como pensamiento abstracto, pensamiento computacional y pensamiento geométrico. Los investigadores buscaban identificar las estrategias que los estudiantes implementaban para resolver un problema, y la coordinación de las formas de pensamiento; por lo cual su investigación giró alrededor de una tarea llamada el "Problema de Michelle", la cual consiste en encontrar una base para $\mathbb{R}^4$ a partir de dos vectores dados u y v. La investigación mostró que los estudiantes poseen dificultades en torno al concepto de ortogonalidad, se evidenció que ellos operaban de manera circular cuando intentaban resolver un sistema de ecuaciones lineales en la búsqueda de vectores ortogonales. También se identificó que ellos pensaban que la única forma de producir vectores ortogonales era por el medio del proceso de Gram-Schmidt. Otro resultado interesante es que ningún estudiante intentó solucionar el problema a través de la ortogonalidad de manera natural, solamente lo hicieron cuando el entrevistador lo sugirió.

Dreyfus y Hillel (1998, 2005) realizaron una investigación basada en la construcción de significados relacionados con los conceptos de proyección y aproximación. Esta investigación estudia la noción de "producto interno", la cual es una generalización del producto punto en R^n. De esta manera, por medio de Espacios con Producto Interno se define en términos más generales otros conceptos como proyección ortogonal, ortogonalidad, norma, distancia, entre otros, donde una aplicación interesante tiene que ver con la aproximación de una función f mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, dicha aplicación es poco usual en un curso de Álgebra Lineal.

Asimismo, Caglayan (2018) aborda el concepto de espacios con producto interno donde se incluye la condición de ortogonalidad desde la aproximación de funciones. Este autor se interesó por estudiar la comprensión de los estudiantes de los polinomios ortogonales de Hermite e identificar las formas creativas e innovadoras donde se coordinan enfoques visuales y analíticos a través de un software de geometría dinámica. Mediante la exploración en el software de geometría dinámica, los estudiantes obtuvieron una parte de la secuencia de los polinomios de

Hermite y posteriormente se abordaron algunas propiedades y conceptos en términos de los polinomios de Hermite tales como ortogonalidad, desigualdad de Cauchy-Schwarz, desigualdad del triángulo, teorema de Pitágoras, ortonormalidad, entre otros.

Los trabajos anteriormente descritos realizan diferentes aportes al concepto de ortogonalidad, en ellos, se identifican algunas dificultades relacionadas con el concepto y se proporciona un tratamiento diferente al usual en un curso de álgebra lineal mediante la aproximación de funciones; de esta manera, también se evidencian las conexiones existentes entre la ortogonalidad y otros conceptos de la misma área. Por tanto, la pregunta que guía esta investigación es ¿Qué estructuras y mecanismos mentales necesita construir un estudiante para la compresión del concepto de ortogonalidad? A la cual se le dará respuesta mediante el objetivo, describir las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes universitarios de primer año sobre el concepto de Ortogonalidad, a través del diseño y desarrollo del Ciclo de Investigación propuesto por la teoría APOE.

Marco Teórico

Teoría APOE

La Teoría APOE[1] (Arnon et al, 2014) busca describir cómo un individuo construye su comprensión de un objeto matemático específico mediante *estructuras mentales* que permiten reflexionar sobre las construcciones que va a hacer o que necesita hacer para lograr la comprensión de un objeto o un concepto matemático, de esta manera, se puede realizar un acercamiento de forma más reflexiva, proporcionando así, un enriquecimiento en la concepción que un individuo tiene sobre los objetos matemáticos.

La siguiente figura es un esquema que muestra cómo se relacionan las estructuras y mecanismos mentales para la comprensión de un objeto matemático. Para la construcción de las estructuras mentales se requiere de los diferentes mecanismos mentales, los cuales son los puentes que permiten el tránsito entre una estructura y otra y, por tanto, conducen a la construcción del conocimiento matemático.

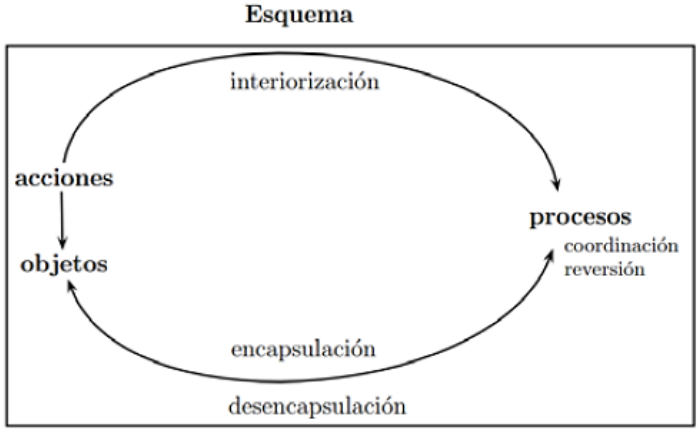


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de un concepto matemático (Arnon et al, 2014)

[1] Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema.

Se puede observar que el conocimiento matemático se origina con Acciones, las cuales son transformaciones sobre los objetos físicos o mentales previamente construidos por parte de un individuo; la interiorización de las Acciones conduce a una reflexión sobre ellas y, por tanto, a una apropiación interna de las mismas, de esta manera se produce una concepción Proceso sobre determinado concepto. Los mecanismos de coordinación y reversión permiten la construcción de nuevos procesos. La concepción Objeto se logra a través de la encapsulación, esto es, comprender el Proceso como una estructura estática con la cual se pueden realizar Acciones. La desencapsulación es el mecanismo por el cual el individuo regresa al Proceso que dio origen a un objeto mental. Finalmente, un Esquema es un conjunto de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que el estudiante puede usar para dar solución a una situación problema. El nivel de comprensión de un individuo dependerá de su habilidad para establecer relaciones entre las diferentes construcciones mentales (Arnon et al, 2014).

Un aspecto fundamental de esta teoría es que parte de la idea de que todo objeto o concepto matemático puede ser comprendido por un individuo si éste posee las construcciones necesarias (Arnon et al, 2014) por tanto, se requiere del diseño de un modelo cognitivo denominado descomposición genética; el cual es un camino que describe cómo un concepto matemático puede llegar a ser comprendido mentalmente por un individuo. Dicha descomposición genética es el punto de partida para el diseño de actividades que favorezcan tanto el trabajo del profesor como el de los estudiantes, tales actividades deben promover cada una de las construcciones propuestas para la comprensión del concepto y de esta manera validar el modelo establecido; en caso de que el modelo no funcione deber ser refinado y repetir este proceso hasta que dé cuenta del aprendizaje del concepto deseado.

Paradigma de Investigación

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, la teoría APOE proporciona una metodología de investigación que consta de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de instrumentos, y recolección y análisis de datos. En la figura 2 se muestran las tres componentes y cómo estas están relacionadas entre sí.

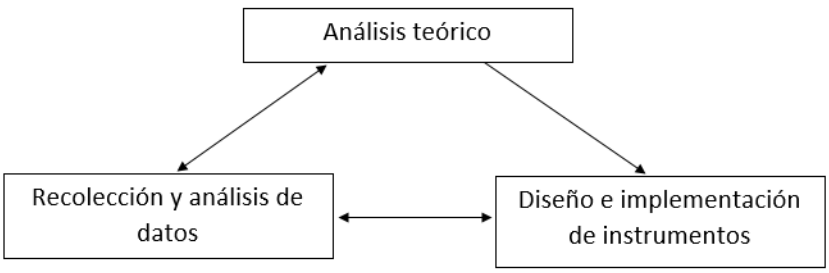


Figura 2. Ciclo de Investigación de APOE (Arnon et al, 2014)

Análisis teórico: La investigación inicia con un estudio teórico sobre el objeto matemático que se desea comprender, el cual se desarrolla teniendo en cuenta los siguientes aspectos: (i) análisis de libros de texto, (ii) experiencia de los investigadores como estudiantes y docentes y; dificultades identificadas desde otras perspectivas teóricas de la disciplina. Por lo tanto, el objetivo principal de esta fase es proporcionar un modelo cognitivo que dé cuenta de las construcciones mentales que un individuo necesita hacer para la comprensión de un concepto

matemático específico (descomposición genética preliminar). La descomposición genética es el eje fundamental del ciclo de investigación; una vez se obtiene, permite avanzar a las etapas posteriores del ciclo hasta completarlo, dando como resultado una descomposición genética refinada. Cuanto más se repita este proceso se obtendrán descripciones más finas de las construcciones mentales necesarias para la comprensión de un determinado concepto. (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012).

Diseño e implementación de instrumentos: El diseño de actividades permite validar la descomposición genética propuesta o remodelarla en caso de ser necesario. Cada una de las actividades propuestas dentro de la investigación debe estar orientada hacia el desarrollo de todas y cada una de las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010).

Recolección y análisis de datos: Una vez obtenida la descomposición genética del concepto matemático deseado se debe proporcionar evidencia empírica que permita su refinamiento o validación; en caso contrario la descomposición genética permanecerá únicamente como un modelo hipotético (Arnon et al, 2014). El propósito de esta fase debe responder a dos preguntas: ¿Los estudiantes hicieron las construcciones mentales descritas en la descomposición genética? y, ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto? Existen diferentes tipos de datos que proporcionan información suficiente para responder a estas dos preguntas, en particular para esta investigación se tienen en cuenta: cuestionarios escritos previamente diseñados; entrevistas profundas enfocadas en el objeto matemático de interés y; una combinación de instrumentos escritos y entrevistas.

Aspectos Metodológicos

Esta investigación está enfocada en la descripción de las construcciones que un estudiante debe realizar para la comprensión del concepto de ortogonalidad. Se desarrolla con un grupo de estudiantes que pertenecen a un curso de álgebra lineal II en la Universidad Industrial de Santander (UIS). Se definen los aspectos teóricos y didácticos del concepto de ortogonalidad en conjunto con el profesor a cargo del curso, con el fin de preparar actividades y realizar un seguimiento continuo como observador; esto permite conocer el contenido, expectativas e intereses del curso.

Análisis teórico: Para esta primera fase del ciclo de investigación, se plantean las siguientes preguntas: (i) ¿Qué significa comprender el concepto de ortogonalidad? y, (ii) ¿Cómo se puede construir la comprensión del este concepto? Con el fin de responder estas preguntas se analizan tres libros de texto de álgebra lineal cuyo propósito principal es diseñar una descomposición genética que dé cuenta de las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante debe poseer para la comprensión del concepto de ortogonalidad. En esta etapa es necesario definir cómo se aborda el concepto matemático de ortogonalidad, de esta manera, el análisis de los libros de texto contribuye a la escogencia de dicha definición puesto que el interés es determinar qué teoremas, propiedades, definiciones y notaciones intervienen en la construcción del concepto.

Diseño e implementación de instrumentos: Partiendo de la descomposición genética se diseñan dos instrumentos: una prueba diagnóstica y una entrevista, los cuales están acompañados de un análisis a priori. Puesto que el interés de la investigación es estudiar cómo los estudiantes construyen el concepto de ortogonalidad para dar cuenta de la comprensión del mismo, se escogen los estudiantes cuyos resultados sean los mejores.

Recolección y análisis de datos: A través del análisis de los datos resultados empíricos obtenidos en la etapa anterior se pretende encontrar las construcciones propuestas en la descomposición genética que no fueron necesarias y las construcciones necesarias que no fueron consideradas con el fin de realizar los ajustes correspondientes para que la descomposición genética sea una mejor aproximación a la construcción de la ortogonalidad. A esto se le conoce como refinamiento de la descomposición genética. De esta manera, el análisis se realiza caracterizando las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes poseen alrededor del concepto de ortogonalidad lo cual permite la validación de la pertinencia y la viabilidad de la descomposición genética.

Reflexiones finales

El concepto de ortogonalidad ha sido poco estudiado desde la didáctica del álgebra lineal y es necesario dentro de tal asignatura. Sin embargo, en los cursos tradicionales de álgebra lineal no se alcanza a abordar dicho concepto en otros espacios vectoriales diferentes de $\mathbb{R}^n$. Es solo en aquellas universidades en donde se imparte un segundo curso de álgebra lineal en donde se trata de manera más profunda dicho concepto. Esta investigación pretende aportar al desarrollo de la línea de investigación de la didáctica del álgebra, al álgebra lineal en sí misma y a la teoría APOE. Estos son solo los primeros acercamientos al estudio del concepto de ortogonalidad, donde se espera proponer un camino para la construcción y comprensión de tal concepto. Asimismo, se espera que otras investigaciones sean desarrolladas en torno al estudio de este concepto y que esta investigación llegue a ser considerada dentro de las aulas de clase, puesto que ese es el fin último de la investigación.

Referencias y bibliografía

Alves Dias, M & Artigue, M. (1995). Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra, in The proceedings of the 19th annual meeting of the international group for the Psychology of Mathematics Education, Universidade Federal de Pemambuco, Recife, Brésil, 3 vols 2:34-41.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M, y Weller, K. (2014). APOS Theory - A framework for research and curriculum development in mathematics education, Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D, y Thomas, K. (1996). A framework for researchand curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.): Research in Collegiate Mathematics Education, CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Bagley, S., & Rabin, J. (2013). Computational Thinking in Linear Algebra. In The Proceedings of RUME 16, Volume 1, 65-75, Denver, Colorado.

Caglayan, G. (2018). Coordinating Analytic and Visual Approaches: Math Majors' Understanding of Orthogonal Hermite Polynomials in the Inner Product Space P_n (R) in a Technology-Assisted Learning Environment. The Journal of Mathematics Behavior.

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J. & Rogalski M. (2000). On a research program about the teaching and learning of linear algebra in first year of French science university, International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology 31(1), 27-35.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall, (Ed), Advanced Mathematical Thinking, (p. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T. & Hillel, J. (1998). Reconstruction of meanings for function approximation, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3(2), 93-112.

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática,* 20 (2), 65-89.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? Linear Algebra and its Applications, 379, 491-501.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, pp. 177-190. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J. & Dreyfus, T. (2005). What's a best fit? Construction of Meaning in a Linear Algebra session. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), Meaning in Mathematics Education (pp. 181-203). Springer.

Meel, D. (2003). "Modelos y Teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE". RELIME. Año/vol. 6, núm. 003. pp. 221-278.

Oktaç, A., Trigreros, M., y Vargas, X. N. (2006). Unverstanding of vector spaces – a viewpoint from APOS theory. *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*, (En CD-ROM) Istanbul, Turkey.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432,2112-2124.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (1), 89-112.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15 (2), 199-232.

Robert, A., Robinet, J. & Tenaud, I. (1987). De la géométrie à l'algèbre linéaire, Brochure 72, IREM de Paris VII.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. Educación matemática, 26(3), 75-107.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp.209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Nnadozie, A., & Oktaç, A. (2002). A study of Relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra. Concordia University: Montreal. Disponible en: http://www.annasierpinska.wkrib.com/pdf/Sierpinska-TT-Report.pdf

Trigeros, M., y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algébre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 10, 157-176.

Trigueros, M., Oktaç, A., y Manzanero, L. (2007). Unverstanding of Systems of Equations in Linear Algebra, *Proceedings of the 5th CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education)*, Larnaca, Chipre, 2359-2368.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El álgebra subyacente al transformar ecuaciones paramétricas en la ecuación cartesiana correspondiente: los mediadores papel y lápiz y tecnología

José **Zambrano** Ayala
Instituto Tecnológico de Milpa Alta
México
jose.zam@itmilpaalta.edu.mx
Gonzalo **Zubieta** Badillo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
gzubieta@cinvestav.mx
Verónica **Vargas** Alejo
Universidad de Guadalajara
México
veronica.vargas@academicos.udg.mx

Resumen

Reportamos resultados de una investigación cuyo propósito fue analizar cómo actividades diseñadas en papel y lápiz y con tecnología, en particular *applets* (e.g., GeoGebra), contribuyen al aprendizaje del álgebra en el tema de *Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica* de modo que estudiantes de ingeniería sobrepasen obstáculos algebraicos derivados al transformar ecuaciones paramétricas a la ecuación cartesiana correspondiente. En el estudio participaron un grupo de estudiantes de cálculo vectorial cuya edad oscilaba entre 19 y 25 años. Los datos fueron analizados en dos teorías: *Cambio de atención* de Mason (2008) y *Representaciones* de Duval (1999, 2003, 2006)[1]. Nuestros resultados indican que la mediación de la tecnología promueve la reflexión y la construcción de significados, por los estudiantes, alrededor del desarrollo de binomios, uso de identidades trigonométricas y la transformación de ecuaciones paramétricas a la ecuación cartesiana correspondiente, cuando representaciones algebraicas se asocian a representaciones gráficas.

Palabras clave: GeoGebra, representación, reflexión, atención, transformación.

Introducción

Algunas investigaciones en la década de los 70 y 80 del siglo pasado reportan dificultades de los estudiantes para la actividad transformacional del álgebra (Kieran, 2004). Éste síntoma se

[1] En Guzmán y Zambrano (2014) se describen estas dos teorías; en este documento sólo se indica cómo la usamos en el análisis de datos en la presente investigación.

ve reflejado en algunos estudiantes de nivel universitario, quienes exhiben dificultades señaladas como comunes, frecuentes y persistentes (e.g., Kirshner & Awtry, 2004; Marquis, 1988; Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987; ente otros). Si bien autores como Carry, Lewis y Bernar (1980), Kirshner y Awtry, (2004) y Payne y Squibb (1990), entre otros, explican los orígenes de errores de manipulación algebraica por estudiantes, aquí estamos interesados en que a partir de actividades diseñadas con papel y lápiz y applet, el estudiante reflexione sobre sus errores en el desarrollo de procesos simbólicos con la finalidad de que logre la aprehensión de la tarea algebraica en estudio (e.g., factorización, eliminación, racionalización, etc.).

Así como García, Benitez y López (2015) hicieron uso de tecnología por medio del simulador en *flash* para apoyar el aprendizaje de funciones vectoriales y Moncada, Ochoa, López, Espín y Gómez (2016) transformaron el aula en un laboratorio de cálculo vectorial con el uso de GeoGebra (el cual permitió evolucionar el aprendizaje de los contenidos de esta asignatura por medio de visualización dinámica), nos interesó usar la tecnología para investigar si los estudiantes podían reconocer la gráfica de ecuaciones a partir de su representación simbólica por medio de ecuaciones paramétricas cuando éstas se encuentran en forma cartesiana.

En nuestro estudio observamos si los estudiantes son capaces de identificar errores algebraicos y si ellos los corrigen a través de su reflexión de modo que logren su aprehensión; para ello, en esta investigación incluimos dos ambientes: el de papel y lápiz y el tecnológico. La pregunta que guió la investigación es: ¿De qué manera un ambiente dinámico (e.g., GeoGebra) promueve reflexión en el estudiante en torno a errores algebraicos cometidos al transformar ecuaciones paramétricas en la ecuación cartesiana correspondiente?

Marco conceptual

El análisis de los datos fue llevado a cabo con dos teorías cognitivas *Cambio de Atención* de Mason (2008) y *Representaciones* de Duval (1999, 2003, 2006). La primer teoría (Mason, 2008) se basa en tres conceptos básicos: *Atención* (observación por parte del estudiante) ésta se usa para reconocer la actividad del alumno relacionada con *sustentar*, *discernir*, *relacionar*, *percibir* y *razonar* los objetos matemáticos de estudio, y sin ella no es posible que el estudiante de sentido a lo que se quiere conocer; *Estar consciente de…*, consiste en verificar si el estudiante le da sentido a lo que quiere conocer, y precisa el conocimiento de lo que ya conoce, y la *Actitud* como la disposición que éste muestra de que quiere aprender. La segunda teoría (Duval, 1999, 2003, 2006) se basa en dos conceptos: *Semiosis*, como la aprehensión o producción de representaciones semióticas, proceso mediante el cual el estudiante exterioriza sus representaciones mentales (lenguaje natural, fórmulas algebraicas, figuras geométricas, entre otros), y *Noesis*, actos cognitivos que llevan al aprendizaje de un objeto.

Tabla 1

Conceptos en los que confluyen las dos teorías con las que analizamos los datos.

Conceptos con los que son analizados los datos	Cambio de atención (Mason, 2008)	*Representaciones* (Duval, 1999,2003, 2006)
i) Asociación de objetos	Razonamiento sobre un objeto de estudio en varias representaciones	Varias representaciones de un objeto
ii) Posición cognitiva	Cambio de consciencia implícita a explícita	"Visualizar el objeto"
iii) El estudiante le da sentido	Atención, Estar consciente de…,	Paso de un registro a otro

a lo que quiere conocer	y Actitud	

En nuestro estudio analizamos los datos al considerar los siguientes tres conceptos donde confluyen estas dos teorías: (i) *Asociación de objetos*, éste contempla el hecho de que el aprendizaje de conceptos matemáticos puede mostrarse por varias representaciones; (ii) *Posición cognitiva*, ocurre cuando se evidencia el cambio de conciencia de *implícita* a una *explicita* (Mason, 2008); esto es, cuando el estudiante puede "visualizar el objeto" (Duval, 2003) y manejar de forma consciente los objetos de estudio como un todo; (iii) *El estudiante le da sentido a lo que quiere conocer*, esto se evidencia en el estudiante cuando tiene dominio de los conceptos *Atención*, *Estar consciente de…* y *Actitud* (Mason, 2008), y puede probar el paso de un registro a otro (Duval, 2003) del objeto matemático de estudio. La Tabla 1 resume las dos teorías que conforman nuestro marco conceptual (segunda y tercera columna) e incluye los conceptos con los que analizamos los datos (primera columna).

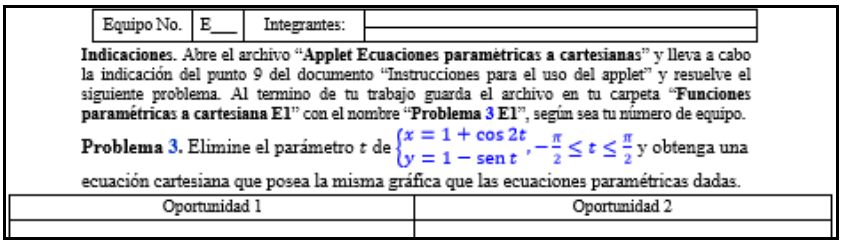
Metodología

Participantes

Los estudiantes que participaron en la investigación tenían entre 19 y 25 años de edad, pertenecían a un grupo (completo) de cálculo vectorial de un instituto tecnológico de la Ciudad de México que, al momento de la toma de datos cursaban esta asignatura. Ellos fueron agrupados en equipos de dos y tres integrantes y contaban con una computadora con el software instalado, el applet con sus indicaciones para su uso, así como sus problemas en papel.

Diseño e implementación de los instrumentos usados en el acopio de datos

Los problemas y el applet fueron diseñados por uno de los investigadores que reportan el presente artículo y llevadas a cabo por él mismo. Estos ejercicios son similares a los clásicos de los libros de texto, que con frecuencia no son discutidos con profundidad en el aula. La implementación de los problemas propuestos se llevó cabo en el salón de clases el cual se improvisó como un aula de cómputo, para ello hubo cinco sesiones, una por cada problema, con duración aproximada de una hora cada una. Previo a la solución del primer problema, los estudiantes recibieron un breve entrenamiento del uso del applet y después actuaron de forma autónoma (por equipos) para resolver los problemas propuestos. Por limitaciones de espacio, en este artículo, sólo reportamos los datos provenientes de tres equipos y tres problemas.



Equipo No.	E___	Integrantes:	

Indicaciones. Abre el archivo "**Applet Ecuaciones paramétricas a cartesianas**" y lleva a cabo la indicación del punto 9 del documento "Instrucciones para el uso del applet" y resuelve el siguiente problema. Al termino de tu trabajo guarda el archivo en tu carpeta "**Funciones paramétricas a cartesiana E1**" con el nombre "**Problema 3 E1**", según sea tu número de equipo.

Problema 3. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = 1 + \cos 2t \\ y = 1 - \operatorname{sen} t \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

Oportunidad 1	Oportunidad 2

Figura 1. Diseño con papel y lápiz del Problema 3.

Diseño de los problemas en papel y lápiz. Los problemas que resolvieron los estudiantes fueron del siguiente tipo: Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, con $t \in I$ y obtenga la ecuación cartesiana correspondiente (véase Figura 1). Los estudiantes debían eliminar el parámetro t y determinar una ecuación cartesiana del tipo $F(x, y) = 0$, la cual debían graficar (en el applet) para revisar si era recta, parábola, circunferencia, hipérbola, etc. Se les dio a los alumnos dos

oportunidades; por ejemplo, si en la Oportunidad 1 la gráfica en el applet de ecuaciones paramétricas no era la misma en el dominio $t \in I$ que la ecuación cartesiana calculada por ellos, entonces debían identificar el (los) error(es) –algebraicos– con una marca roja en su trabajo, y con ello(s) reflexionar sobre éste(os) para que en la Oportunidad 2 volvieran a intentar su desarrollo de forma correcta.

Diseño del applet. La Figura 2 muestra las características del applet que fue proporcionado a los estudiantes para la solución de un problema que implicaba transformar las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 + \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos 2t \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ en la ecuación cartesiana $2x^2 - 4x - y + 2 = 0$.

En $t_i=$ y $t_f=$ (véase Figura 2) el estudiante debía capturar los valores inicial y final del parámetro t, respectivamente; después, tenían que introducir las ecuaciones paramétricas en las casillas de entrada x(t)= y y(t)=. En seguida se le solicitaba simplificar su desarrollo algebraico en papel y lápiz. En Ecuación cartesiana el estudiante debía capturar la ecuación cartesiana obtenida, así como el nombre de la gráfica en Nombre Ecuación cartesiana. El deslizador se requería para el trazo de los puntos generados por las ecuaciones paramétricas para diferentes valores de t (en este problema $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) y la casilla de control Ecuación cartesiana para activar o desactivar la gráfica de la ecuación cartesiana.

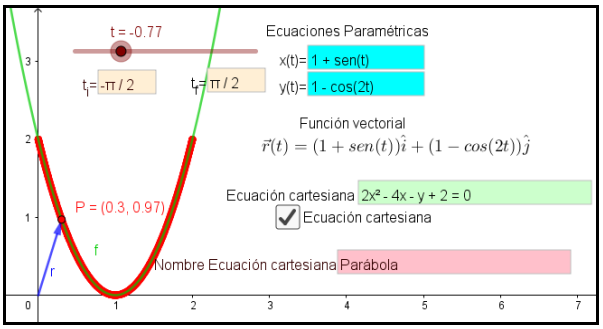


Figura 2. Diseño del applet, solución del Problema 3.

Análisis de datos y discusión de resultados

En este artículo analizamos los datos obtenidos a partir del trabajo de tres equipos de estudiantes (en adelante E1, E7 y E9) al resolver tres problemas.

Análisis y discusión de resultados del:

Problema 1. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = 3t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, -2 \leq t \leq 2$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

La Figura 3 muestra el desarrollo algebraico con papel y lápiz de la solución propuesta por E1. En ésta se observa cómo, en la Oportunidad 1, los estudiantes señalaron con tinta roja el error ($\sqrt{y+1} = y^{1/2} + 1$) producto de reflexionar (mediado por el trabajo que hicieron en el applet) que la ecuación cartesiana que ellos calcularon: $x - 3y^{1/2} + 1 = 0$, no era correcta ya que la gráfica de la curva de las ecuaciones paramétricas no resultó la misma que la gráfica de la ecuación cartesiana calculada; sin embargo, en la Oportunidad 2 llevaron a buen término la solución del trabajo (los estudiantes le dieron sentido a lo que querían conocer, Mason 2008; Duval, 1999, 2003, 2006).

En general, los estudiantes no tuvieron dificultades para encontrar una ecuación cuya gráfica

coincidiera con la gráfica esperada en el dominio $-2 \leq t \leq 2$ como solución del problema 1. Sin embargo, algo importante que hay que enfatizar es que cambiaron su procedimiento y, por lo tanto, manejo algebraico para evitar el radical obtenido en la Oportunidad 1: $\sqrt{y+1} = y^{1/2} + 1$. Es decir, antes de despejar t a partir de la ecuación $y = t^2 - 1$, sustituyeron en esta ecuación: $t = \frac{x}{3}$ (Oportunidad 2).

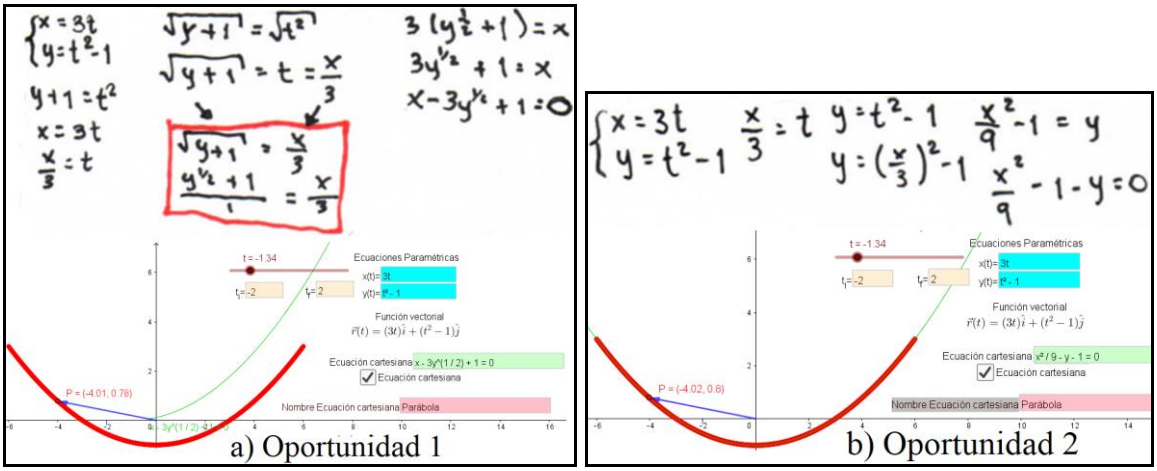


Figura 3. En a) E1 cometió errores de simplificación algebraica en el Problema 1 que corrigió en b).

Análisis y discusión de resultados del:

Problema 2. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = t^3 + 2 \\ y = t^2 + 3 \end{cases}, 0 \leq t \leq 2$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

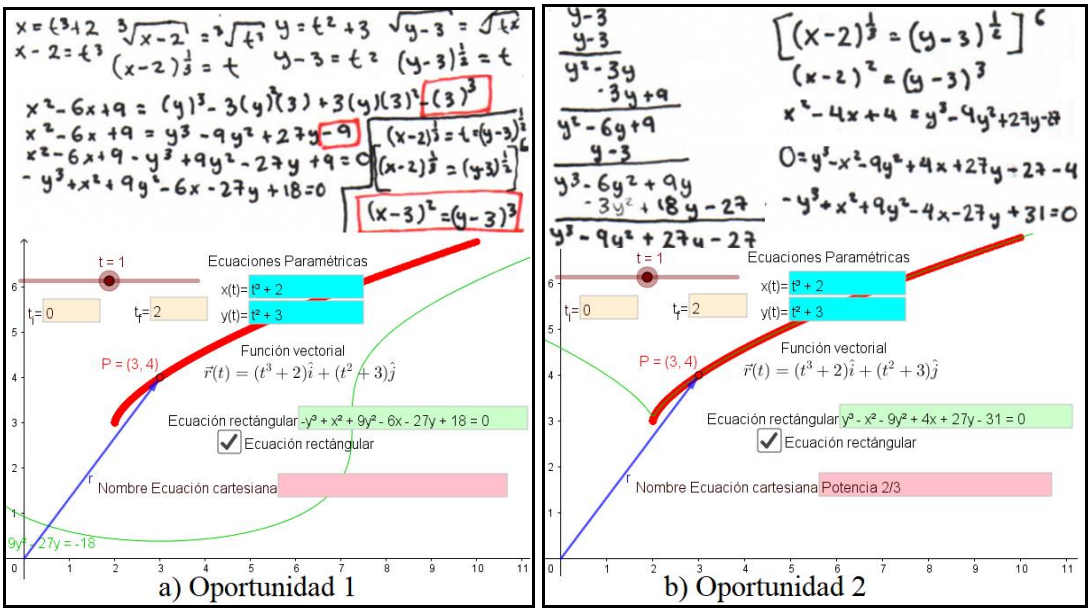


Figura 4. En a) E7 cometió errores de simplificación algebraica en el Problema 2 que corrigió en b).

Este problema puso a prueba el conocimiento de los estudiantes con respecto al desarrollo de un binomio al cuadrado y un binomio al cubo. Muy pocos equipos mostraron dificultades para desarrollar el binomio al cuadrado, no así en el binomio al cubo. La Figura 4 muestra la solución del equipo E7 de este problema. Los integrantes de este equipo desarrollaron de forma correcta la

expresión $(y-3)^3$, pero una falta de atención (Mason, 2008) promovió el error al suponer $3^3 = 9$. Este error es común observarlo en el salón de clases, quizás se debe a que los estudiantes operan 3^3 como si fuera 3×3. Esto lo corrigieron en la Oportunidad 2, y desarrollaron el binomio al cubo como $(y-3)(y-3)(y-3)$ (los estudiantes le dieron sentido a lo que querían conocer, Mason 2008; Duval, 1999, 2003, 2006). Un error similar cometió E1 al fallar en el signo que acompaña al tercer término de $(y-3)^3 = y^3 - 9y^2 - 27y - 27$. E1 lo corrigió en la Oportunidad 2.

Análisis y discusión de resultados del:

Problema 3. Elimine el parámetro t de $\begin{cases} x = 1 + \cos 2t \\ y = 1 - \operatorname{sen} t \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y obtenga una ecuación cartesiana que posea la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas dadas.

El problema 3 puso a prueba el conocimiento de los estudiantes en el uso de identidades trigonométricas. La Figura 5 muestra el trabajo algebraico que desarrolló E7. En esta figura se observa cómo la mediación del applet conduce a los estudiantes a la búsqueda de errores algebraicos (véanse rectángulo en color rojo); en efecto, los integrantes del equipo E7 reflexionaron en torno a su error al suponer que $\frac{1}{2}\cos 2t = \cos t$ (véase Figura 5a)[2]. Sin embargo, en la Figura 5b) aplican de forma correcta la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$ (los estudiantes le dieron sentido a lo que querían conocer, Mason 2008; Duval, 1999, 2003, 2006).

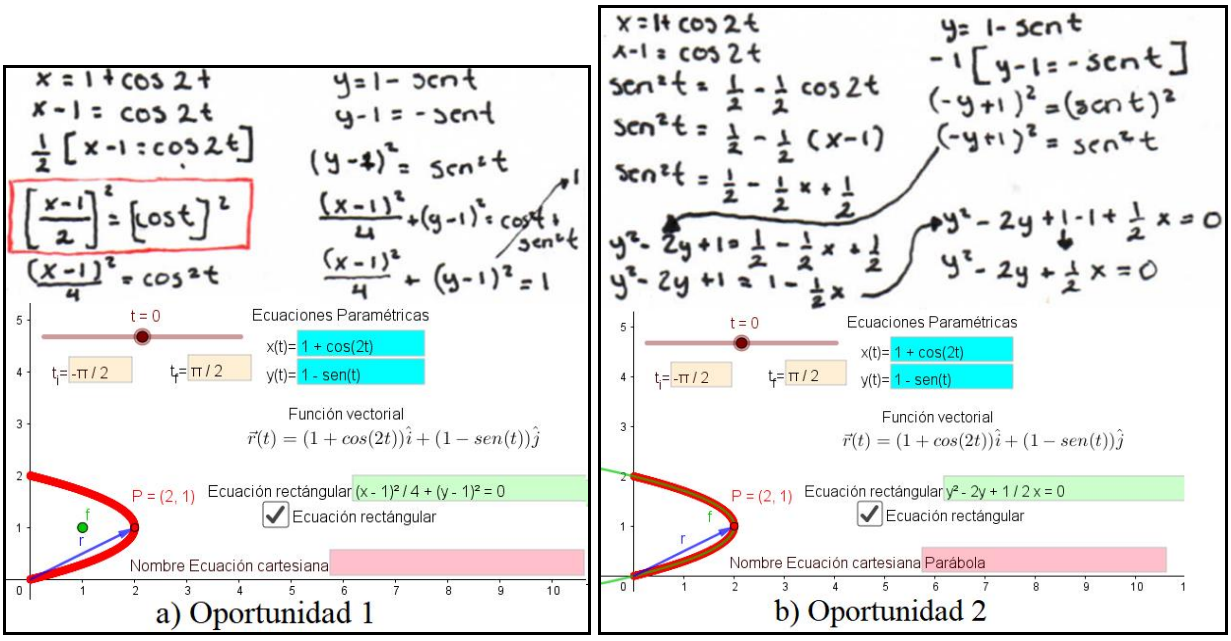


Figura 5. En a) E7 cometió errores de simplificación algebraica en el Problema 3 que corrigió en b).

Finalizamos el análisis de datos con la presentación de opiniones de los estudiantes (Tabla 2), a sendas preguntas relacionadas con la solución de los problemas aquí expuestos (con papel y lápiz) y con el applet. Utilizamos los tres conceptos donde confluyen las dos teorías utilizadas para analizar los datos (columna 3) para caracterizar las opiniones y relacionarlas con su aprendizaje de cálculo

[2] Es importante señalar que el "2" en el argumento de $\cos 2t$ también fue motivo de error en los procedimientos de otros equipos; por ejemplo, E9 obtiene $(-2y+2)^2 = \operatorname{Scn}^2 2t$ de $y - 1 = -\operatorname{scn} t$. (falta de Posición cognitiva, Mason, 2008; Duval, 1999, 2003, 2006).

vectorial en el tema de *Ecuaciones paramétricas de algunas curvas planas y su representación gráfica*.

Tabla 2

Comentarios de los estudiantes en relación con la solución de los problemas de la investigación.

Durante la aplicación del *applet* tuviste la necesidad de contestar en la Oportunidad 2, escribe –en el espacio– ¿cuáles fueron tus errores algebraicos y cómo los corregiste?		
1	Los errores mas comunes fueron los signos, tambien la forma del despeje de las incognitas, fueron corregidos mediante la observación de la applet ya que esta no coincidia. En ocaciones tuvimos que volver a realizar el procedimiento.	Asociación de objetos y Posición cognitiva
7	Si tuve que utilizarlo, ya que en algunos problemas por nerviosismo colocaban números que no eran, pero me tranquilizaba y sabia mis errores (excepto en la 3, esa si me costó)	El estudiante le dio sentido a lo que quería conocer
9	Bueno lo fuimos corrigiendo como íbamos ingresando los valores a la applet. Conforme fuimos viendo nuestros errores íbamos corrigiendo.	Asociación de objetos y Posición cognitiva
¿Recomendarías el applet a otros estudiantes para simplificar ecuaciones cartesianas a partir de ecuaciones paramétricas? ¿Por qué?		
1	Claro que si, es una manera práctica de encontrar errores algebraicos e inmediatamente encontrar el error.	Posición cognitiva
7	Es una app. que te facilita el entendimiento de tus operaciones, visualizando de que se trata pues no es una ecuación nada más, sino que te muestra como se comporta la función. "Recomendada"	Posición cognitiva
9	Si porque te funciona mucho para ver cuales son tus errores al momento de ingresar los valores a la computadora.	Posición cognitiva

Conclusiones

El análisis de los datos que mostramos, nos permite dar respuesta parcial a la pregunta: ¿De qué manera un ambiente dinámico (e.g., GeoGebra) promueve reflexión en el estudiante en torno a errores algebraicos cometidos al transformar ecuaciones paramétricas en la ecuación cartesiana correspondiente? Aunque en este documento reportamos resultados de tres equipos de estudiantes en los cuales se observa que ellos reflexionaron y profundizaron en temas relacionados con álgebra básica –ello con la mediación de la tecnología (e.g., GeoGebra)–, es importante resaltar que otros equipos no lograron sobrepasar estas dificultades, quizá debido a un menor manejo sintáctico del álgebra el cual no les permitió reflexionar para resolver de forma adecuada los problemas mostrados en este documento. Es decir, con "menor manejo sintáctico del álgebra", en este artículo nos referimos a que los estudiantes, aun cuando están en el nivel universitario, parece que no han logrado tener un buen manejo del uso de exponentes y radicales (ver procedimiento de solución al Problema 1 en Figura 3a), se equivocan en las operaciones que implican símbolos *más* y *menos* (ver procedimiento en Figura 4a) y no comprenden, ni pueden utilizar las identidades trigonométricas (ver procedimiento en Figura 5a). Esto hace importante que se sugiera el impulso de más propuestas como ésta donde el uso de distintas representaciones –apoyadas con tecnología– permiten a los estudiantes dar sentido a ejercicios que en los libros de

texto se orientan únicamente hacia lo simbólico.

A partir de los resultados que aquí presentamos consideramos que el uso de tecnología puede servir como mediador para que los estudiantes logren reflexionar sobre sus errores (y después corregirlos) en los procesos algebraicos para pasar de ecuaciones paramétricas a ecuaciones cartesianas; siempre que se tome en cuenta el ambiente de papel y lápiz. GeoGebra permite, además, que el profesor pueda poner a discusión aspectos que quizá en lápiz y papel no ocurrirían, como (en este caso) la discusión en torno a la construcción de una gráfica con dominio y rango diferente al mostrado.

Referencias y bibliografía

Carry, L. R., Lewis, C. & Bernard, J. E. (1980). *Psychology of equation solving: An information processing study* (ERIC No. ED186243). Austin: The University of Texas at Austin. Recuperado de http://www.eric.ed.gov el 16 de diciembre de 2009 de la base de datos Education Resources Information Center.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* [Trad. Vega, M., del francés al español]. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En E. Filloy (Coord.), *Matemática Educativa: aspectos de investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103–131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

García, R. M. L., Benitez, P. A. A. & López, B. A. (2015). Apoyando el aprendizaje de las funciones vectoriales desde múltiples representaciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II): 373-385.

Guzmán & Zambrano (2014). Influencia de dos ambientes: el tecnológico y el de papel-y-lápiz en el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal. *VI Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática*, Memoria del SNTCEAM, 2012, Capítulo 22 libro electrónico "Tecnología Computacional en la Enseñanza de las Matemáticas" ISNB: 978-607-27-0301-8, Monterrey, N.L.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 21-34). New York: Kluwer Academic.

Kirshner, D. & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(4), 224-257.

Marquis, J. (1988). Common mistakes in algebra. En A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-34). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners: attention, awareness and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. En T. Wood & B. Jaworski (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Vol. 4. The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 31–56). Rotterdam, Holanda: Sense Publisher.

Moncada, Ochoa, López, Espín & Gómez (2016). Laboratorio de cálculo vectorial usando GeoGebra. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol IV. No. 1.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18* (1), 3-14.

Payne, S. J. & Squibb H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive accounts of error. *Cognitive Science: A Multidisciplinary Journal*, *14*, 445-481.



Construcción de ecuaciones de rectas y planos en R3 en laboratorio interactivo con GeoGebra y plataforma Moodle

Antonio **Rivero** Alexanderson
Escuela de Ciencias, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
República Dominicana
arivero@pucmm.edu.do

Resumen

En el presente artículo mostramos que el uso del laboratorio interactivo con GeoGebra y la plataforma Moodle contribuye al aprendizaje de conceptos y ecuaciones de rectas y planos en R3. En el estudio participaron 9 estudiantes de nivel superior, del curso de álgebra lineal para ingenieros. La investigación se apoyó en la teoría de Representaciones de Duval (2006) y del uso de ambientes dinámicos de Soto y Romero (2011) para favorecer el aprendizaje. La metodología consistió en diseñar una sesión práctica interactiva que intercala el trabajo en GeoGebra con preguntas y reflexiones en la plataforma Moodle, tutorizadas por el docente. Los resultados indican que el uso de la tecnología facilita la relación entre la representación visual y la algebraica de los objetos matemáticos y que la plataforma interactiva permite registrar las actividades de los estudiantes para su valoración.

Palabras clave: álgebra lineal, GeoGebra, Moodle, laboratorio.

Introducción

La enseñanza de la matemática a nivel superior presenta sus propios retos, sobre todo en los primeros años de la formación universitaria, entre los cuales está una población estudiantil con diferentes niveles de dominio de los saberes previos, diversos estilos de pensamiento, intereses y grado de madurez, entre otros. Estas consideraciones tienen como efecto que el que el rango de logros de aprendizaje en los estudiantes de matemática de nivel universitario de los primeros años sea bastante amplio en cuanto a las competencias desarrolladas y su nivel de dominio.

En este contexto, los cursos de álgebra lineal introductoria, que suelen impartirse en el primero o segundo año de una carrera universitaria de ingeniería, presentan los retos adicionales de que muchos estudiantes no tienen experiencia con el desarrollo de conceptos abstractos, los cuales se construyen generalmente a través de definiciones y análisis de propiedades. Ejemplos de esto en álgebra lineal son los conceptos de espacio vectorial, base, función vectorial y transformación lineal, entre otros. Los estudiantes de ingeniería deben comprender y aplicar correctamente los conceptos de álgebra lineal y de cálculo para abordar exitosamente las asignaturas de las ciencias.

Para ayudar al estudiante a construir los conceptos abstractos del álgebra lineal, Duval (2006) señala que el uso de múltiples representaciones de un objeto y el cambio de una a otra favorece su comprensión. De esta manera, el uso de representaciones geométricas en el álgebra lineal permite un acercamiento más concreto e intuitivo al estudio y análisis de las propiedades de dichos objetos.

Por otra parte, una de las metas en la educación del siglo XXI es la inclusión de las tecnologías de información y comunicación en el apoyo a la educación. En la misma línea, el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos, NCTM en inglés, establece en sus Estándares (2000) que el uso de herramientas tecnológicas adecuadas favorece el análisis, el razonamiento y la resolución de problemas.

Por tanto, se observa una inclusión paulatina de las tecnologías en la educación matemática. Ante esto, surge la interrogante: ¿Cuáles aspectos debe tomarse en cuenta para que el uso de dichas tecnologías favorezca el aprendizaje de los estudiantes en el área matemática?

De acuerdo con Artigue (2011), las herramientas tecnológicas modelan no sólo los conocimientos y saberes que producen, sino los procesos de aprendizaje y sus formas. Además, la tecnología debe responder a tres funciones: una pragmática, que permite actuar sobre el mundo real; otra epistémica, que contribuye a la comprensión del objeto y otra heurística, que organiza nuestras acciones para aprender. De esta manera, el uso que se da al recurso tecnológico debe ser integral, más allá del aspecto ilustrativo.

Los investigadores Soto y Romero (2011) estudiaron el uso de ambientes dinámicos para favorecer el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal sus resultados muestran que el software para construcciones geométricas dinámicas, como es GeoGebra, ayuda al aprendizaje de las propiedades y características de los objetos del álgebra lineal.

En la misma línea, Sánchez Rosal (2012) presenta resultados favorables de aprendizaje al incluir las tecnologías informáticas en la educación matemática. Y concluye que el estudiante debe tener la facilidad de *explorar* y *hacer conjeturas*, para desarrollar las capacidades reflexivas propias del pensamiento matemático. Comenta también que es importante la guía del profesor en la tutorización del docente para aclarar dudas, evitar errores de interpretación y guiarlo en su proceso reflexivo.

Más recientemente, Guzmán y Zambrano (2015) mencionan en su ponencia del XIV CIAEM que las representaciones geométricas dinámicas promueven reflexiones en torno al

aprendizaje de los *conceptos previamente adquiridos con papel y lápiz*. Por tanto, la actividad en un software de matemática no debe sustituir las representaciones tradicionales sino complementarlas, para una mejor comprensión de los objetos matemáticos en estudio.

En este sentido, entendemos que el mayor impacto ocurre cuando la interacción con el software se realiza dentro de sesiones de laboratorio en la cual los estudiantes descubren al objeto y sus propiedades a través de la manipulación de diversas representaciones, especialmente la representación geométrica dinámica, bajo la tutela del docente.

Un reto importante en todo laboratorio de matemática es mantener un balance entre la intuición y el formalismo. La presente propuesta considera la incorporación de un laboratorio de matemática en un curso de álgebra lineal en el cual se abordan representaciones geométricas y cambio de representaciones de objetos matemáticos abstractos para favorecer la comprensión de sus propiedades.

Los elementos particulares de este laboratorio son el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, el diseño de sesiones de laboratorio en una plataforma digital, como es Moodle, donde se agrega actividades interactivas y preguntas específicas que motivan al estudiante al aprendizaje por experimentación. Además, se propone diseñar secuencias didácticas de trabajo práctico que promuevan la experimentación y el análisis por parte del estudiante ante situaciones presentadas con ayuda de las herramientas tecnológicas.

Metodología

La presente investigación tiene un carácter exploratorio en la cual se incluyen elementos cuantitativos y cualitativos.

Se utilizó una muestra de 9 estudiantes del curso de álgebra lineal que tenían la disposición de colaborar en el estudio para formar un grupo piloto y realizar una práctica de laboratorio, respondiendo preguntas sobre lo aprendido y recogiendo sus impresiones sobre la actividad. El investigador, quien es docente de la asignatura, elaboró una sesión práctica de laboratorio para complementar el aprendizaje de los conceptos de ecuación del plano y ecuación de la recta en R3, los cuales ya se habían desarrollado en clase teórica. Para esto se diseñó una secuencia didáctica utilizando la plataforma Moodle, que permite realizar lecciones interactivas e integrar cuestionarios junto con la lección. La parte de software de geometría interactiva se realizó en la plataforma de Grupos de GeoGebra (GeoGebra Groups) que permite generar una construcción geométrica única y asignarla individualmente a un grupo de estudiantes como una tarea en la que cada estudiante interactúa y escribe sus respuestas para ser valoradas posteriormente por el profesor. De esta manera, se ha creado una plataforma integrada para prácticas de laboratorio que permite registrar las interacciones de cada estudiante y guardar sus reflexiones y conclusiones, como si fuera un formato de tareas individuales en formato digital.

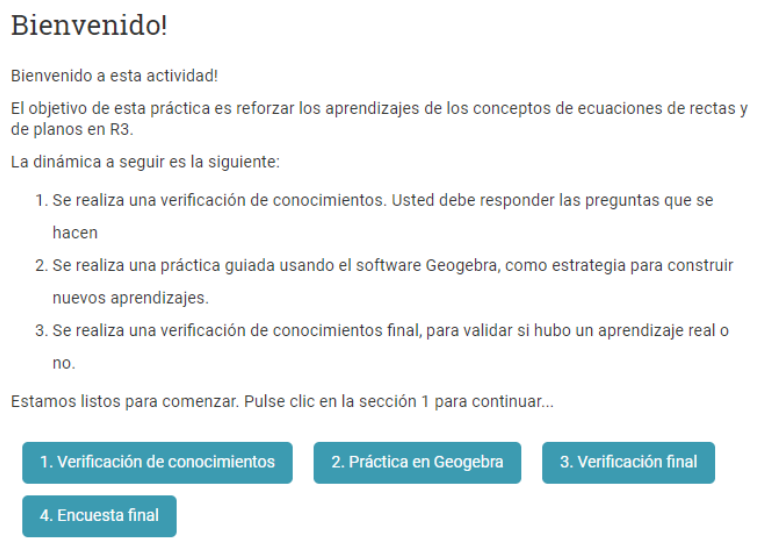


Figura 1. Pantalla de bienvenida de la sesión en la plataforma Moodle

En el diseño metodológico se consideraron cuatro momentos:

El primer momento consiste en un en una prueba diagnóstica o pre-test para ver el grado de dominio de la tarea específica a lograr, en este caso se pidió hallar ecuaciones de rectas y planos en R3 dados ciertos elementos en forma algebraica.

El segundo momento corresponde a la sesión de interacción con la plataforma GeoGebra, donde previo registro de cada participante, se presentan dos actividades desarrolladas con el software: una con una recta que es la intersección de dos planos y la otra con un plano. En este momento se presentan actividades que requieren la interacción con el software GeoGebra para responder preguntas que propician el análisis y la reflexión del estudiante. El docente ejerce un rol de tutor en esta etapa, respondiendo dudas sobre el uso de la herramienta y aclarando conceptos matemáticos. El objetivo de la interacción del docente es hacer consciente a los estudiantes de los objetos matemáticos involucrados, propiciando la relación entre la representación algebraica del objeto, que se usa en ejercicios y evaluaciones de papel y lápiz, y la representación geométrica visualizada a través del software.

El tercer momento consiste en un momento de metacognición, donde se pide al estudiante que escriba una reflexión sobre los aprendizajes que tuvo en su interacción con la plataforma GeoGebra. Posteriormente, se realiza una verificación post-test donde se le pregunta al estudiante el mismo tipo de ítems de la prueba diagnóstica para ver si hubo un aprendizaje real a partir del trabajo de laboratorio.

Finalmente, se pide una valoración cualitativa de la sesión, donde el estudiante abiertamente puede dar su opinión acerca del uso de la plataforma y la actividad realizada.

La valoración de los resultados se hizo de la siguiente manera: se hizo una tabulación de los estudiantes que lograron completar el pre-test exitosamente y se comparó con una tabulación similar de los estudiantes que lograron completar con éxito el post-test.

En la parte cualitativa, se recogieron las reflexiones de los estudiantes sobre los aprendizajes que tuvieron al usar la plataforma y se valoraron las opiniones emitidas por los estudiantes sobre la actividad. Como el estudio es de carácter exploratorio, dichos insumos servirán para diseñar sesiones prácticas posteriores en base a la retroalimentación recibida y cuya efectividad pueda medirse de manera más precisa.

Análisis de datos y discusión de resultados.

En este artículo presentaremos solamente los resultados de la primera actividad, cuyo objetivo era hallar ecuaciones de una recta en R3 a partir de una construcción geométrica. En el pre-test y post-test, se pide a cada estudiante que escriba ecuaciones simétricas de una recta que contiene dos puntos cuyas coordenadas se especifican. La Tabla 1 presenta los porcentajes de estudiantes que pudieron completar el pre-test y el post-test exitosamente. De manera general, vemos que hubo más estudiantes que respondieron correctamente a la pregunta realizada después de la sesión interactiva.

Tabla 1

Porcentajes de respuestas correctas del pre-test y post-test

	Pre-test	Post-test
Correcto	44%	67%
Incorrecto	56%	33%

Notas. Porcentajes en base a un total de nueve estudiantes.

El trabajo en GeoGebra comenzó con unas preguntas definidas en la plataforma Moodle para que cada estudiante respondiera a partir de su interacción con la construcción geométrica. En el caso de la recta en R3, una actividad pedía digitar unas ecuaciones en forma simétrica dadas para identificar la representación geométrica del conjunto solución. Posteriormente, se pidió hallar y representar un vector de dirección de la recta graficada. Finalmente, se solicitó definir gráficamente dos puntos sobre la recta, distintos a los marcados inicialmente, para hallar un vector de dirección entre los puntos y escribir otras ecuaciones simétricas de la misma recta.

Al analizar los resultados con más detalle, vimos que todos los estudiantes que realizaron el pre-test exitosamente hicieron el trabajo en GeoGebra sin mayor dificultad y completaron el post-test también con éxito. Sin embargo, destacamos el trabajo realizado por dos estudiantes, quienes estaban confundidos en el pre-test y escribieron una ecuación de un plano, en lugar de

ecuaciones de una recta. Durante el trabajo interactivo, pudieron darse cuenta de su error y en el post-test, estos estudiantes no tuvieron dificultad en escribir, ahora sí, ecuaciones de una recta.

En el momento del trabajo interactivo con GeoGebra, el docente leía en voz alta las preguntas propuestas en la actividad, esperaba a que los estudiantes interactuaran con el software y buscaran una respuesta, luego pedía turnos para responder. Si nadie participaba, buscaba orientar a través de otras preguntas. La interacción del docente ayudaba a reforzar los conceptos, preguntando, por ejemplo: ¿Cómo es un vector normal a un plano? Las respuestas verbales de los estudiantes a las preguntas no fueron registradas, pero sí hay una copia de la construcción geométrica hecha por cada estudiante y de sus respuestas escritas que el docente pudo verificar gracias a la plataforma GeoGebra Groups.

También pudimos observar que los estudiantes que tuvieron dificultades con el uso del software GeoGebra y no tuvieron oportunidad de responder sus dudas con el docente durante la sesión interactiva, no pudieron completar las tareas solicitadas y tuvieron dificultades en el post-test. Los resultados anteriores indican que es favorable contar con la guía del docente durante la sesión de laboratorio interactivo.

Por último, en la valoración cualitativa de los estudiantes sobre la actividad realizada, el 100% de los estudiantes encuestados respondieron que deseaban que este tipo de actividades se incluyera en las demás sesiones del curso de álgebra lineal. En la figura 2 se muestra algunas respuestas escritas de los estudiantes sobre sus aprendizajes.

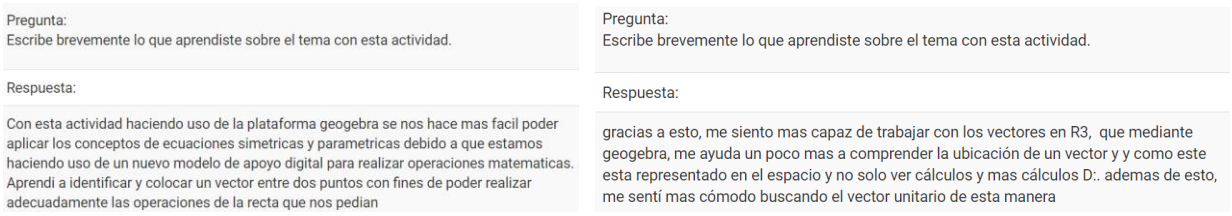


Figura 2. Respuestas de estudiantes sobre los aprendizajes que tuvieron con la actividad.

Cuando se les preguntó sobre lo que habían aprendido, las respuestas escritas a modo de ensayo libre fueron variadas, pero muchas evidenciaron la *visualización* de objetos y sus propiedades, tales como observar que un vector de dirección es paralelo a la recta; o un proceso, como el de definir un vector entre dos puntos, entre otros. De esta manera, los estudiantes valoraron la importancia de trabajar con representaciones visuales para facilitar su comprensión.

Conclusiones

En base al análisis realizado de los datos disponibles podemos ver que efectivamente el uso de diferentes representaciones de un objeto facilita su comprensión.

También, que la interacción dinámica con representaciones geométricas a través del software GeoGebra ayuda a que los estudiantes comprendan cuáles son los objetos involucrados y puedan relacionarlos más fácilmente con las representaciones algebraicas de los mismos.

Finalmente, hemos visto que la integración de recursos tecnológicos para la educación matemática en formato de laboratorio permite mayor interacción y propicia el aprendizaje. El uso de las plataformas Moodle y GeoGebra Groups permite dejar registro escrito de la actividad de cada estudiante para una posterior valoración cualitativa o cuantitativa. La interacción con el docente para responder dudas sobre el uso de la herramienta tecnológica o aclarando conceptos matemáticos favoreció el logro de los aprendizajes esperados.

En base a estos resultados, recomendamos incluir sesiones prácticas de laboratorio en las asignaturas de matemática que lo requieran y en base a la retroalimentación de los estudiantes y el efecto en sus aprendizajes, seguir diseñando mejores sesiones de laboratorio que contribuyan a su aprendizaje.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Año 6. Número 8. (pp 13-33). Costa Rica: Universidad de Costa Rica. ISSN Impreso: 1659-2573

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Guzmán, J., Zambrano, J. (2015). Base de un espacio vectorial de R^n y tecnología. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Recuperado de: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/884

Kolman, B., Hill, D. (2006). Álgebra lineal. México: Pearson Educación. ISBN: 970-26-0696-9

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Sánchez, A. (2012). Incorporación de las TIC en el aprendizaje de la matemática en el sector universitario. *Revista de Educación Matemática, 27(3)*. (pp 23-38). Argentina: Universidad Nacional de Córdoba. ISSN: 0326-8780

Soto, J. L. & Romero, F. C. (2011). El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión gráfico-algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Canadá: Loze-Dion. ISBN: 978-2-9235- 6554-5

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estrategias en el aula de matemáticas según los estilos de aprendizaje

Luis Moctezuma **Cervantes** Espinoza
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México
luigim2002@gmail.com
Jazmín Adriana **Juárez** Ramírez
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México
jjuarezr@ipn.mx
Ricardo **Ceballos** Sebastián
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México
ceballos1@hotmail.com

Introducción

Algunas investigaciones confirmaron los efectos de los estilos de aprendizaje sobre el rendimiento académico (Balakrishnan & Gan, 2016; Felder & Henriques, 1995). El concepto de estilo de aprendizaje se originó a partir de los estilos cognitivos, que identificó la diversidad de las características cognitivas individuales; mientras que, los académicos han atribuido las diferencias individuales en la educación superior a los estilos de aprendizaje (González, Mendoza-González, Rodríguez-Martínez y Rodríguez-Díaz, 2016). Para lograr una mayor eficacia en el aprendizaje, los profesores no deben asumir que todos los estudiantes tienen una forma idéntica de aprender, sino que deben preparar una instrucción que se adapte a las diferentes preferencias o demandas de sus estudiantes (Hawk & Shah, 2007).

En ese sentido, el bajo rendimiento de los estudiantes en matemáticas no se debe atribuir solamente al carácter abstracto de las matemáticas, sino también a las prácticas de empleadas en el aula (Santaolalla, 2009). El éxito de las estrategias didácticas estará garantizado si se respeta la diversidad en los modos de aprender de sus estudiantes (Aguilera & Ortiz, 2010). Estudiar los estilos de aprendizaje para proponer actividades en el aula de matemáticas, permitiría desarrollar aquellos estilos en los que se tenga cierto grado de dificultad o carencia, y así proporcionar una guía práctica básica que facilite el camino de los profesores (Gallego & Nevot, 2008).

Analizar la manera en que los alumnos aprenden es fundamental para poder tomar decisiones, planificar actividades, recursos y evaluar, entre estas la acción tutorial que tiene indudables efectos en el logro institucional de elevar la calidad y eficiencia terminal de los estudiantes del nivel superior. Este trabajo tuvo como objetivo analizar los estilos de

aprendizaje de los estudiantes del primer año de ingeniería en Sistemas Computacionales, con el fin de diseñar estrategias efectivas en el curso de ecuaciones diferenciales que atiendan a las necesidades de los alumnos. El estilo de aprendizaje de tipo *Divergente*, es el que predominó en la población estudiada, con menor porcentaje se encontró que la muestra posee el estilo de aprendizaje *Adaptador*. Una vez reconocidas las características de aprendizaje de la población, se pueden sugerir estrategias de enseñanza-aprendizaje en los cursos de matemáticas, que permitan potencializar el desarrollo de los estudiantes.

Desarrollo de la experiencia

La experiencia se realizó en el desarrollo del semestre escolar 2016/2017-2, en la Escuela Superior de Cómputo (ESCOM-IPN). En este estudio, participaron 103 estudiantes inscritos en el segundo semestre de la carrera en Ingeniería en Sistemas Computacionales (16 mujeres, 15%, y 87 hombres, 85%). La edad promedio de los participantes fue de 19.4 años, y el promedio de calificaciones en las asignaturas cursadas fue de 8.1.

En este caso se seleccionó como instrumento para recolectar la información, el test de estilos de aprendizaje de Kolb (García, Santizo, & Alonso, 2009). Se pidió a los estudiantes que proporcionaran su edad, promedio de calificaciones y género. Las respuestas se transcribieron, se organizaron y se analizaron con el software Microsoft Excel. Se aplicó estadística descriptiva para determinar los porcentajes de cada estilo de aprendizaje presente en la muestra de estudio.

Resultados

Se observó que más de la tercera parte de los estudiantes de la muestra de estudio (36%) presentaron el estilo de aprendizaje *Adaptador*. Se desempeñan mejor en la experiencia concreta (EC) y la experimentación activa (EA). Hay que resaltar que solamente 3 estudiantes (3%), mostraron en sus respuestas tener un estilo de aprendizaje *Convergente***.** Su punto más fuerte reside en la aplicación práctica de las ideas. Sin embargo de acuerdo a los resultados, el estilo de aprendizaje que predomina es el *Divergente* (52%). El estilo de aprendizaje divergente se caracteriza por un buen desempeño en actividades concretas y observación reflexiva; una de las fortalezas de esta tipificación es la capacidad imaginativa

Conclusiones

Llama la atención que los estudiantes solamente presentan en su mayoría los estilos de aprendizaje *Adaptador* y *Divergente*. Esto señala una serie de preferencias que deberían reconocerse e implementarse por el profesor en su práctica docente. Estos alumnos se sienten cómodos en aquellos entornos que establecen situaciones que impliquen hechos determinados. Tanto los estudiantes con estilo *Adaptador* como los de estilo *Divergente* prefieren la experiencia concreta respecto de la conceptualización como medio para aplicar su conocimiento. Debido a que los alumnos del estilo *Divergente* tienen un mejor aprovechamiento del aprendizaje cuando pueden realizar observaciones y analizar la situación, cuando pueden pensar antes de actuar, las actividades que deben propiciarse son los diarios de clase, los cuestionarios de autoevaluación, los registros de actividades y actividades que impliquen búsqueda de información.

Referencias y bibliografía

Aguilera, P. E., & Ortiz, T. E. (2010). La caracterización de perfiles de estilos de aprendizaje en la educación superior, una visión integradora. *Revista Estilos de Aprendizaje*, *5*, 3.

Balakrishnan, V., & Gan, C. L. (2016). Students' learning styles and their effects on the use of social media technology for learning. *Telematics and Informatics*, *33*(3), 808-821.

Felder, R. M., & Henriques, E. R. (1995). Learning and teaching styles in foreign and second language education. *Foreign Language Annals*, *28*(1), 21-31.

Gallego, D., & Nevot, A. (2008). Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, *19*(1), 95-112.

García, J., Santizo, J., & Alonso C. (2009). Instrumentos de medición de estilos de aprendizaje. *Revista Estilos de Aprendizaje*, *4*(4), 1-23.

González, S. J., Mendoza-González, R., Rodríguez-Martínez, L. C., & Rodríguez-Díaz, M. (2016). MOOCs and multiple learning styles. *User-Centered Design Strategies for Massive Open Online Courses* (MOOCs), 30.

Hawk, T. F., & Shah, A. J. (2007). Using learning style instruments to enhance Student learning. *Decision Sciences Journal of Innovative Education*, *5*(1), 1-19.

Santaolalla, E. (2009). Matemáticas y estilos de aprendizaje. *Revista Estilos de Aprendizaje*, *4*(4), 1-17.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Propuesta didáctica para un curso de matemáticas discretas

Jazmín **Juárez** Ramírez
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México
jjuarezr@ipn.mx
José María **Chamoso** Sánchez
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es
Araceli **Queiruga** Dios
Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Salamanca
España
queirugadios@usal.es

Introducción

Una de las razones para utilizar juegos en el aula de matemáticas se debe a que son actividades atractivas y aceptadas fácilmente por los estudiantes, reconociéndolas como elementos de su realidad que les permiten desarrollar un carácter competitivo (Chamoso, Durán, García, Martín & Rodríguez, 2004). El juego como recurso didáctico puede utilizarse para una multitud de contenidos, para desarrollar estrategias de resolución de problemas y además puede incidir en la visión de los estudiantes acerca de las matemáticas (Deulofeu, 2006). El juego didáctico se puede usar en cualquier nivel o modalidad de escolaridad, sin embargo, en las aulas universitarias se utiliza escasamente debido a la falta de conocimiento de sus múltiples ventajas. Algunos investigadores han utilizado aspectos relativos a la teoría de grafos como juegos educativos en matemáticas y han concluido que su empleo aumenta considerablemente el factor motivador de la actividad facilitando la introducción y asimilación de conceptos sensiblemente mejor que con el modo habitual (Martín, Muñoz, & Oller, 2009). Sin embargo, existe limitada evidencia del uso de juegos en el aprendizaje de conceptos de matemáticas discretas. En este trabajo se propone el diseño de una estrategia didáctica en un curso de matemáticas discretas para ingenieros en la Escuela Superior de Cómputo (en la Ciudad de México), con el objetivo de aplicar la teoría de grafos a problema reales mediante la aplicación de juegos.

Propuesta

Considerando que en el desarrollo de la asignatura matemáticas discretas se propone la participación del alumno en clase en actividades individuales y por equipo, con el fin de fomentar la socialización, organización e integración al trabajo colectivo, y la realización de

actividades que fomenten el aprendizaje colectivo, se diseñó una estrategia didáctica considerando los componentes necesarios de acuerdo al modelo de Feo (2010):

- Contexto: Grupo de estudiantes del primer año de ingeniería en sistemas computacionales
- Duración: 3 sesiones en el aula (4.5 hrs.).
- Objetivos y/o Competencias: Aplicar la teoría de grafos a un problema real.
- Sustentación Teórica: El juego didáctico se define como el modelo simbólico mediante el cual es posible contribuir a la formación del pensamiento teórico y práctico de los estudiantes.
- Contenidos: Definición de grafo, Elementos de un grafo, Tipos de grafos.
- Secuencia didáctica: Presentación, Desarrollo y Cierre.
- Recursos y medios: Libro de texto (Epp, 2012), proyector de imágenes, computadora portátil, tablero de madera, tachuelas o chinchetas, hilo, lápices de colores.
- Estrategias de evaluación: Instrumentos cualitativos (rúbricas, listas de cotejo) para evaluar trabajo escrito, trabajo práctico y exposición en el aula.

Reflexiones finales

Ya que la efectividad de las estrategias didácticas depende de su relación con los objetivos que se pretendan alcanzar, así como con los contenidos matemáticos a desarrollar (Diaz-Barriga & Hernández, 2010), se espera que esta propuesta pueda resultar útil para promover el aprendizaje de la teoría de grafos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que los juegos como cualquier instrumento debe incorporarse al aula de un modo planificado que tenga en cuenta todos los factores del proceso de enseñanza- aprendizaje (Chamoso et al., 2004). Se espera que esta propuesta se aplique en el transcurso del semestre 2018-2019/1, y se pueda analizar su efectividad como estrategia para realizar las modificaciones necesarias en términos de los propósitos de la signatura y promover el interés de los estudiantes por las matemáticas.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente subvencionado por la Universidad de Salamanca [2017/00111/001 (K118/ 463AC01)]; European Union, Project Erasmus+ [2017-1-ES01-KA203-038491], Ministerio de Economía y Competividad de España [PSI2015-66802-P], RED8-Educación Matemática y Formación de Profesores [EDU2016-81994-REDT].

Referencias y bibliografía

Chamoso, J., Durán, J., García, F., Martín, J., & Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *Suma*, *47*, 47-58.

Díaz-Barriga, F., & Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: McGraw-Hill.

Edo, M., & Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(2), 257-268.

Epp, S. (2012). *Matemáticas discretas con aplicaciones*. México: Cengage.

Feo, R. (2016). Orientaciones básicas para el diseño de estrategias didácticas. *Tendencias pedagógicas*, *16*, 220-236.

Martín, J., Muñoz, J., & Oller, A. (2009). Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos. Una experiencia. *Contextos educativos*, *12*, 137-164.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Comprensión de conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial

Diego Antonio **Rolong** Molinares
Universidad de Antioquia
Colombia
Diego.rolong@udea.edu.co
René Alejandro **Londoño** Cano
Universidad de Antioquia
Colombia
renelondono@gmail.com
Carlos Mario **Jaramillo** López
Universidad de Antioquia
Colombia
Camaja59@gmail.com

Resumen

La propuesta busca divulgar divulgación de una investigación a nivel doctoral que analizará la comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti derivada involucrados en el proceso de resolución de una ecuación diferencial en el marco de la Teoría de Pirie y Kieren; para llevar a cabo el estudio se elegirán estudiantes matriculados en un curso regular de ecuaciones diferenciales. Para la recolección de la información se emplearán los experimentos de enseñanza ubicados en el paradigma metodológico llamado investigación de diseño, así mismo, se emplearán algunas técnicas como: observaciones y entrevistas semi-estructuradas que serán parte de las actividades de complementariedad de la acción y expresión. Para el análisis cualitativo de la información recolectada, se utilizará la técnica de triangulación y el software Atlas. Ti. Se espera que sea posible describir los niveles de comprensión de los estudiantes con respecto a los conceptos matemáticos ya mencionados.

Palabras clave: Comprensión, razón de cambio, derivada, experimento de enseñanza.

Antecedentes

Aspectos de comprensión

A continuación, se presentan estudios sobre las ideas que tienen algunos investigadores en aspectos relacionados con la comprensión de conceptos matemáticos tales como: razón de cambio, derivada y antiderivada. La revisión de la literatura reporta hasta el momento investigaciones que muestran ciertas dificultades presentes en los estudiantes para comprender, interpretar, analizar y establecer relaciones entre dichos conceptos en la resolución de problemas.

Bajo la perspectiva de la comprensión, por un lado, Villa (2011) realiza una interpretación alterna de la tasa de variación, empleando para ello, representaciones geométricas, numéricas y cinemáticas simultáneamente haciendo uso de un triángulo, para tratar de elaborar una imagen del crecimiento de una variable con respecto a otra. Por otro lado, Londoño (2011) muestra que mediante la comprensión de procesos de razonamiento infinito se puede establecer la comprensión de la relación inversa entre los conceptos de área bajo una curva y pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, inherentes al teorema fundamental del cálculo.

En lo mencionado anteriormente, se observa que se pueden efectuar procesos cognitivos que permiten transitar entre los conceptos y sus significados al tratar de establecer una relación entre ellos (Sierpinska, 2000). En el contexto de las ecuaciones diferenciales, los estudiantes pocas veces establecen este tipo de relación. Más aún, exhiben un escaso dominio para realizar procesos cognitivos, en los que muestran una comprensión conceptual de objetos matemáticos, y a su vez, tratan de representar e interpretar gráficamente cada concepto en un registro de representación (Duval, 2004) de manera errónea, sin embargo, se evidencian carencias para representarlos en otros sistemas. Se puede inferir que representar un concepto en diferentes sistemas permite comprender su significado de manera paralela.

Después de lo manifestado anteriormente es posible preguntar si un estudiante exhibe comprensión de un concepto involucrado en la resolución de una ecuación diferencial. ¿Podría exhibir comprensión de su solución?; ¿es un factor que puede ser determinante o no?, además, ¿qué tanto influye la comprensión de estos conceptos en la compresión de la solución de una ecuación diferencial?; esta y otras preguntas emergen al tratar la comprensión de los objetos matemáticos que gravitan alrededor de una solución de una ecuación diferencial.

Por su parte, Sfard (2001) considera la comprensión como una elaboración de esquemas mentales en el que participan artefactos y símbolos, considerados como una herramienta que regulan una comunicación. En el contexto de las ecuaciones diferenciales se emplea un lenguaje simbólico como una herramienta para tratar de establecer una relación entre: las expresiones algebraicas de un enunciado y los conceptos involucrados en el proceso de resolución de una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con su gráfica, de tal manera, que le permita comprender su solución. En las actividades de clase se observa que estos procesos son realizados por los estudiantes de manera mecánica, además, pocas veces logran establecer las relaciones requeridas, lo que dificulta la comprensión de los conceptos y por ende la comprensión de la solución de una ecuación diferencial.

Con la revisión de la literatura realizada, se observa que las posturas epistémicas de los autores antes mencionados, involucran procesos de elaboración, relación, construcción y abstracción que permiten reorganizar un conocimiento para comprender un concepto matemático.

Aspectos sobre ecuaciones diferenciales

A continuación, se mencionan algunas investigaciones en el campo de las matemáticas avanzadas, relacionadas con aspectos de las ecuaciones diferenciales, que permiten obtener información valiosa sobre las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de comprensión de su solución en una actividad matemática dada.

Guerrero, Camacho y Mejía (2010) afirman que los estudiantes presentan dificultades para comprender la solución de una ecuación diferencial ordinaria, al expresarse ésta en forma

algebraica o gráfica; estas dificultades están relacionadas con conceptos propios de las ecuaciones diferenciales, objetos matemáticos, técnicas y métodos empleados en la resolución de la misma.

En las actividades de clase algunos estudiantes manifiestan estas dificultades al tratar de expresar de manera algebraica la gráfica del campo direccional de la solución de una ecuación diferencial o viceversa. Por ejemplo, dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - e^{-x} = -2y$ cuya solución es $y = e^{-x} + ce^{2x}$ donde c es una constante arbitraria, es posible que un estudiante reconozca esta expresión algebraica, pero se le dificulte asociarla con la gráfica de su campo direccional correspondiente.

Por otra parte, las dificultades mencionadas por Rasmussen (2001) para comprender aspectos relacionados con la solución de una ecuación diferencial, son también tomadas por Guerrero, Camacho y Mejía (2010) cuando manifiestan que al ignorar una expresión algebraica vinculada a la solución de una ecuación diferencial, se afecta la comprensión de la misma, influenciada quizás, por la desconexión que exhibe un estudiante de los conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada, entre otros, además de las generadas al tratar de expresar dicha solución al utilizar diferentes sistemas de representación.

Con el fin de establecer mecanismos que propicien la solución de un problema real por medio de una ecuación diferencial, Rasmussen & Kwon (2007) presentan un proyecto llamado *An inquiry-oriented approach to Undergraduate mathematics (IO-ED)* que ofrece un marco que distingue dos categorías, la primera, centrada en aprender matemática a través de la buena argumentación, y la segunda, desarrolla en el estudiante la capacidad de reconstrucción de sus conceptos matemáticos como punto de partida para la investigación, en la que se desarrollan técnicas analíticas, gráficas y numéricas para examinar las soluciones de ecuaciones diferenciales.

A continuación, se manifiestan algunos aspectos en los que se relacionan las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la solución de una ecuación diferencial y los conceptos involucrados.

Planteamiento del problema

Las ecuaciones diferenciales son expresiones algebraicas que tratan de representar o modelar problemas físicos, biológicos, químicos, entre otros, para conjeturar soluciones a corto y mediano plazo. Si bien es cierto que antes del siglo XVII existían investigaciones que contribuyeron en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales, es a partir de esta fecha que se consolidan conceptos fundamentales para formar la base de una teoría rica y abundante inherente a este campo específico de las ecuaciones diferenciales, en la que los investigadores matemáticos han podido brindar importantes soluciones a problemas propios de las ciencias, por lo tanto, ha sido un conocimiento indispensable a tener en cuenta en los currículos de los programas de ciencias e ingenierías en los que tanto estudiantes como profesores han tenido que enfrentar arduos razonamientos para interpretar y comprender una ecuación diferencial y su solución.

En este orden de ideas, las ecuaciones diferenciales han sido orientadas mediante programas revestidos de una matemática formal que emplea técnicas de solución analítica (Dullius, 2009, p.37). Los estudiantes bajo los programas reciben una formación para solucionar problemas, mediante el uso de definiciones y procedimientos matemáticos que aplican de manera mecánica. Estos procedimientos requieren procesos de conceptualización, razonamiento, análisis, abstracción y generalización, los cuales requieren de distintas formas de expresión y representación (Duval, 2004).

A pesar de que existen cambios tanto de contenido como de forma, dado los asistentes de computación matemáticos relacionados con los programas para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, las técnicas analíticas han sido un punto de apoyo en la resolución de ecuaciones diferenciales en estos cursos (Rasmussen, 2001). Más aún, los estudiantes dan muestra que se aprenden las definiciones de manera mecánica sin comprenderlas y reproducen lo visto en clases, con lo cual afectan su creatividad y raciocinio (Moreno & Azcárate, 2003). Además, estas técnicas las utilizan de manera mecánica para resolver y hallar una expresión algebraica como una solución de una ecuación diferencial (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2009) y, exhiben dificultades al relacionarlas con otros sistemas de representación. Asumiendo esta postura, podría entonces considerarse que la relación entre registros de representación puede coadyuvar al proceso de comprensión de una ecuación diferencial.

Es así, como puede observarse que en las actividades de clase, dada una solución de una ecuación diferencial en un sistema de representación que involucra conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada, pocas veces los estudiantes tratan de establecer relaciones entre ellos y con otros sistemas, por lo que se identifican conexiones cognitivas débiles para interpretar y comprender dicha solución (Duval 1999) de manera gráfica, algebraica, numérica y cualitativa. Esto influenciado quizás por las preferencias que tienen los profesores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma en las cuales involucran aspectos conceptuales y procedimentales.

Esta investigación pretende Analizar cómo comprenden los estudiantes los conceptos de razón de cambio, derivada y antiderivada involucrados en el proceso de resolución de una ecuación diferencial al expresarlos en otros sistemas de representación.

Formulación del problema de investigación:

Teniendo en cuenta las dificultades que exhiben los estudiantes de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial, por cuanto están relacionados con razonamientos asociados al concepto de razón de cambio como proceso inverso al de anti-derivación, me permito plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo es la comprensión de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial al emplear procesos analíticos, gráficos y algebraicos?

Objetivo

Analizar la comprensión que los estudiantes exhiben de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti derivada al emplear métodos analíticos, gráficos y algebraicos en el proceso de solución de una ecuación diferencial en el marco de la teoría para la comprensión matemática de Pirie y Kieren.

Marco teórico: Teoría para el crecimiento de la comprensión matemática

El concepto de comprensión se ha empleado de manera amplia en la literatura relacionada con la Educación Matemática; durante muchos años se ha indagado por una definición que permita esclarecer su significado, dada su alta complejidad para definirla. Dadas las diversas contribuciones que se han hecho al respecto, a continuación, se presentan algunos estudios sobre la comprensión.

La teoría para el crecimiento de la comprensión matemática emerge desde un enfoque constructivista; Pirie y Kieren apoyados en la definición propuesta por Von Glasersfeld (1987)

consideran la comprensión matemática como un todo dinámico, no lineal, recursivo y jerarquizado de una reorganización de las estructuras cognitivas. Esta teoría se constituye en una herramienta que actúa como una lente a través de la cual puede observarse el proceso de evolución de la compresión de un concepto matemático de un individuo o de un grupo de individuos. La teoría propone un modelo compuesto por ocho niveles que describen la evolución de la comprensión de conceptos matemáticos, los cuales son: Nivel 1. Primitive Knowing. (Conocimiento primitivo); Nivel 2. Image Making. (Construcción de la Imagen); Nivel 3. Image Having. (Comprensión de la Imagen); Nivel 4. Property Noticing. (Observación de la propiedad).

Así mismo, está dotado de unas características, de las cuales mencionaré una que es objeto de este estudio. En ella se exponen los procesos, las acciones y expresiones que realiza un estudiante en la medida que avanza en la comprensión de un concepto matemático determinado. Se hace referencia a las c*omplementariedades de la acción y la expresión.* Al respecto, Pirie & Kieren (1994) afirman que más allá del conocimiento primitivo o Primitive Knowing, cada nivel está compuesto por dos aspectos complementarios, una acción y una expresión, presentes en los demás niveles excepto el primero y el último. En ella se considera que el crecimiento de la comprensión acontece primero actuando y luego expresando, la primera incluye una comprensión previa y la segunda se articula de diferentes formas para cada nivel en particular.

En las actividades de clase, se observa que los estudiantes pocas veces relacionan los conceptos de razón de cambio, derivada y anti derivada con su gráfica, o realizan descripciones dada la gráfica de un concepto o función; de igual manera, se les dificulta comprender las características de una gráfica y formalizarlas por medio de una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que las represente. Para comprender una solución de una ecuación diferencial se considera que estos procesos se pueden complementar. Es así que a través de las complementariedades de la acción y expresión se realizará un análisis de crecimiento de la comprensión de estudiantes de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial. De este modo, los conceptos de razón de cambio, derivada, antiderivada y de ecuaciones diferenciales en términos de la teoría de Pirie y Kieren se pueden expresar grosso modo mediante la figura 1. Las abreviaturas relacionadas en la figura se describen a continuación. RC: Razón de cambio; DR: Derivada; AD: anti derivada; ED: Ecuación diferencial.

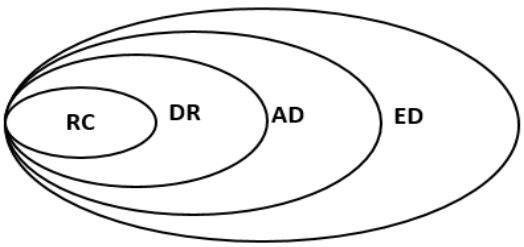


Figura 1 Representación de conceptos en términos de la teoría de Pirie y Kieren.

Metodología

Este estudio es de carácter cualitativo y para llevar a cabo esta investigación se propone como método el denominado *experimentos de enseñanza*, considerado como un tipo de estudio ubicado dentro del paradigma de investigación de diseño o investigación basada en diseño

(Confrey, J & Lachance, A., 2000). Este método tiene en cuenta las interacciones, acciones, eventos y circunstancias que rodean a un estudiante para comprender los procesos de nseñanza y aprendizaje (Creswell, 2005). El método es considerado por Molina, J. & Castro, E. (2011) como un tipo de metodología de naturaleza cualitativa desarrollada dentro de las ciencias del aprendizaje en contextos naturales con toda su complejidad para comprender y mejorar la realidad educativa.

Al respecto, Steffe & Thompson, P. W. (2000) lo consideran como una sucesión de episodios de enseñanza que constan de cuatro elementos básicos: un profesor investigador, uno o más estudiantes y un testigo de episodios de enseñanza quien aportará interpretaciones alternativas a las hechas por un cuarto que es el profesor investigador. Este tipo de estudio según Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Leher, R., & Scauble, L. (2003) busca crear conocimiento y hacer progresar teorías de aprendizaje y enseñanza en ambientes complejos, que mediante el estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, permite analizar su desarrollo en un contexto natural. El objetivo de este tipo de estudio es generar conocimiento mediante el apoyo en la información obtenida y en las decisones sobre la práctica educativa para mejorar el aprendizaje en estudiantes (Molina, M.,2006).

Una característica que se destaca en este tipo de estudios es la ruptura entre docente e investigador cuyo motivo es el propósito de los investigadores para experimentar de primera mano el aprendizaje y el razonamiento de los estudiantes (Kelly, A. E. & Lesh, R. A., 2000). Los experimentos de enseñanza se hacen con el fin de testar y generar hipótesis, durante cada uno de los episodios de enseñanza en la duración del experimento o de manera general. Estas hipótesis son reformuladas en la medida que se analiza la información recolectada, de tal manera que se pueda elaborar un modelo de aprendizaje que permita el desarrollo del conocimiento en un estudiante, siendo éste, un producto que se obtiene de la forma de operar situaciones planteadas por el profesor investigador (Molina, M, Castro, E. , Molina, J., & Castro, E, 2011).

Teniendo en cuenta lo anterior, y en el marco de los desarrollos teóricos y metodológicos de Molina, J., & CasTro, E, (2011), en la presente investigación se emplearán dos tipos de análisis de datos, por un lado, un análisis de datos continuo y preliminar, que consiste en analizar los datos después de cada episodio de enseñanza, facilitando la revisión y el desarrollo de las conclusiones de la investigación y guiando la toma de decisiones hacia futuras intervenciones. Por el otro, un análisis final, el cual consiste en examinar todos los datos recolectados y todo el proceso de investigación para la obtención y evaluación de los resultados. Este análisis permite describir la evolución de las conjeturas y el progreso del pensamiento de los estudiantes durante el desarrollo de la investigación.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, la información obtenida se analizará teniendo en cuenta la respectiva categorización. En esta investigación se empleará una triangulación de la información proveniente de los datos recolectados en cada episodio de enseñanza propuesto, registros escritos, verbales, de audio, de video y de las observaciones de los investigadores. Adicional a lo anterior, se empleará el software Atlas. Ti, para analizar un análisis cualitativo de la información recolectada, lo cual permitirá indagar sobre el crecimiento de la comprensión de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial.

La investigación se hará en tres fases de acuerdo con lo manifiestado por Cobb & Gravemeijer (2008), las cuales son: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo. En la preparación del experimento, se diseña una situación problema y se plantean

hipótesis para cada diseño. En esta etapa se recolecta información y se analiza con el propósito de refinar el experimento y las hipótesis. En la etapa de experimentación, mientras que ocurren los episodios de enseñanza, se podrán refinar o modificar con justa causa según las necesidades que el investigador requiera. Finalmente, se realiza un análisis retrospectivo el cual es un análisis cuidadoso de los registros de audio y video para traer a colación aquellas interacciones en las que se manifiesta o no la comprensión de los conceptos involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial.

Los participantes en esta investigación son estudiantes de quinto semestre del programa de ingenierías, en los que el departamento de ciencias básicas ofrece la asignatura de ecuaciones diferenciales. Los estudiantes se seleccionarán por la manera en que realizan los procesos mecánicos, la forma de abordar una ecuación diferencial, las dificultades que presenten al solucionar una ecuación diferencial, entre otros.

Resultados esperados

En la presente investigación se esperan alcanzar los siguientes resultados:

- Expresar en términos de las complementariedades de la acción y la expresión, manifestaciones de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti-derivada.
- Plantear descriptores para los niveles de comprensión de la teoría de Pirie y Kieren que permitan establecer el nivel de comprensión de los conceptos de razón de cambio, derivada y anti-derivada, involucrados en el proceso de solución de una ecuación diferencial; tales descriptores, a su vez, facilitarán el refinamiento de la entrevista semi estructurada.
- Determinar si las complementariedades de la acción y la expresión son adecuadas para describir el nivel adquirido por los estudiantes en la comprensión de los conceptos asociados en la solución de una ecuación diferencial.

Referencias Bibliográficas

Camacho, M., Perdomo,J, & Santos Trigo, M. (2009). Revisiting university students´ knowledge that involves básic differential equation questions. PNA, 3(3), 123-1333. .

Cobb, P, Confrey, J., Disessa, A, Lehrer, R, & Schauble, L. (2003). desing experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), pp.9-13.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, en Kelly, A. E Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (eds.). (L. E. Associates, Ed.) *Handbook of design research mathods in education. innovation in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 68-95.

Confrey, J, & Lachance; A. (2000). Transformative teaching experiments through conjeture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A: Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, 231-265. New Jersy: Lawrence Erlbaum associates.

Creswell, J. (2005). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research.* Upper Saddle River: Perarson Education.

Dullius, M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y análitico.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano resgistros semióticos y aprendizajes intelectuales.

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. REgistro Semiótico y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

Guerrero, C., & Camacho, M. &. (2010). Dificultades de los estudiantes en interpretación de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de la ciencias*, 341-352.

Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (2000). Handbook of research design in mathematics and science education. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Londoño, R. (2011). La relación inversa entre cuadrátura y tangentes en el modelo de Pirie y Kieren. Tesis doctoral. Colombia: Departamento de Educación Matemática. Universidad de Antioquia. Disponible en tesis.udea.edu.co/bitstream/10495/6920/1/ReneLondoño_2011_teoriapirie.

Molina, M, Castro, E. , Molina, J., & CasTro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñana. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.

Molina, M. (2006). Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual (Tesis para optar por el grado de doctora en Didpactica de la Mtemática). *Departamento de Didáctica dela Matemática.*, Universidad de Granada, España.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de las enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 265-280.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in the mathematical understanding how can we characterise it and how we represent it? *Educational Students in Mathematical*, 165-190.

Rasmussen, C. (2001). New directions equations differential a framework for interpreting student´s understandings and difficulties. *Journal Mathematical Behavior, 20*, 55-87.

Rasmussen, C., & Kwon, O. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *Journal Mathematical Behavior, 26*, 189-194.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse then meets the ears: Loking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematicac 46*, 13-57.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students´thinking in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Eds.) The Teaching of linear Algebra in Question (pp. 209-246). Netherlands: Kluwe Academic Publishers.

Steffe, L., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306. Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Villa ochoa, J. (2011). La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis de la teoría de Pirie y Kieren. Tesis doctoral. Colombia Departamento de Educación Matemática. Universidad de Antioquia. Disponible en ayura.udea.edu.co:808.

Von, G. E. (1987). The cosntruction of Knowledge, Seaside. *Intersystems Publications*.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Representaciones Multimedia en matemática. Análisis de la Teoría Conectivista del Aprendizaje.

Ricardo **Valles** Pereira
Escuela Físico Matemática, Pontificia Universidad del Ecuador
Ecuador
prfricardovalles@gmail.com
Dorenis **Mota** Villegas
Escuela Físico Matemática, Pontificia Universidad del Ecuador
Ecuador
dorenismota@gmail.com

Resumen

El presente artículo es de carácter reflexivo, donde se muestran conjeturas alusivas a la importancia que actualmente tienen los recursos multimedia en la enseñanza de la matemática, si se toma en cuenta el potencial de estos recursos para hacer posible las distintas representaciones propias de los objetos matemáticos y si, además, se considera cómo el estudiante de hoy aprende, para lo cual se ha estudiado a una teoría del aprendizaje de vanguardia como lo es el conectivismo. Se espera que con el estudio y desarrollo integrado de los elementos antes mencionados (recursos multimedia, representaciones de los objetos matemáticos y teoría conectivista del aprendizaje) se puedan crear objetos de enseñanza para la matemática adaptados a las exigencias del estudiante actual.

Palabras clave: recursos, multimedia, enseñanza, matemática, conectivismo, representaciones.

1. Introducción

Antiguamente, los medios comunes de instrucción eran la voz y la gestualidad como herramienta principal para que un docente llamase la atención de sus discentes; actualmente existen innumerables formas de comunicar una información, entre ellas los medios de tipo multimedia, los cuales han tenido una gran aceptación en los diferentes sistemas educativos a nivel mundial. La instrucción multimedia se ha fundamentado en las múltiples maneras de comunicar la información a través de los diferentes canales que van surgiendo día a día en la red. En ese sentido, no se necesita tener gran experiencia en programación para tener acceso a variados formatos provenientes del mundo virtual, solo basta que se consideren adecuados para presentar información con fines educativos.

Cuando se hace uso de la multimedia para llevar a cabo la enseñanza, intervienen dos elementos fundamentales que permiten llevar a cabo el mensaje educativo: las palabras y las imágenes, éstas se conjugan con el medio que las transmiten, muchas veces de manera simultánea y dinámica, y son capaces de generar en el espectador o estudiante un aprendizaje mediante un canal dual.Sin embargo, más allá de apoyar la instrucción en estos medios disponibles, se debe estudiar "cómo la mente del individuo adquiere, codifica, recupera y utiliza la información cuando se le presenta en un formato multimodal" (Azzato y Rodríguez, 2011. p. 480).

Mayer (2007) afirma, que los discentes pasan por tres procesos cognitivos fundamentales involucrados con el aprendizaje multimedia, a saber, esto son: 1.- Aquellos involucrados con una base verbal y otra pictórica para recibir la información textual y visual que reciben respectivamente, 2.- El otro proceso referido a la organización de la información recibida; en este caso se crea un modelo para la base verbal y otro para la base visual percibida y 3.- Se integran y construyen nuevas estructuras conceptuales partiéndose de los vínculos que se crean entre ambos modelos.

Esto implica, que cuando un docente decide incorporar recursos multimedia a su proceso de instrucción, se deben considerar previamente si el aprendizaje del estudiante dependerá de la cantidad de los distintos formatos presentados (pictórico, textual, verbal,…); si añadir recursos multimodales a un mensaje textual originalmente puede, realmente, optimizar el aprendizaje y si realmente la estructura de los recursos multimodales se relaciona con la comprensión del mensaje instruccional.

En este caso, esa última consideración deja entrever la necesidad de relacionar directamente las características propias de un proceso de enseñanza (de un contenido matemático en este caso) basado en recursos multimedia, con las particularidades de las diferentes representaciones o registros con los que se pueden hacer ostensibles los objetos matemáticos (Duval, 1999).

Al respecto, Orozco y Labrador (2006) señalan que "una de las observaciones más sensibles en este tiempo es el desarrollo, expansión y extensión de un nuevo tipo de pedagogía y de didáctica matemática, la cual está soportada con la tecnología digital" (p. 85). Entonces, aparentemente la combinación instrucción-digitalización-didáctica de la matemática transformará en poco tiempo la forma decisiva la manera de enseñar, aprender, comprender, aplicar y comunicar los tópicos matemáticos en todos los niveles educativos.

Frente a ese panorama, se debe considerar, que al momento de introducir un recurso multimedia en el aula, es imprescindible poder evaluar su potencial intervención en el quehacer matemático, es decir, sus múltiples implicaciones en la comprensión de esta compleja Ciencia, en palabras de Cirilo y Labrador (op. cit.) las implicaciones de la tecnología digital fusionada con la educción matemática "auguran una metamorfosis espectacular de la educación matemática y que involucra un cambio radical en los contenidos, materiales, símbolos, lenguajes, imágenes, medios, estrategias, procedimientos y metas de enseñanza, aprendizaje y evaluación de la disciplina" (p. 88)

Por otra parte, no hay que olvidar las teorías del aprendizaje que siempre deben ir de la mano en todo proceso de enseñanza, en ese sentido, la teoría del aprendizaje actual que hace juego con los recursos multimedia de enseñanza es la conectivista (Siemens, 2004) ya que toma en cuenta precisamente las particularidades que involucran al aprendizaje con el mundo tecnológico en el que actualmente vivimos.

En base a lo que hasta ahora se ha mencionado, se tienen varios constructos de interés: en primer lugar el importante papel que están asumiendo los recursos multimedia en la enseñanza; en segundo orden están las características propias de los objetos matemáticos que incluyen sus múltiples representaciones, y en tercer lugar, se ubica a la teoría del aprendizaje que se supone podrá abarcar a los dos constructos anteriores, llamada teoría del conectivismo. Se considera pues que a partir del estudio integrado de estos elementos, es posible crear objetos para la enseñanza de la matemática que apunten a un verdadero aprendizaje por parte del estudiante de hoy, es decir, acorde a las exigencias de losnativos digitales que se encuentran en nuestras aulas de clases.

2. Referentes teóricos

2.1 Recursos multimedia

de hacer referencia a lo que son los recursos multimedia, se definirá lo que se considera como "multimedia" que, a pesar de sus múltiples acepciones, es una herramienta que engloba la capacidad de "explicar todas aquellas experiencias que involucran presentaciones gráficas, textuales, animadas y sonoras que, acopladas con la ayuda de algún medio, han sido diseñadas para transmitir un mensaje" (Azzato, op. cit p. 11).

Básicamente, es un multimedia la combinación simultánea de imágenes, palabras y sonidos con el fin de presentar algún material, esto incluye gráficos, imágenes estáticas y/o dinámicas y videos.

Entonces, entenderemos por recursos multimedia todas aquellas herramientas multimedia que pueden combinar textos, imágenes, videos y sonidos con una finalidad educativa, es decir, constituye un recurso de enseñanza y/o aprendizaje.

Según Méndez y otros (2007), existen varias definiciones para "recursos multimedia" que se distinguen entre si dependiendo del campo donde se utilice, de hecho, en algunas oportunidades, puede que los recursos multimedia no estén relacionados con las tecnologías digitales, ya que el uso de esos recursos datan de hace muchos años. De forma general, se consideran "recursos multimedia" a todo sistema que involucra más de un medio de comunicación de forma simultánea cuando transmite una información o un contenido que puede ser educativo o de otra índole, en consecuencia, los recursos multimedia tienen su origen en la comunicación humana, donde pueden intervenir diferentes formas de comunicación simultáneamente.

En 1984 se comienzan a relacionar los recursos multimedia con la computación cuando sale al mercado la computadora "Macintosh" quien por sus particularidades selló la primera posibilidad de lo que conocemos en la actualidad como recursos multimedia; no obstante, no fue sino hasta 1992 cuando, a través de los videojuegos, la tecnología multimedia se hace popular, integrando ya elementos de audio (música, sonido y voz), video, imagen, animaciones y texto paralelamente. (Méndez y otros, op. Cit.)

Pinto (2002) señala que desde ese entonces y hasta la actualidad, cuando se mencionan los recursos multimedia se asocian directamente con la informática, hasta tal punto de que se asume de manera muy exclusiva como la integración de imágenes estáticas o dinámicas, videos, textos y datos almacenados digitalmente.

En el caso que nos atañe, la multimedia será la pantalla de un computador (ampliada por un protector) capaz de presentar textos, gráficos, imágenes, sonidos, entre otros, que pueden ser combinados, por ejemplo, en una presentación realizada en PowerPoint o Prezi, o bien, puede

estar contenida en un paquete (ExeLearning) que repose en una plataforma educativa (Osmosis, moodle).

Existen dos tipos de multimedia (Vaughan, 2002), aquellas que son interactivas y las que son lineales; las primeras permiten que el usuario interactúe, el cual tiene posibilidades de realizar diferentes acciones mediante la manipulación de elementos específicos, la segunda se produce en un sentido lineal (de principio a fin), sin que el usuario pueda intervenir. En algunos casos los usuarios pueden ejercer algún control sobre el recurso (pausar, adelantar, detener, reproducir, ampliar, entre otros) pero eso no significa que pueda modificar el recurso.
Haciendo referencia de manera específica al ámbito educativo, se puede producir en un aula de clases cualquiera de los dos tipos de multimedia, aunque se recomienda que en las horas presenciales se haga uso de los recursos multimedia lineales (por las limitaciones del tiempo presencial en clases y el limitado número de equipos computarizados) y en las horas de práctica o fuera del contexto escolar se promuevan los recursos multimedia interactivos.
Por otra parte, para concluir esta sección, se hará mención a las fases que se debe seguir cuando en el campo educativo se decide trabajar con recursos multimedia, de acuerdo a Vaughan (op. cit.) existen cuatro fases que acompañan a un proyecto multimedia, éstas son:

- Planificación y costo: Involucra la idea inicial del proyecto, movida por la necesidad educativa existente en el contexto, el contenido y los medios que pueden emplearse (texto, imágenes, audios, videos, entre otros), el desarrollo del plan del entorno multimedia (estructura y sistema de navegación) que va a permitir al usuario navegar libremente por el recurso, se evalúa el tiempo de elaboración de los recursos y los costos de realización.
- Producción: Es la fase de creación del recurso, es decir, la realización de cada una de las tareas planificadas hasta llegar al producto final.
- Prueba: Se prueba que el o los recursos multimedia (s) creado (s) cumplan con los objetivos propuestos, además se evalúa su funcionamiento correcto. Una vez que cumplan con los estándares requeridos, se prepara para su uso masivo.
- Distribución: Se hace llegar el o los recurso (s) creados al usuario final.

2.2Representación en Matemática

En matemática la palabra *representación* tiene un significado especial, puesto, que los objetos matemáticos no tienen existencia en sí mismos, sino que pueden aparecer (al menos parcialmente) a través de alguna representación, que por cierto, muestra "parte" del objeto, pero no todo el objeto en sí. En ese sentido, se puede afirmar que el sujeto no entra en "contacto" con los objetos matemáticos, sino con alguna de sus representaciones. Por ejemplo, el objeto matemático llamado función puede representarse de forma gráfica o mediante una definición de tipo conjuntista o algebraica o mediante un ejemplo representado en diagramas de ven.

Duval (op. cit) afirma que la representación de un concepto matemático puede ser vista de tres formas diferentes y constitutivas que no deben confundirse una con otra, a saber:

- El objeto representado.
- El contenido de la representación, es decir, lo que una representación particular presenta del objeto.
- La "forma" de la representación, o sea, su modalidad o su registro.

Este mismo autor también señala que las representaciones dependen de sistemas de signos (sistemas semióticos) o sistemas basados en redes neuronales o instrumentos físicos (sistemas no semióticos), en palabras de Duval (op. cit)

> Una representación jamás puede ser considerada y analizada sin hacer referencia al sistema a través del cual fue producida. Las especificidades del sistema (físico, orgánico o semiótico) que permitieron la producción de una representación, son las que determinan la relación entre el contenido y el objeto representado. El contenido de las representaciones de un mismo objeto cambia en función del sistema por el cual fueron producidas (p.18-19).

En matemática, se vuelve una exigencia cognitiva necesaria y fundamental el hecho de usar más de un sistema de representación y sus diferentes transformaciones posibles para hacer *ostensible* un concepto matemático y garantizar así el desarrollo del pensamiento matemático en el individuo; es decir, para aprender matemática se hace imprescindible el uso, estudio y comprensión de los sistemas de representación, y esto se debe a la gran variedad de registros que contienen los objetos matemáticos que hacen posible la manera de acceder a ellos y estudiarlos y la posibilidad generada por cada sistema de representación de estudiar características particulares de los objetos que de otra forma no fuese sido posible, lo que indica que mientras más sistemas de representaciones se utilice para acceder al objeto matemático, el conocimiento que te obtendrá será más complejo y potente.

Según Duval (op. cit.) existe una clasificación de los diferentes tipos de registros que pueden existir para dar a conocer las características de los objetos matemáticos, estos pueden ser de tipo discursivos (lenguaje natural) o no discursivo (lenguaje gráfico), también pueden darse *transformaciones* dentro de un mismo tipo de registro o *conversiones* cuando se usan diferentes registros para denotar un mismo objeto.

2.3 Teoría conectivista del aprendizaje

El conectivismo es una teoría del aprendizaje de reciente data que intenta explicar y describir cómo los individuos aprenden en la era digital. Unos de sus precursores es Siemens (2004) quien define al conectivismo como una integración de los principios examinados por la teoría del caos, redes, complejidad y auto-organización, asegurando además que el aprendizaje ocurre dentro de ambientes difusos cuyos elementos centrales cambian constantemente.

Para el conectivismo, las decisiones que se toman actualmente se fundamentan en principios que rápidamente cambian ya que de forma continua se adquiere nueva información. Una de las premisas de esta teoría, es saber diferenciar la información relevante de la que no lo es, también es importante reconocer cuándo una nueva información influye en el contexto basado en decisiones tomaras anteriormente.

Así, entre sus principios están: la diversidad de opiniones influyen en el aprendizaje y el conocimiento, el aprendizaje consiste en conectar nodos o fuentes de información especializadas, el aprendizaje puede estar depositado en dispositivos no humanos, aquello que se sabe no es tan crítico como la capacidad de saber más, alimentar y mantener las conexiones se hace necesario para facilitar el aprendizaje continuo, es una habilidad esencial el poder visualizar conexiones entre áreas, ideas y conceptos; estar actualizado constantemente (conocimiento preciso y actual) es la finalidad de las actividades conectivistas de aprendizaje; por último, la toma de decisiones es, en sí misma, un proceso de aprendizaje.

En el conectivismo, el individuo es un componente esencial en el aprendizaje, el conocimiento personal está constituido por una red, la cual alimenta a instituciones y organizaciones, y estás a su vez retroalimentan a la red, generando nuevo aprendizaje para los individuos. Este ciclo permite que los sujetos que aprenden estén actualizados en algún área de interés mediante las conexiones que hayan formado.

3. Reflexiones finales

Después de estar al tanto de los elementos teóricos esenciales que componen los recursos multimedia, las representaciones en matemática y la teoría conectivista del aprendizaje, no queda más que integrar los elementos a fin de determinar si el resultado de esa fusión es conveniente para optimizar los procesos de enseñanza y, en consecuencia, de aprendizaje de la matemática.

Por una parte, los recursos multimedia tienen una importante aceptación en la enseñanza, ya que muchos investigadores afirman que la redundancia (estimular varios sentidos de manera simultánea, presentando una misma información en formatos distintos, por ejemplo, textual y gráficamente) es imprescindible para lograr el aprendizaje; además, permite codificar la información en diferentes formatos, así los profesores pueden organizar, estructurar y relacionar los signos y los modos en que serán mostrados de una forma más sencilla gracias al uso de los recursos multimedia. Estos recursos nos permiten trascender la realidad física tal y como la conocemos, ya que a través de ellos se pueden explicar, por ejemplo, fenómenos que no se ven a simple vista o que no tienen lugar fuera de la virtualidad. En otras palabras, los recursos multimedia nos abre un mundo de posibilidades que de otra forma no fuese posible, esto deja entrever el inmenso potencial que poseen y cuan útiles pueden ser en el campo educativo.

Por otra parte, hemos visto cómo las representaciones en matemática juegan un papel fundamental para su enseñanza, ya que hacen posible la "aparición" de los objetos matemáticos y permite así la posibilidad de estudiarlos a profundidad; en ese sentido, el empleo de la tecnología y específicamente de los recursos multimedia, expanden la posibilidad de representar múltiples registros de representación de un objeto matemático de forma dinámica, y este es un punto crucial desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática ya que los sistemas de representación son un eje central para que el sujeto pueda comprender los objetos matemáticos y sus características esenciales.

Por último y no menos importante, se tiene que sumar a esta enseñanza de la matemática (para lo cual tomamos en cuenta las representaciones de los objetos y el potencial tecnológico para abordar tales representaciones) la forma en cómo el estudiante de hoy aprende cuando sus sentidos están siendo bombardeados constantemente con tecnología, para lo cual se ha tomado en cuenta la teoría conectivista de aprendizaje que se fundamenta en la capacidad que tienen el individuo de aprender lo que vaya necesitando día a día en esta era digital; proponiendo como reto que el conocimiento debe activarse en el sitio donde se necesite y que el sujeto pueda conectarse con fuentes de información fiable cuando lo necesite pero no lo posea al momento, así el conocimiento crece y evoluciona constantemente y tener acceso a al conocimiento y la información que se necesita se vuelve más importante para el aprendiz que el conocimiento que ya posee.

Se trata entonces de *activar* mecanismos que induzcan al aprendiz a apoderarse de los objetos matemáticos mediante la presentación de múltiples representaciones que serán posible gracias al uso de los recursos multimedia, entendiendo los escenarios actuales en los que hace vida ese aprendiz, o sea, reconociendo el constante cambio que sufre la sociedad de hoy donde el

aprendizaje ha dejado de ser una actividad interna e individual. Sin duda alguna, lo que se propone es un reto al docente de matemática que aprendió y se formó bajo mecanismos totalmente distintos de enseñanza; pero que ya se vuelve ineludible ante la cultura digital que nos arropa y no da señales de terminar pronto.

Referencias

Azzato, M. y Rodríguez, J. (2011). Relación entre la estructuración multimedia de los mensajes instructivos y la comprensión de libros electrónicos. [en línea] disponible en http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/32138/02.AZZATO_ANEXOS.pdf

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática. (pp. 199 – 314)

Méndez, O. y otros (2007). *Recursos digitales y multimedia*. Tecnología de la información. México: UNAM. [en línea] disponible en http://ru.ffyl.unam.mx:8080/jspui/bitstream/10391/955/1/Ver%C3%B3nica%20M%C3%A9ndez%20-%20Lizet%20Ruiz%20-%20Hugo%20Figueroa%20-%20Recursos%20digitales%20y%20multimedia.pdf

Orozco, C. y Labrador, M. (2006). *La tecnología digital en Educación: Implicaciones en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.* Revista THEORIA: Ciencia, arte y humanidades. [en línea] disponible en http://redalyc.uaemex.mx/pdf/299/29915209.pdf

Pinto, M. (2002). *Indización y resumen de documentos digitales y multimedia: técnicas y procedimientos*. Gijón, Asturias: Trea.

Siemens, G (2004) Connectivism: A learning theory for a digital age. [en línea] de http://www.elearnspace.org/Articles/connectivism.htm

Vaughan,T. (2002). Multimedia: manual de referencia. México: Osborne McGraw-Hill.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Modelo didáctico para la enseñanza de la demostración de proposiciones matemáticas

Carlos **Díez** Fonnegra
Programa de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia
carlos.diez@konradlorenz.edu.co
Alejandro **Fandiño** Benavides
Programa de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia
alejandro.fandinob@konradlorenz.edu.co
Fabio Alejandro **Jiménez** Chacón
Programa de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia
fabioa.jimenezc@konradlorenz.edu.co

Resumen

Demostrar proposiciones es una de las competencias más importantes en la formación de un matemático, aun así, en muchos casos los profesores no utilizan de manera deliberada modelos didácticos para su enseñanza, aunque usen algunas prácticas pedagógicas aisladas de manera consciente o inconsciente. El presente trabajo propone un modelo didáctico para la enseñanza de la demostración, estructurado a partir de tres tensores curriculares: el nivel de autonomía de los estudiantes, el nivel de desarrollo del pensamiento relacionado con la demostración y las etapas para la demostración matemática. Para la formulación del modelo se llevó a cabo una investigación descriptiva de las prácticas pedagógicas que utilizan algunos profesores para la enseñanza de la demostración, dichas prácticas y otras prácticas propuestas se articularon en un sistema que orienta la enseñanza de esta competencia.

Palabras clave: demostración matemática, didáctica de la demostración, prácticas pedagógicas, tensores curriculares, pensamiento matemático avanzado.

Introducción

Los procesos de enseñanza-aprendizaje en el Programa de Matemáticas de la Fundación

Universitaria Konrad Lorenz están basados en un modelo didáctico orientado al desarrollo de competencias. En este sentido, este modelo clasifica las competencias en transversales y específicas, así:

Competencias transversales:

- Lectura
- Escritura
- Exposición verbal de ideas
- Trabajo en equipo e interdisciplinar

Competencias específicas:

- Demostración de proposiciones matemáticas
- Modelado matemático
- Simulación matemática
- Programación en lenguajes computacionales

Para el desarrollo de estas competencias, las asignaturas que constituyen el Programa de Matemáticas se han clasificado de la siguiente forma:

- Asignaturas básicas
- Asignaturas profesionales demostrativas
- Asignaturas profesionales aplicativas
- Asignaturas profesionales teóricas

En cada uno de estos tipos de asignaturas se privilegia el desarrollo de ciertas competencias. En particular, en las asignaturas profesionales demostrativas la competencia central es la demostración de proposiciones matemáticas.

La demostración de proposiciones es una competencia esencial en el quehacer del matemático (Grabiner, 2009), inclusive en la formación escolar, como lo propone el documento Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000). Sin embargo, se han detectado dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la demostración, como las relatadas en D'Andrea & Vázquez (2014), Fiallo, Camargo & Gutiérrez (2013) y Martínez Recio (1999), entre otros.

Debido a lo anterior, se desarrolló una investigación que tiene por objetivo proponer, implementar y evaluar un modelo didáctico para la enseñanza de la demostración, que sea parte integral del modelo pedagógico del Programa de Matemáticas.

De esta investigación, se han realizado dos fases: una primera fase fue la realización de un estudio exploratorio sobre las prácticas en la enseñanza de la demostración que los profesores del Programa manifiestan consciente o inconscientemente en sus clases. La metodología para este estudio fue la observación de clases de las asignaturas profesionales demostrativas, con el fin de

identificar dichas prácticas de enseñanza y clasificarlas en tres categorías conceptuales relacionadas con la enseñanza de la demostración. Estas categorías se definen a continuación en el marco teórico. Una segunda fase fue la proposición, con base en la teoría, de otro conjunto de prácticas pedagógicas y su articulación de acuerdo con los tres tensores propuestos: nivel de autonomía de los estudiantes en las prácticas pedagógicas, nivel de desarrollo de su pensamiento relacionado con la demostración y las etapas del proceso de demostración. Queda por realizar una implementación piloto de este modelo para hacer su validación y ajuste.

Marco teórico

Las tres categorías en las que se clasificaron las prácticas pedagógicas son:

- Didáctica

Para Bravo y Arrieta (2012), la enseñanza de la demostración matemática se debe realizar por medio de estrategias y herramientas didácticas que permitan obtener un mejor proceso de aprendizaje. Además, según Ortiz y Jiménez (2006), "la demostración como elemento en la didáctica de la matemática está estrechamente ligada al desarrollo de habilidades mentales y de pensamientos imprescindibles en la formación integral de los estudiantes", para esto:

Los docentes deben escoger las demostraciones a realizar en clase de manera que los estudiantes puedan ver sus resultados directos, la importancia en la práctica matemática y de las otras disciplinas, para que, el estudiante esté en un proceso activo de enseñanza en la demostración matemática, por esto, el docente debe aplicar didácticas convenientes basadas en su experiencia e investigaciones existentes sobre el tema (Ortiz & Jiménez, 2006, p.184).

- Epistemología

Según Fiallo (2013), la epistemología en la enseñanza de la demostración matemática se encarga de descubrir la naturaleza de la demostración y su dificultad relacionada con el conocimiento matemático, de modo que los estudiantes creen conciencia de que la demostración ha sido expuesta desde diferentes puntos de vista por varios matemáticos, de acuerdo a la escuela de pensamiento, las comunidades académicas, las diferentes culturas y épocas históricas, por lo tanto, el punto de vista de la epistemología en demostración matemática busca responder a interrogantes como:

¿Qué es la demostración y cuáles son sus funciones?, ¿cómo son construidas, verificadas y aceptadas las demostraciones en las comunidades de matemáticos?, ¿cuáles son algunas de las fases críticas en el desarrollo de la demostración en la historia de las matemáticas? (Fiallo, Camargo, & Gutiérrez, 2013), entre otras relacionadas.

- Semántica y semiótica

En la formación del matemático esta como competencias principales: la demostración matemática y la resolución de problemas, ya que son inherentes en su preparación, sin embargo, también debe ir ligado en su aprendizaje la escritura, puesto que es necesario para la transmisión de sus ideas, por lo tanto, según Sanabria (s.f) en la actividad matemática:

> se distinguen dos componentes principales: la escritura y los procesos para realizarla. El primer componente se debe caracterizar por su rigurosidad y formalidad. El otro componente requiere educar la intuición y el ordenamiento de ideas. Estos dos

componentes son llamados: sintáctico y semántico. (p.40)

Durante la investigación se notó que hay una relación entre las categorías conceptuales, por lo tanto, se propone un diagrama que la describe:

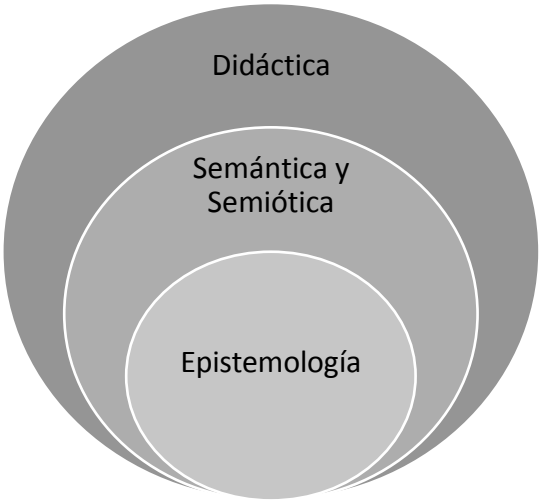


Figura 1. Relación entre las categorías conceptuales marco de las prácticas pedagógicas en demostración.

Este diagrama muestra cómo a través de la historia, el ser humano ha aprendido (separado por las diferentes culturas, lenguas, etc.) a abstraer información del lugar que lo rodea, como abunda Finol (2004): "El ser humano vive en un continuo proceso de conocimiento. Desde todos los ámbitos donde el hombre se encuentra recibe un flujo ininterrumpido de señales, que sobresaturan sus capacidades perceptivas".

En el texto anterior, se menciona el concepto *señales* como base para los signos semióticos, lo que describe el hecho de que el hombre ha mantenido un registro de sus conocimientos a través de símbolos o palabras, que además son base para la dotación de sentido, es decir, para la semántica de las ideas.

Luego, así como la epistemología es importante, su relación con la semiótica y semántica también toma un papel fundamental para la didáctica, como asegura García (2012): "la didáctica y la semiótica se atenazan cuando se vincula el concepto de didáctica al de educación".

Aparte de las anteriores categorías conceptuales, se concluyó que las prácticas pedagógicas se pueden clasificar según los niveles de autonomía del estudiante, así:

Nivel de comprensión: momento en que el estudiante está aprendiendo los objetos matemáticos, su significado, procedencia y estructura. En este nivel, el profesor dirige las prácticas que los estudiantes desarrollan.

Nivel de conexión: en este el estudiante interactúa con el profesor en las prácticas pedagógicas. En este nivel, los estudiantes son más activos en su aprendizaje, participando en clase de diferentes maneras.

Nivel de aplicación: acá el estudiante es fundamentalmente autónomo en el desarrollo de ejercicios.

Otro tensor fundamental del Modelo Didáctico para la Enseñanza de la Demostración de Proposiciones Matemáticas (MDPED) son los niveles de desarrollo del pensamiento orientado a la demostración. Para definir estas etapas, se tomaron en cuenta las propuestas de Balacheff y Boero.

Balacheff propone estos niveles desde el punto de vista de las prácticas que tienen los estudiantes en matemáticas, apartándose de la perspectiva lógica, debido a que considera que hay demostraciones pragmáticas y conceptuales (Balacheff, 1988, p. 217), y a partir de lo anterior, considera cuatro niveles que son: el empirismo ingenuo, el experimento crucial, el ejemplo genérico y el experimento de pensamiento.

Por otro lado, Boero propone dos actividades en el aprendizaje de la demostración: el desarrollo de conjeturas y las pruebas formales matemáticas, y propone desarrollarlas por medio de seis etapas: producción de una conjetura, formulación de la proposición, exploración del contenido, selección de argumentos teóricos coherentes, organización de los argumentos, acercamiento a una prueba formal

De las propuestas anteriormente mencionadas, se sintetizaron cuatro etapas para realizar una demostración de una proposición matemática:

1. Producción de una conjetura: consiste en afirmar la verdad de un resultado después de verificar varios casos. Este medio de prueba, muy rudimentario, es una de las primeras formas del proceso de generalización (Boero,1999)
2. Exploración del contenido: implica identificar los argumentos apropiados para la validación, relacionados con la teoría de referencia, y establecer posibles vínculos entre ellos (Boero, 1999).
3. Elaboración de argumentos teóricos de la prueba: consiste en explicitar las razones de la verdad de una afirmación mediante operaciones o transformaciones sobre un objeto que no existe por derecho propio, sino como una característica representativa de su clase (Balacheff, 1988)
4. Formalización de la prueba: en esta etapa se organizan los argumentos encadenados en una prueba aceptable según los estándares matemáticos actuales (Boero, 1999).

Una vez definidos los tres tensores: categorías conceptuales (didáctica, semántica y semiótica y epistemología), niveles de autonomía del estudiante (comprensión, conexión y aplicación) y las etapas de demostración (producción de una conjetura, exploración del contenido, argumentos teóricos en la prueba y formalización de la prueba), se ubicaron las prácticas pedagógicas en el marco conformado por estos, de la siguiente manera:

Tabla 1

Sistema de prácticas pedagógicas del modelo

Etapas de	**Niveles de autonomía del estudiante**

demostración	Comprensión	Conexión	Aplicación
Producción de una conjetura.	SS1, SS2, E1, D1, D2.		
Exploración del contenido.	SS3, SS4, SS5, E2, E3, D3, D4.	SS7, E8, D10.	
Argumentos teóricos en la prueba.	E4, E5, E6, D5, D6, D7.	SS8, SS9, SS10, D11, E9, E10, D12, D13, D14, D15.	D17, D18, D19, D20, D21, D22, D23, D24, D25.
Formalización de la prueba.	SS6, E7, D8, D9.	SS11, SS12, D16.	E11, D26, D27, D28, D29, D30, D31, D32.

Fuente: Elaboración teórica.

Nota: los códigos que figuran en la tabla corresponden a las prácticas pedagógicas recolectadas en la investigación descriptiva, pero por espacio en este documento no se pueden incluir.

Conclusiones

Al registrar cada una de las prácticas pedagógicas observadas en las clases, se notó que una misma práctica podría pertenecer a varias categorías de análisis, lo que demuestra la relación profunda entre dichas categorías.

La categoría ‘epistemología’ concreta la necesidad de basarse en la historia y en responder interrogantes en la forma como se desarrolló el conocimiento matemático desde los diferentes puntos de vista. La categoría ‘semántica y semiótica’ se genera por la necesidad de reconocer las diferentes formas de escribir un objeto matemático y también las diferentes formas de concebirlo, con el fin de desarrollar la capacidad de visualizar y dar sentido a dichos objetos, mejorando la comprensión y escritura de las proposiciones. La última categoría, la ‘didáctica’, atiende las características de los objetos matemáticos y su articulación en las prácticas pedagógicas.

Durante la observación de clases se notó que los profesores son inconscientes de algunas prácticas que emplean. Esto puede ocurrir por diferentes factores, entre ellos que no poseen un manual de prácticas de enseñanza, no se basan en un programa pedagógico de enseñanza de la demostración matemática o que durante su formación como estudiantes mecanizaron prácticas de enseñanza de sus profesores, de manera involuntaria, entre otros.

Después de realizar la ubicación de las prácticas pedagógicas en el modelo didáctico, se puede notar que:

- En el nivel de comprensión, las prácticas más utilizadas son aquellas que pertenecen a las categorías conceptuales de semántica y epistemología, debido a que los estudiantes están empezando a reconocer los objetos matemáticos. Además, se puede observar que este nivel está relacionado con las cuatro etapas de demostración.
- En los niveles de comprensión y conexión se tienen prácticas de todas las categorías conceptuales, aun así, para el nivel de conexión los estudiantes ya superaron la producción de una conjetura y tienen clara la estructura de los objetos matemáticos.

- Para el nivel de aplicación, las prácticas pedagógicas a emplear son únicamente de la categoría conceptual de la didáctica, también se encontró que en este nivel se desarrollan la tercera y cuarta etapas de la demostración.
- Al finalizar la ubicación de las prácticas se evidencia organización diagonal en la tabla, que indica que a medida que el profesor avanza en los niveles de enseñanza, el estudiante adquiere una autonomía en el desarrollo de las prácticas.

Referencias y bibliografía

Ávila Godoy, J., Parra Bermúdez , F., & Ávila Godoy, R. (2012). Epistemología y didáctica de la matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 775-783.

Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. Þn Pimm, D. (ed.), Mathematics, teachers and children (Hodder & Stoughton: Londres), p.16-235.

Blažková, R. (2013). *Didactics of mathematics.* Brno.

Boero,P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof. Volume 8.

Bravo, L., & Arrieta, J. J. (2003). Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas: Resultados de su implementación. *Investigación en educación matemática : séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 153-160.

Calle Palomeque, C. E. (Septiembre de 2013). *Influencia de la Semántica en el Aprendizaje de las Matemáticas en el Segundo Curso de Bachillerato del Colegio Beningo Malo.* Cuenca: Universidad de Cuenca Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación.

Campos, A. (2005). Acerca de la epistemología de la matemática. *XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética* (págs. 93-95). Bogotá: Carlos Julio.

D'Andrea, R. E., & Sastre Vázquez, P. (2014). ¿Cómo generar habilidad para demostrar? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 471-479.

Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración*, 181-205.

Finol, J. E. (2004). Semiotica y epistemologia-diferencia, significación y conocimiento. *Revista venezonala de información, Tecnologia y Conocimiento*, 22-32.

García de Molero, Í. (2012). Semiótica y didáctica. Relaciones pensamiento/semiosis/mundo en la construcción de aprendizajes significativos en el aula Preescolar . *Omnia* , 11-24.

Garzon Carreño, M. (2015). Desarrollo y comprensión de la semiótica matemática a partir de la semiótica linguística y el lenguaje común. Bogotá: Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas.

Grabiner, J. V. (2009). Why proof? some lessons from the history of mathematics. *Proof and proving in mathematics education* (pág. 302). Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Komensky, J. A. (1947). *Didaktika analytická.* Praha.

Marcano, Noraida, & Reyes, W. (3 de Diciembre de 2007). Categorías epistemológicas para el estudio de los modelos de formación docente. *Multiciencias, 7*(3), 293-307.

Martínez Recio, Á. (Junio de 1999). Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de

la demostración matemática. España: Universodad de Granada.

MEN. (2006). *Estandares Basicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Revolución Educativa Colombia Aprende.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA, EE.UU.

Ortíz, H., & Jimenez, F. (2006). La demostración elemento vivo en la didáctica de la matemática. *Scientia et Technica*, 237-240.

Recio, Á. M. (2001). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica . *Quinto Simposio de la sociedad española de investigación en educación en matemática*, (pág. 17). Almería.

Sanabria Brenes, G. (s.f). Resolución de problemas geométricos. 10.

Sastre, P. (2014). ¿Cómo generar habilidad para demostrar?

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Transición del bachillerato a universidad en matemáticas desde la visión del docente

Luz Marina **Rodríguez-Cisneros**
Pontificia Universidad Católica del Ecuador – Sede Ibarra
Ecuador
lmrodriguez1@pucesi.edu.ec
Josefa **Perdomo-Díaz**
Universidad de La Laguna
España
jperdomd@ull.edu.es

Resumen

En este trabajo se presentan algunos resultados parciales de una investigación acerca de la transición entre bachillerato (educación secundaria) y universidad (educación terciaria). Se trata de un estudio exploratorio, con carácter de diagnóstico, cuyo objetivo es analizar qué elementos asocian los docentes universitarios al éxito o al fracaso en asignaturas del área de matemáticas en la transición del colegio a la universidad. Esta investigación se realizó en la Pontificia Universidad Católica del Ecuador – Sede Ibarra (PUCE-SI). Los datos se recogieron a partir de la grabación en video de un grupo focal en el que participaron seis docentes del área de matemáticas. Se realizó un análisis de contenido en el que se identificaron tres tipos de factores: actitudinales, aptitudinales y curriculares.

Palabras clave: transición, matemática, educación secundaria, bachillerato, educación terciaria, universidad.

Introducción

Diversos estudios indican que la transición de bachillerato (educación secundaria) a universidad (educación terciaria) puede ser problemática para los estudiantes, llegando en muchos casos a provocar la deserción durante el primer año de universidad (Bardelle y Di Martino, 2012; Di Martino y Gregorio, 2018; Gueudet, 2008). En la mayoría de países de Latinoamérica, la tasa de deserción en estudios universitarios está sobre el 50% (Rubio Gómez, Tocaín Garzón, y Mantilla Guerra, 2012). En el caso de Ecuador, entre un 12% y un 30% de los alumnos y alumnas abandona en los tres primeros semestres de estudio en la universidad

(Fernández Orrantia y Silva, 2014).

De acuerdo a González (2005), algunos de los factores que están relacionados con la deserción en la universidad son los conocimientos iniciales deficientes, el rendimiento académico insuficiente y la carencia previa en estrategias de aprendizaje en matemáticas.

El acceso a las universidades públicas en Ecuador depende del puntaje obtenido en un examen que aplica el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEVAL) a los estudiantes de último año de bachillerato, denominado Ser Bachiller. La nota obtenida en este examen representa el 30% del promedio general para titulación, además de permitir la postulación a las universidades públicas. El examen Ser Bachiller evalúa aptitudes y destrezas en cuatro dominios: matemático, lingüístico, científico y social. En cuanto al dominio matemático, se evalúa la organización y análisis de información, la resolución de problemas estructurados, el uso de relaciones y patrones, razones y proporciones y relaciones entre variables y sus representaciones. Las universidades privadas cuentan con sistemas de admisión con exámenes de ingreso con criterios similares a los establecidos por el INEVAL.

Los resultados de estas evaluaciones en el ciclo 2016-2017 a nivel nacional, muestran un nivel de 7,33 sobre 10, en el área de matemáticas, lo que según la escala establecida por el INEVAL, correspondería a un nivel elemental. El estudio muestra porcentajes de éxito inferiores al 50% en grupos temáticos como: resolución de problemas estructurados (46%), relaciones entre variables y sus representaciones (41%), organización y análisis de información (40%) y razones y proporciones (37%), lo que indicaría niveles insuficientes en el desarrollo de ciertas destrezas matemáticas en los estudiantes que completan el bachillerato (INEVAL, 2017).

Además de los conocimientos disciplinares, la transición entre el último año de secundaria y el primer semestre de universidad, puede resultar compleja por muchos otros factores ya que los estudiantes sienten la "incertidumbre" de dejar el entorno conocido de secundaria y enfrentarse al entorno universitario, que es desconocido en cuanto al sistema de enseñanza, recuperación académica y evaluación, entre otros (Gueudet, 2008).

Para identificar los factores que los docentes de las asignaturas de matemáticas de primer año de universidad relacionan con el éxito o el fracaso en la transición de bachillerato a universidad se realizó un estudio exploratorio en la Pontificia Universidad Católica del Ecuador – Sede Ibarra (PUCE-SI), en donde se desarrolló un grupo focal con seis docentes del área de matemáticas.

Marco conceptual

Tal y como hemos señalado, el proceso de transición de bachillero a universidad está asociado a factores de tipo cognitivo y afectivo. El dominio cognitivo incluye las componentes de la competencia matemática que integran la comprensión conceptual con la fluidez procedimental, la competencia estratégica, el razonamiento adaptable y la disposición productiva hacia la disciplina (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001).

Diversas investigaciones señalan que uno de los elementos que influye en la transición entre bachillerato y universidad es la caracterización que se hace de los temas matemáticos; mientras a nivel superior se hace énfasis en aspectos formales como la demostración, en el nivel secundario se prioriza los cálculos operativos (Liebendörfer y Schukajlow, 2017; Rach y Heinze, 2017). Para el estudiante, el cambio de una matemática basada en procesos de cálculo, a un

enfoque en el desarrollo de la comprensión y actividad matemática puede ser complejo, por lo que se requiere de estrategias que permitan modificar la forma en que los estudiantes se enfrentan a la disciplina. En este cambio de perspectiva entran en juego elementos de tipo cognitivo y también afectivo, relacionados con las creencias, actitudes y emociones de los estudiantes frente a la disciplina (Gil, Blanco, y Guerrero, 2005; Gómez-Chacón, 2009; McLeod, 1992; Schukajlow et al., 2012).

En cuanto al domino afectivo, éste se considera estructurado en torno a tres dimensiones fuertemente interrelacionadas y relacionadas a su vez con el dominio cognitivo: emociones, actitudes y creencias (McLeod, 1992). En el ámbito de las emociones, puede distinguirse entre emociones globales, hacia la disciplina matemática, y locales, hacia actividades concretas de la matemática relacionadas con alguna parte específica de la disciplina (álgebra, geometría, etc.) o con algún tipo concreto de actividad como la resolución de problemas o la argumentación, etc (Goldin, 2002).

En cuanto a las creencias, Eynde, Corte y Verschaffel (2006) distinguen entre creencias sobre el objeto (en este caso las Matemáticas), el contexto y el propio individuo. Las creencias sobre el propio individuo incluyen la visión de los estudiantes de sí mismos como aprendices de Matemáticas, dimensión en la que Roesken, Hannula y Pehkonen (2011) han identificado siete dimensiones: sus motivaciones hacia las Matemáticas, sus sentimientos mientras estudian la materia, sus creencias sobre las Matemáticas como disciplina, su autopercepción sobre su eficacia como aprendices, su contexto académico y su apoyo familiar.

Otro elemento que diferencia las dos etapas educativas consideradas en esta investigación es la formación de los docentes. En Ecuador, la mayoría de profesores de bachillerato tienen formación en Ciencias de la Educación, a nivel de licenciatura o maestría, y disponen de un currículo con base didáctica (con énfasis en procesos de enseñanza-aprendizaje) para la asignatura de matemática; mientras que en la universidad los docentes tienen titulación en áreas especializadas de la disciplina y trabajan con currículos con una fuerte base epistemológica, que pone el énfasis en la estructura de la disciplina científica.

Metodología

Se trata de un estudio exploratorio, de tipo cualitativo, centrado en el análisis del caso de la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, universidad privada más antigua del país, datos históricos muestran porcentajes de deserción entre 13% y 33% en su Sede Ibarra (Rubio Gómez, Tocaín Garzón, y Mantilla Guerra, 2012). En los semestres iniciales de las carreras de la Sede Ibarra (PUCE-SI), según los informes de notas finales de entre los años 2012 y 2017 que constan en Secretaría General, las asignaturas del área de matemáticas (matemática, lógica matemática, geometría) muestran índices de pérdida entre un 27% y hasta un 76%.. Rubio Gómez et al. (2012) señalan que estos datos de deserción y reprobación en asignaturas de matemáticas en primeros niveles, estarían relacionados con la transición del bachillerato a universidad.

Los datos se recogieron a partir de un grupo focal con los docentes de matemática de la PUCE-SI realizado en mayo del 2018. Se realizó una invitación a los diez docentes del área de matemáticas que pertenecen a la Escuela de Ingeniería, de los cuáles aceptaron seis docentes. Los participantes tienen entre tres y diez años de experiencia como docentes universitarios de asignaturas del área de matemáticas; dos de ellos fueron además docentes en educación

secundaria.

La sesión del grupo focal tuvo noventa minutos de duración y fue grabada en video. Para su ejecución se diseñó previamente un protocolo en el que se establecieron guías para su desarrollo. El grupo focal comienza con la explicación a los participantes de la finalidad de la actividad. A continuación se planteó como pregunta abierta: ¿*Qué factores consideran relevantes en la transición de la matemática del bachillerato a la matemática universitaria*? y se permitió a los participantes que respondan desde su propia experiencia con la finalidad que la información emergiera de ellos mimos. Posteriormente a los participantes se les preguntó sobre el nivel de relevancia en una escala de alto, medio o bajo, en función de su experiencia docente sobre los factores relacionados con las características individuales relacionadas al dominio afectivo identificado por McLeod (1992), aspectos sobre la caracterización de la matemática en secundaria y universidad mencionados por Liebendörfer y Schukajlow (2017) así como por Rach y Heinze (2017) y elementos del dominio cognitivo mencionados por Kilpatrick, Swafford y Findell (2001). Con esta técnica se obtuvo información para contrastar los factores de investigaciones previas con aspectos que corresponden al contexto de los estudiantes de la PUCE-SI.

A partir de la información del grupo focal se realizó un análisis de contenido donde se mencionaron tres tipos principales de factores: la actitud, la aptitud y el currículo. El primer factor (actitud) está relacionado con una de las dimensiones del dominio afectivo mencionadas por McLeod (1992), el segundo factor (aptitud) está en relación con el dominio cognitivo que menciona Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) mientras que el último factor (currículo) corresponde a la organización de la matemática mencionada por Liebendörfer y Schukajlow (2017). Esta relación se estableció dado que los participantes no consideraron todos los aspectos de las dimensiones afectiva y cognitiva como relevantes para la transición y enfatizaron en aspectos puntuales mientras que el factor de organización de la matemática la asociaron con el currículo de la asignatura.

Análisis de datos

Para el análisis de contenido se organizó los aportes de los participantes en los factores que fueron identificando y se incluyó referencias textuales de sus participaciones. Todos los docentes son identificados con seudónimos.

Factor actitudinal

En cuanto a las características individuales del dominio afectivo, en la tabla 1 se muestran los aspectos que los participantes señalaron que tienen alta relevancia como son el interés, los hábitos de estudio y los valores, elementos que se identificaron como factores actitudinales

Tabla 1

Factores actitudinales identificados

Factor del estudiante	Relevancia asociada por el docente					
	Germania	Pietro	Carlos	Felipe	Rubén	César
Interés por aprender	x	x	x	x	x	
Hábitos de estudio		x	x	x		
Vivencia de valores			x	x	x	

Fuente: Grupo focal PUCE-SI. 2018.

Los docentes participantes coinciden en que los aspectos actitudinales podrían ser más relevantes incluso que aspectos cognitivos, siendo especialmente mencionado el interés, considerado dentro del dominio afectivo (McLeod, 1992). Por ejemplo, Germania señala que "cuando se tiene deficiencias (conocimientos) se puede superar con aspectos actitudinales (interés)" mientras que Felipe señala que "los docentes fallamos al no utilizar la tecnología para despertar el interés en el estudiante". Adicionalmente, Pietro menciona que "la falta de organización de tiempo no permite desarrollar capacidades analíticas", lo que estaría relacionado con la necesidad de contar con hábitos de estudio. Por otro lado, Carlos menciona que el "modelo aplicado en educación secundaria es demasiado paternalista" y provoca "pérdida de valores". En su reflexión, indica que "la educación es integral, tanto valores como conocimientos" por lo que el modelo de secundaria estaría "provocando actitudes negativas incluso en hábitos de estudio", afirmación con la que concuerda Rubén.

Factor aptitudinal del estudiante

Como factor aptitudinal, en la tabla 2 se enlistan aspectos que los participantes identifican como relevantes en cuanto al dominio cognitivo del estudiante.

Tabla 2

Factores aptitudinales asociados a los estudiantes

Factor del estudiante	Relevancia asociada por el docente					
	Germania	Pietro	Carlos	Felipe	Rubén	César
Lectura comprensiva	x					
Conocimientos previos		x	x	x	x	
Competencia estratégica		x	x	x		
Resolución de problemas	x		x	x	x	

Fuente: Grupo focal PUCE-SI. 2018.

En cuanto a este factor, Germania menciona que "los estudiantes no saben leer", aspecto necesario para "traducir el lenguaje natural a lenguaje simbólico" y resolver problemas. En este sentido, Pietro hace referencia al uso de estrategias y al hecho que en la universidad "se profundiza en áreas específicas de la matemática". Por otro lado, Carlos menciona que "en bachillerato ya se trabaja en resolución de problemas más allá de procesos memorísticos" pero que "no se está haciendo lo suficiente [en secundaria] para que los estudiantes estén en igualdad de condiciones para la universidad". En este aspecto Rubén concuerda indicando que "los estudiantes suelen ser memorísticos" y que se les dificulta la aplicación en resolución de problemas, siendo estos aspectos parte del dominio cognitivo mencionado por Kilpatrick, Swafford y Findell (2001).

Factor aptitudinal del docente

En la tabla 3 se indican elementos como el dominio científico y la formación didáctica como destacados en cuanto al dominio cognitivo por parte del docente.

Tabla 3

Factores aptitudinales relacionados con el docente

Factor del docente	Relevancia asociada por el docente					
	Germania	Pietro	Carlos	Felipe	Rubén	César
Dominio científico	x	x	x	x		x
Formación didáctica	x	x	x			x

Fuente: Grupo focal PUCE-SI. 2018.

Los participantes también hicieron referencia al rol del docente. Germania, por ejemplo, indica que además de la formación especializada, se requiere una formación en didáctica, pues afirma "se puede saber mucho de una asignatura, pero si no se sabe cómo enseñarla, de nada vale", con lo concuerda Pietro. Desde otro punto de vista, Carlos menciona en los últimos años a nivel de bachillerato "ya no se exige la titulación en docencia y esto ha afectado la calidad de la educación", mientras que, en la universidad si bien se requiere el "dominio del conocimiento científico, también se requiere formación especialmente en didáctica" por lo que considera que este aspecto es sumamente importante en la transición. En contraposición, Felipe afirma que no sólo se requiere la formación en educación, sino más bien "el gusto por enseñar" mientras que César indica que aunque "mi perfil como ingeniero me da esa habilidad en matemáticas" para enfrentar la responsabilidad como docente universitario, al estudiante le puede afectar el cambio ya que "no se tiene la formación como docente".

Factor curricular

En el factor curricular que se detalla en la tabla 4 se ha incluido aspectos que han mencionado los participantes como el modelo educativo, contenido, evaluación y estrategias.

Tabla 4

Factores curriculares identificados

Factor curricular	Relevancia asociada por el docente					
	Germania	Pietro	Carlos	Felipe	Rubén	César
Modelo educativo			x	x	x	x
Contenidos		x	x	x	x	x
Evaluación			x	x	x	x
Estrategias			x	x		x

Fuente: Grupo focal PUCE-SI. 2018.

En cuanto a la organización curricular, Felipe menciona que "en el bachillerato unificado enseñan de todo y no aprenden nada", aspecto con el que concuerda César ya que indica "que los estudiantes no ahondan en los temas". Esta reflexión la realizan ya que antes del 2011 estaba vigente el bachillerato por especialidades que permitía profundizar en áreas de conocimiento específicas y a partir de ese año entró en vigencia el bachillerato general unificado que tiene como objetivo establecer una base común de conocimientos para acceder a estudios superiores o al campo laboral. En este sentido, Rubén indica que los estudiantes "tienen diferentes niveles de

conocimiento por su formación previa y que esto no ha mejorado con el bachillerato unificado".

Por otra parte, Carlos señala la necesidad de "usar estrategias digitales por parte del profesor" al igual que Felipe, con las que se refiere a estrategias que permitan el uso de tecnologías en el proceso de enseñanza. Mientras que en el resto de los elementos indicados había consenso entre los docentes participantes, en este elemento hay cierto desacuerdo. Por ejemplo, Germania indica que estos elementos no son tan relevantes ya que "el estudiante debe adaptarse cuando ingresa a universidad", por lo que considera que aspectos de madurez (actitudinales) son más significativos.

Por último, Pietro estima que el sistema de evaluación diferente influye a nivel medio en la transición, mientras que Carlos menciona que el sistema de recuperación de bachillerato es paternalista por lo que influye de forma significativa en forma negativa en la transición, afirmación con la que concuerdan Felipe y Rubén.

Resultados y discusión

La información obtenida a partir del grupo focal muestra resultados consistentes con la problemática en la transición de secundaria a universidad mencionada por Bardelle y Di Martino (2012); Di Martino y Gregorio (2018) y Gueudet (2008). En cuanto al dominio afectivo, los docentes identifican el factor actitudinal como un aspecto relevante en la transición de secundaria a universidad, incluso por sobre aspectos cognitivos. Esto hace referencia a una de las tres dimensiones que McLeod (1992) utiliza para describir este dominio; las otras dos (emociones y creencias) no fueron mencionadas de forma explícita por los participantes. De acuerdo a la información analizada, los participantes no identificaron aspectos actitudinales de parte del docente que puedan influir en la transición. Esta información se contrastará en una etapa posterior de la investigación, en la que se analizará este mismo problema desde la perspectiva de los estudiantes de primer año de universidad. Un aspecto nuevo que los docentes mencionan en relación a este factor es los valores como el respeto y la responsabilidad.

Respecto del dominio cognitivo que integra aspectos conceptuales, procedimentales, estratégicos y de razonamiento (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001), los resultados muestran elementos tanto relacionados con el docente como con el estudiante por lo que se ha presentado el factor aptitudinal en forma separada como factor aptitudinal del estudiante y factor aptitudinal del docente. Como aspectos aptitudinales del estudiante, se destacan los conocimientos previos y la habilidad de resolución de problemas mientras que en los aspectos aptitudinales del docente se menciona el dominio científico de la matemática y la formación didáctica pero no se señalan de forma explícita aspectos de competencia estratégica y resolución de problemas que deba dominar el docente.

Por otro lado, en el factor curricular que está en relación con la caracterización de la matemática como aspecto sensible en la transición de secundaria a universidad mencionada por Liebendörfer y Schukajlow (2017) así como por Rach y Heinze (2017), los participantes muestran opiniones contrapuestas pues dos de ellos consideran que tiene relevancia media y baja mientras que el resto señala que los aspectos del modelo educativo, organización de contenidos y evaluación son muy relevantes en la transición. Se destaca el hecho que en este último grupo de participantes están quienes tienen experiencia como docentes en educación secundaria por lo que su aporte es importante para este estudio.

Los resultados obtenidos en esta primera fase son especialmente útiles para ubicar en el contexto de la PUCE-SI a los factores identificados en investigaciones previas. Como siguiente fase dentro de la investigación se complementará este estudio con la visión del alumnado respecto de los factores que desde su punto de vista influyen en la transición de la matemática de secundaria a universidad para establecer relaciones con los resultados de esta primera fase e identificar oportunidades de intervención que puedan ser implementadas por las autoridades académicas de la PUCE-SI y a su vez podrían ser un referente para otras instituciones de educación superior.

Referencias y bibliografía

Bardelle, C., & Di Martino, P. (2012). E-learning in secondary–tertiary transition in mathematics: For what purpose? *ZDM - Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0417-y

Di Martino, P., & Gregorio, F. (2018). The Mathematical Crisis in Secondary–Tertiary Transition. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9894-y

Eynde, P. O., Corte, E. D., & Verschaffel, L. (2006). "Accepting emotional complexity": A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 193–207. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9034-4

Goldin, G. A. (2002). Affect, Meta-Affect, and Mathematical Belief Structures. Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?, 59–72. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_4

González F, L. E. (2005). Estudio sobre la repitencia y deserción en la educación superior chilena. Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y El Caribe, (July).

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary – tertiary transition, (January), 237–254. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6

INEVAL. (2017). Informe de resultados Ser Bachiller ciclo 2016-2017. Retrieved from http://www.evaluacion.gob.ec/dagireportes/nacional/2016-2017.pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds. . (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. *Book Reviews*, 34(6), 461. https://doi.org/10.17226/9822

Liebendörfer, M., & Schukajlow, S. (2017). Interest development during the first year at university: do mathematical beliefs predict interest in mathematics? *ZDM - Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0827-3

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education. a reconceptualization.pdf.

Rach, S., & Heinze, A. (2017). The Transition from School to University in Mathematics : Which Influence Do School-Related Variables Have ?, 1343–1363. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9744-8

Roesken, B., Hannula, M., & Pehkonen, E. (2011). *ADM Mathematics Education*, 43: 497. Retrieved from https://doi.org/10.1007/s11858-011-0315-8

Rubio Gómez, M. J., Tocaín Garzón, A. L., & Mantilla Guerra, M. L. (2012). La deserción universitaria en los primeros niveles y la inserción laboral de los graduados. *Axioma*, 1. Retrieved from http://axioma.pucesi.edu.ec/index.php/axioma/article/view/363

Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Müller, M., & Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment , value , interest and self-efficacy expectations, 215–237. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9341-2

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Escalar un proyecto con tecnología, el caso de las evaluaciones en línea en matemáticas

Jorge **Gaona**
Universidad Academia de Humanismo Cristiano y Universidad Paris Diderot
Chile y Francia
jgaonap@docentes.academia.cl

Resumen

En esta contribución se estudia el proceso de escalamiento de un sistema de evaluación en línea para matemáticas en 8 sedes de una institución de educación superior chilena que tiene 26 sedes en todo el país. Se dan muestras de algunos elementos que dan cuenta que el escalamiento es sostenible en el tiempo, a partir de los conceptos de cobertura, profundidad, sustentabilidad y cambio en la propiedad del proyecto a escala global y se discuten los factores a escala local que favorecen la integración de la tecnología en la práctica docente y que tributan a este proceso de escalamiento: valor pragmático y epistémico, flexibilidad y cercanía de los recursos con el curriculum efectivo, participación, costos y apoyo institucional.

Palabras clave: evaluación online, escalamiento, tecnología, educación superior.

Introducción

La integración de la tecnología, particularmente de recursos digitales, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es un proceso complejo tanto para el profesor como para los estudiantes (Trouche, 2004) y donde el profesor es clave (Abboud-Blanchard, 2014; Bozkurt & Ruthven, 2017; Trigueros, Lozano, & Sandoval, 2014) . Si además, se agrega una intención institucional (de un país, región, o institución educacional de gran tamaño) de escalar un proyecto con tecnología se suma una dificultad adicional (Clark-Wilson, 2017). Esto se da porque se espera que la integración de tecnología se produzca en muchos lugares diferentes, con contextos sociales diversos con el fin de lograr cobertura, que es la definición básica de escalamiento. Al mismo tiempo esta integración es un proceso local, entre los directivos, el o los profesores y los estudiantes de una comunidad educativa que se espera perdure en el tiempo.

En la Universidad Tecnológica de Chile INACAP, desde el 2015 se está desarrollando el proyecto SEDOL-M (Sistema de Evaluación Dinámica Online en Matemáticas) que tiene por objetivo desarrollar e implementar un sistema de evaluación en línea para fomentar el trabajo autónomo fuera de la sala de clases de estudiantes de matemática I. La institución cuenta con 26 sedes repartidas en todo Chile y hasta el momento, el proyecto se ha implementado en 8 sedes, impactando a más de 13.000 estudiantes a cargo de más de 120 profesores.

En el contexto del proyecto SEDOL-M, en esta comunicación queremos responder a las

siguientes preguntas de investigación: ¿Cuáles son los indicios del proyecto que dan cuenta de un escalamiento sostenible? ¿Cómo se han desarrollado los factores que favorecen o dificultan la integración de la tecnología?

Proyecto SEDOL-M

Como se mencionó anteriormente esta investigación se enmarca dentro del proyecto del SEDOL-M para la asignatura de matemática I (nivelación de matemáticas) en INACAP (Gaona, Reguant, Valdivia, Vásquez, & Sancho-Vinuesa, 2018). Este proyecto es impulsado por el Centro de Innovación en Educación (CIEDU) de INACAP a partir de un pequeño proyecto desarrollado por un grupo de profesores de uno de las sedes de INACAP que el mismo CIEDU financió mediante un concurso interno en el año 2013.

En esta primera experiencia, se hizo una implementación con cerca de 200 estudiantes y mediante pruebas estadísticas se concluyó que había una correlación positiva entre el uso de la plataforma y los resultados de los estudiantes en una evaluación en formato lápiz papel, externa a la intervención, es decir, se observó una mejora en los resultados de los estudiantes (Gaona & Hardy, 2014), resultados que son coherentes con otras intervenciones de este tipo en contextos similares.

A partir de los buenos resultados citados anteriormente se decidió escalar el proyecto a toda la institución. Tomando en cuenta la envergadura de la institución, el volumen de estudiantes de esta materia, y el hecho de que los resultados positivos a pequeña escala y en entornos controlados son difíciles de replicar con profesores ordinarios (Artigue, 2011), el proyecto se diseñó de tal forma de ser escalado paulatinamente.

La estrategia de diseño e implementación se ha basado principalmente en la formación de equipos de diseño en cada sede (entre 3 y 6 profesores en cada sede de un total de entre 10 y 30 profesores por sede), quienes han programado cada una de las más de 500 familias de preguntas que componen el sistema, cubriendo diversos tópicos, como álgebra, funciones, trigonometría, números complejos, entre otros. Con los profesores, además se han discutido decisiones con respecto a las reglas de implementación tanto para el profesorado como para los estudiantes. El proyecto recomenzó en agosto del 2015 con una fase de diseño, el primer piloto se implementó entre marzo y agosto del 2016 con 1.200 alumnos de cuatro sedes. Entre marzo y agosto del 2017 se extendió al 100% de estos cuatro sedes y se integró una quinta sede llegando a 8.500 estudiantes distribuidos en 339 cursos a cargo de 96 profesores. En el período marzo-agosto del 2018 alcanzó los 13.000 estudiantes a cargo de más de 120 profesores en 8 sedes de INACAP.

Desde el punto de vista tecnológico, el sistema de evaluación se desarrolla en una plataforma Moodle (www.moodle.org), que integra la calculadora Wiris (www.wiris.com) para crear preguntas que contengan elementos aleatorios (números, símbolos y gráficos) en el enunciado.

Un ejemplo de una pregunta con las características descritas anteriormente se muestra en la figura 1, que fue diseñada por profesores del equipo SEDOL Santiago Sur. En esta pregunta, los elementos aleatorios son: el ángulo y la magnitud del número complejo y las frases: “el conjugado”, “la parte real” y “la parte imaginaria” que modifica el elemento de los números complejos sobre los que se focaliza la pregunta.

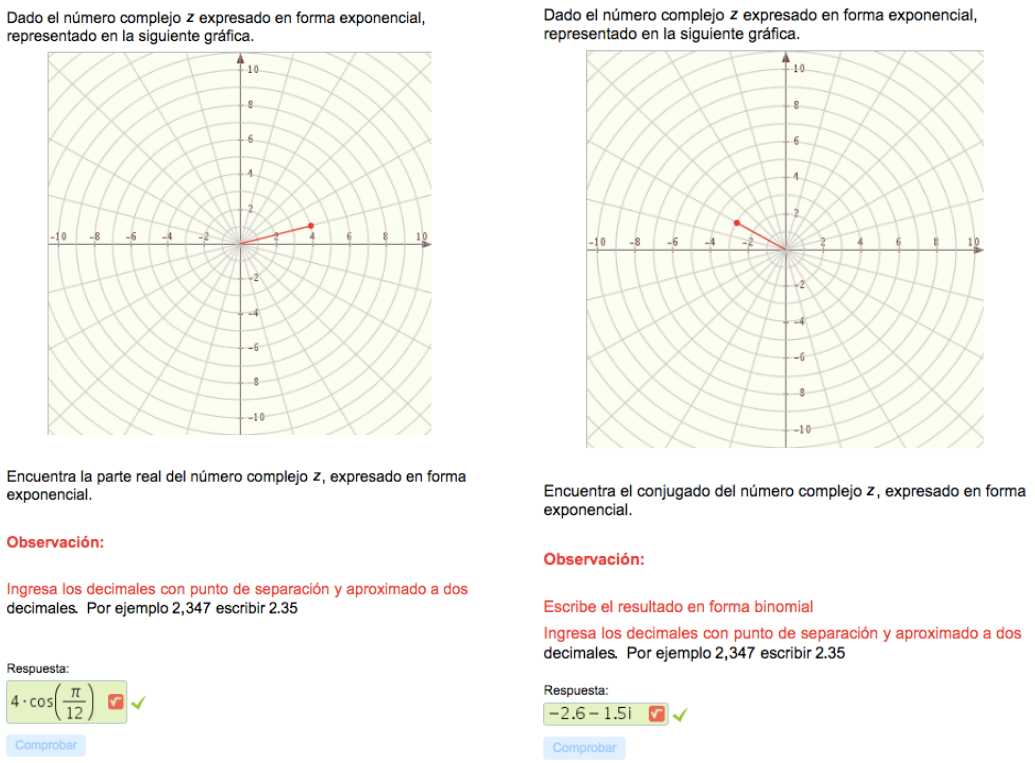


Figura 1. Ejemplo de pregunta de números complejos con parámetros aleatorio

Para ingresar estas respuestas, los estudiantes pueden utilizar un editor de ecuaciones o un sistema de reconocimiento de escritura a mano alzada (ver figura 2), el cual aparece de forma automática dependiendo si se conecta mediante un computador o un dispositivo móvil respectivamente.

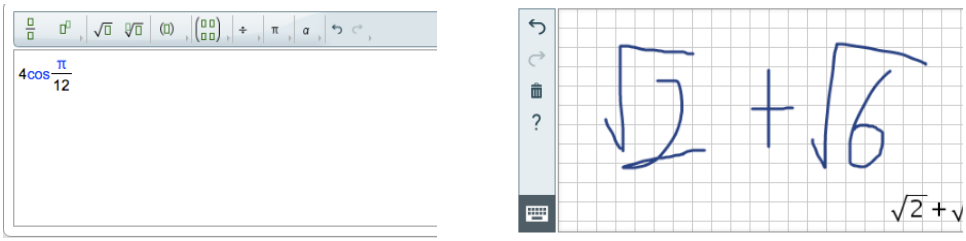


Figura 2. Sistema para escribir símbolos matemáticos en las respuestas de los estudiantes.

Una vez que el estudiante responde la pregunta, el sistema no solamente le indica inmediatamente si su respuesta es correcta o no, además, le proporciona una estrategia de solución de la tarea planteada de acuerdo con los parámetros aleatorios, la cual también fue programada por los profesores. Por ejemplo, en la pregunta de la figura 1, una vez que el estudiante ha respondido, el sistema le entrega la retroalimentación paso a paso que se muestra en la figura 3.

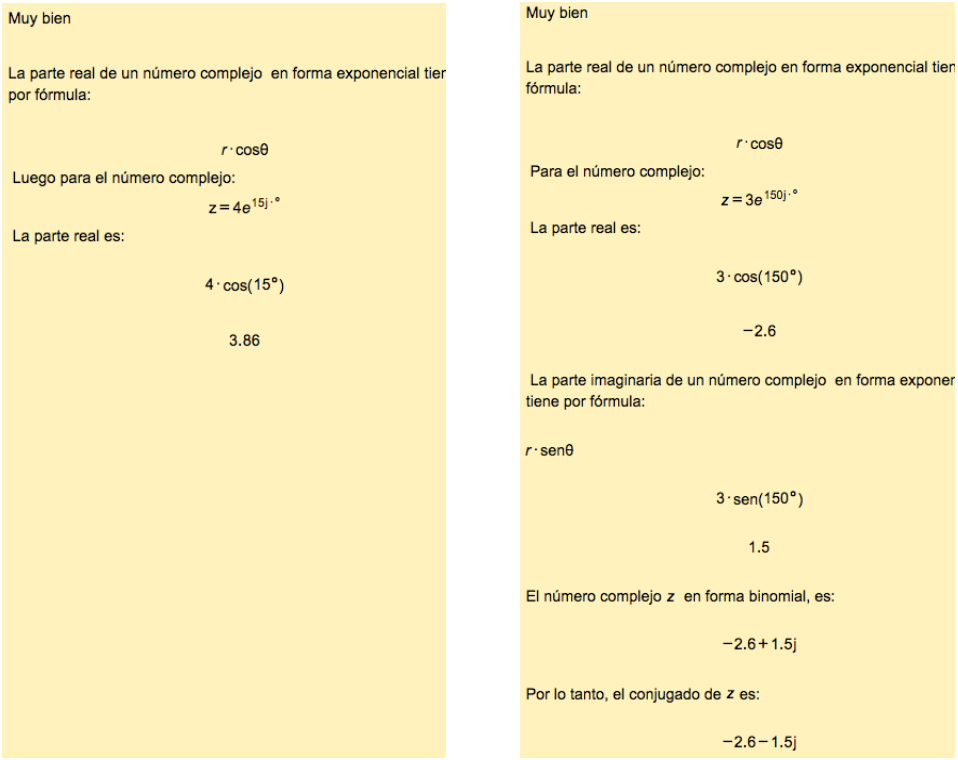


*Figura 3***.** Retroalimentación paso a paso en función de los parámetros aleatorio

Como todo sistema informático, además de las potencialidades descritas anteriormente, hay una serie de limitaciones que tiene el sistema. Por ejemplo, los gráficos son imágenes fijas con las cuales el estudiante no puede interactuar. También, al igual que en otros sistemas de este tipo, sólo puede evaluar la respuesta final y no el proceso de trabajo de los estudiantes y por último, la retroalimentación, aunque es información valiosa, puede generar dificultades en los estudiantes.

Marco Teórico

Coburn (2003) establece que para que el escalamiento perdure en el tiempo, además de la cobertura, un proyecto debe dar muestras de profundidad: relacionada con los cambios dentro de las prácticas de aula; sustentabilidad: relacionadas con los apoyos locales y globales para que el proyecto se mantenga y cambios en la propiedad del mismo.

Todos estos elementos deben darse a escala global y al mismo tiempo son procesos que se desarrollan, a escala local. Al enfocarse en la escala local, en la literatura se han reportado una serie de factores que pueden favorecer o dificultar la integración de la tecnología como son el valor pragmático: relacionados con aquello que puedo hacer con la tecnología que sin ella es imposible o que puede hacer de forma más eficiente; el valor epistémico de las tareas mediadas por la tecnología: relacionado con el aporte al aprendizaje (Artigue, 2002), la flexibilidad y la cercanía con los recursos con el curriculum efectivo (Ruthven, 2007), la participación de los profesores en los procesos de selección, validación y/o creación de los recursos (Jones & Pepin, 2016), los costos materiales, temporales e instrumentales (Abboud-Blanchard, 2014) y el apoyo institucional de tal forma que no sólo sean los “militantes tecnológicos” quienes la adopten. Todos estos factores se resumen en la figura 4.

En la figura 4, cada uno de los segmentos que une el centro del hexágono con los vértices puede ser visto como una escala cualitativa donde los valores óptimos están en los extremos. De los seis factores que se proponen, cuatro tienen un signo "+" que indica que ese factor es creciente. Es decir, se espera que el valor pragmático, epistémico, la participación y la flexibilidad de los recursos vaya creciendo y a medida que crece se alcanza el óptimo. En cambio, los costos y la distancia con el currículum se espera que vayan decreciendo y a medida que decrecen se alcanza su óptimo.

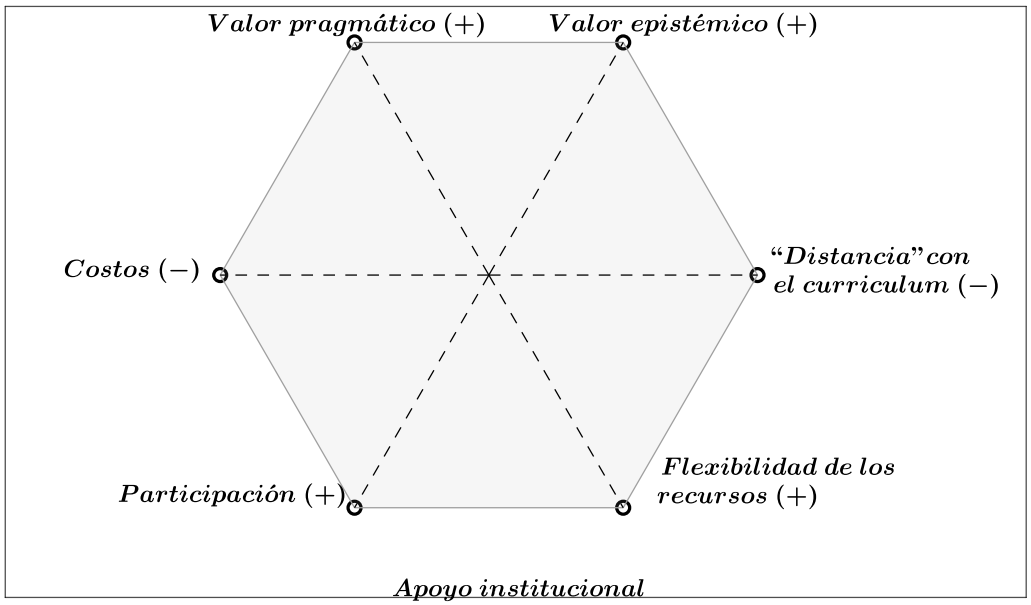


Figura 4. Factores que influyen en la integración de tecnología, extraído de Gaona (2018)

Este esquema además de ser un resumen de los factores, tiene por objetivo explicitar la interrelación y tensión que puede existir entre ellos, puesto que cualquiera de los factores donde nos centremos, está relacionado con uno o más de uno de los restantes.

Por ejemplo, en un estado ideal, el valor epistémico es alto y la distancia con el currículum es pequeña, pero también podría suceder a la inversa, es decir, un aumento del valor epistémico podría implicar un aumento en la distancia con el currículum y tener como consecuencia el rechazo por parte de los de los recursos o hacer exactamente lo que el profesor realiza en clases en un ambiente tecnológico podría implicar que estas tareas tengan un bajo valor epistémico.

Metodología

Debido a la naturaleza de las preguntas de investigación, la metodología elegida es mixta. Por una parte se utilizarán datos cuantitativos para estudiar la cobertura de la participación de los estudiantes que cursaron las versiones más masivas de Matemática I en SEDOL-M, estos datos son proporcionados por la plataforma. Mediante datos de informes y entrevistas se establecieron los indicios de que se cumplen con las condiciones que establece Coburn (2003) para demostrar que un proyecto puede perdurar en el tiempo. Además, se estudiaron mediante el análisis de las preguntas que conforman la plataforma, registros de clases y entrevistas los factores que favorecen o dificultan la integración de tecnología.

Resultados

Hasta la fecha, se han reportado los datos de la intervención del 2017 y están en proceso de análisis los resultados del 2018. Un primer indicio es la cobertura, que es precisamente la definición básica de escalamiento. En Gaona et al., (2018, p. 1000) se reportó un promedio 68,67% de participación en cada evaluación de los estudiantes durante el primer semestre del 2017 en 4 sedes y en dos de las versiones de matemática I más masivas en el proyecto en todas las evaluaciones. Para la implementación del primer semestre del 2018. Además, se reportó un promedio 3,61 intentos por estudiante en cada evaluación y 126,31 minutos de trabajo en cada evaluación, existiendo una gran variabilidad entre los diferentes tópicos, lo que evidencia una auto-regulación del trabajo por parte de los estudiantes. Los datos del 2018 se están procesando, pero cálculos preliminares muestran resultados similares.

Lo anterior muestra que los alumnos lo estén usando, sin embargo, ¿cómo se puede evidenciar que exista profundidad, desarrollo sostenible y cambio en la propiedad del proyecto? Puesto que hay un sinnúmero de proyectos que a pesar de tener buena cobertura no se logran mantener en el tiempo.

Hay cuatro elementos que pueden dar cuenta de que la sustentabilidad del proyecto es posible:

Certificación de los profesores: durante las distintas etapas del proyecto, 18 profesores repartidos en las 8 sedes participantes se han certificado como programadores nivel medio y avanzado en Wiris. Esto les permite frente a la institución evidenciar parte de las competencias aprendidas, lo que a su vez, les permite optar a asumir roles de instructores de pares para nuevas sedes que se incorporen.

Financiamiento de las sedes: como se mencionó en la descripción del proyecto, el financiamiento inicial lo realizó el CIEDU, sin embargo, de forma paulatina, las sedes han asumido los costos del proyecto: licencias y pago de horas de trabajo de los profesores, lo que da muestra de un apoyo de las autoridades locales al proyecto y que es una de las condiciones para darle sustentabilidad al proyecto.

Diversificación del proyecto: durante estos tres años, en varias de las sedes participantes han aparecido una serie de iniciativas de parte de los equipos SEDOL que han expandido en términos disciplinares el proyecto. La sede Calama presentó el proyecto SEDOL-E. El equipo SEDOL La Serena, está desarrollando las nivelación de matemáticas utilizando lo desarrollado en el proyecto y complementándolo con preguntas nuevas. El equipo SEDOL Renca está desarrollando SEDOL-F. El equipo SEDOL Rancagua está desarrollando SEDOL-C. El equipo Santiago Sur ha estado desarrollando variaciones semióticas de algunas preguntas para levantar investigación. Las letras E, F y C corresponden Economía, Física y Cálculo respectivamente y en cada uno de estos proyectos los profesores están diseñando tareas específicas a esas disciplinas, donde se han aliado con otros profesores de especialidad para desarrollar el proyecto. Todas estas iniciativas muestran que se ha producido un verdadero cambio en la propiedad del proyecto, puesto que cada equipo ha buscado fuentes de financiamiento para desarrollarlos.

Superación de crisis: durante la implementación masiva del 2018, hubo un problema técnico importante que hizo que a muchos estudiantes les apareciera un error cuando trabajaban en las evaluaciones. Estos errores comenzaron a ser reportados a la administración de la plataforma y dada la envergadura del proyecto, a la semana se tenían más de 700 reportes y el

número iba creciendo. Como no se encontraba solución al problema se les propuso a los equipos de cada sede suspender el proyecto hasta dar con la solución y todos los equipos respondieron, de forma unánime que preferían "aguantar" a los estudiantes mientras se solucionaba el problema. Esta fue una muestra significativa de apropiación del proyecto, puesto que fue en una crisis donde los profesores diseñadores siguieron apostando por él.

A la luz de los procesos anteriormente descritos, nos preguntamos por la forma en que se han desarrollado los factores reportados por la literatura como facilitadores u obstaculizadores de la integración con la tecnología: valor pragmático y epistémico, flexibilidad y cercanía con el currículum, participación, costos y apoyo institucional. Por una parte hay una serie de características que se describieron en el proyecto que dan cuenta del valor pragmático de la plataforma, sin embargo para establecer el valor epistémico, es necesario analizar las tareas utilizando un marco teórico adecuado que permita caracterizarlos. En Gaona (2018a) se reporta la relación entre la participación de los profesores en el diseño, el valor epistémico y la cercanía con las tareas habituales. En este estudio se utiliza como marco teórico los Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016) y se concluye que las tareas trabajan principalmente la dimensión semiótica e instrumental, dejándose de lado la dimensión discursiva. Además, se reporta que las tareas son cercanas a las tareas habituales de los profesores. La participación de parte de los profesores de cada sede en el proceso de diseño explica en gran medida la cercanía con las tareas habituales, además los profesores diseñadores han realizado un acompañamiento a sus colegas usuarios, lo que ha dado validez entre pares al sistema. Todo esto se ha logrado, además, porque la institución ha asumido el costo, invirtiendo una gran cantidad de recursos en horas para que sus profesores trabajen en el diseño y a su vez, mediante concursos internos ha financiado otras iniciativas para física, economía o cálculo.

Conclusiones

Con los datos recogidos y analizados hasta el momento, podemos concluir que la participación de los profesores en el proceso de diseño y de acompañamiento ha sido fundamental para la integración local del proyecto en cada sede y que la suma de esto ha dado pie a un escalamiento que da luces de poder ser sustentable en el tiempo. Esta participación ha ayudado a la cobertura, pero también a que el proyecto se perciba como local en cada una de las sedes, le de validez frente a los profesores usuarios y que no lo perciban como una imposición externa. A pesar de que el escalamiento se mide a escala global, es un proceso que depende de una condiciones locales de cada sede, donde los factores descritos han sido tomando en cuenta explícitamente para permitir favorecer la integración. Los resultados muestran que elementos como la percepción en la propiedad del proyecto, la profundidad y la sustentabilidad no necesariamente son replicables, puesto que se van dando de acuerdo a las condiciones institucionales, por ejemplo, la aparición de proyectos en física, cálculo o economía responden a necesidades que tienen los profesores, que sin embargo, sin la existencia de concursos internos para levantar fondos sería mucho más difícil que se desarrollasen. Además de los elementos técnicos en un proyecto con tecnología, es importante tomar en cuenta elementos epistemológicos, puesto que estos proyectos están enmarcados en la enseñanza y aprendizaje de una disciplina y sin se pasan por alto, el trabajo estará centrado sólo en el valor pragmático que aporta lo digital, lo que a la larga podría impedir su duración en el tiempo.

Referencias y bibliografía

Abboud-Blanchard, M. (2014). Teachers and Technologies : Shared Constraints, Common

Responses. En A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (pp. 297–317). Dordrecht: Springer Netherlands.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274.

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas : desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental II . De la programación a los recursos en línea : trayectoria de una investigadora. *Cuadernos de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 1–15.

Bozkurt, G., & Ruthven, K. (2017). Classroom-based professional expertise: a mathematics teacher's practice with technology. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(3), 309–328.

Clark-Wilson, A. (2017). The Complex Process of Scaling the Integration of Technology Enhanced Learning in Mainstream Classrooms. En G. Costagliola, J. Uhomoibhi, S. Zvacek, & B. M. McLaren (Eds.), *International Conference on Computer Supported Education* (pp. 3–13). Cham: Springer.

Coburn, C. (2003). Rethinking Scale: Moving Beyond Numbers to Deep and Lasting Change. *Educational Researcher*, *32*(6), 3–12.

Gaona, J. (2018a). Instructors' decision making when designing resources: the case of online assessments. En V. Giritana, T. Miyakawa, M. Rafalska, & S. Soury-Lavergne (Eds.), *Re(s)sources 2018 International Conference* (pp. 279–282). Lyon: École Normale Supérieure de Lyon.

Gaona, J. (2018b). Integrar tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, factores claves. *Revista de Gestión de la Innovación en Educación Superior*, *3*.

Gaona, J., & Hardy, C. (2014). La evaluación dinámica como motor de aprendizaje incorporando Wiris en Moodle. Un ejemplo de nivelación en matemáticas. En M. Asenjo, O. Macía, & J. Toscano (Eds.), *Congreso Iberoamericano de ciencia, innovación y educación* (pp. 1–15). Buenos Aires: OEI.

Gaona, J., Reguant, M., Valdivia, I., Vásquez, M., & Sancho-Vinuesa, T. (2018). Feedback by automatic assessment systems used in mathematics homework in the engineering field. *Computer Applications in Engineering Education*, *26*(4), 994–1007.

Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2–3), 105–121.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(6), 721–737.

Ruthven, K. (2007). Teachers, technologies and the structures of schooling. En D. Pitta-Pantazi & C. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 52–67). Larnaca: Department of Education - University of Cyprus.

Trigueros, M., Lozano, M., & Sandoval, I. (2014). Integrating Technology in the Primary School Mathematics Classroom: The Role of the Teacher. En A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), (Vol. 2, pp. 111–138). Dordrecht: Springer. http://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1

Trouche, L. (2004). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments : The Case of Calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*, 281–307.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Matematización del Teorema Fundamental del Cálculo en el Nivel Situacional con el uso de tecnologías digitales

Ingrid Janeth **Jácome** Anaya
Universidad Industrial de Santander
Colombia
jacomeaij@hotmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

En este documento se presentan avances de una investigación en desarrollo que pretende caracterizar los niveles de matematización que alcanzan los estudiantes de un curso de Cálculo Integral en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), mediante el uso de tecnologías digitales, a través del diseño, implementación y evaluación de una secuencia de situaciones. Para lo anterior usamos la Educación Matemática Realista (EMR) y a continuación, mostramos la caracterización a priori del Nivel Situacional y la descripción de una secuencia de tareas planteadas en dos situaciones problemáticas realistas en el fenómeno Llenado de Recipientes, el cual está dado a partir de los primeros resultados de un análisis fenomenológico didáctico en construcción.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo, tecnologías digitales, Matematización, Educación Matemática Realista.

Introducción

La comprensión de los objetos matemáticos asociados a las ideas de variación y acumulación son complejos, y lo es más la articulación entre éstos, la cual se establece a través del TFC (Robles, Tellechea y Font, 2014). En cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de dichos objetos, Muñoz (2000) menciona que una de las problemáticas principales es la separación entre lo algorítmico y lo conceptual. Para propiciar un enlace, este autor identifica una condición necesaria que se refiere a la existencia de situaciones problema. Freudenthal (1991) las define como contextos y situaciones problemáticas realistas, en el sentido de representables, razonables e imaginables para los estudiantes. Asimismo, estas situaciones son las generadoras de su actividad matematizadora., que se concibe como el proceso que conlleva a la organización de la realidad con medios matemáticos, incluida la matemática misma. Además, de ser un proceso discontinuo que pasa por distintos niveles: *Situacional, Referencial, General* y *Formal.*

Teniendo en cuenta que las representaciones estáticas y limitadas de los libros de texto, utilizados tradicionalmente en la enseñanza del cálculo, restringen la naturaleza dinámica de los objetos y la limitan a ejemplos, que conducen a desarrollar una imagen restringida del concepto en cuestión (Tall y Sheath, 1983), se hace relevante la introducción de las tecnologías digitales en la educación matemática. Éstas permiten la visualización dinámica de conceptos matemáticos que no se logra fácilmente en el papel. Por tal razón, elaboramos una secuencia de tareas, planteadas en dos situaciones problemáticas realistas, con el uso de tecnologías digitales.

A continuación, describimos la secuencia de tareas y la caracterización *a priori* del Nivel Situacional, propiciando los principios de interacción y reinvención guiada.

Educación Matemática Realista

En este enfoque, los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos, estas son, situaciones realistas. "El término "realista" se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan imaginar que a la realidad o autenticidad de estos" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p.10). El desarrollo del proceso de aprendizaje se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado *reinvención guiada*, proceso en el cual los estudiantes reinventan las matemáticas a partir de la organización o estructuración de situaciones problemas en *interacción* con sus pares y bajo la guía del docente, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

Freudenthal (1971) concibe la idea de las matemáticas como una actividad humana. Para él, las matemáticas son la actividad de plantear y resolver problemas, más explícitamente, la actividad de organizar la matemática desde la realidad. Freudenthal explica: "No hay matemáticas sin matematización" (Freudenthal, 1973, p. 134). Según su punto de vista, la mejor forma de aprender matemáticas es haciendo y la matematización es el sentido central de la educación matemática: "Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible, el de matematizar las matemáticas" (Freudenthal, 1968, p.7).

Treffers (1987) formuló la idea de dos formas de matematización; i). La *matematización horizontal*. Proceso en el cual los estudiantes presentan herramientas que pueden ayudar a organizar y resolver un problema del mundo real; esto es, traducir al mundo matemático una situación del "mundo real", comprendiendo así las relaciones entre el lenguaje cotidiano y el matemático, ii). La *matematización vertical.* Proceso de reorganización dentro del propio sistema matemático, esto es, encontrar atajos, probar regularidades, descubrir conexiones y estrategias para luego usar dichos descubrimientos, acciones que llevan a procesos tales como argumentación y generalización. En términos de Freudenthal (1991) moverse dentro del mundo de los símbolos.

Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower (2016), con base en las ideas de la EMR, proponen los niveles de matematización: *Situacional, Referencial, General y Formal*. Estos niveles representan el pasaje de conocimiento informal al formal y están caracterizados por el tipo de modelos que surgen cuando los estudiantes se enfrentan a una situación problemática realista. Acá, no se refieren a modelos preconstruidos e impuestos desde la matemática formal sino a modelos emergentes.

En el *Nivel Situacional*, los estudiantes se enfocan en el conocimiento de la situación. Está asociado al uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma. Las estrategias que utilizan, para dar respuesta a los problemas y/o descubrir la matemática existente en el contexto, son apoyadas en los conocimientos formales previos, en los conocimientos

informales, en el sentido común y en la experiencia. A este proceso se le denomina *matematización horizontal.*

Los otros niveles están enmarcados dentro de la *matematización vertical,* por lo que se caracterizan por la búsqueda de fórmulas, prueba de regularidades, formulación de un concepto nuevo, generalización, evolución y ajuste de modelos, entre otros.

En el *Nivel Referencial* aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, siempre referidos a la situación particular, los cuales describen y esquematizan los conocimientos y procedimientos de la situación problema. De allí que los modelos se consideren como "modelos de".

El *Nivel General* se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior. Da lugar al surgimiento de aspectos generalizables de los mismos que son utilizables en un conjunto de problemas. Las estrategias, ahí encontradas, superan la referencia al contexto, por lo que surgen los modelos para la resolución de los mismos; esto es, modelos generales y descontextualizados, los cuales sirven para organizar matemáticamente otras situaciones.

El *Nivel Formal* comprende los conceptos, procedimientos, utilización de conceptos, y notaciones convencionales propias de la rama de la matemática que hacen parte de la matemática vinculada al contexto que se venía trabajando.

Según Drijvers, Boon, Doorman, Bokhove, y Tacoma (2013) el desafío está en encontrar situaciones que pidan el desarrollo de modelos emergentes y permitan un proceso de abstracción progresiva. Para encontrarlas, Freudenthal propone la realización de un Análisis Fenomenológico Didáctico, el cual inicia con la identificación de los contextos donde tienen sentido los objetos matemáticos, los fenómenos donde surgen o son organizadores y las situaciones donde tienen uso.

Proceso metodológico

Para la identificación de los contextos, fenómenos y situaciones matemáticas donde el TFC tiene sentido, surge y tiene uso, es importante analizar y responder los cuestionamientos ¿para qué se usa el TFC?, ¿a qué problemas da respuesta el TFC? Para ello, estamos realizando una revisión epistemológica, general, de los objetos matemáticos inmersos en el TFC, derivada e integral, y un análisis del contenido matemático escolar teniendo como referencia algunos libros utilizados usualmente en la enseñanza del Cálculo Integral.

A través de dicho análisis hemos logrado identificar el fenómeno de Llenado de Recipientes. Resaltamos las situaciones de, teniendo en cuenta al video del llenado de una copa en forma de cono circular recto, hallar el área de la sección transversal en función del nivel del líquido a partir del volumen de este y hallar el volumen del líquido en función del nivel del líquido a partir del área de la sección transversal, donde las tareas enmarcadas en dichas situaciones se diseñaron con el fin de caracterizar los tres primeros niveles de matematización del TFC.

La secuencia de tareas planteadas en las dos situaciones anteriores está dirigido a estudiantes de Cálculo Integral que no han visto el TFC. Dichas tareas conducen a la construcción de modelos y la abstracción de estos. Para el desarrollo de la secuencia los estudiantes usarán el software Tracker, el cual les permitirá estudiar un fenómeno a través del seguimiento manual y automatizado de objetos, obteniendo de forma inmediata información

tabular y gráfica acerca de área de la sección transversal del líquido y el volumen de este, así como la exploración de ideas de variación y acumulación.

Teniendo en cuenta las situaciones, las tareas diseñadas para cada situación y las acciones descriptoras planteadas por Henao y Vanegas (2012) y Gonzales (2015), elaboramos el análisis a priori para el *Nivel Situacional* del TFC. En este caso, se espera que los estudiantes identifiquen y reconozcan el comportamiento de las magnitudes variables involucradas y planteen supuestos acerca de la relación de las magnitudes, área de la sección transversal y volumen del líquido, a partir de las ideas de variación y acumulación (Tabla 1).

Tabla 1

Descriptores Nivel Situacional del Teorema Fundamental del Cálculo

Descriptores generales	Descriptores a priori (TFC)
Identificar los elementos matemáticos pertinentes al problema situado en la realidad. Esquematizar, formular y visualizar un problema de varias maneras. Representar el problema de acuerdo con los conceptos matemáticos pertinentes y plantear supuestos, donde dichas representaciones están ligadas al contexto.	Identificar y conocer el comportamiento del área de la sección transversal y el volumen del líquido en un recipiente en forma de cono circular recto con la información suministrada en el video y el uso de estrategias intuitivas y/o conocimientos previos. Interpretar información tabular y predecir el comportamiento de las magnitudes variables (área, volumen) implicados en la situación problema. Plantear supuestos acerca de la relación de las magnitudes variables (área, volumen) con las ideas de pendiente de la recta tangente a una curva y acumulación del cambio.

Para el fenómeno, Llenado de Recipientes, se diseñaron dos situaciones matemáticas realistas que consisten en:

A partir del volumen del líquido que se vierte en una copa, hallar la expresión algebraica que representa el área de la sección transversal en función del nivel del líquido (y).

A partir del área de la sección transversal del líquido, hallar la expresión algebraica que representa el volumen en función del nivel del líquido (y).

Con algunas de las tareas planteadas para estas dos situaciones se espera que el estudiante, en primera instancia, identifique la razón de cambio instantánea del volumen con respecto al nivel del líquido (y) como la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto. Y con la ayuda del software, hallando la pendiente de la recta tangente al volumen para niveles del líquido específicos (slope) y el área de la sección transversal formada para los mismos niveles (Figura 1), logre conjeturar que la derivada del volumen del líquido corresponde al área de la sección transversal en función del nivel.

Posteriormente, se espera que el estudiante, a partir del cálculo del área desde el inicio del llenado hasta niveles específicos del líquido bajo la curva Área de la sección transversal y el cálculo del volumen del líquido en los mismos niveles, logre conjeturar que la integral del Área

de la sección transversal corresponde al volumen del líquido y con ello representen, validen y cuestionen la relación entre derivada e integral.

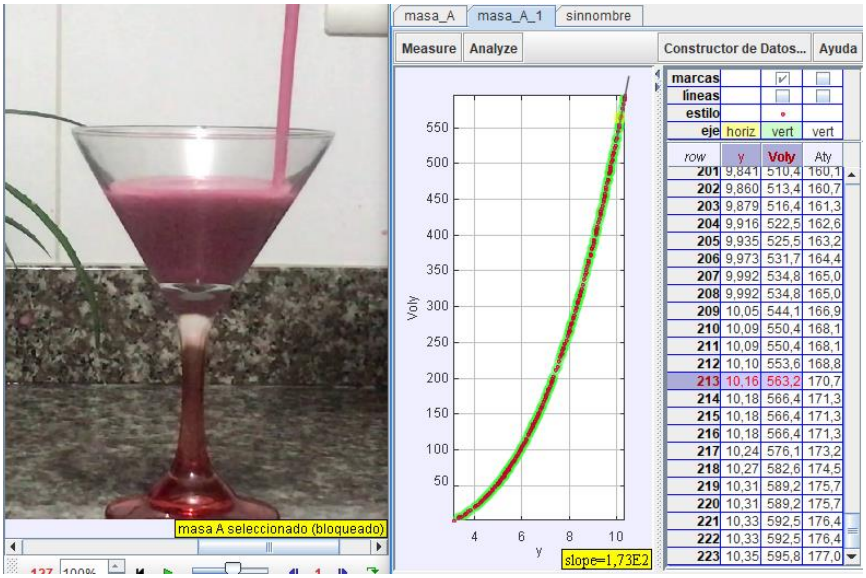


Figura 1. Simulación del llenado de una copa en Tracker.

Primeras reflexiones

Se espera que los estudiantes lleguen al Nivel General del TFC, esto es, que logren conjeturar que los objetos matemáticos, derivada e integral, están relacionados, modelen dicha relación y cuestionen la validez de este. Para que esto se logre es fundamental tener en cuenta, en el diseño de la secuencia de tareas enmarcadas en cada situación matemática realista, el uso de la tecnología digital y los principios de interacción y reinvención guiada puesto que dichos principios promueven la matematización progresiva, y el uso de la tecnología facilita la actividad matemática promoviendo la creación de modelos y la abstracción de los mismos a partir de la observación dinámica de los objetos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases Teóricas.* GPDM, Agentina.

Drijvers, P., Boon, P., Doorman, M., Bokhove, C. y Tacoma, S. (2013). Digital design: RME principles for designing online tasks. En Margolinas, C. (Ed). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22 (1),* (pp. 56-62). Oxford, Inglaterra.

Freudenthal, H (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics 1*, 3 - 8.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics 3*, 413 – 435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Gonzales, O. (2015). *Caracterización de la actividad argumentativa de estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones* (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Henao, S. y Vanegas, J. (2012) *La modelación Matemática en la Educación Matemática Realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos* (Tesis de Pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3 (2), 131-170.

Robles, M., Tellechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática,* 26 (2), 69-109.

Tall, D. y Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 357–362.

Treffers, A. (1987) *Three Dimensions. A model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction.* Netherlands, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54*, 9-35.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Razonamiento covariacional y habilidades cognitivas en el diseño de tareas para la comprensión de la derivada

César Augusto **Rodríguez** Plata
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
rodces121@gmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

En el análisis de una situación que involucre cambio y variación, es esencial relacionar y cuantificar los atributos en él. Por lo tanto, el uso de la derivada como razón de cambio se hace necesario. En este documento se presenta la descripción de un diseño de talleres apoyados con un software matemático interactivo (GeoGebra), con la intención de promover la compresión de la derivada en un punto. Con base en la perspectiva del Razonamiento Covariacional y las Entrevistas Basadas en Tareas, se estructura el diseño, la implementación y el análisis de los talleres. Tras la implementación y su posterior análisis, se pretende caracterizar las habilidades cognitivas que un estudiante deberá tener para sustentar su comprensión de la derivada.

Palabras clave: derivada, razonamiento covariacional, habilidades cognitivas, procesos matemáticos, entrevistas basadas en tareas.

Fenómeno de estudio

Diferentes investigaciones han manifestado que las dificultades en la compresión del concepto derivada son debido a la falta de conceptualizaciones y procesos subyacentes en su definición. Conceptos como función, límite, razón, cociente y proporcionalidad; y procesos como representar y razonar están presentes en el proceso de aprendizaje de la derivada. Debido a la complejidad de estos conceptos y procesos, se producen diversas dificultades a nivel cognitivo cuando se construye este concepto desde sus diferentes representaciones; la pendiente de la recta tangente, el límite del cociente incremental y como razón de cambio (Villa-Ochoa, 2011; Robles, Del Castillo y Font, 2012; Thompson y Carlson, 2017). Además, la ausencia de las ideas de cambio y variación, en esta definición, no permite dotar de importancia a la derivada en la resolución de problemas elementales del cálculo diferencial (Dolores, 2007).

Sin embargo, en la educación actual se han priorizado los procesos de construcción y validación de procedimientos y algoritmos derivados del álgebra y la geometría analítica (Cantoral, 2000), los cuales llevan a desconocer la importancia y el uso de la derivada por el estudiante. Si se quiere analizar y describir una situación que implique variación será necesario relacionar y cuantificar los atributos en él. De acuerdo con Font y Godino (2011), la Didáctica de las Matemáticas solicita tanto la descripción y explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje como también su respectiva de evaluación y progreso.

Bajo esa mirada y con ánimos de aportar a la problemática expuesta, en la investigación que estamos desarrollando, se busca caracterizar las habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos, para la compresión de la derivada en un punto. En esta comunicación se plantea la descripción y explicitación de un diseño de talleres para promover la compresión de la derivada en un punto. A continuación, se muestran los elementos teóricos y metodológicos que sustentan la estructura del diseño y una mirada preliminar al análisis de los talleres. Estos son los instrumentos de recolección de datos para observar y analizar el trabajo de los estudiantes en un curso de cálculo diferencial.

Marco conceptual

Tanto el diseño de los talleres como la investigación en curso están articulados con un marco el conceptual de Razonamiento Covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2003) y con los Procesos Matemáticos del Cambio y la Variación (Fiallo y Parada, 2018). Juntos direccionan la construcción de la derivada en un punto. Asimismo, las Entrevistas estructuradas y basadas en tareas e ideas metodológicas de un curso de precálculo (Fiallo y Parada, 2018) estructuran las fases de los talleres.

La articulación entre el Razonamiento Covariacional y los Procesos Matemáticos es posible debido a lo cognitivo que denotan sus constructos teóricos, más precisamente de las operaciones mentales que estructura una persona para la solución a un problema (ver figura 1).

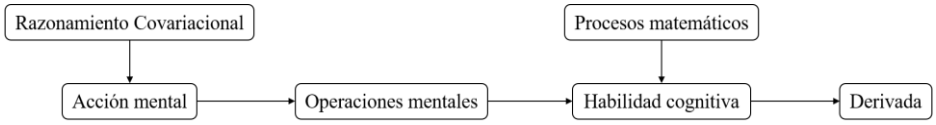


Figura1. Marco conceptual.

Razonamiento covariacional.

El “problema de la escalera”

> A partir de una posición vertical contra una pared, desde su parte inferior, una escalera se separa de la pared a una razón constante. Describa la velocidad de la parte superior de la escalera a medida que ésta se desliza hacia abajo sobre la pared. Justifique su afirmación. (Carlson et al., 2003, p. 145).

El “problema de la escalera” es una situación que implica variación. El estudiante tendrá que imaginar el deslizamiento de la escalera y notar que a medida que el tiempo avanza la distancia vertical cambia. Para describir la velocidad del fenómeno, tendrá que cuantificar y relacionar los cambios de la distancia vertical con los cambio en el tiempo a medida que se desliza la escalera a razón constante.

Para apreciar los cambios, el estudiante necesita coordinar el comportamiento de las

variables en juego, en este caso el tiempo y la posición vertical que describe el movimiento de la escalera, es decir necesita el razonamiento covariacional. El razonamiento covariacional es definido por Carlson et al. (2003) como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p. 124). Por tal razón, los autores proponen un marco conceptual para analizar el razonamiento covariacional de una persona, fundamentado principalmente por las acciones mentales que éste realiza.

Las acciones mentales son evocadas por querer coordinar dos variables, así que estas son determinadas por la construcción de imágenes de covariación. La noción de imagen está basada en la perspectiva de Thompson que la establece como "dinámica, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como la fuente y el vehículo de operaciones mentales." (citado en Carlson et al, 2003, p. 124). Por tanto, a medida que la imagen de covariación se desarrolla en la persona, sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado.

Carlson y colaboradores consideran estas acciones mentales como evolutivas, y conjeturan y muestran en sus estudios que se desarrollan (Carlson et al., 2003). Debido a este hecho, estructuran los niveles de razonamiento covariacional y las acciones mentales que sustentan cada de uno de los niveles.

Nivel de coordinación (N1): sustentada por la acción mental 1, descrita como la coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.

Nivel de dirección (N2): sustentada por la acción mental 2, descrita como la coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.

Nivel de coordinación cuantitativa (N3): sustentada por la acción mental 3, descrita como la coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.

Nivel de razón promedio (N4): sustentada por la acción mental 4, descrita como la coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.

Nivel de razón instantánea (N5): sustentada por la acción mental 5, descrita como la coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

Ya que el N5 alude a la derivada como la razón instantánea, el diseño de la estructura de los talleres tiene en cuenta estos niveles y se explicará en la sección de Método.

Habilidades cognitivas.

Fiallo y Parada (2018) presentan las reflexiones teóricas y metodológicas que se han incorporado al diseño de un curso laboratorio de precálculo, basados en las configuraciones actuales de los procesos de aprendizaje y enseñanza y a la incorporación de la tecnología en el aula. Se establece que, desde un enfoque de resolución de problemas, el desarrollo de procesos matemáticos como el de la comunicación, la representación, el elaborar, comparar y ejercitar procedimientos y el razonamiento, son necesarios para la comprensión del concepto de función, límite y derivada, agrupados desde los núcleos conceptuales del cambio, la aproximación y la tendencia. Como lo mencionan los autores, los procesos presentados por secciones, no deben interpretarse de manera independiente, sino que todos los procesos son dependientes y complementarios entre sí.

El desarrollo de estos procesos es posible a través de las habilidades asociados a estos, los cuales ayudarán a los estudiantes a comprender y resolver un problema. Según Rueda (2016) la habilidad cognitiva: "consiste en las operaciones mentales que resultan de la coordinación de acciones tendientes a la consecución de un objetivo ligado a una rama de conocimiento institucionalizado." (p. 57)

Como resultado de la implementación y el análisis del curso de precálculo, en Fiallo y Parada (2018) se han caracterizado diversas habilidades asociados a los procesos matemáticos (ver Tabla 1):

Tabla 1

Habilidades cognitivas asociadas a los procesos matemáticos

Procesos	Comunicar ideas sobre variación	Representar la variación	Elaborar, comparar y ejercitar procedimientos para analizar la variación	Razonar sobre fenómenos de variación
Habilidades	Interpretar enunciados.	Reconocer representaciones.	Reconocer los números reales, establecer relaciones entre ellos y operar con ellos.	Explicar una afirmación matemática.
	Explicar ideas.	Interpretar representaciones.	Medir, comparar y calcular magnitudes.	Justificar una afirmación matemática.
	Justificar ideas.	Construir representaciones.	Elaborar procedimientos con apoyo de la geometría.	Argumentar racionalmente.
	Argumentar ideas.	Transformar representaciones (tratamiento y conversión).	Razonar y estructurar procedimientos analíticos.	Convencerse y convencer a los demás.
		Coordinar representaciones.		Validar con reglas y procedimientos teóricos.

Fuente: Fiallo y Parada (2018, p. 228)

Como ya se mencionó en la sección del fenómeno de estudio el diseño de los talleres busca determinar qué habilidades cognitivas dan sustento a la compresión de la derivada.

Método

El estudio se enmarca en un enfoque de investigación de tipo descriptivo e interpretativo, y es diseñado para realizar un análisis en contexto real del fenómeno de estudio. Como lo menciona Rojas (2012), la fiabilidad del proceso investigativo se mejora proporcionando la mayor información posible tanto de la situación en que se desarrolla la experiencia y de la selección de la población o muestra, como de los métodos de recolección de datos y el análisis posterior, permitiendo la posibilidad de una revisión o réplica del trabajo por otros investigadores. Por lo tanto, hacer explícito el diseño del taller es necesario.

Se optó metodológicamente por las entrevistas estructuradas y basadas en tareas (Goldin, 2000) en la que es posible realizar entrevistas grupales. De esta manera se ofrece un ambiente menos artificial para cada uno de los entrevistados y pueden interactuar entre sí, con la

posibilidad de poner en discusión sus afirmaciones y argumentos con los demás; además, tienen la posibilidad de conocer, analizar y contar con ideas adicionales en relación con las tareas propuestas y con los argumentos considerados inicialmente.

La entrevista basada en tareas es un entorno diseñado cuidadosamente, siendo éste un componente clave de esta metodología (Goldin, 2000). Su objetivo es obtener de los entrevistados las estimaciones y la evolución de su conocimiento, también, sus representaciones de ideas particulares, estructurales y formas de razonamiento, en este caso para la derivada como razón de cambio.

Algunas entrevistas están estructuradas, con protocolos detallados que determinan de manera preliminar, la interacción y las preguntas del entrevistador. Otros protocolos son semiestructurados, lo que permite modificaciones en función del criterio del investigador, como la de este diseño en la que una exploración a la entrevista prevista proporcionará una base para el diseño de un protocolo más detallado.

A continuación, se expone el taller 1 (entrevista 1) en el que, a través del problema del lanzamiento vertical, los niveles del razonamiento covariacional, los procesos matemáticos, aspectos metodológicos del curso de precálculo y el apoyo de la tecnología, los estudiantes de cálculo diferencial darán paso a resolver.

El taller de lanzamiento vertical está estructurado por 4 actividades en las que cada una tiene una serie de preguntas (tareas) que organizan la solución del problema a lo largo de los niveles del razonamiento covariacional. Cada actividad será acompañada por dos archivos específicos en GeoGebra. El papel de la tecnología, en los talleres y en el curso de precálculo, es brindar la posibilidad de que los estudiantes interactúan con representaciones del objeto matemático en cuestión, es decir la derivada. Asimismo, el uso de artefactos computacionales permite crear y conectar esas representaciones (Fiallo y Parada, 2018). Para el desarrollo de cada actividad se tienen 2 fases. En la fase inicial se le presenta el enunciado y las tareas a desarrollar. El trabajo es llevado a cabo de manera individual por los estudiantes. Posteriormente se dará paso a la fase denominada comunicando y compartiendo en la que lo estudiantes expondrán sus soluciones y podrán trabajar de manera grupal para responder a las tareas propuestas; además, el profesor (entrevistador-investigador) podrá realizar preguntas heurísticas y retrospectivas para obtener la información sobre cómo los estudiantes abordan cada tarea.

Hay que explicitar que existe una diferencia entre la actividad 1 y las demás. El trabajo de las tareas es orientado por archivos diferentes. En la actividad 1 (ver Tabla 2), se presenta el problema a resolver junto con un archivo en GeoGebra que muestra la simulación del problema y las representaciones de los objetos matemáticos implicados, como la algebraica, la tabular y la gráfica (ver figura 2). En las demás actividades se proponen tareas direccionadas por los niveles del Razonamiento Covariacional (ver Tabla 3) y otro archivo en GeoGebra, adicionando al anterior, una configuración en forma de botones con los que el estudiante puede interactuar y observar en la pantalla comportamientos de manera dinámica en torno a los incrementos de las variables, las razones de cambio promedio y las rectas secantes (ver Figura 3).

Tabla 2

Primera parte del taller de lanzamiento vertical.

<table>
<tr><th>Fases del taller</th><th>Actividad 1</th></tr>
<tr><td>1. Trabajo individual</td><td>Una maquina lanza un objeto verticalmente hacia arriba. Se han colocado tres sensores en posiciones distintas con el fin de determinar la velocidad del objeto en diferentes instantes de tiempo. Los registros de los sensores se muestran en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>Sensor</th><th>Tiempo s</th><th>Posición m</th><th>Velocidad $\frac{m}{s}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0.25</td><td>2.65</td><td>7.25</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.8</td><td>5.1</td><td>1.75</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\frac{8}{5}$</td><td>$\frac{33}{10}$</td><td>$-\frac{25}{4}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>2.Trabajo grupal</td><td>Abra el archivo Problemalanzamiento.ggb y muestre matemáticamente que el registro de la velocidad por cada sensor es verdadero.

Comunicando y compartiendo</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

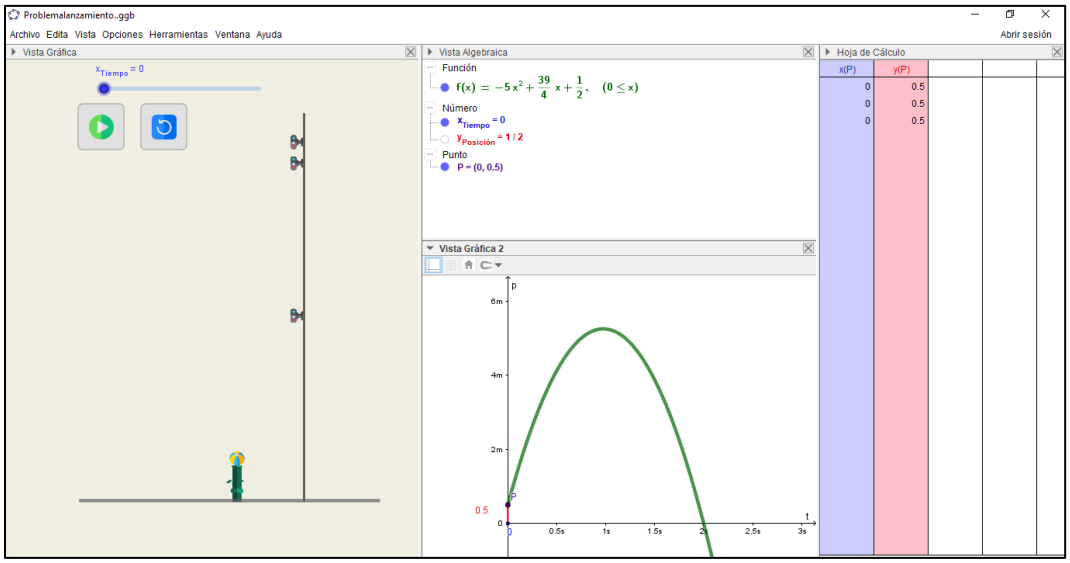


Figura 2. Archivo primera parte del taller lanzamiento vertical.

Tabla 3

Segunda parte del taller lanzamiento vertical.

Fases del taller	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4
1. Trabajo individual	Tareas para los niveles: N1. ¿Cuáles son las magnitudes variables del problema? ¿Existe una relación de interdependencia entre las magnitudes variables? ¿Por qué? N2. ¿Cómo se comportan los valores de la posición respecto al tiempo? Explique su respuesta. N3. ¿Cuál es el comportamiento de la cantidad del incremento en los valores de la posición respecto al tiempo? Justifique su respuesta.	Tarea para el nivel: N4. ¿Aproximadamente con que velocidad se mueve el objeto alrededor de $x = 0.8\ s$? Justifique su respuesta.	Tarea para el nivel: N5. ¿Qué sucede cuando $\Delta x \to 0$? Escribe una expresión que represente la razón de cambio instantánea para $x = 0.8\ s$. Justifique su respuesta.
2. Trabajo grupal	Comunicando y compartiendo		

Fuente: elaboración propia.

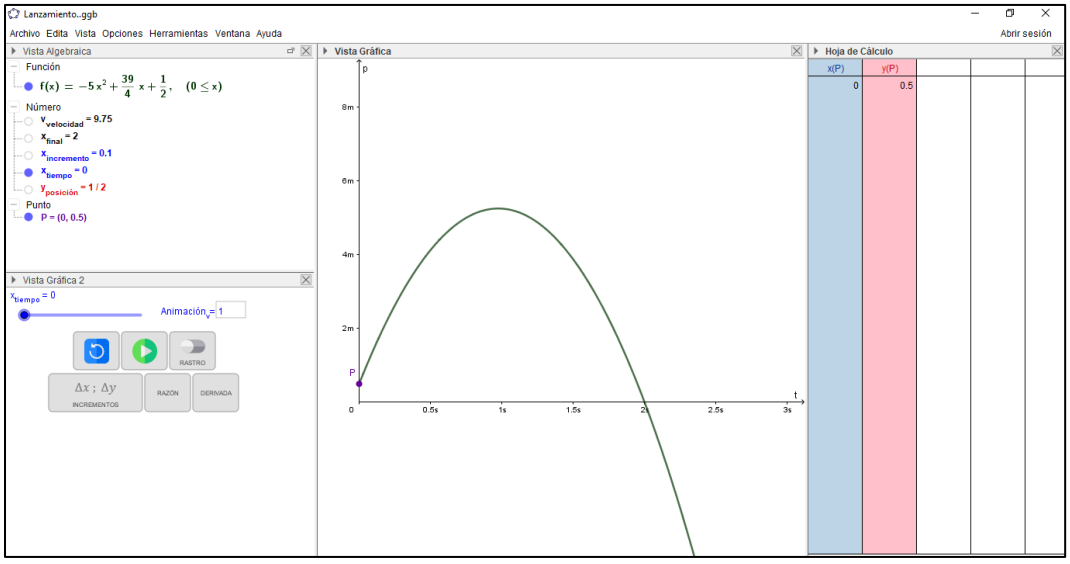


Figura 3. Archivo segunda parte del taller lanzamiento vertical.

Reflexiones

En la implementación del diseño esperamos que los estudiantes tras la solución de cada tarea vayan conceptualizando la derivada en un punto, dotándola de características y propiedades basados en las ideas de cambio y variación.

Cuestionar en los tres primeros niveles sobre qué, cómo y cuánto varían las magnitudes implicadas en el problema, calcular razones promedio para el cuarto nivel y proponer el uso de límite como aproximación y tendencia para determinar la razón instantánea en el quinto nivel,

permitirán que los estudiantes puedan definir la derivada en un punto al finalizar los demás talleres.

Referencias y bibliografía

Cantoral, R. (2000). Pensamiento matemático avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza (Eds.). *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 205-218). México: Editorial Trillas.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *EMA, 8*(2), 121-156.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México D.F.: Ediciones Días de Santos – Universidad Autónoma de Guerrero.

Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico de la variación y el cambio*. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Font, V. y Godino, J. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. n J. M. Goñi (Ed.). *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas.* Barcelona, España, Graó, pp. 9-55.

Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research. In Kelly, A. & Lesh, R. (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). New Jersey-London: LEA.

Robles Arredondo, M. G., Del Castillo Bojórquez, A. G., y Font Moll, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación matemática*, *24*(1), 35-71.

Rojas, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos* (Tesis de doctorado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

Rueda, N. (2016). *Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación* (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

Thompson, P. y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compedium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Villa-Ochoa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación del concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren* (Tesis doctoral). Universidad de Antioquia. Medellín.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Las prácticas pedagógicas en la enseñanza del cálculo diferencial

Luisa Fernanda **Martínez** Rojas
Escuela de Ciencias Básicas, Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano
Colombia
lfmartinezr@poligran.edu.co

Dora Solange **Roa** Fuentes
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
doraroaf@uis.edu.co

Resumen

El contexto global actual, exige que los profesionales estén capacitados para hacer frente a los diferentes retos que plantea la sociedad; de esta manera, las Instituciones de Educación Superior (IES) cobran un papel trascendental en el cumplimiento de este objetivo, puesto que deben formar y capacitar a las próximas generaciones de profesionales para responder a los retos sociales. En el presente documento se muestra la necesidad de indagar sobre la formación del estudiante de ingeniería y de si esta responde a las necesidades del mundo laboral, con el fin de re significar los aspectos que dificultan la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por lo tanto, este artículo resalta la necesidad de reflexionar sobre las prácticas pedagógicas de los docentes de matemáticas a nivel universitario como motor del proceso de enseñanza y aprendizaje, de tal manera que contribuyan a la mejora de la calidad de la educación y a la formación de los ingenieros que la sociedad necesita.

Palabras clave: pedagogía, práctica pedagógica, saber pedagógico, cálculo diferencial, ingeniero, enseñanza, educación superior.

Introducción

La integración tecnológica en las ingenierías, ha orientado a la Unión Europea (EU por sus siglas en inglés) a formular la cuarta revolución industrial también denominada “Industry 4.0”, la cual busca la aplicación de las nuevas tecnologías a los procesos de producción y la sostenibilidad

(Carvajal, 2017). Esta iniciativa propende impactar sobre los sistemas productivos, modos de producción y finalmente en la educación superior en los programas de ingeniería.

De esta manera, los estudiantes demandan cada vez más una formación afín a los avances del siglo XXI, por cuanto las instituciones educativas y en particular las de educación superior, tienen el desafió de responder a esa demanda, mediante la aplicación de pedagogías novedosas orientadas al aprovechamiento de las tecnologías que hacen parte del entorno de vida de los estudiantes (Mariño, 2013, p. 47).

Una mirada a las prácticas pedagógicas en las matemáticas

A continuación, se expone un panorama sobre las prácticas pedagógicas actuales en la enseñanza de las matemáticas en la educación superior a nivel internacional y nacional en una ventana de tiempo del año 2003 al 2017; con el fin de presentar las diferentes problemáticas encontradas y que contribuyan a la reflexión sobre el rol docente y la importancia del diseño de prácticas pedagógicas innovadoras que motiven el interés y aprendizaje del estudiante hacia el cálculo diferencial en la ingeniería.

A nivel internacional, en España, Moreno y Azcarate (2003) indaga acerca de las concepciones y creencias de los profesores de cálculo diferencial a nivel universitario y su efecto sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, donde muestran la práctica pedagógica como un componente subjetivo, que parte de la reflexión, percepción y creencias de los docentes. Así mismo, Irazoqui (2015) define la problemática de la enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial, entorno a la carencia de conocimientos de los estudiantes y la aplicación de prácticas pedagógicas rutinarias y deficientes por parte de los docentes, señalando factores como: la formación inicial de maestros y la baja capacitación de los profesores.

En Estados Unidos, Kim (2007) establece un paralelo entre las prácticas pedagógicas llevadas a cabo por docentes de pre-cálculo internacionales y locales , destacando diferencias en cuanto enfoques y factores como: la enseñanza de nuevos conceptos, definiciones y resolución de problemas para la comprensión conceptual de los estudiantes y la interacción con los mismos, evidenciando que factores como la cultura, la percepción acerca del cálculo y el rol docente influyen en la forma en la que el docente decide llevar a cabo su práctica pedagógica, sin embargo a pesar de tales diferencias este estudio permite observar que las prácticas de estos docentes tienen en común un enfoque tradicional centrado en la transmisión de conceptos, repetición de procedimientos, trabajos extra clase, el uso de libro de textos y preparar al estudiante para aprobar y pasar al siguiente curso.

A nivel Nacional, Jiménez (2015) a través de la observación participante, describe importancia de planear, organizar, preparar y desarrollar las clases con el fin de llevar a cabo la práctica docente.

Por otra parte, en cuanto a los avances registrados en la innovación de prácticas pedagógicas se destaca el estudio de caso de Vajravelu y Muhs (2016), el cual describe la aplicación de un método innovador integrado en la práctica de los docentes donde se incorpora el uso de nuevas tecnologías en el aula, evidenciado así, la participación de los estudiantes, la interacción docente-estudiante y el desarrollo de habilidades.

En esta revisión se encontraron problemas relacionados con: tendencias didácticas, aplicación de conceptos, procedimientos matemáticos, tiempo para el análisis de contenidos, actitud de los estudiantes, el currículo y la tecnología. Resaltando la falta de tiempo para el análisis y estudio de contenidos, centrándose así en métodos algorítmicos; la enseñanza del cálculo no se da en relación con la ingeniería, por tanto, es notable la descontextualización de los conceptos y su falta de conexión con su aplicación interdisciplinar; existe una brecha notable "entre la integración de la tecnología y las prácticas pedagógicas y finalmente, existe una dicotomía entre los contenidos establecidos en el currículo y los conocimientos específicos que los estudiantes requieren para su formación profesional.

Las matemáticas en la formación del ingeniero

Las matemáticas, particularmente el cálculo diferencial en el nivel superior, constituye una herramienta de apoyo en la formación de ingenieros (Camarena, 2013), dado que durante este proceso como en su vida profesional han de resolver problemas en donde de forma recurrente es común que apliquen las matemáticas en este nivel se conciben como una herramienta fundamental en la resolución de problemas científicos (Remanth, 2010) (como se citó en Trejo, Camarena, y Trejo, 2013).

En este sentido, en el International Commission on Mathematical Instruction ICMI 3, editado por Howson, Kahane, Laugine y Turckheim, (como se citó en Romo-Vazquez, 2014) se presenta el paradigma de las matemáticas como disciplina de servicio. Se reconoce que la formación profesional, que no forma futuros matemáticos, no puede basar la enseñanza de las matemáticas en el rigor y la estructura propia de las matemáticas sino en su potencialidad como herramienta para resolver, de manera eficaz problemas prácticos.

Sin embargo, actualmente existe una enorme brecha entre las habilidades matemáticas que requiere un ingeniero y las habilidades que fomentan los cursos matemáticos en las Instituciones de Educación Superior, puesto que:

> Los estudiantes pasan por la ciencia, enseñada de forma fragmentada, sin lógica, donde lo más importante es la memoria y los procedimientos mecanizados que no permiten entender el porqué de las cosas, quedan con fobia a las ciencias presentadas de esta manera. (Ulloa, 2008, p. 3)

Por tanto, toma mayor valor una enseñanza que permita a los estudiantes percibir la ingeniería como una profesión cuyo fin es mejorar la calidad de vida de las personas, solucionar problemas, promover el desarrollo, y así poder posicionar a Colombia entre los países que lideren en estos campos; al respecto Ulloa afirma: "Si los ingenieros son la clave del desarrollo económico, necesitamos innovar, reformar la educación en ingeniería, para responder mejor a los desafíos globales. (Ulloa, 2008, p. 4) y alcanzar así un perfil profesional pertinente.

Práctica pedagógica y saber pedagógico

Para abordar los conceptos de prácticas pedagógicas y saber pedagógico se hace necesario aclarar que la pedagogía según Zuluaga "se entiende como la disciplina que conceptualiza, aplica y experimenta los conocimientos referentes a la enseñanza de los saberes específicos en las diferentes culturas" (1999, p. 11) la cual integra cuatro características:

1. Es una herramienta critica, cuya intención es criticar la apropiación que reduce la Pedagogía a una concepción instrumental del método de enseñanza.
2. Busca responder, inicialmente, a las acertadas demandas que la historia de las ciencias le hace hoy a la Pedagogía para plantear pluralidad de métodos de enseñanza de acuerdo con las particularidades históricas de formación de cada saber. Está impregnada de un deber ser más que una realidad actual.
3. Se ha formulado con base en la historicidad de la Pedagogía: en la permanente presencia práctica o conceptual de la enseñanza en las diferentes opciones de Pedagogía o de Educación.
4. Reconoce la adecuación social de los saberes en las diferentes culturas.

Además, Zuluaga afirma que:

> El maestro como sujeto de saber, se relaciona con el conocimiento a través de la práctica pedagógica. La pedagogía es historiada como un discurso acerca de la enseñanza y a la vez, como una práctica cuyo campo de aplicación es el discurso (2005, p. 22).

En consecuencia, la pedagogía se considera como saber y como práctica; así mismo otro concepto que se aborda en esta investigación es el de práctica pedagógica, o práctica educativa, la cual algunos autores también llaman práctica docente. En esta investigación se toma como referente el concepto ofrecido por Zuluaga, quien describe la práctica pedagógica como una noción que designa:

1. Los modelos pedagógicos, tanto teóricos como prácticos, utilizados en los diferentes niveles de enseñanza.

2. Una pluralidad de conceptos pertenecientes a campos heterogéneos de conocimiento, retomados y aplicados por la pedagogía.
3. Las formas de funcionamiento de los discursos en las instituciones educativas donde se realizan prácticas pedagógicas.
4. Las características sociales adquiridas por la práctica pedagógica en las instituciones educativas de una sociedad dada que asigna unas funciones a los sujetos (maestro y alumno) de esa práctica.
5. Las prácticas de enseñanza en diferentes espacios sociales mediante elementos del saber pedagógico. (1987, p. 196)

Segura (1999) afirma que la práctica pedagógica consiste en "desarrollar un ejercicio de reflexión sobre la práctica, acompañado necesariamente de una construcción de referentes conceptuales de orden pedagógico, disciplinar, epistemológico, axiológico y sociológico, se constituye en un proceso de cualificación de maestros" (1999, p. 8). También es importante destacar los aportes de Carr, quien plantea acerca de la práctica educativa:

- Se trata de una actividad intencional, desarrollada de forma consciente, que sólo puede hacerse inteligible en relación con los esquemas de pensamiento, a menudo tácitos, que dan sentido a las experiencias profesionales.
- Los profesionales sólo pueden llevar a cabo prácticas educativas en virtud de su capacidad para caracterizar su propia práctica y para hacerse ideas de las prácticas de otros partiendo de la base, de un conjunto de creencias relativas a lo que hacen, de la situación en que actúan y de lo que tratan de conseguir.
- Realizar una práctica educativa presupone siempre un esquema teórico que, al mismo tiempo, es constitutivo de esa práctica y el medio para comprender las prácticas educativas de otros.
- La práctica educativa es también práctica social, en consecuencia, el esquema teórico de un profesional de la educación no se adquiere de forma aislada. Se trata de una forma de pensar que se aprende de otros y se comparte con ellos, que se conserva a través de las tradiciones de pensamiento educativo y de las prácticas educativas en cuyo marco se ha desarrollado y evoluciona. (1996, p. 64)

Ahora bien, en cuanto al saber pedagógico Zuluaga afirma que es: "el conjunto de conocimientos con estatuto teórico o práctico que conforman un dominio de saber institucionalizado en el cual figura la práctica de la enseñanza y la adecuación de la educación en una sociedad. Circula por los más variados registros del poder y del saber" (1987, p. 41). Según tal saber se definen los sujetos de la práctica pedagógica como los que soportan un método distintivo de su oficio y de su relación con el saber, y quienes enseñan por su relación con un saber, no por su relación con el método.

En consecuencia, la práctica pedagógica y el saber pedagógico reconocen al maestro como sujeto de saber y hacen énfasis en el proceso reflexivo de este en torno a su práctica pedagógica. En este sentido, Martínez piensa al maestro "como un intelectual, como un trabajador de la cultura, que tiene un saber que le es propio, el saber pedagógico" (2002, p. 65).

Prácticas pedagógicas actuales e innovadoras en la enseñanza de las matemáticas

En este apartado se pretende relacionar las prácticas pedagógicas y la enseñanza del cálculo a nivel universitario; puesto que la enseñanza del cálculo representa un desafío para los docentes, ya que en su mayoría se enfocan en la enseñanza mecánica de procedimientos y problemas estándar, o bien, en realizar algunas derivadas o integrales, acciones que se alejan de la verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento que busca las matemáticas (Moreno, 2005). Esta forma de enseñanza limita al estudiante a resolver ejercicios y problemas rutinarios, pero no le capacita para enfrentarse a contextos y situaciones que exigen mayor nivel cognitivo y conceptual.

Respecto a esto, se destacan los siguientes enfoques que abordan la didáctica sobre la enseñanza y aprendizaje de las nociones del cálculo a nivel universitario:

El primer enfoque hace referencia al "Proyecto de cálculo en Contexto" (1987); de este enfoque hay varios representantes, entre estos Camarena en México (2013). La idea principal es que el cálculo es un lenguaje (el lenguaje de la ciencia), una red de conceptos y un conjunto de técnicas útiles. El objetivo es que los estudiantes construyan las matemáticas a través de sus aplicaciones y comprendan las relaciones entre todos los elementos que configuran el cálculo.

Otro enfoque se está dando es la enseñanza por "Proyecto de Debate Científico" (Legrand, 1992) (citado en Moreno, 2005, p. 84). Su objetivo principal es conseguir que los estudiantes trabajen como si fueran matemáticos mediante la introducción de diferentes conceptos del cálculo en el contexto de problemas científicos. Los estudiantes formulan preguntas, proponen conjeturas, dibujan sus propias conclusiones de acuerdo a la relevancia y validez de las conjeturas, y discuten y argumentan sus puntos de vista con los compañeros de clase. El mayor obstáculo didáctico de este proyecto fue el conflicto existente entre el enfoque científico y los hábitos de aprendizaje establecido por las instituciones educativas.

El tercer enfoque, hace referencia al modelo teórico y de enseñanza llamado "ingeniería didáctica", donde uno de los representantes es Artigue (1995); este enfoque plantea una investigación en tres fases: análisis e interpretación de la enseñanza; análisis de las restricciones en la enseñanza y diseño de una ingeniería didáctica. Las experiencias realizadas con este enfoque han mostrado su viabilidad "teórica" de tal tipo de enseñanza, al igual que genera interés en los estudiantes pese al aumento de dificultad.

Como se puede apreciar en las investigaciones mencionadas anteriormente, la enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos de educación superior, están dejando de lado el formalismo y rigor de la enseñanza tradicional e invita a adquirir ideas y conceptos de forma más significativa y profunda; sin embargo, existen docentes y estudiantes a favor y en contra de las nuevas metodologías de enseñanza; pero es relevante conocer la experiencia de los docentes que hacen estos cambios; puesto que se debe enseñar cálculo a una población que no serán matemáticos sino que tendrán que aplicar las matemáticas en su profesión.

Conclusiones

En consecuencia, la práctica pedagógica que predomina es la clase tradicional que tiende a realizarse con un alto nivel de descontextualización y desarticulación con respecto a los otros cursos de las carreras, donde generalmente se usa como recurso didáctico el tablero y la técnica expositiva por parte del docente, donde el estudiante es un receptor pasivo de conocimiento acabado.

Por lo tanto, se hace necesario que los docentes reflexionen sobre sus prácticas pedagógicas, así como de los factores que inciden sobre ellas, con el fin problematizar y reorientar el proceso de enseñanza-aprendizaje hacia el desarrollo de competencias, que permita integrar sus conocimientos para la aplicación del cálculo en el mundo real.

Referencias y bibliografía

Camarena, P. (2011). La Matemática en el Contexto de las Ciencias y la modelación. *XIII CIAEM*.

Camarena, P. (2013). Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. *Acta del III Coloquio Internacional sobre Enseñaza de las Matemáticas*.

Carr, W. (1996). Una teoría para la educación. Hacia una investigación educativa crítica. Ediciones Morata.

Carvajal, J. (2017). La Cuarta Revolución Industrial o Industria 4.0 y su Impacto en la Educación Superior en Ingeniería en Latinoamérica y el Caribe. *15 th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education and Tecnology "Global Partne"*. Boca Raton Fl.

Hong, D., Choi, K., Hwang, J., y Runnalls, C. (2017). Integral Students' Experiences: Measuring Instructional Quality and Instructors' Challenges in Calculus 1 Lessons. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), DOI: 10.21890/ijres.327901*, *3*(2), 424-437.

Irazoqui B.,(2015). *El aprendizaje del cálculo diferencial; una propuesta basada en la Modularización.* Universidad Nacional a Distancia (UNED). Tesis para optar al título de doctor. España.

Jiménez, A., Limas, L. Y Alarcón J. (2015). Prácticas pedagógicas matematicas de profesorado de una institución educativa de enseñanza basica y media. *Praxisysaberes*,127-151.

Khakbaz, A. (2014). Conceptualization of pedagogical content knowledge (pck) for teaching mathematics in University level. *The Eurasia Proceedings of Educational y Social Sciences* , 100 (1), 523-527.

Kim, M. (2007). A Comparison of Pedagogical Practices and Beliefs in International and Domestic Mathematics. *journal of international students*, 4(1),74-78.

Mariño, O. (2013). Fortalecimiento de la enseñanza de la ingeniería con las tecnologías de información y comunicaciones. *Revista de Ingeniería*(39), 46-49.

Martínez, A., Unda, M. y Mejía, M. (2002). El itinerario del maestro: de portador a productor de saber pedagógico Realidades. En Suárez, Hernán (compilador). Veinte años del Movimiento Pedagógico 1982-2002. Entre Mitos. Bogotá. Editorial Magisterio.

Martínez, A. (2004). *De la escuela expansiva a la escuela competitiva: Dos modos de modernización en América Latina.* Bogotá: Anthropos.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 81-96.

Moreno, M., y Azcaráte, C. (2003). Conceptos y creeencias de los profesores universitarios de matematicas acerca de la enseñanaza de las escuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 21(2), 265-280.

Romo-Vazquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática*, 314-338.

Segura, Dino. (1999). La construcción de la confianza. Una experiencia en proyectos de aula. Bogotá D.C. – Colombia: Corporación Escuela Pedagógica Experimental.

Trejo, E., Camarena, P. , y Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formacion de un ingeniero: una propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria, 11*, 397-424.

Ulloa, G. (2008). ¿Qué pasa con la ingeniería en Colombia? *Eduteka*.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (1990). Declaración mundial sobre educación para todos y marco de acción para satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje. *Declaración mundial sobre educación para todos y marco de acción para satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje.* Jomtien.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (1998). Conferencia Mundial sobre la Educación Superior. º*La educación superior en el siglo XXI. Visión y acción.* París.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (2009). Conferencia Mundial sobre la Educación Superior -2009: La nueva dinámica de la educación superior y la investigación para el cambio social y el desarrollo. París.

Vajravelu, K., y Muhs, T. (2016). Integration of Digital Technology and Innovative Strategies for Learning and Teaching Large Classes: A Calculus Case Study. *International Journal of Research In Education and Science (IJRES)*, 2(2), 379-395.

Zuluaga, O. (1987). *Pedagogía e Historia.* Bogotá D.C., Foro Nacional por Colombia.

Zuluaga, O. (1999). *pedagogía e historia.* Medellín, Colombia: Antrhropos Editorial.

Zuluaga, O., Quiceno, H., Saldarriaga, O., Martinez, A., Caruso, M., Saez, J. M., y Caruso, M. (2005). Foucautl: una lectura desde la práctica pedagógica. En *Foucault, la pedagogía y la educación. Pensar de otro modo.* Bogotá: Magisterio.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Un acercamiento dinámico a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto

Sergio Alexander **Guarin** Amorocho
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
sergio_che93@hotmail.com
Sandra Evely **Parada** Rico
Universidad Industrial de Santander
Colombia
sanevepa@uis.edu.co

Resumen

Se presentan avances de una investigación en curso la cual tiene como objetivo caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo Diferencial. Para ello se ha tenido en cuenta la Teoría para la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren. Para lograr el objetivo se ha diseñado una secuencia de actividades y se han planteado las complementariedades de la acción y la expresión para los niveles de comprensión, las cuales se utilizan para el análisis de resultados luego de implementar las actividades. Aquí, se presentan resultados de una de las actividades y las complementariedades que se han construido a la luz del marco conceptual para el análisis.

Palabras clave: cálculo, límite de una función, comprensión, acciones y expresiones

Introducción

La Didáctica de la Matemática ha considerado cada vez más la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos y ya no como adquisición de competencias, lo cual ha evidenciado que las matemáticas de la educación superior se han centrado en el estudio del "Pensamiento Matemático Avanzado" propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios, donde se estudian los conceptos fundamentales del Cálculo.

En ese sentido algunos investigadores como Tall (1991), Sierpinska (1987), entre otros, se han interesado en profundizar en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral.

En particular, la enseñanza del Cálculo Diferencial se ha constituido uno de los mayores desafíos de la educación matemática actual, entre los cuales Blázquez y Ortega (2000) reportan que para los estudiantes el concepto de límite "es árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender" (p.331). Por otra parte Cornu (1991) afirma que una de las grandes dificultades al aprender el concepto de límite no emana solo de su complejidad o de su riqueza, sino en entender que todos los aspectos cognitivos no se pueden aprender a partir de su definición matemática.

Es así que nos planteamos como objetivo de investigación caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo Diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia.

Aspectos Teóricos y Conceptuales

Con el fin de analizar la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, se ha utilizado la Teoría para la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren (1989). La teoría nos ha permitido elaborar de manera a priori las complementariedades de la acción y la expresión para los niveles de comprensión matemática, que desarrollan los estudiantes en un curso de Cálculo Diferencial. Para el desarrollo de la investigación se han considerado los primeros 5 niveles de comprensión matemática asociados al concepto de límite de una función en un punto. A continuación, se describe cada uno de los niveles de comprensión matemática.

• Nivel 1. Conocimiento primitivo: Se refiere al punto inicial de la comprensión donde el estudiante atrae información básica a la situación de aprendizaje.

• Nivel 2. Creación de la imagen: En este nivel el estudiante es capaz de realizar distinciones con base a capacidades y conocimientos anteriores; como resultado, las acciones que se realizan en este nivel involucran el desarrollo de las concesiones entre los referentes y los símbolos. Estas imágenes no solo son pictóricas sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental.

• Nivel 3. Comprensión de la imagen: Las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente, imágenes orientadas por un proceso mental libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie y Kieren, 1992). El estudiante puede usar estas imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

• Nivel 4. Observación de la propiedad: El estudiante puede examinar una imagen mental y determinar distintos atributos asociados con dicha imagen. Además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. De acuerdo con Pirie y Kieren, la diferencia entre el nivel 3 y nivel 4 es la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión.

• Nivel 5. Formalización: El estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este nivel el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona (Pirie y Kieren, 1989). La descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas.

Además, se tiene en cuenta el primer acercamiento que tienen los estudiantes con el concepto de límite de una función, que es a través de la noción de aproximación y mediante la concepción dinámica del límite planteada por Blázquez y Ortega (2002) de la siguiente manera:

"Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe $\lim_{x\to a} f(x)$, si cuando "x" se tiende al número "a", siendo distinto de "a", sus imágenes "$f(x)$" tienden a "L"" (p. 14).

Estos elementos teóricos y conceptuales nos permitieron diseñar y rediseñar las actividades de la secuencia, en la que se pretende favorecer la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo diferencial de la UIS.

Aspectos Metodológicos

La investigación que se reporta sigue una metodología cualitativa que se estructura en las fases de diseño, implementación y análisis de resultados a la luz de los elementos teóricos y conceptuales antes descritos. El punto de partida de la investigación fue el diseño didáctico para el estudio del concepto de límite de una función en estudiantes de bachillerato o de primer semestre universitario, realizada por Betancur, Guarin, Parada y Fiallo (2015).

Para el diseño de la secuencia de actividades, se tienen en cuenta algunos acercamientos epistemológicos y didácticos en la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, como es el caso de Pons (2014), para el autor ese acercamiento necesita usar las nociones de aproximación, tendencia, la concepción dinámica del límite, la concepción optima del límite, la concepción métrica del límite y el uso de las diferentes formas de representar una función (tabular, grafica, algebraica). Para el diseño se tienen en cuenta los aspectos metodológicos propuestos por Fiallo y Parada (2018), quienes plantean que la interacción con un Software Matemático Interactivo debe favorecer la actividad matemática por parte de los estudiantes. La secuencia didáctica del curso engrana la manipulación de medios computacionales con el trabajo con papel y lápiz, y el debate en el aula, la secuencia presenta una estructura intencional que responde a las siguientes fases: exploración libre, socialización de los resultados obtenidos, exploración dirigida, explicación y por último una tarea retadora.

A continuación se describen resultados de las actividades del Taller 2 que tiene como objetivo ilustrar las nociones de aproximación y tendencia que permitirán crear una noción intuitiva del concepto de límite de una función en un punto de manera dinámica con el uso de GeoGebra.

Acercamiento a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto

Para realizar el análisis de las actividades del Taller 2, se tienen en cuenta las complementariedades de la acción y expresión planteadas a partir de los elementos teóricos y conceptuales, que permiten describir la comprensión del concepto de límite de una función un punto. Con este taller se pretende ilustrar de manera dinámica las nociones de aproximación y tendencia, inicialmente se presentan las nociones de manera unidimensional (recta numérica), luego se propone una actividad en un contexto geométrico pero de manera bidimensional para analizar las dos nociones y por último la relación de aproximación y tendencia pero ya de tipo funcional, todas estas actividades se proponen haciendo uso de GeoGebra.

En la actividad 1, se tiene como objetivo identificar la comprensión del estudiante sobre la noción de aproximación, y se espera que el estudiante pueda identificar dos sucesiones numéricas, una a izquierda que está dada por la variable "b" y otra a derecha que está dada por la variable "a"; pero ambas se aproximan a un mismo valor en este caso a 5.

Para este caso podemos observar (ver Figura 1) que el estudiante utiliza la representación gráfica (reta real) y la representación numérica (notación decimal) para ubicar los valores de ambas sucesiones una por izquierda y la otra a derecha de 5 en la recta real (acciones). En ese sentido se evidencia que el estudiante logra interpretar y explicar la existencia de la aproximación representada por las dos flechas direccionadas a 5 (expresión).

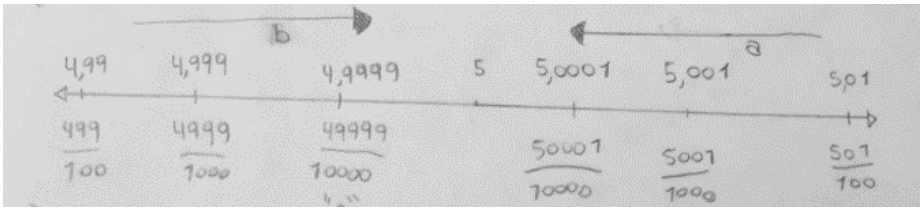


Figura 1. Interpretación de Aproximación

En la segunda actividad (ver Figura 2), se ilustran las nociones de aproximación y tendencia de manera dinámica con GeoGebra. Allí el estudiante reconoce que numéricamente es posible aproximarse a un número real tanto como se quiera (por izquierda y por derecha). Además que el estudiante identificó que es posible acercarse a un punto a partir de la disminución de la distancia, haciendo referencia en que cada vez que se acerca al punto rojo la distancia se hace más pequeña respecto a la anterior, es decir el estudiante está comparando magnitudes. En esta actividad el estudiante con ayuda del zoom (utiliza el deslizador "m") puede reconocer la existencia de otros puntos. De manera que logre identificar que existe una sucesión de valores que se aproximan a 8, posición donde se encuentra ubicado el punto rojo.

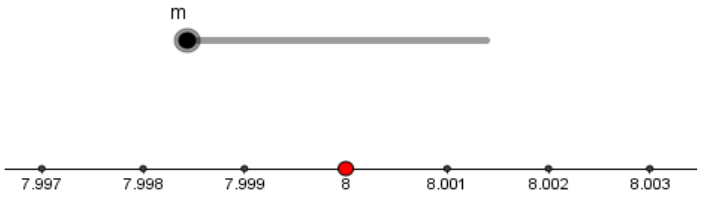


Figura 2. Simulación de la noción de Tendencia

En este caso el estudiante explica (ver Figura 3) que se pueden construir infinitos puntos más cerca al punto rojo. Es decir, la aproximación puede ser cada vez mejorada, el estudiante para explicar esta interpretación da el ejemplo de 8.0001 comparándolo con el último valor que genera el archivo propuesto. Estas respuestas planteadas por el estudiante permiten inferir que está interpretando la diferencia entre aproximación y tendencia como *"una aproximación que mejora cualquier otra*".

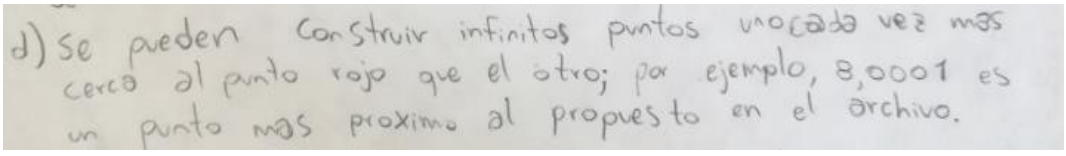


Figura 3. Interpretación de la noción de Tendencia

En la actividad 4, el estudiante establece aproximaciones a "$x = 3$" en el dominio de la función, relacionándolas con las tendencias de $f(x)$, con el fin de analizar el límite de la función en ese punto. Para obtener información de cómo el estudiante interpreta las aproximaciones, se le solicitó elegir valores próximos a $x = 3$, los cuales utilizó para analizar que sucede con la tendencia de la función. En este caso el estudiante decide realizar una tabla de valores relacionando valores en el dominio de la función que a medida que se aproxima a $x = 3$, $f(x)$ tiende a 8, y ese valor sería el límite de la función en ese punto.

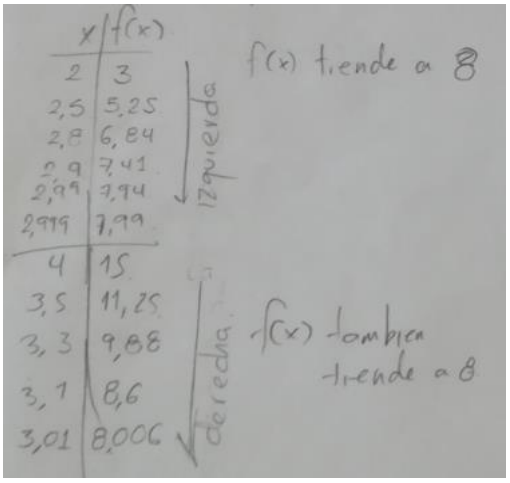


Figura 4. Interpretación del límite de una función en un punto

Esas aproximaciones son acciones que realizó el estudiante, que le permiten expresar que a medida que *"se aproxima a $x = 3$, $f(x)$ tiende a 8 por izquierda y por derecha"* (realizando dos flechas que indican tendencia en la Figura 4), y ese valor sería el límite de la función en ese punto

Reflexiones

Un acercamiento al concepto de límite mediante la aproximación y la tendencia posibilita que el estudiante logre entender el límite de una función como lo que sucede cerca del punto y no en el punto.

El primer momento en la comprensión de un concepto matemático según Thom y Pirie (2006) surge cuando se realizan acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto. En este caso se evidencia que el estudiante inicia a crear la imagen del límite de una función en un punto, a través del uso de la representación tabular, el uso de la hoja de cálculo de GeoGebra. Además, el estudiante logra establecer aproximaciones en el dominio y en el rango de la función a través del registro numérico.

Una contribución importante que lleva las nociones de aproximación y tendencia es, precisar las ideas que se tienen de aproximación por medio de distancias y tomar estas para entender la tendencia a través de la disminución de las mismas.

Referencias y bibliografía

Betancur, A., Guarin, S., Parada, S., y Fiallo J. (2015). La noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite. IX Simposio Nororiental de matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En El futuro del cálculo infinitesimal. Grupo Editorial Iberoamérica. México. 331-354.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8(30), 67-82.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, (Ed). Advanced Mathematical Thinking. (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Fiallo, J., y Parada, S. (2018). Estudio dinámico del cambio y la variación. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Pirie, S., y Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. For the learning of mathematics, 9(3), 7-11.

Pirie, S., y Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. Educational Studies in Mathematics, 23(5), 505-528.

Pons, J. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto. (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante. España.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students y epistemological obstacles related the limitis. Educational Studies in Mathematics. 18(4), 371-397.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed). Advanced mathematical thinking. (pp. 3-24). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Thom, J. S., & Pirie, S. E. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. Jounal of mathematical Behavior, 25, 185-195.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Descriptores preliminares para la comprensión del concepto de Infinito y su relación con las funciones de variable real, en el contexto del Modelo de van Hiele

Alba Soraida **Gutiérrez** Sierra
Doctorando en Educación, Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología
Panamá
albasoraidagutierrez@gmail.com
René Alejandro **Londoño** Cano
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
renelondo@gmail.com

Resumen

Esta comunicación pretende mostrar resultados parciales de la investigación en curso, "Descripción de la comprensión del concepto de infinito y su relación con las funciones de variable real, en estudiantes de Educación Media y primeros semestres de Educación Superior, a través del Modelo de van Hiele". La investigación está basada en un enfoque cualitativo y usa el método estudio de casos, lo cual admite la transformación de la realidad en un contexto educativo particular con miras a producir conocimiento práctico que pueda ser generalizado. El instrumento de indagación es la entrevista semiestructurada de carácter socrático, lo que hace posible confirmar descriptores hipotéticos que se resignifican a través de la implementación, modificación y refinamiento de la misma, posibilitando reconocer el nivel de compresión del concepto en cuestión.

Palabras clave: infinito, matemática, comprensión, razonamiento, van Hiele.

Introducción

Una de las tareas en educación es resignificar la cultura matemática, como un trabajo creador en el que maestros y estudiantes reorganizan el saber para utilizarlo en solución de problemas de la vida real. El pensamiento matemático "se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas" (Cantoral y otros, 2005, p.19). La problemática abordada desde el contexto de la investigación muestra que cuando los estudiantes se acercan al concepto de infinito, solamente lo hacen desde una noción intuitiva y relacionada

con cantidad o tamaño, generando una serie de contradicciones conceptuales frente al hecho de que no pueden establecer con suficiencia y claridad la conexión directa que tiene el infinito con otros conceptos matemáticos. Respecto al tema, "se evidencia que el bajo rendimiento de los estudiantes en cursos de cálculo diferencial e integral, se encuentra asociado a la construcción del concepto de función; una de las razones más relevantes ante esta premisa, es la deficiente e incompleta comprensión del papel que juega el infinito en la teoría de los conjuntos" (Attorps, Björk y Radic, 2016, p.sf.). La presente comunicación pretende mostrar las dificultades que se generan en la concepción y definición del infinito y su relación con funciones de variable real, por parte de estudiantes de último año de educación media y primer año de Universidad. Para abordar esta problemática se utiliza modelo de van Hiele, el cual permite describir y explorar el nivel de razonamiento del concepto en cuestión.

Por su parte, Cantor (1932) señala que "existía una correspondencia biunívoca entre un conjunto y un subconjunto de sí mismo, lo que significó el establecimiento de una relación de orden para definir el infinito" (p.34). El avance del concepto de infinito, ha sido habitualmente una polémica, lo que ha provocado una permanente confusión en los estudiantes sobre los conceptos relacionados con él, dificultando la comprensión del concepto mismo asociado a las funciones de variable real. "Al no tener clara la relación de estos dos conceptos en el cálculo, surgen consecuencias frente a la modelación de situaciones y fenómenos científicos que fundamentan su análisis y explicación a través del comportamiento de las funciones" (Dolores, 2004, p.17). Por otro lado, en lo que respecta al concepto de función, algunos autores han demostrado la evolución de este y sus implicaciones, "manifestando que está íntimamente ligado al concepto primitivo de conjunto, y a su vez, induce al desarrollo de cantidad y de número evidenciando la relación con el infinito" (Gutiérrez y Jaime, 1989)

Soportes teóricos

El modelo de van Hiele es el soporte teórico que fundamenta la presente investigación, dado que permite describir cómo comprenden los estudiantes el concepto de infinito y su relación con el concepto de función, posibilitando diseñar descriptores hipotéticos para cada uno de los niveles de razonamiento correspondientes. Como herramienta importante para detectar el nivel de razonamiento de los estudiantes, se utiliza la entrevista socrática, la cual permite a través de preguntas intencionadas que no sugieren de manera directa una enseñanza, que el estudiante reflexione y comprenda el concepto en cuestión.

En cuanto al concepto de función, Gutiérrez y Jaime (1990) demostraron la evolución del concepto y sus implicaciones, poniendo de manifiesto que el concepto de función está íntimamente ligado al concepto primitivo de conjunto y, a su vez, induciendo al desarrollo de los conceptos de cantidad y de número, evidenciando la relación con el concepto de infinito.

El infinito y su enseñanza en las matemáticas

En las matemáticas el infinito aparece de diversas formas; para Jato (2012):

> Desde el comienzo de la formación escolar se empieza a conocer y convivir con el infinito, concretamente con el infinito potencial que paulatinamente va adquiriendo reflejo en nuestras estructuras mentales ya sea asociado a procesos cíclicos – alternancia entre el día y la noche- a procesos de conteo – números naturales- o a través del infinito geométrico (…) en cuanto al infinito actual este aparece en la escena matemática con el cálculo infinitesimal y se prolonga en la enseñanza de grados universitarios del ámbito técnico científico (p. 14).

La enseñanza del infinito inicia desde edades tempranas en el ámbito escolar, se sitúa hacia la representación de la numerosidad de un conjunto hasta la finalización del bachillerato, con la idea más o menos formal de la noción de límite, con la imagen exclusiva de un símbolo al cual se le atribuye el sinónimo de muy grande o muy pequeño. Esta singular representación ha dejado a un lado el papel que desempeña el infinito en innumerables tópicos de aprendizaje de la matemática en educación media y universitaria, relacionados con conceptos, como: Número real, sucesión, derivada, tangente u otros conceptos asociados. En la enseñanza de las matemáticas, la incorporación del infinito, permite dar una mirada de la literatura científica de diversos estudios para tratar de comprender el papel que desempeña en la construcción de objetos matemáticos; a partir de esto: Belmonte y Sierra (2009) consideran que el concepto de infinito es esencial para comprender nociones matemáticas como límite, continuidad, derivada, integral, sucesiones, funciones y series, entre otras.

El modelo de van Hiele y el concepto de infinito

El origen del modelo de van Hiele surge de las dificultades del aprendizaje en la geometría, fue abordado por los esposos Pierre M. van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, quienes en 1957 lo presentan como resultado en sus disertaciones doctorales en la Universidad de Utrecht (Holanda); la experiencia que los esposos poseían producto de su trabajo como docentes, los llevaron a estudiar de fondo las dificultades que mostraban sus estudiantes para solucionar problemas en la geometría, al plantear situaciones cotidianas de la misma índole en diferentes contextos, los estudiantes carecían de ideas y comprensión para alcanzar a resolverlos desde su propia perspectiva, es decir que cuando ellos aprendían los conceptos de memoria no era suficiente para plantear, resolver y hallar una solución válida; en consecuencia el fracaso los llevaba a pensar que la matemática era difícil y en particular la geometría.

El modelo de van Hiele ha sido implementado en diferentes investigaciones para describir la comprensión de algunos objetos matemáticos por parte de estudiantes; este modelo es una propuesta adecuada -entre muchas otras- que describe de manera integral y con suficiente rigor, cómo se desarrolla la evolución de la comprensión del concepto de infinito y sus implicaciones en otros campos de la matemática y demás áreas del conocimiento.

Cuando se reflexiona sobre la descripción y el proceso de comprensión de un concepto matemático específico, se asocia en relación a identificar diferentes formas de razonamiento y se puede valorar su progreso (Hoffer, 1893). A nivel de la instrucción, marca pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran. En consecuencia y como producto de las disertaciones, Pierre van Hiele

diseñó un sistema de niveles de pensamiento en geometría y Dina Van Hiele enfocó sus estudios en el progreso de los niveles de pensamiento de los estudiantes

De esta forma concibieron que el proceso de aprendizaje bajo estos dos aspectos básicos permita explicar cómo el razonamiento geométrico de los estudiantes acontece a través de una serie de niveles. El aprendizaje, para los van Hiele, citados por Shaughnessy y Burger (1985), es una diferenciación y reestructuración progresiva de campos que producen estructuras mentales nuevas y más complejas. Los niveles altos son alcanzados si las reglas que rigen a las estructuras más bajas se han hecho explícitas y han sido interiorizados, llevando esto al desarrollo de estructuras mentales mucho más complejas.

Metodología

La investigación está orientada en un enfoque cualitativo, de tipo estudio de casos, cuyo propósito es alcanzar una comprensión en profundidad del caso en sí mismo; según Stake (1999) "solo se estudia un caso, o unos pocos casos, pero se estudian en profundidad" (p. 19). Por lo tanto, el estudio de casos se considera el más pertinente, por cuanto permite obtener información detallada de la manera como razonan los estudiantes entrevistados, en relación al concepto objeto de estudio (Londoño, 2011, p. 182). Para la recolección de la información se utilizó como herramienta fundamental la entrevista socrática; mediante el guion de entrevista se verifican los descriptores hipotéticos correspondientes a cada nivel de razonamiento y se describe la comprensión de los estudiantes en relación con el concepto de infinito, a través del concepto de función de variable real.

La Entrevista Socrática

El método socrático, nace de los diálogos que sostenía Sócrates para llevar al individuo a encontrar la verdad sobre el conocimiento. Por tal razón, se considera una estrategia para promover el pensamiento crítico, y de este modo, el estudiante sea quien descubra el conocimiento, utilizando una serie de preguntas y el análisis de sus propias respuestas, es decir; se construye conocimiento a partir de la reflexión crítica de una situación motivada. En este sentido, la elaboración de la entrevista socrática, debió ser cuidadosamente estructurada por varios aspectos: el primero es el lenguaje, factor fundamental para determinar si el estudiante ha comprendido los conocimientos matemáticos; entre otros, están el vocabulario y las relaciones significativas entre los conceptos, los cuales fueron factores de análisis en el desarrollo de la investigación. En estas razones, se resalta la descripción que realiza De la Torre (2003) sobre el método socrático y el modelo de van Hiele, trayendo algunos apartes de su artículo "El método socrático y el modelo de van Hiele"

> El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir, a develar la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre. Es esencial al método el empleo sistemático de la ironía socrática, que consiste en simular ignorancia sobre la materia de que se trata, con el fin de hacer aparecer la verdad, a través del diálogo entre el maestro y el aprendiz; la inducción en Sócrates no es un método de demostración o prueba, sino un procedimiento encaminado a sugerir el significado de una definición universal, que se presenta a la mente con fuerza y claridad. La definición, por su parte, se justifica en la medida en que las consecuencias derivadas de su adopción sean satisfactorias. En el modelo van Hiele se insiste en el cuidado que debe tenerse con las premisas siguientes: El maestro tiene que asegurarse del interés de los alumnos en el problema y debe captar su atención desde el comienzo. El método socrático sólo es efectivo en la medida en que se pueda garantizar que cada uno de los alumnos alcanza la solución mediante su trabajo personal. El profesor no podrá llenarse de impaciencia ni darles la solución prematuramente. El trabajo es individual y las conversaciones colectivas en el aula deberán ser guiadas por el maestro, de modo que se le permita avanzar también a aquellos que se muevan a paso lento. El maestro debe reconocer acertadamente la dificultad del problema, para que todos los estudiantes conserven el interés hasta el fin, sin que ninguno de ellos olvide el corazón del asunto. (p.101).

En este proceso, el diálogo simple pero complejo a la vez, evidencia como la metodología de Sócrates aporta al modelo, en el fondo induce la manera en que se puede enseñar al estudiante un concepto desde su propia experiencia, modificando de cierta forma lo aprendido y volviendo a analizar, reflexionar e inferir otra perspectiva del objeto matemático, entendido como la estimulación para orientar el razonamiento.

Resultados parciales

El modelo de "van Hiele es utilizado como una propuesta que permite describir las concepciones de razonamiento en un objeto matemático específico, desarrollando la indagación y cuestionamiento permanente para adquirir un conocimiento propio sin necesidad de enseñar" (Londoño y otros, 2017, p.124). Al describir cómo comprenden los estudiantes el concepto de infinito a través del concepto de función de variable real, se utilizaron descriptores hipotéticos de acuerdo a cada nivel establecido en el mismo modelo. A continuación, se especifican cada uno de los niveles que postula el modelo de van Hiele, las características enmarcadas en él y uno de los descriptores, a modo de ejemplo, que deben cumplir los estudiantes para estar clasificados de acuerdo al nivel de razonamiento en que se encuentra.

En este estudio se seguirá la nomenclatura por J. Llorens (1997):
Nivel 0, **Predescriptivo**
Nivel I, **de Reconocimiento Visual**
Nivel II, **de Análisis**
Nivel III, **de Clasificación, de Relación.**

Nivel 0. (Predescriptivo)

En este nivel, los estudiantes reconocen los elementos básicos aritméticos y geométricos para percibir y describir las figuras, formas o conceptos como un todo, enfatizándose en lo físico y concreto.

- Identifica que una recta y un segmento de recta están conformados por infinitos puntos

Nivel I. (Visual)

Para que un estudiante se encuentre clasificado en el Nivel I, de reconocimiento visual, debe: reconocer las figuras y formas por su apariencia global, y percibirlas como objetos individuales.

- Reconoce que hay infinitos números en un intervalo cerrado de la recta real.

Nivel II (De análisis).

En este nivel los estudiantes analizan las partes o elementos que componen una figura geométrica y sus propiedades, a partir de este análisis puede deducir otras propiedades de las figuras, generalizándolas a las figuras de una determinada clase, de otro lado, no relacionan las distintas propiedades de las figura geométricas, por lo que no pueden hacer clasificaciones de esas figuras basándose en sus propiedades.

- Analiza procesos que permiten construir biyecciónes entre un conjunto infinito y un subconjunto infinito propio de él, infiriendo que podrían tener la misma cantidad de elementos.

Nivel III (De clasificación o relación)

Los estudiantes relacionan las figuras y sus propiedades. Reconocen que unas propiedades se deducen de otras y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para conjeturar que una propiedad se deriva de otra. Sin embargo; no reconocen la necesidad del rigor, ni la relación entre lo que han aprendido con otros sistemas deductivos que pueden ser semejantes; pueden seguir una demostración formal, pero generalmente no son capaces de reproducirla. Sin embargo, pueden clasificar lógicamente y aprender relaciones entre distintas clases de figuras, pero no comprenden la necesidad de la formalización (demostraciones generales) ni las estructuras axiomáticas.

- Reconoce de manera analítica la densidad de los reales en un intervalo definido.

Reflexiones o conclusiones.

En estudios como los de Londoño & Jurado (2005), Esteban (2003) Jaramillo C. (2001), entre otros, evidencian que el diseño de la entrevista socrática para la comprensión de diversos objetos matemáticos, permitió de manera efectiva conseguir el objetivo de describir la comprensión. A partir de los anteriores resultados y de el obtenido en la presente investigación, se puede conjeturar que la implementación de un dispositivo elemental pero bien estructurado, permite acceder fácilmente a la comprensión del concepto de infinito, sin duda necesario en el diseño de una entrevista socrática, pues contribuye a que el desarrollo del trabajo de campo se lleve a cabo con más naturalidad y efectividad en el proceso de comprensión.

Esta investigación evidencia que los procesos de descripción y razonamiento para la comprensión que tienen los estudiantes frente a la percepción no cuantificable sobre el concepto de infinito, puede contribuir de manera efectiva a establecer su relación con el concepto de función de variable real.

Referencias Bibliográficas

Belmonte, y Sierra J. (2009). Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito (tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca, España.

Burger, W. y Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in MathematicsEducation,* 17(1), 31– 48.

Cantoral, R. & otros. (2005) "Desarrollo del Pensamiento Matemático" Editorial Trillas, Mexico.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2005) "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis" Editorial Trillas, Mexico.

De la Torre, A. (2003) "El Método Socrático y el modelo Van Hiele". Universidad de Antioquía, Lecturas Matemáticas, volumen 24.

Dolores, C., Valero, M. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar. Epsilon, THALES, 58, 20(1), 45T73.

Esteban, P. (2003) "Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele". Tesis doctoral. Publicada. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1989) "Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele". Rev. de Enseñanza de las Ciencias nº 7, p. 89-95.

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele. En L. y. Sánchez, Teoría y práctica en Educación Matemática. Sevilla: Alfar.

Hoffer, A. (1893). *Van Hiele - basedresearch. R. Lesh & M. Landau, eds. Acquisition of mathematical concepts and processes.* New York.

Jato, S. (2012) "El infinito en las matemáticas de la enseñanza secundaria"

Jaramillo, L, & Pérez, P. (2001) "La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van Hiele". En: Educación Matemática. Vol., 13. No. 1.Grupo editorial Iberoamérica. México. p. 68 – 80.

Jaramillo, C y Campillo, L. (2001). Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van Hiele. *Divulgaciones matemáticas*, 9 (1), 65-84.

Jurado, F., & Londoño, R. (2005). Diseño de una entrevista socrática para la noción de suma de una serie de términos positivos vía área de figuras planas. Antioquia: Universidad.

Londoño, R. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Tesis doctoral. Colombia: Universidad de Antioquia.

Londoño, R & otros. (2017) "Estudio comparativo entre el modelo de van-Hiele y la teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos. Revista Logos, Ciencia y Tecnologia, Policia Nacional, volumen 9, numero 2.

Llorens, J., & Pérez, P. (1997). An Extension of van-Hiele's model to the Study of Local Approximation. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology , 28 (5), 713-726.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Editorial Morata.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La Génesis Instrumental: El caso de la derivada direccional, un estudio del proceso de enseñanza y de aprendizaje mediado por objetos dinámicos en estudiantes de ingeniería

Pedro Vicente Esteban Duarte
Universidad EAFIT
Colombia
pesteban@eafit.edu.co

Hugo Rogelio Mejía Velasco
CINVESTAV
México
hmejia@cinvestav.mx

Luis Carlos Rojas Flórez
luis.rojas@cinvestav.mx
CINVESTAV
México

Resumen

El cálculo diferencial de funciones de dos variables es una de las áreas de las matemáticas de mayor importancia en el estudio de la ingeniería, los conceptos que se estudian en esta asignatura forman la base de otros conceptos que los estudiantes deben abordar en sus otras áreas de estudio. Sin embargo, y a diferencia del cálculo diferencial para funciones de una variable, el número de trabajos publicados en educación es escaso. Este escrito muestra avances de una tesis doctoral, cuyo principal objetivo es desarrollar comprensión conceptual de la derivada direccional en estudiantes de ingeniería. Para ello, se dispuso a crear una secuencia instruccional de enseñanza y de aprendizaje articuladas con objetos dinámicos en dos y tres dimensiones creados con el software GeoGebra. Para el análisis de la información recolectada se tomó como marco de referencia la aproximación instrumental, junto a la visualización como elemento articulador durante todo el proceso.

Palabras claves: Derivada Direccional, Objetos Dinámicos, Aproximación instrumental, Visualización, Conceptualización.

Introducción

El cálculo diferencial de funciones de varias variables es una asignatura de vital importancia en el estudio de las matemáticas e ingeniería a nivel universitario. Dentro de su contenido temático se estudian diferentes nociones que proveen de herramientas conceptuales al estudiante, que posteriormente debe utilizar en problemas, situaciones o construcciones de nuevos conceptos y conocimientos que se presentan en sus otras áreas de estudio. En esta asignatura, la visualización[1] forma parte fundamental en su comprensión, sus tópicos que giran alrededor de la interpretación geométrica de imágenes en dos y tres dimensiones, pueden tornarse abstractos y de dificultosa comprensión si no se cuentan con herramientas que permitan abordarlos de una manera clara. Por ello, desde el punto de vista de su enseñanza y de su aprendizaje, resulta fundamental considerar instrumentos que permitan al docente transmitir sus conocimientos de una manera accesible, y a los estudiantes escenarios que les faciliten la comprensión de los conceptos inmersos en esta asignatura de manera clara.

Dada la importancia del cálculo diferencial y en particular de la noción de la derivada direccional, en la comprensión conceptual y aplicativa de distintas nociones que deben desarrollar los estudiantes a través su carrera de ingeniería, se esperaría que hubiese gran cantidad de trabajos o investigaciones que abordaran la problemática de su enseñanza y de su aprendizaje; sin embargo, haciendo un barrido bibliográfico, se encuentra un reducido conjunto de trabajos publicados en esta rama. Algunos de ellos, hacen referencia principalmente a las funciones de dos variables (e.g. Trigueros y Martínez, 2012; Weber y Thompson, 2014), y a diferencia del cálculo diferencial en una variable donde abunda trabajos e investigaciones que se ocupan de esta problemática, son muy pocas las publicaciones sobre este cálculo para funciones en dos variables, y en particular de la derivada direccional, como lo hace ver Trigueros & Martínez, (2015).

> "Hay muy pocas publicaciones sobre el cálculo diferencial de tales funciones. La única publicación a la que nos referiremos, Weber (2012), incluye una discusión de la tasa de cambio de funciones de dos variables centradas en el uso del pensamiento covariacional para ayudar a los estudiantes a construir una noción de tasa de cambio en el espacio" (pág.1).

Algunos autores afirman que la enseñanza del cálculo diferencial se enfoca en el uso y aplicación de fórmulas algebraicas, lo que causa en los estudiantes dificultades en la comprensión conceptual (Artigue, (1995); Moreno, (2005)). Lo anterior no significa que este enfoque no contribuya de manera significativa en el proceso de aprendizaje, el problema radica cuando se deja a un lado la relación entre conceptos, sus fórmulas algebraicas e interpretaciones geométricas. Cuando esto ocurre, se corre el riesgo que los estudiantes perciban cada tópico como un tema aislado.

Por otro lado, en la mayor parte de los textos utilizados en la enseñanza del cálculo diferencial en una variable (Edwards & Penney, 2008; Larson & Edwards, 2013; Stewart, 2006),

[1] En el sentido de (Zimmermann and Cunningham, 1991, p. 12). "La visualización matemática es la capacidad del alumno para dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel, o en algunos casos, con una computadora) para representar un concepto o problema matemático y usar el diagrama para lograr comprensión y como una ayuda en la resolución de problemas. En matemáticas, la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio hacia un fin, que es la comprensión."

mucho antes de introducir el concepto de la derivada, se presentan registros asociados del concepto de pendiente, y utilizan estos posteriormente para introducir esta noción. Sin embargo, para funciones de dos variables en (3D) el espacio, no se presenta de manera explícita el concepto de pendiente, por el contrario, la primera discusión de este concepto se da con la introducción de las derivadas parciales. Una de las posibles razones que podría indicar lo anterior, es que los autores de estos libros asumen que el lector extenderá naturalmente el concepto de pendiente de dos a tres dimensiones, lo que en la realidad no ocurre.

De acuerdo con el planteamiento realizado, nuestra investigación plantea una propuesta que integra actividades de aprendizaje articuladas con objetos dinámicos en dos y tres dimensiones creados con el software GeoGebra, dirigidas y estructuradas a la comprensión de la derivada direccional. Nuestro principal objetivo fue el de diseñar una secuencia instruccional didáctica, que incorporara objetos dinámicos, para estudiar la comprensión de la derivada direccional en estudiantes de ingeniería. Así mismo, y en vista del componente tecnológico utilizado, para la investigación resultó necesario contar con un enfoque teórico, que tuviera en cuenta el carácter no trivial del uso de la tecnología como instrumento de aprendizaje. Por estas razones, seleccionamos como marco de referencia para el análisis de los datos derivados de la aplicación metodológica la Aproximación Instrumental. Sumado a lo anterior, y teniendo en cuenta que este trabajo se centra en el aprendizaje de un concepto que gira en torno al análisis geométrico de gráficos en dos y tres dimensiones, la visualización jugó un rol fundamental como elemento mediador en la comprensión de la derivada direccional.

Aproximación Instrumental

La humanidad a través de su historia se ha caracterizado por la construcción de herramientas o artefactos como solución a diferentes desafíos que se le han presentado en los distintos campos a través del tiempo. El ámbito de la educación matemática no ajeno a esta realidad, todas las herramientas que se han diseñado por más elementales que sean, han surgido como respuesta al incremento exponencial en la complejidad memorística, gráfica, algebraica, aplicativa e interpretativa de los conceptos que se estudian en las diferentes ramas a través del tiempo.

En el campo de la educación matemática, su desarrollo y evolución en gran parte ha estado ligado al uso de artefactos materiales físicos o simbólicos. Artigue (2002) menciona que, “El desarrollo de las matemáticas siempre ha dependido de las herramientas materiales y simbólicas disponibles para los cálculos matemáticos" (p.245). Por ejemplo, hoy por hoy podemos afirmar que es innegable el papel fundamental que juegan las herramientas o artefactos computacionales en el ámbito de la educación matemática, pues actualmente existen software que permiten explorar conceptos a través del cálculo simbólico (CAS), numéricos y gráficos, que ayudan a ampliar y facilitar el abordaje de nociones que hace unos años eran casi inexplorables por su complejidad.

Por otro lado, diseñar artefactos computacionales como objetos dinámicos, y aplicarlos dentro de un proceso de enseñanza y de aprendizaje en las matemáticas, no se debe limitar únicamente al uso aritmético del mismo. Estos deben ser diseñados con un objetivo de aprendizaje concreto, visible por los estudiantes a través de la interacción con estos, o en ocasiones con la ayuda de una persona externa. Los estudiantes deben vislumbrar la intencionalidad para el cual el artefacto fue construido, percibir su propósito y finalidad; cuando

esto no ocurre, el artefacto pierde toda utilidad. Este proceso de interacción requiere que el estudiante desarrolle esquemas mentales en el sentido de Vergnaud (2009), que involucran habilidades en el uso del artefacto y conocimiento del contexto (en nuestro caso matemático) en las que el artefacto es útil. Es precisamente aquí donde el artefacto se convierte en un instrumento valioso y funcional, que media la actividad para el cual fue diseñado. Por consiguiente, convertir un artefacto en un instrumento en manos de un estudiante está lejos de ser trivial, requiere tiempo y esfuerzo por parte de él y del docente, e implica un descubrimiento progresivo de las propiedades y características del artefacto, todo este proceso es lo que se denomina dentro del marco de la Aproximación Instrumental, la génesis instrumental.

Así pues, transformar un artefacto en un instrumento implica dos sentidos: por un lado, está el proceso que está ligado a las características del artefacto, sus limitaciones y potencialidades que conforman las técnicas, formas de uso y comprensión conceptual del sujeto, a este se le llama la instrumentación. Y por otro, están las concepciones y preferencias del sujeto, éste puede cambiar la manera en que utiliza el artefacto, e incluso puede llegar modificarlo o personalizarlo a fin de adaptarlo a sus necesidades, a este proceso se le llama instrumentalización.

Propuesta metodológica

Para la aplicación metodológica, se crearon una serie de actividades de aprendizaje apoyadas en objetos dinámicos desarrollados con el software GeoGebra. Las actividades abarcan conceptos como funciones de dos variables, trazas, curvas de nivel, planos, rectas en el espacio, límites y continuidad, entre otros conceptos subyacentes necesarios para la construcción conceptual de derivada direccional. La selección del grupo experimental se realizó de manera voluntaria, de 31 estudiantes que recién iniciaban la asignatura de cálculo vectorial, ocho de ellos aceptaron participar en la investigación.

La ejecución de la propuesta se enmarcó en dos componentes que se articularon entre sí durante todo el proceso de ejecución. Por un lado, estaba el componente tecnológico y didáctico que consistió en elaborar una secuencia instruccional basada en objetos dinámicos creados con el software GeoGebra para la enseñanza y el de aprendizaje de la derivada direccional; y por otro, el componente de análisis, que comprendía la implementación de descriptores de evaluación (test de conocimientos, entrevistas semiestructuradas y videos de cada una de las prácticas) que permitieran analizar bajo el marco de la aproximación instrumental, la comprensión de la derivada direccional y conceptos asociados en los estudiantes.

Para la secuencia instruccional se diseñaron tres tipos de objetos, unos para operar y comparar, otros para afianzar conceptos, y otros más para validar definiciones o teoremas. Con cada una de las actividades, se pretendía que el estudiante a partir de la manipulación y de la visualización provista por los objetos, interpretara geométricamente el concepto o conceptos inmersos en cada uno de ellos. Así mismo, que articulara los conocimientos adquiridos a medida que iba avanzando en la secuencia, y consiguiese traducir dichas interpretaciones a un lenguaje numérico, algebraico y simbólico, que lo guiara a conceptualizar la derivada direccional a partir de su definición como un límite de una función de una variable, y también como el teorema que lo define.

En total se realizaron 15 objetos dinámicos que incorporaban vistas en dos y tres dimensiones, presentaban componentes dinámicos gráficos, numéricos, textuales, casillas de entrada de funciones, datos, expresiones algebraicas, y otros; que posibilitaba al estudiante

explorar con múltiples ejemplos cada uno de los conceptos necesarios para la conceptualización de la derivada direccional. Seguidamente se muestran dos de los objetos dinámicos más representativos.

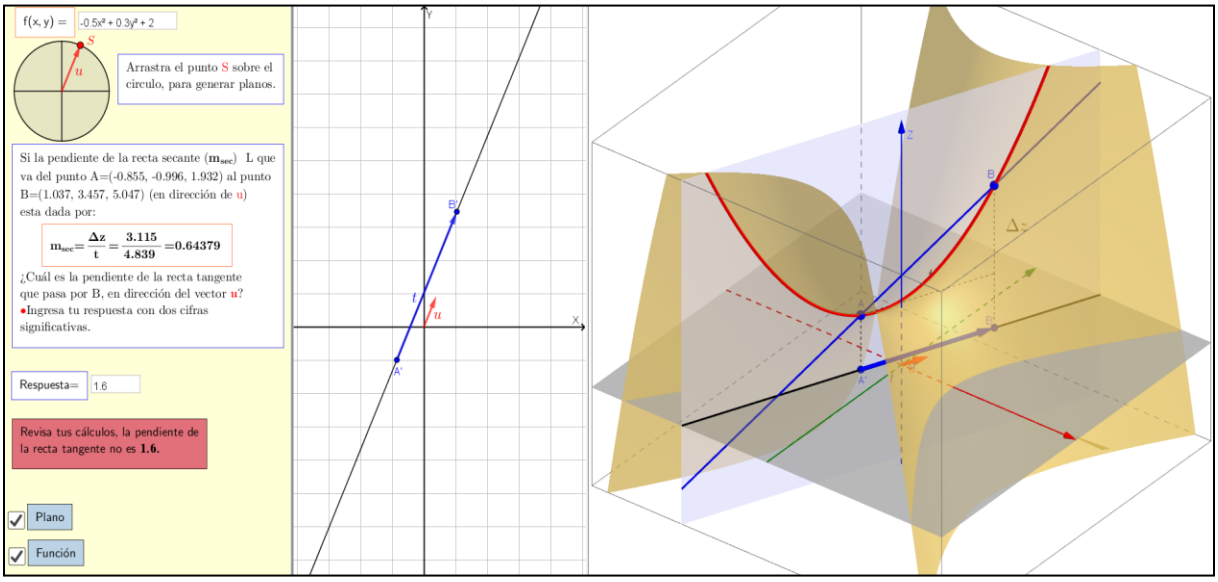


Figura 1. Aproximación de la pendiente de una recta tangente a una función $z = f(x, y)$.

La Figura 1 muestra el objeto con cual se introdujo la definición de la derivada direccional como el límite de una función en una variable. Con esta práctica se buscaba que el estudiante a partir de las comprensiones adquiridas en las prácticas anteriores, junto a la manipulación, visualización y componentes numéricos y textuales presentes en el objeto, aproximara el valor de la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función $z = f(x, y)$ en un punto B en dirección de un vector unitario u, a través del valor de las pendientes de una sucesión de rectas secantes que pasaban por el punto B y por otro punto cercano A, ambos dentro de una curva o traza dada por la intersección de la superficie y un plano vertical paralelo a un vector u, y posteriormente a partir de una serie de preguntas propuestas por el docente, guiar al estudiante a la formalización del concepto como la definición del límite de una función de una variable.

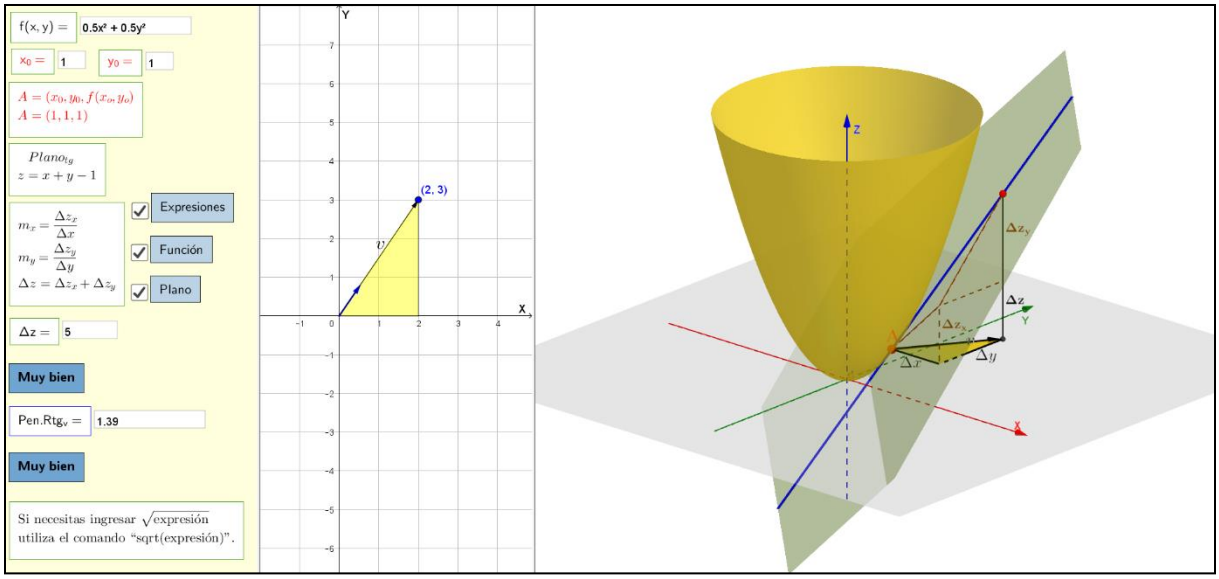


Figura 2. Recta tangente contenida en un plano tangente a una función $z = f(x, y)$.

La Figura 2, muestra el objeto que refiere a la construcción del teorema de la derivada direccional como el producto punto entre el operador gradiente $\nabla f(x, y)$ y un vector unitario u, es decir $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y).u$. Cabe la pena señalar que en este punto de la secuencia instruccional los estudiantes ya han realizado con éxito otras actividades que incluyen conceptos como vectores, pendiente de una recta en el espacio, pendiente sobre planos y otros, necesarios para conceptualizar la derivada direccional a través de este teorema. El propósito de esta actividad era articular todos y cada uno de los conceptos desarrollados prácticas anteriores; con base en ello y junto a la exploración visual y algebraica del objeto, se buscaba que el estudiante en principio a partir de una expresión numérica determinara la pendiente de la recta tangente a la función $z = f(x, y)$ que estaba contenida en el plano en dirección de un vector $v = \langle \Delta x, \Delta y \rangle$ como muestra la figura 2, y posteriormente a partir de una serie de preguntas propuestas por el docente, guiar al estudiante a la formalización del concepto como el teorema que define la derivada direccional.

Conclusiones

A partir de la información recolectada, se puedo dar cuenta de los progresos que iban adquiriendo los estudiantes en cuanto al manejo y apropiación de todos y cada uno de los objetos. Por un lado, se evidenció el proceso de instrumentalización a partir del desarrollo de esquemas de uso, que lograron los estudiantes, en vista de la manera competente que utilizaron los elementos de cada uno de los objetos. y por otro, el proceso de instrumentación y desarrollo de esquemas de acción instrumentada, en cuanto a los elementos técnicos, conceptuales y colaborativos; este último en relación con las estrategias grupales que utilizaron en la solución de cada una de las actividades.

Por otro lado, los elementos gráficos, dinámicos, numéricos y textuales utilizados en las actividades permitieron a los estudiantes interactuar y explorar cada uno de los objetos de manera activa, encontrando una retroalimentación instantánea de los elementos antes mencionados, que propició en ellos la extrapolación del conocimiento adquirido a medida que avanzaban en cada una de las prácticas. En otras palabras, se pudo dar cuenta del proceso de génesis instrumental logrado por los estudiantes tanto en los temas subyacentes a la derivada

direccional como de éste mismo.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 97–140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Edwards, H., and Penney, D. (2008). Calculus: Early Transcendentals 6th Edition, Prentice Hall

Larson, R., & Edwards, B. H. (2013). Calculus of a single variable. Cengage Learning.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralba (Eds.), IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 81–96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Stewart, J. (2006). Calculus: early transcendentals (6th ed.). Boston: Thomson-Brooks/Cole. Strauss, M., Bradley, G. & Smith, K. (2002). Calculus (3rd ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall.

Trigueros, M. & Martínez, P (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. Educational Studies in Mathematics, 81(3), 365-384.

Trigueros, M. & Martínez, P. (2015). Student understanding of directional derivatives of functions of two variables. In Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. East Lansing, MI: Michigan State University.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual _elds. Human development, 52(2):83{94}.

Weber E. (2012). Students' Ways of Thinking about Two-Variable Functions and Rate of Change in Space. Ph.D. Dissertation. Arizona State University.

Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. Educational Studies in Mathematics, 87(1), 67-85.

Zimmermann, W. and Cunningham, S. (1991). Visualization in teaching and learning mathematics. Mathematical Association of America.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Análisis teórico de los operadores lineales diagonalizables con base en la teoría APOE

Esteban **Mendoza** Sandoval
Universidad Autónoma de Guerrero
México
emendoza@uagro.mx
Flor Monserrat Rodríguez Vázquez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
flor.rodriguez@uagro.mx
Jesús **Romero** Valencia
Universidad Autónoma de Guerrero
México
jromv@yahoo.com
Ademir **Basso**
CEPACS-PR
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br

Resumen

Debido a la abstracción de algunos conceptos del álgebra lineal y la formalidad con la que se suele tratarse a esta asignatura, el aprendizaje por parte de los estudiantes sigue siendo endeble. Respecto a los operadores lineales que son diagonalizables como foco de investigación se encuentran estudios o acercamientos a conceptos relacionados, así como estrategias con el uso de tecnología para mejorar el aprendizaje sobre la diagonalización de matrices. Por ende, se realiza un estudio sobre la comprensión de los operadores lineales diagonalizables en estudiantes de una licenciatura en matemáticas o una carrera a fin de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México con base en la teoría APOE. Concretamente se presenta el resultado de la primera componente del ciclo de investigación que propone dicha teoría, una descomposición genética hipotética de los operadores lineales diagonalizables.

Palabras clave: álgebra lineal, teoría APOE, análisis teórico.

Introducción

En la mayoría de las universidades en los cursos de álgebra lineal no se alcanza el nivel de aprendizaje esperado (Trigueros et al, 2015). Profesores y estudiantes consideran los temas de

álgebra lineal difíciles (Possani, Trigueros, Preciado, y Lozano, 2010; Salgado y Trigueros, 2015). Según Parraguez, Lezama y Jimenez (2016) es difícil alcanzar los objetivos de enseñanza y aprendizaje propuestos para los cursos de álgebra lineal.

En los cursos de álgebra lineal se aborda el estudio de matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, productos internos, ortogonalidad y la teoría de la diagonalización. Respecto a la diagonalización Yildiz (2013) realiza un proyecto de enseñanza del álgebra lineal con el uso de tecnología, con dos objetivos 1) investigar cómo incorporar las TIC dentro de los cursos de nivel superior; 2) desarrollar una serie de nuevos materiales de instrucción sobre varios temas dentro de nivel pregrado en matemáticas, en dicho trabajo se pretende evaluar el uso efectivo de calculadoras avanzadas como herramienta de asistencia para promover la comprensión conceptual de la diagonalización. Asimismo presenta su forma de enseñar como una combinación de experimentación teórica y un en foque algorítmico y reporta que las calculadoras avanzadas con tareas cuidadosamente diseñadas pueden proporcionar la adquisición de conocimiento y facilita la percepción del concepto. Para el caso de la diagonalización, considera que las calculadoras avanzadas son una herramienta valiosa para enseñar dicho concepto debido que estas ofrecen asistencia a los estudiantes para los cálculos conservando su atención en los cálculos de la matriz.

Por otra parte, Salgado y Trigueros (2015) realizan un estudio de la enseñanza de valores y vectores propios con base en la teoría APOE. Muestran evidencia de tres estudiantes que logran una construcción objeto a partir de sus tareas diseñadas bajo este enfoque. Además de validar su descomposición genética, sugieren que dicho enfoque teórico es alentador para el tratamiento de estos conceptos que están relacionados con los operadores lineales diagonalizables. Referente al tema operador lineal diagonalizable, desde la perspectiva de APOE y desde otras perspectivas se ha encontrado poca investigación durante la revisión bibliográfica y no se ha encontrado al momento investigaciones que atiendan la compresión de los operadores lineales diagonalizables, se tiene antecedentes de conceptos relacionados al tema, además de estrategias pedagógicas por medio de software para facilitar los cálculos y se logre diagonalizar matrices.

La importancia de diagonalizar a los operadores lineales, cuando es posible, es porque reduce significativamente los cálculos al tener una representación matricial sencilla y esto produce un mejor entendimiento de cómo actúa un operador lineal sobre el espacio vectorial en el cual se ha definido.

Nuestro interés es investigar lo que refiere a los operadores lineales diagonalizables (OLD). Estos objetos son un objetivo de enseñanza particular del álgebra lineal y se requiere de relacionar conceptos específicos para lograrlo, por ejemplo: determinante, matriz asociada a una transformación lineal, matriz diagonal, base ordenada, polinomio característico, valores y vectores propios etc., por mencionar algunos. La pregunta directriz de esta investigación es: ¿Qué estructuras y mecanismos mentales están asociados a los operadores lineales diagonzalizables en estudiantes de nivel superior de una licenciatura en matemáticas? Para responder esta pregunta de investigación se tiene el siguiente objetivo de investigación: Describir y caracterizar los mecanismos y estructuras mentales asociados a los operadores lineales diagonalizables en estudiantes de nivel superior de una licenciatura en matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro) por medio de una descomposición genética que es "un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir con el fin de aprender un concepto matemático específico" (Arnon et al., 2014, p. 27). En este escrito concretamente se presenta el resultado de la primera componente

del ciclo de investigación que propone la teoría APOE.

Marco teórico y metodológico

La investigación se sustenta sobre la base de la teoría APOE la cual tiene fundamentos en la abstracción reflexiva (Piaget, 1985), y es entendida como un mecanismo mental que consta de dos partes: (1) conocimiento sobre un objeto matemático y las operaciones que actúan sobre dicho objeto, desde un nivel de cognición inferior a uno superior de operaciones (de acciones a procesos y de procesos a objetos) y, (2) reorganización y reconstrucción del objeto y de las operaciones que actúan en él, en una etapa superior que da como resultado el contenido al cual se le pueden aplicar nuevas operaciones (Arnon et al., 2014; Badillo, Trigueros y Font 2015).

Esta postura teórica enfatiza sobre el conocimiento matemático y la habilidad para reorganizar conocimiento y con ello construir o reconstruir estructuras mediante la abstracción reflexiva. Las construcciones que propone la teoría son Acción, Proceso, Objeto y Esquema, para esta parte de la investigación se consideraron las siguientes:

Acción. Según Piaget y adoptado por la teoría APOE, un concepto es concebido primero como una acción, es decir, como una transformación dirigida externamente de un objeto, u objetos previamente concebida. Una acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación debe realizarse de forma explícita y guiada por instrucciones externas; adicionalmente, cada paso debe introducir al siguiente, es decir, los pasos de la acción no pueden todavía ser imaginados y ninguno se puede saltar. (Arnon et al., 2014, p. 19)

Proceso. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso mental. Un proceso es una estructura mental que lleva a cabo la misma operación acción que se interioriza, pero totalmente en la mente del individuo, permitiendo así al individuo imaginar la realización de la transformación sin tener que ejecutar cada paso de forma explícita. (Arnon et al., 2014, p.339).

Objeto. Si uno se da cuenta del proceso en su totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar en esa totalidad, y realmente puede construir tales transformaciones (explícita o en la imaginación de uno), entonces se dice que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Por ejemplo, para el concepto de función, la encapsulación permite aplicar transformaciones de funciones tales como la formación de un conjunto de funciones, definir las operaciones aritméticas sobre dicho conjunto, dotándola de una topología, etc. (Dubinsky, Weller, McDonald, y Brown, 2005, p.339)

Dichas construcciones: acciones, procesos, objetos y esquemas se reestructuran y se adaptan para dar solución a problemas matemáticos. Dubinsky considera cinco tipos de mecanismos mentales (tipos de abstracción reflexiva), tomando cuatro de las ideas de Piaget y anexando uno a la teoría, estos son: interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, des-encapsulación, tematización y generalización (Dubinsky, 1991). Estos tipos de abstracción reflexiva tienen la función de relacionar en un momento preciso las estructuras y transitar de una estructura a otra o revertir si el individuo lo considera conveniente.

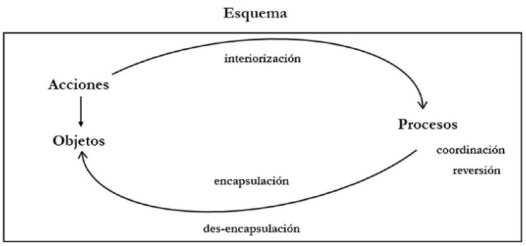


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático

En la figura 1, tomada de Arnon et al., (2014, p. 18) se muestran las conexiones entre las construcciones mentales que están dadas por los mecanismos mentales; según los autores ejemplifica cómo un individuo construye estructuras matemáticas, el diagrama sugiere quizá que la construcción de conocimiento matemático es lineal, advierten que no necesariamente.

Para llevar a cabo la investigación se recurrió al paradigma de investigación que propone la teoría APOE. El paradigma de investigación que propone la teoría APOE considera tres componentes: Análisis Teórico; Diseño e implementación de actividades; Recolección y Análisis (figura 2) tomada de Arnon et al., (2014, p. 94).

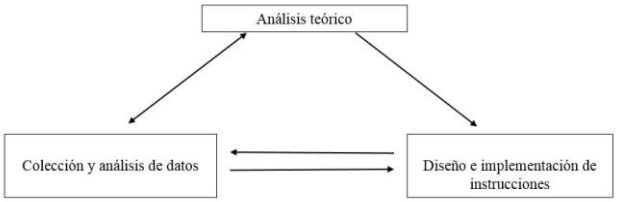


Figura 2. Ciclo de investigación de la teoría APOE

Una investigación bajo el foco de este paradigma, se inicia con un análisis del concepto a estudiar, esto arroja una descomposición genética hipotética, en el sentido que aún no se prueba experimentalmente con el trabajo de los estudiantes. Respecto a la segunda componente, la implementación se lleva a cabo normalmente usando el Ciclo de Enseñanza ACE, se considera la importancia del aprendizaje colaborativo y básicamente consiste en instrucciones las cuales deben apoyar las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar formando grupos pequeños de discusión. Por otro lado, la tercera componente del paradigma de investigación que propone la teoría APOE la recopilación y análisis de los datos, es una componente muy importante puesto que, sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo una mera hipótesis (Arnon et al., 2014).

Diseño metodológico

Se consideró la definición matemática del OLD que se presentan los libros de texto que se sugieren en el plan y programa de estudio de la licenciatura en matemáticas que se oferta en la UAGro, se centra la atención en cómo este se presenta en los libros y la relación con otros conceptos con el fin de analizar e identificar que conceptos involucra la definición directamente para sugerirlos como conceptos previos. Se describió el tipo de concepción de los conceptos previos y los que resultaron estar relacionados con los OLD por medio de las descomposiciones genéticas reportadas en la literatura especializada en el área; se consideró las sugerencias de expertos en álgebra lineal respecto a los OLD. Con base en lo anterior se propone una

descomposición genética hipotética de los operadores lineales diagonalizables (DGHOLD), es decir, un modelo cognitivo asociado al OLD que describe la construcción que podría hacer un estudiante a la hora de aprender dicho concepto.

Resultado: análisis teórico de los operadores lineales diagonalizables

Se considera la definición matemática del operador lineal diagonalizable en diferentes libros de texto de álgebra lineal y la relación con algunos conceptos de álgebra lineal. Se centra la atención en el concepto de OLD y cómo este se presenta en los libros ¿Pero qué es un operador lineal? Algunos libros consideran una transformación lineal de V sobre si mismo como: operador lineal o endomorfismo, Tabla 1.

Tabla 1

Operador lineal en los libros de texto

Autor	Definición
Hoffman y Kunze (1973, p. 76)	Si V es un espacio vectorial sobre el campo F, un operador lineal V es una transformación lineal de V sobre V.
Grossman, (2008, p. 460)	Las transformaciones lineales con frecuencia se denominan operadores lineales.
Anton (1994, p. 250)	Si, $T: V \to V$ es una transformación lineal de un espacio vectorial V en sí mismo, entonces T es un operador lineal sobre V.

Los operadores lineales se pueden considerar como trasformaciones lineales definidas entre un mismo espacio vectorial, mientras que una trasformación lineal puede definirse entre diferentes espacios vectoriales. En esta investigación consideramos al operador lineal en el sentido de Hoffman y Kunze (1973) y se consideran los operadores lineales definidos en un espacio vectorial dimensionalmente finito. Respecto a los operadores lineales diagonalizables, se analizaron las definiciones que presentan diferentes libros de texto que usualmente son usados para los cursos de álgebra lineal de la UAGro, Tabla 2.

Tabla 2

Definición de operador lineal diagonalizable

Autor	Definición
Hoffman y Kunze (1973, p. 183)	Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V. Se dice que T es diagonalizable si existe una base de V tal que cada vector suyo sea vector propio de T.
Poole (2011, p. 527)	Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T: V \to V$ una transformación lineal. Entonces T se llama diagonalizable si existe una base C para V tal que la matriz $[T]_C$ sea una matriz diagonal.
Godement (1974, p. 529)	Sea u un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión finita n sobre un cuerpo conmutativo K. Se dice que u es diagonizable si existe una base de E

	formada por vectores propios de u; dicho de otra forma, respecto a la cual la matriz de u sea diagonal.
Friedberg, Insel, y Spence (1982, p. 233)	Se dice que un operador lineal T sobre un espacio vectorial dimensionalmente finito V es diagonalizable si existe una base β para V tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal. Una matriz cuadrada A es diagonalizable si A es similar a una matriz diagonal.

De las anteriores definiciones en libros que se sugieren como bibliografía en los cursos de álgebra lineal, se resalta que el estudio de la diagonalización puede ser tratado desde un punto de vista matricial, esto es, "Una matriz A de $n\ x\ n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D." (Grossman, 2008, p. 557). Pero también, se puede hacer desde el punto de vista funcional (tabla 2). Dado que las definiciones de Hoffman y Friedberg son equivalentes se deduce que la diagonalización de los operadores lineales, se puede analizar desde un punto de vista funcional y matricial. Dicho análisis conlleva a relacionar diferentes conceptos desde ambos puntos de vista; en su forma funcional, determinando la existencia de una base donde cada vector suyo sea un vector propio del operador lineal dado; desde el punto de vista matricial, encontrando una matriz diagonal similar a la matriz dada (Figura 4).

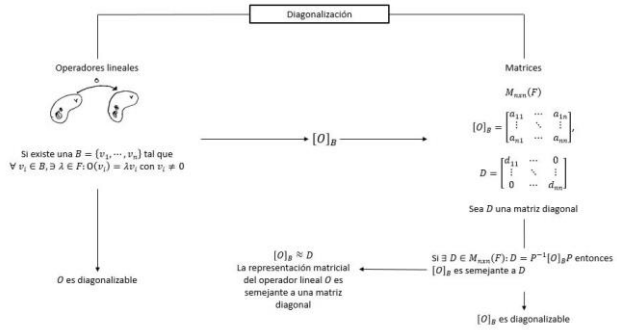


Figura 3. Diagonalización en álgebra lineal

Análisis de descomposiciones genéticas de conceptos relacionados al OLD

Para este análisis consideramos las estructuras que se proponen en las diferentes descomposiciones genéticas de conceptos relacionados con los OLD y de manera hipotética se proponen para los casos que no se cuente con una descripción de la estructura del concepto. Los conceptos que se analizaron son: transformación lineal, base ordenada, matriz asociada a una transformación lineal (MAT), determinante, matriz semejante, valores y vectores propios.

Con una concepción proceso de transformación lineal un estudiante es capaz de considerar a la transformación lineal como una función que conserva combinaciones lineales, es decir, que conserva la adición vectorial y el producto escalar definido en su dominio y codominio (Roa y Octack, 2010). A partir de la descomposición genética de Kú (2007) y lo expuesto en Mendoza-Sandoval, Rodríguez-Vásquez y Roa-Fuentes (2015) de base y base ordenada respectivamente, en una concepción proceso de base ordenada, un individuo puede reflexionar sobre el posible orden de los elementos de la base B, decidir cuál será dicho orden, y establecer si un vector dado o un conjunto de vectores podría escribirse como combinación lineal de los elementos B con el orden establecido o dar una base para el espacio vectorial dado; en una concepción proceso de la MAT, un individuo puede determinar la representación matricial dado el operador lineal para un

par de bases específicas (Montelongo, 2016); con una concepción proceso de determinante, suponemos que un individuo es capaz de calcular el determinante de una matriz sin importar su tamaño; una estructura proceso de valores y vectores propios, un individuo reconoce el paralelismo de los vectores Av y v para cualquier espacio de R^n, reconocen que un valor propio es un escalar que cambia la magnitud y posiblemente la dirección del vector v (Salgado y Trigueros, 2014; 2015); con una concepción proceso de matriz semejante, un individuo puede encontrar una matriz P tal que, dada una matriz A se satisfaga $D = P^{-1}AP$ con D la una matriz diagonal.

Conclusiones

Con sustento en el análisis teórico, la revisión de algunas descomposiciones genéticas existentes, aunado a esto, la experiencia de los investigadores y las sugerencias de expertos respecto al álgebra lineal se propone la siguiente descripción de las estructuras asociadas al OLD de manera hipotética. Las estructuras previas para iniciar la construcción de los operadores lineales diagonalizables son: concepción proceso de transformación lineal; concepción proceso de base ordenada; concepción proceso de la MAT; concepción proceso de matriz semejante; concepción proceso de vector y valor propio.

Descomposición genética hipotética del OLD: Construcción cognitiva del OLD como objeto

La construcción del OLD como un objeto cognitivo podría darse de la siguiente manera en un individuo. Dado un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un campo F y un operador lineal O, con una concepción proceso de base ordenada, el individuo, encuentra una base B ordenada para V. Con su concepción proceso de vector propio, determina si cada vector $v_i \in B$ es un vector propio de O, en este caso, con la información obtenida y su concepción proceso del operador lineal decide si es o no diagonalizable. Si los $v_i \in B$ no todos son vectores propios de O entonces el individuo con su concepción proceso de la matriz asociada a una transformación lineal (MAT) encuentra la representación matricial de O respecto a la base B, es decir $[O]_B$. Con su concepción proceso de matriz semejante, encuentra una matriz diagonal D, si existe, tal que $D = P^{-1}[O]_B P$ con lo que concluye que O es un operador diagonizable al cual puede aplicarle acciones específicas, Figura 5.

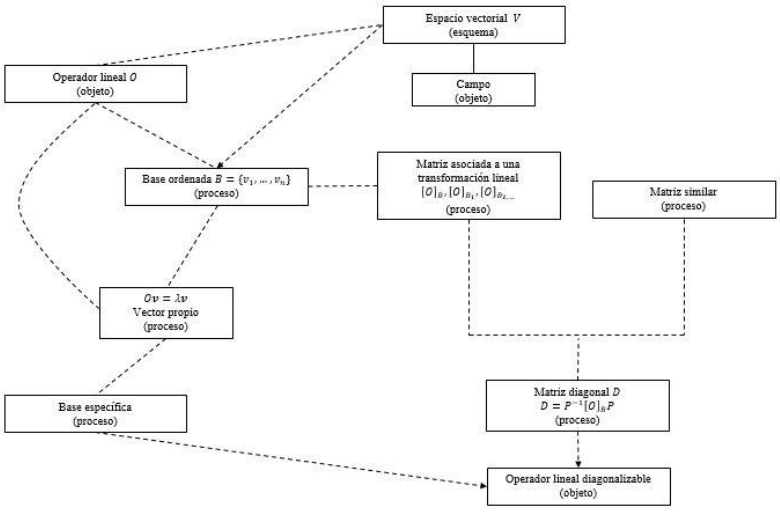


Figura 4. Construcción cognitiva como objeto de los OLD

Se propone dicha construcción cognitiva como Objeto de los operadores lineales diagonalizables hipotética, es decir, que no está validada experimentalmente. Dicho modelo cognitivo hipotético que se prepone, puede ser un punto de partida para la comunidad interesada en indagar y/o profundizar sobre las estructuras y mecanismos asociados a los operadores lineales diagonalizables desde el punto de vista de la teoría APOE.

Referencias y bibliografía

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Badillo, E., Trigueros, M., y Font, V. (2015). Capítulo 2 : Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático : APOE y EOS . En C. Azcárate, M. Camacho-machin, M. González, y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 31–51).

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in avanced mathematical thinking. En T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinking* . Dordrecht: Springer Netherlands. (pp. 95–126)

Friedberg, S., Insel, A., y Spence, L. (1982). *Algebra Líneal* (primera ed). México: Publicaciones cultura, S.A.

Godement, R. (1974). *Álgebra*. Madrid: Tecnos, S. A.

Grossman, S. (2008). *Álgebra lineal* (6a ed.). México: McGRAW-HIL.

Hoffman, K., y Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. New Jersey: Prentince-Hall.

Kú, D. (2007). *Aprendizaje de la base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE (tesis de maestría inédita)*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Mendoza-Sandoval, E., Rodríguez-Vásquez, F., y Roa-Fuentes, S. (2015). Estudio del concepto matriz de cambio de base en términos de la Teoría APOE. En C. Fernández Verdú, M. Molina Gonzáles, y N. Planas Raig (Eds.). *Alicante: Investigación en educación matemática XIX*. Recuperado de http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/51542/1/2015-Actas-XIX-SEIEM_36.pdf (pp. 371–379)

Montelongo, O. (2016). *Construcción cognitiva de la matriz asociada a una transformación lineal (tesis de doctorado inédita)*. Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero.

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*. (S. R. Cervantes Gonzales, Ed.) (3ra ed.). México: Cengage Learning Editores.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eingevectors using models Apos Theory. *The journal of mathematical behavior*, *39*, 100–120. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Yildiz, A. (2013). Teaching the diagonalization concept in linear algebra with technology: A case study at galatasaray university. *Turkish online journal of educational technology*, *12*(1), 119–130.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Análisis de Significados que se Confieren a la Antiderivada

Wilson **Gordillo** Thiriat
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wgordillot@udistrital.edu.co
Luis R. **Pino-Fan**
Universidad de Los Lagos
Chile
luis.pino@ulagos.cl

Resumen

Se presenta un estudio sobre los significados de la noción antiderivada orientada por diseño de instrumentos que permiten explorar y caracterizar la comprensión sobre tópicos específicos, usando las herramientas en enfoque ontosemiótico del conocimiento se analizan los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario. Los resultados aportan nuevos conocimientos respecto a la caracterización de la comprensión de los significados de la antiderivada en estudiantes universitarios. Además, proporcionan pautas y criterios que permiten el diseño de metodologías didácticas para desarrollar y/o potenciar la comprensión sobre la antiderivada.

Palabras clave: antiderivada, significados, enfoque ontosemiótico, cuestionario, comprensión.

ANTECEDENTES

Las investigaciones sobre la comprensión de la antiderivada son escasos, el trabajo de Metaxas (2007), le da identidad al objeto antiderivada, y a través de un estudio de caso enfrenta a estudiantes con tareas que generan un conflicto cognitivo abordando la perspectiva teórica de la abstracción reflexiva y el esquema de comprensión (interiorización-condensación-reificación), propuesto por Sfard (1991). Por otra parte, Kiat (2005) explora la solución problemas de que involucran integración (definida e indefinida), clasificando errores (conceptuales, procedimentales y técnicos) al responder preguntas que involucran integración y áreas. Es Hall (2010), quien analiza significados matemáticos, que se usan en la enseñanza del cálculo, en particular con la integral indefinida. Concluye que respuestas como: la integral definida es más precisa que la integral indefinida, la integral indefinida es un termino vago, antiderivada es la inversa de la derivada. Son respuestas que indican mala comprensión del concepto matemático, y a su vez evidencian un conflicto entre el conocimiento de términos matemáticos.

NOCIONES TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS

Existen diversas posturas para entender la comprensión (Sfard 1991, Pirie & Kieren 1994), de acuerdo con Font (2001) y Godino, Batanero y Font (2007), hay dos maneras básicas de entenderla: como proceso mental o como competencia. estos autores, toman dos puntos de vista que responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como proceso mental. Los posicionamientos pragmatistas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento (EOS), en cambio, llevan a entender, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental. Es decir, se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

Esta manera pragmática de entender la comprensión, implica concebirla también como conocimiento y aplicación de las normas que regulan una práctica. Se trata, pues, de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas clarificando el pensamiento que las informa y situándolo en el contexto de las normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales aquéllas ocurren. Es necesario aclarar que, dentro del EOS, enfoque teórico al que nos apegamos en este estudio, el término conocimiento se utiliza en el sentido de constructo epistémico–cognitivo general que incluye comprensión, competencia y disposición (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209). La disposición, o capacidad, se relaciona con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica. La competencia se relaciona con las prácticas matemáticas de los sujetos y a la activación, en dichas prácticas, de la configuración ontosemiótica cognitiva adecuada, la cual debería estar idóneamente acoplada a la configuración ontosemiótica epistémica de referencia (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) y al contexto en el que se desarrolla la práctica. La comprensión como lo afirma Pino-Fan (2014), tiene que ver con las relaciones –vistas desde las perspectiva de la congruencia matemática– que se deben establecer entre todos los elementos que intervienen en la configuración ontosemiótica cognitiva (o epistémica, en el caso de prácticas institucionales) que activa el sujeto para resolver determinadas situaciones/problemas. En este trabajo hemos adoptado los posicionamientos pragmatistas que nos brinda el marco teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007). En el EOS se ha introducido una tipología de objetos matemáticos primarios: situaciones/problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estos objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, lo que en el EOS se conoce con el nombre de configuraciones. Estas configuraciones pueden ser de tipo epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Así, para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas), vemos el uso de *lenguajes*, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones/problemas, lenguajes, conceptos,

proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en la *configuración* de la Figura 1 (Font & Godino, 2006, p. 69).

La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios, responden a la necesidad de poder describir los sistemas de prácticas, con el fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

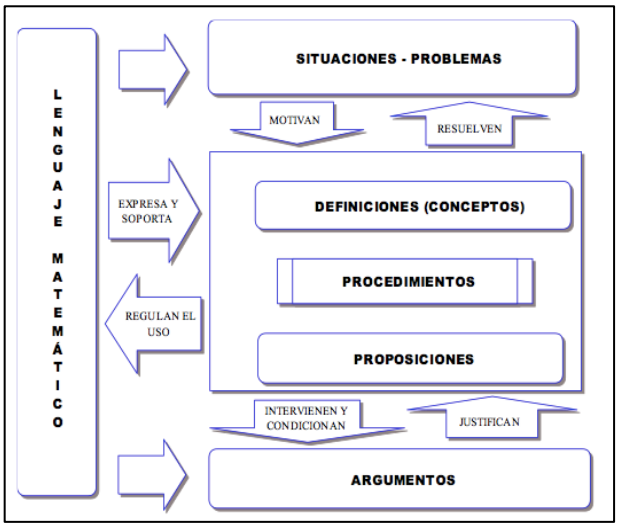


Figura 1. Configuración de Objetos Matemáticos Primarios (Font & Godino, 2006)

Estos objetos matemáticos primarios que conforman la configuración, se manifiestan de diversas maneras durante la actividad matemática: el lenguaje con el cual nos referimos a ellos, que a su vez evocan a conceptos o definiciones, los cuales se vuelven operativos mediante procedimientos y propiedades asociadas, que a su vez se manifiestan durante la solución de las tareas matemáticas. Además, cada uno de los objetos matemáticos primarios puede ser considerado desde distintas facetas o dimensiones duales (Godino, 2002): personal – institucional; ostensivo – no ostensivo; unitario – sistémico; expresión – contenido; extensivo – intensivo.

La emergencia de los objetos matemáticos primarios considerados en el modelo (ver Figura 1) llevan asociados, respectivamente, los procesos de problematización, comunicación, definición, algoritmización, enunciación y argumentación.

Las redes de objetos y procesos que hemos descrito, suelen recibir el nombre de configuración ontosemiótica (Pino-Fan, Godino & Font, 2015), y pueden ser de carácter epistémico o cognitivo, según se refiera a objetos y procesos matemáticos institucionales o personales, respectivamente.

En este sentido y apoyados por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos como se describió anteriormente, nos planteamos las siguientes preguntas ¿Comprenden los estudiantes universitarios la noción de antiderivada? ¿Qué aspectos o criterios, se deben contemplar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la antiderivada, para lograr que los estudiantes comprendan esta noción matemática?

Para dar respuesta a preguntas, nos propusimos en este trabajo: *Evaluar y caracterizar el conocimiento matemático (el cual vincula comprensión, competencia y disposición) de*

estudiantes universitarios sobre la noción antiderivada.

RECONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO EPISTÉMICO GLOBAL DE LA ANTIDERIVADA

Para poder explorar el conocimiento matemático sobre la antiderivada, Gordillo y Pino-Fan (2016), proponen un estudio histórico-epistemológico que permite, a partir de la identificación de las configuraciones epistémicas activadas en los sistemas de prácticas que dieron paso al surgimiento de la antiderivada, los significados parciales que constituyen el significado global u holístico. Adicionalmente, las configuraciones epistémicas primarias podrían orientar el diseño de acciones formativas que permitan construir o lograr comprensión sobre el objeto antiderivada hasta llegar a su formalización.

La identificación, caracterización y análisis de los sistemas de prácticas que se abordaron y desarrollaron en la diversas etapas históricas, han resultado en una propuesta de reconstrucción del *significado global* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) de la antiderivada. Cada sistema de práctica tiene vinculada una configuración epistémica que esta compuesta de objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos). La herramienta que nos proporciona el EOS, conocida como configuración epistémica nos ha ayudado a identificar y describir estos elementos.

Cada una de estas configuraciones epistémicas lleva asociado un significado parcial para la antiderivada. como lo describe Gordillo y Pino-Fan (2016), para el caso de la antiderivada son cuatro: 1) *Tangentes-Cuadraturas* (CE 1); 2) *Fluxiones-Fluentes* (CE 2); 3) *Sumatorias-Diferencias* (CE 3); 4) *Funciones Elementales* (CE 4).

CRITERIOS PARA ACTIVAR CADA SIGNIFICADO PARCIAL EN LA ACTUALIDAD.

Actualmente no se puede hacer uso de todos los elementos primarios identificados en cada significado parcial, sin embargo, adaptando algunas situaciones/problema, planteadas en cada uno de los significados, pueden ser llevados al aula en forma de tareas, y activar en los estudiantes un significado parcial específico. La descripción del cómo se puede identificar la activación de un significado parcial esta dada por :

a) *Tangentes-Cuadraturas*: Utiliza definiciones matemáticas de dominio de una función, simetría, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Argumenta a través de los criterios matemáticos la construcción de una curva (gráfica). Para encontrar la antiderivada de una función, dada la curva (gráfica) de una función.
b) *Fluxiones–Fluentes*: El estudiante, utiliza lenguaje, definiciones propias de la física para argumentar el cambio entre magnitudes físicas (aceleración, velocidad, posición), para resolver situaciones que impliquen fenómenos físicos de variación o rapidez.
c) *Sumatorias-Diferencias*: Utiliza, lenguaje propio de las matemáticas y definiciones que refieren al uso de alguna “regla de integración” o “método de integración” para resolver situaciones matemáticas simbólicas (algebraico).
d) *Funciones elementales*: Utiliza, lenguaje propio de la matemáticas y definiciones que refieren a un análisis detallado de funciones transcendentes, o uso de algún ‘método

numérico' para expresar funciones como series y así resolver situaciones matemáticas simbólicas (algebraico).

DISEÑO DEL CUESTIONARIO

Una vez identificados y caracterizados los significados de referencia de la antiderivada, un aspecto relevante fue determinar qué es lo que conocen los estudiantes universitarios sobre dichos significados. Así, nuestra tercera pregunta para la investigación es: *¿Cuál es el conocimiento sobre la antiderivada, que efectivamente tienen los estudiantes universitarios de carreras de matemáticas y afines?* Para responder esta pregunta se diseño un cuestionario representativo de la complejidad del significado holístico de la antiderivada.

A partir del banco de tareas elaborado, se eligieron aquellas tareas que cumplieran, básicamente con tres aspectos clave: Uso de diversos significados del objeto antiderivada; Uso de diversidad de representaciones para la antiderivada y relaciones matemáticas entre la antiderivada y otros objetos matemáticos. En este sentido, el cuestionario diseñado se compone de once tareas. Como el propuesto por Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce-Campuzano (2018), en la tabla 1. se muestra un resumen de las características y fines que se persiguen con cada una de las tareas.

Tabla 1.

Resumen de tareas del cuestionario

Tarea	Objetivo	Representación que activa	Significado Parcial Activado
Tarea 1: Significados de la antiderivada	Explorar significados personales, acepciones conferidas a la antiderivada	verbal/ escrita	Global
Tarea 2: Modelo sinóptico estructurado	Relación de la antiderivada con otros objetos matemáticos del cálculo.	Mapa conceptual y grafos	Global
Tarea 3: Cálculo de la función primitiva (parte A y B)	Construcción de familia de funciones a partir de una función derivada.	simbólica, gráfica y tabular	Diferencial-Sumatoria
Tarea 4: Exploración gráfica de la antiderivada	Tratamiento de la representación grafica de la antiderivada.	Gráfica	Tangentes-Cuadraturas
Tarea 5: Diferencia integral - antiderivada	Explorar si se establecen diferencias conceptuales de nociones integral y antiderivada.	Verbal/escrita y simbólica	Funciones elementales
Tarea 6: Funciones elementales	Identificación de la función derivada como función elemental.	Verbal/escrita y simbólica	Funciones elementales
Tarea 7: Reglas de Antiderivación	Identificación de la antiderivada a partir de una regla básica de derivación.	Simbólica	Tangentes - Cuadraturas
Tarea 8: Notaciones de una función derivada	Identificación de una forma de denotar una función derivada	Simbólica	Tangentes - Cuadraturas
Tarea 9: Aplicación de la antiderivada en economía	Aplicación del objeto matemático con las ciencias económicas	verbal/escrita y simbólica	Tangentes - Cuadraturas
Tarea 10: Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias	Uso de la antiderivada en la solución de ecuaciones diferenciales	verbal/escrita y simbólica,	Fluentes-Fluxiones

Tarea 11: Aplicación de la antiderivada en la física	Disposición del objeto matemático con la física	verbal/escrita y simbólica	Fluentes-Fluxiones

Fuente: Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce-Campuzano (2018)

FIABILIDAD Y VALIDEZ DE CONTENIDO DEL CUESTIONARIO

Para cada tarea incluida en el cuestionario se realizó de manera detallada el análisis del contenido de cada una de las tareas en dos niveles: contenido ontosemiótico, el cual se obtiene mediante un análisis epistémico exhaustivo en el cual se hace uso de la herramienta teórica configuración ontosemiótica; contenido curricular, que son los conocimientos que evalúan las tareas y que pueden ser medidos con los conocimientos pretendidos en una institución, plasmado a través del plan de estudios. Así mismo el cuestionario se sometió a revisión mediante el juicio de expertos, donde cada experto opinaban libremente, para cada una de las tareas del cuestionario, sobre el grado de relevancia de cada uno de los siguientes aspectos: Distintos significados del objeto antiderivada; representaciones activadas tanto en los enunciados como en las soluciones plausibles; contenido matemático de las tareas en relación con el objeto antiderivada; es decir, el vínculo de la antiderivada con otras nociones matemáticas relevantes para su comprensión; ausencia de algún contenido relevante; redacción y comprensión de los enunciados.

En general, el cuestionario fue aprobado y avalado por parte de los expertos con una puntuación media de 4.72/5 , otorgada al cuestionario por cada uno de los expertos. En la versión definitiva del cuestionario se incluyeron las recomendaciones de cada uno de los expertos.

IMPLEMENTACIÓN DEL CUESTIONARIO

Implementar el cuestionario diseñado, para evaluar la comprensión de la antiderivada, en muestras intencionales de estudiantes universitarios colombianos, se realizó al aplicar el cuestionario a una muestra de 137 estudiantes universitarios en Colombia. El condicionante para la aplicación de la prueba a los estudiantes que participaron, fue el haber tomado el curso de cálculo integral o cálculo II (momento curricular donde se aborda la noción). Cada cuestionario aplicado permitió profundizar en la exploración y descripción de las configuraciones cognitivas utilizadas por los estudiantes universitarios al resolver las tareas del cuestionario.

CARACTERIZACIÓN DE LOS RESULTADOS

Caracterizar, a partir de los resultados obtenidos con la implementación del cuestionario el conocimiento sobre la antiderivada, evidencio que los estudiantes presentaron ideas similares en las respuestas, y en varias ocasiones cometieron errores propuestos por Kiat (2005), así como las concepciones erradas que se tienen de la antiderivada, que son indicador –tal como lo afirma Hall (2010)– de mala comprensión de las ideas básicas del cálculo o de confusión de términos matemáticos. Estos indicadores adquirieron énfasis cuando los estudiantes se enfrentaron a tareas que requerían la movilización del significado –proceso para encontrar una familia de funciones a partir de una función que ha sido derivada–

En general, los resultados obtenidos a partir de los análisis cuantitativos y cualitativos de las soluciones que los estudiantes dieron a las tareas incluidas en el cuestionario, exhiben ciertas dificultades para resolver tareas que relacionan la antiderivada. Por ejemplo, los resultados obtenidos desvelan que los estudiantes usan la antiderivada en su acepción de "proceso inverso de la derivada", y no dan sentido a la constante C real. Esta acepción de "proceso inverso"

también es observada en diferentes las tareas, esta forma equivocada, es vista más concretamente, como procedimiento que les permite obtener directamente el 'resultado de la operación inversa', tal como multiplicar y dividir. Los resultados del cuestionario apoya la necesidad de mejorar el conocimiento matemático, que les faculte de competencias para resolver tareas con características similares a las que se les planteó con el cuestionario.

RESULTADOS FINALES

En este artículo presentamos el diseño de un cuestionario que nos permite evaluar y caracterizar el conocimiento y las prácticas matemáticas sobre la antiderivada en estudiantes de los primeros cursos universitarios. La noción de conocimiento (conocimiento matemático), desde un punto de vista pragmatista como el adoptado por el EOS, incluye y vincula las actividades de comprensión, competencia y disposición, las cuales intervienen en las prácticas matemáticas que se desarrollan con la finalidad de resolver un problema. Esta forma pragmática de entender el conocimiento, ha sido considerado en el diseño de cada una de las tareas que conforman el cuestionario, toda vez que las tareas requieren para su resolución de la movilización congruente tanto de los diversos registros de representación para la antiderivada, como de la diversidad de significados parciales de dicha noción matemática (Gordillo & Pino-Fan, 2016).

El análisis ontosemiótico (contenido y curricular), y las posibles dificultades en la resolución de las tareas, realizado para cada una ellas; anterior a la aplicación del cuestionario, permite observar, describir y predecir la actividad matemática como un complejo conjunto de prácticas matemáticas realizada por estudiantes universitarios al resolver las tareas propuestas, al rededor del objeto matemático. Prácticas donde se pueden identificar, la configuración de objetos y procesos matemáticos primarios; propuestos por el marco teórico del EOS, que se ha denominado análisis ontosemiótico.

Por otro lado, añadido a lo anterior, el estudio mediante juicio de expertos ha dado evidencia que el diseño de las tareas del Cuestionario, sí evalúa la articulación de los significados institucionales y personales, respecto a la antiderivada, dando así argumentos validos para determinar que cada una de las tareas es evaluadora de *conocimiento* y *comprensión* parcial, y en su globalidad evaluadora de comprensión, competencia y disposición de la noción antiderivada.

Referencias y bibliografía

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competència. *Biaix. Revista de la Federació d'Entitats per a l'ensenyament de les matemàtiques a Catalunya, 19*(1), 33-36.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 535-558. doi: 10.1590/1980-4415v30n55a12

Gordillo, W., Pino-Fan, L., Font, V., & Ponce-Campuzano, J.C.. (2018). Algunas tareas para evaluar la compresión sobre el objeto matemático antiderivada. *Academia y Virtualidad*, *11*(2). doi: 10.18359/ravi.2983

Hall, Jr., W. L. (2010). Student misconceptions of the language of calculus: definite and indefinite integrals. In *Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1-16). Raleigh, NC: Mathematical Association of America.

Kiat, S. E. (2005). Analysis of students' difficulties in solving integration problems. *The Mathematics Educator, 9*(1), 39-59.

Metaxas, N. (2007). Difficulties on understanding the indefinite integral. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 265-272). Seoul, Corea: PME.

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore the mathematical dimension and the epistemic facet of didactic-mathematical knowledge of teachers. *CERME 9, WTG 20: Mathematics teacher knowledge, beliefs and identity*. Recuperado de http://www.cerme9.org/products/twg20/

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2010). *Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada*. Memorias XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, (pp. 206-213). Nuevo León, México: ITESM.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 165-190. doi: 10.1007/BF01273662

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Comprensión del concepto de independencia lineal: una perspectiva de las estructuras y mecanismos mentales de estudiantes universitarios de primer año

Silvia Juliana **Ballesteros** Gualdrón
Universidad Industrial de Santander
Colombia
julianaballesterosg@hotmail.com
Solange **Roa** Fuentes
Universidad de Industrial de Santander; Grupo de Investigación EDUMAT-UIS
Colombia
sroa@matematicas.uis.edu.co
Darly Kú Euán
Universidad Autónoma de Zacatecas
México
Ku.darly@gmail.com

Resumen

Se presenta la primera Fase de una investigación que busca diseñar una descomposición genética validada del concepto de independencia lineal que parta de la aplicación de *acciones* sobre objetos concretos (numéricos y geométricos) para la construcción de objetos abstractos (definiciones formales o esquemas) con estudiantes de primer año de universidad. La investigación se fundamenta en la teoría APOE (Arnon et al., 2014); dicha teoría explica cómo los individuos construyen los conceptos y nociones matemáticas. En este caso se toma la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos para lograr Objetos abstractos. En álgebra lineal las representaciones geométricas son interpretadas como Objetos concretos, que un individuo puede transformar de manera física o mental. Los antecedentes que se proponen en el documento muestran la importancia de potenciar la construcción de relaciones entre diferentes interpretaciones de los Objetos matemáticos (Roa-Fuentes y Parraguez, 2017), para promover la comprensión en los estudiantes.

Palabras clave: Didáctica del álgebra, Objetos concretos, Objetos abstractos, teoría APOE, Independencia lineal.

Introducción

El primer encuentro de estudiantes universitarios con matemáticas abstractas se desarrolla en el curso de Álgebra Lineal (Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996); allí los objetos de trabajo son principalmente vectores, elementos de un Espacio Vectorial ($\mathbb{R}^n$, $M_{m\times n}$, polinomios, entre otros). Actualmente en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se desarrollan 32 grupos dirigidos por 23 profesores, que acompañan un aproximado de 1032 estudiantes. Desde la Matemática Educativa se ha planteado cómo las diversas representaciones de los objetos matemáticos aportan en su comprensión. Por ejemplo, una transformación lineal admite una interpretación funcional ($f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$), una matricial ($M_{2\times 2}$) y una geométrica ($\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$) como resultado de la transformación de un vector o una región del plano. Por tanto, se propone que es fundamental analizar cómo los estudiantes de Álgebra Lineal I de la Universidad Industrial de Santander pueden transitar entre las diferentes interpretaciones de un objeto matemático para comprenderlo. Para esto se propone el diseño de un modelo cognitivo, *descomposición genética*, del concepto de independencia lineal que señale las principales estructuras, mecanismos y sus relaciones a partir de las diferentes interpretaciones que son presentadas en un curso básico de álgebra lineal. A continuación, se exponen los antecedentes de la investigación que permiten ubicar en el panorama de la didáctica de las matemáticas el problema presentado, también los principales elementos de la teoría APOE y el método que guía el desarrollo de esta investigación.

Antecedentes

Los principales hallazgos publicados en Carlson, Johnson, Lay y Porter (1993) y Zazkis et al. (1996) muestran un primer acercamiento para contribuir a una mejora en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, donde cada uno de ellos con sus particulares posturas buscan definir los objetos concretos que un estudiante del curso de álgebra lineal puede considerar, para a partir de ello construir objetos abstractos.

Más adelante en 2017, Harel habla acerca de los objetos concretos y los objetos abstractos que se presentan en álgebra lineal. Los objetos concretos se entienden como objetos con los cuales se pueden manipular u operar; por ejemplo, operaciones entre vectores, solución de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros. Y por objetos abstractos como combinación lineal, dependencia e independencia lineal, transformación lineal, etc. Harel (2017) menciona algunas dificultades que tienen los estudiantes con el paso de lo concreto a lo abstracto, por ejemplo, los estudiantes pueden encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales haciendo uso de un método conocido, pero no comprenden la dependencia e independencia lineal entre vectores.

De otra forma, Parraguez y Bozt (2012) analizan bajo la teoría de los modos de pensamiento, el razonamiento que muestran los estudiantes universitarios a partir de lo práctico a lo teórico al trabajar con los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y la solución de un

sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; además de las relaciones que se establecen entre dichos conceptos, esto con base a las conexiones que existen entre los objetos concretos y los objetos abstractos. En este caso la autora toma como objetos concretos todo aquello que puede operar, como es en este caso la solución del sistema de ecuaciones para transformar dicha solución en algo abstracto, como es el concepto de independencia lineal.

Por su parte Aydin (2014) analiza la comprensión que desarrollan los estudiantes sobre el concepto de independencia lineal mediante la generación de ejemplos basados en la teoría APOE[1]. Este autor plantea que un estudiante que es capaz de generar un ejemplo, acerca de cuándo un conjunto de vectores es linealmente independiente o no, es porque tiene una imagen conceptual formada de manera consistente. Esta imagen conceptual se asocia a una construcción abstracta del concepto.

De igual forma, una manera de ver los objetos concretos en álgebra lineal se puede relacionar con interpretaciones geométricas de los conceptos. En este sentido la geometría se encuentra como un componente principal, en la enseñanza de los cursos de álgebra lineal. En particular Sierpinska (2000) considera que el álgebra lineal puede ser vista como consecuencia de dos posturas: El rechazo de la entrada de los números en la geometría y desde la Intuición geométrica.

De esta forma, Oropeza y Lezama (2007) desarrollan una serie de actividades tomando como base la geometría. En un primer momento de forma exploratoria con el fin de caracterizar con los estudiantes la abstracción del álgebra y los impedimentos que tiene la geometría para su completa visualización.

Se puede encontrar en la literatura autores que hablan acerca de la percepción visual que se encuentra inmersa en la geometría. Según Piaget, la percepción visual es posible para objetos estáticos, pero no para procesos dinámicos. Para visualizar esto último, Piaget menciona que es necesario percibir un conjunto de fenómenos estáticos y razonar sobre ellos para hacer construcciones mentales de procesos dinámicos. Así mismo, Hillel (2000) menciona que los modos algebraicos, geométricos y abstractos coexisten y a veces son intercambiables, pero no son equivalentes. El modo abstracto usa el lenguaje y los conceptos de la teoría (espacio vectorial, subespacio, independencia lineal, tramo, etc.), mientras que el modo algebraico usa el lenguaje y conceptos de la teoría más específica de R^n (n-tuplas, matrices, rango, etc.). Finalmente, el modo geométrico usa el lenguaje y concepto de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (segmento de línea dirigida, puntos, planos, etc.).

Por ejemplo, un vector puede ser representado como una flecha en modo geométrico, como una fila o columna de números o símbolos en modo algebraico, y como un elemento de un espacio vectorial en el modo abstracto.

Por otro lado, autores como Konyalioglu et al., (2011) mencionan que los orígenes del álgebra

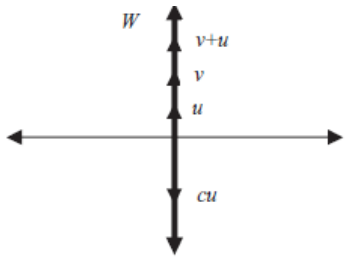
[1] Teoría APOE (acrónimo de Acción-Proceso –Objeto-Esquema)

lineal parten de la geometría, especialmente con representaciones vectoriales; por tanto, enfatiza que en la enseñanza del álgebra lineal deben estar involucradas nociones geométricas, en este sentido proponen el uso de la visualización como un enfoque de enseñanza, en el cual se sustenta que las estructuras geométricas deben estar fuertemente apoyadas por estructuras algebraicas y abstractas.

Por ejemplo, el siguiente problema "Sea W el conjunto de elementos de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $x_1 = 0$ y $x_i \in R$. ¿Es W un subespacio del espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$?" admite en un primer momento una representación geométrica, para caracterizar el problema en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$; luego puede ser interpretado de manera algebraica para generalizar en $\mathbb{R}^n$ y por último puede ser construido de manera abstracta para utilizar el resultado en el concepto de independencia lineal como se muestra en la tabla 1, para la afirmación:

Tabla 1

Interpretación geométrica, algebraica y abstracta.

Geométrica	Algebraica	Abstracta
El subconjunto W de $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de vectores de la forma $(0, y)$ como se muestra en la siguiente figura: 	Sea $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementos de W y $c \in R$. Como u y v pertenecen a W se tiene que: $x_1 = 0$ y $y_1 = 0$. Entonces $cu + v = (cx_1 + y_1, cx_2 + y_2, \dots, cx_n + y_n)$ Donde: $cx_1 + y_1 = c0 + 0 = 0$ Luego, $cu + v \in W$. Así W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.	Si W es un subespacio de un espacio vectorial V, y W es un subconjunto de W'. En este caso ¿W' es linealmente dependiente? Cada subespacio de un espacio vectorial debe contener el elemento cero. Si W es un subespacio de un espacio vectorial, W contiene el elemento cero. Entonces, W' contiene el elemento cero. Si uno de los elementos en W' es el elemento cero, entonces el subconjunto W' es linealmente dependiente.

Fuente: Konyalioglu et al., (2011)

La Teoría APOE

En esta sección se revisarán las ideas principales de la teoría APOE (Arnon, et al., 2014), las cuales se utilizarán para el desarrollo de la investigación.

Esta teoría es una interpretación de la teoría constructivista que parte de las ideas de Piaget, el cual estudió acerca del desarrollo del pensamiento lógico de los niños, tomando principalmente la idea de abstracción reflexiva. Este tipo de abstracción se presenta cuando se realiza una reflexión y un razonamiento lógico respecto a un objeto, siendo más adelante formalizado por Dubinsky (1991), enfocándolo hacia un análisis cognitivo de conceptos matemáticos que se desarrollan a nivel universitario para describir las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes pueden desarrollar sobre una noción o concepto matemático, por medio de un ciclo metodológico que se describirá en el siguiente apartado.

En la figura 2 se puede observar que las estructuras mentales son las Acciones, Procesos, Objetos y esquemas y los mecanismos mentales son la interiorización, encapsulación, des encapsulación y coordinación, que se relacionan para la construcción de un nuevo conocimiento.

Como se mencionó anteriormente, la teoría APOE parte de la teoría constructivista, donde se menciona que un nuevo conocimiento se da a partir de conocimientos previamente construidos, de esta forma, un individuo parte de un objeto (conocimiento previamente construido) y si aplica manipulaciones a ese objeto, externas de él, se puede decir que se encuentra en una concepción Acción, si el individuo interioriza dichas manipulaciones, es decir, reflexiona acerca de las Acciones, se encuentra en una concepción Proceso.

También los Procesos se pueden generar a partir de otros Procesos, es decir, mediante la Coordinación de dos Procesos se pueden dar un nuevo Proceso y por último si se aplican Acciones a los Procesos se puede considerar que el individuo se encuentra en una concepción Objeto, de la que mediante el mecanismo de desencapsulación puede volver al Proceso que le dio origen.

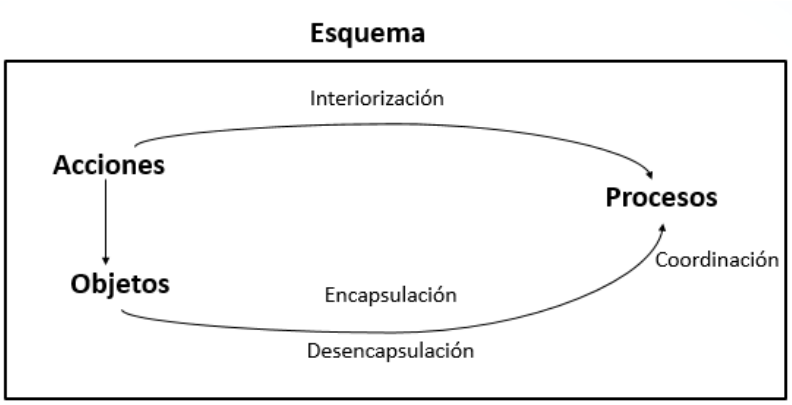


Figura 1. Arnon et. al.,2014, p. 18.

Finalmente, la Descomposición Genética (DG) es un modelo cognitivo que describe las estructuras y mecanismos mentales (descritas anteriormente) que un individuo necesita para construir una noción o un conocimiento matemático.

Método

Esta investigación se sustenta teórica y metodológicamente en la Teoría APOE (acrónimo de Acción-Proceso –Objeto-Esquema) que describe las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes pueden desarrollar sobre una noción o concepto matemático. Esta teoría tiene un ciclo metodológico que se basa en el diseño y desarrollo de tres componentes: 1. Análisis Teórico; 2. Diseño y desarrollo de un modelo de enseñanza; y 3. Observación, recolección y análisis de datos, como se muestra en la siguiente figura:

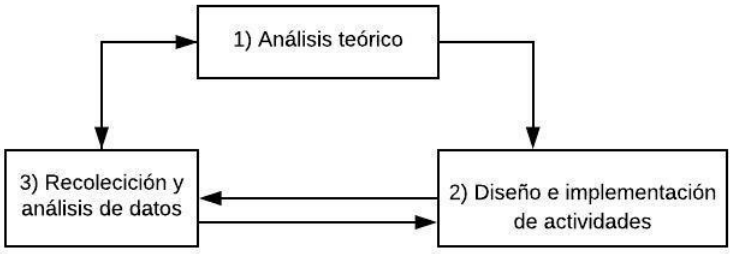


Figura 2. Adaptación (Arnon et. al.,2014, p. 94)

La dirección de las flechas indica que, después de realizar el análisis teórico que tiene como objetivo la construcción o modificación de una descomposición genética preliminar del concepto a trabajar, se realizan las actividades con base en dicha descomposición genética, seguido se empiezan a recolectar y analizar los datos. Cabe resaltar que si los datos encontrados difieren con la descomposición genética preliminar se debe volver a la fase 2 (fase 3 a fase 2) y diseñar e implementar nuevamente las actividades. Sin embargo, si después de realizar esta modificación los resultados vuelven a arrojar resultados diferentes de lo propuesto en la descomposición genética se debe volver a la fase 1 y refinar la descomposición genética propuesta (fase 3 a fase 1) porque puede que las caracterizaciones de las estructuras mentales de los estudiantes no sean acordes, por ende, es un ir y venir entre fases, para lograr la descomposición genética que pueda caracterizar en gran medida las estructuras mentales por las que un estudiante pasa para llegar a la comprensión del concepto a trabajar.

La población de estudio se ubica en la Universidad Industrial de Santander con estudiantes del curso de álgebra lineal I que ofrece la escuela de matemáticas. Esta investigación se divide en seis fases: 1.1 Análisis de exámenes finales de los estudiantes del curso en años anteriores: en base a dichos resultados se realizarán observaciones acerca de lo que los profesores están trabajando en el curso y lo que aparece en el programa de álgebra lineal I en la escuela de matemáticas; 1.2. Análisis de los libros de texto; 1.3. Análisis de descomposiciones genéticas trabajadas que aborden el concepto de independencia lineal; 2.1. Diseño de una descomposición genética con base a los resultados de la fase 1; 2.2. Diseño e implementación de las actividades con base en la descomposición genética de la fase 1; 2. 3. Recolección y análisis de datos.

Reflexiones finales

Actualmente se está realizando la descomposición genética del concepto de independencia lineal con base en los resultados de los exámenes finales anteriores, análisis de los libros de texto y análisis de descomposiciones genéticas anteriores sobre el concepto de independencia lineal.

Los resultados obtenidos en el análisis de los exámenes finales anteriores que se realizó en la fase 1 y unas encuestas realizadas a los profesores que dictan el curso de álgebra lineal, muestran que promedio los profesores dedican 3 horas para trabajar el concepto de independencia lineal y en algunos casos no se dicta el tema.

Con base a lo anterior se evidencia la necesidad de estandarizar los contenidos o modificar la estructura de los cursos entorno a las necesidades de los estudiantes de acuerdo a su carrera de pregrado y los temas centrales del álgebra lineal que se han venido discutiendo en investigaciones de didáctica del álgebra.

Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6. New York: Springer.

Aydin, S. (2014). Using example generation to explore students' understanding of the concepts of linear dependence/independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(6), 813-826.

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., & Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46.

Dorier, J. L. (Ed.). (2000). *On the teaching of linear algebra* (Vol. 23). Springer Science & Business Media.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 69-95.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. En J.L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear Algebra* (pp. 191-207). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Konyalioglu, A. C., Isik, A., Kaplan, A., Hizarci, S., & Durkaya, M. (2011). Visualization

approach in teaching process of linear algebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *15*, 4040-4044.

Oropeza Legorreta, C., & Lezama Andalón, J. (2007). Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *2*(1), 23-39.

Parraguez González, M., & Bozt Ortiz, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *7*(1), 49-72.

Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación universitaria*, *10*(4), 15-32.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Springer, Dordrecht.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D 4. *Journal for research in Mathematics Education*, 435-457.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Curvas: Entre la división de lo continuo y la continuidad de lo discreto

Carlos Mario **Pulgarín** Pulgarín
Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia
Colombia
carlosm.pulgarin@udea.edu.
Carlos Mario **Jaramillo** López
Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia
Colombia
carlos.jaramillo1@udea.edu.co
René Alejandro **Londoño** Cano
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
rene.londono@udea.edu.co

Resumen

El presente documento exhibe algunos de los avances obtenidos como resultado de la investigación doctoral en relación con el proceso de comprensión del concepto de curva en la transición entre lo discreto y lo continuo en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Para ello, se inicia con un recorrido histórico del concepto de curva, situación que de forma simultanea propicia la discusión sobre la noción de continuidad e infinito en cálculo, y las dificultades que se evidencian por parte de los estudiantes al abordar dicho concepto en el estudio de la derivada y la integral. De esta forma se estructura el problema de investigación y elementos que aportarán en la metodología de la investigación.

*Palabras clave***:** Curvas, transición, discreto, continuo, infinito, comprensión, teoría de Pirie y Kieren.

Aspectos históricos en el concepto de curva

Existen evidencias de que el primer acercamiento a una curva surgió a partir de círculos trazados a mano alzada en el siglo VII A. de C. y círculos perfectos trazados con la ayuda de cuerdas y clavos en templos construidos aproximadamente en el siglo V A. de C. A partir del siglo VI A. de C. se proponen modelos cosmológicos que involucraron de manera esencial a la esfera y al círculo. Anaximandro, Parménides, Pitágoras y sus discípulos sostuvieron modelos en los cuales la tierra es esférica y el movimiento de los astros se da en trayectorias circulares que llevaron a la elaboración de movimientos sumamente complejos a partir de epiciclos en esa ardua tarea de describir las orbitas planetarias. Siglos después, los modelos astronómicos de Tycho Brahe, Ptolomeo y Copérnico darían paso a las órbitas elípticas de Kepler. Sin embargo, el

círculo seguiría siendo instrumento de estudio en las estimaciones del número π, conocidas las contribuciones de Arquímedes a la matemática a partir del método de exhaución. Dicho método lleva a pensar que, para tal época, las nociones de infinito y continuidad ya estaban dibujándose en la mente de los matemáticos. De hecho, el concepto de curva está vinculado a la dificultad de dar definiciones matemáticamente aceptables de un concepto intuitivamente claro como el de continuo.

Analizando cronológicamente la evolución del concepto de curva, se da un salto de muchos años y habría que esperar varios siglos de aislamiento y ausencia de registros sobre estudios al respecto, hasta que en 1676 Isaac Newton escribe *Tractatus de Quadratura Curvarum* (tratado de cuadratura de curvas), la cual sólo fue publicada hasta 1704. En esta obra, Newton describe la distinción entre el uso de elementos discontinuos y nuevas consideraciones cinemáticas con referencia a las fluxiones, abandonando así las cantidades infinitamente pequeñas en beneficio del concepto de fluxión. De hecho, Newton afirmó: "No voy a considerar aquí cantidades matemáticas compuestas de partes extremadamente pequeñas, sino como generadas por un movimiento o flujo continuo. Las líneas se describen, y por describirse son generadas, no por superposición de partes, sino por un flujo continuo de puntos" (Mosquera, 2013, p. 80)

Durante el siglo XVIII otros autores se ocuparon de este concepto desde una perspectiva más filosófica, al considerar que la noción de curva debía establecerse sin tener en cuenta ninguna idea ajena a ellas mismas y, por supuesto, excluyendo cualquier mención sobre la idea de movimiento. El detonante en tal momento fue básicamente la llamada curva de Peano. La noción de continuidad vinculada al concepto de curva que se tenían para entonces parecían vislumbrar los desacuerdos en una definición rigurosa y formalmente aceptada de esta última. A. G. Baumgarten, A. G. Knäster brindaron otras definiciones al respecto, sin embargo, en el año 1851, Bernhard Bolzano da a conocer su obra póstuma *Paradoxien des Unendlichen* y al igual que en otras obras de su autoría publicadas en años previos, tiene como objetivo dar una definición intrínseca y rigurosa del concepto de curva. Su esfuerzo fue notorio e implicó un constructo de definiciones cada vez más finas sobre el concepto de línea curva. En su obra *Geometrische Begriffe* formula el siguiente teorema sin demostración: Toda curva simple cerrada contenida en una superficie divide a está en dos partes, que se distinguen entre sí por el hecho de que todos los puntos de la superficie que no pertenecen a la línea están a un lado de esta o en el lado opuesto. (Freixenet 1998, p. 61)

En su actividad geométrica, Bolzano no se limitó a dar buenas definiciones en relación con el concepto de curva. Entre los años 1830 y 1834 dio un ejemplo de una función continua en todos sus puntos que no es derivable en ninguno de ellos. La función queda descrita por su gráfica y esta viene dada a través de una construcción de tipo iterativo que da lugar a una curva, obtenida como límite de líneas poligonales. Esta curva se construye como sigue:
Sea $\overline{PQ}$ un segmento rectilíneo, y considerese una dirección d, distinta de la de $\overline{PQ}$. Dividamos $\overline{PQ}$ por su punto medio M y tomemos los puntos $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ tales que $\overline{PP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3M} = \overline{MQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_3Q}$

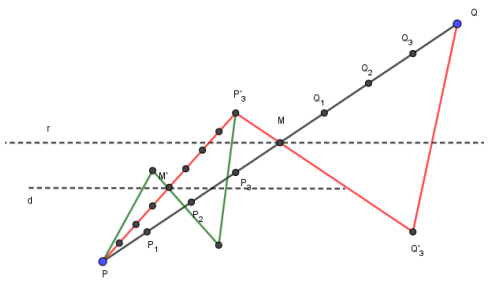


Figura 1. Función continua sin ser derivable

Si P_3' y Q_3' son los simétricos de P_3 y Q_3 respectivamente con respecto a la recta r, paralela a la dirección d por el punto M, se forma la línea poligonal $PP_3'Q_3'Q$ y se repite el proceso en cada uno de los cuatro lados de esta poligonal, y así sucesivamente. El límite de estas líneas es la curva buscada.

Una construcción que se asemeja bastante a la planteada por Bolzano se presenta en la figura 2, sin embargo; allí la discusión se centra en la continuidad geométrica y numérica. Sobre este aspecto (continuidad) Grégoire de Saint Vicent (1584-1667) a quien se le reconoce la primera resolución matemática sobre la paradoja de Zenón plantea una construcción geométrica simple pero que conlleva una reflexión profunda en la discusión sobre la noción de continuidad vista desde las series geométricas, más aún cuando se contrasta con la idea de Fermat, mientras que este último geometriza las series, Grégoire de Saint Vicent hace sus estimativos liberándolos del aspecto geométrico, aunque se parta de él. (DHombres, 1993, p. 46).

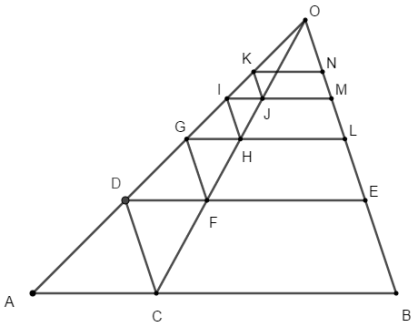


Figura 2. Interpretación del continuo geométrico a partir de series infinitas

Las construcciones de las figuras 1 y 2 evocan a la elaborada por Sundara Row (1966) en su texto *Geometric Exercises in Paper Folding*. En el caso de Row, su elaboración parte de bisecciones consecutivas a un ángulo del cuadrado y perpendiculares sobre cada bisectriz de tal forma que pasen por el vértice (Figura 3).

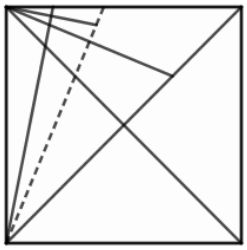


Figura 3. Construcción de Row para aproximar un arco de curva a partir de polígonos regulares

Los trabajos de Bolzano quedaron olvidados rápidamente y tuvieron que esperar largo tiempo hasta ser redescubiertos en el siglo XX. Sin embargo, a mediados del siglo XIX se propugnaba por el desarrollo de una geometría que permitiese el establecimiento de definiciones y el uso de espacios de dimensión superior a tres. En este sentido, las primeras definiciones rigurosas de tales espacios se atribuyen a Herman Grassmann y Bernhard Riemann.

"Grassmann expresa sobre el concepto de línea que: Entendemos por extensión-forma de primer orden la totalidad de elementos en el cual un elemento generador pasa a través de un cambio continuo. En la misma línea de Grassmann estaba Riemann quien plantea: El verdadero carácter de una variedad unidimensional (Curva) es que la progresión continua (movimiento) es solamente posible en dos direcciones o sentidos opuestos. Si se supone que una variedad de dimensión uno pasa a través de una serie de variedades igualmente unidimensionales en correspondencia punto a punto se obtiene una variedad de dimensión dos (superficie)" (Freixenet 1998, p. 67-68)

Estos intentos por dar una definición rigurosa del concepto de curva representan una auténtica revolución que trajo sus frutos en años posteriores. En la década de 1870 y 1880 George Cantor publica una serie de artículos sobre los conjuntos infinitos lineales de puntos, en los que fija las bases de la topología de los conjuntos del espacio euclídeo de dimensión n. Allí, Cantor define la curva plana como un continuo sin puntos interiores, la cual pasaría a recibir el nombre de línea cantoriana.

Al final de la década del 70 surge una profunda crisis acerca del concepto de curva, al probar Cantor que: los puntos de un segmento podían ponerse en correspondencia biunívoca con los de un cuadrado y en general con los de un cubo n-dimensional, lo cual obligó entre otras, a plantear la revisión de la noción de dimensión de los objetos geométricos.

En el siglo XIX destacan los trabajos de Camille Jordan, quien en el final del tercer tomo de su obra Cours d'Analyse enuncia su famoso teorema de la curva: Toda curva plana cerrada, simple y continua divide al plano en dos regiones, una exterior y otra interior, de manera que esta última no puede reducirse a cero, pues contiene un círculo de radio finito.

Esta definición de curva dada por Jordan sufrió un durísimo golpe cuando en 1890 Giuseppe Peano define una curva continua que recubre todos los puntos de un cuadrado; es decir, la imagen geométrica de la misma tiene dimensión dos. La descripción dada por Peano es analítica y no da ningún método que permita representar su curva.

Lo planteado por Peano suscito el interés de los matemáticos de la época entre ellos D. Hilbert quien en 1891 publicó un artículo en el que da un método que permite visualizar el proceso de construcción de una curva de Peano y que se obtiene como límite de líneas poligonales igual que la curva de Bolzano ya considerada.

Se hacía necesario revisar nuevamente la noción de curva. En 1920, H. Hahn estaba dando un seminario en la Universidad de Viena y propuso el problema de dar una definición adecuada del concepto de curva, de forma casual K. Menger (que contaba con 17 años de edad) asistió a aquel seminario e hizo eco de la propuesta. Una semana más tarde presentó al profesor Hahn una solución: Una curva es un conjunto de puntos tal que cada uno de ellos tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyos bordes cortan el conjunto dado en una cantidad finita de puntos.

Más de un siglo atrás Bolzano había dicho lo mismo que Menger. El profesor Hahn se interesó en tal definición y la reestructura así: Un continuo K recibe el nombre de curva si en cada entorno U de cualquier punto p de K existe un entorno U', contenido en U, de manera que la intersección del borde de U' con K no contiene conjuntos conexos.

Para concluir esta discusión previa sobre el concepto de curva enunciaré la siguiente definición Una curva[1], por tanto; es la trayectoria generada al movernos continuamente por la recta real, puede ser cerrada o abierta, puede tener picos, pero no puede rellenar algo de dimensión dos. Otra cosa es que queramos estudiar sus características diferenciales, es decir, vectores, planos tangentes, curvaturas, etc… para lo que sí necesitaremos la condición de diferenciabilidad y en su generalización tendremos que hablar de variedades diferenciables. Nótese que en esta última un tanto más enfocada al cálculo asocia el concepto de diferenciabilidad, el cual será elemento de análisis a continuación puesto que está estrechamente ligado a continuidad e infinito.

División de lo continuo y continuidad de lo discreto

Los registros históricos provenientes de diversas culturas alrededor del mundo indican que la mayoría de civilizaciones antiguas tenían sistemas de numeración y dichos números en muchos casos estaban asociados con significados geométricos dada la actividad de medir y la medida estar asociada con magnitudes geométricas. Hasta fines del siglo XIX, en geometría, la continuidad del espacio se dio por sentada, era un concepto que no se ponía en discusión, que no se planteó como la posibilidad de que pudiera traer consigo un problema.

Hablar en matemáticas de continuidad, involucra necesariamente la idea de infinito y como antesala de este, es importante considerar la noción de discreto. De este modo se presenta la triada entre los conceptos de infinito, discreto y continuo. El concepto de transición se entenderá aquí como el paso de un estado o condición a otra, ese proceso que se presenta entre una condición inicial y final. En particular, se hará mención de tal término para indicar el paso de lo continuo a lo discreto o viceversa, dentro de un proceso de razonamiento infinito. Estos tres conceptos han tenido una evolución considerable a través del tiempo y son ineludibles dentro de cualquier discusión sobre curvas.

El problema de investigación

La comprensión y análisis de curvas es esencial en el campo de las ciencias exactas, la ingeniería, la economía y otras áreas afines en donde comúnmente se generan soluciones a problemas a partir de la construcción de formas geométricas, cónicas o funciones matemáticas que pueden ser simples o supremamente complejas. En todos los niveles educativos se aborda la enseñanza de curvas de forma directa o indirecta al tratar el desarrollo de contenidos matemáticos tal como plantean los estándares básicos de competencias en matemáticas (2006, p. 61). Por ejemplo, se trata la circunferencia y el círculo en los primeros años de formación, la representación de funciones sobre el plano cartesiano en secundaria y el problema de la recta tangente o el área bajo la curva en el nivel universitario, por tan solo citar algunos casos. Sin embargo; el concepto de curva por lo general no se define y aunque parece simple, no se habla mucho de él en los textos escolares. La formalización de cada tema relacionado con curvas pasa por la generalización casi que, de forma inmediata. Por lo general; se remiten a una representación geométrica y en muy pocos casos ofrecen una definición detallada.

Se evidencia que el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos ha sido y es un campo de gran interés para la investigación en educación matemática, tal es el caso de Sánchez et. al (2010, p. 7) quienes en su tesis presentan el análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada. De otra parte;

[1] Extraída de: http://elquintopostulado.com/index.php/en/matematicas/56-curvas.html

Turégano (1998, p. 230) realiza una síntesis de los documentos oficiales e informes de los profesionales en los que se habla de la importancia de proponer nuevos enfoques en el aprendizaje del cálculo atendiendo a la comprensión y génesis histórica de los conceptos. De hecho, posteriormente Turégano (1998, p. 234) concluye que, en la secuenciación de contenidos, debe primar su génesis histórica al parecer más en consonancia con las ideas y el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre su orden lógico.

Es preciso insistir en que analizar la comprensión del concepto de curva y los elementos asociados al significado de lo que representa en distintos conceptos y contextos de la matemática, podría tener consecuencias favorables en el aprendizaje de temas tales como límites, sucesiones, series, área bajo curvas, entre otros. En su estudio, se involucran los conceptos de variación y acumulación, esenciales en el cálculo. Actualmente estos temas se analizan desde dos puntos de vista: el primero es a partir de una concepción infinitesimalista y la segunda es aquella basada en el concepto de límite. Ambos son eje de la presente investigación, ya que involucran procesos de razonamiento infinito a partir de transiciones necesarias entre lo discreto y continuo.

Al respecto, en lo concerniente al infinito, cabe destacar que "entre los profesionales de la matemática, el cálculo infinitesimal fue desechado desde mediados del siglo XIX, debido a supuestas deficiencias en sus fundamentos. En la enseñanza (del cálculo) se abandonó la presentación leibniziana[2], siendo gradualmente sustituida por la versión de Cauchy-Weierstrass, sin mayor atención al aspecto didáctico. Lo que se observó en las aulas principalmente a lo largo de la segunda mitad del siglo XX, nos deja como lección que en la enseñanza resulta conveniente una presentación de una ciencia que atienda los intereses y capacidades de (la mayoría de) los estudiantes y no las características que, en cuanto rigor lógico se refiere, ha de tener esa ciencia, según los profesionales de la misma. Actualmente, la mayor parte de los profesores de cálculo reconoce que la presentación basada en el concepto (riguroso) de límite resulta poco accesible para el común de los estudiantes". (Cantoral et al., 2008, p. 4)

La reflexión sobre curva tiene gran relevancia, dado que las investigaciones sobre este tópico pasan por apreciaciones históricas y epistemológicas desligadas, específicamente considerando estudios sobre la noción de límite, infinito, recta tangente y, además, sobre experiencias de aula relacionadas con estos mismos conceptos. Los estudios sobre la comprensión del concepto de curva son escasos, pocos ahondan en las dificultades que pueden presentar tanto profesores como estudiantes en los niveles de educación media y universitaria al respecto. Este hecho, incentiva un profundo estudio sobre el tema y busca a través del presente escrito, propiciar en los estudiantes de educación media y primeros semestres de universidad la comprensión del concepto de curva y su estrecha relación en el paso entre discreto-continuo. Dicho de otro modo, el problema que se pretende abordar es:

Los estudiantes de cursos de cálculo diferencial e integral presentan dificultades para comprender el concepto de curva a través de transiciones entre lo discreto y continuo mediado por procesos de razonamiento infinitos.

Este problema está relacionado con:

- *La representación discreta que induce la notación de función en el plano*
- La imposibilidad de calcular la longitud exacta de una curva a partir de segmentos de recta finitos.
- Asociar una suma infinita en un intervalo finito

[2] A partir de los trabajos de Abraham Robinson, a mediados del siglo XX podemos decir que no hay ninguna razón para seguir insistiendo en una falta de fundamentación lógica para el uso de los infinitesimales y, por lo tanto, en que el cálculo infinitesimalista es rigurosamente defectuoso.

- Identificar que una curva está compuesta por infinitos trozos de recta (segmentos)
- El incremento sobre el dominio de la curva no es igual al incremento en los puntos correspondientes de la curva.
- Solo se aproxima la longitud de una curva cuando los infinitos segmentos dejan de serlo y se convierten en puntos (punto de tangencia)
- Asociar la integral definida como un simple operador o relacionarlo con una suma infinita

Estas consideraciones hacen relevante el desarrollo de la investigación, dada su incidencia con temas históricos y de suma importancia en el ámbito educativo en todos sus niveles y en los cuales está ausente un estudio detallado que dé cuenta de la comprensión del concepto de curva a través de procesos de razonamiento infinito.

Acerca de la teoría de Pirie y Kieren

Al centrarse la investigación sobre la comprensión en el concepto de curva, cabe destacar que la implementación del modelo de dicha teoría parece entrar en concordancia con el objetivo planteado. "Pirie y Kieren conceptualizan su modelo sobre la evolución de la comprensión matemática como poseedor de 8 niveles potenciales, asumieron su concepción teórica para la comprensión matemática como estable pero no lineal, como un fenómeno recursivo, y la recursividad parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación" (Meel, 2003).

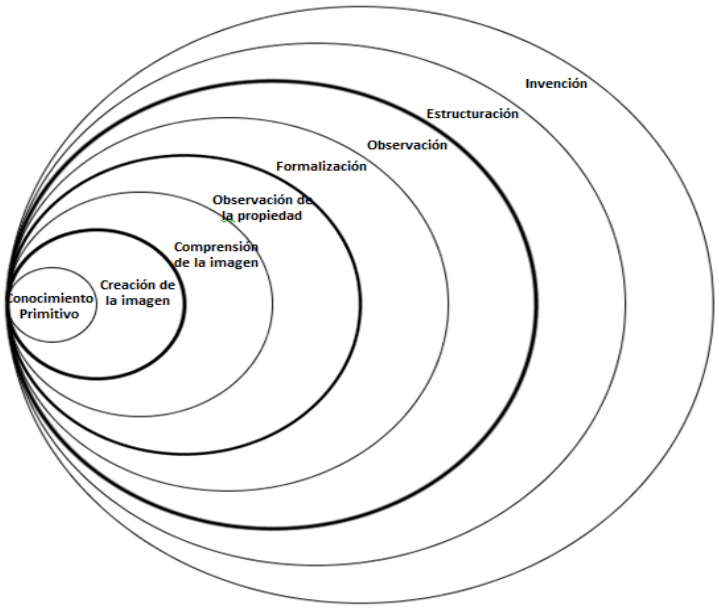


Figura 4. Estratos en el modelo de Pirie y Kieren (Meels, 2003)

Metodología

Se busca desarrollar una investigación de tipo cualitativa apoyada en un estudio de casos en la cual, con base a la implementación de algunos métodos de recolección de información en los

tipos de unidades de análisis del proceso, se interpreten los resultados obtenidos, de tal forma que no solo validen o refuten la hipótesis inicial de la investigación, sino además permitan extender las interpretaciones de los resultados a estudios futuros en torno a dicho tema.

Referencias y bibliografía

Cantoral, R. et al., 2008, *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. España. Ediciones Diaz de Santos.

DHombres, J. (1993) Las progresiones infinitas: El papel del discreto y del continuio en el siglo XVII. Volumen 16. P 43-114. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/62118.pdf

Meel, D. (2003). *Models and theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the Growth of Mathematical Understanding and APOE theory.* CBMS Issues in Mthematics Education, 12, 132-181.

Mosquera, J. (2013) *Desarrollo histórico de la noción de curva: De la forma sintética a la representación analítica*. Universidad del Valle. Santiago de Cali.

Freixenet, J. (1998) *Sobre la historia del concepto topológico de curva*. Publicado en el: volumen 1, número 1 (enero-abril, 1998). Recuperado de: http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=303

Sánchez, G, et al. (2010) *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.* Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005

Turegano, M. (1998) *Del área a la integral, un estudio en el contexto educativo.* Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21531/21365

Historia y epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Curiosidades matemáticas no Pequeno Luterano na década de 1940

Malcus Cassiano **Kuhn**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul Câmpus Lajeado
Brasil
malcuskuhn@ifsul.edu.br

Resumo

Esta comunicação discute curiosidades matemáticas presentes no periódico O Pequeno Luterano, editado pela Igreja Evangélica Luterana do Brasil, no período de 1939 a 1966. Baseando-se na pesquisa histórica, investigaram-se as edições do periódico, cuja finalidade era, de forma lúdica, inserir as crianças na prática religiosa luterana através de histórias, informações e curiosidades de cunho moral e religioso e de formação geral. Nas edições da década de 1940, os editores propunham desafios matemáticos para desenvolver o raciocínio lógico e valorizam as habilidades concretas e abstratas do aprendizado matemático através do cálculo escrito e mental, em forma de atividades lúdicas.

Palavras chave: História da Educação Matemática, curiosidades matemáticas, Pequeno Luterano, raciocínio lógico, cálculo escrito e mental, atividades lúdicas.

Introdução

Esta comunicação tem por objetivo discutir as curiosidades matemáticas presentes no periódico O Pequeno Luterano durante a década de 1940. Trata-se de um recorte de tese, complementado por pesquisas realizadas durante o estágio Pós-doutoral em um Programa de Pós-Graduação.

O periódico O Pequeno Luterano foi produzido pela Igreja Evangélica Luterana do Brasil – IELB – para o público infantil e publicado pela Casa Publicadora Concórdia[1], de Porto Alegre. Teve sua 1ª edição publicada em agosto/setembro de 1939. Com publicações mensais, bimestrais ou quadrimestrais, o periódico foi usado de forma complementar, por professores paroquiais, no ensino das diferentes áreas do conhecimento nas escolas luteranas do século passado, com 217 edições, totalizando 2061 páginas. O periódico foi editado até junho de 1966 e, posteriormente, passou a circular como encarte de uma página no periódico Mensageiro Luterano.

Como a temática investigada se insere na História da Educação Matemática no Rio Grande do Sul, busca-se na pesquisa histórica o suporte para discussão. Conforme Prost (2008), os fatos

[1] Fundada em 1923, atuava na edição de livros e de periódicos relacionados à literatura religiosa e escolar da IELB. Foi a primeira e a única editora da IELB, existente até os dias atuais. Antes de sua fundação, os livros e os periódicos eram impressos pela Concordia Publishing House, nos Estados Unidos, e enviados ao Brasil.

históricos são constituídos a partir de traços deixados no presente pelo passado, como o periódico O Pequeno Luterano. Assim, o trabalho do historiador consiste em efetuar um trabalho sobre esses traços para construir os fatos. Desse modo, um fato não é outra coisa que o resultado de uma elaboração, de um raciocínio, a partir das marcas do passado. Prost (2008) considera o trajeto da produção histórica como sendo um interesse de pesquisa, com formulação de questões históricas legítimas, trabalho com os documentos (edições do periódico O Pequeno Luterano) e a construção de um discurso que seja aceito pela comunidade.

Certeau (1982) define o fazer história, no sentido de pensar a história como uma produção. Para o autor, a prática histórica é prática científica enquanto a mesma inclui a construção de objetos de pesquisa, o uso de uma operação específica de trabalho e um processo de validação dos resultados obtidos, por uma comunidade.

Para investigar o periódico O Pequeno Luterano se realizaram visitas ao Instituto Histórico da IELB, localizado em Porto Alegre, onde se encontram todas as edições do mesmo[2]. Ao pesquisar minuciosamente cada edição, compilaram-se os excertos relacionados à Matemática para posterior análise das curiosidades matemáticas à luz do referencial teórico-metodológico.

O periódico O Pequeno Luterano

O Pequeno Luterano foi produzido pela IELB para as escolas frequentadas por crianças luteranas, visando à formação do futuro fiel adulto (Weiduschadt, 2012). Teve sua primeira edição publicada em agosto/setembro de 1939. Editado em português, devido ao processo de nacionalização do ensino, em curso no país, O Pequeno Luterano substituiu o periódico Evangelisch-Lutherisches Kinderblatt für Südamerika (Jornal para crianças da Igreja Evangélica Luterana da América do Sul), editado pela IELB no período de dezembro de 1930 a junho/julho de 1939, em alemão gótico.

A redação do periódico O Pequeno Luterano foi realizada por professores paroquiais e/ou pastores que se dispunham a redigir ou adaptar os textos de forma voluntária, ou seja, não eram remunerados para esta função. Os redatores mantinham contato com os leitores, liam as cartas e organizavam o conteúdo do periódico, mas não tinham dedicação exclusiva como redatores. Em geral, acumulavam a função com o exercício do magistério e do pastorado. "Histórias bíblicas eram resumidas e, para cada uma delas, o redator apresentava uma mensagem, alertando o pequeno leitor, se ele estaria seguindo as indicações e exortações da igreja" (Weiduschadt, 2012, p. 65). A edição e a publicação do periódico ficavam por conta da Casa Publicadora Concórdia. As cartas enviadas pelas crianças e por representantes de escolas paroquiais eram encaminhadas para a Casa Publicadora Concórdia, localizada em Porto Alegre, e repassadas aos redatores.

As atividades lúdicas do periódico envolviam aspectos religiosos na sua centralidade, ou seja, mesmo em charadas, adivinhações e palavras cruzadas, o direcionamento religioso era valorizado. O público infantil valorizava e mantinha a assinatura do periódico, basicamente, devido aos temas de entretenimento, ilustrativos e publicitários. Weiduschadt (2012, p. 93), acrescenta que "o aprendizado das crianças seria através de uma leitura controlada e doutrinária do periódico. A preocupação lúdica era um meio, o fim deveria estar na absorção da doutrina e na conduta de práticas relacionadas à igreja". Dessa forma, o propósito do periódico em circular

[2] No Instituto Histórico da IELB, não foram encontradas edições do periódico ou referências sobre sua publicação no período de setembro a dezembro de 1953. Em sua tese, Weiduschadt (2012), também destaca a não localização de edições neste mesmo período.

no meio escolar, apresentando conhecimento geral e ideológico, buscava interlocução entre os leitores através das escolas: primeiro as paroquiais e, após a década de 1960, as escolas dominicais. Weiduschadt (2012) complementa:

> Os preceitos 'conduta das crianças' e 'aplicação da história', eram voltados a orientar a projeção de futuro na formação dos leitores. Ao dirigir-se ao leitor, desejava-se formar o aluno e futuro cidadão/fiel imbricados no mesmo projeto, envolvendo escola, pátria e igreja (Weiduschadt, 2012, p. 258).

Dessa forma, O Pequeno Luterano tinha como principal objetivo inserir as crianças na prática religiosa luterana por meio de textos, histórias, informações e curiosidades de cunho moral e religioso e de formação geral. Os editores usaram a estratégia de elaborar um periódico lúdico, com linguagem e imagens voltadas ao público infantil. A estratégia dos editores de receber cartas dos seus leitores, especialmente de alunos das escolas paroquiais, com depoimentos e respostas das charadas e desafios propostos no periódico, além dos relatos dos professores com informações sobre as escolas paroquiais e o número de alunos, contribuiu para circulação e inserção do periódico O Pequeno Luterano entre o público infantil. Isto foi reforçado pelo uso do periódico pelos professores paroquiais, de forma complementar, no ensino de diferentes conteúdos.

O Pequeno Luterano foi editado 217 vezes em seus quase 27 anos de circulação, sendo 123 edições mensais, 90 bimestrais e quatro edições quadrimestrais. O periódico geralmente era mensal, mas muitas edições circulavam bimestralmente, especialmente, nos meses de janeiro/fevereiro, período das férias escolares. Em momentos de crise, o periódico apresentava menor circulação. Na década de 1940, por exemplo, especificamente em 1945-1946, em todo ano são publicadas quatro e cinco edições, respectivamente, demonstrando as dificuldades encontradas no período de nacionalização do ensino. Houve um aumento no número de páginas do periódico a cada década de sua circulação – 504 páginas na década de 1940, 781 páginas na década de 1950 e 776 páginas na década de 1960 (últimos sete anos de edição) – totalizando 2061 páginas em toda sua história. A última edição do periódico foi publicada em junho de 1966. Posteriormente, passou a circular como encarte de uma página no periódico Mensageiro Luterano.

Curiosidades matemáticas no Pequeno Luterano durante a década de 1940

O tema de maior participação no periódico envolvia religião e doutrina, ficando evidente o objetivo a atingir. Os conteúdos de disciplinas seculares que apareceram no impresso complementavam a educação escolar. "Estas disciplinas foram consideradas de conhecimento geral, porém, com certa conotação religiosa, ou seja, mesmo os conteúdos de conhecimento geral, quase sempre vinham acompanhados de elementos religiosos" (Weiduschadt, 2012, p. 259).

Com relação à Matemática presente nesse periódico, observou-se que os editores apostaram numa estratégia envolvendo uma Matemática mais lúdica, diferente das propostas de ensino apresentadas nas aritméticas da série Ordem e Progresso e da série Concórdia (Kuhn, 2015), editadas pela IELB para suas escolas paroquiais, na primeira metade do século XX. Weiduschadt (2012) acrescenta que:

> De forma lúdica, o conhecimento matemático se dava através de charadas, de brincadeiras e de descoberta de enigmas no intuito de desenvolver o raciocínio lógico. As habilidades concretas e abstratas do aprendizado matemático eram valorizadas, em grande parte, através

> do cálculo mental em forma de brincadeiras lúdicas e prazerosas. (...) Havia relação dos cálculos com as histórias bíblicas (...). Entre as histórias de conhecimento geral, as curiosidades envolvendo a Matemática são apresentadas de inúmeras maneiras. Algumas ensinam cálculos de jogos de descoberta, outras contam a biografia de matemáticos, o modo como lidaram com o conteúdo (Weiduschadt, 2012, p. 151-152).

Com o propósito de ilustrar e ampliar a discussão, nos quadros 1 a 5 são apresentados fragmentos publicados no periódico O Pequeno Luterano, nos seus primeiros dez anos de circulação (década de 1940), e que envolvem curiosidades matemáticas. No Quadro 1, descreve-se o desafio de um quadrado com números:

Quadro 1

Quadrado de aritmética

Colocar os números 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, no quadrado que a soma tanto verticalmente como horizontalmente dos algarismos seja 20.

Solução do quadrado de aritmética:

8	4	7	1	20
6	3	5	6	20
4	4	3	9	20
2	9	5	4	20
20	20	20	20	

Fonte 1: O Pequeno Luterano, agosto/setembro 1939, p. 7.
Fonte 2: O Pequeno Luterano, outubro/novembro 1939, p. 16.

O desafio de aritmética, observado no Quadro 1, apresenta 16 números que devem ser distribuídos nos espaços do quadrado de forma que se obtenha a soma 20, na horizontal e na vertical. A solução deste desafio é apresentada na edição posterior do periódico, conforme se pode observar no Quadro 1. Ao apresentar a solução do quadrado de aritmética, o editor do periódico escreve: "Certamente devido ao curto tempo não vos foi possível mandar-me algumas soluções. Talvez noutra ocasião" (O Pequeno Luterano, outubro/novembro 1939, p. 16). Esta afirmação reforça a estratégia dos editores de receber cartas dos seus leitores, contribuindo para circulação e inserção do periódico entre o público infantil.

Ressalta-se que este quadrado de aritmética desenvolve habilidades para o cálculo escrito e mental, além de apresentar algumas semelhanças com o quadrado mágico. Um quadrado numérico é considerado mágico se ele possui n^2 números inteiros positivos e diferentes entre si, tais que, a soma dos n números que figuram nas linhas, colunas, e diagonais, é sempre a mesma. Essa soma comum é chamada constante mágica. Embora, o quadrado descrito no Quadro 1 tenha a mesma soma nas linhas horizontais e verticais, ele não é um quadrado mágico, pois os números 3, 4, 5, 6 e 9 estão repetidos e a soma dos números de cada diagonal não é 20. Complementa-se que "um dos primeiros registros de um quadrado mágico apareceu na China. Conta a lenda que o quadrado foi trazido aos homens por uma tartaruga, através do Rio Lo, há mais de 4000 anos" (Carvalho, 1997, p. 58).

Os editores do periódico O Pequeno Luterano se valiam da estratégia de propor uma Matemática mais lúdica para o seu público leitor, através de charadas e enigmas, conforme se pode observar no Quadro 2:

Quadro 2

Charadas e enigmas

1) Poderás, em 10 segundos dar 3 números que dão o mesmo total, somando ou multiplicando? 2) Se um madeireiro cobrar Cr$ 3,00 para cortar em dois um tronco de árvore, quanto deve cobrar para cortá-lo em quatro? 3) Como se faz a seguinte subtração: O minuendo é 20, o subtraendo 88 e o resto 22? 4) Como podem restar 10, tirando 1 de 9? 5) Uma sala tem 4 cantos; em cada canto há um gato; cada gato vê 3 gatos. Quantos gatos estão na sala? 6) O avozinho deu uma festa para a qual convidou 20 crianças. O bom do velhinho queria dar, no fim da festa, um canário a cada uma, mas foram-lhe dizer que muitos tinham fugido. Mandou o avô um criado buscar outros para substituir os fugitivos, dizendo-lhe: "Traze uma vez e meia tantos quantos ficaram na gaiola, e mais dois canários e meio." Quando o criado voltou com os canários havia de novo vinte. Quantos haviam fugido? 7) Como é que de quatro posso tirar 1 e deixar cinco?	Respostas 1) Os números são 1, 2 e 3, pois 1 + 2 + 3 = 6 e 1 x 2 x 3 = 6. 2) Cr$ 9,00, pois para cortar um tronco em quatro pedaços são necessários três cortes. 3) XX minuendo 88 subtraendo 22 esto. 4) Do número romano IX (9), tira-se I (1) da frente, fica X (10). 5) 4 gatos. 6) 13 canários. 7) Do número romano IV (4), tira-se I (1) da frente, fica V (5).

Fonte: O Pequeno Luterano, 1941-1949.

Os editores do periódico O Pequeno Luterano também apresentam charadas, enigmas e desafios relacionados com outras áreas do conhecimento. O foco das charadas e dos enigmas apresentados no Quadro 2 é desenvolver o pensamento lógico das crianças e explorar conhecimentos matemáticos envolvendo as quatro operações elementares com números naturais e a numeração romana. A charada 6 do Quadro 2 também pode ser resolvida por meio de uma equação do 1º grau com uma incógnita. Chamando de c o número de canários que permaneceram na gaiola, pode-se escrever e resolver a seguinte equação:

$$c + 1\frac{1}{2}c + 2\frac{1}{2} = 20$$

$$c + \frac{3}{2}c + \frac{5}{2} = 20 \;/\cdot\; 2$$

$$2c + 3c + 5 = 40$$

$$5c + 5 - 5 = 40 - 5$$

$$5c = 35 \;/\cdot\; \frac{1}{5}$$

$$c = 7$$

Portanto, 7 canários ficaram na gaiola e 13 canários fugiram, totalizando os 20 canários.

O conhecimento matemático ainda é explorado através de curiosidades numéricas envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, conforme se observa no Quadro 3:

Quadro 3

Curiosidades numéricas

1) 123456789 x 9 + 10 = 1111111111 123456789 x 18 + 20 = 2222222222 123456789 x 27 + 30 = 3333333333 123456789 x 36 + 40 = 4444444444 123456789 x 45 + 50 = 5555555555 123456789 x 54 + 60 = 6666666666 123456789 x 63 + 70 = 7777777777 123456789 x 72 + 80 = 8888888888 123456789 x 81 + 90 = 9999999999 A tabela ainda fica mais interessante, quando se sabe que os fatores são divisíveis por 9; e que a soma de cada soma-produto (os algarismos dele) menos a parcela, tem como resto 0. Por exemplo: a soma de 3333333333 menos 30 igual a zero.	2) 987654321 x 9 = 8888888889 987654321 x 18 = 17777777778 987654321 x 27 = 26666666667 987654321 x 36 = 35555555556 987654321 x 45 = 44444444445 987654321 x 54 = 53333333334 987654321 x 63 = 62222222223 987654321 x 72 = 71111111112 987654321 x 81 = 80000000001

Fonte 1: O Pequeno Luterano, setembro 1943, p. 36.
Fonte 2: O Pequeno Luterano, janeiro 1944, p. 4.

Os excertos apresentados no Quadro 3 trazem curiosidades numéricas. A primeira envolve o produto do número 123456789 pelos múltiplos de 9, compreendidos entre 9 e 81, somados, respectivamente, aos múltiplos de 10, compreendidos entre 10 e 90, resultando sempre em número com dez algarismos repetidos. O editor complementa esta curiosidade com observações sobre a mesma, instigando os leitores a fazer as verificações. A segunda curiosidade numérica traz os produtos da multiplicação do número 987654321 pelos múltiplos de 9, compreendidos ente 9 e 81. Observa-se que o primeiro e o último algarismos de cada produto, são, respectivamente, o algarismo da dezena e da unidade de cada múltiplo de 9 multiplicado, e os demais algarismos são iguais e uma unidade a menos que o algarismo das unidades do referido múltiplo de 9.

No Quadro 4, apresentam-se outras curiosidades numéricas encontradas no periódico O Pequeno Luterano:

Quadro 4

Outras curiosidades numéricas

1) Escreve-se um número de três algarismos, por exemplo, 365 repetido, assim que dê o número 365365 de seis algarismos, que, como qualquer outro exemplo prova, pode ser dividido por 7, 11 e 13.	
2) 1 x 9 + 2 = 11 12 x 9 + 3 = 111 123 x 9 + 4 = 1111 1234 x 9 + 5 = 11111 12345 x 9 + 6 = 111111 123456 x 9 + 7 = 1111111 1234567 x 9 + 8 = 11111111 12345678 x 9 + 9 = 111111111	3) 1 x 8 + 1 = 9 12 x 8 + 2 = 98 123 x 8 + 3 = 987 1234 x 8 + 4 = 9876 12345 x 8 + 5 = 98765 123456 x 8 + 6 = 987654 1234567 x 8 + 7 = 9876543 12345678 x 8 + 8 = 98765432 123456789 x 8 + 9 = 987654321

Fonte: O Pequeno Luterano, novembro/dezembro 1945, p. 48.

O Quadro 4 traz mais três curiosidades númericas encontradas no periódico. A primeira, parte de números com três algarismos, repete-os igualmente, resultando em um número com seis algarismos e divisível por 7, 11 e 13. Esta explicação é exemplificada com o número 365. A

mesma é válida para qualquer outro número com três algarismos, pois 7 x 11 x 13 = 1001 e multiplicando-se um número de três algarismos por 1001, obtém-se um número com seis algarismos, havendo a repetição dos algarismos do número inicial, na mesma ordem. No caso do exemplo apresentado pelo editor do periódico, 365 x 1001 = 365365. A afirmação também é valida para números com três algarismos, sendo dois ou os três repetidos. Por exemplo:

a) 202 x 1001 = 202202 que é divisível por 7, 11 e 13.

b) 999 x 1001 = 999999 que também é divisível por 7, 11 e 13.

A segunda curiosidade apresenta oito resultados interessantes, a partir de multiplicações por 9 e somas de 2 a 9, sendo que os resultados são números com todos os algarismos iguais a 1. Observa-se que a quantidade de algarismos 1 coincide com a parcela que é adicionada a cada produto, sendo que o aumento gradativo do número de algarismos do resultado está relacionado ao aumento de um algarismo, em ordem crescente (2 a 8), no primeiro fator das multiplicações.

Na terceira curiosidade numérica se observam nove multiplicações por 8 e somas crescentes de 1 a 9, sendo que a quantidade de algarismos do resultado de cada cálculo é igual a parcela que está sendo adicionada ao produto. Verifica-se também que há o aumento de um algarismo, em ordem crescente (2 a 9), no primeiro fator das multiplicações e o aumento de um algarismo, em ordem decrescente (8 a 1), nos resultados finais.

Com essas curiosidades numéricas os editores buscavam despertar o interesse e a curiosidade das crianças, contribuindo para a circulação do periódico pelas comunidades em que as escolas paroquiais luteranas gaúchas estavam inseridas.

No Quadro 5, apresenta-se uma habilidade Matemática que pode ser realizada com um livro, segundo o editor do periódico:

Quadro 5

Uma habilidade que se faz com um livro

Convida-se uma pessoa a tirar da estante qualquer livro que deseje; deve abri-lo ao acaso e escolher uma palavra nas primeiras nove linhas da página que tiver a sua frente; toma em seguida nota do número da página e multiplica-o por 10; ao produto junta 25 e o número da linha em que está a palavra que escolheu.

O resultado assim obtido volta a ser multiplicado por 10, juntando-se ao produto o número de ordem da palavra na linha.

Entrega-nos então o livro e um pedaço de papel onde está escrito o número obtido, mas sem as operações donde resultou, e depois de alguns momentos de reflexão conseguiremos abrir o livro e encontrar a palavra escolhida.

Para obtermos este resultado, basta apenas subtrair mentalmente 250 do número que vinha escrito no papel. O último algarismo é o número da palavra, o penúltimo o da linha, e os restantes o da página.

Suponhamos, por exemplo, que a palavra escolhida era a 5ª e estava na 9ª linha da página 100. Neste caso a operação era a seguinte:

100 x 10 = 1000

1000 + 25 + 9 = 1034

1034 x 10 = 10340

10340 + 5 = 10345

Era este número, 10345, que nos era dado, e 5 é o que basta realmente para encontrar o número da página, da linha e da palavra, pois que, subtraindo 250 de 10345 vem:

10345 – 250 = 10095

O número 10095, dividido exatamente como se explicou, dá-nos 100, 9, 5, sendo estas as três parcelas necessárias para descobrir a palavra.

Fonte: O Pequeno Luterano, maio 1944, p. 19.

No excerto, apresentado no Quadro 5, o editor explora uma habilidade Matemática com um livro, a qual exige atenção dos desafiados para fazerem corretamente os cálculos que envolvem as operações de adição, subtração e multiplicação e, então, poderem encontrar a palavra escolhida inicalmente no livro. A curiosidade explora a habilidade de resolução de uma expressão numérica. Observa-se que, de forma lúdica, são desenvolvidas habilidades para o cálculo mental e escrito com os envolvidos na brincadeira.

Considerações finais

O Pequeno Luterano teve 217 edições (mensais/bimestrais/quadrimestrais), no período de agosto/setembro de 1939 a junho de 1966, quando passou a circular como encarte de uma página no periódico Mensageiro Luterano. O principal objetivo dos editores do periódico era, de forma lúdica, inserir as crianças na prática religiosa luterana por meio de textos, histórias, informações e curiosidades de cunho moral e religioso e de formação geral. Dessa forma, foi usado pelos professores paroquiais, complementarmente, no ensino das diferentes áreas do conhecimento nas escolas paroquiais luteranas gaúchas do século passado.

Fundamentando-se no referencial teórico-metodológico da pesquisa histórica, investigaram-se curiosidades matemáticas presentes no periódico O Pequeno Luterano, editado para o público infantil, pela IELB, durante quase 27 anos. O conteúdo lúdico e outros similares foram usados pelos editores como estratégia do periódico para atrair a atenção das crianças. Contudo, ao mesmo tempo, em que tais publicações envolviam curiosidades e desafios, continham elementos doutrinários, principalmente de aprendizado da Bíblia e da vida de Lutero.

Constatou-se que os editores propunham desafios matemáticos para desenvolver o raciocínio lógico das crianças e valorizavam as habilidades concretas e abstratas do aprendizado matemático através do cálculo escrito e mental, em forma de atividades lúdicas e prazerosas. Curiosidades e desafios matemáticos semelhantes aos localizados no periódico O Pequeno Luterano, também estão presentes nos livros de Matemática atuais e em publicações, como as de Malba Tahan. Com este estudo histórico sobre a Matemática no periódico O Pequeno Luterano, pretende-se contribuir para a História da Educação Matemática.

Referências

Carvalho, M. C. C. S. (1997). *Padrões numéricos e sequências.* São Paulo: Moderna.

Certeau, M. (1982). *A escrita da História.* Rio de Janeiro: Forense Universitária.

Kuhn, M. C. (2015). *O ensino da matemática nas escolas evangélicas luteranas do Rio Grande do Sul durante a primeira metade do século XX.* Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

O Pequeno Luterano. (1939-1966). Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia.

Prost, A. (2008). *Doze lições sobre a História.* Belo Horizonte: Autêntica.

Weiduschadt, P. (2012). *A revista "O Pequeno Luterano" e a formação educativa religiosa luterana no contexto pomerano em Pelotas – RS (1931-1966).* Tese de Doutorado em Educação, Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Una problematización del concepto de topología en su dimensión epistemológica

Gabriela **Márquez-García**
Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
gabriela.marquez@cinvestav.mx
Gisela **Montiel** Espinosa
Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

Se presenta parte de una problematización del concepto de topología, realizada desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Escolar. Esta investigación se centra en la búsqueda de ideas germinales, usos y significados del concepto de topología relacionada con la noción de *relación de proximidad,* en su dimensión epistemológica; se enfoca en el estudio de la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet, puesto que varios historiadores señalan que a partir de los trabajos de éste matemático, se comienza a desarrollar - de alguna manera - la Topología General, particularmente las ideas alrededor del concepto de espacio topológico y con esto el de topología. Se presentan así algunas consideraciones metodológicas y teóricas, así como un ejemplo del análisis de la actividad matemática en la obra seleccionada, algunos resultados y como conclusión una pequeña reflexión alrededor de la idea de relación de proximidad.

Palabras clave: Socioepistemología, Topología, relación de proximidad.

Introducción

En este escrito se presenta el reporte de una investigación que se realizó para obtener el grado de maestría. Esta investigación reporta un estudio epistemológico en la historia del concepto de topología, desde el enfoque de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Para este estudio se eligió la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet. La idea fue buscar y reconocer ideas germinales (razón de ser) y usos del concepto de topología, además entender el papel de la noción de relación de proximidad en este momento histórico.

Planteamiento del problema

La Topología General es una rama de las matemáticas cualitativas cuyo objeto de estudio es la continuidad (Pérez, 2015) además, ésta como la convergencia son propiedades de naturaleza topológica. A esto le sumamos la idea del estudio de la forma de los espacios. Por su parte, Hinrichsen y Fernández (1977) comentan que los conceptos de convergencia y continuidad son *independientes* de la métrica, lo que propicia su generalización a espacios topológicos.

Se considera la posibilidad de que los conceptos de continuidad y convergencia son *independientes* de la métrica, porque estos conceptos se definen en términos de una noción de *proximidad*, que no necesariamente significa distancia (Pérez, 2015). Es decir, no es necesario tener una métrica para hablar de *proximidad*, entonces, nos cuestionamos: ¿dónde y cómo hablamos de *proximidad* en Matemáticas?

En respuesta a esto, encontramos que, la Topología de Conjuntos se ocupa del estudio de los espacios abstractos (Freixenet, 1994), es decir, conjuntos en los que la naturaleza de sus elementos es homogénea, pero cualquiera (Arboleda, 2012), entre los que se establecen ciertas *relaciones de proximidad*. Entonces, vislumbramos que la *relación de proximidad* permite *la generalización* de los conceptos de convergencia y continuidad a los espacios topológicos.

De la definición de Topología que presentan (Dugundji, 1966; Kelley, 1955) en sus libros Topology y General Topology, respectivamente, se observa lo siguiente:

- Los autores consideran un conjunto "X cualquiera" haciendo referencia a un conjunto cuyos elementos son de *naturaleza cualquiera* (Arboleda, 2012; Pérez, 2015).
- Introducen un conjunto de conjuntos, al que se le conoce como topología "la familia $\tau \subset 2^x$ es topología", notamos que en las definiciones se reconoce a τ como colección o familia, aclarando que sus elementos son subconjuntos del conjunto X.
- Enuncian las condiciones para que τ sea una topología.
    1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$.
    2. Si $U, V \in \tau, entonces\ U \cap V \in \tau$
    3. Si $W \subset \tau, entonces \cup W \in \tau$ (Márquez-García, 2018)

De lo anterior, se reconoce que la *relación de proximidad* es una noción de mucha importancia para significar el concepto de topología, sin embargo, no se reconoce una relación explicita entre estos. Con base en esto se plantean las preguntas de investigación.

- ¿Qué papel juega la relación de proximidad en la constitución de la topología como saber matemático?
- ¿A qué nos referimos con naturaleza topológica?

Consideraciones teóricas y metodológicas

Dado el planteamiento anterior, se reconoce, de alguna manera, una ausencia de significados del concepto de topología en tanto relación de proximidad. La teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa asume que el conocimiento matemático tiene un origen y una función social, con esto acepta la existencia de prácticas que acompañan la construcción del saber matemático.

En la investigación que se reporta se intenta entender *qué es la naturaleza topológica*, y el papel de la *relación de proximidad* en la constitución del concepto de topología como saber matemático, en otras palabras, queremos entender *los usos* de la *relación de proximidad* en la Matemática (en cierto periodo) antes de configurarse como la definición formal de topología.

Para lograrlo, Cantoral (2013) propone hacer una *problematización* (historización y dialectización[1]) del saber matemático desde una mirada amplia, es decir, descentrándose del objeto. En este caso, asumimos una descentración del concepto de topología al reconocer la *relación de proximidad* como una noción asociada a la *actividad humana* que significa el concepto.

Se realiza un estudio del contexto socio-cultural de la obra a estudiar, basado en la propuesta metodológica de (Espinoza, 2009), que propone estudiar la obra desde tres miradas distintas (una producción con historia, un objeto de difusión, parte de una expresión intelectual más global) con el objetivo de entender cómo el autor entendía su obra, o bien, cómo se entendía esa obra en tanto producción de conocimiento matemático en cierta época. Esto permite hacer un cambio de mirada del conocimiento matemático de la época.

El análisis de la actividad matemática en tanto los usos del conocimiento consiste en 2 fases, en la fase 1 se describe el teorema que se va a analizar, se presenta la demostración propuesta por Fréchet y en la fase 2 se hace el análisis de los usos, para lo que se responden los cuestionamientos analíticos: *¿qué hace?, ¿cómo hace?, ¿para qué hace?, y ¿por qué hace?*, que permiten ver y reconocer los usos y significados del concepto de topología.

Descripción general de la obra

La obra elegida es la tesis doctoral del matemático francés Maurice Fréchet: *Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel* (Fréchet, 1906).

Fréchet organiza su tesis en dos partes, en la primera parte desarrolla la parte teórica enfocada en la introducción de la noción de límite en conjunto abstractos, y en la segunda parte trabaja sobre aplicaciones de la teoría que construye en la primera parte. En la primera parte de la obra, observamos que, en el capítulo 1 se ocupa de estudiar la noción de límite en un conjunto de elementos dónde define la convergencia de los elementos al que llama clase (L); en el capítulo 2 se ocupa de estudiar la convergencia en un conjunto de elementos por medio de una vecindad, al que llama clase (V).

El uso de las clases (L) y (V) y su definición son de fundamental importancia para esta investigación. Dado que nuestro interés está en estudiar los usos del concepto de topología en tanto relación de proximidad, en este caso la estructura de las clases mencionadas, nos interesa estudiar la actividad matemática de Fréchet que muestra en la primera parte.

Contexto sociocultural de la obra: *Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel*

A continuación, se presenta, a modo de ejemplo, parte del contexto sociocultural de la obra analizada.

Una producción con historia. Maurice Fréchet (1878-1973) matemático francés, nació el 10 de septiembre de 1878 en Maligny, al sureste de París. Fue el cuarto de seis hijos, sus padres

[1] *Historizar y dialectizar* son mecanismos que propone la TSME para entender la naturaleza social del conocimiento matemático.

Jacques y Zoé Fréchet fueron protestantes. (Taylor, 1982)

Fréchet es conocido principalmente por sus contribuciones a los fundamentos conceptuales de la Topología de Conjuntos, la Teoría de los Espacios Abstractos y el Análisis funcional (Arboleda, 2002). Además, Taylor (1982) considera la obra matemática de Fréchet como pionera en el desarrollo de una rama de la Matemática llamada Análisis Funcional que, luego se extendió al Análisis General; desde la consideración de Taylor es la rama de las Matemáticas que estudia las funciones que mapean un conjunto abstracto en otro conjunto abstracto, ambos conjuntos dotados de una *estructura topológica* (p. 233).

Parte de una expresión intelectual más global. En esta parte se hace una descripción detallada de la obra. Que consiste en un estudio de la producción matemática de Fréchet y su vinculación con trabajos previos, así como el origen de algunos términos que usa Fréchet, entre otras cosas. De acuerdo con (Taylor, 1982) el objeto de estudio de la tesis de Fréchet, se fue configurando en 5 artículos publicados entre los años 1904 y 1905, estos son:, Généralisation d'un théorème de Weierstrass, Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles, Sur les fonctions d'une infinité de variables, La notion d'écart dans le Calcul fonctionnel y Les ensembles de courbes continues. En tales artículos se puede observar la evolución de las ideas alrededor de la búsqueda de la generalización en la que estaba interesado Fréchet.

Con esto, se reconoce el contexto de significación (Espinoza, 2009) de esta obra de Fréchet como el contexto en el que nace una parte de la Topología que se caracteriza por la búsqueda de respuestas a cuestionamientos puramente matemáticos, relacionados específicamente con la generalización de propiedades al espacio de operaciones funcionales; lo que implica un estudio de propiedades *topológicas* de ciertos conjuntos y no solo de los elementos de los conjuntos. Además, por la naturaleza misma de la obra (tesis doctoral de matemáticas) asume el estudio al rededor objetos matemáticos institucionalizados. Respondernos *qué hace, cómo hace, para qué hace y por qué hace*, sobre estos objetos, le da el carácter social a nuestro enfoque y no el de las aplicaciones. (Márquez-García, 2018)

Con la mirada que proporciona este estudio del contexto sociocultural de la obra, se analiza la actividad matemática, con el objetivo de entender el papel de la relación de proximidad en el proceso de generalización; puesto que éste se reconoce como una característica fundamental de la obra y que se asume, comienza a caracterizar la naturaleza social del concepto de topología. (Márquez-García, 2018)

En la búsqueda de ideas germinales

En esta sección se presenta un ejemplo del análisis de la actividad matemática de Fréchet, en relación a los usos del modo de composición que él define, pero que en la investigación que se reporta se le ha llamado "*métrica*" considerando que lo que resulta de la producción de Fréchet, en relación con el modo de composición es la primera definición axiomática de la métrica (Freixenet, 1994), sin embargo, en el análisis que se presenta se buscan los usos e ideas que le dan sentido a este modo de composición y que están relacionadas con alguna idea de proximidad.

El siguiente ejemplo es tomado de (Márquez-García, 2018, p. 117-122)

Teorema 20[2]

Unidad de análisis

Teorema. - Consideremos una operación U definida en un conjunto E formado por elementos de una clase (V). La condición necesaria y suficiente para que U sea una operación continua en E es que, si A es un elemento cualquiera de E y de E', podemos corresponder a todo número $\varepsilon > 0$ un número η_A tal que si desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$ para todo elemento de B en E.

Demostración.

1° En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, si U es continua en A y si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$. Sea ahora ε un numero positivo cualquiera; si no podemos determinar un numero η_A tal que la desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, podriamos determinar, cualquiera que sea n, un elemento B_n de E tal que

$$(A, B_n) < \frac{1}{n}, \qquad |U(A) - U(B_n)| \geq \varepsilon.$$

Cuando n crece indefinidamente, la primera desigualdad muestra que B_n tiende a B y, de acuerdo con la hipótesis, $U(B_n)$ tiende a $U(A)$, lo que lleva a una contradicción con la segunda desigualdad.

2° Si, para cualquier ε, podemos determinar η_A tal que $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, vemos que podemos tomar p suficientemente grande para que la sucesión $B_1, B_2, \dots$ tienda a B, la desigualdad $n > p$, implica $|U(A) - U(B_n)| < \varepsilon$. Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$

Esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$.

Fase 1: Descriptiva

1. Descripción general

Es el primer teorema que enuncia en la parte de la continuidad definida por medio de la vecindad, considera que es una segunda definición de operación continua. En palabras de Fréchet, esta definición es menos general que la primera definición (Def. 12) ver Apéndice A, porque solo tiene sentido cuando se puede definir la vecindad.

Descripción del enunciado

Condición necesaria y suficiente para que una operación sea continua.

2. Observaciones y complementos

[2] Esta enumeración corresponde al listado de teoremas y proposiciones del primer capítulo de la tesis de Fréchet en la tesis de maestría: Una problematización del concepto de topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet. Apéndice A de este documento.

Demostración con complementos

1° En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, (Def. 12)[3], si U es continua en A y si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$. Sea ahora ε un numero positivo cualquiera; supone que no existe el número η_A, si no podemos determinar un numero η_A tal que la desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, podríamos determinar, cualquiera que sea n, un elemento B_n de E tal que

$$(A, B_n) < \frac{1}{n}, \qquad |U(A) - U(B_n)| \geq \varepsilon.$$

Cuando n crece indefinidamente, puesto que la vecindad (A, B) tiende a cero con $\frac{1}{n}$ y $(A, B_n) < \frac{1}{n}$, entonces por la segunda condición de la (Def. 24) la primera desigualdad muestra que B_n tiende a B (en lugar de B es A) y, de acuerdo con la hipótesis se supone que la operación es continua y por la (Def. 12), $U(B_n)$ tiende a $U(A)$, lo que lleva a una contradicción con la segunda desigualdad.

2° Si, para cualquier ε, podemos determinar η_A tal que $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$, vemos que podemos tomar p suficientemente grande para que la sucesión $B_1, B_2, \dots$ tienda a B, entonces por la segunda condición de la (Def. 24) se tiene que (A, B_n) tiende a cero, es decir, la sucesión B_n tiende a A, luego por hipótesis la desigualdad $n > p$, implica $|U(A) - U(B_n)| < \varepsilon$. Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$

Esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$.

Observaciones

En esta demostración podemos observar que la expresión *tiende a* le da el mismo significado que a la expresión $V(A) = \lim_{n=\infty} V(A_n)$, Como lo observamos en esta parte de la demostración donde hace referencia a la definición de operación continua: *"En efecto, de acuerdo con la definición que hemos dado de la continuidad de U, (Def. 12), si U es continua en A y si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiende a A, $U(A_n)$ tiende a $U(A)$."*

3. Definiciones y conceptos que utiliza

Definiciones

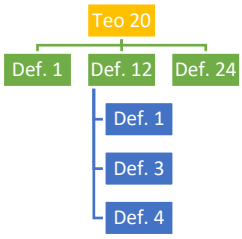


Fig. 1 Relación teorema-definiciones. Elaboración propia

[3] En la demostración que se presenta en español, el texto en azul es parte de la actividad matemática de la autora para entender la actividad matemática de Fréchet. Se marca en otro color para diferenciarla de la actividad matemática de Fréchet.

Comunicación

Fase 2: Analítica[4]

1. Usos de la métrica. Los usos de la métrica que se reconocen son[5]:

- "Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$ esto demuestra que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$." Usa la vecindad y demanda de la métrica para decir que un número tiende a otro.

2. Practicas. Preguntas de análisis:

Tabla 1

Respuesta a los cuestionamientos analíticos en tanto usos de la "métrica"

¿Qué hace?	**¿Cómo hace?**	**¿Por qué hace?**	**¿Para qué hace?**
		Demostración	
Garantiza la convergencia de una sucesión de elementos de una clase (V)	Es suficiente tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$	Porque demuestra que la sucesión $B_1, B_2, \ldots$ tiende a A, y por la (Obs. 17)	Para demostrar que $U(B_n)$ tiende a $U(A)$ y así demostrar que cumple la propiedad supuesta.

Discusión y resultados

Del análisis realizado se reconoce como acción: *garantizar la convergencia de una sucesión de elementos de una clase (V)*; de tal manera que representa los términos de una sucesión mientras que el otro representa el elemento límite, entendemos que dicha relación refiere a la idea *algo tiende a algo*.

Entonces, cuando se da la vecindad de dos elementos, se determina una relación de cercanía entre los elementos de la sucesión, es así como se entiende la vecindad, es decir, como una relación de proximidad entre elementos de un conjunto cuyos elementos son de naturaleza cualquiera. En la primera parte de la tesis de Fréchet, esta relación de proximidad siempre es numérica.

Se reconoce como una actividad: *tomar p lo suficientemente grande para que $n > p$, implique $(A, B_n) < \eta_A$*; puesto que esta tiene una intencionalidad previa, proporcionada por la definición de una clase (V) que se nutre de las respuestas a los cuestionamientos por qué hace y para qué hace.

Las preguntas de investigación se responden brevemente desde el análisis realizado a la primera parte de la tesis doctoral de Maurice Fréchet y en ningún momento se propone una generalización de estos resultados, ya que para hacerlo es necesario robustecer esta problematización desde todas las dimensiones del saber.

- ¿Qué papel juega la relación de proximidad en la constitución de la topología como saber matemático?

Desde esta investigación se puede entender que una relación de proximidad entre los elementos de un conjunto es una propiedad de referencia (estructura/modo de composición) entre los

[4] Se presenta un extracto de esta fase ya que es extensa para el espacio permitido. Se puede encontrar completa en (Márquez-García, 2018, p. 120-122)

[5] Por cuestión de espacio solo se muestra uno de los usos que se reconocieron

elementos del conjunto que permite saber cuándo algo se acerca a algo o bien, cuándo algo se aproxima a algo. (Márquez-García, 2018)

- ¿A qué nos referimos con naturaleza topológica?

Desde esta investigación se considera por naturaleza topológica aquella característica de los conceptos basados en conjuntos que, mediante el establecimiento de una estructura que define una relación de proximidad, demanda del "abandono" de la naturaleza de los elementos considerados. Esto implica la consideración de conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera, en los que se pueda determinar una estructura que permita dar sentido a la frase algo tiende a algo. (Márquez-García, 2018)

Conclusión

Desde esta problematización, se asocia al concepto de topología el establecimiento de una relación de proximidad entre los elementos de un conjunto de naturaleza cualquiera, que permite garantizar cuándo algo tiende a algo.

Esta investigación muestra un ejemplo de que la construcción del conocimiento matemático, aun aquel que nace en un contexto puramente matemático como lo es el de topología, también está acompañado de prácticas que se reconocen mediante el estudio del uso del conocimiento.

Referencias y bibliografía

Arboleda, L. C. (2002). El problema didáctico y filosófico de la desaxiomatización de las matemáticas. *Revista Colombiana de Filosofía de La Ciencia*, *3*(7), 59–84.

Arboleda, L. C. (2012). Objetos Matemáticos y Prácticas Constitutivas : La génesis de la Topología de Vecindades. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, *1*(1), 32–44.

Dugundji, J. (1966). *Topology* (Allyn and). United States of America.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la Analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto politécnico nacional.

Fréchet, M. (1906). *Sur Quelques points du calcul fonctionnel*. https://doi.org/10.1007/BF03017884

Freixenet, J. T. (1994). La topología general desde sus comienzos hasta Hausdorff. In *Historia de la Matemática en el siglo XIX (2da. Parte)* (pp. 191–211). Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Retrieved from http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA_1994_00_00_09.pdf

Kelley, J. L. (1955). *General Topology* (Springer). Retrieved from http://www.archivos.ujat.mx/2012/dacb/Programas_Materias/Matematicas/Sustantiva Profesional/F1143.pdf

Márquez-García, G. (2018). *Una problematización del concepto de topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet*.

Pérez, J. A. (2015). *Topología de conjuntos. Un primer curso*. (P. Electrónicas, Ed.). Ciudad de México: Sociedad Matemática Mexicana. Retrieved from http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/SEPA/ECMS/resumen/P1TE19_1.pdf

Taylor, A. E. (1982). A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals. *Archive for History of Exact Sciences*, *27*(3), 233–295. https://doi.org/10.1007/BF00327860

Apendice A
Definiciones y teorema de Sur Quelques points du calcul fonctionnel

Las definiciones y teoremas de la primera parte de la tesis de Maurice Fréchet. Muestran en español – traducción hecha por la autora del idioma original, francés– la traducción se realizó respetando en la medida de lo posible los términos y estructura original.

Definiciones

Def. 1 - Considere un conjunto E de elementos cualquiera (números, puntos, funciones, líneas, superficies, etc.) pero tal que se sabe distinguir los elementos distintos. A cualquier elemento A de este conjunto hacemos corresponder un número especifico $U(A)$; definimos lo que llamamos una operación *funcional* uniforme en E. (p. 4)

*[6]Def. 2 - …los conjuntos abstractos, es decir, que no se especifica la naturaleza de los elementos. (p. 4)

Def. 3 - De ahora en adelante, nos limitaremos al estudio de conjuntos extraído de una clase (L) de elementos de naturaleza cualquiera pero que satisfacen las condiciones siguientes: Se puede distinguir si dos elementos de la clase (L) son distintos o no. Además, hemos podido dar una definición de límite de una sucesión de elementos de la clase (L). Por lo tanto, suponemos que eligiéndose una sucesión infinita de elementos aleatorios (distintos o no) de la clase (L), podemos decir de alguna manera si esta sucesión $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiene o no un límite A (por cierto, único). El proceso que permitirá dar la respuesta (es decir, la definición de límite) es por cierto absolutamente cualquiera, que cumpla únicamente las condiciones I y II que hablamos y que son las siguientes:

Si cada elemento de la sucesión infinita $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ es idéntico al mismo elemento A, el resultado ciertamente tiene un límite que es A.

Si una sucesión infinita $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiene un límite A, toda sucesión de elementos de la primera sucesión de elementos tomados en el mismo orden: $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_p}, \dots$ (los números enteros, $n_1, n_2, \dots, n_p$ por lo tanto seguirá aumentando) tiene un límite que también es A. (p.5 y 6)

Def. 4 - Decimos que un elemento A de la clase (L) es un *elemento límite* de E cuando existe una sucesión infinita de elementos de E: $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ que son distintos y tienden a A. (p. 6)

Def. 5 - Llamaremos *conjunto derivado* de un conjunto E y lo denotaremos por E' al conjunto de elementos límites de E. (p. 6)

Def. 6 - Decimos que un *conjunto es cerrado* cuando contiene a su conjunto derivado. (p. 6)

Def. 7 - Es *perfecto* cuando coincide con su conjunto derivado. (p. 6)

Def. 8 - Considerando un conjunto dado H como conjunto fundamental, decimos que un elemento A de un conjunto cualquiera E, formado de elementos de H, es *interior* de E, *en sentido*

[6] Las definiciones y teoremas que están marcados con el símbolo *, son los que se consideraron como tal para esta investigación, pero que Fréchet no los declara como tal.

estricto cuando A es un elemento de E que no es límite de ninguna sucesión de elementos distintos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ que pertenece a H pero no a E. (p. 6)

Def. 9 - Llamaremos *elemento de condensación* de un conjunto E, a un elemento límite de E que también es un elemento límite de todo conjunto que se obtiene eliminando de E una infinidad *numerable* (II, página 2) de elementos. (p. 6)

Def. 10 - Decimos que un conjunto es *compacto* cuando tiene solamente un número finito de elementos o cuando toda la infinidad de sus elementos da lugar al menos a un elemento límite. (p. 6)

Def. 11 - Cuando un conjunto es compacto y cerrado le llamaremos conjunto *extrémal.* (p. 6 y 7)

Def. 12 - Diremos que una operación funcional V uniforme en un conjunto E de elementos de una clase (L) es continua en E, si cualquier elemento A de E límite de una sucesión de elementos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de E, tenemos: (p. 7)

$$V(A) = \lim_{n=\infty} V(A_n).$$

Def. 13 - Llamamos el límite superior de un conjunto de números, una cantidad μ tal que cualquier número en el conjunto es como máximo igual a μ y que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, hay al menos un número del conjunto, superior a $\mu - \varepsilon$. Cuando dicho número μ no existe, decimos que el límite superior es infinito. (p. 8)

Def. 14 - Diremos que una operación U uniforme en un conjunto E es semi-continua superiormente en E si, cualquier elemento A de E que es límite de una sucesión de elementos distintos de E: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots, U(A)$ es al menos igual al límite más grande *) de la sucesión $U(A_1), U(A_2), U(A_3), \dots, U(A_n), \dots$ (p. 8 y 9)

Def. 15 - Llamo conjunto continuo, un conjunto tal que dado cualesquiera dos de sus elementos A, B, se puede extraer de E un conjunto F en el que cada uno de sus elementos corresponde a un punto del intervalo (0,1) sobre un eje ot e inversamente. La correspondencia se supone tal que si dos elementos A_1, A_2 de F corresponden a dos puntos t_1, t_2, A_1 tiende a A_2 cuando t_1 tiende a t_2. (p. 9)

Def. 16 - Diremos que una sucesión de operación uniformes en E *converge uniformemente* sobre E a una operación U si, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un entero p tal que $n > p$ implica que $|U_n(A) - U(A)| < \varepsilon$ para todo elemento A de E. (p. 9)

Def. 17 - Diremos que una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$, uniforme en un conjunto E *converge casi-uniformemente* a una operación U, cuando, dado $\varepsilon > 0$ y un entero cualquiera N, podemos determinar, de una vez por todas, un entero $N' > N$ tal que, a todo elemento A de E, le corresponda un entero n_A tal que: (p. 10)

$$N \leq n_A \leq N' \qquad \left|U(A) - U_{n_A}(A)\right| < \varepsilon.$$

Def. 18 - Consideremos una familia Ñ de operaciones continuas en un mismo conjunto E formado de elementos de una clase (L). (p. 11)

Def. 19 - Si la familia Ñ es tal que de cualquier infinidad de operaciones de Ñ distintas, se pueda sacar una sucesión $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ que converge uniformemente a un limite U necesariamente continuo en E. Diremos que la familia Ñ es *compacta.* (p. 11)

Comunicación

Def. 20 - Diremos que las operaciones uniformes en un mismo conjunto E formado de elementos de una clase (L), constituyen una familia Ñ de operaciones igualmente continuas en A en E, si dado un número $\mathcal{E} > 0$ y una sucesión cualquiera de elementos de E: $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, cuyo limite un elemento A de E, se puede encontrar un entero p tal que la desigualdad $n > p$ implica

$|U(A) - U(A_n)| < \varepsilon$

Cualquiera que sea la operación U de la familia Ñ. (p. 11)

Def. 21 - Considere una familia Ñ de operaciones uniformes en un conjunto E. En cada elemento A de E, podemos definir un numero $L(A)$ que sea el límite superior de valores en A de operaciones de Ñ. (p. 14)

Def. 22 - Si las operaciones de Ñ son limitadas en su conjunto en todo elemento de E, determinamos así una operación uniforme en E, que llamaremos límite superior de Ñ. (p. 14)

Def. 23 - Considere la clase (C) de funciones de una variable x definidos en un intervalo fijo J : $0 \leq x \leq 1$ y convenimos decir que una sucesión de tales funciones: $f_1(x), f_2(x), \dots$ tiende a una función f(x) si, para cada valor x del intervalo J, $f_n(x)$ tiene un limite finito f(x). Esta definición satisface las condiciones I y II del Nº 7. Así que esta clase (C) es una clase (L). (p. 15)

Def. 24 - Consideremos una clase (V) de elementos de naturaleza cualquiera, pero que sepamos distinguir entre dos de ellos si son o no idénticos, además, que a cualquiera dos de sus elementos A, B los podamos hacer coincidir con un número $(A, B) = (B, A) \geq 0$ que goza de las dos propiedades siguientes: 1° La condición necesaria y suficiente para (A, B) sea cero es que A y B sean idénticos. 2° Existe una función positiva bien definida $f(\varepsilon)$ que tiende a cero con ε, tal que las desigualdades $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ provocan que $(A, C) \leq f(\varepsilon)$ para cualesquiera elementos $A, B\ y\ C$. En otras palabras, es suficiente que (A, B) y (B, C) sean pequeñas para que sea la misma de (A, C). Llamamos vecindad de A y B el número (A, B). (p. 18)

* Def. 25 - Veremos más adelante (no. 43) un caso muy general dónde un conjunto cualquiera es siempre condensado, es decir, una infinidad no numerable cualquiera de sus elementos siempre da lugar a al menos un elemento de condensación. (p. 19)

Def. 26 - Si A es un elemento de D, llamamos ρ_A el límite inferior ≥ 0 de la vecindad de A con los elementos de E'. El número ρ_A es positivo, de lo contrario A sería un elemento límite de E' y como consecuencia pertenecería a E'. (p. 20)

Def. 27 - Llamamos esferoide del centro A y radio ρ al conjunto de todos los elementos B tales que tenemos: $(A, B) < \rho$. Decimos que un elemento C es interior a este esferoide, si tenemos: $(A, C) < \rho$. (p. 21)

Def. 28 - Llamaremos *conjunto límite* un conjunto tomado de una clase (V) tal que la vecindad de dos elementos cualquiera de este conjunto sigue siendo inferior a un número fijo. (p. 22)

Def. 29 - Decimos que una sucesión de elementos $A_1, A_2, \dots$ de una clase (V) satisface las condiciones de CAUCHY cuando se puede hacer que cualquier número $\varepsilon > 0$ corresponda a un entero n tal que la desigualdad $(A_n, A_{n+p}) < \varepsilon$ se satisface para cualquier p. (p. 23)

Def. 30 - Diremos que una clase (V) admite una generalización del teorema de CAUCHY si cualquier sucesión de elementos de esta clase, que satisface las condiciones de CAUCHY, tiene un elemento limite (necesariamente único). (p. 23)

Def. 31 - Llamaremos *clase separable* a una clase que puede considerar, al menos en una forma, como el conjunto derivado de un conjunto numerable de sus propios elementos. (p. 23)

Def. 32 - Finalmente, nos interesa considerar como ya hemos hecho (N ° 33) entre las clases (V) aquellas que son tales que, cerca de un elemento dado, hay elementos cuya vecindad con este es también pequeña como uno quiera sin ser nulo. En otras palabras, cualquier elemento de la clase será un elemento limite. Como por otra parte, el reciproco es verdadero por definición de la clase, diremos que tales clases son perfectas *) (p. 23 y 24)

Def. 33 - Las clases NORMALES, es decir, perfectas, separables y admitiendo una generalización del teorema de CAUCHY. (p. 24)

Def. 34 - Diremos que una operación U es *uniformemente contina* en un conjunto E formado por elementos de una clase (V) si, dado un número positivo ε, podemos elegir un número positivo η tal que, para dos elementos *cualesquiera* de número positivo E: A, B, la desigualdad:

$(A, B) < \eta$, implica que $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$. (p. 28)

Def. 35 - Sea J una familia de operaciones continuas en un conjunto cualquiera E formado por elementos de una clase (V). Si esa familia es tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos poner en correspondencia con un numero $\eta > 0$ de modo que tenemos.

$|U(A) - U(B)| < \varepsilon$

Para toda operación U de J y para todo par de elementos A, B de E verifícan $(A, B) < \eta$, las operaciones de J son igualmente continuas en E. Esto resulta inmediato de la definición de n° 15…

(p. 29)

Def. 36 - La distancia entre dos elementos y que cumple con las propiedades siguientes: a) La distancia (A, B) es cero, si A y B son iguales. B) Si A, B y C son tres elementos cualesquiera, se tiene $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$. (p. 30)

Def. 37 - Cuando podemos definir la distancia de dos elementos cualesquiera de cierta clase, diremos que es una clase (E). (p. 30)

Teoremas

Teo 1. Dada una operación U uniforme en un conjunto extrémal E, existe al menos un elemento A de E tal que el límite superior *) μ (finito o no) de U en E es igual al límite superior de U en cualquier conjunto K de elementos de E que A es interior en sentido estricto [considerando E como el conjunto fundamental (n°8)]. (p. 8)

Teo. 2. Si U es una operación continua en un conjunto continuo E, U tomará en al menos un elemento de E cualquier valor entre dos valores cualquiera de los tomados por U. (p. 9)

* Teo. 3. Cuando una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ continuas en cualquier conjunto formado de elementos de una clase (L) converge casi-uniformemente en E a una operación de U, esta es continua en E. (p. 10)

*Teo. 4. Para que una sucesión de operaciones $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ continuas en un mismo conjunto E formados de elementos de una clase (L) converge a una operación continua en E, es necesario y suficiente que la sucesión sea convergente casi-uniformemente en todos los conjuntos extremal formados por elementos de E. (p. 10)

Teo. 5. Para que las operaciones continuas de un mismo conjunto extremal E formado de elementos de una clase (L), que pertenecen a un mismo conjunto numerable D o de su derivado D', formen una familia compacta Ñ, es necesario y suficiente que las operaciones de Ñ sean igualmente/también continuas y limitadas en su conjunto en cualquier elemento de E. (p. 13 y 14)

Teo. 6. Dada una familia Ñ de operaciones limitadas en su conjunto e igualmente continuas en un conjunto cualquiera E, el límite superior de Ñ es una operación continua en E. (p. 14)

Teo. 7. Considere las funciones $f_n^{(p)}(x), f_n(x), f(x)$ definidas en un mismo intervalo J, n y p enteros cualesquiera y tales que:

(I) $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$, $f_n(x) = \lim_{p=\infty} f_n^{(p)}(x)$.Si en general es imposible elegir los enteros n_r, p_r tales que la igualdad

$$f(x) = \lim_{r=\infty} f_{n_r}^{(p_r)}(x)$$

Se verifica en todo punto de J. Al menos siempre es posible determinar de tal manera que esta igualdad se verifique en cualquier punto de J excepto un conjunto de puntos de medida cero. (p. 15)

Teo. 8 cualquier función $f(x)$ dentro de la clasificación de SR. BAIRE (III, page 126) se puede considerar como el límite de una sucesión de polinomios excepto un conjunto de medida cero *). (p. 17)

Teo. 9. El conjunto derivado de un conjunto de elementos de clase (V) es un conjunto cerrado. (p. 18)

Teo.10. El conjunto P de elementos de condensación *) de un conjunto condensado E formado de elementos de una clase (V) es un conjunto perfecto o nulo **) (p. 19)

Teo. 11. Sea E un conjunto condensado formado de elementos de una clase (V). El conjunto D de elementos de E que no son elementos de condensación de E es un conjunto numerable ***) (p. 19)

Teo. 12. El conjunto D de los elementos de un conjunto compacto E de elementos de una clase (V) que no pertenece al conjunto E' derivado de E es numerable *) (p. 19 y 20)

Teo. 13. Si un conjunto cerrado F pertenece a un conjunto compacto E formado de elementos de una clase (V), obtendremos Feliminando de E los elementos INTERIORES a cada esferoide de un cierto conjunto contable de esferoides. *) (p. 21)

Teo. 14. Todo conjunto compacto formado de elementos de una clase (V) es limite. (p. 22)

Teo. 15. Sea E un conjunto extremal formado de elementos de una clase (V). Si existe una sucesión indefinida G de conjuntos $I_1, I_2, \dots$ tal que todo elemento de E es interior en sentido

estricto de al menos uno de los conjuntos I_n, se puede extraer de G un numero finito de estos conjuntos formando una familia H con la misma propiedad que G *) (p. 22)

Teo. 16. Para que el conjunto $\boldsymbol{K}_{\varepsilon}$ [correspondiente a un conjunto E de una clase (V) NORMAL] pueda ser elegido, cualquiera que sea ε, de manera que incluya sólo un número finito de elementos, es necesario y suficiente que E sea compacto. (p. 25)

Teo. 17. Sea E un conjunto de elementos de una clase (V) normal. Para que de cada familia H, NUMERABLE O NO *) de conjuntos I tal que cada elemento de E sea interior en el sentido estricto de al menos uno de ellos, podamos extraer un número finito de conjuntos I formando una familia G con la misma propiedad que H, es necesario y suficiente que E sea extremal. (p. 26)

Teo. 18. Todo conjunto no numerable E formado de elementos de una clase (V) normal es condensado. (p. 27)

Teo. 19. Sea E cualquier conjunto formado de elementos de una clase separable (V); existe un conjunto numerable de elementos de E tal que cada elemento de E pertenece, al conjunto D o a su derivado D'. Cuando E es cerrado, tenemos: $E \equiv D + D'$. Cuando E es perfecto, $E \equiv D'$. (p. 27)

Teo. 20. Consideremos una operación U definida en un conjunto E formado por elementos de una clase (V). La condición necesaria y suficiente para que U sea una operación continua en E es que, si A es un elemento cualquiera de E y de E', podemos corresponder a todo número $\varepsilon > 0$ un número η_A tal que si la desigualdad $(A, B) < \eta_A$, implica $|U(A) - U(B)| < \varepsilon$ para todo elemento de B en E. (p. 28)

Teo. 21. Toda operación continua en un conjunto EXTREMAL E formado de elementos de una clase (V), es uniformente continua en E.(p. 29)

Teo. 22. Para que las operaciones continuas en un mismo conjunto extremal E, formado por elementos de una clase (V) separable, forman una familia compacta $\boldsymbol{J}$, es necesario y suficiente que las operaciones de $\boldsymbol{J}$ sean, en todos los elementos de E, igualmente continuas y limitadas. (p. 30)

Teo. 23. La condición necesaria y suficiente para que toda operación continua en un conjunto E de elementos de una clase (E), 1ª sea acotada en ese conjunto, 2ª alcance su límite superior, es que el conjunto E sea extremal. (p. 31)

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

História da Razão Áurea na formação continuada de professores

Arlete de Jesus **Brito**
Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho
Brasil
arlete.unesp@gmail.com
Sérgio Candido de **Gouveia** Neto
Universidade Federal de Rondônia
Brasil
sergio.gouveia@unir.br

Resumo

Esse texto abordará alguns resultados de uma pesquisa colaborativa que visa a investigar os potenciais de um estudo sobre a história da matemática e a de seu ensino, na formação continuada de professores de matemática. Para a análise dos dados foi utilizada o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTKS - Mathematical Knowledge for Teaching). Os resultados apontam que tal pesquisa possibilitou aos professores transitarem por diversos domínios do conhecimento necessários à prática docente.

Palavras-chave: educação, matemática, história, formação de professores, MTKS.

Essa comunicação pretende relatar resultados de uma pesquisa que tinha por questão: quais os potenciais e limites do estudo da história da matemática e a de seu ensino para a formação continuada de professores? Desde o século XIX, textos abordam a importância da História da Matemática e a de seu ensino para a formação de professores. Furinghetti (2013) aponta trabalhos, como por exemplo, de Forian Cajori e de Hieronymus G. Zeuthen que, no final do século XIX, trazem discussões a esse respeito. Felix Klein (1849-1925), em sua obra *Matemática Elementar desde um Ponto de Vista Superior*, cuja primeira edição foi em 1908, expõe aspectos que, para ele, seriam necessários na formação de futuros professores. Este livro, além de conteúdos matemáticos, trata de assuntos tanto da História da Matemática como da História do Ensino de Matemática. Segundo Klein (1927), os aspirantes ao magistério deveriam conhecer os elementos intuitivos da Matemática, as relações entre seus distintos ramos e, sobretudo, o desenvolvimento histórico desse campo do saber.

Brito (2007) atualiza as considerações tecidas por Miguel e Brito (1996) sobre o assunto aqui tratado. Segundo a autora, a História da Matemática e a da Educação Matemática deveriam participar da formação de professores, pois podem colaborar em reflexões sobre: a orientação das

escolhas e decisões metodológicas e didáticas, por meio da análise de pressupostos epistemológicos, teleológicos e axiológicos de tais escolhas; o processo histórico de ensino e aprendizagem de matemática na instituição escolar, a partir da análise de diferentes currículos, dos livros textos e materiais didáticos em geral, utilizados em diferentes momentos históricos; os fundamentos dos conteúdos matemáticos básicos presentes em sua prática docente; a possibilidade de articular seu trabalho em ensino de matemática com as contribuições de outras áreas do conhecimento e com práticas não discursivas; a existência da diversidade cultural no que se refere à produção do conhecimento; as potencialidades e limites da utilização didática de atividades e outros recursos que envolvam a história da matemática. Brito (2007) afirma serem necessárias pesquisas sistemáticas acerca das consequências da introdução da história da educação matemática na formação de professores.

Investigações sobre o tema também têm sido realizadas. Por exemplo, Balestri e Cyrino (2010) entrevistaram oito docentes pesquisadores acerca da participação da história na formação inicial de professores de matemática. Segundo os entrevistados, a história poderia: auxiliar na compreensão dos conteúdos matemáticos, contribuir para compreensão da matemática como área de conhecimento, colaborar na percepção de relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento, veicular a matemática como uma construção humana, responder alguns "porquês" que surgem ao construir seu conhecimento matemático, abrir espaços para que o professor solicite aos seus alunos o desenvolvimento de atividades que exijam produções escritas, contribuir em discussões acerca das condições necessárias para o desenvolvimento da matemática, provocar reflexões sobre possíveis encaminhamentos da prática pedagógica do futuro professor. Segundo Balestri e Cyrino (2010), não houve consenso nas respostas dos entrevistados, porém os resultados sugerem que o conhecimento sobre a história da matemática pode colaborar para a qualidade da formação de futuros professores de Matemática.

No encontro History and Pedagogy of Mathematics (HPM), em 2016, Jankvist, Mosvold e Clark (2016) relataram experiência na qual propõem a seus alunos, futuros professores, a seleção de temas sobre História da Matemática ou sobre seu ensino, para elaborarem planos de ensino. Tendo por referencial o Conhecimento Matemático para Formação de Professores - Mathematical Knowledge for Teaching Teachers (MTKS), os autores analisam que tipos de conhecimentos foram desenvolvidos por seus alunos, nesse processo. O trabalho desenvolvido por Jankvist, Mosvold e Clark (2016), como veremos, está muito próximo do realizado por nós. No entanto, o que diferencia nossa investigação é que ela se desenvolveu em um grupo que, no decorrer das reuniões, se constituiu como colaborativo.

A formação do grupo colaborativo

Em outubro de 2017, nós convidamos para uma reunião, alunos da Pós-Graduação em Educação Matemática e da Pós-Graduação em Matemática, da UNESP Rio Claro, e os convidamos a formar um grupo de estudos sobre um tema de História da Matemática que seria escolhido coletivamente. Nessa reunião foi esclarecido que o trabalho desse grupo seria analisado para verificarmos quais os potenciais e os limites do estudo da História da Matemática na formação de professores e os convidamos a participarem também dessa pesquisa, como investigadores. Todos os alunos aceitaram ambos os convites e, dessa maneira, o grupo se constituiu por sete pessoas, das quais, cinco alunos dos cursos de pós-graduação e os dois pesquisadores, autores desse texto. Constituído o grupo, iniciou-se a escolha do tema. Uma das alunas sugeriu que o tema fosse sobre "matemática dos pitagóricos". Após discussão, esse se tornou o nosso tema de estudos e ele foi dividido, entre nós, nos seguintes subtópicos: Números

figurados; Arquitetura e misticismo numérico; Matemática e Música; Números primos, amigos e perfeitos; Razão áurea; Noções de Matemática pitagórica em livros didáticos, e constituição histórica do conceito de "pitagorismo". Criamos um grupo no Google Drive para socializarmos os artigos, livros e vídeos que encontrássemos sobre esses temas. Todos os participantes socializaram material para nossos estudos, entre os meses de outubro e dezembro de 2017. Nesse drive foram colocadas também as fotos realizadas nas reuniões, gravações dos encontros e suas transcrições.

Em cada reunião, um ou dois membros discorriam sobre o que haviam estudado e se iniciava o debate. Nelas também organizávamos, coletivamente, nossos cronogramas de trabalho, planejávamos e elaborávamos uma coletânea, além de escrevermos, coletivamente, um capítulo de um livro que está atualmente no prelo e é uma produção resultante de um a exposição que realizamos em um evento. A proposição e organização das atividades, tanto quanto as decisões foram feitas coletivamente, sem que houvesse a centralização de liderança.

Portanto, podemos considerar que o grupo foi se constituindo como colaborativo. Concordamos com Lopes (2018), quando afirma que:

> As condições de exercício profissional com significativa autonomia são ampliadas quando existe um trabalho colaborativo entre os professores. Esses profissionais têm características individuais, atuam em diferentes contextos educacionais e precisam, portanto, estar em constante processo de debate sobre suas práticas pedagógicas, de modo a preparar-se para atender aos seus alunos, que expressam capacidades cognitivas diversificadas e distintas visões de mundo (Lopes, 2018, p. 74).

Em nosso grupo, as atitudes de respeito mútuo, com o passar das reuniões, fizeram surgir laços afetivos e de confiança que nos levaram tanto a compartilhar conhecimentos, quanto a mostrar nossas dúvidas e ignorância em alguns assuntos. Nesse sentido, esse grupo colaborativo teve características semelhantes às de outros, como, por exemplo, o Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática nos/dos Anos Iniciais (GEPEMAI). Biani e Lorenzato ao relatar as atividades do GEPEMAI, concluem que nos grupos colaborativos:

> Os ganhos também são afetivos, pelas relações que se estabelecem entre seus membros. A colaboratividade exige cumplicidade, cooperação, confiança; implica saber falar e saber ouvir, respeitar o outro; requer dedicação, tempo e tantas outras coisas que estão inscritas na dimensão da afetividade pedagógica. (Biani, Lorenzato, 2018, p. 93).

Como todos os elementos do grupo se constituíram em pesquisadores da investigação, a pesquisa também se tornou colaborativa. Segundo Fiorentini (2004), uma pesquisa colaborativa se caracteriza pelo fato de todos os membros participarem do processo investigativo, incluindo a concepção, o planejamento (escolha da metodologia), a realização da pesquisa (coleta e análise dos dados), incluindo a construção da base teórica, culminando com as escritas do relatório e dos trabalhos para publicações. Contudo, não há unanimidade sobre estes aspectos, sendo que alguns pesquisadores afirmam que a colaboração não requer a participação dos envolvidos em todas as etapas, a não ser que isso seja o motivo que os levaram a participar da pesquisa (Desangné, 1997 apud Teles & Ibiapina, 2009; Zeichner, 1998). Na situação aqui descrita, a concepção inicial do tema a ser investigado – os potenciais de um estudo de História da Matemática e de seu ensino na formação de professores - não foi do grupo todo, porém, no momento em que todos aceitaram

ser pesquisadores dessa investigação, ela tomou novos rumos, de modo que todos nós nos tornamos sujeitos e pesquisadores de nossas aprendizagens mediadas pelo estudo de um tema da História da Matemática e de seu ensino, qual seja, "a matemática dos pitagóricos", que foi escolhido pelo grupo.

Os instrumentos de coleta de dados foram as gravações em áudio, com posterior transcrição, os diários individuais e algumas fotos de anotações feitas na lousa, em momentos de discussão. Para análise das discussões, das reflexões individuais e das anotações em lousa, consideramos o referencial sobre Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK) (Aguilar et al, 2013) que é um desdobramento das teorias sobre Conhecimento Matemático para Ensino - Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball, 2008). Segundo esse referencial, o conhecimento especializado do professor se divide em: 1) Conhecimento do Professor sobre a Matemática que engloba tanto o conhecimento dos temas e suas relações quanto os da prática matemática, como, por exemplo, modos de realizar demonstrações matemática, além de referir-se à estrutura matemática 2) Conhecimento Didático do Conteúdo em que se inserem o conhecimento do ensino de matemática, o sobre aspectos da aprendizagem matemática e o conhecimento dos currículos e propostas para o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Todos esses conhecimentos são permeados pelas crenças dos professores acerca do processo de ensino e aprendizagem da matemática. O enfoque do estudo do episódio, exposto aqui, foi sobre a razão áurea. Sua análise nos indicou possibilidades, na formação continuada, acerca do desenvolvimento do Conhecimento do Professor sobre a Matemática, de acordo com o referencial do MTKS.

A seguir, nos embasaremos nos subdomínios do referencial MTSK para realizar a análise de alguns diálogos das reuniões de nosso grupo colaborativo. Nessa análise, os nomes das pessoas envolvidas serão suprimidos[1].

A história e o conhecimento especializado do professor sobre a matemática

A aluna R. havia se proposto a estudar a razão áurea e resolveu, ler *A Divina Proporção* de H. E. Huntley, obra que traz tanto aspectos históricos quanto matemáticos sobre o tema. Segundo Huntley (1985), o problema das relações entre as diagonais do pentágono era familiar aos Pitagóricos. Esse problema está associado à divisão áurea, pois, dado um pentágono, o ponto de interseção P de duas de suas diagonais divide cada uma delas na proporção áurea. O traçado das diagonais gera o pentágono estrelado que, como sabemos, constituía o símbolo especial da escola pitagórica (Boyer, 1996). Ainda de acordo com Huntley, "um outro fato do conhecimento desses antigos geômetras era que a razão do raio do circuncírculo de um decágono regular para um dos lados é a razão áurea" (HUNTLEY, 1985 p. 36) e o problema da determinação da divisão áurea de um segmento está solucionado nos Elementos. Assim, R. buscou no livro *Os Elementos*, de Euclides[2], o que havia sobre o assunto.

Assim, R expõe como o conceito de razão áurea foi mudando ao longo do tempo e, a seguir, lê, para o grupo, o texto atribuído a Euclides. A seguir, faz o seguinte comentário:

> R - Ah eu li, eu consegui achar no Euclides a razão áurea, e eu descobri porque eu não estava achando! Porque ele fala de extrema e média razão, então ele define que uma reta está cortada em extrema e média razão, como o todo esteja para o maior

[1] Os nomes serão representados pelas letras R, S, I, D, A, J, C e S

[2] Foi utilizada a tradução em português realizada por Irineu Bicudo.

> segmento, o maior para o menor. No começo eu tive bastante dificuldade, daí eu fui pesquisar o que ele estava querendo dizer com esses termos.

Nesse trecho, R. expõe sua dificuldade em compreender de que se tratava a definição encontrada no *Os Elementos*, devido ao desconhecimento dos significados dos termos envolvidos ("*como o todo esteja para o maior segmento, o maior para o menor").* Percebemos um problema no que se refere ao Conhecimento do Professor sobre a Matemática, porque, apesar de R. já ter estudado esse conteúdo na licenciatura, não conseguia compreender os termos da definição.

Sua leitura, para o grupo, da proposição[3] de Euclides desencadeou a seguinte discussão sobre representação matemática.

> R – Daí, ele fala assim óh: fique descrito sobre AB o quadrado de BC. O que ele quer dizer com quadrado BC? Ele trata das diagonais sempre, então quando ele fala de quadrado, retângulo, ele vai usar as diagonais do quadrado e do retângulo ou do paralelogramo. Aí, quer ver: fique descrito sobre AB o quadrado BC e aplicado a AC o paralelogramo CD. Quer que eu desenhe?
> A – A gente aqui, sem entender.... Está todo mundo nesse nível.... Precisa desenhar, porque...

Conforme Szabó (1978), a visualização fez parte da tradição da geometria grega, desde seus inícios, pois o verbo "demonstrar" - δεικνυμι – significava "visualizar concretamente". O ensino de geometria tem recorrido a essa tradição, de modo que as figuras assumam uma função heurística, na resolução de problemas geométricos. É essa tradição que R. e A. mobilizam quando explicitam a crença de que o desenho na lousa ajudará a compreensão do enunciado. Porém, Duval (2005) ressalta que o enunciado em língua materna, as figuras e as representações dessas por meio de nominação de pontos dos vértices são tipos de registro semióticos heterogêneos. Além disso, a figura plana visualizada e o registro por meio de pontos referem-se a dimensões diferentes, portanto, a compreensão da passagem de uma forma de registro para outra pode não ocorrer com facilidade. R. vai à lousa e faz a figura, explicando que cada dupla de pontos é usada para designar um quadrilátero. O aluno J. incorpora essa forma de representação e, lendo o texto de Euclides, dá a seguinte explicação sobre a figura desenhada por R:

> J – Porque ele [Euclides] fala assim, mas o BC é um quadrado, portanto, também AD é um quadrado, então se você tem que BC é um quadrado, então AD vai ser um quadrado, por ser figura semelhante mesmo.

A partir do diálogo que ocorre no grupo, a representação dos quadriláteros por meio de dois dos seus vértices é criticada, mas passa a ser compreendida e a discussão se volta à tentativa de entender como o raciocínio apresentado na proposição conduzirá à razão áurea. Desse modo, se estabelece uma discussão no grupo sobre o porquê de as medidas dos segmentos construídos na demonstração serem proporcionais e sobre o modo como a demonstração está construída:

> A – Porque.... Como é que ele faz? Ele não corta [o segmento] em qualquer lugar, como ele faz essa construção?
> R - Ele não faz!

[3] O teorema em questão é a proposição 30, do livro 6.

A - Como não faz?
J - É porque isso fica decorrente do ponto D, pelo que eu li aqui.
R - Ele não faz, ele só fala construir CD tal que seja igual a CB, ele pula esse passo de construção.
A- Não, ele não pode pular isso.

Esse trecho indica um momento de reflexão do grupo sobre o modo como algumas demonstrações são realizadas, sem que se explicitem proposições envolvidas no processo e a partir desse questionamento, as pessoas tentam explicitar quais seriam as proposições e os passos envolvidos naquele raciocínio demonstrativo. Nesse momento, A., S. e J. também já estão diante da lousa. O aluno J. relê o livro e explicita qual o objetivo da construção, qual seja, a determinação de um ponto que divida o segmento $\overline{BD}$ em extrema e média razão.

Durante o diálogo, A. percebe que o teorema de Tales está envolvido na demonstração. As pessoas, na lousa, começam a representar as medidas dos segmentos por meio variáveis.

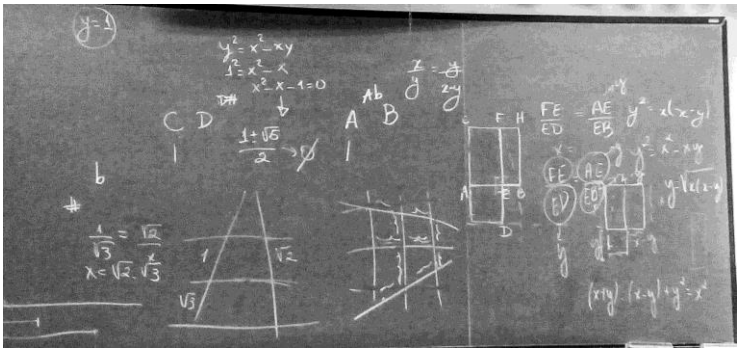


Figura 1. Fotografia da lousa

No entanto, se mantém a comparação entre as duas formas de representação, como se observa pela foto anterior (Figura 1). Instala-se uma argumentação coletiva sobre a demonstração, por meio de conjecturas e refutações a partir da análise voltada às retas paralelas cortadas por transversais, como se observa pelo trecho transcrito abaixo:

A. - Então, se ele é a média geométrica então AE, que é y...
J. - o x é AC, não, AB
A. - o x é AB, AB sobre AE é igual AE sobre EB. Ah, ele [Euclides] errou aqui, aqui era AB.
[risos]
R. – Não! Mas é que, Arlete, FE é igual que x, então você pode usar AB
J. - É a mesma coisa!
A. - Espera aí, FE é igual a quem?
R. - É a mesma coisa que x, então você pode usar ...
J. - E agora o ED, que é a mesma coisa que o y
A. - E agora o ED que é a mesma coisa que o AE.
J. – Isso! Tá certo!

Naquele momento, além de serem tecidas as relações entre diferentes formas de registro, estavam sendo mobilizados, ao mesmo tempo, conhecimentos sobre congruência de ângulos,

teorema de Tales, noção de figuras de mesma área, semelhança, proporcionalidade, média geométrica e divisão de um segmento em extrema e média razão. Segundo Aguilar (2013), reflexões sobre diferentes formas de representação e sobre a relação entre diferentes conteúdos são conhecimentos que fazem parte do Conhecimento do Professor sobre a Matemática.

> S – É, então, y ao quadrado é igual a x ao quadrado, agora então y ao quadrado é igual a x(x-y)
> J – $y^2 = x\ (x-y)$
> S. - Mas é, porque essa área aqui é igual a essa área [mostrando as figuras na lousa], não é?

Quanto o grupo chega à conclusão procurada, a aluna I. questiona sobre como a proporção obtida leva ao número ϕ. R. e A. analisam se a substituição de y ou de x por 1, resultaria no valor de ϕ. A substituição é feita e o número é obtido.

Dos tópicos relevantes que comporiam o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTKS), abordados por Jankvist, Mosvold e Clark (2016), esse processo colaborativo de estudo histórico sobre razão áurea nos levou a: relacionar uma representação a outras representações, conectar um tópico de ensino a outros tópicos, modificar questões para torná-las mais simples, escolher definições úteis ao desenvolvimento do processo de demonstração, usar notações e linguagem matemática, formular questões matemáticas produtivas e escolher representações convenientes para a proposta.

Algumas conclusões

Nossas análises apontam para o potencial de um estudo histórico, em grupo colaborativo, para a aprendizagem de conhecimentos matemáticos necessários à prática docente. Assim, concordamos com Ferreira (2008), quando afirma que o grupo colaborativo pode tornar-se "o contexto no qual são criadas oportunidades para o professor explorar e questionar seus próprios saberes e práticas" (Ferreira, 2008, p. 152). No entanto, nosso grupo colaborativo possui uma especificidade que deve ser considerada na análise: ele é composto apenas por docentes que já possuem ou estão em processo de obtenção de título de pós-graduado. É necessário comparar esse processo com os desenvolvidos em outros, cujos grupos não possuam essa especificidade.

Ressalta-se que a proposta do estudo sobre parte da história da razão áurea surgiu por meio das discussões do grupo colaborativo e acreditamos que o tema poderia ter sido qualquer outro. Por meio dessas discussões é que foi possível analisar os potenciais do processo colaborativo no estudo de história da matemática, na formação continuada de professores. Porém, alguns questionamentos precisam ser feitos: Os resultados teriam sido diferentes se o tema fosse outro? Quais seriam os potenciais e limites em outro caso?

Por fim, destaca-se que a nossa discussão girou em torno de apenas um aspecto do modelo MTKS, ou seja, o Conhecimento do Professor sobre a Matemática.

Referências e bibliografia

Aguilar, A. et all. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. *Actas del VII CIBEM*. Uruguai, VII, 5063-5069.

Balestri, R. D.; Cyrino, M. C. C. T. (2010). A história da matemática na formação inicial de professores de matemática. Alexandria – *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*. . 3 (1). 103-120. Doi:

https://doi.org/10.5007/%25x

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. Doi: https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554

Bicudo, I. (2009). Prefácio e introdução. Euclides. *Os Elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP.

Brito, A. J. A. (2007). História da Matemática e a da Educação Matemática na Formação de Professores. *Educação Matemática em Revista*. 22 (13), 11-15.

Boyer, C. (1996). *História da Matemática*. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher.

Duval, R (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la Géométrie développement de la visualization: Différenciation des raisonnements et Coordination de leurs fonctionnements. *Annalles de Didactique et Sciences Cognitives*. 10, 5-53.

Ferreira, A. C. (2008). O trabalho colaborativo como ferramenta e contexto para o desenvolvimento profissional: compartilhando experiências. In Nacarato, A. M. e Paiva, M. A. V. (Orgs). *A formação do professor que ensina matemática* (pp. 149-166). Belo Horizonte: Autêntica

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: Borba, M. C.; Araújo, J. L. (Orgs.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática* (pp. 47-76). Belo Horizonte: Autêntica.

Furinghetti, F. (2013). History and epistemology in mathematics education in History of Mathematics, [Eds. UNESCOEOLSS Joint Committee], in *Encyclopedia of Life Support Systems* (EOLSS). Oxford: Eolss Publishers.

Huntley, H. E. (1985). A divina proporção. Brasilia: Editora da UNB.

Jankvist, U. T.; Mosvold, R.; Clark, K. (2016). Mathematical knowledge for teaching teachers: the case of history in mathematics education. *HPM Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting*. Montepellier: IREM. 441-452

Klein, F. (1927). *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: Biblioteca Matemática Rey Pastor.

Lopes, C. (2018). Participação em grupos colaborativos e suas contribuições para Educação Matemática. In Fernandes, F. L. P; Biani, R. P; Longo, C. A. C; Tinti, D. S. (orgs). *Diferentes contextos do trabalho colaborativo na formação de professores que ensinam matemática* (pp. 73-76). Campinas: FE/UNICAMP.

Miguel, A.; Brito, A. J. (1996). A história da matemática na formação do professor de matemática. *Caderno CEDES*. N. 40. Campinas: Papirus. p. 47 a 61.

Szabó, A. (1978). *The beginnings of Greek mathematics.* Boston: D. Reidel Publishing Co.

Teles, F. P.; Ibiapina, I. M. L. M. (2009). A pesquisa colaborativa como proposta inovadora de investigação educacional. *Diversa*. 2 – nº 3, jan-jun

Zeichner, K. M. (1988). Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. In: GeraldiI, C. M.; Fiorentini, D. e Pereira, E. M. (orgs.) *Cartografia do trabalho docente: professor (a)-pesquisador(a*) (pp. 207-236).Campinas: Mercado de Letras/ABL.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A relevância dos conteúdos de Matemática ensinados nas décadas de 1940 e 1950 no município de Canoas/RS (Brasil)

Alexandre Ausani **Huff**
Doutorando - PPGECIM, Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Brasil
alexandre_ah@hotmail.com
Arno **Bayer**
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Brasil
arnob@ulbra.br

Resumo

Este trabalho apresenta o contexto educacional da rede pública municipal de Ensino do Município de Canoas/RS (Brasil) nos anos 1940 e 1950. Foi elaborado a partir de um recorte da Dissertação de Mestrado "A História do Ensino de Matemática nas escolas Públicas Municipais de Canoas de 1940 a 2016". Nele estão presentes as discussões sobre o Ensino de Matemática proposto pela Prefeitura Municipal de Canoas, nas duas primeiras décadas, após a fundação do município. A pesquisa se desenvolveu a luz da Hermenêutica de Profundidade, que prima pela interpretação dos documentos históricos através do contexto, reconstruindo a história da melhor forma possível. Após a análise dos documentos, da legislação e do momento em que a sociedade brasileira vivia, especialmente na cidade de Canoas, foi possível escrever sobre os conteúdos de Matemática que foram ensinados nas décadas de 1940 e 1950 nas escolas da rede pública municipal de Canoas.

Palavras clave: educação matemática, hermenêutica de profundidade, programas de ensino, currículo, história da matemática, ensino primário no Brasil.

Introdução

O trabalho refere-se a um recorte da Dissertação de Mestrado, cujo título é "A História do Ensino de Matemática nas escolas públicas municipais de Canoas de 1940 a 2016". Neste artigo iremos retratar o ensino de Matemática nas escolas públicas municipais de Canoas nas décadas

de 1940 e 1950. Trata-se, portanto, de um estudo histórico, dirigido às bases que formaram o currículo que possuímos atualmente nesta rede de ensino.

O estudo histórico é importante para que os professores possam conhecer o cenário que constituiu o Ensino de Matemática, para que possam reconhecer o panorama educacional e o contexto social que envolve a formação do currículo escolar e, com isso, ampliar a visão sobre a importância da educação.

Para que o pesquisador entenda o contexto sócio histórico, é necessário que ele estude toda a situação da região, no período pesquisado. Para tanto, foi utilizada a metodologia da Hermenêutica de Profundidade de John Thompson, que se baseia na Hermenêutica de Friedrich Daniel Ernst Schleiermacher, que criou uma maneira de realizar a interpretação, a exegese. Thompson, ao adaptar a metodologia de interpretação hermenêutica para a realização de estudos historiográficos, desenvolveu o método da Hermenêutica de Profundidade, que aproxima o pesquisador das características que envolvem a sociedade do período estudado.

Hermenêutica de Profundidade

A metodologia de pesquisa utilizada para a realização da pesquisa histórica foi constituída a luz da Hermenêutica de Profundidade. De acordo com Strecker e Schnelle (1997, p. 179) "a*l definir la hermenéutica como 'arte de la comprensión' y como disciplina filológica, Schleiermacher consigue superar la distinción entre la hermenéutica sacra y la hermenéutica profana"*[1]. Assim, a Hermenêutica de Profundidade, segundo Thompson (2011, p. 33):

> Ao mesmo tempo em que a tradição da hermenêutica pode chamar nossa atenção para essas e outras condições hermenêuticas da pesquisa sócio-histórica, ela pode também nos propiciar, num nível mais concreto, algumas orientações metodológicas para pesquisa. Desenvolvo essas orientações através do que chamarei de referencial metodológico da hermenêutica de profundidade. A ideia da hermenêutica de profundidade é tirada do trabalho de Paul Ricoeur, entre outros. O valor dessa ideia é que ela nos possibilita desenvolver um referencial metodológico que está orientado para a interpretação (ou reinterpretação) de fenômenos significativos, mas em que os diferentes tipos de análise podem desempenhar papéis legitimados e que se apoiem reciprocamente. Ela nos possibilita ver que o processo de interpretação não se opõe, necessariamente, aos tipos de análise que tratam das características estruturais das formas simbólicas, ou as condições sócio-históricas de ação e interação, mas que, pelo contrário, esses tipos de análise podem estar conjuntamente ligados e articulados como passos necessários ao longo do caminho da interpretação. Possibilita-nos também ver

[1] Ao definir a hermenêutica como 'arte de compreender' como disciplina filológica, Schleiermacher consegue superar a distinção entre hermenêutica sagrada e hermenêutica profana (tradução do autor).

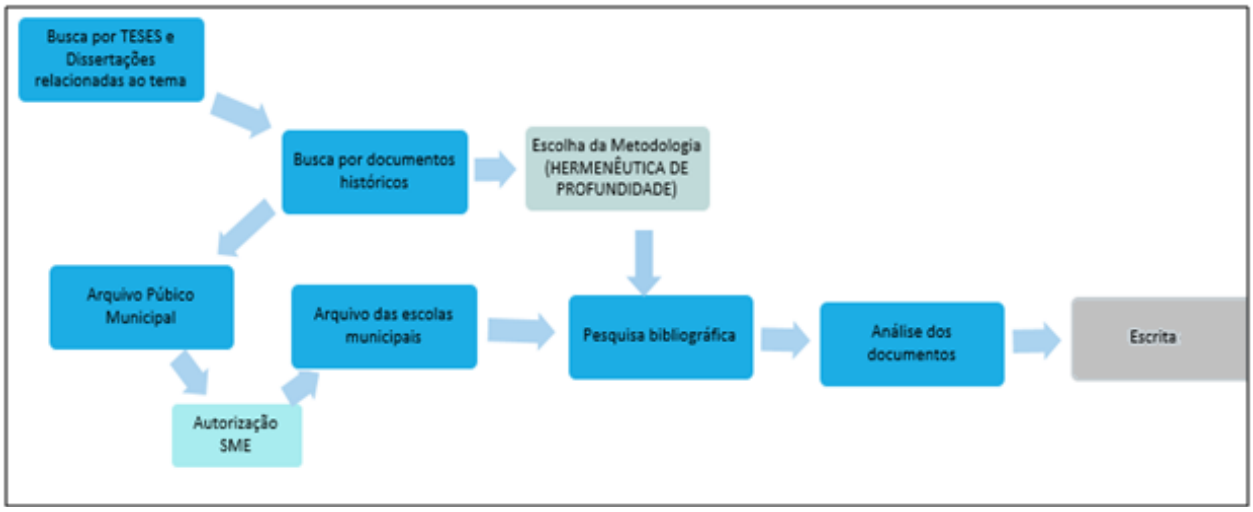
> que métodos particulares de análise podem iluminar alguns aspectos do fenômeno às custas de outros, que sua força analítica pode estar baseada em limites estritos, e que esses métodos particulares podem ser melhor analisados como estágios parciais dentro de um enfoque metodológico mais abrangente.

A Hermenêutica de Profundidade, então, está embasada na interpretação dos símbolos expressos nos documentos históricos. Esses símbolos são os fatores constituídos através das situações que se desenvolveram na sociedade, no período pesquisado, gerando o contexto histórico que está por trás da confecção destes documentos. Segundo Huff (2018, p. 37):

> Para analisar textos históricos é necessário interpretar a simbologia que nos remeta ao contexto mais próximo da realidade, isto é, utilizar as narrativas que possam nos guiar para o caminho dos fatos ocorridos. É necessário que o pesquisador fique atento a interpretação ou reinterpretação dos objetos que em conjunto irão nos encaminhar para a reconstrução dos elementos que fizeram parte do conteúdo estudado.

Assim, a pesquisa foi realizada através da interpretação dos documentos encontrados nos arquivos da biblioteca pública e das escolas públicas municipais, com o auxílio de referenciais teóricos que compõem a contextualização da sociedade canoense, do período pesquisado. O Quadro 1 representa as etapas da pesquisa:

Quadro 1
Fluxograma das etapas da pesquisa



Fonte: autoria própria

Portanto, a partir da análise dos documentos através da ótica propiciada pela Hermenêutica de Profundidade, foi possível realizar a escrita da história do Ensino de Matemática das escolas Públicas municipais de Canoas e desta comunicação científica.

O Ensino de Matemática nas escolas Públicas municipais de Canoas (1940 e 1950)

Canoas é um município brasileiro, localizado no Estado do Rio Grande do Sul. Sua emancipação ocorreu no ano de 1939, porém o primeiro prefeito, Edgar Braga da Fontoura, só foi empossado no dia 15 de janeiro de 1940. A partir desta data, iniciou o processo de municipalização das instituições, entre elas, a criação da rede pública municipal de ensino, na data de 31 de maio (Huff, 2018).

A partir da criação da rede pública municipal de ensino, houve a publicação do primeiro edital para contratação de professores, por meio de concurso público. Da mesma forma, por meio de decreto, a Prefeitura Municipal de Canoas estabeleceu as orientações de ensino e as atribuições referentes às atividades docentes e discentes. Ainda, no ano de 1940, houve a criação das primeiras escolas públicas municipais, sendo:

> A escola, primeiramente denominada de Escola Unitária Municipal e, posteriormente, chamada de Escola Municipal de Ensino Fundamental Irmão Pedro, que fica localizada na Rua Dr. Olavo Fernandes, 91, bairro Estância Velha (esquina com a Avenida Santos Ferreira) (Huff, 2018, p. 62).

As escolas públicas, depois de instaladas, receberam as orientações sobre os conteúdos a serem desenvolvidos no Ensino Primário (a rede pública municipal de ensino de Canoas, apenas ofertava vagas para o Ensino Primário, que contava com os primeiros cinco anos da escolarização). Esses programas de ensino foram "formulados pela Diretoria de Ensino da Prefeitura Municipal de Canoas, que estavam de acordo com as orientações de ensino para o Estado do Rio Grande do Sul" (Huff, 2018, p. 65).

A legislação brasileira, perante a educação, só regulamentou o Ensino Primário no dia 2 de janeiro de 1946, através do Decreto-Lei 8.529, sancionada pelo presidente José Linhares, que registrou a Lei Orgânica do Ensino Primário, cujas finalidades eram:

> a) proporcionar a iniciação cultural que a todos conduza ao conhecimento da vida nacional, e ao exercício das virtudes morais e cívicas que a mantenham e a engrandeçam, dentro de elevado espírito de Naturalidade humana;
> b) oferecer de modo especial, às crianças de sete a doze anos, as condições de equilibrada formação e desenvolvimento da personalidade;
> c) elevar o nível dos conhecimentos úteis à vida na família, à defesa da saúde e à iniciação no trabalho (BRASIL, 1946).

A lei Orgânica do Ensino Primário foi estabelecida pelo Governo Federal do Brasil para que houvesse uma base mínima comum de conteúdos, entre as diversas redes de ensino do país.

Outro fator importante foi o registro de sanções estabelecidas para as famílias que não matriculassem seus filhos nesta etapa da educação (Huff, 2018). Assim, de acordo com o Decreto-Lei:

> Art. 41. O ensino primário elementar é obrigatório para todas as crianças nas idades de sete a doze anos, tanto no que se refere à matrícula como no que diz respeito à frequência regular às aulas e exercícios escolares.
> Art. 42. A administração dos Estados, dos Territórios e do Distrito Federal baixará regulamentos especiais e sobre a obrigatoriedade escolar, e organizará, em cada Município ou distrito, serviços de Cadastro Escolar, pelos quais se possa tornar efetiva essa obrigatoriedade.
> Art. 43. Os pais ou responsáveis pelos menores de sete a doze anos que infringirem os preceitos da obrigatoriedade escolar, estarão sujeitos às penas constantes do art. 246, do Decreto-lei nº 2.848, de 7 de dezembro de 1840 (Código Penal) (Brasil, 1946).

Então, seguindo as normas estabelecidas em Lei, a Prefeitura Municipal de Canoas, através da Diretoria de Ensino, formulou os Programas de Ensino e repassou para as escolas da rede Pública Municipal de Ensino. Averiguando os conteúdos de Matemática que compõem o currículo do Ensino Primário, desta rede de ensino, foi possível constatar:

> [...] que os conteúdos de Matemática, divididos entre os cinco anos do Ensino Primário, nas décadas de 1940 e 1950, era basicamente voltado para o ensino e aplicação de cálculos aritméticos, noção de frações e de números decimais, conceitos de geometria e, no último ano do Ensino Primário, era proposto o aprendizado de noções de proporcionalidade e cálculo através da regra de três (Huff, 2018, p. 66).

A proposta do Ensino de Matemática no currículo do Ensino Primário, nas primeiras décadas da história do município de Canoas, seguiam fidedignamente as proposições estabelecidas na Lei Orgânica, que regimentava a educação brasileira, pois,

> O programa para o ensino da Aritmética projetava um estudo dos números gradativamente complexificado, iniciando pela contagem, soma e subtração mental, estendendo-se à multiplicação e divisão e aos algoritmos das operações na pedra ou na lousa, passando pelas frações decimais e ordinárias, pelo uso do sistema métrico decimal e avançando, na terceira classe, até as regras de três simples e composta, a extração da raiz quadrada e da raiz cúbica de números inteiros, decimais e fracionários (Búrigo, 2014, p. 15).

O Programa de Ensino de Matemática, então, envolve uma série de conteúdos que consiste em alto nível de compreensão para crianças que possuem entre sete e dez anos de idade. A capacidade de abstração, talvez, ainda não estivesse totalmente desenvolvida para compreender as noções de frações, área e volume, por exemplo. Assim, "o apelo ao concreto e à intuição reaparecia no objetivo enunciado de proporcionar à criança, 'em ação direta e pessoal sobre as cousas, o material concreto e vívido que servirá de base às abstrações matemáticas'" (Búrigo, 2014, p. 20).

Os Programas de Ensino, ao apresentar os conteúdos de Matemática, trazem uma lista de conteúdos e algumas formas de abordá-los. Como por exemplo, o trabalho com sistema monetário e a utilização do cálculo mental, que apesar de estar escrito lá, de forma equivocada, traz o fato de que o Ensino de Matemática estava tendo uma abordagem contextualizada para o educando. Então, entre as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos está a capacidade de realizar cálculos mentais.

> Alguns aspectos interessantes devem ser ressaltados, a aplicação de conceitos de unidades de medidas como: xícaras, sacos, colheres, além das formais litros, metros e gramas. Assim, dependendo da abordagem do professor em sala de aula, era possível mostrar ao aluno a utilidade da Matemática em tarefas que poderiam fazer parte de sua rotina caseira. Como a sociedade da época estava situada em um ambiente propício ao exercício da culinária e a construção de objetos de madeira, os alunos poderiam utilizar os conceitos Matemáticos estudados na escola, auxiliando seus pais em suas tarefas (Huff, 2018, p. 71).

O professor de Matemática, então, utilizava recursos pedagógicos para vincular os conteúdos da disciplina às atividades diárias dos educandos. Essa aproximação possibilitava uma melhor compreensão dos conteúdos, pois a contextualização permitia que os educandos aplicassem esses conteúdos fora da sala de aula, como exemplo: o uso de frações na culinária.

> A noção dos conceitos de fração era ensinada juntamente com a revisão de quantificação de grandezas, como litros, metros e gramas. A importância de utilizar estas nomenclaturas se faz pelo fato dos alunos estarem inseridos em uma sociedade que se utilizava muito estes conceitos nos pequenos comércios da cidade (Huff, 2018, p. 71).

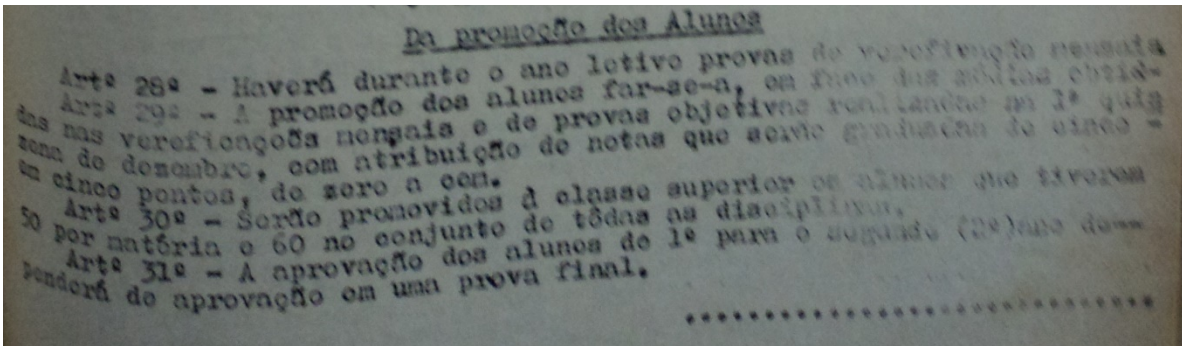
Uma característica importante, que influenciava a prática do professor, era que o Ensino de Matemática deveria apresentar ao educando as nomenclaturas mais precisas, evitando expressões corriqueiras, pois o rigor matemático era considerado fundamental para que o aluno desenvolvesse o raciocínio necessário para o aprendizado dos conteúdos.

> Cabia ao professor oferecer, para facilitar o processo de ensino e aprendizagem, um ensino gradual e na ordem correta, pois dessa forma os alunos conseguiriam abstrair e aprender de forma mais generalizada, capacitando-os a realizar os cálculos com mais precisão (Huff, 2018, p. 76).

A Educação brasileira, neste período, estava certamente embasada pela Tendência Formalista de Ensino. Isso fica evidente pelo fato de que o professor era o centro das ações no contexto educacional. As atividades, embora se relacionassem com o cotidiano do educando, eram planejadas para que o estudante aprendesse o método de resolução sugerida pelo professor (que seguia as orientações da Diretoria de Ensino municipal de Canoas).

> O esforço de, ao mesmo tempo, orientar e controlar a ação das professoras é evidenciado no detalhamento com que era descrito o mínimo essencial para cada ano, em que as dificuldades, os aprofundamentos ou ampliações deviam ser introduzidos gradativamente (Búrigo, 2014, p. 19).

O controle da Prefeitura Municipal de Canoas ocorria até mesmo na aprovação ou retenção dos alunos. Os professores recebiam as provas, chamadas de Exames Finais, para serem aplicadas ao final de cada ano letivo. Essas provas eram decisivas para a progressão para o próximo ano. As orientações podem ser observadas na Figura 1.



Da promoção dos Alunos

Artº 28º - Haverá durante o ano letivo provas de verificação mensais

Artº 29º - A promoção dos alunos far-se-a, em face das médias obtidas nas verificações mensais e de provas objetivas realizadas na 1ª quinzena de dezembro, com atribuição de notas que serão graduadas de cinco em cinco pontos, de zero a cem.

Artº 30º - Serão promovidos à classe superior os alunos que tiverem 50 por matéria e 60 no conjunto de tôdas as disciplinas.

Artº 31º - A aprovação dos alunos de 1º para o segundo (2º) ano dependerá de aprovação em uma prova final.

Figura 1. Promoção dos alunos

Fonte: Arquivo público municipal

Este é outro fator que evidencia o embasamento pela Tendência Formalista, a construção diária do educando não é considerada no momento da avaliação final, que permitia ao aluno o avanço para o ano seguinte ou que fosse retido. Todo o processo de aprendizagem era focado em uma única avaliação.

Considerações Finais

O município de Canoas foi fundado em meio às discussões nacionais da educação básica. O Ensino Primário foi organizado em 1946 no governo de José Linhares, que garantiam os Conteúdos Mínimos a serem ensinados nesta etapa da educação. A partir dessa organização, o Ensino de Matemática se caracterizou por possuir uma gama de conteúdos de difícil compreensão por exigir elevado nível de abstração.

Na rede pública municipal de ensino de Canoas, o currículo era organizado por uma Diretoria de Educação que pertencia à Prefeitura municipal. Esse currículo vinha composto por Programa de Ensino, separado por ano, orientações e normativas que deveriam ser seguidas pelos docentes. A falta de autonomia dos professores era evidente, os mesmos deviam planejar suas aulas, mas tendo em vista a organização pedagógica que lhes eram entregue.

Na sociedade da época, eram utilizados os conceitos matemáticos nas diversas profissões existentes, os conteúdos, em sala de aula, eram facilmente abordados de forma contextualizada. A aproximação dos conteúdos com as atividades diárias dos educandos facilitava o trabalho do professor, porém, de nada adiantaria o aluno aprender a utilizar na prática se o mesmo não passasse no Exame Final, proposto pela Diretoria de Ensino.

O controle sobre a vida escolar de cada aluno era fortemente visível, pois a família era obrigada a matricular suas crianças na escola, para não sofrer punições civis, mas ao mesmo tempo, o governo municipal detinha o poder de aprovar ou reprovar os alunos. Pois, o processo de aprendizagem não compunha a avaliação, somente era levada em conta a nota obtida no Exame Final. O professor, então, representante do estado, era o ponto central para a vida do estudante, pois para passar de ano o aluno devia seguir os passos ensinados por ele.

O contexto educacional apresentado pelos anos 1940 e 1950 era de escolas pequenas, com alunos de anos diferentes em uma mesma sala de aula, onde um único professor deveria dar conta de ensinar os diversos conteúdos, entre eles a Matemática. O cenário, visto de hoje, era catastrófico, pois crianças com pensamentos distintos, com experiências de vida distintas e de anos diferentes, deveriam aprender os conteúdos relativos ao seu ano e ainda passar por uma prova final para avançar. Por isso, quando se estuda a educação, é necessário conhecer a história.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

Brasil. *Decreto-Lei n. 8.529, de 2 de janeiro de 1946*. Lei Orgânica do Ensino Primário. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-8529-2-janeiro-1946-458442-publicacaooriginal-1-pe.html. Acesso em: 24 out 2017.

Búrigo, E. Z. (2014). Aritmética nas escolas primárias gaúchas na primeira metade do século 20: o ensino prescrito. *Hist. Educ. [Online]*. 18 (44), p. 9-25. Porto Alegre.

Huff, A. A. (2018). *A história do Ensino de Matemática nas Escolas Públicas Municipais de Canoas de 1940 a 2016*. Canoas: ULBRA.

Strecker, G.; Sschnelle, U. (1997). *Introducción a la exégesis del Nuevo Testamento.* Salamanca: Sigueme.

Thompson, J. B. (2011). *Ideologia e Cultura Moderna: Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa.* 9. Petrópolis: Vozes.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Concepto de determinante: una revisión de los libros de álgebra lineal.

Resumen

El siguiente texto expone la revisión de algunos libros utilizados en los cursos de álgebra lineal I de la Universidad Industrial de Santander, esta revisión hace parte de una investigación mayor; "Análisis histórico-epistemológico del concepto de determinante", la cual permitirá comprender el tratamiento que se da al concepto de determinante en los diversos textos. Se busca en ellos información sobre cómo se desarrollan los contenidos de enseñanza, los contenidos científicos, antecedentes y la proyección en el futuro. Se indaga en la importancia que generan los autores, las teorías, y su aplicación en las aulas de clases, así como los aspectos filosóficos y epistemológicos abordados en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

Palabras clave: educación, matemática, epistemología, álgebra lineal, determinante.

Introducción

Los cursos de álgebra lineal se encuentran presentes en la mayoría de los programas de Ingenierías, licenciaturas en Matemáticas y Física. Son numerosas las investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que atraviesan los estudiantes para comprender los diferentes conceptos relativos al álgebra lineal, (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000; Dubinsky, 2001; Dorier y Sierpinska, 2001). Los anteriores investigadores coinciden en que las dificultades radican en la construcción de diversos conceptos de álgebra lineal en los estudiantes recién ingresados a la universidad, estos se ven exigidos a construir conceptos con un lenguaje formal y abstracto, cuando su preferencia siempre se limita al trabajo con procedimientos mecánicos, lo que imposibilita la comprensión de los conceptos involucrados (Dubinsky, Dauterman, Leron y Zazkis, 1994).

Esta dificultad ha sido una problemática de interés dentro de la Matemática Educativa, ya que no son exclusivas de los individuos que abordan actualmente los conceptos básicos de Álgebra Lineal, sino que hace parte de obstáculos que surgieron en la construcción de los conceptos mismos. El estudio de aspectos históricos y epistemológicos de los objetos matemáticos ampliará la mirada y podrá aportar elementos para repensar aspectos de orden curricular, matemático y/o didáctico (Gómez 2003; Arboleda 2011).

Sí se conoce los aspectos relativos a la construcción histórica-epistemológica de la noción de determinante, se podrá proponer herramientas puntúales para un curso de Álgebra Lineal. Esto es, proponer aspectos curriculares referentes al contenido y aspectos didácticos asociados con el diseño de situaciones que den lugar a ampliar y generar una nueva mirada del concepto de determinante, más allá de la aplicación de un algoritmo.

El análisis y revisión de los libros de texto, está enfocado en tres libros que se usan como guía en los cursos de Álgebra Lineal I en la Universidad Industrial de Santander, se analiza el enfoque y el contenido en cuanto al concepto de determinante.

Marco Teórico

El marco teórico del estudio tiene varias fuentes de las que se expondrá únicamente lo más esencial al desarrollo de la investigación, ofreciendo la perspectiva teórica a la cual va orientada.

La historia de las matemáticas y educación matemática como investigación

Esta primera sección consiste en establecer un "mapa" en la cual se evidencie cómo se encuentra la investigación de la historia matemática y cómo podemos aprovecharla para la educación matemática además de considerar la pertinencia de un estudio de este tipo.

Anacona (2003) establece varias maneras de abordar el trabajo histórico en torno al conocimiento científico; la autora hace hincapié en dos corrientes: internalista y externalista. La primera hace énfasis en que el objeto de las ciencias es la ciencia misma, esto se puede entender como "hacer historia" de acuerdo con su estructura formal de construcción. Ya en la corriente externalista se tiene en cuenta el ámbito social. La autora enfatiza en el peligro inminente de estar en cualquiera de las dos corrientes, desde la corriente internalista se corre el riesgo de eliminar los componentes que ayudan a la construcción y apropiación del conocimiento el desarrollo científico se independiza totalmente del contexto socio-cultural. La segunda postura crea el riesgo que el estudio se limite dejando de lado el entramado teórico en sí, sería una historia de matemáticas sin matemáticas; sin fundamentos y totalmente vacía.

Una tercera forma de abordar el trabajo histórico está en la intersección entre las dos posturas; filosóficas y metodológicas. Al respecto Anacona (2003) menciona:

> … es posible pensar en un trabajo en Historia de las Matemáticas que dé cuenta de los complejos procesos de génesis, evolución y consolidación de una teoría matemática, sin olvidar que estos procesos de construcción se desarrollan en el marco de un contexto sociocultural donde circulan de manera particular concepciones pedagógicas, filosóficas y teológicas, así como políticas educativas, entre otras. (p. 33)

Este pensamiento hace emerger las bases de nuestra investigación, bases fuertes que se originan en:

- Un estudio de la génesis histórica: esto pone en manifiesto los diversos puntos de vista que para un concepto matemático fueron considerados como correctos y posteriormente rechazados o modificados.
- La epistemología: esta ayuda a establecer qué elementos constituyen la significación de un determinado concepto.
- El contexto sociocultural: es allí donde los libros de texto entran en función pedagógica, social y política. En función pedagógica ya que ocupa la transmisión de los saberes básicos, en función social porque contribuye a la inculturación de las jóvenes generaciones y en función política ya que sus contenidos están regulados por poderes públicos.

Dicho contexto socio-cultural es el que enmarca este escrito, debido a que miraremos dentro de ellos, observaremos como están constituidos, en que se diferencian y muchas más características que en la metodología mencionaremos, de por si es importante establecer en cuanto a los libros de texto utilizados en la enseñanza del Álgebra Lineal I en la Universidad Industrial de Santander estos pueden considerarse fuentes primarias como lo afirma (Cardoso,

2000) y documentos de útiles escolares (Berrio, 1976).

Ya adentrándonos a la segunda parte de este artículo, que está enmarcado en lo que Gómez (2003) llama un análisis de los libros de texto que se realizó durante la investigación histórico-epistemológica. Con esto se buscó obtener una imagen de la situación histórica y la actual de la enseñanza del concepto de determinante, basándose en el enfoque que establecen los libros de texto utilizados en la UIS, los cuales fungen como documentos históricos educativos y son reflejo de las prácticas pedagógicas utilizadas actualmente (Berrio, 1976; Gómez, 2003).

Metodología

Los libros fueron dados al autor de este estudio por profesores que ejercen en la mencionada cátedra universitaria, y que a su vez hacen parte del seminario de álgebra lineal de la UIS. Por medio de una solicitud tipo encuesta-informe, en la cual se solicitaba la información del desarrollo del curso de algebra lineal, en dicho informe se debían tener en cuenta los siguientes ítems:

- Distribución de los temas, el número de evaluaciones y su ponderación.
- Texto(s) guía(s) y la bibliografía.
- Temas de los parciales, resultados obtenidos en promedio en cada parcial.
- Enfoques predominantes: Algorítmico, argumentativo, geométrico y/o computacional.
- Dificultades y aciertos detectados.

Para esta ponencia se tiene en cuenta el segundo ítem, el cual enuncia los textos guías. Al mirar los diferentes textos guías que utilizan los maestros se vio que en mayor medida utilizan los siguientes libros:

Tabla 1
Fuentes primarias de los libros de álgebra lineal analizados

Autor	**Titulo**	**Año publicación**
Howard Anton	Introducción al Álgebra Lineal, tercera edición	1976
Stanley Grossman	Álgebra Lineal, quinta edición.	1996
David Poole	Álgebra Lineal Una introducción moderna, tercera edición	2011

Siguiendo a Cardoso (2000), ambos análisis se llevaron cabo de manera interpretativa (hermenéutica), es decir, se intentó reconstruir los hechos históricos entendiéndolos tal como los entendieron los actores, pero aprovechando la perspectiva que nos da estar en el presente para generar nuevos conocimientos.

Cuadro Comparativo De Los Libros De Álgebra Lineal Analizados.

Intentáremos mostrar a nivel muy general las diferencias que se encuentran en los libros Analizados, esto con el fin de ver el enfoque que estos tienen acerca del concepto de determinante, también el ojear con un poco más de información el tratamiento que le dan al concepto de determinante, este cuadro tratará de ser lo más completo posible.

Se establecieron para el cuadro comparativo los siguientes criterios, los cuales se mostrarán los resultados analizados de los primeros cuatro.

1. Contenido: como está organizado el contenido

2. Capítulo sobre determinantes: reconocimiento del capítulo de determinantes
3. Estructura del capítulo de determinantes: como aborda el capítulo de determinantes
4. Otras menciones del concepto de determinante: menciones sobre el determinante fuera del capítulo específico.
5. Referencias históricas: menciones históricas o apartes sobre autores matemáticos.
6. Concepto de determinante: cómo define el determinante
7. Importancia de los teoremas: como se da el tratamiento a los teoremas
8. Teoremas mencionados
9. Representación geométrica: representación geométrica con relación al concepto de determinante
10. Demostraciones: el tratamiento de las demostraciones
11. Matemáticos citados: que matemáticos son mencionados.
12. complementos adicionales: ayudas extras que presenta el libro

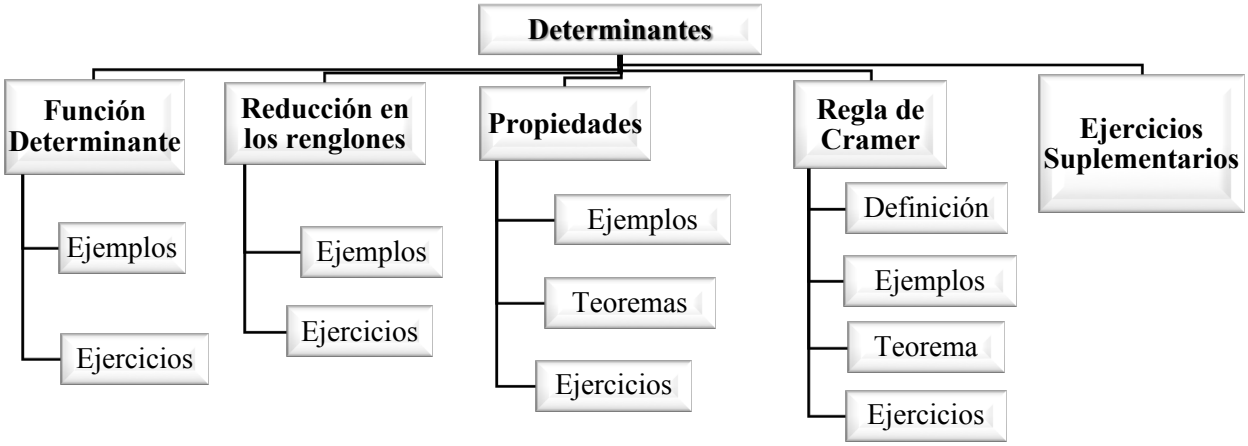
Para la recolección de los datos en los libros mencionados se tenía en cuenta la lista anterior y se iban tomando notas y a partes de lo encontrado en relación a los temas del determinante, todo era organizado en fichas sencillas, las cuales permitían organizar los datos adquiridos para poder formar el cuadro comparativo.

Resultados.

Introducción Al Álgebra Lineal. Howard Anton, Tercera Edición, 1976.

El libro Introducción al Álgebra Lineal de Howard Anton en su tercera edición del año 1976 proporciona un tratamiento elemental de la materia. Dedica el primer capítulo del libro a los sistemas de ecuaciones lineales, y posteriormente, de manera similar a como lo hacen otros libros de texto, dedica un capítulo completo a la presentación del concepto de determinante, sin embargo, existe la particularidad que en el desarrollo del capítulo precedente no se menciona en ningún momento el concepto de determinante.

Cada capítulo tiene una estructura similar a lo que se plantea en la gráfica, sin embargo, cada uno tiene sus particularidades según el tema del que trate. En particular el capítulo dedicado a los determinantes tiene la siguiente estructura:



Esquema 1. Estructura del tema determinantes en el libro.

Álgebra Lineal. Una Introducción Moderna, David Poole, Tercera Edición, 2011.

El libro cuenta con características particulares que lo han convertido en uno de los textos

de álgebra favoritos de los educadores. Los temas que se tratan en el libro son abordados en un lenguaje simple, fácil de comprender por todos, se dan ejemplos y aplicaciones de los teoremas y de los ejercicios propuestos.

Este libro a diferencia de otros similares no dedica un capítulo específico al concepto de determinante, sin embargo, en el apartado 2 del capítulo 4 hace mención extensa del tema e introduce el concepto de determinante contextualizándolo primero en el origen y uso del término.

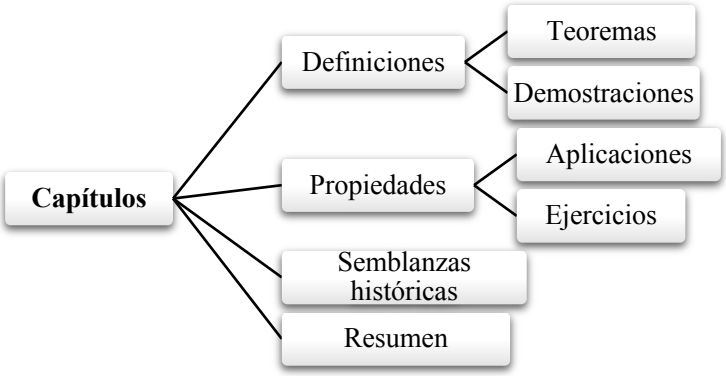
Destaca el hecho de que en el libro comentan que el concepto de determinante se originó dos siglos antes del concepto de matrices a pesar de que actualmente se enseñan de forma inversa.

Álgebra Lineal, Stanley Grossman, Quinta Edición, 1996.

Grossman (1996) quiere hacer accesible el álgebra lineal al mayor número posible de estudiantes en una gran variedad de disciplinas, destacando sus distintas aplicaciones. También quiere reforzar conceptos en aquellos estudiantes que "necesitan solo conocimientos firmes del álgebra correspondiente a la enseñanza media superior" (p. vii).

Al igual que Poole (2011), Grossman considera importante contextualizar algunos conceptos, por eso incluye lo que él llama "semblanzas históricas" dispersas a lo largo del libro.

El libro se encuentra organizado por capítulos y ellos a su vez tienen una estructura en la que presentan el contenido. Tal estructura es similar a la que se muestra a continuación en el esquema 3.



Esquema 3. Estructura de los capítulos

Grossman (1996) dedica un capítulo completo al tema de los determinantes, específicamente el segundo capítulo del libro. Este se presenta tras haber abordado con anterioridad el tema de las ecuaciones lineales y matrices.

Tabla 2
Elementos del cuadro comparativo de los libros de álgebra lineal analizados.

Elementos del Cuadro comparativo de los libros de álgebra lineal analizados.	**Álgebra lineal una introducción moderna David Poole, tercera edición 2011.**	**Introducción al álgebra lineal Howard Anton, tercera edición 1976.**	**Álgebra lineal de Stanley Grossman, quinta edición 1996**

CONTENIDO	Presenta 7 capítulos y 5 apéndices, ninguno de ellos dedicado a determinantes	Consta de 8 capítulos y una sección de respuestas a los ejercicios, de los cuales el 2do capítulo está dedicado a los determinantes	Contiene 6 capítulos y 5 apéndices, adicionalmente consta con un apartado sobre Matlab. El capítulo 2 dedicado a determinantes
CAPÍTULO SOBRE DETERMINANTES	No tiene un capítulo específico dedicado a los determinantes, aborda este concepto en el capítulo de eigenvectores.	Dedica el segundo capítulo del libro a los determinantes, luego de haber abordado los sistemas de ecuaciones lineales y matrices en el capítulo 1.	Dedica el segundo capítulo del libro a los determinantes, luego de haber abordado los sistemas de ecuaciones lineales y matrices en el capítulo 1.
CONCEPTO DE DETERMINANTE	Propone la definición del determinante como la sumatoria (o resta) del producto de los elementos de una matriz de nxn en sus diagonales.	Comprende el determinante como una función que asocia un número real a una matriz dada.	Da exactamente la misma definición de Poole, destacando, al igual que él, que no debe confundirse la notación de determinante con la de valor absoluto, por las barras con que se representa.
ESTRUCTURA DEL CAPÍTULO DETERMINANTES	No tiene capítulo de determinantes	Inicia el capítulo hablando sobre la función determinante, sigue con la explicación de la reducción por renglones, luego las propiedades de los determinantes y finaliza con la regla de Cramer a la que siguen algunos ejercicios suplementarios	Grossman comienza con la definición de determinante a la que sigue las propiedades del mismo luego demostraciones de dos teoremas que considera importantes junto con una semblanza histórica sobre los determinantes a la que le sigue la explicación de determinantes e inversas y finaliza con la explicación de la Regla de Cramer a la cual le sigue un resumen del capítulo junto con unos ejercicios de repaso
OTRAS MENCIONES DEL CONCEPTO DE DETERMINANTE	Solo hace mención al concepto de determinante dentro del capítulo de eigenvectores.	No hace mención en los capítulos precedentes al segundo sobre el concepto de determinante, sin embargo, en el capítulo siguiente dedicado a vectores, en el apartado 3.4 sobre producto vectorial (cruz) usa la notación de determinantes como otra forma de representar la definición.	Es importante mencionar que ya en el capítulo 1 en el apartado de matrices, cuando se está hablando de la inversa de una matriz, se da la primera definición de determinante que presenta el libro, antes del segundo capítulo que es el que dedica específicamente al tema de los determinantes.

TEOREMAS MENCIONADOS	Teorema de expansión de Laplace, Teorema de una matriz triangular, teorema de una matriz cuadrada, teorema de una matriz invertible, teorema del determinante de $(kA) = k ** ndetA,$ teorema de la propiedad conmutativa de los determinantes, Regla de Cramer	Teorema de reducción por renglones, teorema de una matriz triangular, teorema de operaciones elementales sobre renglones de cualquier matriz, teorema de matrices cuadradas del mismo tamaño, teorema de una matriz cuadrada inversible, teorema de una matriz inversible, regla de Cramer	Teorema de una matriz triangular, teorema de una matriz triangular invertible, teorema del área generada por el determinante de A, teorema de la propiedad conmutativa de los determinantes, teorema de la factorización LU de una matriz cuadrada, teorema de una matriz permutación, teorema de la traspuesta de una matriz, teorema básico, teorema de una matriz de nxn invertible, teorema del $detA$ diferente de 0, teorema de una matriz de nxn, teorema de una matriz invertible, teorema resumen, regla de Cramer
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	Este autor habla de vectores antes de profundizar en determinantes, ya que considera que el álgebra lineal se compone esencialmente de vectores y que la comprensión de estos en ciertos escenarios concretos, con la finalidad de obtener la comprensión geométrica necesaria	No hace alusión a la representación geométrica de los determinantes	Incorpora la interpretación geométrica de un determinante de 2x2 por considerar que algunas ideas importantes en el álgebra lineal se observan mejor a través de su interpretación geométrica

Conclusiones y discusiones.

El libro de David Poole tercera edición se enmarca en un énfasis geométrico, el mismo autor detalla que conserva la filosofía del álgebra lineal de vectores subrayando la intuición geométrica. Otra cuestión interesante ya adentrándonos a nuestro tema en particular, los determinantes es que esta versión se introduce el método de condensación de Lewis Carroll.

Otro detalle interesante de mencionar y que ya lo hemos tocado en el cuadro comparativo son los bosquejos biográficos e históricos, el libro de Poole hace varios a partes históricos y biográficos a lo largo de su recorrido, enmarca estos a partes como un "esfuerzo social y cultural, así como científico". También el libro hace apartes etimológicos, para atender el problema de la terminología.

Lo más interesante de mencionar el libro "Introducción al Álgebra Lineal" de Howard Anton es el tratamiento que da a los determinantes, este enfoque guiado por el enfoque clásico de las permutaciones hace del libro de Howard Anton único en su clase. Al hacer un tratamiento del enfoque de permutaciones el autor deslinda el problema de definir el concepto a través de n formas lineales alternantes esto da al estudiante una mejor comprensión, más intuitiva del tema.

En diferencia a los otros libros de álgebra lineal el libro de Grossman inicia el capítulo definiendo la solución de un determinante de orden 2, establece su notación e invita al lector a no confundir la notación del determinante con el valor absoluto. El libro de Grossman al contrario del libro de álgebra lineal de Howard Anton basa su capítulo de determinantes por el método inductivo. Al definir el determinante de orden 3x3 da pautas de cómo resolverlo de forma sencilla y allí entra la primera dificultad no se puede seguir por el mismo método para el determinante de orden 4. Para seguir se hace necesario introducir las definiciones necesarias para manejar el determinante por cofactores y así poder generalizar al determinante de una matriz de nxn.

El enfoque del libro de álgebra lineal de Grossman se guía más por un enfoque orientado a los sistemas de ecuaciones lineales. A la utilización del determinante como una herramienta y no pasa de allí.

Referencias y bibliografía

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. Investigación e innovación en educación matemática, 8(1), pp.30-46.

Anton, H. (1976). *Introducción al Álgebra Lineal (3ra ed.),* México DF, México: Editorial Limusa.

Arboleda, L. (2011). *Los estúdios históricos en educación matemática desde la perspectiva de la práctica docente*. XIII Conferência Interamericana de Educación Matemática. Recife: Universidade federal de Pernambuco.

Berrio, J. (1976). El método histórico de la investigación histórica de la educación. *Revista Española De Pedagogía*, 34(134), pp. 449-475. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/23763481

Cardoso, C. (2000). Introducción al trabajo de la investigación histórica: conocimiento, método e historia (5ta ed.), Barcelona, España: Editorial Crítica, S.L.

Dorier, J.L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton (Ed.), The teaching and learning at university level - an ICMI study (pp. 255-273). Dordrecht, Boston, LOndon: Kluwer Academic Publishers. Recuperado de: https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16848

Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). On a Research Program about the Teaching and Learning of Linear Álgebra in First Year of French Science University. *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology,* (2), pp. 111-137.

Dubinsky, E. (2000). *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (Vol. 8). American Mathematical Soc.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. *Educational studies in Mathematics*, *27*, pp. 267-305.

Gómez, B. (2003). *La investigación histórica en Didáctica de la Matemática.* En Castro, E., Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 79-86). Granada, España: Universidad de Granada.

Grossman, S. (1996). *Álgebra Lineal (5ta edición.)*, Mexico DF, Mexico: Editorial Mc Graw Hill.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal una introducción moderna*, Mexico DF, Mexico: Editorial International Thompson.



Aproximações entre História da Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação: um primeiro exercício

Adriana de **Bortoli**
Faculdade de Tecnologia de São José do Rio Preto
Brasil
adrianadebortoli1@hotmail.com
Zionice Garbelini **Martos Rodrigues**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo- Campus de Birigui
Brasil
zionice@gmail.com
Mário Eduardo Alves **Mari**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo- Campus de Birigui
Brasil
marioeduardomari@gmail.com

Resumo

Este artigo relata parte das nossas investigações que tem a intenção de verificar as aproximações entre duas tendências da Educação Matemática: História da Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação. Nesse texto, discorremos sobre dados coletados por um aluno de graduação do curso de Matemática junto de sua orientadora, cujo objeto de investigação consta do conceito de área no Ensino Fundamental (Ciclo II) e também no Ensino Médio num curso de aprimoramento de professores em exercício do município de Birigui, pelo viés metodológico da História da Matemática a qual foi proposto, um problema contido no papiro *Rhind* (1650 a.C.) de número 48. Em sessões posteriores, foi apresentado um jogo digital que busca desenvolver habilidades para que o usuário do jogo se aproprie de conceitos de matemática de área de figuras planas em uma malha quadriculada. Como resultados, verificamos um interesse maior pela tendência Tecnologias da Informação e Comunicação.

Palavras- chave: História da Matemática. Tecnologias da Informação e Comunicação. Ensino de Matemática. Geometria. Papiro de *Rhind.*

Introdução

Nesse artigo procuraremos dialogar sobre os resultados de nossas pesquisas que estão sendo realizadas a fim de investigar a associação de duas tendências de ensino da Educação Matemática: História da Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação como possibilidade de potencialização do ensino de Matemática.

A primeira autora desse texto tem buscado entender e apresentar os resultados de suas investigações sobre as chances de aliar as duas tendências de ensino.

Em trabalhos realizados atualmente, junto da segunda autora desse texto, tem investigado sobre a inserção da História da Matemática como ferramenta de ensino e aprendizagem de Matemática. Como resultados, dois textos foram produzidos "(Re) encontros de pesquisa em História da Matemática" (no prelo), onde temos um capítulo intitulado: "Potencialidades de um trabalho colaborativo a partir de problematizações históricas; em foco o tema área e perímetros" e será publicado pelo editora da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, e "Uma proposta do uso da história da matemática na formação continuada de professores, uma experiência com professores do interior do estado de são Paulo"**,** que foi apresentado no VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, em novembro de 2018.

As preocupações com ensino e aprendizagem de Matemática decorrem de nossas práticas docentes aliada as informações sobre a avaliações externas como: Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Sistema de Avalição do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e Prova Brasil, que afirmam sobre o fracasso escolar.

Ademais, temos a crença de que é importante um diálogo com quem ensina Matemática como nos informa Fiorentini e Miorim (1990) sobre dois vieses para esse problema: por um lado, o aluno que não consegue entender a Matemática que lhe é transmitida pela escola e; por outro, o professor, que não conseguindo alcançar resultados satisfatórios junto a seus alunos, acaba lotando as salas de aula em cursos, em encontros e em congressos, buscando materiais didáticos que possam resolver os seus problemas em sala de aula.

De acordo com esses indicativos e o cenário educacional a qual estamos inseridas, junto a intenção de um graduando em Matemática, de realizar sua pesquisa que irá resultar no seu trabalho de conclusão de curso, fizemos o contato e elaboramos uma proposta com quatro professores da Escola Estadual Hermínio Cantisani localizada no município de Birigui, a fim de oferecer uma oficina de aprimoramento docente com o uso da História da Matemática e de materiais curriculares educativos em conjunto com a metodologia de Tecnologias da Informação e Comunicação.

Para a realização desse trabalho, o aporte teórico que guiou a pesquisa consta dos textos: "A disciplina histórica da Matemática e a formação do professor de Matemática: dados e circunstâncias de sua implantação na Universidade Estadual Paulista, *campi* de Rio Claro, São José do Rio Preto e Presidente Prudente" (STAMATO, 2003); "A História da Matemática e a Educação Matemática na Formação de Professores (BRITO, 2007) e "A história nos planos de ensino de futuros professores de matemática" (BRITO; SANTOS; TEIXEIRA, 2009). Além é claro, da literatura que discute o uso da Tecnologia da Informação e Comunicação para o ensino e aprendizagem de Matemática.

Metodologia

A pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa aglutinando aspectos da pesquisa-ação, cuja intenção consta de elaboração de atividades na ótica de possíveis ligação entre História da Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação.

Além de produções acadêmicas, em forma de livros, artigos em periódicos e trabalhos em eventos, alguns professores da escola básica, ainda de forma tímida, vêm tornando públicas novas experiências advindas de grupos de estudos, dentre eles os colaborativos.

Desse modo, aliado às recomendações dos documentos curriculares nacionais relativos ao ensino de matemática que destacam a importância de um trabalho colaborativo vamos encaminhar o trabalho por uma das formas de colaboração que é por meio de estudos em grupo.

A colaboração tem vindo a ser reconhecida como uma forma de trabalho fundamental em muitas áreas da educação e em muitos outros campos da atividade social. Ela constitui, cada vez mais, um elemento importante de muitos projetos envolvendo professores ou educadores matemáticos (HARGREAVES, 1998; JAWORSKI, 2001; PETER-KOOP et al., 2003 *apud* PONTE, J. P. SERRAZINA, L., 2003). Hoje em dia, é impensável concretizar uma tarefa ou um projeto com um mínimo de complexidade, sem recorrer aos esforços conjugados de toda uma equipa de trabalho. Na verdade, a colaboração é uma estratégia de grande utilidade para enfrentar problemas ou dificuldades, em especial aqueles que não se afigurem fáceis ou viáveis de resolver de modo puramente individual como os que surgem frequentemente no campo profissional.

É de notar que algumas atividades de colaboração realizam-se entre "pares", ou seja, todos os membros da equipe pertencem a um mesmo grupo (profissional ou outro); outras, envolvem participantes com estatutos profissionais diferentes.

Como referimos, num trabalho de colaboração, existem necessariamente objetivos comuns entre os diversos participantes. No entanto, para além disso, cada um deles tem, como é natural, os seus próprios objetivos individuais. Para a coesão do grupo, é importante que todos os participantes partilhem em grau significativo os objetivos comuns. Mas também é importante que tenham os seus objetivos individuais, ligados à sua função profissional, à sua personalidade, aos seus projetos, pois isso reforça naturalmente o seu envolvimento no trabalho e o seu sentido de realização pessoal.

A pesquisa tem como sujeitos quatro docentes que lecionam Matemática, da Escola Estadual Hermínio Cantizani[1] e propomos a eles cinco encontros que ocorreram com registros de narrativas, a partir de sessões de estudos sobre o tema referido. Durante os encontros fizemos as vídeo-gravações a fim de que pudéssemos analisar em momentos posteriores os frutos dessas atividades, modificando-as a cada novo encontro e refletindo sobre os aspectos teóricos relacionadas à prática docente.

[1] O convite foi realizado a esse grupo de professores da escola citada por serem professores que se apresentam abertos ao diálogo com o Grupo Colaborativo em Educação Matemática (GCEM), em que a segunda proponente desse artigo é líder e já houve uma participação deles em outros eventos de aprimoramento docentes promovidos pelo GCECM.

Como questão dessa investigação buscamos responder: Que relações ocorrem ao usar História da Matemática e Tecnologia da Comunicação e Informação? Uma tendência sobressai a outra?

Desenvolvimento

Programamos cinco encontros ao qual denominaremos de seções de estudo, com quatro professores de uma escola da rede pública paulista, com registros de narrativas, a partir de sessões de estudos sobre o tema referido, que serão descritos brevemente a seguir:

- 1ª Seção: conversa inicial com os professores sobre suas metodologias de trabalho com o conceito em estudo.
- 2ª Seção: caracterização da civilização egípcia e apresentação dos problemas 48 e 50 a partir da tradução do problema apresentado no papiro de *Rhind*, junto das obras de referências clássicas de História da Matemática, como os textos de Boyer e Eves.
- 3ª Seção: nesse encontro havia o interesse de apresentar um material didático (poliminós) que teve como um dos precursores de seu uso o professor Ruy Madsen Barbosa.
- 4ª Seção: atividades relacionadas a pentaminós: coleções didático-pedagógicas de Ruy Madsen Barbosa, discussão e execução das atividades propostas na coleção. Adicionalmente, uma coleção do mesmo assunto, publicada em 1992, por Antonio José Lopes.
- 5ª Seção: jogo associado ao *Geogebra*. Nesse encontro associamos as discussões anteriores ao uso do Geogebra para o trabalho com os pentaminós.

Depois de conhecer as propostas metodológicas dos professores acerca do tema área e perímetro foi apresentado considerações históricas sobre o papiro de *Rhind*, segundo os clássicos textos de história da matemática, como segue:

> Datado de aproximadamente 1650 a.C., consta de um texto matemático na forma de manual prática que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito por Rhind, sendo mais tarde comprado pelo museu britânico (Eves, 2004, p.69).

Outro texto de referência trouxe informações adicionais do documento, que também foram apresentadas aos professores: o papiro de *Rhind*, com sua dimensão cerca de 0,30 metros de altura e de 5 metros de comprimento (BOYER, 2003, p.9), e contendo 85 problemas matemáticos, copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo, em que 10 tratam de geometria. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind.

Uma característica a ser ressaltada sobre esses problemas, 48 e 50, é que eles apresentam um diferencial em relação a outros pelo fato de apresentarem uma ilustração geométrica, conforme podemos observar pela figura 1:

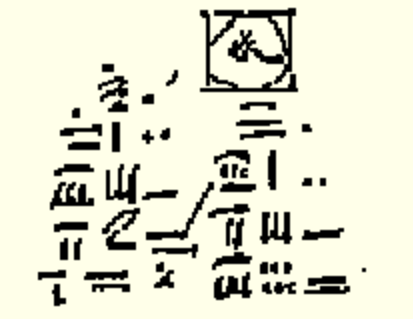


Figura 1: Imagem google, 2018

Ainda durante esse mesmo encontro, foram abordadas questões relacionadas aos modos em que os primeiros registros do conceito de área são tratados nos livros de História da Matemática. Adicionalmente, os professores cursistas tiveram a oportunidade de explanar sobre suas práticas docentes acerca das suas escolhas quanto a forma de como eles trabalham tal conceito em sala de aula. Como resultados, as afirmações do trabalho docente desse grupo de professores apontam por uma escolha de forte intenção pelo caminho de contextualização do conceito, especialmente relacionado a realidade de seus alunos.

Sequencialmente, com o objetivo de relacionar um método historicamente produzido a um formato trabalhado por um educador matemático, apresentamos uma apostila denominada *Poliminós*, na qual traz importantes contribuições para a área de Educação Matemática por destacar um tratamento diferenciado do Poliminós na perspectiva da Educação Matemática. Nessa apostila, seu autor, Ruy Madsen Barboda, menciona o trabalho do professor Antônio José Lopes, retratando um breve histórico do modo como este material chega ao Brasil. Barbosa (2005) propunha aos professores uma possibilidade de trabalhar os assuntos área e perímetro com "pentaminós". Possibilidade essa já apontado nos 1990 pelo professor Antônio José Lopes.

Dado que os professores parceiros já haviam feito curso de capacitação docente pela Secretaria de Educação de Estado na Diretoria de Ensino da cidade de Birigui sobre o uso dos pentaminós, em reunião no grupo de pesquisa, decidiu-se não prosseguir com o planejamento inicial por acreditar que as sessões de estudo poderiam tornar-se repetitivas e redundantes.

Dessa maneira, como um dos autores deste trabalho tinha como objetivo desenvolver um trabalho de pesquisa relacionado a Tecnologia Digitais de Comunicação, o grupo fez a opção por dar continuidade ao manuseio da plataforma Geogebra no tocante ao tema de áreas e perímetros. Consequentemente, em sessões de estudo com os professores da Educação Básica já citados nesse artigo, seguimos com o estudo dos seguintes temas: Criação de projetos; Layout do software; Documentação do Geogebra; Utilização de algumas ferramentas do software. Mais precisamente as que envolvem área e perímetro; Escolha do tipo de polígono iríamos trabalhar e quais ferramentas utilizaremos para a construção dele; Como salvar um projeto local ou online em compartilhamento em grupos de estudos; Pesquisas, download e edição de materiais do site do Geogebra; Criar conta ou realizar *login* no site do Geogebra; Trabalhar com grupos de pesquisa no Geogebra; Compartilhamento de materiais em grupos de pesquisa;

Ao fim da apresentação de todo o conteúdo foi explanado que o roteiro a ser trabalhado seria conhecer a ferramenta Geogebra, utilizá-lo num trabalho *offline* criando um polígono e online por meio de grupos de compartilhamento de materiais.

Considerações Finais

Apresentamos as etapas e os apontamentos iniciais de um projeto ainda em desenvolvimento. Assim, diante dos referidos encontros pudemos perceber que os professores em exercício estão abertos a fazer uso da história da matemática, desde que seja possível um apoio do professor pesquisador no sentido de orientar e de suprir as carências que eles relatam pela falta da disciplina história da matemática em suas formações. No entanto, nessa proposta em específico, não conseguimos alongar a inserção do uso da História da Matemática como ferramenta de ensino, devido as ocorrências já mencionadas.

De outra parte, sobre o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação os professores se mostraram interessados em conhecer e usar o Geogebra e incorporá-lo em suas práticas docentes conforme depoimento de alguns deles.

Entendemos que a devolutiva de um dos participantes do grupo traz aspectos favoráveis a esse tipo de ação de formação, nas palavras de um dos participantes justifica nossa ação de formação. Em suas palavras:

> Minha aproximação com o software Geogebra se deu há cerca de cinco anos. A exploração inicial aconteceu em turmas do ensino médio, na observação das representações gráficas das diversas funções (1ºgrau, 2º grau, exponencial, logarítmica, trigonométrica), como um recurso facilitador das aprendizagens dos alunos por proporcionar uma visualização detalhada de deslocamentos dos diferentes parâmetros e seus impactos. Nesse período, vídeos no youtube me auxiliaram muito como ajuda para eu conhecer o software. Posteriormente, tive a oportunidade de participar de alguns minicursos, que exploravam todo potencial pedagógico do Geogebra em outros conteúdos matemáticos, (áreas, perímetros, geometria espacial, planificações, etc). Nesse sentido, a parceria com o Instituto Federal - Campus Birigui, tem trazido grandes contribuições formativas para nós, professores de Matemática da rede estadual. Digo isso, pois na formação continuada geralmente contempla assuntos gerais e comuns da prática educativa. Oportunizar o aprimoramento específico do conhecimento matemáticos, bem como recursos e estratégias de ensino, é sempre muito enriquecedor, para os educadores, mas em especial, para os alunos. (PARTICIPANTE DO CURSO DE FORMAÇÃO, 2018)

Pela fala dessa participante junto de outras manifestações ocorridas em nossos encontros, observamos certa preferência pelo uso da informática à história da matemática. No entanto, como temos dados iniciais e um grupo pequeno de profesores, não ousamos a afirmação de que uma tendencia de ensino sobressai àc outra, contudo, que junto de outras ações por nós já programadas teremos mais adiante outros indicativos que definam ou delineiam essa questão.

Referências e bibliografia

Alves, F. 2014. *Gamification*: como criar experiências de aprendizagem engajadoras um guia completo-

do conceito à prática. São Paulo; DVS.

Ball, D. L.; Thames, M.H.; Phelps, G. Content for teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, n.59 (5). p.389-407.

Borba, M.C; Silva, R.S.; Gadanidis, G. (2014). *Fases das tecnologias digitais em educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M.C.; Penteado, M. G. (2003). *Informática e Educação Matemática*. 3ªed. Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M.C. Softwares e internet na sala de aula de Matemática. (2010). *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*.

Bortoli, A.; Rodrigues, Z. G. M. (2016). Como fica a avaliação na aprendizagem de matemática quando se trabalha com a tecnologia em informática? *Anais IV Congresso Nacional de Avaliação e Currículo*, Bauru.

Bortoli, A.; Rodrigues, Z. G. M. (2016). *Aplicativos para a aprendizagem de matemática e o uso de vídeo-gravações*. II Congresso Iniciação Científica FATEC Lins.

Boyer, H. (2003). *Introdução à história da matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP.

Brasil, Mec. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental - Matemática*. Brasília: MEC.

Brito, A. J. História da Matemática e da Educação Matemática na Formação de Professores. (2007). *Educação Matemática em Revista*. nº 2, ano 13.

Brito, A. J.; Santos, K. E. S.; Teixeira, M. R. G. (2009). A história nos planos de ensino de futuros professores de matemática. *Horizontes*. v.27, n.1, pp.115 a 120.

Dullius, M.M; Quartieri, T. (org.) (2014). *Explorando a matemática com aplicativos computacionais: anos finais do ensino fundamental.* Lajeado: Univates.

Eves, C.B. (2004). *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher.

Fiorentini, D. (2008). A Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil. *BOLEMA.* Rio Claro (SP), Ano 21, nº 29, pp.43 a 70.

Fiorentini, D. (2009). Quando acadêmicos da universidade e professores da escola básica constituem uma comunidade de prática reflexiva e investigativa. In: *Práticas de formação e pesquisa de professores que ensinam Matemática.* Campinas: Ed. Mercado das Letras.

Fiorentini D. Miorin M. A (1990). Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática. *Boletim da SBEM-SP*, n. 7.

Fiorentini, D; Lorenzator, S. (2007). *Investigação em Educação Matemática:* percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

Franchi, A. et al. (1992). *Geometria no 1º grau: da composição e da decomposição de figuras às fórmulas de área.* São Paulo: CLR Balieiro. (Coleção Ensinando- -aprendendo, Aprendendo Ensinando; 7), 43 p.

Lopes A. J. (1992). Pentaminós Capítulo 2 In**:** FRANCHI, A. et al. *Geometria no 1º grau: da composição e da decomposição de figuras às fórmulas de área.* São Paulo: CLR Balieiro. (Coleção Ensinando- -aprendendo, Aprendendo Ensinando; 7),43 p.

Martos-Rodrigues, Z. M.; Bortoli, A. Potencialidades de um trabalho colaborativo a partir de problematizações históricas : em foco, o tema área e perímetros. In: *(Re) encontros de Pesquisa em História da Educação Matemática***.** Ed UFRN. Natal, 2018. (no prelo).

Miguel, A. (1998). As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos Reforçadores e questionadores. *Zetetiké*, pp. 73 a 105.

Miguel, A. & Brito, A. J. (1996). A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. *Cadernos CEDES - História e Educação Matemática*. Campinas: Papirus, n. 40, pp. 47-61.

Ponte, J. P. Serrazina, L. (2003). Professores e formadores investigam a sua própria prática. O papel da colaboração. *ZETETIQUE.* V.2, n.11. pp.9-55

Robins, G. Shute, C. (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus:* an ancient Egyptian text. London: British Museum Press.

Romanello, L. A.; Maltempi, M. V. (2016). A utilização do smartphone no ensino de função: a visão dos alunos. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo. *Anais XII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2016, p.1-12.

São Paulo (2014-2017). Secretaria de Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo:** Matemática. Caderno do Aluno 5 série/6º ano São Paulo: SEE.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Os diamantes que os garimpeiros não encontraram: histórias da formação dos professores (de Matemática) em uma região de garimpo

Eliete Grasiela Both
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Unesp
Brasil
eliete.both@bag.ifmt.edu.br
Ivete Maria Baraldi
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Unesp
Brasil
ivete.baraldi@unesp.br

Resumo

O presente artigo é um recorte de uma pesquisa de doutoramento que está investigando a formação de professores (de Matemática) em uma região, surgida do garimpo de diamantes, formada pelos seguintes municípios: Araguaiana, Barra do Garças, Pontal do Araguaia e Torixoréu, no estado de Mato Grosso e Aragarças e Baliza, no estado de Goiás. O recorte temporal abrange da década de 1920 (início do garimpo e povoamento urbano no local) à de 1980 (criação da Universidade Federal de Mato Grosso em Barra do Garças). Utilizando a metodologia da História Oral, cotejamos fontes orais, por nós produzidas, e demais fontes disponíveis, construindo narrativas históricas sobre características da Educação Matemática na região citada. Até o momento, realizamos nove entrevistas com professores que atuaram em Aragarças, Araguaiana, Barra do Garças e Torixoréu, e pesquisa documental em algumas escolas. Pelo desenvolvimento destas ações está sendo possível conhecermos aspectos da formação docente no local.

Palavras chave: História Oral, formação docente, região de Barra do Garças.

Introdução: os primeiros diamantes por nós encontrados

Em nossa pesquisa de doutoramento estamos à procura de grandes diamantes que juntos comporão o tesouro que pretendemos formar, nossa tese. Fazendo uma analogia com o garimpo, pois nosso trabalho será desenvolvido em uma região que é oriunda do garimpo de diamantes às margens de dois grandes rios, Garças e Araguaia, nos estados de Goiás e Mato Grosso (Brasil), os diamantes por nós procurados são as histórias sobre a formação dos professores (de Matemática). A região, a qual nos referimos, compreende quatro municípios mato-grossenses e dois municípios goianos e é conhecida pelos moradores locais como região de Barra do Garças.

Durante nossas escavações, antes de encontrarmos os grandes diamantes que tanto desejamos, fomos encontrando outros tantos diamantes que foram nos animando e indicando o caminho para a composição de nosso tesouro. Esses diamantes são os resultados das escavações prévias que realizamos, que nos ambientaram com o cotidiano da garimpagem e nos ajudaram a compreender como devíamos estruturar a busca dos diamantes maiores, que eram nosso principal objetivo.

Para isso, estamos nos valendo da metodologia da História Oral (a qual é um método e também uma perspectiva de pesquisa), por meio da qual constituímos um cotejamento entre as fontes orais, por nós produzidas a partir de entrevistas com professores que ensinaram matemática no período enfocado, com outras fontes documentais e bibliográficas, de modo que seja possível escrever uma história (ou histórias) da formação dos professores (de Matemática), na região de Barra do Garças.

Dessa maneira, queremos esclarecer que a parte do tesouro que aqui apresentamos é um pequeno lote de nossa garimpagem que está sendo desenvolvida, onde queremos mostrar algumas faces dos grandes diamantes já encontrados, ou seja, esboçarmos alguns aspectos que percebermos, até o momento, sobre a formação docente na região.

Nosso Garimpo

Nossa região de garimpagem é formada por seis municípios de emancipação relativamente recente, e características peculiares. Todos se originaram do garimpo de diamantes, sendo que a região nesse período inicial era formada por apenas três municípios, situados às margens dos rios Araguaia e Garças: Araguaiana, que originou Barra do Garças, Torixoréu, do qual se desmembrou Pontal do Araguaia, e Baliza, da qual Aragarças é oriunda (Figura 1).

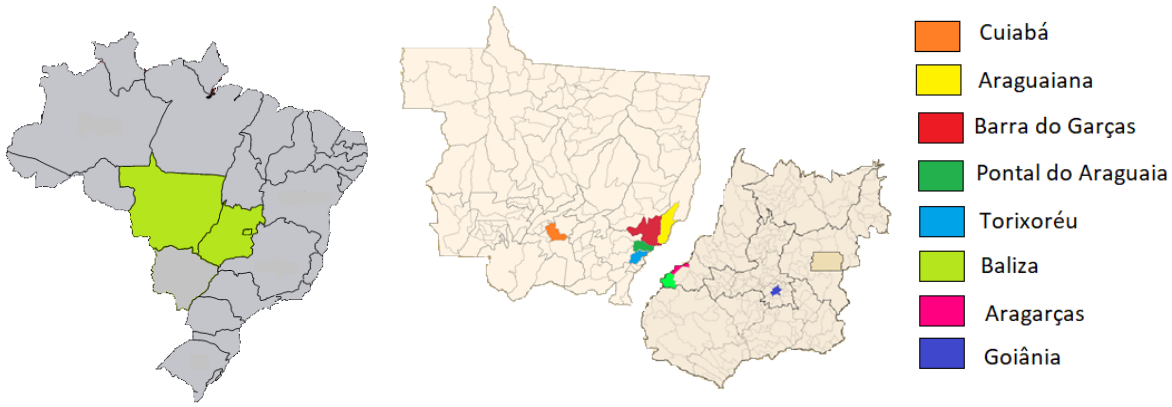


Figura 1. Região da Pesquisa[1].

Conforme Valdon Varjão (2000), historiador regional, a história dessa localidade pode ser dividida em quatro fases principais. A fase garimpeira, que teve seu apogeu de 1924 a 1942, período no qual um grupo de garimpeiros se instalou na região na busca por diamantes, foi a

[1] Os municípios de Cuiabá e Goiânia não participam da pesquisa, mas por serem as capitais dos estados de Mato Grosso e Goiás, respectivamente, estão destacados no mapa como forma de referência de localização.

primeira delas. Esses trabalhadores construíram as primeiras casas e abriram algumas ruas, dando início aos povoados de Barra Cuiabana (atual Barra do Garças) e Barra Goiana (atual Aragarças), em margens opostas dos rios Garças e Araguaia, nos municípios de Araguaiana – MT e Baliza – GO, respectivamente.

A Fundação Brasil Central – FBC assumiu o protagonismo da segunda fase, 1943 a 1964. Conforme Varjão (1980, p.62), nessa época os municípios do oeste goiano e leste mato-grossense, nossa região de estudo, com destaque para Aragarças, foram custeados por essa fundação, a qual foi instituída pelo Ministro João Alberto e instalada em Aragarças em agosto de 1943 e a partir de então "dominou econômica e politicamente o Brasil Central, trazendo um afluxo de progresso e melhoramento à região, importando novos costumes, e até mesmo uma civilização aprimorada".

A terceira fase se refere aos projetos de incentivos fiscais que marcaram o período entre 1965 e 1973. Varjão (2000) relata que os projetos Sudam e Sudeco incentivavam as empresas que se instalavam na região, criando oportunidades de emprego e atraindo grandes grupos financeiros.

A migração e a colonização gaúcha marcam a quarta fase histórica da região, período entre 1974 e 1985. Essa fase

> [...] pode ser considerada o passo decisivo da implantação da agricultura de nível extraordinário. Foram criadas cooperativas para imigrar colonos gaúchos para a região, com o objetivo de implantar a agricultura. Foi introduzida a tecnologia no trabalho da terra, com grandes áreas plantadas. Ao longo dos anos, a pecuária moderna foi sendo introduzida e incentivada. (Varjão, 1985, p.85).

A partir disso, tomando como referência as fases destacadas por Varjão, decidimos o período sobre o qual iríamos nos debruçar em nosso processo de garimpagem: a partir da década de 1920, quando iniciou a fase garimpeira na região de Barra do Garças, implicando no surgimento dos primeiros conglomerados urbanos, até a década de 1980, quando foi instituído um campus da Universidade Federal de Mato Grosso no município de Barra do Garças.

Metodologia: os diamantes que fazem brilhar o caminho

Para o desenvolvimento de nossa garimpagem estamos nos deixando guiar por um tesouro de diamantes valiosíssimos, que nos ajudam a encontrar o caminho na busca do nosso próprio tesouro. Não podemos nos apropriar desses diamantes, pois eles são um tesouro público, mas podemos usufruir de seu brilho e pretendemos ajudar a aumentá-lo.

Esse tesouro é a metodologia de pesquisa na qual nos estruturamos, no caso, estamos nos valendo da metodologia da História Oral. Entendemos que, por meio dela, é possível elaborarmos versões históricas para nosso objeto de pesquisa, com uma amplitude diferenciada, nos valendo dos depoimentos de nossos colaboradores, bem como, de fontes escritas, áudios, vídeos, ou outras que consigamos encontrar. Pretendemos sempre o cotejamento entre tais fontes, pois não as entendemos como opostas, mas como complementares, pois, conforme Albuquerque Jr. (2007, p.230), "haverá sempre um traço de oralidade riscando a escritura e as falas sempre carregarão pedaços de textos". Com os depoimentos, constituímos narrativas que são o suporte para o desenvolvimento da pesquisa e, assim, por meio destas, com o auxílio das demais fontes, é possível analisar nosso foco de interesse. É importante ressaltarmos que não nos

valemos de diversas vertentes buscando uma checagem ou validação de informações e sim como possibilidade de "complementação, esclarecimento, compreensão de perspectivas e possibilidades" (Baraldi, 2003, p. 218).

Ao escolhermos a História Oral não temos uma metodologia "fechada", pois em todo momento a questionamos, avaliamos e testamos, buscando encontrar possibilidades, restrições e respaldo das ações que desenvolvemos, portanto, é "entremeada por reflexões, sistematizações, aproveitamentos e abandonos: uma antropofagia" (Garnica, 2013, p. 35).

Um dos aspectos mais marcantes da História Oral consiste na produção intencional de fontes históricas, por meio das narrativas constituídas a partir das entrevistas. Para a criação dessas fontes foram considerados alguns procedimentos, que iniciaram na escolha do tema, o que levou à busca de bibliografias e leituras relevantes ao desenvolvimento do trabalho, e trouxe, possibilidades de colaboradores, os quais estão sendo escolhidos relativamente ao envolvimento, direto ou indireto, com o objeto de estudo. É prática comum no Grupo de Pesquisa História Oral e Educação Matemática – Ghoem, do qual somos membros, os depoentes serem escolhidos pelo critério de rede, em que um depoente indica nomes de outros possíveis colaboradores, que possam auxiliar no processo de constituição de fontes, em nossa pesquisa, em alguns momentos, estamos nos valendo deste critério também.

Depois da escolha dos possíveis depoentes, fazemos um primeiro contato explicando a pesquisa a ser realizada e solicitamos a colaboração. Análises iniciais do assunto, sobre os colaboradores e acerca do que se pretende com cada um, possibilitaram a elaboração dos roteiros e ofereceram um nível prévio de embasamento no momento das entrevistas. O roteiro, ou os temas norteadores do roteiro, podem ser enviados antes da entrevista àqueles que aceitaram participar, isso auxilia na rememoração, e, ainda, na procura de materiais que possam ser válidos à pesquisa. O roteiro serve como um balizador durante a entrevista, porque embora possam ser realizadas as mesmas perguntas, as entrevistas dificilmente seguem um mesmo rumo, uma vez que o entrevistado é o protagonista da direção que cada uma segue.

Após a realização das entrevistas segue-se o próximo ciclo, a transcrição, que é o registro escrito do que foi gravado em áudio, depois disso, textualizamos a entrevista, momento em que são removidos alguns vícios de linguagem e repetições buscando uma maior homogeneidade do texto, neste momento a ordem cronológica ou temática também pode ser revista, procurando um melhor atendimento ao objeto estudado. É importante que mesmo após algumas falas serem suprimidas, o entrevistado se reconheça na narrativa final. As textualizações são, basicamente, desenvolvidas pelo pesquisador, logo, representam textos repletos de interpretações e vieses, sendo um movimento prévio de análise e diálogo entre entrevistador e depoente.

Finalmente, de posse de ambos os textos, transcrição e textualização, retornamos aos depoentes para que estes possam verificá-los, essa conferência pode se dar apenas pelo entrevistado ou acontecer junto ao pesquisador. Após essa acareação e adotadas as alterações solicitadas, o depoente assina uma carta de cessão que permite, totalmente ou não, a publicação dos dados fornecidos.

Com a conclusão de todos os procedimentos descritos, tem início o último passo, que é a análise formal, propriamente dita, porque entendemos que a produção de informações, somente, não finaliza a pesquisa, devendo ser feito um arremate, uma interpretação do pesquisador, a partir do que se apresenta. Porém, fazer a análise não consiste em tecer julgamentos sobre os depoentes ou testemunhos, nem procurar verdades absolutas ou preencher completamente

lacunas, ela representa uma maneira de desenvolver uma nova narrativa relativa ao tema, partindo, para tanto, dos documentos encontrados, das entrevistas, memórias, presente e passado dos colaboradores e do pesquisador.

Agora que permitimos que o brilho dos diamantes que nos conduzem na busca por nosso tesouro fosse vislumbrado, ainda que de relance, iremos mostrar algumas pequenas faces entre as múltiplas (e talvez infinitas) faces existentes nos diamantes do tesouro que estamos compondo.

Histórias da formação dos professores (de Matemática) na região de estudo: os diamantes que procurávamos

Ainda não conseguimos completar as escavações que nos permitirão alcançar os diamantes tão almejados, mas já nos é possível contemplar o brilho de algumas de suas faces, o que pretendemos mostrar a seguir.

Como falado no início, o tesouro que buscamos são os grandes diamantes que os garimpeiros, pioneiros da região de Barra do Garças, não conseguiram encontrar. Esses diamantes que tanto queremos são as histórias da formação dos professores (de Matemática) que atuaram em nossa região de garimpagem, desde a década de 1920 até a década de 1980.

Para apresentar essas pequenas faces, iniciaremos pela composição estadual. Em Mato Grosso, a formação de professores, em nível superior, teve início tardio, relativamente aos estados brasileiros das regiões Sul e Sudeste. A Escola Normal e a Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (Cades) eram as únicas responsáveis pela formação docente no estado até meados da década de 1960 (Both, 2014). Conforme nossos depoentes, também em Barra do Garças, anteriormente à instalação da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), na década de 1980, a formação docente ficava a cargo da Escola Normal, curso em nível de Magistério ofertado no Instituto Madre Marta Cerutti, uma das escolas pioneiras do município existente ainda hoje.

Em 1970 foi fundada, em Cuiabá, a UFMT e, a partir de meados da mesma década, iniciou-se um movimento de interiorização desta Universidade, cujo objetivo era expandir a formação docente para que os graduados pudessem atuar no cenário educacional mato-grossense. Isso ocorreu com a fundação de campus em municípios que, por algum motivo, eram polos no interior do estado.

Um dos municípios escolhidos foi Barra do Garças, onde foi criado, em 1981, o Centro Pedagógico de Barra do Garças (UFMT, 2015). Essa criação foi regulamentada pela Resolução 13/81, do Conselho Diretor da UFMT, e foram instituídos, pelo artigo 4º da mesma Resolução, três cursos: Licenciatura Curta em Ciências[2], Licenciatura Plena em Letras, e Educação Física, mas o último não chegou a ser ofertado à época (UFMT, 1981).

Esse curso de Licenciatura Curta em Ciências teve ingressos até 1987, momento em que

[2] As Licenciaturas Curtas em Ciências eram cursos voltados à docência de Matemática e Ciências, apenas para o Primeiro Grau, atual Ensino Fundamental II, e duravam dois anos. (UFMT, 1974). Estas foram instituídas com obrigatoriedade, em substituição às Licenciaturas Plenas em Matemática, Física, Química e Biologia, pela Resolução 30/74. (BRASIL, 1974). Quem desejasse lecionar para o Segundo Grau, atual Ensino Médio, deveria cursar uma Habilitação na área específica (Matemática, Física, Química ou Biologia), a qual tinha também duração aproximada de dois anos.

foi convertido em duas Licenciaturas Plenas, em Matemática e em Biologia[3] (UFMT, 2015), conversão regulamentada pela Resolução 09/87 do Conselho Diretor da UFMT. Durante o movimento de transição entre as Licenciaturas Curta e Plena, os dois cursos existiram paralelamente, para que aqueles que iniciaram o curso de Ciências tivessem a oportunidade de concluí-los. Como alternativa, aos alunos que estavam cursando Ciências e quisessem migrar para um dos dois novos cursos, foi permitido fazê-lo sem passarem pelo processo de vestibular.

Após a instalação desse campus da UFMT, conforme Both e Both (2016), a formação de professores na região de Barra do Garças ficou majoritariamente a cargo desta instituição. Em nossa pesquisa de doutorado, estamos estudando a formação dos professores (de Matemática), na mesma região, no período que antecede tal feito, buscando compreender quais eram os processos formativos dos docentes que nela atuavam com a inexistência de oferta de formação, em nível superior, no local. A esse respeito, foi possível observarmos algumas particularidades tanto por meio da pesquisa documental que estamos desenvolvendo, quanto das entrevistas que realizamos.

Uma de nossas garimpagens, a pesquisa documental, foi realizada em algumas escolas da região, entre as quais se destaca a Escola Estadual Coronel Antônio Cristino Cortes, pioneira do município de Barra do Garças, que iniciou seus trabalhos em 1933 de maneira itinerante, ou seja, os professores ministravam aulas aos alunos em suas próprias casas. Esta passou a ter um espaço físico de funcionamento e uma diretora, Teresa Melo Bosaipo, indicada pelo prefeito Ladislau Cristino Cortes, em 1949. A partir disso, recebeu o nome de Escolas Reunidas Coronel Antônio Cristino Cortes. Seu prédio próprio foi construído em 1953, quando passou a ser Grupo Escolar Coronel Antônio Cristino Cortes.

Um meio primordial de garimpagem que faz parte de nossa busca pelo tesouro, é a realização de entrevistas com os professores (de Matemática) que lecionaram em nossa região e período de interesse. Por meio dessas escavações, estamos encontrando diamantes com múltiplas (talvez infinitas) facetas extremamente brilhantes.

Um dos caminhos que escolhemos garimpar nos levou ao professor Condeliz, que atuou mais efetivamente no município de Aragarças, Goiás, e sempre lecionou sem a formação específica exigida, à época o Curso Normal. Ele possui os cursos de Técnico em Máquinas e Motores, Técnico em Desenho Mecânico e Técnico em Contabilidade, mas estes não o habilitavam para exercer a docência. Chegou em Aragarças, em 1981, e foi convidado a lecionar no estado de Goiás, prestou uma prova para tal, mas, por não ter o curso Normal, pode concorrer somente para professor do Jardim de Infância[4]. No entanto, como a escola estava sem professor de Física e Matemática para lecionar no Ginásio[5] e Segundo Grau[6], foi contratado para o cargo, sob a responsabilidade da diretora perante a Secretaria de Educação do Estado. Ele cursou dois anos de Licenciatura em Matemática, mas, por problemas de saúde, acabou desistindo do curso.

Outra garimpagem nos apresentou à professora Enói, de Barra do Garças, que lecionou

[3] O Conselho Federal de Educação (CFE), através da Resolução 05/78, revogou a obrigatoriedade de conversão de todos os cursos de formação de professores das áreas de Matemática, Física, Química e Biologia, para Licenciatura Curta em Ciências. (BRASIL, 1978). Desse modo, retornaram, progressivamente, as ofertas das Licenciaturas Plenas nas áreas específicas.
[4] Nível correspondente à Educação Infantil.
[5] Atual ensino Fundamental II.
[6] Atual Ensino Médio.

exclusivamente de primeira à quarta série do Primário[7], nível de ensino em que ministrava todas as disciplinas. Sobre a formação disponível na região em sua juventude, lembra que as opções de Segundo Grau eram Técnico em Contabilidade e o curso Normal. Tendo ela optado pelo último, começou a lecionar antes mesmo de concluir o curso. Lecionou por quinze anos apenas com essa formação, depois disso cursou Pedagogia, na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Jales, no município de Jales, estado d e São Paulo, curso em que os alunos permaneciam duas semanas, a cada dois meses, na sede da Universidade e o restante do tempo em suas próprias cidades.

Uma terceira escavação nos permitiu encontrarmos o professor Wanderlei, que reside no município de Aragarças e atuou durante toda sua carreira tanto ali quanto em Barra do Garças. Cursou Escola Normal, no município de São José do Rio Preto, estado de São Paulo, no Instituto Estadual de Educação Monsenhor Gonçalves. Não chegou a cursar graduação, tendo lecionado Matemática e outras disciplinas durante toda a carreira com os conhecimentos obtidos no curso Normal.

A quarta garimpagem nos apresentou duas professoras de Torixoréu. A primeira, professora Terezinha, começou a lecionar apenas com o curso Técnico em Contabilidade, mais tarde cursou o Magistério no próprio município, na Escola Estadual Arthur da Costa e Silva. Lecionou, durante quase toda a carreira, apenas com o Magistério. Quando estava prestes a se aposentar, cursou Pedagogia, em um curso de férias pelas Faculdades Unidas do Vale do Araguaia (Univar), em Barra do Garças. Foi professora de diversas disciplinas para o Primário, Ginásio e Segundo Grau, e de Matemática para a quinta e sexta série do Ginásio.

A segunda, professora Lenir, começou lecionar aos 15 anos, quando possuía somente o Primário. Cursou o Ginásio e mais tarde o Segundo Grau em Técnico em Contabilidade, durante os quais lecionava às séries anteriores à que estava cursando. Lecionou Matemática a todos os níveis do ensino básico. Depois de vários anos na docência, cursou Licenciatura Curta em Pedagogia, modalidade Parcelada, em Barra do Garças, curso ofertado pela Universidade Estadual de Mato Grosso (UEMT), no período do Mato Grosso Uno. Referências a esse curso haviam surgido na pesquisa documental realizada nas escolas e, também, na pesquisa de Gonzales (2017). Ainda não dispomos de maiores informações, mas estamos atentas a ele em nossa pesquisa. Mais tarde a depoente cursou a complementação para Licenciatura Plena em Pedagogia na Faculdade Auxillium de Lins, no município de Lins, estado de São Paulo.

Ainda estamos em processo de constituição de nosso tesouro. Mas já nos foi possível perceber que os diamantes que estamos encontrando são de grandes quilates, portanto, de altíssimo valor. Nosso tesouro tem grande potencial de exploração e composição de joias valiosíssimas, com múltiplas e infinitas combinações. Nesse sentido, até o momento, nos foi possível perceber que, assim como em outros trabalhos do Grupo de História Oral e Educação Matemática - Ghoem, grupo de pesquisa interinstitucional do qual participamos, em diversas regiões, devido a carência de formação específica, em nível superior, os docentes que atuavam na região de Barra do Garças, em nosso período de interesse, exerceram a profissão, em sua grande maioria, sem formações específicas. A garimpagem está em fase inicial e com certeza muitas outras faces dos diamantes que já visualizamos, dados acerca da formação dos professores que ensinavam matemática na região de Barra do Garças, ainda irão se mostrar em momentos futuros.

[7] Atual Ensino Fundamental I.

Referências e bibliografia

Albuquerque Jr, D. M. (2007) *História:* a arte de inventar o passado. Bauru, SP: Edusc.

Baraldi, I. M. (2003) *Retraços da educação matemática na região de Bauru (SP):* uma história em construção. 2003. 241f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Both, B. C. (2014) *Sobre a formação de professores de matemática em Cuiabá – MT (1960-1980)*. 402f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Both, E.G.; Both, B.C. (2016) Um Olhar sobre a formação de professores de Matemática na região do Médio Araguaia mato-grossense. In: *Encontro Nacional de Educação Matemática*, XII ENEM, São Paulo, 2016. Anais... São Paulo – SP.

Brasil. (1974, julhor) *Resolução nº 30*, de 11 de julho de 1974. Dispõe sobre o curso de licenciatura de Ciências e fixa o respectivo currículo mínimo. Conselho Federal de Educação. Disponibilizada pelo Departamento de Matemática da UFMT de Cuiabá.

Brasil. (1978, junho) *Resolução nº 5*, de 15 de junho de 1978. Adia o prazo estabelecido pela Resolução nº 37/75 e para a obrigatoriedade da conversão em Ciências nos moldes da Resolução nº 30/74. Conselho Federal de Educação. Documenta, Brasília, (211).

Garnica, A. V. M. (2013) *Cartografias contemporâneas:* mapa e mapeamento como metáforas para a pesquisa sobre a formação de professores de Matemática. Alexandria- Revista de Educação em Ciências e Tecnologia. Florianópolis, (6), n.1, 35 – 60.

Gonzales, K. G. (2017) *Formar Professores que Ensinam Matemática:* uma história do movimento das Licenciaturas Parceladas no Mato Grosso Do Sul. 2017. 534 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru.

UFMT - Universidade Federal de Mato Grosso. (1974, dezembro) *Resolução do Conselho Diretor nº 82*, de 02 de dezembro de 1974. Cuiabá – MT. Disponível em: <http://sistemas.ufmt.br/ufmt.resolucao/OpenResolucao.aspx?resolucaoUID=579&ano=1974&tipoUID=1 >. Acesso em: 23 mar. 2014.

UFMT - Universidade Federal de Mato Grosso. (1981, janeiro) *Resolução do Conselho Diretor nº 13*, de 27 de janeiro de 1981. Cuiabá – MT. Disponível em: <http://sistemas.ufmt.br/ufmt.resolucao/OpenResolucao.aspx?resolucaoUID=1108&ano=1981&tipoUID=1>. Acesso em: 12 abr. 2015.

UFMT – Universidade Federal de Mato Grosso. (2015) *Campus Universitário do Araguaia - UFMT*: histórico. Barra do Garças. Disponível em: <http://araguaia.ufmt.br/?pg=historico>. Acesso em: 12 abr. 2015.

Varjão, V. (1980) *Barra do Garças no Passado*. Brasília: [s.n.].

Varjão, V. (1985) *Barra do Garças:* Migalhas de sua História. Brasília: Senado Federal, Centro Gráfico.

Varjão, V. (2000) *Janela do Tempo:* Homenagem ao passado. Barra do Garças: [s.n.].

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tratado de Aritmética Elemental (Indalecio Liévano, 1856): un texto con mucho que enseñarnos

Gilberto **Obando** Zapata
Universidad de Antioquia
Colombia
gilberto.obando@udea.edu.co

Resumen

El libro *Tratado de Aritmética Elemental*, de Indalecio Liévano, 1856, es uno de los primeros libros de matemáticas que se escribió en la naciente república de Colombia. Tenía por objeto la enseñanza de los fundamentos de la aritmética, y se apartó de la tradición euclidiana de presentación de la aritmética, muy común en la época (aunque no del todo). Esta separación se puede identificar en la presentación de los números a partir de las cantidades (magnitudes) y sus medidas, de la distinción entre cantidades continuas y discretas (fundamentadas nociones topológicas de los números), y por la forma en que se realiza un tratamiento del infinito matemático. Sus ideas pueden definirse como novedosas en su momento, y, pueden mostrarnos un camino no explorado en la actualidad para la enseñanza del número a lo largo de la educación básica. Algunas de estas lecciones son exploradas en este artículo.

Palabras clave: historia de las matemáticas en Colombia, historia del número, historia de textos escolares, aritmética elemental, pensamiento numérico.

Introducción

El presente artículo aborda el análisis de un libro de texto publicado en Colombia a mediados del siglo XIX, de gran valor no solo matemático, sino histórico y pedagógico. Se trata del *Tratado de Aritmética Elemental*, de Indalecio Liévano (1856). El valor histórico debe entenderse en el marco de una república naciente (luego de las batallas de liberación contra los españoles, siendo la del puente de Boyacá, en agosto de 1819, una de las más importantes) que buscaba proyectarse en el mundo moderno del desarrollo industrial, pero que tiene que luchar con siglos de atraso producto de la colonización española.

Liévano es parte de una élite de ciudadanos que se forman como ingenieros matemáticos, y qué, por su posición social pueden ocupar altos cargos del estado, desde dónde inciden en el desarrollo social y político del estado naciente. La figura 1 muestra un fragmento tomado de la dedicatoria que el autor hace a su maestro, Lino de Pombo, dónde se dejan ver los intereses políticos de una obra que tiene por objeto brindar una formación matemática a los futuros ciudadanos de la república naciente. En este mismo fragmento (figura 1) se pueden ver las intenciones pedagógicas: *formar en matemáticas, para engrandecer la Patria*. Pero esta intención pedagógica se puede ver con más claridad en el primer párrafo del prólogo (ver figura 2), donde el autor habla de las limitaciones que se tienen en el momento para el aprendizaje de las matemáticas superiores, derivadas de los escasos conocimientos en los fundamentos de la aritmética (aquí se refiere a la escasa formación en aritmética que se daba en los primeros años de escolaridad de los niños y jóvenes, en las escuelas elementales). Adicionalmente, es de llamar

la atención como el autor, al final del párrafo, expresa que la forma de presentar estos fundamentos de la aritmética no sigue la manera tradicional de hacerlo en el momento. Por supuesto, Liévano es consciente de las posibles dificultades en el aprendizaje de los estudiantes, derivadas de su forma de presentación de la aritmética y sus posibilidades de ser enseñada.

Así, en lo que sigue se analizarán algunos apartados del libro de Indalecio Liévano, buscando mostrar las diferencias sustanciales de la forma de presentación de la aritmética de la cual él habla en su prólogo, pero a la vez, analizando cómo este entramado conceptual responde a una intencionalidad pedagógica y no solo matemática.

¿De qué modo podria yo corresponder a las distinguidas consideraciones con que me habeis estimulado al estudio de esta ciencia tan importante? ¿De qué modo corresponder por mi parte a vuestro ardiente celo en la enseñanza de ella, i a vuestros vehementes deseos de trasmitir a la juventud los vastos conocimientos que poseeis, contribuyendo de tal modo, el mas eficaz sin duda, al progreso i engrandecimiento de nuestra Patria? A estas preguntas que hace tiempo me dirijo a mí mismo, no he vacilado en responder siempre: "coadyuvando su celo patriótico, satisfaciendo sus filantrópicos deseos, imitando su ejemplo."

Cumplir con estos preceptos de mi gratitud ácia vos i de mi amor a la República, tales son hoi los objetos de todos mis esfuerzos.

Figura 1. Dedicatoria al profesor Lino de Pombo (Liévano, 1856, p. 4)

Sobre el análisis histórico

En el presente trabajo, en la línea de la Historia y la Educación matemática, hemos indagado por las prácticas matemáticas (Obando, 2015) en un momento histórico específico de la historia de la educación matemática en Colombia.

Así, con Obando (2015, citando a Ferreirós (2010) y Kitcher (1984)), se asume que las prácticas matemáticas caracterizan la actividad de las personas de una época y lugar en función de la manera como interrelacionan diversidad de lenguajes (lenguaje natural, expresiones técnicas, medios simbólicos, etc.), de formas de enunciar (proposiciones, teoremas, afirmaciones, etc.), de métodos y formas de razonamiento, y de problemas por resolver. Todos estos elementos en su conjunto, en las personas y en las comunidades, toman forma en, a la vez que moldean, la acción matemática específica de los sujetos. Igualmente, con Obando (2015, citando a Jankvist and Kjeldsen (2010), Epple (2004)), se reconoce en esta noción de práctica matemática la idea de configuración epistémica, la cual refieren al conjunto de recursos intelectuales disponibles en un episodio histórico específico, y que determinan el curso de la actividad matemática de un matemático o grupo de matemáticos en esa época y lugar.

Desde la anterior noción de práctica matemática, se busca desde la historia de las matemáticas lecciones pedagógicas que permitan: (1) orientar los procesos de estudio de los estudiantes, (2) mejorar la comprensión de los objetos de conocimiento que se pretende enseñar y (3) tener mejores elementos en la comprensión de lo que hacen los estudiantes. (Obando 2015, citando a Mosvold, Jakobsen, and Jankvist (2014)). De esta forma, se espera, como dice Vasco (1995), identificar sobre la base de los acontecimientos del ayer, fuentes heurísticas para planificar los eventos de aprendizaje de las escuelas del mañana.

Estructura del Texto analizado

El libro *Tratado de Aritmética Elemental*, de Indalecio Liévano (1856), se estructura en dos partes, la primera, dedicada a presentar los conceptos fundamentales de los números y sus operaciones básicas, y la segunda, dedicada a la potenciación y radicación, y las razones y proporciones, con algunas aplicaciones comerciales. Cada parte se encuentra organizada en lecciones (7 lecciones en la primera y 4 en la segunda).

A lo largo de toda la obra se percibe un esfuerzo por mostrar las nociones intuitivas desde las que se fundamentan los conceptos de la aritmética, pero a su vez, de realizar una presentación rigurosa basada en axiomas y teoremas, con sus respectivas demostraciones. Es así que la lección primera es dedicada a presentar un conjunto básico de definiciones sobre los números, la notación y las operaciones. Las lecciones segunda y tercera se dedican a presentar las reglas para efectuar las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). La cuarta lección se dedica a cuestiones relacionadas con los números y sus propiedades, en lo que en palabras modernas podemos llamar nociones básicas de teoría de números. La lección V, retoma las operaciones de la aritmética, pero ahora extendiendo lo formulado para los números enteros (en lenguaje moderno los números naturales), a los números quebrados y fraccionarios (léase, en palabras modernas, números racionales). La lección VI es dedicada a las aplicaciones de los números quebrados y fraccionarios a diferentes tipos de problemas, sobre todo, problemas comerciales de pesos y medidas. La lección VII es dedicada a la presentación del sistema de numeración decimal y, en palabras del autor, la presentación de un nuevo sistema de pesos y medidas (sistema métrico decimal).

Cuando hice el estudio de los ramos superiores de las Matemáticas, en el Colejio militar de Bogotá, con los mui distinguidos Profesores Lino de Pombo i Aimé Bergeron, me convencí prácticamente de que los mas grandes i numerosos obstáculos que se presentan para hacer rápidos progresos en dichos estudios, dependen precisamente de escasos conocimientos en Aritmética, o en otros términos, de ignorancia en los principios i propiedades de los números que son del dominio de la Aritmética. Por esta razon tuve inmediatamente la idea de formar un plan de esposicion rigurosa de la naturaleza de las seis operaciones de la Aritmética i de las principales propiedades de los números, i a precio de muchísimos esfuerzos lo encontré; pero enteramente diferente del rumbo ordinario seguido por todos los autores i, tal vez, algo difícil para trasmitirlo a jóvenes no mui dotados por la naturaleza para estos estudios; por lo que no lo he seguido con entusiasmo.

Figura 2. Fragmento del prólogo (Liévano, 1856, p. 5)

Primera lección: el concepto de número

En el numeral 2 lee: "se da el nombre de *cantidad* o *magnitud*, a todo lo que es algo i ilimitado; se denomina *cero* a la carencia absoluta de todo lo que es algo […] Son cantidades las líneas, las superficies, los espacios, el tiempo, la fuerza, el valor […]"[1] (p. 8). Más adelante, en el numeral 5 de la página 9 se lee:

> Se llama *unidad* una cantidad que se toma arbitrariamente, o que se elije para espresar en valores de ella (mediante el número) las diferentes magnitudes de su naturaleza […] Se llama número el resultado de la comparacion de una cantidad cualquiera con la unidad. (p. 9)

En estos dos fragmentos se puede comprender por qué el autor declara en el prólogo que su presentación de la aritmética se aparta de la forma usual: los textos de aritmética de finales del siglo XVIII, y comienzos del XIX seguían la tradición euclidiana, reproduciendo muy de cerca la organización del libro VII de los Elementos (Euclid, 1908), en dónde el número es considerado como una colección de unidades, y la unidad, la mónada, no es considerada en esencia, un número. En este sentido, la idea de número sobre la que se encuentra organizado este texto es

[1] En las citas textuales del autor, se ha conservado la grafía original, y, por lo tanto, lo que parecen faltas de redacción u ortografía son las formas adecuadas de escribir en la época.

más cercana a la idea de número en Newton, que a la idea de número en Euclides.[2]

Este énfasis en la noción de magnitud, se puede ver igualmente en la forma como el autor define las magnitudes continuas y las discretas (ver figura 3): Nótese en primer lugar, la idea de cantidad, que está al final del fragmento: aquello que puede ser objeto de aumento o disminución. Esta es una apuesta Aristotélica sobre la noción de cantidad y, en ese sentido, sigue la línea de los autores clásicos del momento, pero, en lo que si toma distancia es en las definiciones de cantidades continuas y discretas. Al plantearse la necesidad de distinguir las cantidades continuas de las discretas se pone en un lugar de vanguardia, pues el problema de la continuidad era precisamente uno de los asuntos centrales de los matemáticos europeos del momento, a raíz de los trabajos de Bolzano sobre lo que hoy conocemos como el *falso teorema de Cauchy*. En la definición de cantidades continuas, se puede ver una noción de lo que modernamente llamamos la *densidad de los elementos de un sistema* (hoy sabemos que no es suficiente con la idea de densidad para definir la continuidad). Por su parte, la definición de cantidades discretas se fundamenta en una de las propiedades de los sistemas discretos, a saber, la existencia de cantidades tales que, entre ellas, o no existe ninguna otra cantidad de la misma naturaleza, o existe un número finito de ellas. En ambos casos, la manera cómo define la naturaleza de lo continuo y lo discreto, se basa en las propiedades topológicas de los sistemas numéricos (por supuesto, es una expresión en términos modernos, no explícita en el lenguaje del autor), lo cual está en la base de las nociones modernas del número real, tal como lo mostraron Cantor (1915) o Dedekind (1927), *solo que Liévano lo hace 30 años antes de los trabajos clásicos de dichos autores*. Estas aproximaciones implican una profunda reflexión sobre la naturaleza del número, y, sobre todo, en lo que se puede enunciar como la naturaleza, la esencia del número, muy en el sentido expresado por Dedekind (1930) en la introducción de su trabajo *Qué son y para qué sirven los números*.

En resúmen : diremos que la cantidad se divide en contínua i discreta, i que :

1.º Se llama cantidad *contínua* a la de especie tal, que una magnitud cualquiera tiene siempre otra menor, i que entre dos magnitudes diferentes cualesquiera, hai siempre una infinidad de magnitudes comprendidas. Se verifica, pues, que la cantidad continua puede crecer i decrecer indefinidamente.

2.º Se llama cantidad *discreta* a la de especie tal, que tiene alguna magnitud que no tiene otra menor, i que entre dos magnitudes cualesquiera, no hai sino ciertas i determinadas magnitudes comprendidas. Se verifica, pues, que la cantidad discreta solo puede crecer indefinidamente.

Se llaman *Matemáticas* las ciencias que hacen el estudio de la cantidad, tomada esta en su mayor abstraccion ; es decir, no considerándole mas atributo que el de ser susceptible de aumentar o disminuir.

Figura 3. Fragmento en el que se muestran las definiciones de cantidades *continuas* y *discretas*. (Liévano, 1856, p. 8)

Finalmente, resta ver cómo esta idea de cantidad, de magnitud, se usa para mostrar que todo número emerge de la medida de cantidades:

> Es mui fácil hacer ver que no puede haber mas de estas tres especies de números; pues para esto basta el proponerse, de una manera jeneral, la cuestion de medir con la unidad una cantidad que sea conmensurable con ella, i proceder por cada uno de los dos métodos indicados. Así, si procediéramos por el primer método, dividiríamos la cuestión en los tres casos siguientes: 1° Que la unidad sea magnitud alícuota de la cantidad propuesta, i se

[2] Newton, en su libro *Aritmética Univesalis*, define el número como: "por número entenderemos no tanto la Multitud de Unidades, sino la *Razón* de cualquier Cantidad, con respecto a otra Cantidad del mismo Tipo, la cual es tomada como Unidad" (Newton, 1720)

> tendria el número *entero;* 2° Que la cantidad sea menor que la unidad, i se tendría cero unidades i una fraccion, es decir, la *fraccion*; i 3° Que siendo la cantidad mayor que la unidad, no sea esta parte alícuota de aquella, i se tendría el numero *fraccionario.* Ahora, si en cualquiera de los tres casos que acabamos de considerar, i que los comprenden todos, procedemos por el segundo método, es decir, procedemos a espresar la cantidad por un solo conjunto de partes alícuotas iguales de la unidad, tendremos el número que lleva el nombre jeneral de *quebrado,* i que se divide en impropio i propio (Liévano, 1856, p. 10).

En la anterior cita, la noción de parte alícuota se entiende en el sentido euclidiano del término: aquella cantidad que por ser contenida un número exacto de veces en otra cantidad, entonces es la *n-ésima* parte de aquella (lo cual, en lenguaje moderno no es más que la relación de equivalencia: $y = nx$ si y solo si $x = \frac{1}{n}y$). De otro lado, la fracción es entendida por el autor como la repetición de cierto número de partes alícuotas de la unidad, hasta completar la cantidad dada (es decir, en lenguaje moderno, la fracción $\frac{m}{n}$ se interpreta como $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m-veces}$). Por supuesto, estas ideas son mucho más potentes para comprender el número racional, que las actuales aproximaciones en los textos escolares basados en partir, contar y colorear partes de una unidad (ver Obando, 2015, 2003). El potencial radica en que se basan en medir, comparar medidas (establecer razones entre cantidades), y, por ende, todos los números tienen origen en el mismo tipo de actividad. Nótese que la actual aproximación escolar a los números, basada en los conjuntos, hace que lo aprendido sobre los naturales no pueda ser trasladado al aprendizaje de los enteros, o los racionales, y mucho menos, a los reales.

Lección VII: el sistema de numeración decimal

La lección VII inicia con una discusión amplia sobre la forma de extender el sistema de numeración decimal para expresar cantidades que no sean enteras, relacionando las cifras que quedan a la derecha de la coma, con fracciones que tiene por denominador una potencia de 10. Dedica una buena cantidad de páginas a las reglas del sistema de numeración decimal, a la forma de realizar conversión entre la notación fraccionaria y la notación decimal, y las reglas de las operaciones en el sistema de numeración decimal, lo cual se hace enfatizando que son las mismas reglas de las operaciones con números enteros (naturales en lenguaje moderno): "107: S*e deberán seguir exactamente las mimas reglas establecidas para los números enteros*" (Liévano, 1856, p. 83, cursiva en el original).

Es importante notar que este énfasis en el sistema de numeración decimal no es tanto por introducir otra forma de escribir y operar con los números, sino por el interés de presentar los nuevos sistemas de pesos y medidas, a saber, sistemas decimales de medidas para medir la longitud, el área, el volumen, la capacidad, el peso y el valor (el dinero). Para el autor es claro que una de las ventajas de los sistemas decimales para los pesos y medidas es que las reglas de las operaciones se hacen de igual manera como se calcula con los números:

> 120: *Conclusión*. –El cálculo de las medidas i pesas métricas debe hacerse, por los números decimales; porque dichas medidas i pesas siguen la lei decimal. I cuando se hagan aplicaciones debe suspenderse el cálculo en las unidades, que con arreglo a la cuestión, los errores que resulten sean despreciables, teniendo si el cuidado (n° 117) de que el error cometido sea menor que la media unidad decimal […] (Liévano, 1856, p 95, cursiva en el original)

Es importante notar entonces que, para una época en la que los sistemas metrológicos

decimales apenas se estaban posicionando en el mundo, este tipo de planteamientos son ampliamente novedosos, sin dejar de lado las consideraciones que, en el país, ya era oficial el uso de tales de sistemas de pesos y medidas, gracias a la influencia política de Lino de Pombo (maestro del Indalecio Liévano).

Para finalizar, es de especial interés la discusión presentada por el autor sobre "los números inconmensurables" (página 90 y siguientes): los números irracionales (números inconmensurables en palabras del autor) se presentan como una construcción sobre la base de sucesiones de números racionales (fraccionarios y quebrados, en palabras del autor) que tienden al número inconmensurable dado, lo que le permite extender las propiedades ya estudiadas en los racionales, a los reales (números inconmensurables). La idea es simple: se analizan los casos de los decimales infinitos periódicos, mostrando que, si el periodo a partir de una cifra decimal es 9, entonces esa parte del número es igual a una unidad de la fracción decimal a la cifra anterior al inicio del periodo (por ejemplo, en palabras del autor, 7,52999…=7353). Luego afirma que, si el periodo es diferente de 9, esta parte del número no alcanza a completar la unidad anterior al inicio del periodo. Con este principio, demuestra por contradicción que, si el decimal no es periódico, entonces no puede expresarse por un número quebrado. Al final de dicha demostración se lee: "Luego *la cantidad representada por el número decimal ilimitado i no periódico* (puesto que no puede espresarse esactamente por ningún quebrado) *no tendrá parte alícuota común con la unidad i será por tanto no* (n° 3) *conmensurable con ella*" (Liévano, 1856, p. 91, cursiva en el original). Con estas ideas entonces procede a expresar que si bien los números inconmensurables no se pueden expresar con un número decimal, se pueden aproximar tanto como se quiera por números quebrados (en sus palabras "se puede obtener un quebrado que la represente con un error menor que cualquier magnitud dada" (p 91)), iterando este proceso tanto como necesitemos (en lenguaje moderno, aproximar un irracional por una sucesión de racionales) se puede obtener una expresión para el número inconmensurable dado.

> […] sin embargo, si se puede obtener un quebrado que la represente con un error menor que cualquier magnitud dada. Para esto dividiremos la unidad en un número tan grande de partes iguales que cada parte sea menor que la magnitud dada (*); i entonces el quebrado que tiene por numerador el número de veces que esta pequeña parte cabe en la cantidad, i por denominador el número de partes en que se ha dividido la unidad, satisface a la condición requerida. Si ahora queremos aproximarnos más, valuaremos con un cierto error la parte inconmensurable que nos queda, i agregamos este nuevo número al número primitivo; i si esta serie de operaciones se supone prolongada indefinidamente, puede considerarse la cantidad espresada esactamente por la suma de una infinidad de números. Llamaremos número *inconmesurable* a la espresión esacta de una cantidad inconmensurable con la unidad (Liévano, 1856, p 91, cursiva en el original).

De la anterior cita, se debe notar, además, la definición de número inconmesurable (número irracional) al final de la misma: es claro que no hay un número racional para expresarlo, pero el procedimiento definido lo objetiva como una cantidad con las mismas propiedades del número racional. Esta idea de que estas cantidades son igualmente números, queda clara en la frase al inicio del numeral 116: "Pasamos ahora a hacer estensivas al número inconmensurable; las propiedades jenerales del número conmensurable." Liévano, 1856, p 91). Así objetiva las nuevas entidades como números. Este procedimiento es novedoso en la época (y anticipado a las soluciones dadas en Europa), y se basa en una idea potente (que se hará visible en los trabajos de Cantor y Dedekind): *construir los reales a partir de los racionales, y extender las propiedades demostradas en dicho sistema, al nuevo sistema, con lo cual adquieren el mismo sentido*

numérico del sistema de origen.

Esta aproximación a los números reales cierra con el teorema demostrado en la página 132 (en esencia, un parafraseo de la definición 5, del libro V de los elementos de Euclides):

> *150. TEOREMA Siempre que se tengan dos especies de cantidades tales, que para cada valor particular i creciente de la una, corresponda un valor particular i creciente de la otra; i está en la naturaleza de estas variaciones el corresponder para un múltiplo cualquiera de la primera el, mismo múltiplo de la segunda* i estas dos cantidades gozan de la propiedad de que *dos órdenes de magnitud cualesquiera de la primera, guardan la misma relación que los correspondientes ordenes de magnitud de la segunda.* (Liévano, 1856, p 132, cursiva en el original).

La demostración del anterior teorema se basa en que, si las dos magnitudes son conmensurables, la razón entre ellas se puede representar por un número racional, y, por ende, cualquier par de cantidades múltiplos correspondientes de las dos primeras, estarán en la misma razón. En caso de no ser conmensurables, la razón se expresa por un número inconmensurable (número real), y se demuestra por contradicción, que cualquier secuencia de números raciones que acote superior e inferiormente a dicho número inconmensurable, es idéntica a dicho número (ver figura 4). En el fondo, es una demostración de la continuidad de los reales, pues en esencia demuestra que cualquier cantidad, o es un número racional, o es un número irracional, y el autor es consciente de dar solución a un problema no resuelto en Europa, como se puede ver en la extensa nota al pie de la página 133:

3.°—Siendo K un número inconmensurable, *para el valor* $A \times K$ *de la primera, debe corresponder* $a \times K$. En efecto, si representamos por P la relacion que existe entre el valor que corresponde a $A \times K$ i la magnitud a, es claro que este valor está representadado por $a \times P$; i la cuestion se reduce a probar que P es igual a K.

Supongamos 1.°—$P > K$, i tomemos un número conmensurable p comprendido entre P i K, de modo que se tiene $P > p > K$: es evidente, en virtud de lo que precede, que siendo p un número conmensurable, al valor $A \times p$ corresponde $a \times p$; pero siendo $A \times p > A \times K$, tambien se tendrá $a \times p > a \times P$, de donde $p > P$, lo que es contradictorio, porque se tenia $P > p > K$. De la misma manera probaríamos que P no puede ser menor que K, luego se tiene $P = K$.

Figura 4. Demostración del tercer caso del teorema 150, cuando las cantidades son inconmensurables (Liévano, 1856, p 132)

> Tengo la satisfacción de presentar al público 1a demostración rigurosa de esta proposición, manifestando que he sido conducido a ella investigando las condiciones necesarias para la proporcionalidad de las cantidades. Hasta ahora los más famosos Matemáticos se han contentado con establecer las propiedades jenerales del número conmensurable i aplicar silenciosamente estas mismas propiedades al número inconmensurable; pero este jénero de deducción está mui lejos de ser riguroso: Yo notando este vacío en la Aritmética me propuse llenarlo, i después de mui detenidas meditaciones he coronado completamente mis esfuerzos, pues he logrado (n° 115) hacer estensivas al número inconmensurable las propiedades jenerales del número conmensurable […]. (Lievano, 1856, p. 133)

Para cerrar este episodio, es importante resaltar que Liévano también muestra cómo este tipo de razonamientos sobre las razones y las proporciones, aplica por igual cuando las cantidades (magnitudes) son de la misma especie (homogéneas), que cuando son de naturaleza diferentes (heterogéneas). Esto muestra una concepción moderna del número, en dónde este emerge de las razones entre cantidades de magnitud (en lenguaje moderno): *todos los números*

tienen el mismo fundamento epistemológico.

Consideraciones finales

En lo analizado hasta el momento se pueden ver entonces apuestas epistemológicas y ontológicas sobre el concepto de número que se posicionaron como novedosas en la época en la que fueron propuestas. Estas ideas sobre el número se constituyeron como potentes para presentar las ideas fundamentales de la aritmética de una manera sistemática, en la que los diferentes sistemas numéricos tienen su origen en la misma fuente fenomenológica: las magnitudes, sus medidas y las razones entre dichas cantidades. Esta apuesta le permite al autor, no solo presentar los viejos problemas de la aritmética en una nueva forma, sino también abordar problemas no resueltos en su momento: la continuidad de los reales. Por supuesto se podrán encontrar algunos vacíos en su argumentación, pero sin pretender ignorar estas posibles faltas de rigor (visto el rigor en forma anacrónica desde el desarrollo actual de las matemáticas), en el tratamiento que el autor da a la aritmética hay un conjunto de lecciones que pueden ser aplicadas a la enseñanza actual: ¿Qué tal si fundamentamos la enseñanza del número, no desde la teoría de conjuntos, sino desde las magnitudes y sus medidas? ¿Qué tal si centramos los esfuerzos en la comprensión de los elementos esenciales de la naturaleza de tales sistemas numéricos?

No se debe cerrar esta discusión sobre la naturaleza del número, sin mencionar que autores como Davidod (1988) llaman la atención sobre la necesidad de reformular la enseñanza usual de la aritmética escolar, y propone que los fundamentos de la misma no deberían ser los conjuntos, sino las magnitudes y sus medidas, las relaciones y las acciones con las cantidades, y por ende, las relaciones y operaciones con los números.

Referencias y bibliografía

Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (P. Jourdain, Trans. 1 ed.). New York: Dover Publications, INC.

Euclid. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol. 2). Cambridge: Cambridge The University Press.

Davidov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico, Investigación psicológica teórica y experimental* (M. Shuare, Trans.). Moscú: Editorial Progreso.

Dedekind, R. (1927). Continuidad y números Irracionales. Traducción de la quinta edición (1927) por J. Bares y J. Climent. Recuperado desde http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf

Dedekind, R. (1930). ¿Qué son y para qué sirven los números? Traducción de la sexta edición (1930) por J. Bares y J. Climent. Recuperado desde http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf

Liévano, I. (1856). *Tratado elemental de aritmetica*. Bogotá: Imprenta de Echavarría Hermanos.

Newton, I. (1720). Universal Arithmetick: or, a treatise of arithmetical composition and resolution (M. J. Raphson, Trans.). In *Universal Arithmetick: Or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. To which is Added, Dr. Halley's Method of Finding the Roots of Equations Arithmetically*. London: J. Senex.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 157-182.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica.* (Tesis Doctoral), Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado desde http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9472/1/CB-0519794.pdf

Vasco, C. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. Maxwell West, & M. Stone Wiske (Eds.), *Software goes to school:*

teaching for understanding with new technologies (pp. 56-69). New York, NY: Oxford University Press.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ingeniería Didáctica para el estudio de la variación de las funciones: Análisis preliminar

Noé Oswaldo Cabañas Ramírez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
noe_ocr@hotmail.com
Edgardo Locia Espinoza
Universidad Autónoma de Guerrero
México
lociae999@hotmail.com
Armando Morales Carballo
Universidad Autónoma de Guerrero
México
armando280@hotmail.com

Resumen

Se presentan los avances de una investigación en desarrollo que tiene como objetivo el diseño y puesta en escena de una Ingeniería Didáctica para el estudio del sentido de variación de las funciones en el nivel preuniversitario. En particular, se presenta un análisis de los principales textos que se utilizan en el preuniversitario y primeros años de universidad, y algunos elementos histórico-epistemológicos en relación a la temática. Más precisamente, se analizan las concepciones de crecimiento y de decrecimiento de una función que subyacen en las demostraciones del teorema que vincula el signo de f' con el sentido de variación de f, dadas por Lagrange y Cauchy, las cuales difieren de la concepción que subyace en la definición formal actual.

Palabras clave: Sentido de variación de funciones, teoría de situaciones didácticas, análisis epistemológico, ingeniería didáctica.

Introducción

La problemática de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, ha sido abordada desde diferentes marcos teóricos y metodológicos. Investigaciones referentes a este tema, ponen de manifiesto que los alumnos presentan problemas sobre la comprensión de los conceptos básicos del cálculo; tales como el concepto de función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, entre otros (Reséndiz, 2006; Zúñiga, 2009; Castillo, 2009; Díaz, 2009; Salinas & Alanís, 2009; Rubí, Moreno, Pou, & Jordán, 2010; Pineda, 2013; Delgado, 2013; Ruiz, Hernández, & Gutiérrez, 2015; Cuevas & Delgado, 2016).

Con el propósito de contribuir en la solución de la problemática identificada, se plantea como objetivo de investigación el diseño de una Ingeniería Didáctica para favorecer el estudio y

la comprensión del sentido de variación de funciones en el preuniversitario.

Esta investigación forma parte de un trabajo más amplio. De manera particular, en este reporte se describen algunos elementos de carácter histórico-epistemológico relacionados con los conceptos y teoremas que intervienen en el análisis del sentido de variación de una función; así como la adhesión de estas definiciones en los libros de texto más representativos para este nivel.

Antecedentes y planteamiento del problema

La importancia del estudio del sentido de variación de funciones radica en que es un tema indicado como obligatorio en los planes y programas de estudio del tercer año del nivel medio superior, en México. Se trata de un contenido integrador en donde convergen y se necesitan los principales conceptos del cálculo diferencial, así como una madurez de razonamiento matemático en los alumnos para poder entender y aplicar los teoremas y resultados que fundamentan este análisis.

De la revisión a la literatura especializada, se puede identificar que, en la educación media superior en México, a pesar de que se han realizado diversas investigaciones desde diferentes referentes teóricos y metodológicos sobre el estudio del sentido de variación de una función (Zúñiga, 2009; Engler, Vrancken, Gregorini, Müller, Hecklein & Henzenn, 2008; Díaz, 2009; Rey Cabrera, 2016), aún persisten muchas dificultades para la comprensión y manejo de este contenido, tanto en el profesor como en el estudiante. Por ejemplo, Sánchez-Matamoros, García, & Llinares (2008), Russo (2016), documentan las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en cuanto a la comprensión, construcción e interpretación de los conceptos básicos del cálculo, tales como el concepto de función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. También, Engler & Vrancken (2002), observaron que los alumnos presentan dificultades para resolver problemas que involucran conceptos fundamentales del cálculo como: primera y segunda derivada y sus relaciones con el crecimiento y decrecimiento de una función, concavidad y convexidad, puntos de máximo y mínimo, y de inflexión. Por otro lado, en un estudio hecho por Valero (2003) encontró que estudiantes de bachillerato quienes habían abordado ya el tema del análisis de funciones, identificaron las funciones crecientes con funciones positivas y las decrecientes con funciones negativas.

Por lo tanto, hemos planteado el siguiente **problema de investigación:** Existen dificultades en estudiantes de nivel medio superior sobre la comprensión de los conceptos y teoremas que fundamentan el estudio del sentido de variación, la determinación de los extremos y la construcción de las gráficas de las funciones.

Pregunta de investigación. ¿Qué elementos teóricos y metodológicos permiten elaborar una ID para el tratamiento de los conceptos, teoremas y procedimientos para el estudio del sentido de variación, determinación de extremos y construcción de gráficas de funciones en la enseñanza del cálculo en el nivel medio superior?

Fundamentación teórica

La presente investigación se sustenta en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) desarrolladas por G. Brousseau e Y. Chevallard, respectivamente, ya que estas teorías se adaptan a los procesos que se pretenden utilizar en el desarrollo de las actividades e interacciones en el aula y enmarcan a la Ingeniería Didáctica utilizada en este proceso de estudio como metodología de investigación. Según lo descrito por Chevallard, la TTD considera la transformación que siguen los saberes desde su génesis, su

constitución como un saber científico y su transformación en un saber escolar según los roles de los involucrados en la modelización que en ella se hace de la actividad matemática del matemático, la actividad matemática y didáctica del profesor y la actividad matemática del alumno, en relación a un saber específico.

En el proceso de transmisión de un conocimiento determinado, Brousseau plantea el diseño de Situaciones que incluyan un conjunto de actividades, en las que se propicie una génesis ficticia de los conocimientos que hagan que el estudiante recorra un camino similar al que recorren los matemáticos (proceso descrito por Lakatos), en el que el error y la existencia de contradicciones en los argumentos (puestas en evidencia por los contraejemplos) no sean vistos sólo como una contingencia, sino que adquieran un estatus positivo propiciando que los estudiantes examinen sus argumentos, diagnostiquen sus problemas y los superen, den significados a los contenidos, los procedimientos o los procesos cognitivos.

Buscando convertir la clase en una micro-comunidad científica dentro de la cual los conocimientos (conceptos y resultados) se construyan como herramientas necesarias y óptimas para superar los obstáculos que se plantean en ellas, dando lugar a las diferentes etapas a-didácticas y didácticas (situaciones de acción, de formulación, de validación y de institucionalización) descritas en la teoría. En donde los alumnos formulen, de manera individual o por equipos, sus propuestas que contribuyan a la superación de los obstáculos, las sometan a discusión con sus pares, sean validadas o cuestionadas a través de contraejemplos, estableciéndose una dialéctica entre la validación y la refutación similar a la que describe Lakatos (1976) en su modelo de la actividad del matemático y la lógica del descubrimiento en matemáticas.

Sin embargo, en el contexto escolar, Locia (2000) afirma que, muchos estudiantes e incluso profesores manifiestan desconocimiento en el razonamiento matemático, en particular, no tienen el hábito de buscar un contraejemplo para poner a prueba una afirmación que se necesita aplicar, pero cuya veracidad no ha sido establecida en la clase. Por otro lado, Morales (2008), Zazkis & Chernoff (2008), Klymchuk (2010), García & Morales (2013), coinciden en que la formulación de conjeturas y el empleo de contraejemplos, permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, y disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje, por lo que es necesario introducir en el aula escenarios que propicien el aprovechamiento de las virtudes pedagógicas de los contraejemplos.

Para el desarrollo de esta investigación se utiliza la metodología de la Ingeniería Didáctica (ID), la cual en la etapa de los análisis preliminares incluye la realización de un estudio epistemológico, didáctico y cognitivo sobre el objeto de estudio, en nuestro caso el relacionado al sentido de variación de funciones de variable real. En este sentido estaremos interesados en analizar el desarrollo histórico-epistemológico de las diferentes concepciones que se han ido sucediendo de los saberes involucrados en el estudio del sentido de variación de las funciones y las disparidades y coincidencias entre el saber en construcción, el saber científico y el saber enseñado. En el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, se analiza el papel que juegan los libros de texto a través de las caracterizaciones o comunicaciones que de ellos extrae el profesor. Del análisis de las concepciones de los estudiantes, a través de un estudio se obtiene información del alumno referente a la aplicación y uso correcto de las propiedades, conceptos, teoremas o definiciones.

Resultados y conclusiones

Elementos histórico-epistemológicos, didácticos y cognitivos de la noción de Sentido de Variación

Respecto a los hallazgos obtenidos de este análisis, hoy día encontramos que el teorema de Rolle fue demostrado primero en álgebra (en 1691) para contribuir a dar solución al problema de la existencia de raíces de ecuaciones de grado arbitrario, y las primeras demostraciones del teorema que asocia el sentido de variación de una función y el signo de su derivada no lo utilizaban.

Lagrange (1797) enuncia y demuestra el siguiente lema (p. 45):

> *Si una función prima de z tal que $f'z$ es siempre positiva para todos los valores de z, desde $z = a$ hasta $z = b$, b siendo $> a$, la diferencia de las funciones primitivas que corresponden a estos dos valores de z, a saber, $fb - fa$, será necesariamente una cantidad positiva.*

Es importante mencionar que Lagrange rechazaba fundamentar el análisis a partir de la noción de límite, de cantidades evanescentes o de infinitésimos, poniendo como concepto central, el desarrollo de una función en serie de potencias y definiendo a la derivada como el coeficiente del término de primer grado en ese desarrollo. Este lema le permitía determinar cotas para el resto de la serie, principio que él considera fundamental y del cual se desprende el resultado que actualmente se conoce como teorema de los incrementos finitos. Para la demostración de este lema, Lagrange evade utilizar la noción de límite y utiliza otro "principio básico" enunciado y demostrado casi al inicio de su obra (p.12) el cual "se debe ver […] como uno de los principios fundamentales de la teoría": en el desarrollo en serie de una función, se puede tomar siempre i suficientemente pequeño para que un término cualquiera sea más grande que la suma de los términos que le siguen.

Por otro lado, a diferencia de Lagrange, Cauchy funda sus trabajos de rigorización del análisis en la noción de límite. Cauchy (1823) define la derivada como un límite y plantea el siguiente problema relacionado con el teorema que vincula el signo de la derivada con el sentido de variación de una función (p. 37):

> ***Problema.*** *Suponiendo que la función $y = f(x)$ sea continua respecto a x en la vecindad del valor particular $x = x_0$, se pide si, a partir de este valor, la función crece o disminuye, mientras que se hace crecer o disminuir la variable misma.*

Podemos resumir la demostración dada por Cauchy de la siguiente manera: primero, un paso de lo infinitesimal (la positividad de $f'(x_0)$) a lo local (de la positividad de $f'(x_0)$ deduce la positividad de $\Delta y/\Delta x$ para valores muy pequeños de Δx). Después pasa de lo local a lo global sobre un intervalo. En el paso de lo infinitesimal a lo local, hoy en día sabemos que no es posible deducir el crecimiento de f en una vecindad de x_0, del hecho de que $f'(x_0)$ sea positivo. Ello puede hacerse evidente con el siguiente contraejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En efecto, puede demostrarse que esta función definida, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ satisface que $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, sin embargo no es creciente, según la definición de función

creciente que conocemos en la actualidad, en ninguna vecindad de 0.

En las pruebas dadas por Lagrange y Cauchy, se vislumbra que ambos tienen concepciones implícitas de lo que es una función creciente (nunca dan una definición), pero éstas no coinciden exactamente. La concepción de Lagrange es más cercana a la que encontramos actualmente en los libros de texto de nivel superior, pues a partir de la hipótesis de la positividad de la derivada y de la desigualdad $b > a$, deduce que la diferencia $f(b) - f(a)$ es positiva.

Por otro lado, la definición implícita de Cauchy de una función creciente se puede formular de la siguiente manera: una función f definida en un intervalo I es una función creciente, si para cualquier elemento a de I, existe una vecindad $V(a)$ tal que para cualquier x en $V(a)$, el orden entre $f(a)$ y $f(x)$ es el mismo que entre a y x. La definición de Lagrange es global y puntual y se refiere a dos puntos dados (arbitrariamente, y de manera independiente); en la definición de Cauchy, las propiedades locales se mantienen en una vecindad de cada punto dado arbitrariamente. Se puede demostrar, no sin dificultad, que ambas definiciones son equivalentes desde un punto de vista matemático. Sin embargo, según Chorlay (2007) difieren significativamente, tanto desde un punto de vista epistemológico (en el que, por ejemplo, se pone de relieve la diferencia entre propiedades locales y globales), como desde un punto de vista cognitivo.

La primera "definición" explícita de función creciente, la encontramos con Ampère (1924) enunciada en los siguientes términos (p. 11):

> *Se dice que una función continua es creciente en el intervalo de dos valores de la variable independiente, cuando ella aumenta a medida que se dan a esta variable valores cada vez más grandes, y que irá por consecuente disminuyendo, si se le dan a la misma variable valores cada vez más pequeños*

Observemos que más que una definición, se trata de una descripción de la variación intuitiva de cómo cambian dos cantidades una de las cuales depende de la otra (al aumentar una la otra también, si se trata del crecimiento o al aumentar una, la otra disminuye, si se trata del decrecimiento). A esto Chorlay (2007), lo llama "el estilo narrativo", el cual es anterior a la formalización.

Es sorprendente que la noción de sentido de variación de una función no llegó a definirse, tal como se conoce en la actualidad, sino hasta 1912 por Osgood. Así, la noción de crecimiento y de decrecimiento de una función de variable real, durante mucho tiempo evocada de una manera puramente narrativa (Chorlay, 2007) y que se encuentra de manera explícita por primera vez en los trabajos de Ampère, encuentra en Osgood una formulación puramente puntual adquiriendo, hasta ese momento, el estatus de una verdadera definición. La concepción que subyace en ella, es la de transformación de un conjunto ordenado en otro conjunto ordenado, de tal manera que el orden se preserva, si la función es creciente o se invierte si la función es decreciente.

Las definiciones y los teoremas en los libros de texto

En el proceso de búsqueda de las definiciones y su inserción en los libros de texto más representativos al menos en nuestro país, identificamos esencialmente cuatro definiciones de función creciente:

Definición 1: Una función f es creciente en un conjunto S, si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de S, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definición 2: Una función f se llama *creciente*, cuando a un mayor valor del argumento x corresponde un mayor valor de la función. Dicho de otro modo, f es creciente si al aumentar x, aumenta $f(x)$ y si al disminuir x, disminuye $f(x)$.

Definición 3: Una función es creciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$.

Definición 4: Se dice que una función $y = f(x)$ es creciente para $x = a$ si en un entorno de a se verifica que: Si $x > a$ es $f(x) > f(a)$ y si $x < a$ es $f(x) < f(a)$. Se dice que una función $y = f(x)$ es creciente en un intervalo si es creciente en todos sus valores del intervalo.

Las definiciones de función decreciente se formulan de manera análoga.

En términos generales, podemos decir que la definición 1 coincide con la dada por Osgood (1912). Observemos que la idea de función en la que se basa esta definición 1, es aquella de que una función es una aplicación o transformación entre dos conjuntos, por lo que, las propiedades de variación son propiedades de las aplicaciones entre dos conjuntos ordenados. Hemos dicho que la concepción que subyace en ella es aquella de que el orden se preserva, si la función es creciente o se invierte si la función es decreciente. Encontramos esta definición, con ciertas variaciones, en los libros (Apóstol, 1967; Swokowsky, 1982; Leithold, 1992; Ortiz, 2009; Stewart, 2007; Ortiz, Ortiz y Ortiz, 2011; Arteaga y Espinoza 2014; Valdés, 1983).

La **definición 2**, puede ser equiparada con la definición dada por Ampère en 1824, y hemos dicho que más que una definición es la expresión o la explicación, en términos informales, de la idea de crecimiento y de decrecimiento acorde con la idea intuitiva de variación dinámica de las funciones que se mencionó en párrafos anteriores. Esta definición es presentada por los libros (Granville, 2007; Ibañez y García, 2007; Cuéllar, 2007; Contreras, 2014; Garza, 2015; Ayres, 1971; Ayres y Mendelson, 2001).

La **definición 3**, introduce fuertes restricciones al campo de aplicación de las funciones a las cuales se les puede considerar como crecientes o decrecientes. La primera de ellas se refiere a que condiciona a que las funciones deben estar definidas en un intervalo, mientras que en la definición 1 se consideran funciones definidas en un conjunto numérico S arbitrario. La otra restricción, más fuerte aún que la primera, es la exigencia de diferenciabilidad en los puntos interiores del intervalo dominio. Más que una definición, se trata en realidad de la condición que se establece en el teorema que vincula el signo de la derivada con el sentido de variación de la función. Encontramos esta definición en los textos de (Aguilar, et. al., 2010; Arteaga y Espinoza, 2014; Silva, 2014; Garza, 2015).

En la **definición 4**, se define primero el crecimiento de una función de manera puntual y, a partir de ella, se define la noción de crecimiento global introduciendo un cuantificador universal para los puntos de un intervalo. Se observa en la definición, la condición de que las funciones deben estar definidas en un intervalo, condición que es absolutamente necesaria y no es posible debilitarla más sustituyendo el intervalo por un conjunto arbitrario, pues si el dominio es un conjunto no conexo. Es posible demostrar, que, en un conjunto arbitrario, si una función es creciente en el sentido de la definición 1, entonces es también creciente en el sentido de la definición 4, pero la afirmación recíproca no se cumple (contraejemplo: $f(x) = -\frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$). Sin embargo, en un dominio conexo, ambas definiciones son equivalentes. Esta definición solo se encontró en Sántalo y Carbonell (2011).

Análisis de los principales teoremas y sus resultados

Solo los textos de (Apóstol, 1967; Leithold, 1982; Swokowski, 1982; Valdés, 1983; Ayres y Mendelson, 2001; Piskunov, 2008; Ayres, 1971); (que en esencia se utilizan en los primeros años de universidad), explicitan los teoremas que vinculan el signo de la derivada con el sentido de variación de una función, sobre ellos hacemos las siguientes observaciones. Estos textos presentan las demostraciones clásicas; es decir, lo demuestran a partir del teorema de los incrementos finitos. Además, presentan explicaciones gráficas, en las que, intuitivamente pretenden hacer evidente que, en los puntos, de los intervalos en los cuales las funciones son crecientes, las rectas tangentes a las curvas que representan las funciones, tienen pendiente positiva e inmediatamente la asocian con la derivada de la función. Los libros (Ortiz, 2007; Stewart. 2007; Ortiz, Ortiz y Ortiz, 2011; Contreras, 2014;) presentan el teorema sin hacer la demostración.

Un detalle importante**:** en los libros de Ayres (1971) y Granville (2007), el teorema se enuncia en un solo sentido. Sin embargo, las demostraciones que ambos presentan, son idénticas (salvo quizás ciertas diferencias de notación) a la que presentada en Cauchy (1823). Hemos mencionado en el estudio epistemológico, que esta demostración contiene un paso erróneo. Nos referimos al paso en el que se concluye que a partir de la positividad de f' en un punto x_0 se deduce el crecimiento de la función f en una vecindad de x_0. En el caso del texto de Ayres y Mendelson (2001), este error es subsanado y se presenta la demostración clásica utilizando el teorema de los incrementos finitos.

Sobre las producciones de los estudiantes

En un estudio previo realizado con estudiantes de primero de licenciatura (quienes habían abordado ya este contenido), se les pidió expresar lo que entendían por una función creciente o decreciente, ninguno de ellos consiguió definir de manera correcta estas nociones, utilizando expresiones como "si la gráfica sube, la función es creciente y si baja es decreciente". Cuando se les mostró la gráfica de una función monótona a trozos, que era creciente en algunos intervalos y decreciente en otros, en particular una parábola, respondieron que, "ubicándonos en el vértice de la parábola, si caminamos hacia la izquierda, la función es creciente, y si caminamos hacia la derecha, la función también es creciente". Al preguntarles cómo se ordenaban los números $f(-1)$ y $f(1)$, sabiendo que f es una función decreciente, afirmaban que $f(-1)$ tenía que ser menor que $f(1)$ porque -1 es un número negativo. De manera general, les resultó muy complicado comparar imágenes de una función, solo con tener la información de la monotonía. A nivel de procedimientos, también se encontraron dificultades para analizar sobre ejemplos concretos, el sentido de variación de una función.

Conclusiones

El estudio histórico-epistemológico nos arrojó que existieron diferentes concepciones acerca del sentido de variación de una función y que la definición actual fue dada hasta en el año 1912. En ella subyace la idea de una función como una transformación abstracta entre dos conjuntos ordenados. Sin embargo, esta idea de las funciones no es abordada con profundidad en el nivel medio superior, si acaso se hace referencia a ella al inicio de la introducción del tema, cuando se ilustran los diferentes tipos de relaciones (funcionales o no) mediante diagramas de flechas. La idea de función que prevalece en las matemáticas del bachillerato, es aquella (más intuitiva) de "cantidad variable" y "dependencia entre dos cantidades" en la que dos cantidades x y y tienen variaciones dependientes. La revisión de los libros de texto, nos puso en evidencia la

poca importancia que se les da en ellos a las definiciones y a los teoremas, encontrándose también, en algunos textos, las concepciones que se identificaron en el estudio histórico epistemológico; dando como consecuencia que los procedimientos que se utilizan para analizar el sentido de variación de funciones se presenten como una secuencia mecánica de pasos. Todo esto dificulta la apropiación de estas definiciones y estos teoremas, incluso a largo plazo, y este hecho se hizo patente, en el estudio con estudiantes, ya que encontramos que se apegan a las caracterizaciones encontradas en los libros de texto dejando de lado las definiciones y teoremas. Esto nos indica que en la Ingeniería Didáctica se hará necesaria, una estrategia de transición que vaya desde la comprensión puramente intuitiva de la variación de una cantidad que depende de la variación de otra (la cual es una idea dinámica), hasta la formulación de la definición formal de función creciente (definición 1), en la cual subyace una idea puramente estática, de aplicaciones o transformaciones entre los conjuntos ordenados (y no expresa en absoluto, idea alguna de "variación").

Referencias y bibliografía

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. & Reyes, R., (2010). Cálculo Diferencial. México: Progreso.

Ampère, A. M. (1824). Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral, CRH cours : A3a 174, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique. P. 12.

Arteaga, S. & Espinoza, J. (2014). Cálculo. México: Fondo de cultura económica.

Apóstol, T. (1984). Calculus. México: Reverté.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, I Moreno, y P. Gómez Gómez, P. (Ed.) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática (pp. 33-59). Bogotá, Colombia, Grupo Editorial Iberoamérica.

Ayres, F. (1967). Cálculo diferencial e integral. México. Mc Graw Hill.

Ayres, F. & Mendelson, E. (2001). Cálculo. México: Mc Graw Hill.

Brousseau, G. (1978), "La cours a 20", en Theorie des situations didactiques (1998) La Pensee Sauvage, pp. 24-43. Una primera version, de 1978, en Etude locale des processus d'acquisition en situation scolaire, Etude sur l'enseignement elementaire (Cuaderno 18,7-21). Bordeaux, IREM y Universidad de Bordeaux 1.

Castillo, M. (2009). Un estudio de concepciones del concepto de función en estudiantes de ingeniería. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22, 419–427. Cauchy, A. (1821). "Analyse Algébrique". Cours d'Analyse de l'Ecole royale polytechnique. L'Imprimerie Royale, Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi.

Cauchy, A. (1823). Resumé des lecons d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1ère partie Analyse Algebraique. Paris: Gauthiers-Villars.

Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 1, 146-157.

Chorlay, R. (2007) La multiplicité des points de vue en Analyse elementaire comme construit historique, in Histoire et enseignement des mathématiques: erreurs, rigueurs, raisonnements, E. Barbin y D. Bénard (eds). Lyon: INRP, 203-227

Contreras, S. (2014). Cálculo Diferencial. México: Fondo de cultura económica.

Cuéllar, J. (2007). Matemáticas V. Cálculo Diferencial. México: Mc Graw Hill.

Cuevas, C., & Delgado, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? ReCalc, 7, 108-119.

Delgado, M. (2013). Un problema con la concepción de la continuidad de una función. El Cálculo y su Enseñanza, 4, 27-44.

Díaz, M. (2009). Conocimientos de los profesores preuniversitarios de Cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada. El Cálculo y su Enseñanza, 1, 75-90.

Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M. I., Müller, D., Hecklein, M., & Henzenn, N. (2008). Estudio del

comportamiento de la función a partir de la derivada. Alme, 21,466–476.
García, O. & Morales, L. (2013). Ideas para enseñar: El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 35, 161-175.
Garza, B. (2015). Cálculo diferencial. México: Pearson.
Granville, W. A. (2007). Cálculo diferencial e integral. México: Limusa.
Ibañez, P. & García, G. (2007). Matemáticas V. Cálculo Diferencial. México: Cosegrat.
Klymchuk, S. (2010). Counterexamples in calculus. EEUU. Mathematical Association of América.
Lagrange, L. (1797)Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégages de toute considération d'infiniment petits ou de'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies en el 9º cuaderno del Journal de l'École Polytecnique. Paris: République.
Lakatos, I. (1976). Pruebas y refutaciones: ensayo sobre la lógica del descubrimiento matemático. Editorial Alianza Universidad.
Leithold, L. (1992). El cálculo con Geometría Analítica. México: Harla.
Locia, E. (2000). Les contre – exemples dans l`enseignement des mathèmatiques. (Tesis Doctoral), Universidad Paul Sabatier. Touluse, Francia.
Morales, A. (2008). El papel que juega el contraejemplo en la construcción de las definiciones en matemáticas: El caso de la función convexa. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, México.
Ortiz, F. (2009). Cálculo Diferencial. México: Ed. Patria.
Ortiz, F.; Ortiz, F. & Ortiz, F. (2011). Cálculo diferencial. México: Ed. Patria.
Osgood, W. F. (1912). Lehrbuch der Funktionentheorie. Berlín: B. G. Teubner.
Pineda, C. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.
Piskunov, N. (2018). Cálculo diferencial e integral. México: Limusa
Rey Cabrera, M. (2016). Propuesta didáctica para la formación del profesorado: el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática. (Tesis de Maestría). México: Cinvestav.
Reséndiz, E. (2006). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 9(3), 435–458.
Rubí, G., Moreno, M., Pou, S., & Jordán, A. (2010). Problemática persistente en el aprendizaje de Cálculo Caso de la Facultad de Ciencias, UABC, 1–10.
Russo, C. (2016). Diseño de una secuencia didáctica para el estudio del concepto de función utilizando software de geometría dinámica. (Tesis de Maestría). México: Cinvestav.
Ruiz, E., Hernández, J., & Gutiérrez, J. (2015). Aplicaciones en dispositivos móviles enfocadas al estudio de conceptos de cálculo, El cálculo y su enseñanza. 6, 123–144.
Salinas, P., & Alanis, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institucion educativa. Relime. 12(3), 355-382.
Sánchez-Matamoros, G., García, M. & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. Relime. 11(2), 267-296.
Sántalo, M. & Carbonell, V. (2011). Cálculo diferencial. México: Diana
Silva, J. (2014). Cálculo Diferencial. México: Anglo.
Stewart, J. (2007). Cálculo Diferencial e Integral. EEUU: Thomson.
Swokowski, E. (1982). Cálculo con Geometría Analítica. EEUU: Wadsworth Internacional Iberoamérica.
Valdés, C. (1983). Análisis matemático, Tomo II. La Habana: Editorial Pueblo y Educación
Valero, S. (2003). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. (Tesis Doctoral). CICATA-IPN. México.
Zazkis, R., & Chernoff, E. (2008). What makes a counterexample exemplary?. Educational Studies in Mathematics, 68, 195-208.
Zúñiga, M. (2009). Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. en alumnos de un curso de cálculo I. (Tesis de maestría) UPN. Tegucigalpa, Honduras.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

História da matemática e formação de professores: uma relação possível a partir de pesquisas acadêmicas

Virgínia Cardia **Cardoso**
Universidade Federal do ABC
Brasil
virginia.ufabc@gmail.com

Resumo

Apresentamos o relato de uma pesquisa em fase inicial de desenvolvimento, na qual investigamos como se caracterizam as dissertações e teses desenvolvidas em programas de pós-graduação de universidades paulistas e concluídas a partir do ano 2010, que relacionam a História com a formação de professores que ensinam Matemática. Nosso objetivo é analisar trabalhos acadêmicos que relacionam História da Matemática, História da Matemática no ensino ou História da Educação Matemática, com a formação de professores, levantando as suas principais características para compreender como se constitui tal relação. Metodologicamente, a pesquisa está sendo desenvolvida em duas etapas. Primeiramente estamos realizamos um levantamento e fichamento das produções acadêmicas que atendem aos nossos interesses a partir de buscas das informações disponíveis na Internet. Em uma etapa posterior analisaremos as produções selecionadas pela Hermenêutica de Profundidade. Trouxemos, neste texto, os primeiros dados das produções selecionadas do PEHCM - UFABC.

Palavras chave: história da matemática, formação de professores, pós-graduação, hermenêutica de profundidade, educação matemática.

Introdução

A História da Matemática está presente como linha de pesquisa nos principais programas de pós-graduação de Educação Matemática brasileiros, desde a década de 1980. Nas décadas de 1980 e 1990 foram produzidos muitos trabalhos de pesquisa que relacionam a História com a Educação Matemática, seja para a formação de professores, para o ensino, para a análise de materiais didáticos, para o fortalecimento das bases científicas da Educação Matemática ou mesmo para o desenvolvimento de novos conhecimentos históricos da Matemática. Atualmente,

o interesse pelas relações entre História e Educação Matemática continua presente no cenário acadêmico, possivelmente com características diferentes das décadas de 1980 e 1990. Nessa pesquisa pretendemos compreender como se dá a relação entre a História e a formação de professores que ensinam Matemática nas pesquisas concluídas na última década.

Apresentamos um recorte de uma pesquisa em andamento no Programa de Mestrado em Ensino e História das Ciências e da Matemática (PEHCM) da Universidade Federal do ABC (UFABC), localizado em Santo André, SP. A questão investigada é: como se caracterizam as pesquisas acadêmicas, desenvolvidas em programas de pós-graduação de universidades paulistas e concluídas a partir do ano 2010, que relacionam a História com a formação de professores que ensinam Matemática. O objetivo geral é mapear e analisar trabalhos acadêmicos que tratam da História da Matemática, História da Matemática no ensino e História da Educação Matemática, relacionando estes temas com a formação de professores, levantando as suas principais características para compreender como se constitui tal relação.

Queremos entender quais aspectos constitutivos da relação História da Matemática – Formação de Professores têm sido mais valorizados nas pesquisas acadêmicas desenvolvidas em universidades paulistas e concluídas a partir do ano 2010. As restrições indicadas estão relacionadas à viabilidade de desenvolvimento em dois anos, por um ou dois pesquisadores. A pesquisa está sendo desenvolvida, no momento, apenas pela docente do programa, mas tem a possibilidade de envolvimento de um futuro mestrando.

Vários cursos de Licenciatura em Matemática brasileiros oferecem a História da Matemática como disciplina regular ou optativa, em muitos casos, amparados pela literatura que indica argumentos favoráveis à História da Matemática no ensino, seja no nível básico ou no nível superior. Por outro lado, há diferentes abordagens da História da Matemática nas pesquisas acadêmicas, embora nem todas relacionem a História com a Formação de professores. Focaremos nas pesquisas que, de algum modo, estabelecem um vínculo entre estes dois temas, procurando pelos indícios do papel a ser desempenhado pela História na formação inicial de professores. Queremos, com a pesquisa que aqui se apresenta, identificar os tais indícios e entender melhor este papel.

Neste texto trouxemos os primeiros dados levantados para constituir este mapeamento: as pesquisas realizadas no PEHCM – UFABC que relacionam História e Educação Matemática. Tais pesquisas serão futuramente analisadas, juntamente com pesquisas de outros programas de pós-graduação paulistas.

Referencial teórico

As relações entre História e Educação Matemática são antigas. A História da Matemática é reconhecida como um potencial recurso pedagógico desde, pelo menos, 1772, com a publicação dos **Elementos de Geometria** de Clairot. Nas décadas de 1980 e 1990, a História da Matemática foi investigada como recurso de ensino por vários pesquisadores brasileiros. Dentre estes podemos destacar Miguel (1997) e Miguel e Miorim (2011), que apresentam vários argumentos reforçadores para a abordagem histórica como recurso pedagógico no ensino da Matemática. De acordo com este autor, a História da Matemática:

- é uma fonte de motivação e objetivos para o estudo da matemática;
- é uma fonte de métodos adequados e de problemas práticos, interessantes, curiosos, ou recreativos para o ensino da matemática;
- possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação do seu ensino;
- é um instrumento de formalização de conceitos;
- é um instrumento de promoção de pensamento crítico e independente, atitudes e valores;
- relaciona os diferentes campos da matemática.

Também os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (Brasil, 1998) apoiaram a abordagem histórica como um valioso recurso pedagógico para o ensino da Matemática:

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns porquês e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento (Brasil, 1998, pg. 43).

Além disso, os Parâmetros trazem outro importante argumento, colocando a Matemática como um produto cultural: "conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural" (Brasil, 1998, pg. 42).

Assim como a abordagem da História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino da Matemática não é recente, a abordagem da História da Matemática como recurso para a formação de professores, também não é uma novidade. De acordo com Miguel e Brito (1996), a relação entre História e a formação de professores que ensinam Matemática reporta-se a época de 1920. Para estes autores, a História da Matemática deve estar presente nos cursos de formação inicial para os professores, mas não como disciplina isolada e sem conexão com as demais do curso: "defenderemos a tese de uma participação orgânica da história da matemática nessa formação o que significa, primeiramente, a tentativa de se imprimir historicidade às disciplinas de conteúdo específico" (Miguel e Brito, 1996, pg. 49). Para estes autores:

> uma participação orgânica na história na formação do professor, tal como a entendemos, conceberia a história como fonte de uma problematização que deveria contemplar as várias dimensões da matemática (lógica, epistemológica, ética, estética etc) e da educação matemática (psicológica, política, axiológica, didático-metodológica etc), o que remeteria, inevitavelmente, os formadores de professores a destacar e discutir com seus alunos as relações de influência recíproca entre matemática e cultura, matemática e sociedade, matemática e tecnologia, matemática e arte, matemática e filosofia da matemática etc., fazendo com que o discurso matemático abra-se ao diálogo com os demais discursos que se constituem com ele, a partir dele, contra ele, a favor dele etc. A finalidade dessa problematização é fazer com que o professor alcance um metaconhecimento da matemática que lhe propicie a abertura de novos horizontes e perspectivas (Miguel e Brito, 1996, pg. 49).

Miguel e Brito (1996) defendem que a História da Matemática seja incorporada organicamente à formação do professor, possibilitando a formação do licenciando como profissional reflexivo e crítico. Ainda, de acordo com os autores:

> a participação orgânica da história na formação do professor de matemática poderia vir a contribuir para uma adequada compreensão de tópicos de crucial importância para a sua ação pedagógica, tais como: a concepção da natureza dos objetos da matemática, a função da abstração e da generalização, a noção de rigor e o papel da axiomatização, a maneira de se entender a organização do saber, os modos de se compreender a dimensão estética da matemática e valorização da dimensão ético – política da atividade matemática (Miguel e Brito, 1996, pg. 50).

Acrescendo aos argumentos acima citados, podemos apontar outros argumentos que reforçam a ideia que a abordagem histórica da Matemática traz vantagens à formação de professores. Cardoso (2010) afirma que:

> ...a História contribui se objetivar levar o indivíduo a ser aberto a outras formas de pensamento, diferentes dos seus próprios pontos de vista, outras formas de construir o conhecimento, a se desvencilhar de seus preconceitos e ampliar os seus horizontes de saber. Enfim, a História deve contribuir para a constituição de conhecimentos, valores e atitudes, de forma crítica e reflexiva (Cardoso, 2010, pg.5).

Além disso, a História pode assumir diversos papéis na formação, dependendo do momento em que ela é inserida no curso. Por exemplo, no caso de um aluno ingressante em um curso de licenciatura, a disciplina pode contribuir...

> ...para a sua formação geral, iniciando nesse aluno um "hábito cultural", isto é, mostrando a importância que textos escritos (e noticiados por veículos de informação especializados e diários) têm para a formação acadêmica, incentivando-o a refletir sobre novos conhecimentos adquiridos e como relacionar os conceitos de diversas áreas para a constituição de conhecimentos (Cardoso, 2010, pg. 6).

Já, para um aluno concluinte, a autora relatou a sua própria experiência, quando estudou História da Matemática no último ano de seu curso de licenciatura. Neste caso, a História possibilitou...

> ...compreender melhor os conceitos matemáticos aprendidos em outras disciplinas e possibilitou estabelecer algumas relações, mostrando que as teorias e os conceitos matemáticos não surgem formalizados numa linguagem rigorosa, de acordo com a lógica dedutiva, e nem sempre estão totalmente coerentes com a teoria na qual se inserem. Isto é, a História mostrou uma outra forma de estudar a Matemática, que não era a forma axiomática euclidiana. Tal disciplina e as leituras sobre o assunto nos incentivaram a estudar mais profundamente este campo, mesmo após a graduação (Cardoso, 2010, pg. 6).

Finalmente, para a formação continuada do professor, a História contribui para a reflexão da prática docente, reiterando os argumentos já apontados para a o emprego da História da Matemática como recurso pedagógico no ensino.

Entendemos, portanto, que há diversas maneiras de relacionar a História da Matemática à formação de professores. Isso nos incentiva a querer entender como a relação entre História e formação de professores está sendo apresentada nas pesquisas acadêmicas desta última década.

Referencial metodológico

A pesquisa foi iniciada com o levantamento das pesquisas que relacionam História à formação de professores que ensinam Matemática. A coleta de dados está sendo realizada a partir dos sites das universidades paulistas que possuem programas de mestrado e/ou doutorado em Educação, Educação Matemática ou Ensino de Ciências e de Matemática. Possivelmente, para completar as informações encontradas, outros sites serão consultados: o banco de teses da CAPES[1], os currículos Lattes[2] dos professores orientadores em cada programa, os currículos Lattes dos egressos de cada programa e os sites das bibliotecas das universidades envolvidas. Também poderão ser consultados os sites de grupos de pesquisa relacionados à temática, bem como a plataforma de grupos de pesquisa do CNPq[3]. Nesta primeira fase faremos o levantamento dos trabalhos que foram concluídos a partir de 2010, e que têm como temáticas a História da Matemática, História da Matemática no Ensino e História da Educação Matemática. São considerados alguns indícios, tais como título e palavras-chave, para que o trabalho faça parte do levantamento. Os trabalhos encontrados estão sendo fichados com a identificação das seguintes informações: Universidade; Programa; Curso (nível); Título do trabalho; Autor; Orientador(es); Ano de Conclusão; Resumo do autor; Palavras-chave.

As informações dos fichamentos nos permitirão perceber se o trabalho em questão está dentro do escopo de nossa pesquisa ou não, isto é, se nele é estabelecida alguma relação entre a História e a formação de professores que ensinam Matemática. Os trabalhos selecionados são as formas simbólicas de nossa pesquisa e serão analisados a partir da Hermenêutica de Profundidade (HP). Esta é uma metodologia de pesquisa qualitativa criada por John B. Thompson – sociólogo e professor da Universidade de Cambridge (Inglaterra) – para o estudo crítico das formas simbólicas. Formas simbólicas são ações, falas, imagens e textos produzidos e reconhecidos como significativos para os sujeitos envolvidos nos contextos de produção, emissão e recepção. A HP é um modo de análise de formas simbólicas em relação aos contextos que as produzem, as transmitem e as recebem.

Thompson apresentou sua metodologia em sua obra publicada no Brasil em 1995[4], com o título *Ideologia e Cultura Moderna: teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa,* na qual propôs trazer enfoque para a Teoria Crítica para analisar a ideologia. Analisar as formas simbólicas em seu aspecto ideológico nos dá uma dimensão crítica, cuja finalidade é revelar como o significado das formas simbólicas serve para estabelecer e sustentar as relações de dominação em um contexto socialmente determinado. A ideologia não é inerente a uma forma

[1] CAPES: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Trata-se de órgão de fomento à pesquisa e mantém, dentre outras iniciativas um banco de teses e dissertações.
[2] Currículo Lattes: currículo *online* de pesquisadores em plataforma do CNPq.
[3] CNPq: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. Também é um órgão de fomento à pesquisa e mantém uma plataforma de Grupos de Pesquisa e de Pesquisadores.
[4] Baseamo-nos na 5ª edição, publicada em 2000.

simbólica própria. Ideologia é, de acordo com Thompson (2000), um efeito que surge quando o significado de uma forma simbólica é usado para sustentar uma relação de dominação em um contexto específico.

A HP compõe-se de duas etapas: Hermenêutica do Cotidiano e Hermenêutica de Profundidade. A Hermenêutica do Cotidiano considera como as formas simbólicas são interpretadas e compreendidas no cotidiano, pelo senso comum. Essa é a primeira leitura que será realizada nas produções selecionadas e nos apontará indícios de características. A partir daí se realiza a Hermenêutica de Profundidade, que se caracteriza por três dimensões.

A primeira dimensão é chamada de análise sócio histórica e tem como objetivo reconstruir as condições sociais e históricas de produção, circulação e recepção das formas simbólicas, evidenciando as relações de dominação que caracterizam o contexto. Nessa dimensão, a preocupação será a de identificar e descrever as situações espaços-temporais em que os trabalhos acadêmicos, isto é, as formas simbólicas foram produzidas. A segunda dimensão é chamada de análise formal ou discursiva. As formas simbólicas têm uma estrutura interna articulada que facilita ou não a mobilização do significado. Mapear as afirmações de um discurso em termos de operadores "quase-lógicos": implicações, contradições, pressupostos, exclusões, etc. Nesta fase, analisamos o texto em si – o que o autor disse – e destacamos fragmentos que são significativos, na interpretação do pesquisador, para responder à questão da pesquisa. A terceira dimensão é a interpretação ou reinterpretação. Trata-se de construir ou reconstruir os significados do discurso. É desvendar a conexão entre as construções simbólicas e as relações de poder. Ou seja, é desvendar a Ideologia. Em nossa pesquisa o aspecto ideológico está nas características reveladas em nossa interpretação, a partir da leitura e análise dos trabalhos acadêmicos selecionados.

Neste presente momento foi iniciado o levantamento e fichamento, a partir das produções do PEHCM – UFABC. O próximo passo é estender esses processos às dissertações e teses desenvolvidas em outras universidades paulistas. A HP ainda não foi aplicada, mas será apenas quando a fase do levantamento e seleção das produções acadêmicas for concluída.

Os primeiros dados da pesquisa

Demos início à nossa pesquisa com o programa de pós-graduação da UFABC. O curso de mestrado acadêmico foi criado como Mestrado em Ensino História e Filosofia das Ciências e da Matemática, em 2011, na área 46 da CAPES – Área de Ensino de Ciências e Matemática – por professores vinculados aos cinco cursos de licenciatura da UFABC (Ciências Biológicas, Filosofia, Física, Matemática, Química), além de colaborados externos. Em 2015 o curso passou por uma reformulação, em decorrência de dois fatores: a criação do curso de Mestrado em Filosofia na UFABC e mudanças na área 46 da CAPES. Desde então, o curso passou a se chamar Curso de Mestrado em Ensino e História das Ciências e da Matemática (PEHCM), contando com três linhas de pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática; Formação de Professores de Ciências e Matemática e História das Ciências e Matemática e interfaces com a Educação. O público alvo preferencial do curso é constituído de graduados nas áreas de Biologia, Física, Matemática, Química e Pedagogia, mas não restringe a participação de egressos de outras áreas.

No levantamento dos trabalhos concluídos no programa PEHCM – UFABC foram identificadas, a partir do título e palavras-chave, quatro dissertações de mestrado que relacionam a História à Educação Matemática. Tais produções foram desenvolvidas nas linhas de pesquisa Ensino e Aprendizagem das Ciências e da Matemática e Formação de professores de Ciências e Matemática, e estão listadas no quadro 1.

Quadro 1

Dissertações selecionadas do PEHCM - UFABC

Ano de conclusão	Título	Autor(a)
2015	A história da matemática como recurso pedagógico: uma análise hermenêutica sobre as concepções de alguns professores	Ana Jimena Lemes Pérez
2015	A história da matemática no portal do professor: uma análise hermenêutica dos planos de aula	Rosana Rodrigues da Silva
2015	A contribuição de Achille Bassi para a matemática no Brasil	Aline Leme da Silva
2016	Abordando frações em perspectiva histórica: uma possibilidade de ensino para a educação básica	Lídia de Sousa da Cruz

Fonte: Construção da autora

Considerando os fichamentos das dissertações listadas no quadro 1, podemos afirmar que das quatro dissertações encontradas em nosso primeiro levantamento, apenas as duas primeiras relacionam a História da Matemática à formação do professor. Para tanto, foram consideradas as informações do resumo de cada trabalho. Ana Jimena Pérez (2015) entrevistou docentes de dois cursos de Licenciatura em Matemática para discutir sobre como a disciplina História da Matemática pode ser compreendida em um curso de formação inicial de professores de Matemática. Rosana Silva (2015) analisou os planos de aula do Portal do professor do MEC que abordavam a História da Matemática. Como este portal foi entendido como espaço de formação continuada, Rosana Silva (2015) estabeleceu uma relação entre História e formação de professores.

Já a terceira dissertação, de Aline Silva (2015), traz uma pesquisa biográfica do matemático italiano Achille Bassi, traçando sua trajetória profissional desenvolvida no Brasil. Esta pesquisa não aborda a formação de professores e sim concentra-se na vida e na obra do matemático. A quarta dissertação, de Lídia da Cruz (2016), desenvolveu uma intervenção didática para o ensino de frações na educação básica, na qual se abordava a História da Matemática. Ou seja, a autora abordou a História como recurso para o ensino e não para a formação de professores.

Dos quatro trabalhos encontrados no nosso primeiro levantamento, apenas dois foram selecionados para serem analisados na Hermenêutica de Profundidade posteriormente: o de Ana Jimena Pérez (2015) e o de Rosana Silva (2015), pelo fato destes se referirem diretamente, ou indiretamente, à formação de professores. Procederemos do mesmo modo com as dissertações e teses desenvolvidas em outros programas de pós-graduação a serem investigados.

Considerações finais

A pesquisa está em uma fase inicial de levantamento dos dados com as buscas de informações nos sites dos programas de pós-graduação das universidades paulistas e com o fichamento das dissertações e teses encontradas. Baseando-nos em nosso referencial teórico, podemos afirmar que são muitas as possibilidades de entender a relação entre a História da Matemática e a formação de professores. Queremos compreender como se dá tal relação nas produções de nossa década atual, que foram desenvolvidos nas universidades paulistas.

Com o fichamento das produções acadêmicas encontradas em nosso levantamento pretendemos ter uma visão panorâmica da relação. Com a análise via Hermenêutica de Profundidade obteremos uma compreensão profunda acerca dos elementos que constituem tal relação. Nossa expectativa é que a pesquisa nos auxilie a identificar as potencialidades da História da Matemática como instrumento de formação de professores dentro dos contextos educacional e social atuais.

Bibliografia

Brasil, MEC. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental - Matemática.* Brasília: MEC.

Cardoso, V.C. (2009). *A Cigarra e a Formiga: uma reflexão sobre a Educação Matemática brasileira da primeira década do século XXI***.** Campinas: UNICAMP, tese de doutoramento.

_____. (2010). A história da matemática na formação de professores que ensinam matemática (Mesa Redonda). *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM),* Salvador: SBEM.

Gomes, L.F. e Araman, E.M.O. (2016). História da Matemática no ensino de Matemática: um mapeamento dos artigos publicados em alguns periódicos nacionais na última década. *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM).* São Paulo: SBEM.

Miguel, A. (1998). As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos Reforçadores e questionadores. *Zetetiké,* 73-105.

Miguel, A. e Brito, A. J. (1996). A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. *Cadernos CEDES - História e Educação Matemática*. Campinas: Papirus, 40, 47-61.

Miguel, A. e Miorim, M. A. (2011). *A História na Educação Matemática: propostas e desafios.* Belo Horizonte: Autêntica.

Thompson, J. B. (2000). *Ideologia e Cultura Moderna: teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa.* (5ª ed.) Petrópolis: Editora Vozes.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Interpretaciones del método de Descartes en Didáctica del álgebra. Estudio documental[1]

Jhon Helver **Bello** Chávez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
jhonhelver@gmail.com

Resumen

Esta comunicación presenta un estudio documental de las interpretaciones del método cartesiano en tres libros sobre enseñanza y aprendizaje del álgebra, su influencia y uso en la comprensión del álgebra escolar.

Se encontraron argumentos para indicar que algunas interpretaciones usadas en didáctica respecto a la práctica matemática de Descartes develan una concepción del método cartesiano que privilegia aspectos de tipo sintáctico y metódico, dejando a un lado el análisis del tratamiento representacional y semántico que se encuentra en la obra. La importancia educativa que se le otorga al método de análisis está relacionada con la manipulación algebraica y la construcción de un sistema simbólico, las reflexiones sobre las necesidades interpretativas, diagramáticas y semánticas del método en la solución de problemas son exiguas.

Palabras clave: método de Descartes, didáctica del álgebra, enseñanza del álgebra, Geometría, historia de la matemática

Problemática a estudiar

La participación por parte de la Historia de la Matemática en la Didáctica implica la interpretación, selección y análisis de aspectos que el didacta considera relevantes para los procesos de enseñanza aprendizaje. El didacta interpreta y analiza las matemáticas a partir reconstrucciones históricas centradas en diferentes aspectos; sociales, epistemológicos o sociológicos. De esta manera, organiza un nuevo relato histórico que considera relevante para su práctica respecto a un objeto matemático de estudio. En consecuencia, reconstruye la historia desde necesidades específicas respecto al tipo de conocimiento que desea trabajar, reconoce

[1] Este estudio hace parte de los antecedentes del proyecto de tesis doctoral: Diagramas y práctica matemática en la geometría cartesiana (1637-1750). Contribución de la historia de la matemática a la formación de profesores. Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle -Colombia-.

algunos acontecimientos históricos que inspiran su acción; este proceso lo realiza desde una mirada epistemológica del objeto en la Didáctica.

Este documento devela en tres libros sobre enseñanza y aprendizaje del álgebra las interpretaciones en relación con los trabajos históricos, especialmente la *Geometría* (Descartes, 1637). Se estudia la posición teórica que han realizado los didactas de estos acontecimientos desde el conocimiento que los historiadores tienen de la obra de Descartes. Se estudia en un momento de la Didáctica de la Matemática las interpretaciones y usos de la obra histórica.

Los textos fueron escogidos porque en el contexto nacional, especialmente en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, son usados para formar profesores, para dar a conocer la parte histórica del trabajo que se ha realizado en el campo. Los textos se ubican en una etapa de consolidación de la investigación en enseñanza y aprendizaje del álgebra, desde 1996 hasta 2004. En el primero, *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, se estudia la parte I: *Historical Perspectives in the Development of Algebra* (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996). En el segundo texto se profundiza en el capítulo ocho *Working Group on Algebra History in Mathematics Education* del estudio 12th ICMI (Stacey, Chick, & Kendal, 2004). Este capítulo tiene como propósito analizar estudios en historia del álgebra que en el futuro puedan examinarse para la enseñanza y aprendizaje. El tercer texto *Perspectives on School Algebra* (Sutherland, Rojano, Bell, & Lins, 2002).

¿Qué dice la Historia de las Matemáticas de la obra matemática de Descartes?

El análisis de Liu (2017) reseña que los investigadores han realizado dos tipos de lecturas del papel de la geometría y el álgebra en la obra de Descartes, la lectura tradicional y la lectura progresista. La primera caracterizada por dar más prioridad a la herencia euclidiana, en especial al papel de la construcción geométrica. En esta perspectiva se entiende una mayor importancia epistemológica a la geometría que al álgebra. Esta se comprende como una herramienta que posibilita la solución de problemas geométricos.

La lectura progresista reconoce en la obra de Descartes mayor contribución al desarrollo de una concepción de matemática más cercana a la actual. De esta manera, este tipo de interpretación le reconoce menos valor al trabajo geométrico -sin desconocerlo- y le pone énfasis a la contribución en la estructuración del álgebra; al análisis y organización de entidades abstractas que luego contribuyeron con la matemática. En este tipo de lectura se entiende que Descartes liberó a la magnitud y el número de intuiciones espaciales.

Reconociendo las diferencias entre los enfoques que han estudiado la obra matemática de Descartes, este estudio centra el marco referencial con el que estudia el corpus documental desde la práctica que relaciona geometría y álgebra a través del método de resolución de problemas, idea que reconocen los dos enfoques históricos del texto. El método es el centro de la práctica matemática que se desarrolló a través de la publicación de la *Geometría*, que, como se sabe, hace parte del *Discurso del método para conducir bien la propia razón y buscar la verdad en las ciencias* (Descartes, 1637).

Método de solución de problemas

Es conocida la oposición que Descartes tuvo a la silogística de razonamiento llevada a cabo por los escolásticos, en especial su crítica al papel convincente para probar cosas que se conocen (Descartes, trad. en 2010, trad. en 1996). Sustentó la necesidad en avanzar en un proyecto para encontrar un método de descubrimiento de verdades, con la idea de descomponer

en los elementos más simples cada problema geométrico (Gaukroger, 1989).

Dentro de su filosofía esta técnica estuvo encaminada a orientar la solución de cualquier problema geométrico, fue basada en el método de análisis y planteó una separación de la técnica argumentativa Euclidiana.

> Sobre el procedimiento para acceder a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas. Si, pues, deseamos resolver un problema, inicialmente debe suponerse efectuada la resolución dando nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción, tanto a las que son desconocidas como a las que son conocidas. A continuación, sin establecer distinción entre las lineas conocidas y las desconocidas, debemos decifrar el problema siguiendo el orden que muestre, de modo más natural, las relaciones entre estas líneas, hasta que se identifique un medio de expresar una misma cantidad de dos formas: esto es lo que se entiende por una ecuación. (Descartes, trad. en 1996, p.392).

En el método la ecuación se convirtió en un medio que permitió otra forma de argumentación respecto a la tradición griega. El trabajo de Descartes desarrolló el método de análisis el cual permitió superar el uso de figuras arbitrarias que generalizaban las propiedades de los objetos y contribuyó con diagramas que muestran las relaciones entre objetos geométricos y permitieron especificar a partir de ecuaciones lo que se considera dado,

> En adelante se podían incluir en el razonamiento todos los elementos que estaban implicados, como si todos fueran dados, sin que esta unificación de tratamientos y procedimientos implicaran en ningún momento el menor riesgo de confusión en cuanto al estatuto exacto de cada uno de ellos Gardies (como se citó en Arboleda, 2012, pág. 3).

Descartes plantea en su *Geometría* el uso de símbolos de manera temprana, al advertir el uso de la letra para designar la magnitud a partir de un segmento de recta

> Sobre el uso de letras en geometría. Pero frecuentemente no es necesario trazar de esta forma tales líneas sobre el papel, siendo suficiente designar cada una de ellas por una letra. Asi para sumar la línea AB y CH, llamo a la una a a la otra b y escribo $a + b$ (Descartes, trad. en 1996, p. 391).

Este aspecto contribuye a superar la visión euclideana de homogeniedad. En Descartes $a^2, a^3, \sqrt[n]{a}, n \geq 0$, pueden ser representados mediante una linea recta, se obtienen construcciones geométricas por medio de segmentos que representan por ejemplo, ecuaciones de grado n.

Esta nueva forma de operar involucró una metafísica que en su época revolucionó la forma de hacer matemáticas, su base fundamental estuvo en dejar a un lado la perspectiva de los objetos y enfocarse en las relaciones (Macbeth, 2004, 2014). El interés de estudio en las matemáticas cambió, de objetos geométricos como líneas, círculos y polígonos a relaciones entre segmentos de línea; las cuales se entienden como representantes de cantidades arbitrarias y se pueden representar por medio de proporciones: las matemáticas vistas desde la simplicidad de las relaciones entre líneas.

Dos momentos en la interpretación del signo se establecieron en el método de solución de problemas; el primero vinculado con la interpretación de la situación por ejemplo, en el problema de Pappus parte de las inferencias que se realizan son producto del diagrama que usa, el cual no cambia durante toda la obra, las rectas están en posición dada, esto permite deducir las

relaciones entre las rectas para la solución y sus implicaciones en la forma de las curvas y de las representaciones simbólicas (Maronne, 2007). El otro momento se establece al construir geométricamente los segmentos de linea con longitudes iguales a las raices de una ecuación, representar geometricamente la solución de ecuaciones es parte del método propuesto.

Según (Mancosu, 1996) en los comentaristas de la obra de Descartes existen dos interpretaciones del papel del álgebra en *La Geometría*. La primera representada por los trabajos de Bos, Boyer, Grosholz, Lachterman y Lenoir, la cual sostiene que el álgebra es una herramienta que ayuda a proporcionar la economía, de esta manera el estatus epistemológico de la representación simbólica era ese, herramienta; el medio de representación y definición era la curva. Una segunda interpretación es la de Giusti, quien considera que la identificación de la curva por medio de la ecuación, está en el corazón del programa cartesiano, los medios para construir curvas son secundarios.

Parte del trabajo que se presenta en la *Geometría* se sustenta en mostrar las limitaciones de la regla y el compás, aceptar instrumentos articulados para trazar curvas involucró los medios de construcción en una nueva organización, algunas denominadas por los antiguos como mecánicas ahora cumplen los criterios para ser geométricas.

> …pues si pensamos que las han denominado de tal modo porque es necesario utilizar algún instrumento para trazarlas, entonces deberíamos rechazar por la misma razón los círculos y las líneas rectas, puesto que no se trazan sobre el papel, sino utilizando la regla y el compás que también pueden ser considerados como máquinas… (Descartes, trad. en 1996, pág. 409).

Descartes incluye el tratamiento de instrumentos mecánicos, compases, que le permiten ir trabajando alrededor de ideas primarias sobre las matemáticas, como por ejemplo la media proporcional. Es cierto que la revisión de la *Geometría* deja duda sobre la existencia de este tipo de instrumentos, pues estos podrían ser diagramas para comprender los problemas; sin embargo algunos comentaristas que han investigado las correspondencia de Descartes en especial con Beeckman y el tratado de *private reflections* aseguran la existenica de estos instrumentos (Bos, 2001; Shea, 1993). Se construían curvas que daban muestra de las relaciones que se sintetizaban en la escritura de una ecuación. Este es un procedimiento que aparece frecuentemente en la *Geometría.*

Descartes fue elaborando un enfoque unificado de técnicas algebraicas, en donde los problemas que son suceptibles de construcción podrían reducirse a un grupo de problemas estándares, los cuales podrían ser representados por las relaciones de una construcción conocida. Relacionó los instrumentos que hacen posible trazar una curva, la construcción geométrica y la solución de la ecuación, con expresiones algebraicas estandarizadas y generales. Mostró el potencial del método para integrar problemas que en la clasificación de los antiguos estaban separados.

Análisis de los textos

El estudio establece relaciones entre los niveles semánticos y pragmáticos de fragmentos de los textos analizados. Las unidades básicas son frases tomadas entre puntos apartes o puntos seguidos, y citas textuales relacionadas con la *Geometría* o respecto a Descartes. Una primera revisión del corpus documental permitió develar dos categorías de análisis, una a nivel explicativo de la obra historica, las interpretaciones del método y otra a nivel de la praxis dentro de la didáctica, los usos didácticos del método.

Respecto a las interpretaciones del método

En esta categoría de análisis resaltan dos elementos de discusión, el papel del símbolo en el desarrollo de método y el papel del análisis en la resolución de problemas geométricos.

En los tres textos se evidencia un reconocimiento y énfasis de la necesidad de escritura simbólica para el desarrollo del método. Sin embargo, no se evidencia referencia ni uso de los procesos constructivos geométricos que garantizaron la posibilidad de interpretación de lo desconocido como dado. Parte del método consiste en interpretar lo que se busca con las mismas características y propiedades de lo conocido.

El constraste entre una relación geométrica y su representación simbólica se encontraba mediada por el papel de la construcción. Este aspecto se reconoce como el propósito metodológico de la Geometría, el cual consiste en enfrentar una cuestión crucial en la tradición de la resolución de problemas geométricos: ¿cómo construir cuando regla y compás son insuficientes? (Bos, 1984, 2001).

Los apartes de los textos analizados hacen referencia a un análisis desprovisto de relaciones geométricas contradiciendo la perspectiva que presenta Descartes. En obras posteriores como en Arnauld y Prestet (Schubring, 2005), se evidencia una versión de método más cercana a la que presentan los textos didácticos. En frases como la siguiente se evidencian estas concepciones:

> They observe that the history of symbolism in algebra is the invention of a system that makes it possible to solve problems by manipulation of symbols according to rules, and without recourse to what the symbols mean. This is the legacy of Descartes and others. (Stacey, et al., 2004, p.10).

Esta concepción se corresponde con la lectura progresista del método. Fundamentalmente, se vincula con la creación del sistema de signos matemáticos que posibilitó una estructuración de las expresiones polinómicas y de la resolución de problemas identificando expresiones canónicas:

> Thus the method continues by transforming the written algebraic expressions and the resulting equations in order to reduce them to a canonical form. This implies that it has previously been determined which expressions and which equations will be considered canonical, and that one has a catalogue of all the possible canonical forms and procedures for solving each of them. (Stacey, et al., 2004, p.194).

En la obra se trabajó la forma canónica de los polinomios, sin embargo, este hecho es consecuencia del trabajo sobre aspectos geométricos de la curva. Las unidades de análisis no permiten determinar el alcance que se sugiere de las relaciones entre la curva y su forma canónica. La figura, la construcción, el desarrollo de la gráfica, está ausente en los análisis que se realizan en el texto sobre el método de solución de problemas geométricos. Las duplas de problema geométrico/construcción (curva) y construcción (curva)/ecuación son fundamentales en la comprensión de la importancia histórica de la *Geometría*.

Solamente uno de los textos hace referencia a la representación de las magnitudes y al trabajo relacional que se involucra en el desarrollo del método, pero no describen el tipo de relaciones que permiten el análisis:

> In geometry, analysis revolves around the search for what is known among what seems to be unknown. The core of analysis is the hypothesis, that is the assumption that the problem is solved. As said before it imposes the development of a certain way of representing the unknown magnitudes that are considered given by hypothesis. In that process, all lines or parts of a figure are dealt with in the same way. Relations between those lines are studied, whether the lines are given or not. (Bednarz, et al., 1996, p.36).

El proceso analítico está delineado por una buena elección de lo conocido y desconocido en el problema geométrico. Este aspecto está sustentado en la posibilidad que el método de descubrimiento que posibilita el uso de técnicas algebraicas quede cubierto por la comprensión de los asuntos que anteceden la suposición de resolución del problema (Gaukroger, 1989). La ecuación contiene elementos conocidos y desconocidos; pero su conformación es sustentable por saber geométrico.

Uso didáctico del método

Las secciones analizadas hacen refencia a la importancia del método en la adquisición del sistema simbólico del álgebra escolar. Le otorgan relevancia en la construcción de una sintaxis para la matemática, categorizando al método cartesiano como algebraico. En la solución de problemas el método aparece relacionado con el reconocimiento de cantidades dadas y desconocidas

> What lies at the heart of algebraic problem solving is the expression of problems in the language of algebra by means of equations. In order to be able to compare the ways of writing equations that represent word problems in different historical texts so that the comparison brings out what is pertinent for teaching, a good strategy is to take as a reference what is done in the Cartesian Method, which is the algebraic method *par excellence* and may be considered as the canon of the methods traditionally taught in school systems. (Stacey, et al., 2004, p.191).

En el tratamiento didáctico no se evidencian propuestas de trabajo respecto a la representación de magnitudes por medio de segmentos. La dificultad que se enuncia en la enseñanza refiere al papel del símbolo que subyace al uso del método. En las fases que se reconocen no se involucra la interpretación de problemas por medio de construcciones diferentes a la simbólica, desconociendo la fase interpretativa del problema a partir del diagrama que permite inferir las relaciones que se representan en ecuaciones. Sin embargo, se reconocen diferentes interpretaciones de la letra en el proceso de construcción del método, el paso de la incognita a la variable

> …competent use of the Cartesian Method is linked with the creation of families of problems that are represented in the mathematical sign system (MSS) of algebra as canonical forms. This implies an evolution of the use of symbolisation in which, finally, the competent user can give meaning to a symbolic representation of the problem that arises from the particular concrete examples given in teaching. Student will make sense of the Cartesian Method when they become finally awarethat by applying it they can solve families of problems, defined by the same scheme of solution. (Stacey, et al., 2004, p.191).

En los documentos no se profundizan los medios que hacen posible comprender los problemas o realizar el primer paso del método, establecer las relaciones de lo conocido y de lo desconocido. El énfasis se pone en el reconocimiento de técnicas algebraicas, de las ecuaciones como una nueva forma de resolución de problemas al margen de los procedimientos aritméticos

y geométricos. Las únicas experiencias que se presentan involucran problemas en la relación aritmética – álgebra y vinculan diferentes recursos como hojas de cálculo, exploración por métodos artiméticos y gráficas de curvas, siempre en la construcción de familias de problemas, en busca de la comprensión de la operatividad de lo simbólico

> The role played by intermediate methods in the passage from the classical arithmetic method to the Cartesian one has to do with the possibility of the user constructing meanings for the algebraic relationships between the elements of the problem. Although it should be pointed out that, on the other hand, the essential difference between the introduction of algebra and all previous approaches lies in that in the latter, when solving problems, the unknown is represented, although it is not operated. Inferences are made with a reference to the representation of the unknown; but if operated, this is always done by means of the data: if a mention is made of unknowns, this is only in terms of the results of operations which are being done with the data. (Sutherland, et al., 2002, p. 175).

En esta categoría se evidencia que hasta la fecha de producción de los documentos analizados, el método cartesiano seguía siendo un elemento de análisis para la didáctica de la matemática. Por un lado vinculado a la construcción de sistemas simbólicos y por otro a la resolución de problemas por medio del reconocimiento de la estructura simbólica canónica de los polinomios.

Reflexión final

Los estudios históricos sobre la obra matemática de Descartes en especial de la *Geometría* (Descartes, 1637), muestran un método ligado a la resolución de problemas geométricos y al análisis. La representación de datos conocidos y desconocidos por medio de segmentos, la representación de relaciones geométricas por ecuaciones y el estudio de su solución por instrumentos o construcciones geométricas, hacen parte de las actividades que caracterizan la práctica. La construcción se entiende como un elemento fundamental en la obra. El estudio de las propiedades de las curvas y una clasificación que incluye nuevos problemas como geométricos, permiten comprender y usar el método propuesto por Descartes.

En los textos analizados de enseñanza y aprendizaje del álgebra se desarrolla una idea de método cartesiano vinculada con el dominio de técnicas algebraicas y con la resolución de problemas a partir de expresiones canónicas. Aunque los textos reconocen la importancia didáctica del método, la concepción que persiste está más vinculada con autores posteriores a Descartes, se fortalece la técnica algebraica y la representación simbólica de las curvas no depende de planteamientos geométricos. No se vinculan medios de representación diferentes al simbólico y la noción de curva es poco trabajada como medio que permite comprender la expresión algebraica, en las oportunidades que aparece lo hace más como representación de los símbolos y no como justificación o representación de ellos.

La interpretación que hacen los libros analizados descarta el uso de reflexiones didácticas sobre la semántica que se desarrolla en la obra de Descartes, los diagramas de los problemas que permiten la construcción de relaciones geométricas y la evolución en el método del tratamiento de la letra no se encuentran desarrollados dentro de los textos. El espíritu relacional de la matemática en Descartes no hace parte de argumentos que acerquen el análisis histórico de la obra a la didáctica. En correspondencia, la posibilidad de uso a la que se refieren está ligada al desarrollo del sistema simbólico y por medio de éste a la identificación de formas canónicas de solución de problemas.

Referencias y Bibliografía

Arboleda, L. (2012). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas. *13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (p.764 -777). Medellín: Universidad de Medellín. Obtenido de http://asocolme.org/images/eventos/13/MATEMATICA_EDUCATIVA_13_Encuentro_Colombiano%20ECME.pdf

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee , L. (Eds.). (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bos, H. (1984). Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory: the construction of ecuations. 1637 - 1750. *Archive for History of Exact Sciences*, 331 - 380. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/41133725

Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* New York: Springer.

Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences.* Recuperado de https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86069594

Descartes, R. (2010). *Reglas para la Dirección del Espíritu.* (J. Navarro Cordón, Trad.). Madrid: Alianza Editorial.

Descartes, R. (1996). *Discurso del Método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría.* (J. Sánchez Ron, Eds., & G. Quíntas, Trad.). Barcelona: Círculo de Lectores.

Gaukroger, S. (1989). *Cartesian Logic.* Oxford: Clanderon press.

Liu, C. (2017). Re-examining Descartes´ Algebra and Geometry. *Analytic Philosophy, 58*(1), 29 - 57.

Macbeth, D. (2004). Viète, Descartes, and the Emergence of Modern Mathematics. *Graduate Faculty Philosophy Journal, 25*(2), 87 - 117.

Macbeth, D. (2014). *Realizing Reason. A Narrative of Truth and Knowing.* Oxford: Oxford University Press.

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century.* Oxford: Oxford University Press.

Maronne, S. (2007). *La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne: 1637 - 1661.* (Tesis doctoral, Université Paris - Diderot- Paris VII). Recuperada de: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00203094/document

Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number concept Uniderlying the development of Analisis in 17-19th Century France and Germany.* New York: Springer.

Shea, W. (1993). *La magia de los números y el movimiento. La carrera científica de Descartes.* Madrid: Alianza Editorial.

Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (Eds.). (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Sutherland, R., Rojano , T., Bell, A., & Lins, R. (Eds.). (2002). *Perspectives on School Algebra.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Hacia un Diálogo entre Teorías Relacionadas con las Nociones de Obstáculo y Conflicto Semiótico en Educación Matemática

Gloria Inés Neira Sanabria
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia
gineiras@correo.udistrital.edu.co

Resumen

¿Es un obstáculo epistemológico un error, una mala comprensión, una incomprensión, o sencillamente una cierta forma de conocer que funciona en algunos dominios restringidos pero se revela inadecuada en otros? Se presentan diferentes tendencias, teorías y enfoques relacionados con la noción de obstáculo epistemológico, nociones como conflictos, errores, dificultades, mis-concepciones, de origen epistemológico, semiótico, cultural, didáctico…El concepto de "obstáculo epistemológico" concebido como esquemas de pensamiento culturalmente adquiridos, creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas, emerge en la educación matemática como una manera de explicar las dificultades de comprensión que no dependen solamente de falta de experiencia con las matemáticas, ni de falta de habilidades o destrezas, sino también del simbolismo, del lenguaje, de la semiótica, de la naturaleza de los conceptos matemáticos mismos y de la cultura en la cual estos han sido desarrollados.

Palabras clave: Obstáculo epistemológico, conflictos semióticos, concepciones, comprensión, discursos.

Introducción

El término obstáculo epistemológico fue construido por el físico y filósofo francés Gastón Bachelard (1938/2004), quien postuló que la naturaleza no nos es dada y nuestras mentes nunca son vírgenes en frente de la realidad, pues sea lo que sea que veamos, digamos u observemos está direccionado por lo que ya conocemos, pensamos, creemos o queremos ver.

Enunció algunos obstáculos en su obra: la experiencia básica o conocimientos previos, el conocimiento general, el obstáculo verbal, el conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo sustancialista y el animista. No dio una definición explícita de obstáculo epistemológico, y ninguno de los ejemplos de obstáculo epistemológico dado por Bachelard se aplica a las

matemáticas, como él mismo lo advirtió,[1] puesto que la matemática no es una ciencia natural, no trata acerca de fenómenos del mundo real, ni se basa en la observación y la inducción. Sin embargo, a partir del debate que desató la incorporación del concepto a la educación matemática, se empezó a creer que sí tenía sentido hablar de obstáculos epistemológicos en matemáticas, y que podían ser la explicación para eso que a diario se detectaba como obstaculizante en los aprendizajes de los estudiantes. Se buscaba un fundamento teórico para el nuevo concepto, y naturalmente transferir este concepto de las ciencias naturales a las matemáticas requería adaptaciones cuidadosas y profundas reflexiones filosóficas acerca de la naturaleza de las matemáticas.

Esta visión, a su vez, requirió repensar la enseñanza y la valoración de la comprensión de los estudiantes, lo cual explicaba sus errores, pues algunos de ellos eran causados por formas de pensar completamente legitimas con una cierta estructura de la mente, un cierto contexto de problemas y ciertas creencias acerca de lo que es verdadero en matemáticas.

Emergió claramente entre algunos investigadores que algunas de las formas de comprensión de los estudiantes merecían más respeto y atención, y que en vez de tratar de reemplazar el conocimiento errado por el correcto, el esfuerzo de los profesores debería ser invertido en la negociación de significados, en la invención de problemas especiales en los cuales los estudiantes experimentaran un conflicto mental que los hiciera conscientes de que dichas formas de comprensión habituales, posiblemente no sean las únicas y que no son universales.

Bachelard construye esta epistemología en 1938 y es hasta el año 1976 que Brousseau la incorpora a la investigación en educación matemática. Se describe brevemente el tránsito de esta noción hacia el campo específico de la investigación en educación matemática, que se tarda alrededor de 38 años.

Desarrollo

Aproximación desde la educación matemática

Brousseau (1983/1995) ya veía en la noción de obstáculo el medio de cambiar el estatuto del error mostrando que el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar, dado que el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, el error es constitutivo de sentido del conocimiento adquirido.

Distinguió, tres orígenes fundamentales de los obstáculos encontrados en la enseñanza matemática:

• *Un origen ontogenético, debido a las limitaciones impuestas, por el nivel de desarrollo de las capacidades cognitivas de los alumnos, en el proceso de enseñanza.*

• *Un origen didáctico, debido a las decisiones del sistema educativo, o las acciones del*

[1] "…en efecto, la historia de las matemáticas es una maravilla de regularidad. Ella conoce pausas. Ella no conoce los periodos de errores. Ninguna de las tesis que sustentamos en este libro apunta hacia el conocimiento matemático. No se refieren sino al conocimiento del mundo objetivo". (1938/2004) Pág. 25

profesor en el proceso de enseñanza.

• *Un origen epistemológico, por los obstáculos ligados a la naturaleza del conocimiento mismo y que son propios de él, se repiten en la historia, muestran su persistencia y dificultad para evolucionar,* es decir, los obstáculos en el sentido de Bachelard.

Todo un programa de investigación empezó a desarrollarse alrededor de la noción de obstáculo epistemológico. Como un ejemplo de lo anterior se cita el trabajo de Sierpinska (1994) acerca de los obstáculos epistemológicos ligados a las matemáticas que se enseñan en la escuela y encontrar los medios didácticos para ayudar a los alumnos a superarlos, conservando dos aspectos de la noción de obstáculo epistemológico según Bachelard (1938/2004): el carácter inevitable de su aparición, y la repetición de su aparición en la filogénesis y la ontogénesis de los conceptos. Reafirma a partir de esta investigación, que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculo epistemológico, es su aparición inevitable y su resistencia en la historia de los conceptos considerados.

Sierpinska (1994) explica la comprensión en matemáticas basada precisamente en la teoría de los obstáculos epistemológicos. El primer supuesto que enuncia de los obstáculos epistemológicos es que de un nivel de conocimiento y comprensión a otro hay necesidad de integración y reorganización. Afirma que la cognición no es un proceso acumulativo, pues las nuevas comprensiones pueden solamente ser parcialmente construidas sobre caminos de desarrollo previos. El otro supuesto de la filosofía de los obstáculos epistemológicos que enuncia, es que no podemos hacer metafísica de la comprensión científica, lo cual significa que los obstáculos epistemológicos son inevitables: su superación requiere una reconstrucción de comprensiones fundamentales.

Así mismo postula que la comprensión no es independiente del desarrollo, ni del lenguaje en el cual se comunica, ni tampoco de la cultura en la cual ella se socializa. Sus creencias, normas cognitivas, visiones de mundo, pueden ser todas fuentes de obstáculos para comprender la estructura teórica del conocimiento científico. Tanto en la instrucción como en el desarrollo hay momentos críticos: esos momentos gobiernan lo que precede y lo que sigue.

Se formulan entonces varias preguntas: ¿Sobre qué bases podemos afirmar que el pensamiento de los estudiantes se encuentra influenciado por obstáculos epistemológicos? ¿Es un obstáculo epistemológico un error, una mala comprensión, una incomprensión, o sencillamente una cierta forma de conocer que funciona en algunos dominios restringidos, pero se revela inadecuada en otros? ¿O es una actitud de la mente que permite tomar opiniones por hechos, y unos pocos casos de evidencia por leyes generales?

Propone su ya conocida lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite, de los que se concluye que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculos epistemológicos, es su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos considerados, tal como había sido postulado por Bachelard y por Brousseau en su conocida "arqueología de los obstáculos epistemológicos", así como la observación de concepciones análogas en los alumnos. Los obstáculos se presentan entonces en el camino del cambio del pensamiento común al pensamiento científico; es decir en la transición de una clase de racionalidad a otra clase de racionalidad.

Otros enfoques relacionados con la noción de obstáculo epistemológico

Se describen brevemente en una línea de continuidad sin contraponerlos, otros enfoques

vinculados con la noción de obstáculo, que algunos investigadores desde otras tendencias y teorías han considerado.

Artigue (1995) utiliza el término «concepción», término que, como el de obstáculo, ha trazado su camino en el edificio didáctico, al menos en Francia, suscitando menos pasión que la noción de obstáculo, pero quizá por eso mismo, menos trabajada por la comunidad. (Delgado, 1998). La noción de concepción responde a dos necesidades distintas: Por un lado pone en evidencia la pluralidad de los puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferencia las representaciones y modos de tratamiento que les son asociados a ellas, y pone en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de tal o cual clase de problemas. Por otra parte, ayuda al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica propiciada por los modelos empiristas del aprendizaje, y le permitirle diferenciar el saber que el profesor va a transmitir y los conocimientos efectivamente construidos por el alumno.

Este término de «concepción» va a aparecer en la literatura didáctica, importado en cierto modo del lenguaje corriente, sin que de parte de los autores se sienta la necesidad de dar una definición didáctica de él. La palabra concepción se usa aquí para establecer una distinción entre el objeto matemático que es único y las significaciones variadas que le pueden asociar los estudiantes, a medida que su conocimiento va evolucionando hacia un estatus superior.

La identificación y caracterización de las concepciones que los estudiantes construyen, a medida que avanzan en el estudio de las matemáticas, es un tema que ha despertado el interés de los investigadores en didáctica de las matemáticas porque, como ha señalado Delgado (1998), son conocimientos que, en algunos casos, se constituyen en obstáculos para el aprendizaje, en torno a los cuales se reagrupan los errores recurrentes. Además el estudio de las concepciones permite conocer el efecto de la enseñanza al determinar qué es lo que realmente están aprendiendo los estudiantes y tomar decisiones al respecto.

Otra tendencia asociada que se encuentra al revisar la literatura es la mirada dirigida hacia la noción de error. Si los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, concluiremos que en el proceso de construcción de los conceptos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y el proceso de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación, mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones (Rico 1998, p. 75).

Rico (1998, p. 84) enuncia algunas características generales: Los errores son sorprendentes, extremadamente persistentes y resistentes a cambiar por sí mismos ya que puede requerirse una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos. Pueden ser: sistemáticos o por azar. Los primeros son mucho más frecuentes y se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera como correcto. Los errores por azar reflejan falta de atención y lapsus ocasionales, que tienen relativamente poca importancia. Surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente. Cualquier teoría de instrucción debe modificar la tendencia a condenar los errores y a culpabilizar a los estudiantes de los mismos, sin perder de vista que todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores.

Avanzando hacia una mirada de los obstáculos en la perspectiva de la teoría de la objetivación cultural, se encuentra a Radford (2007), quien desde una aproximación histórico-cultural al pensamiento matemático, sostiene que aquello que conocemos y el modo con el cual

llegamos al conocimiento, debe enmarcarse no sólo por medio de aquello que hacemos ahora y cómo lo hacemos, sino también por una inteligencia histórica que reposa en prácticas sociales, instituciones, lenguaje, artefactos, libros, monumentos,... El conocimiento y el conocer son ambos sostenidos por esta inteligencia histórica que hemos heredado de las generaciones pasadas. La historia nos hace conscientes del hecho de que no somos ni el producto exclusivo de nuestras actividades, ni el producto irrevocable de nuestras prácticas discursivas.

Aquello que hace que un obstáculo sea epistemológico es su presunta naturaleza no cultural, no didáctica, no onto- genética: lo es por su propia naturaleza epistémica intrínseca. Según lo cual Radford (2007), interpreta que la naturaleza epistémica de la cultura está excluida desde el inicio. Se pregunta qué tan fuerte puede ser el vínculo del obstáculo epistemológico y los factores sociales, y se atreve a concluir que no puede ser tan fuerte, pues si lo fuera la idea de obstáculo epistemológico resultaría destruida y la tipología de obstáculos (onto-genético, didáctico, cultural y epistemológico) ya no tendría sentido.

Si el término "obstáculo epistemológico" refiere un tipo de conocimiento parcial, puesto en alguna parte del recorrido del desarrollo conceptual, un conocimiento que sirve para resolver ciertos problemas, pero que comienza a ser causa de errores en el momento en que es aplicado por fuera de ese tipo de problemas, entonces para él la cuestión fundamental a tratar concierne a la explicación de la naturaleza del camino, que se supone es recorrido por todos nosotros durante el desarrollo conceptual, prescindiendo de nuestro encuadramiento temporal y cultural.

Radford (2007) privilegia la construcción social, histórica y cultural del conocimiento y por tanto los obstáculos los concibe en tanto culturales o didácticos. Según esta mirada socio-cultural se debe, a partir de las perspectivas culturales explicar el trabajo de los alumnos: cuál es el valor social que hace que uno cambie una cosa por otra, cuáles son las cosas que permitieron ese desenvolvimiento.

Por otra parte, Godino, Batanero y Font (2003), hablan de conflictos semióticos y los definen como: "Cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa".

Los conflictos semióticos se consideran como explicaciones potenciales de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos. Aclara que si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo, en tanto que cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

Esta teoría concibe conflicto como una noción más general que la de Obstáculo, y algo más específica que la de "error" o "dificultad", enfatizando que la idea de conflicto sugiere un origen (semiótico) de tales errores o dificultades, y dota a tales nociones de un sentido pragmático mediado por la actividad y la práctica.

En el EOS se considera que cabe hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se considera como errores de aprendizaje. Godino, Batanero y Font (2003) distinguen tales categorías:

- Se habla de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar.
- El término dificultad indicará el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.

A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente. Afirman que si un tipo de error se manifiesta en un cierto número de alumnos de manera persistente en una tarea, su origen se debe buscar en los conocimientos requeridos por la tarea, y no tanto en los propios alumnos. La complejidad semiótica asociada a la práctica matemática es una posible causa de las dificultades de aprendizaje. El análisis de la trama de funciones semióticas asociada al contenido matemático permite prever su grado de dificultad potencial, e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza.

Cuando el error se produce porque el alumno usa un conocimiento, que es válido en algunas circunstancias, en contextos donde no se puede aplicar se dice que existe un obstáculo. La superación del obstáculo requiere que el alumno construya un significado personal del objeto en cuestión suficientemente rico, de manera que la práctica que es adecuada en un cierto contexto no se use en otro en el que no es válida. Para ello será necesario, además, que los significados pretendidos e implementados sean suficientemente representativos de los significados de referencia.

Los errores, dificultades y obstáculos que tienen su origen en la complejidad semiótica o bien en la falta de representatividad de los significados pretendidos e implementados, en el EOS se llaman conflictos semióticos y conflictos epistémicos.

Afirman Godino, Batanero y Font (2003), que la noción de obstáculo se puede interpretar en términos de "conflictos de significados", a lo cual concretamente lo llama "semiótico": "Siempre que podemos decir que hay un obstáculo, existe un conflicto de significados. Pero no a la inversa, o sea no todo conflicto semiótico es un obstáculo, en el sentido de Brousseau. La noción de conflicto semiótico y sus tipos puede ser más flexible al aplicarse en situaciones menos exigentes que la de obstáculo (según la concibe Brousseau), y además aporta una posible explicación: disparidad de significados".

De otro lado, D'Amore (2007) explica los conflictos cognitivos en términos de imágenes, al afirmar que un estudiante ha podido en el transcurso del tiempo, adquirir un concepto y haberse hecho una imagen, imagen misma que pudo haber sido reforzada en el tiempo a través de pruebas, experiencias repetidas, pero entonces ella se revela inadecuada respecto a otra del mismo concepto… se crea así un conflicto entre la imagen que tenía el estudiante y que la creía válida, in cuestionada (verdadera), y la nueva, que generalmente amplía los limites o profundiza la aplicabilidad del concepto. Asocia la misconcepcion o concepto errado afirmando que para alcanzar la construcción de un concepto es necesario pasar por una misconcepción momentánea.

Algunas imágenes pueden ser misconcepciones, interpretaciones erradas de informaciones recibidas. Por tanto, el conflicto cognitivo es un conflicto interno, a causa de la no congruencia entre dos conceptos, o entre dos imágenes o entre una imagen y un concepto.

Concluye que la carrera escolar de un individuo en las matemáticas, se construye por el

paso o tránsito de miss concepciones a concepciones correctas, luego la miss concepción es una concepción momentánea no correcta, en espera de consolidarse cognitivamente más elaborada, ellas no pueden ser eliminadas, ni son un daño ni un error, parecen ser un momento necesario y delicado hacia el concepto correcto.

Hacia una conceptualización propia de obstáculo

De este panorama presentado: obstáculo epistemológico, concepciones, obstáculos culturales, obstáculos didácticos, conflictos semióticos epistémicos, cognitivos e interaccionales, misconcepciones podemos ver que, reconociendo sus diferencias sustanciales, han existido en la literatura distintos modos de enunciar esas "dificultades", errores, caídas, tropiezos que los maestros detectamos en nuestros estudiantes en las aulas de clase, en todos los niveles de escolaridad, en toda clase de instituciones, de diferentes maneras, y que se ha focalizado el interés de los investigadores en indagar lo que subyace a tales dificultades con el afán de proponer categorías de análisis para explicarlas potencialmente.

Y ¿por qué es importante presentar ese panorama de tendencias, de discursos, de miradas y de perspectivas? Por un lado, para resaltar la importancia de la problemática, por otro para caracterizar las tendencias y perspectivas actuales alrededor de los obstáculos y conflictos, y finalmente y sobre todo para "construir" un enfoque propio que se sustente con conocimiento de las diferentes miradas, tendencias y enfoques y poner de relieve algunos aspectos centrales que conformarán este desarrollo discursivo.

Se va a entender aquí la noción de obstáculo como un conocimiento y no una ausencia de conocimiento; como un conocimiento y no como un error; Un conocimiento que funciona bien en algunos contextos, pero que al ser aplicado en otros produce "errores".

Se conciben los errores como los síntomas, los indicadores de la posible existencia de obstáculos. Aquí la palabra error no se entiende como juicio calificador, como la palabra que juzga un comportamiento, conducta o respuesta errónea del estudiante, sino como aquella conducta que no sigue las reglas institucionales. Se reconoce en los errores que cometen los estudiantes creatividad, comprensiones divergentes de las preguntas formuladas. Se trata de no cargar la palabra semánticamente con la tradición que la asocia al enjuiciamiento peyorativo y calificativo hacia los estudiantes. Son la fuente de indagación más importante, pues los obstáculos pueden inferirse de los errores en las prácticas y de la dificultad experimentada por los que participan en ellas.

Si la conducta errática se repite sistemáticamente se le buscará la etiología en algo que no se reduce a la habilidad motora incipiente. Esa conducta, error, equivocación, violación de la regla institucional, es un síntoma de que ahí hay un obstáculo que no depende de falta de habilidades: Vendrá entonces la caracterización, para precisar su naturaleza.

Se concibe obstáculo como un constructo del que suponemos o inferimos su presencia como fuente de los errores sistemáticos y de las dificultades experimentadas por los estudiantes en las Prácticas Escolares (PE). Es una atribución de causalidad a las dificultades manifiestas. Una dificultad concreta que se presenta en un tema y que se revela en los errores que se cometen, en las dudas, en la perplejidad, puede deberse a que no se tienen los conocimientos necesarios, o puede deberse a que los conocimientos que sí se tienen dificultan el trabajo. A diferencia del conocimiento que falta, el conocimiento que sí está pero que provoca dificultades y conflictos, dudas, errores son síntomas de conocimientos previos que no tienen o que sí tienen

pero entorpecen, dificultan el conocimiento. Y esta misma diferencia se plantea en el tipo de errores detectados: errores accidentales, ocasionales, lapsus y errores sistemáticos, que se deben a algo, ¿a qué se deben?

Conclusión

En la conceptualización de obstáculos planteamos como supuesto una contraposición entre el conocimiento ausente (ignorancias) y el presente pero dificultante que son los obstáculos. En el camino hacia el conocimiento, no se trata de descartar los conocimientos, modelos y teorías previos sino de tener conciencia, de ver cuándo se usan, por qué son potentes, qué peligros tienen y en qué casos no son aplicables.

Los obstáculos epistemológicos no son obstáculos para una correcta o incorrecta comprensión: ellos son obstáculos para un cambio conceptual, paradigmático. Así que podemos introducir a los estudiantes en una nueva situación o problema y esperar que emerjan toda clase de dificultades, malas comprensiones y obstáculos y precisamente esta es una de nuestras principales tareas como profesores, ayudar a los estudiantes a superarlos, a objetivar y ser conscientes de las diferencias, entonces los estudiantes quizá puedan hacer sus propias reorganizaciones.

La razón por la cual los formadores de profesores, los educadores matemáticos de cualquier nivel de enseñanza deben interesarse por estas teorías es porque el patrón del desarrollo conceptual de la niñez a la adolescencia parece ser recapitulado cada vez que un estudiante se embarca en el proyecto de comprensión de algo nuevo o en la construcción de un nuevo concepto. Es entonces cuando los discursos asociados a la noción de obstáculo epistemológico pueden emerger y devenir en campos didácticos al provocar y analizar prácticas, formas de participación, preguntas, recapitulaciones una y otra vez en esa dinámica de interacciones que es la educación en general y la educación matemática en particular.

Bibliografía y Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognoscitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática (pp. 97-135). Bogotá: una empresa docente - Iberoamérica.

Bachelard, G. (2004). *La Formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI editores, vigésimo quinta edición en español. (Obra original publicada en francés en 1938).

Brousseau, G. (1976). La problématique et l'enseignement des Mathématiques, XXVIIIème Rencontre de la CIAEM, Louvain la Neuve

Delgado, C. (1998) Estudio Microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de Límite y Continuidad en universitarios de primer curso. Tesis doctoral inédita. Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals.

Godino J., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas para Maestros. Granada: Universidad de Granada

Radford, L., D'Amore B. y Bagni, G. (2007). Obstáculos Epistemológicos y Perspectiva Socio-cultural de la matemática. Cuadernos del seminario en educación, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá,

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. EMA, "Una Empresa Docente" J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds). Educación Matemática. pp. 69 – 108. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education Series. London, Falmer Press. London. Washington, D.C

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La teoría de los indivisibles matemáticos en el siglo XVII

Leonardo Solanilla Chavarro
Departamento de Matemáticas, Universidad del Tolima
Colombia
leo.solanilla.cha@gmail.com
Juan Felipe Gutiérrez Flórez
Universidad Nacional de Colombia
Colombia
jfgutier@unal.edu.co
Ana Celi Tamayo Acevedo
Universidad de Medellín
Colombia
actamayo@udem.edu.co

Resumen

La teoría de los indivisibles matemáticos, en la cual la comprensión y el uso de lo infinito y lo continuo se hace indispensable, emergió a principios del s.XVII, después de una larga gestación europea que comenzó a finales de la Edad Media. Nuestra investigación se limita a estudiar algunas de las obras principales de Cavalieri, Mengoli, Pascal y Roberval. Se presentan y analizan con cierto detalle no sólo las ideas matemáticas tal como aparecen en los textos originales, sino también su contexto cultural con herramientas de la Hermenéutica, la Historia Conceptual y de las Ciencias. El análisis se realiza con el propósito de evitar el prejuicio tradicional que encasilla a los indivisibles matemáticos como precursores del cálculo infinitesimal; con la intención de devolverles el lugar y el valor histórico y matemático que les es propio, pues en su momento solucionaron problemas como el cómputo de cuadraturas y cubaturas de figuras geométricas.

Palabras clave: Indivisible, infinito, continuo, Historia Conceptual, Historia Cultural de las ciencias, Historia de las matemáticas.

La Teoría matemática de los indivisibles en el siglo XVII.

Introducción

A comienzos del siglo XVII algunos matemáticos innovadores encontraron en los indivisibles la solución definitiva a algunos problemas que venían reelaborándose desde antiguo: centros de gravedad, cuadraturas y cubaturas de figuras planas y espaciales, principalmente.

Estos viejos problemas encerraban el tratamiento de lo infinito y lo continuo, considerándose herederos de una tradición que se remontaba a la Grecia Antigua.

La Historia de las Matemáticas (HM) se debe abordar desde las teorías de la Historia, en particular de la Historia de las Ciencias (HC) (Serres, 1989), de la Historia de los Conceptos (Koselleck, 2004) y de la Historia Intelectual y de las ideas (Pimentel, 2010). Teniendo cuidado de no caer en una mirada netamente internalista o externalista del objeto histórico en estudio (Rossi, 1990) y liberando el análisis que surja de la búsqueda de los precursores expuesta por Canguillem en 1983. Además, el análisis histórico que surja se fundamenta en la Hermenéutica bajo el propósito de confrontar directamente al texto, así el documento escrito se vuelve un "interlocutor", pues el que quiere comprender un texto debe estar dispuesto a dejar decirse algo por éste (Koselleck, Gadamer, 1987). Debido a que el intérprete no se acerca nunca al texto como *tabula rasa*, sino previsto de su precomprensión, con prejuicios, pretensiones y expectativas, entonces se hace necesario durante el proceso hermenéutico asumir dos momentos: 1-Camisa de Fuerza (*Straitjacketing*) y 2- Tomar Alas (*Tanking wings*). En el primer momento se parte del hecho de que cuando se lee un texto matemático por primera vez no se debe comenzar por establecer relaciones con lo que sabemos de las matemáticas tratadas en éste. Hay que hacer un esfuerzo por desligarse de todo. Lo único que importa es el autor y cómo lo dice, en una palabra, lo singular (Solanilla y Tamayo, 2014). En el segundo momento, después de que se haya entendido lo que dijo un matemático en su obra, se puede comenzar a relacionar su pensamiento con el de otros autores y con nuestros conocimientos matemáticos.

Además, la HM debe analizarse desde un enfoque estructuralista pues bajo esté se "pretende captar las reglas que, arraigadas en el espíritu de la humanidad, estructuran no sólo las producciones sino también los productos mentales" (Reale & Antiseri, 1988, p.829, V.3). Adicionalmente, asumiendo un enfoque estructuralista se deroga el mito del progreso científico (Foucault, 1971) algo que ha sido marcado por la Historia oficial de las Matemáticas.

Pero adoptar una posición Hermenéutica y un enfoque Estructuralista no es suficiente para hacer la HM, adicionalmente se debe acoger una epistemología baja una idea de "un tribunal" que revisa las sentencias pronunciadas por las ciencias (Lakatos, 1978), reconociendo que el lenguaje de la ciencia está en un estado de revolución semántica permanente (Rossi, 1990). Bajo tal metodología, aquí se pretende presentar la historia de La Teoría de los indivisibles matemáticos en el siglo XVII, donde la respuesta a la pregunta: ¿cómo interpretar, por fuera del prejuicio de los precursores, desde hoy y con herramientas de la HC (socio-cultural y epistemológica), las búsquedas subyacentes en las representaciones matemáticas sobre los indivisibles en las obras de Cavalieri, Mengoli, Roberval y Pascal durante la primera parte del siglo XVII? Direcciona el estudio en mención.

Sueños de infinito, sueños de indivisible

Para comprender la Teoría Matemática de los indivisibles en el siglo XVII, no se puede dejar de lado los sueños de infinito y los sueños de indivisibles que se remontan desde la antigüedad. En el antiguo periodo griego de las matemáticas se tuvieron varias concepciones sobre tales conceptos. Por ejemplo, el presocrático Anaxágoras (-500,-428) argumentaba que: "En relación con lo pequeño, no ha mínimo; pero siembre hay uno más pequeño, porque no es posible que el ser se anule por la división" (Anaxágoras. Tomado de Szwajcer, M., s.f). También se tienen las ideas que sobre lo indivisible, lo continuo y lo indivisible del sofista Zenón de Elea (-480,-420), para quien el infinito no es ni lo infinitamente grande ni lo infinitamente pequeño,

tal posición lo condujo a escollos lógicos (paradojas). Tampoco se puede dejar de lado las bien conocidas ideas de Platón y Aristóteles en cuestión de lo infinito, el primero, pensaba que lo "ilimitado" o "indefinido" existía en acto, y el segundo, en contra de tal existencia, lo concebía solo en potencia y su uso matemático debía ser puramente operatorio. Otros matemáticos de la antigua Grecia que ameritan estudiarse cuando se aborda dichos conceptos son: Xenócrates (-396, -314), Eudoxo de Cnido (*ca*. -390, *ca*. -337 a. C, fechas inciertas) y el gran Arquímedes (-287, -212), este último en su "*Método*" hace un uso impecable de los indivisibles para hallar cuadraturas de figuras, en especial, la de la parábola (Heiberg, J. L. 1909).

Además, los sueños de lo infinito y lo indivisible perduraron durante la decadencia del Imperio Romano y la Alta Edad Media, las ideas y pensamientos teológicos, filosóficos y matemáticos de Alcuino de York (735, 804), Santo Tomas de Aquino (1221, 1279), Johns Duns Scotus (1266, 1308), Nicolás de Oresme (ca,1320, 1382) y Nicolás de Cusa (1401,1464), así lo confirman. Vale resaltar el pensamiento de Cusa, que desde la doctrina filosófica sobre la unidad de los contrarios, se indaga sobre lo indivisible, lo continuo y lo infinito, pues en tal doctrina los máximos y los mínimos están relacionados entre sí, algo que se explica sólo con lo indivisible.

Bajo tales sueños la categoría escolástica de los indivisibles, al lado del decreto de existencia del infinito, tomó las proporciones de un paradigma. En el momento en que emergen los indivisibles, las posibilidades de solución práctica (es decir, de uso) para el infinito eran tres:

- Un continuo está compuesto por sus indivisibles. Cada uno de los puntos de una recta tiene un predecesor y un sucesor (posición platónica pura). Lo propio sucede con los segmentos de recta que forman una figura plana y con las porciones de plano que forman los cuerpos sólidos.
- Un continuo se genera como el rastro o traza que deja el movimiento de un indivisible en el espacio (posición intermedia).
- Un continuo no está compuesto por indivisibles (posición aristotélica).

Teniendo presente estos sueños de indivisible e infinito de los diversos autores señalados y de otros más, se puede enfrentar la historia de la Teoría de los indivisibles matemáticos en el siglo XVII, historia que presentamos bajo el concepto de escenificación considerando cuatro de sus grandes exponentes , a saber: Bonaventura Cavalieri (1598,1647), Pietro Mengoli (1626,1647), Blaise Pascal (1623,1662) y Gilles Personne de Roberval (1602,1675) los dos primeros italianos y papistas, los dos últimos franceses, uno Jansenista y el otro un libre pensador de su época. Para dicho estudio histórico que se presenta en (Tamayo, 2018) se tomaron algunos apartes significativos de las obras que sobre el tema de los indivisibles dichos matemáticos escribieron, tales obras son:

- *Geometria indiuisibilibus continuorum noua quadam ratione promota* (1635) de Buenaventura Cavalieri.
- *Geometriae speciosae elementa* (1659) de Pietro Mengoli.
- *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy*, conocida informalmente como *"Traité de la roulette"* (1658) de Blaise Pascal.
- *Traité des indivisibles* (aparecido en 1693, pero redactado mucho antes) de Gilles Personne de Roberval.

Escena1: *Ursus degluttiens*. La Geometría de Cavalieri

Describir a Cavalieri no es tarea sencilla, su vida de monasterio acompañada de la incesante disciplina y de su enfermedad de gota, representan en él una gran fuerza de voluntad. En la Geometría de Cavalieri se hace palpable el gusto del autor por un tema que le apasiona y que considera necesario para acercarse al Dios y entender algunos de los atributos que lo determinan: Indivisibilidad, infinidad y continuidad. (Andersen, 1995; Tamayo 2018)

Desde la plena y la baja edad media, Europa estaba cambiando y existía una nueva realidad, una nueva materialidad, estos hechos exigieron la creación de un nuevo lenguaje incluso en las matemáticas. Cavalieri en el entorno de Galileo fue un pionero y con disciplina férrea propuso un primer sistema lingüístico para dar cuenta de esta nueva realidad. Su nuevo lenguaje ayuda a la comprensión de los dos métodos que propone: el colectivo y el distributivo. El primero se fundamenta en los conceptos cuestionables de *omnes lineae* y *omnia plana* y tiene la ventaja de permitir establecer relaciones entre figuras con alturas diferentes, mientras que el segundo tiene la ventaja de evitar los infinitos y permite establecer relaciones o proporciones entre las colecciones de los indivisibles, en cuanto magnitudes en el sentido tradicional euclidiano. Cavalieri lo considera como un método digno de aceptación pues demuestra las cosas que han sido probadas con el colectivo. (Lombardo-Radice, 1966).

El valor lingüístico en la nueva Geometría de Cavalieri es verdaderamente valioso, pues el maestro milanés le hizo frente a la tarea de nombrar las cosas de un nuevo mundo con léxico, sintaxis y semántica, en ese sentido su labor es como mágica o mística, se inventa una nueva forma de hablar sobre los objetos de la geometría, de la misma manera que los escritores del siglo de oro español crearon un nuevo lenguaje para dar cuenta de la nueva realidad (Tamayo, 2018).

Cavalieri rompe con la realidad dogmática que se tuvo en la Edad Media, donde el experimento no era un criterio para validar una proposición. La Geometría de los indivisibles es para Cavalieri la forma de mostrar como su pensamiento se alejaba de la escolástica reinante en aquella época (Lombardo-Radice, 1966).En la geometría de Cavalieri el asunto del movimiento está escondido en apariencia pero éste es una realidad porque se usa. Por ejemplo, para definir todas las líneas de una figura plana usa el movimiento de la *regula* para determinar la colección de los indivisibles que la constituyen. La aceptación del movimiento para el estudio de los objetos geométricos es un primer alejamiento del pensamiento de Cavalieri con la reinante geometría euclidiana, la cual está estrechamente vinculada con la escolástica aristotélica. El maestro milanés con su nueva Geometría incorpora implícitamente el movimiento pues por medio de éste el concepto de indivisible, infinito y continuidad puede entenderse mejor, pero verlo y percibirlo bajo la idea que el geómetra milanés pretende no es tarea sencilla solo una mente imaginativa y sensible puede percibirlo. La geometría de Cavalieri que inicialmente parece ser Euclidiana, encierra el germen de la geometría del movimiento,

Escena 2: *Aritmeticae artis certitudo*. La geometría con álgebra de Mengoli

Pietro Mengoli, representa al ser simbólico que utiliza de manera exagerada los signos y símbolos para comunicarse. En su geometría *Speciosa* acepta e incorpora el álgebra a diferencia de su maestro Cavalieri que nunca la quiso aceptar del todo. El lenguaje se torna algebraico, este hecho proviene de que Mengoli venia del "mundo"- (vivió y luego se hizo cura). El álgebra

renacentista ya estaba lo suficientemente pulida desde el siglo anterior por Vieta, Herigone y Cardano, entre otros (Massa, 1998). El maestro de Bolonia fue fuertemente criticado por su notación excesiva en el norte de Europa, esa obsesión por el lenguaje es claramente barroca. Mengoli siente que es necesario explicar en una definición hasta el más mínimo detalle.

Sus arreglos triangulares buscan automatización y rapidez en los cómputos aritméticos para hallar, por ejemplo, cuadraturas de figuras con un lado curvo (Mengoli, 1659). Tal necesidad, quizás, le surge por los requerimientos de eficiencia y eficacia que se están imponiendo en una época del capitalismo naciente. Además, la disposición triangular también evoca una experiencia mística por su relación con la santísima trinidad, su religiosidad no puede dejarse de lado cuando se analiza su obra.

La colección de puntos, líneas o planos de Cavalieri, en su discípulo toma un sentido aritmético y algebraico por medio de su simbología y notación *O* que para algunos historiadores, como Massa (1998), significa el *omnes* de Cavalieri. El adjetivo *Speciosa* que usa para referirse a su geometría es ambiguo pues puede referirse a que la geometría es bella o puede referirse a las especies algebraicas (monomios u otros términos algebraicos que usa).

Escena 3: L'esprit de finesse. El Traité de la roulette de Pascal

La escena de Pascal es la escena "trágica de los indivisibles" pues es el desconcierto del autor frente al objeto de su obra. Pascal es un personaje difícil de comprender. Su filosofía del corazón, su dialéctica, el enfrentamiento con Descartes, sus crisis nerviosas, sus apegos familiares, sus conversiones lo hace un personaje desconcertante (Brunschivicg, 1912; Bishop, 1928).Su pensamiento encierra la profundidad de su filosofía, que trasciende del espíritu geométrico al espíritu de la finesa. La matemática y la física de Pascal es entendible solo cuando se logra hacer una clara distinción entre estos dos espíritus. Pascal es el hombre del siglo XVII que busca trascender su humanidad en medio de la soledad incesante que siente al estar en el mundo. Es inventor de la pascalina y de un sistema de transporte público, por lo tanto, su pensamiento creativo e imaginativo lo hacen más complejo todavía (Brunschivicg, 1912). Toda su filosofía está sujeta al Jansenismo que es una postura ética, la defensa que hace del jansenista Arnauld (Filósofo, matemático y teólogo), así lo devela. Pascal es un burgués que se mueve en el círculo de los nobles, aprende de ellos las cosas mundanas, las vive y experimenta; pero después de vivirlas llegan las conversiones, que se pueden interpretar como una búsqueda más de Pascal para entender la trascendencia del Ser. (Brusnchivicg, 1942; Bishop, 1928)

La incursión de Pascal en los indivisibles es un episodio desconcertante porque oficialmente ya se había retirado de las matemáticas y, ciertamente, no estaba al tanto del "estado del arte" en ese momento, por ello tuvo que cambiar los términos del concurso que había propuesto para resolver problemas relacionados con la Ruleta (Cicloide), porque muchos ellos ya habían sido resueltos (Merker, 1995). En su obra el *Tratado de la Ruleta*, que es una compilación de cartas, presenta su trabajo sobre los indivisibles (Pascal, 1658). En este utiliza el método de la balanza de Arquímedes para hallar, por ejemplo: el centro de gravedad de una figura, esto es desconcertante pues para la época el método del gran geómetra alejandrino estaba perdido (Heiberg,1909). Pascal es un ser que se siente "perdido" en el mundo y busca desesperadamente algo a lo cual aferrarse, busca un centro y una periferia. Según Borges, en la *Esfera de Pascal*, buscaba estas cosas en el universo, ya no en Dios. Los indivisibles fueron tal vez su última

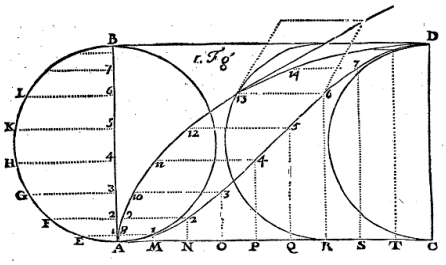
búsqueda, una búsqueda que no es propiamente matemática, sino metafísica. Por eso, quizás, la influencia que tuvo en Leibniz. Los pasajes del *Tratado de la Ruleta* en los que aborda los indivisibles están llenos de contradicciones formales que se disuelven en miradas dialécticas. Este camino no es geométrico, no es matemático, es el camino de los espíritus finos, cada contradicción formal, por ejemplo aquella entre lo finito y lo infinito, es un camino que se divide en dos, una bifurcación. Borges tiene razón, cuando dice que Pascal estaba en un laberinto, en una sin-salida de cara a la nada, al vacío.

Escena 4: *La métaphysique chymérique*. El *Traité des indivisibles* de Roberval

Es la escena "liberadora de la geometría de los indivisibles". El controvertido personaje no proviene de la nobleza, ni de la burguesía, es hijo de campesinos y comienza sus estudios a los 14 años de vida. Catalogado por los intelectuales de la época (Descartes, Fermat, Torricelli, entre otros) como un hombre pendenciero y "vulgar", pese a ello se mantiene y es reconocido en el medio de los intelectuales, sus luchas por lograrlo son admirables (Jullien, 2009). Este hombre con sus ideas filosóficas desea liberar la geometría de la teología y de la metafísica, considerando esta última como quimérica. A los indivisibles los libera del excesivo rigor matemático que los escolásticos le exigen, rigor que posiblemente no se hace necesario cuando se indaga por el cómo de las cosas. Sorprenden las 5 reglas y 35 principios que establece para lograr el conocimiento, llama la atención el primer principio que dice: "Cualquiera que piense es un ser, y todo esto que se piensa, es verdadero si se le piensa", algo que evoca el famoso "*Cogito ergo sum*" de Descartes. Roberval fue completamente anticartesiano (Cousin, 1845).

El *Tratado de los indivisibles* es un manuscrito que se encuentra al momento de la muerte de Roberval y publicado posteriormente por la Academia de Ciencias en 1693. Son apuntes, no totalmente organizados. Al inicio Roberval expone que usará el método de los indivisibles y que para ello se hace "preciso suponer que toda línea, sea recta o curva, puede dividirse en una infinidad de partes o líneas pequeñas, todas iguales entre sí o que cumplen entre ellas cierta progresión prescrita..." (Roberval, 1693). Inicia con argumentos sobre el tratamiento de un conjunto finito de puntos y lo extiende a los conjuntos infinitos, después sigue con la cicloide y otros temas que pueden ser encontrados en Tamayo (2018). Es interesante la forma como por medio del conteo de puntos llega a que el área del triángulo es la mitad del área de un rectángulo, durante el proceso analiza la expresión *1/n* que tiende a cero cuando *n* tiende a infinito.

De la cicloide hace una definición precisa y haciendo uso de los indivisibles detalla la forma de hallar el área bajo media cicloide, para guiar a los lectores en la solución al problema usa el siguiente dibujo:



(Tomado de: Roberval,1693)

Llega de manera clara e impecable a que el área bajo media cicloide es $\frac{3}{2}\ \pi r^2$, donde *r* es el radio de la circunferencia que la genera (Roberval, 1693; Tamayo, 2018).

A modo de Conclusiones

Cualquier estudio que se hace es solo una aproximación al objeto en cuestión. En el estudio realizado se enfatizó en el objeto autor – obra, surgiendo las siguientes reflexiones.

El símbolo de los indivisibles:

El término indivisible no se define en ninguna de las obras de nuestros personajes, solo lo usan, pues como bien lo pensaba Roberval: "su definición se hace innecesaria porque es clara para todos". Se puede interpretar como un símbolo para entender el continuo y la estrecha conexión que tiene con el movimiento. El conocimiento como símbolo es una expresión que configura ideas de poder, intelecto, entre otras. A este tipo de expresiones se vieron avocados nuestros personajes cuando dieron a conocer sus teorías sobre los indivisibles.

Diversos lenguajes para los indivisibles:

Para Cavalieri los indivisibles son colecciones de objetos a los cuales se le puede asignar una cantidad o medida. Para Mengoli son, de otro lado algebraicos, es decir, se pueden sumar y multiplicar. Para Pascal son homogéneos y heterogéneos, algo que solo se hace comprensible si se comprende su dialéctica. Desde la altura del pensamiento de Pascal todo se reduce a cómo decir las cosas y él lo dice de varias maneras que pueden ser contradictorias para la lógica formal. Roberval es un matemático con tendencia "moderna" aprovecha y usa todo lo conocido de los indivisibles, por ejemplo suma los indivisibles de una línea, infinitamente pequeños pero variables, al estilo de Mengoli.

Rigor y demostración en las teorías de los indivisibles

La emergencia de los indivisibles deja ver una fuerza de voluntad que es mucho más fuerte que todos los requisitos de rigor y los estrictos argumentos en las demostraciones. Nuestros personajes recurren más a las explicaciones intuitivas y heurísticas, las cuales se revelan más poderosas y significativas que el formalismo del aparato apodíctico que se pretende defender.

Las verdades primeras en las teorías de los indivisibles se ven cobijadas por una oscuridad que se puede aclarar fácilmente si se acepta que ellas no deberían ser objeto de una demostración, sino más bien un postulado o axioma (verdades de fe). Roberval se deshace convenientemente de los tales "principios fundamentales", los da por sentado y se dedica a encontrar sus consecuencias.

La "desaparición" de los indivisibles en la historia oficial de las matemáticas.

En muchos casos los historiadores de las ciencias y de las matemáticas, buscan que los conceptos "triunfantes" tengan un sustento histórico y epistemológico para reafírmales su trascendencia y validez. Así, "la historia se va distorsionando y falseando en medio de la ausencia mística que rodea el conocimiento humano" (Koselleck, 2004). La historiografía de los indivisibles se ha puesto siempre en relación directa con la historia de los infinitesimales, haciendo que las circunstancias que se vivieron entorno a ellos se desvanezcan y desaparezcan en el tiempo. En la historia oficial, los indivisibles son interesantes porque permitieron "dar luz a los

infinitesimales", por esta razón y otras más, los indivisibles sucumbieron dentro de los infinitesimales.

El concepto de los indivisibles en relación con la historia cultural de la ciencia.

El concepto indivisible usado por nuestros personajes es propio de su época y tiene relación interna con el contexto social, cultural y científico. La Historia Conceptual que está en relación con la Historia Social y con la Historia Cultural de las Ciencias, considera que los conceptos, fuentes inspiradoras para las teorías, se construyen y configuran de acuerdo con el contexto social en el que van emergiendo, pues los conceptos no tienen un único lugar histórico, por ejemplo el concepto de indivisible sufrió diversas metamorfosis desde la antigüedad hasta el Renacimiento, mediadas por el ámbito social y cultural. Por ejemplo en la época de nuestros personajes, el término indivisible se configura, en sentido universal y semántico, a la manera de un concepto con contenido propio que alude a las nociones de lo no divisible, lo continuo, lo infinito y lo cambiante (el movimiento); esta última noción se revela más incipiente que las otras. Bajo tal idea nuestros personajes resolvieron de forma "lógica" los problemas matemáticos que se discutían científica y socialmente. Ellos soñaron y crearon una idea de indivisible que no la podemos desconocer y esconder, tampoco la debemos supeditar a que emerja histórica y epistemológicamente bajo los estudios de los conceptos "triunfantes" (infinitesimales), pues los indivisibles pudieron haber sido el lenguaje hegemónico del análisis del infinito en el cenit de la Modernidad.

BIBLIOGRAFIA

Andersen, K. (1985). Cavalieri's method of indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences*, 31 4, 291-367. Recuperado de http://www.math.ist.utl.pt/~jroquet/Andersen.pdf

Bishop, M. (1928). *Pascal: La vida del genio*. México: Hermes.

Brunschivicg, L. (1924). *Le Génie de Pascal*. Paris: Librairie Hachette.

Cavalieri, B. (1653). *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bononiae, de Ducijs,.

Cousin, M. (1845). *Roberval Philosophe.* Journal des Savants, mars, p.129

Foucault, M. (1971). *Nietzsche, la genealogía, la historia* España, Valencia: Pre-Textos, 1992.

Heiberg, J. L. (1909). *Geometrical Solutions Derived from Mechanics: A Treatise of Archimede.* Chicago: Open Court

Jullien, V. (2009). *Une épistémologie du XVIIe siècle, Roberval*. Actes du congrès 2008 de Montpellier de la Société Guillaume Budé, 2009. Recuperado en http://www.caphi.univ-nantes.fr/Une-epistemologie-du-XVIIe-siecle

Koselleck, R. (2004). *historia/Historia*. Madrid: Editorial Trota, S.A.

Koselleck, R; Gadamer, H-G. (1987). *Historia y Hermenéutica*. España, Barcelona: Ediciones Paidós.

Lakatos, I (1978). Escritos Filosóficos 2. Matemáticas, Ciencias y Epistemología. España: Editorial Alianza.

Lombardo- Radice, L (1966). *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*. Stampato in Italia, Tipografia Torinese S.p.A – Strada del Barrocchio 83, Torino.

Massa, Mª R. (1998). Estudis matemàtics de Pietro Mengoli (1625-1686): Taules triangulars i quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète. *Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona*, Barcelona.

Merker, C. (1995). *Le chant du cygne des indivisibles. Le calcul intégral dans la dernière oeuvre scientifique de Pascal.* Collection «*Didactiques*», Série «*Mathématiques* ». Éditeur Presses Universitaires Franc-Comtoises Université de Franche-Comté 25030 BESANÇON Cedex – France.

Mengoli, P. (1659). *Geometriae speciosae elementa*. Library University of the Michigan. Recuperado en: https://archive.org/details/geometriaespeci00menggoog

Pascal, B. (1658). *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy* o *Traité de la roulette*. En Oeuvres de Blaise Pascal. Nouvelle Édition. Tome Cinquiéme. A Paris, Chez Lefèvre, Libraire, Rue de L'éperon, 3 6, 1819.

Pimentel, J. (2010). ¿Qué es la historia cultural de la ciencia? *ARBOR Ciencia y pensamiento Cultural*, CLXXVI (743), mayo-junio, 417-424.

Reale, G; Antiseri, D (1988). *Historia del pensamiento filosófico y científico*. Vol. 3. Barcelona, España: Herder.

Roberval, G, P. (1693). *Traité des indivisibles*. En Académie des sciences. Paris. Divers ouvrages de mathématiques et de physique. Recuperado en: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5493994j?rk=21459;2

Serres, M. (1989). *Historia de las Ciencias*. España: Cátedra.

Solanilla, L; Tamayo, A.C. (Mayo de 2014). Lectura e interpretación de textos históricos matemáticos: el "método" de Arquímedes. En Rúa (Director). VI Congreso Internacional en formación y Modelación en Ciencias Básicas. Universidad de Medellín, Colombia

Szwajcer, M (s.f). Anaxagore. Doxographie-fragments. Recuperado en: http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/anaxagore/fragments.htm

Tamayo, A, C. (2018). Escenas de representación matemática de los indivisibles en el siglo XVII. (Tesis doctoral). Facultad de Ciencias Económicas y Humanas, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.

Resolución de problemas y modelización en Educación Matemática

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Matemática Divertida: uma maneira fácil de aprender Matemática jogando

Flávia de Oliveira **Carvalho**
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal
Centro Universitário Faciplac
Brasil
fvoliveira36@gmail.com
Maria Dalvirene **Braga**
Universidade de Brasília
Brasil
dalvirenebraga@gmail.com
Josinalva Estacio **Menezes**
Universidade de Brasília
Brasil
jomene@bol.com.br

Resumo

Nesse estudo de abordagem qualitativa investigou-se a implicação da utilização de jogos matemáticos como introdução ou fixação de conteúdos utilizandoa Teoria da Aprendizagem Significativa. A pesquisa foi realizada com 24 alunos do 9º ano de uma escola pública de ensino fundamental do Distrito Federal, Brasil, onde aplicou-se uma avaliação anterior, cinco jogos e outra avaliação posterior. Foi constatado que a aplicação dos jogos como fixação do conteúdo foi muito bem aceita pelos alunos. Em todo o processo, observou-se participação dos alunos, levantando hipóteses, construindo estratégias, interpretando e reformulando regras dos jogos, evidenciando características essenciais da aprendizagem significativa. As considerações finais ressaltam que os jogos não devem ser concebidos como o fim, mas como meio de se promover uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: ensino de matemática, jogos matemáticos, aprendizagem significativa,interação entre alunos.

Introdução

O ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela

formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão. A realidade em que se encontra a educação brasileira em relação ao ensino de Matemática não é nada animadora, tendo em vista o último resultado do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) publicado em 2016. As avaliações do PISA acontecem a cada três anos e abrangem três áreas do conhecimento – Leitura, Matemática e Ciências – havendo, a cada edição do programa, maior ênfase em cada uma dessas. Em 2015 a ênfase foi Ciências e Matemática com a inclusão das áreas de Competência Financeira e Resolução Colaborativa de Problemas. Os resultados desse ano de 2015 mostram uma queda de pontuação nas três áreas avaliadas. A queda de pontuação também refletiu uma queda do Brasil no ranking mundial: o país ficou na 63ª posição em ciências, na 59ª em leitura e na 66ª colocação em Matemática.

Assim, discussões no campo da Educação Matemática mostram a necessidade de se adequar o trabalho docente às novas tendências educacionais, que poderão levar a melhores formas de se ensinar e aprender Matemática. Faz-se necessário compreender a Matemática como uma disciplina de investigação e não de conteúdo pronto e acabado. Ela é um espaço de ação e criatividade. Daí a necessidade de ser ensinada e estudada, de alguma forma, que seja útil para os alunos, ajudando-os na compreensão, explicação ou organização da realidade e possibilitando, desta forma, que os mesmos tenham condições de refletir a respeito do seu fazer para construir o saber.

Segundo Fragelli e Mendes (2011, p.13), o ensino tradicional foca quase que exclusivamente em explorar os aspectos lógicos do conhecimento: o professor expõe um determinado conhecimento que se liga a outros conceitos preexistentes ou a situações estereotipadas do cotidiano.

A falta de engajamento prejudica o rendimento do estudante em sala de aula, pois não promove uma aprendizagem significativa. Muitas vezes o conteúdo discutido em sala de aula é apenas memorizado e rapidamente esquecido. Para promover um maior engajamento e, assim, facilitar a aprendizagem significativa, Fragelli e Mendes (2011) propõem a utilização de jogos de aprendizagem. Desse modo, o uso dos jogos matemáticos em sala de aula se apresenta como um elemento dinâmico e motivador para a compreensão dos conceitos matemáticos, pois a aprendizagem sinaliza um processo inerente da interação do sujeito com o meio, proporcionando uma mudança persistente no potencial humano.

Autores, como McGonigal (2011), defendem que todo jogo envolve um processo de aprendizagem, já que jogos estão relacionados com a resolução de problemas e têm regras que devem ser aprendidas. Entretanto, ainda segundo os mesmos autores, o que se faz necessário pensar é o que é aprendido enquanto se joga.

Diante do exposto, surgiu essa pesquisa, cuja questão central foi verificar qual é o impacto da aplicação dos jogos matemáticos para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II com os conteúdos de potenciação e radiciação, em diferentes momentos como um elemento aglutinador tornando o seu uso eficiente e eficaz nas aulas de Matemática.

Referencial teórico

Ensino da Matemática por meio de jogos no Ensino Fundamental Anos Finais

Seis de março de 2018 foi escolhido pelo Ministério da Educação no Brasil, como o Dia D: um dia nacional de discussão sobre a Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Nessa data, secretarias, escolas, gestores e professores de todo país serão convidados a debruçarem-se sobre

a BNCC para entender porque ela é tão importante, como foi construída, de qual modo está estruturada e como vai impactar o dia a dia em sala de aula.

Para apoiar as discussões, o Ministério de Educação - MEC elaborou um roteiro de atividades, com sugestões de dinâmicas e apresentações, que pode ser facilmente adotado por secretarias e escolas. E, depois de sua aprovação, no dia 20 de dezembro de 2017, a BNCC foi apresentada como obrigatória para todos os currículos de escolas públicas e particulares do Brasil. Mas para que se torne uma realidade nas salas de aula, é preciso que gestores, professores e pais não só compreendam as propostas trazidas por esse documento, como se mobilizem para colocá-las em prática.

A BNCC determina que para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência.

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

Ensino da Matemática utilizando jogos e a aprendizagem significativa

Promover uma aprendizagem significativa fazendo a utilização de jogos matemáticos de maneira adequada como recurso pedagógico vem despertando o interesse dos pesquisadores em educação matemática por agregarem um potencial pedagógico significativo. Haja vista que, os jogos no âmbito educacional estimulam ações que possibilitam uma postura positiva perante os erros, efetuando-se rapidamente as devidas correções sem deixar marcas negativas na construção da aprendizagem do aluno.

David Ausubel ao abordar sobre a sua teoria, Aprendizagem Significativa, defende a importância da criação de estratégias facilitadoras para o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos, favorecendo assim, uma formação humana direcionada para o exercício de uma cidadania pautada em valores éticos. Para Ausubel (1978 apud Moreira, 2006, p.16) a aprendizagem significativa se distingue quando,

> [...] o armazenamento de informações na mente humana como sendo altamente organizado, formando uma espécie de hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados por) a conceitos, ideias, proposições mais gerais e inclusivos. Essa organização decorre, em parte, da interação que caracteriza a aprendizagem significativa.

Atualmente, nossos alunos estão submetidos cotidianamente a um exagerado volume de informações que chegam por diferentes meios, de modo que nós educadores precisamos buscar diferentes mecanismos educacionais para ajudá-los a organizar e distinguir essas informações, levando em consideração as mais relevantes para o nosso ambiente educacional, o que Ausubel

chama de *diferenciaçãoprogressiva*. Desse modo, o uso dos jogos matemáticos em sala de aula pode se apresentar como um elemento dinâmico e motivador na compreensão dos conceitos matemáticos, pois a aprendizagem sinaliza um processo inerente da interação do sujeito com o meio, proporcionando uma mudança persistente no potencial humano. No caso da Matemática, para que não haja uma sobrecarga de informações, o educador poderá organizá-las fazendo o uso de jogos, desde que a sua escolha venha por meio de um planejamento coerente que implique em atribuições cognitivas positivas. Para Ausubel, aprender significativamente é transformar um conjunto de informações (conteúdos e procedimentos) em algo útil para a vida. O material utilizado para esse fim deve ser potencialmente significativo.

> Uma vez que significados iniciais são estabelecidos para signos ou símbolos de conceitos, através do processo de formação de conceitos, novas aprendizagens significativas darão significados adicionais a esses símbolos, e novas relações, entre anteriormente adquiridos, serão estabelecidos. (Ausubel, 1978 apud Moreira, 2006, p.22).

Quando os professores apresentam os conteúdos de forma acabada, sem oferecer ao aluno o momento de refletir e aplicar o mesmo, a aprendizagem se torna não significativa ou mecânica. Para que seja significativa é necessário que o sujeito se aproprie dos conhecimentos, e estes, por sua vez, passem a fazer parte do seu cotidiano, ou seja, que os conteúdos façam sentido na formação humana do sujeito.

Para Moreira (2003), existem três conceitos interligados que compõem a aprendizagem significativa: significado, interação e conhecimento. Sendo que o significado está presente nos sujeitos, que sinaliza a maneira de se expressar que pode ser por meio de gestos, sinais, imagens e palavras, que geram significado de algo. A interação é a troca entre os conhecimentos prévios e os novos considerados, de maneira que haja uma transformação em ambos os conhecimentos. Isso significa que os conhecimentos prévios não são mais os mesmos e nem os conhecimentos que chegaram à estrutura cognitiva do indivíduo e o conhecimento é o produto final que normalmente está pautado na linguagem, seja ele um conteúdo ou uma disciplina.

Sendo assim, o papel do educador é o de mediador entre o que ele ensina e o que o seu aluno aprende, promovendo momentos de interação entre os conceitos que devem ser aprendidos e as suas aplicabilidades no mundo moderno. Facilitar a aquisição desse conhecimento é fundamental para desmistificar que aprender matemática é difícil.

Aspectos metodológicos

A abordagem metodológica deste trabalho é qualitativa, visto que essa mostra-se como uma opção que permite compreender o fenômeno social. O investigador qualitativo procura descobrir fatos importantes, fazendo paralelo entre os indivíduos e a cultura em que estão inseridos. O estudo teve como participantes duas turmas, escolhidas aleatoriamente, de 9º ano do Ensino Fundamental II, e 3 monitores colaboradores.Para realização da pesquisa os instrumentos utilizados na coleta de dados foram: observação, registro por meio de fotografias, aplicação de prova escrita e relato espontâneo dos alunos. Os alunos assinaram um termo de consentimento autorizando o uso de todos os dados colhidos no decorrer do experimento, em que foi garantido o anonimato dos seus nomes.

Foram aplicados jogos matemáticos adaptados pela professora pesquisadora, tais como: Jogo da Velha, Trilha Matemática, Labirinto do Conhecimento, Roleta da Potência, Roleta das Raízes e Dominó das raízes. Esses jogos abordavam os seguintes conteúdos: Operações fundamentais da aritmética, raciocínio lógico, operações com as regras da potências e raízes.

A pesquisa foi desenvolvida em duas etapas. A primeira etapa aconteceu em três momentos: O *primeiro* foi elaborar um planejamento didático para nortear a dinâmica de aplicação dos jogos matemáticos, somente na turma "A" foi aplicado dois jogos (Trilha Matemática e Labirinto do Conhecimento) como introdução dos conteúdos; o *segundo*, foi trabalhar nas duas turmas os conteúdos previstos no plano de ensino para o 1º bimestre que são: conjunto dos números reais, potência e suas operações, radiciação e suas operações. Estes foram explicados de maneira expositiva com resolução de listas de exercícios e correção no quadro, foi aplicado também a metodologia ativa chamada de sala de aula invertida, que é a troca de lugar dos alunos com o professor, onde os alunos estudam o conteúdo antes em casa e explica da sua maneira para os outros colegas com a intervenção do professor quando necessário. Tudo isso foi feito da mesma maneira para as duas turmas; e o *terceiro* foi a aplicação ao final do 1º bimestre de uma prova escrita contendo todo o conteúdo programático para verificação dos objetivos propostos no plano de ensino. Os resultados foram tabelados em forma de números e gráficos.

A segunda etapa do projeto se deu no início do 2º bimestre diante da análise dos resultados obtidos com as notas bimestrais, começamos o projeto interventivo para recuperação de conteúdos não atingidos de acordo com explicações a seguir: os alunos das turmas A e B foram separados em dois grupos, os que ficaram com nota inferior a 5,0 e os que ficaram com nota superior a 8,0 para serem os monitores. No dia 07 de maio (sábado de reposição de aula) eles foram alocados em uma sala preparada para a aplicação dos jogos, divididos aleatoriamente em grupos de 4 ou 5 componentes e 2 monitores. Foi explicado o objetivo de cada jogo, a dinâmica de aplicação e o tempo de duração.

A aplicação se deu em duas aulas de 50 minutos cada. Durante esse período os alunos fizeram rodízios entre os jogos, os monitores tiravam as dúvidas que iam surgindo e quando não conseguiam sanar as dúvidas o professor aplicador intervia fazendo as devidas explicações. Ao final os jogos foram recolhidos pelos monitores e abrimos um grupo de discussão dos objetivos que foram alcançados e dos que não foram. Eles foram avaliados com uma prova escrita para verificação dos objetivos propostos no plano de ensino.

Os novos resultados foram comparados com os resultados obtidos no primeiro bimestre. Foram colhidos relatos escritos dos alunos da turma "A" e turma "B" (sem identificação), sobre o que eles acharam dessa metodologia. Os resultados da turma "B" foram comparados com os resultados da turma "A". E depois de todas as análises feitas, teremos uma resposta para a pergunta geradora do trabalho, se os jogos que foram aqui analisados têm efeito positivo no ensino-aprendizagem dos alunos quando aplicados antes ou depois da explicação tradicional dos conteúdos. Temos que estar preparados para uma possível resposta que a aplicação dos jogos não influencia em nada a aprendizagem desses conteúdos.

Análise e apresentação dos resultados

Os jogos escolhidos para serem aplicados com os alunos que não atingiram a média 5,0 ou superior a ela foram: Jogo da Velha, Trilha Matemática, Labirinto do Conhecimento, Roleta da Potência, Roleta das Raízes e Dominó das raízes. Os referidos jogos foram adaptados de outros jogos para atenderem os conteúdos propostos no plano de ensino e sugeridos pelo BNCC que são: operações fundamentais da aritmética, raciocínio lógico, operações com as regras da potências e raízes. E também foram utilizados para sanar grandes deficiências dos alunos do ensino fundamental anos finais com esses conteúdos, conforme Moreira; David (2005a) reforçam

esse pensamento quando assinalam que os alunos terminam o ensino fundamental sem as devidas compreensões relacionadas aos conceitos básicos da aritmética.

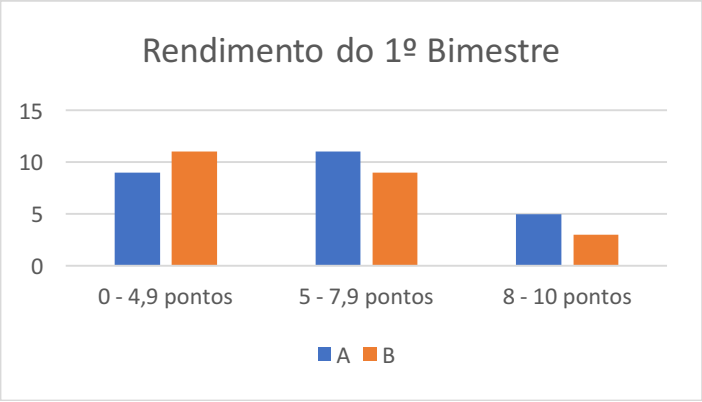
Durante a aplicação dos jogos os alunos se mostraram entusiasmados e discutiam entre si as regras e formulavam hipóteses a respeito das jogadas. Além de debater outras possibilidades no que diz respeito aos conceitos matemáticos que não eram explícitos no jogo. Os monitores auxiliavam com as regras, na resolução das dúvidas que surgiam e encorajando-os a procurar maneiras diferentes de resolver o mesmo problema. Aproveitando esse momento, a professora pesquisadora tecia algumas observações sobre as propostas e argumentos de forma a aguçar ainda mais suas curiosidades. Toda essa discussão e reflexão foi rica, possibilitando a aprendizagem por descoberta, conforme assinala a teoria ausubeliana, quando aponta que esse processo é não-literal e não arbitrário, o conhecimento novo tem mais significado, e o conhecimento prévio fica cada vez mais reforçado, elaborado em significados e adquire mais aplicabilidade.

Durante a aplicação dos jogos alguns alunos relataram o interesse em participar mais vezes desse tipo de aula: *"... todas as aulas de matemática tinham que ser desse jeito professora, eu estou entendendo bem melhor o conteúdo" (Aluno A, 2018)*. Outro aluno afirmou: *"...dentro de sala fica difícil porque a turma é muito cheia e barulhenta e também não tem os monitores para ajudar a gente (Aluno B, 2018)*.

Na turma "A" composta por 25 alunos foi constatado que nove 9 alunos ficaram com rendimento inferior a média 5, 11 com média de 5 até 7,9 e 5 alunos com média superior à 7,9 pontos. Na turma "B" composta por 23 alunos, foi constatado que 15 alunos ficaram com rendimento inferior a média 5, 9 com média de 5 até 7,9 e 3 alunos com média superior à 7,9 pontos, conforme mostra a figura 4 mais adiante.

Na turma "A" foram aplicados dois jogos como introdução ao conteúdo, depois nas duas turmas foram trabalhados os conteúdos com aulas expositivas, resolução de exemplos, listas de exercícios, sala de aula invertida e aplicação de testes e prova. Os dados do gráfico (figura 1) foram extraídos do relatório entregue para a secretária da escola, depois disso os alunos com média inferior a 5 e superior a 7,9 foram convidados a comparecerem na escola para a aplicação da sala de jogos.

Figura 1
Rendimentos dos alunos no 1º bimestre

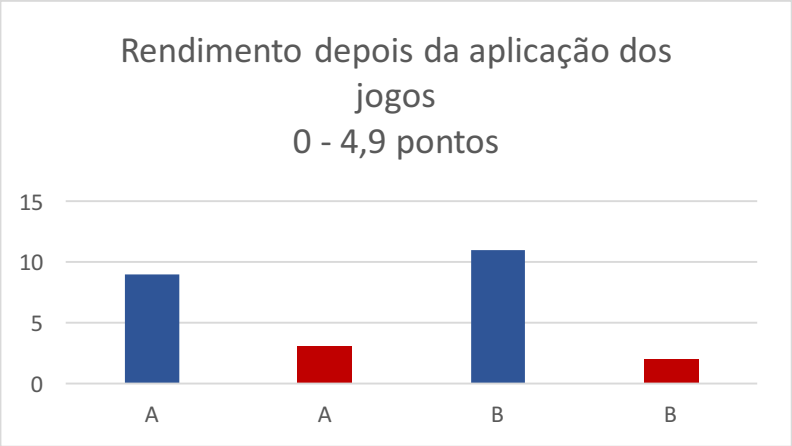


Fonte: pesquisadora, 2018.

Os alunos com média inferior a 5 foram avaliados novamente com uma prova escrita contendo os mesmos objetivos propostos na do 1º bimestre e o novo rendimento consta na figura 2.

Figura 2

Rendimento dos alunos após aplicação dos jogos



*Fonte:*pesquisadora, 2018.

Na turma "A" o percentual de alunos com rendimento inferior a cinco era de 36% e depois da aplicação da sala de jogos esse percentual foi para 12%, somente três não conseguiram atingir a média, na turma "B" era de 44% e foi para 8%, somente dois não atingiram a média. Os alunos relataram que com a aplicação da sala de jogos e o auxílio dos monitores os conteúdos ficaram mais fáceis de se aprender. Comentou um deles: *"....eu gostei muito de participar dessa aula, quero que todo bimestre seja desse jeito"(Aluno C, 2018).* Outro aluno falou: *"... eu aprendi muito mais nesse sábado do que no bimestre inteiro"(Aluno D, 2018)*

Os alunos que foram chamados para serem os monitores também foram ouvidos e relataram que gostariam de fazer parte de outras atividades de reforço, pois essa troca de conhecimento com os outros alunos fez com que eles aprendessem muito mais os conteúdos.

Os registros mostram que os alunos reconhecem a contribuição dos jogos para apropriação dos conceitos matemáticos: "*...a matemática é uma matéria muito difícil e que a maioria dos alunos tem muitos problemas, então a professora podia utilizar mais os jogos para tornar a matemática mais fácil e mais divertida*"*(Alunos das turmas A e B).*

Em relação aos aspectos positivos, ficou evidenciado que os jogos matemáticos se constituem em uma alternativa didática viável e os alunos declararam que gostariam que isso se repetisse mais vezes independente do conteúdo. O registro a seguir mostra esse pensamento: "*... trabalhar com esses jogos é abrir novos caminhos para a aprender matemática, quebrando até a rotina da sala de aula*"*(Aluno E, 2018).*

Considerações finais

Nessa pesquisa buscou-se debater como os jogos educacionais, podem ser favoráveis a ampliação do aprendizado dos estudantes e procurou mostrar em que momento a aplicação é mais eficaz: como uma introdução ao conteúdo ou no final como revisão. Com o uso dos jogos

educativos é possível mudar a metodologia de ensino tradicional dando uma nova aparência as aulas de Matemática.

A sala de jogos, em geral, foi muito bem aceita pelos alunos. Um elemento observado foi à interação entre o conhecimento prévio e o conhecimento novo, pois foi notada durante toda a dinâmica da sala de jogos uma troca de conhecimentos entre os alunos monitores e os alunos de recuperação: enriquecendo, elaborando e diversificando em termos de significados. Percebeu-se também que no decorrer de todo processo, os alunos foram participantes e ativos em relação ao processo de aprendizagem, pois em cada jogada eles discutiam seus erros e seus acertos, construíam estratégias de resolução dos exercícios, interpretação e colaboração com os outros colegas, evidenciando assim as características essenciais da aprendizagem significativa.

Outro aspecto relevante a ser apontado é que os alunos ao utilizar os jogos interagiram entre si e com o professor, trazendo benefícios não apenas para o aprendizado escolar, mas uma melhoria na relação social com os colegas desenvolvendo o raciocínio, pois geralmente esses jogos têm regras, objetivos, metas e às vezes controlados por tempo.

Dessa forma, ficou claro que a aplicação do jogo como introdução ao conteúdo não influenciou muito na aprendizagem dos alunos, mas quando ele foi aplicado depois da avaliação como reforço/recuperação dos conteúdos teve um impacto maior na apropriação dos conteúdos que não foram adquiridos durante o bimestre.

Referências e Bibliografias

Brasil.(2018).Base Nacional Comum Curricular- BNCC- *Educação Básica*. Brasília:MEC. Disponível em: <http://

basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. Acessado em: 11 set. 2018.

Fragelli, R. R., Mendes, F. M.(2011) Batalha Naval dos Extremos Locais: Jogos de

Aprendizagem para o Ensino dos Cálculos. In: PAEE'2011- *Third International Symposium on Project Approaches in Engineering Education* (PAEE, Lisboa, 2011): Aligning Engineering Education with Engineering Challenges v. 1. p. 91-97 .

McGonical, J.(2011).*Reality isbroken*.Why games makes us better and how they can change

the world. New York, NY: The Penguin Press.

Moreira, P. C.; David, M. M. M. S.(2005a).*A formação matemática do professor: licenciatura e*

prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica. 120p.

_____. (2005b). O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na

escola básica**.** *Revista Brasileira de Educação*. Jan /Fev /Mar /Abr. n. 28. Universidade Federal de Minas Gerais: Faculdade de Educação. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n28/a05n28.pdf. Acesso em: 21 dez. 2017.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Representaciones matemáticas y la invención de problemas desde la modelización

Karen **Porras** Lizano
Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
karen.porras.lizano@una.cr

Enrique **Castro** Martínez
Universidad de Granada
España
ecastro@ugr.es

Resumen

En este documento se analiza el proceso de traducción entre representaciones matemáticas, al utilizar la invención con problemas en un proceso de modelización matemática en el aula de sétimo de la Educación Secundaria de Costa Rica, específicamente en el tema de proporcionalidad. Para recolectar la información se realizó la aplicación de observaciones participantes y un análisis de las producciones escritas de los estudiantes como informes escritos de las actividades de invención de problemas y los cuadernos de trabajo. Se concluye que en las creaciones de problemas de los estudiantes, se observa en mayor preferencia representaciones como las verbales escritas y simbólicas numéricas y las operaciones aritméticas básicas fue la estrategia más utilizada. Además, los estudiantes presentaron un razonamiento proporcional deficiente y sin comprensión, evidenciado en la escaza fluidez representacional del objeto matemático.

Palabras clave: Sistemas de representación, modelización matemática; invención de problemas.

El objetivo principal de la educación es lograr que el estudiante construya un aprendizaje con una comprensión profunda y rica, visualizando lo que aprende de una manera útil y significativa (Skemp, 1999). Además, de que aplique los conceptos cuando los necesite y los utilice con flexibilidad al enfrentarse a nuevas situaciones. Para lograr lo anterior es trascendental el proceso de traducción entre las representaciones matemáticas, además al investigador le permite entender los problemas de compresión que presenten los estudiantes al manejar la pluralidad de los sistemas de representación de un mismo concepto lo que repercute directamente en su rendimiento académico.

Esta comunicación muestra una investigación realizada con la idea de brindar información acerca de la construcción del conocimiento matemático, a través de las representaciones de los conceptos y las estrategias que los estudiantes utilizan al resolver tareas de modelización matemática. De estos procesos destacamos la importancia de las representaciones matemáticas, entendiendo estas "como todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas" (Rico, 2009, p. 3).

Por otra parte, al utilizar la modelización matemática se pretende estimular en el estudiante la experimentación de los conceptos para dotarlos de significado (Rico, 2000), al mismo tiempo que se promueve "mayores niveles analíticos en la justificación y argumentación matemática" (MEP, 2012, p. 11) y se incentiva capacidades de gran potencial como la imaginación, la creatividad e invención, dejando de lado la ejecución mecánica de tareas que promueven conocimientos insuficientes y sin comprensión, reflejándose en los bajos rendimientos académicos de los estudiantes.

En la misma línea, consideramos que la modelización matemática por medio de la construcción y desarrollo de un modelo, se matematiza la realidad de la situación específica (Castro y Castro, 2000) y el cual está integrado en la resolución de problemas como estrategia didáctica aplicada a situaciones asociadas con ambientes reales, físicos, sociales y culturales.

Representaciones de los conceptos matemáticos

En la actualidad mucha de la información presente en los medios de transmisión se visualiza en diferentes representaciones como tablas, gráficos y fórmulas; ante lo cual el ser humano debe tomar una posición discriminatoria, analítica y objetiva. Por ello, el currículo en la educación de diferentes profesiones, en especial en el campo de la educación matemática, debe enfatizar en la resolución de problemas y la toma de decisiones, con el fin de dotar a las futuras generaciones de capacidades relevantes como el análisis, criticidad, la creatividad, entre otros.

Asimismo para generar el pensamiento matemático, primeramente se debe realizar una imagen mental de las ideas, lo que denominaremos como representaciones internas con el fin de manipularlas posteriormente. Luego, para poder realizar la comunicación debemos expresarlas externamente, con lo que creamos las representaciones externas, las cuales según Castro y Castro (2000) son "enunciados en forma natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras" (p. 101). Además, sirven como "estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales" (Castro y Castro, 2000, p. 101), lo que proporciona información conceptual relevante del estudiante.

También, consideramos que el aprendizaje matemático se genera al tomar en cuenta dos elementos importantes, el aspecto representacional que configura al objeto y el desarrollo de un significado personal sobre este (Pecharromán, 2014); donde los procesos matemáticos están ligados a la utilización de una multiplicidad de representaciones semióticas de la misma naturaleza y parafraseando a González, Castro-Rodríguez y Castro (2016) tenemos que para lograr una efectiva compresión matemática, es necesario que el alumno posea la "fluidez

representacional", es decir que sea capaz de cambiar y coordinar diferentes registros de representación del objeto matemático.

Modelización matemática y el proceso de invención de problemas

En este estudio consideramos que el inventar problemas forma parte integral del proceso de modelización matemática, concebida como una manera de matematizar la realidad, en el cual los modelos son considerados como sistemas conceptuales que se expresan usando sistemas de notación externos, y que se usan para construir, describir o explicar los comportamientos de otro (s) sistema (s) (Lesh y Doerr, 2003).

Galbraith y Stillman (2006) proponen una serie de transiciones en el proceso de modelización: (a) De la situación desordenada del mundo real a la declaración del problema del mundo real, (b) De la declaración de problemas del mundo real al modelo matemático, (c) Del modelo matemático a la solución matemática, (d) De la solución matemática al significado de la solución en el mundo real y (e) Desde el significado de la solución en el mundo real hasta la revisión del modelo o la solución de aceptación (p. 144). Asimismo, en la primera transición es donde se realiza la invención de problemas, en la cual según Hansen y Hana (2015) citando a los mismos autores anteriores, es donde "se aclara el contexto del problema, haciendo suposiciones simplificadas, identificando entidades estratégicas y especificando los elementos correctos de las entidades estratégicas" (p. 42), es decir se brinda más relevancia a la creación del problema y constituye una experiencia valiosa para el estudiante dentro del proceso de modelización.

Concebimos como un problema a situaciones que su solución no es clara y su respuesta no es automática, ni mucho menos rutinaria; demandando procesos de análisis y elaboración en su solución. Asimismo, parte esencial de la modelización matemática es el problema y su formulación, el cual por medio del uso de conjeturas va sufriendo ajustes, en la definición de sus parámetros y objetivos, por lo tanto el ser capaz de plantear y concretar un problema adecuadamente a la luz de los datos y de los conceptos, es parte vital del uso de la matemática en el mundo real (English, 1997; Hansen y Hana, 2015; Silver, 1994).

De igual manera, destacamos la importancia de la aplicación del proceso de invención de problemas, pues motiva la participación activa del estudiante en su aprendizaje, donde este se identifica con el problema que construye, siendo producto su creatividad, imaginación y curiosidad; logrando a la vez construcciones muy elaboradas, con mucho valor didáctico. Para diversos autores, el proceso de invención de problemas puede "dar una mayor apropiación de su ambiente de aprendizaje, ya que es un componente natural de la instrucción orientada a la indagación y se basa en la creencia de dar prioridad a la pregunta sobre la respuesta" (Hansen y Hana, 2015, p. 40), además que son experiencias que preparan a los estudiantes para su desempeño profesional futuro afuera de las aulas.

El propósito de esta comunicación es analizar el proceso de traducción de las representaciones matemáticas al crear y resolver situaciones problema siguiendo un proceso de modelización matemática en su solución, con el fin de proponer mejoras en la enseñanza a través del diseño de tareas y estrategias didácticas que ayuden al estudiante a comprender significativamente los conceptos matemáticos.

Método

Este proceso de investigación sigue un enfoque cualitativo, específicamente utilizamos un tipo de investigación no exploratoria, sin intervenir directamente en el fenómeno; cuyo diseño de investigación fue un estudio de casos, pues nos interesó el "Describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes" (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2008), en particular cuando abordan y dan importancia al proceso de traducción de las representaciones generadas al construir y resolver problemas con matemática.

Los participantes fueron un grupo de 24 estudiantes del nivel de sétimo de un colegio académico diurno oficial, específicamente ubicado en la provincia de San José en Costa Rica. La edad promedio de los participantes es de 13 años y cuyo estatus socioeconómico predomina la clase media-baja. Se escogió este tipo de muestra, ya que según el Programa de Matemática del Ministerio de Educación Pública es en este nivel es donde se desarrolla el contenido de proporciones, contexto matemático para lograr los objetivos propuestos del estudio. Además, durante el proceso de invención de problemas se dividió el grupo original en 8 subgrupos, con el fin de realizar un trabajo en equipo y colaborativo.

Para recolectar la información relevante de este estudio se realizó la aplicación de observaciones participantes y se realizó un análisis de las producciones escritas de los estudiantes como informes escritos, realizados en las actividades de invención de problemas y los cuadernos de trabajo. De ambas técnicas se obtuvo evidencias sobre las representaciones, estrategias y los errores generados por los estudiantes al construir y resolver problemas de modelización matemática con proporciones en actividades de aula.

Descripción de la etapa de trabajo de campo

En primer lugar se analizó el programa vigente de matemática del Ministerio de Educación Pública, con el fin de observar el papel que tiene los procesos de traducción de representaciones y observar los conocimientos, habilidades e indicaciones que se proponen en este documento, específicamente en el tema de proporciones.

Las actividades de invención de problemas se diseñaron de acorde a los objetivos de esta investigación, tomando en cuenta la bibliografía consultada y fueron validadas a través de juicio de expertos. Para su construcción se utilizaron contextos sociales, culturales y de la propia realidad de los estudiantes participantes.

Durante la implementación de las actividades de invención de problemas, se iniciaron las observaciones participantes del grupo, las cuales fueron grabadas para facilitar el análisis posterior. También en los primeros minutos de cada una se les explicó el protocolo de trabajo, siendo de suma relevancia el observar si los estudiantes escribían sus pensamientos matemáticos en los informes.

Análisis de los resultados

En esta parte se presentan los resultados de dos actividades de invención de problemas, para cada una, en primer lugar se muestra sobre las representaciones y en segundo lugar, las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver los problemas que inventaron.

Actividad 1 de invención de problemas. En esta actividad se presentan imágenes (representaciones icónicas) de dos productos con sus respectivos precios del Mercado, una botella de Té Frío de 2.5 litros con un precio de ₡1800 y un Queque de Chocolate con un precio de ₡6000 para 12 personas. Además, se le solicita al estudiante construir un problema donde se utilicen los dos artículos o uno de ellos, pero que también sirva para determinar el gasto que se podría generar si la cantidad de personas es mayor. Asimismo, los estudiantes deben resolver el problema y escribir todas las operaciones que se realizaran en su solución.

Dos de las respuestas obtenidas en esta actividad se muestran en la figura 1, en ella se aprecian producciones de dos grupos de estudiantes participantes, en las cuales se observa representaciones como las verbales cotidianas y simbólicas numéricas, tanto en el enunciado del problema como en su solución. Los 8 grupos participantes realizaron traducciones similares a las expuestas en la figura 1, por lo que el proceso de traducción de representaciones icónicas a representaciones verbales escritas y simbólicas numéricas fue el único que se realizó por parte de los estudiantes en esta actividad.

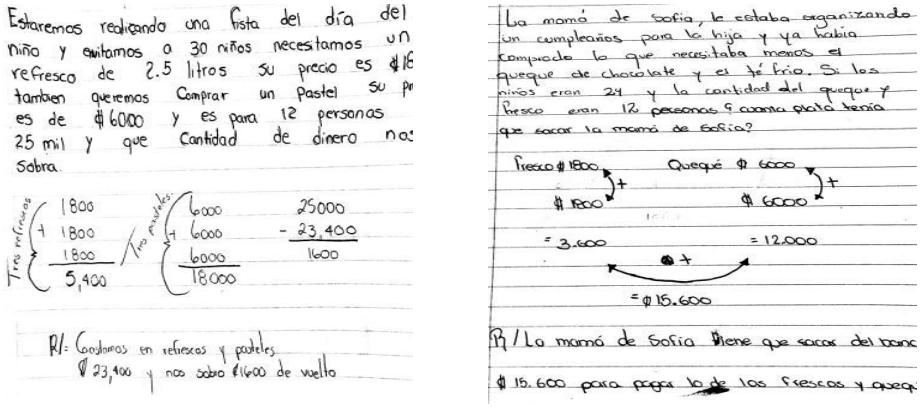


Figura 1. Las imágenes muestran las producciones de dos grupos, en las cuales se realizaron procesos de traducción de representación icónica a representaciones en lenguaje verbal escrito y simbólico numérico.

En esta actividad la única estrategia que se utilizó para resolver el problema construido por los estudiantes fue el uso de operaciones aritméticas, se observa que los estudiantes usaron los precios de los artículos varias veces, por ejemplo en la primera imagen de la figura 1 se puede visualizar que el contexto cotidiano utilizado fue una fiesta del día del niño para 30 niños, en su solución suman tres veces el precio del refresco y tres veces el precio del queque, no utilizan proporciones para resolver el problema. De igual manera, sucede en la segunda imagen de la figura 1.

Actividad 2 de invención de problemas. En esta actividad se les presentó a los estudiantes, en una representación tabular, los votos obtenidos de primera vuelta de las elecciones presidenciales de Costa Rica, realizada el domingo 4 de febrero del 2018, en ella se les brinda cantidades absolutas y relativas de las personas inscritas del padrón electoral, los votos válidos, los votos nulos y blancos; sin embargo en el abstencionismo no se brinda la cantidad absoluta, pero si la cantidad relativa (ver apéndice A). Además, se les propuso construir un problema en el que debían utilizar los datos brindados, además tenían que resolverlo y escribir todas operaciones utilizadas en su solución.

De esta actividad obtuvimos resultados como los que se muestran en la figura 2, en ella se presentan los procesos de traducción de las representaciones externas usados por dos grupos de estudiantes**.** Se encontró que 6 de los 8 grupos participantes generaron construcciones de problemas con representaciones de lenguaje verbal escrito y lenguaje simbólico numérico. Pero 2 de los 8 grupos realizaron propuestas de problemas donde se involucraban representaciones con lenguaje icónico (gráfico), verbal escrito y simbólico numérico a la vez.

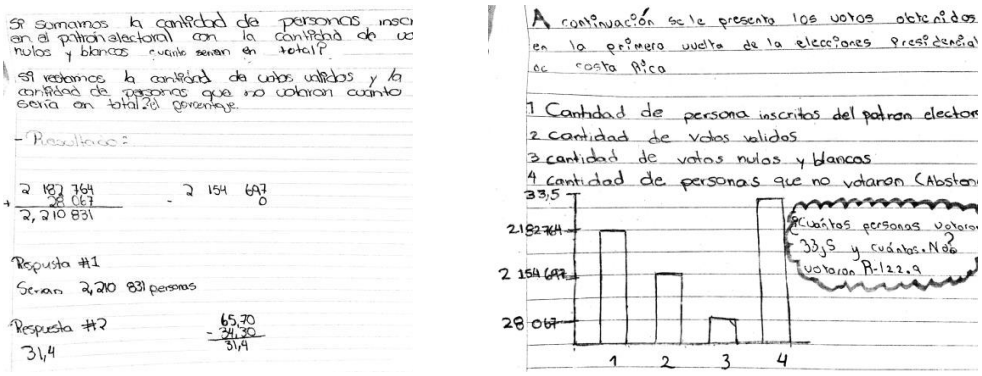


Figura 2. Las imágenes muestran las traducciones de representación tabular a lenguaje verbal escrito, lenguaje simbólico numérico y lenguaje icónico.

En esta actividad se produce una diferencia mínima con relación a las estrategias de la actividad 1, en la figura 2 se presenta dos de estas creaciones, en la primera imagen uno de los grupos siguió un camino donde utilizó operaciones aritméticas básicas tanto de cantidades absolutas como de cantidades relativas. En la segunda imagen se muestra la creación que realizaron dos de los ocho de los grupos participantes, donde se utiliza el lenguaje icónico (gráfico de barras) como estrategia para resolver este problema, cuya construcción es incorrecta (pues se produce un error al usar cantidades absolutas y relativas en el eje vertical del gráfico), no se muestra ninguna operación adicional.

Por otra parte, en ambas actividades observamos que los estudiantes no utilizaron los procesos de proporciones como la regla de tres, ni el uso de porcentajes, ni el uso de representaciones de simbología algebraica.

Conclusiones

Entre los resultados de este estudio destacan la importancia de promover la invención de problemas desde la perspectiva de la modelización matemática, pues las actividades propuestas fueron excelentes oportunidades de la construcción de su conocimiento matemático, ya que al crear un problema los estudiantes pusieron en práctica habilidades como la creatividad y la indagación al mismo tiempo que visualizaban la integralidad y utilidad de la matemática.

Las situaciones construidas por los estudiantes durante el proceso de invención de problemas, contenían representaciones de los conceptos matemáticos en lenguaje verbal escrito y lenguaje simbólico numérico en mayor preferencia, también se obtuvieron en menor cantidad propuestas de problemas con los mismos tipos de representación anterior pero con una variante de utilizar el tipo de representación con lenguaje icónico (gráfico); con lo cual se visualizó la

relación que tiene la representación con el significado personal del objeto matemático, desde las experiencias que el estudiante posee y construye en relación directa con él (Pecharromán, 2014).

Asimismo, al construir y resolver problemas por medio de las actividades de este estudio, los estudiantes no mostraron diversidad en los sistemas de representación utilizados, es decir no poseían una "fluidez representacional" y por lo tanto, no comprendían en forma significativa el objeto matemático involucrado en el estudio.

Referencias y bibliografía

Castro, E., y Castro, E. (2000). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Ed.), *Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions
in the modelling process. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 38 (2), 143–162.

González, F., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2016). Interpretación de diagramas de comparación multiplicativa por estudiantes de secundaria. PNA, 10(4), 280-306.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities [El desarrollo de habilidades como plantear problemas en los niños de quinto grado]. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 183-217.

Hansen, R., y Hana, G. M. (2015). Problem Posing from a Modelling Perspective [Planteamiento de problemas desde una perspectiva de modelado]. En F.M. Singer , N. F. Ellerton, J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* [*Planteamiento de problemas matemáticos: Desde la investigación hasta la práctica efectiva*] (pp. 35–46). Cham: Springer International Publishing.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. P. (2014). Metodología de la Investigación (6ta ed). México: McGrall Hill.

Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving [Fundamentos de una perspectiva de modelos y modelos sobre la enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje y la resolución de problemas]. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* [*Más allá del constructivismo: Perspectivas sobre Modelos y Modelado en la Solución de Problemas Matemáticos, Aprendizaje y Enseñanza*] (pp. 203-204). Mahwash, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lesh, R., y English, L. (2005). Trends in the evolution of models y modeling perspectivs on mathematical learning and problem solving [Tendencias en la evolución de los modelos y perspectivas de modelado en el aprendizaje matemático y la resolución de problemas].

Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(*6*), 487-189. Recuperado de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm056a5.pdf

Martinez, A., Rivaya, F. J., Aguila, F., Cara, S., Navarro, J. A., Burgos, E.,… Torres, E. (1989). Bases psicopedagógicas. En A. Martinez y F. J. Rivaya (Eds.), *Una metodología activa y lúdica de enseñanza de la geometría elemental* (pp. 17-36). Madrid: Síntesis, S. A.

Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Revista Educación Matemática*, 26(2), 111-133.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.

Silver, E.A. (1994). On Mathematical Problem Posing [Sobre la invención de problemas]. *For the Learning of Mathematics* [Para el aprendizaje de las matemáticas]. 14 (1), p. 19-28.

Skemp, R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, España: Morata

Apéndice A

Actividad 1 de Invención de Problemas

A continuación se le presentan dos productos con sus respectivos precios del Mercado





Construye un problema en el cual se utilice los dos artículos o uno de ellos que se le brindaron anteriormente en las imágenes, pero además que sirva para determinar el gasto que se podría generar con los artículos propuestos, si la cantidad de personas es mayor. Resuelve el problema y escribe todas las operaciones que realices para llegar a la respuesta final.

Actividad 2 de Invención de Problemas

A continuación se le presentan los Votos obtenidos en la primera vuelta de las Elecciones Presidenciales de Costa Rica, realizada el domingo 4 de febrero del 2018.

Cantidad de personas inscritas del padrón electoral	**2 182 764**	**100%**
Cantidad de votos válidos	**2 154 697**	**65,70 %**
Cantidad de votos nulos y blancos	**28 067**	
Cantidad de personas que no votaron (Abstencionismo)		**34,30 %**

Construye un problema en el cual se utilice los datos brindados en la tabla anterior. Además, resuelve el problema y escribe todas las operaciones que realices para llegar a la respuesta final.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desarrollo de Talento matemático y la Creatividad

María Alejandra **Solano** Delgado
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander
Colombia
alejasode08@hotmail.com
Solange Roa Fuentes
Escuela de Matemática, Universidad Industrial de Santander; Grupo EDUMAT – UIS
Colombia
sroa@matematicas.uis.edu.co
Erika García Torres
Facultad de Psicología, Universidad Autónoma de Querétaro Colombia
México
erikagart@gmail.com

Resumen

El documento muestra los avances de una investigación que busca diseñar un entorno propicio para el desarrollo del talento matemático que fomente la creatividad. Para esto, se presenta una breve descripción de la controversia que ha generado el término talento, para luego dar lugar a investigaciones que sustentan la relación entre el talento matemático y la creatividad matemática. Además, se describe el marco conceptual que básicamente muestra cómo se construye un entorno de enriquecimiento y cómo se propone determinar el desarrollo de la creatividad matemática como elemento fundamental para potenciar el talento matemático.

Palabras clave: educación matemática, talento matemático, creatividad matemática, habilidades matemáticas, talento potencial.

Introducción

Esta investigación busca crear un entorno propicio que fomente el desarrollo del talento matemático partiendo de la premisa que la creatividad es un predictor del talento matemático (Kattou, Christou & Pitta-Pantaz, 2015) y que el talento matemático está en potencia, esto desde la perspectiva de la UNESCO (2004). Pero antes de hablar del talento matemático es necesario analizar el debate que se ha generado alrededor del término talento, esto permite que mostrar cuál es la postura de la investigación.

El término Talento.

El término talento ha sido muy debatido desde diferentes perspectivas; tal como lo describen Singer, Sheffield, Freiman y Brandl (2016) aún no se llega a un consenso sobre su definición, ni de términos asociados al talento, como “súper dotado” o “genio”. Algunos investigadores (Terman, 1925; Feldhusen, 1992; Hernández, Hernández y Milán, 2007)

argumentan que el talento es una característica biológica innata en cada persona, la cual se mide por medio del test de Coeficiente Intelectual propuesto por el psicólogo William Stern en 1912. Sin embargo, existen otras visiones que declaran que "esta concepción biológica de que el talento indica un desarrollo acelerado de funciones en el cerebro las cuales permiten su uso más eficiente o eficaz, ha sido un término arraigado (en la cultura)" (Clark, 1997, p. 8). Clark (1997) además menciona que el talento se caracteriza por un comportamiento creativo de liderazgo, invención y habilidades matemáticas, en las cuales intervienen tanto el contexto familiar como el escolar y en las condiciones sociales de los individuos. Esto va en la misma perspectiva de la propuesta teórica de Howard Gardner (1995), al enunciar su teoría de inteligencias múltiples. Esta teoría abre el espectro de la inteligencia (lingüística, musical, lógico-matemática, espacial, cenestésico-corporal y personales) y muestra otras perspectivas para potenciar y desarrollar habilidades y destrezas.

Por otra parte, desde 1985 Bloom, analiza el desarrollo del talento como consecuencia de la influencia del contexto, de los padres y de los maestros, Además encuentra que los talentosos eran caracterizados por ser perseverantes, competitivos, tenían deseo de sobresalir y una mayor disposición para trabajar. En dicho trabajo Bloom muestra un acercamiento al talento desde una perspectiva diferente a la innata, revelando un camino para futuras investigaciones sobre el talento.

Talento matemático y creatividad matemática.

Particularmente el talento matemático ha sido estudiado por diferentes investigadores como Krutetskii, (1976), Lupkowski-Shoplik y Assouline (1994), Abdullah Ficici y Del Siegle (2008), Miserandino y Subotnik (1995), Bicknell, (2008) y Canché y Farfán (2017). Krutetskii por ejemplo, en su libro "*The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*" expone sus ideas sobre la capacidad matemática, afirmando que las características genéticas juegan un papel importante en el progreso de estas pero no son suficientes para el desarrollo de habilidades que conlleven al desarrollo del talento matemático (1976). Mientras que Lupkowski-Shoplik y Assouline (1994) brindan una serie de estrategias para poder desafiar suficientemente a estos estudiantes, partiendo de la escuela en la que estudian, esto es, que la escuela regular cree un programa especial que logre desafiar a los niños con talento matemático.

Por su parte Abdullah Ficici y Del Siegle (2008), realizan una encuesta virtual a maestros de secundaria: 900 de Corea del Sur, 408 de Turquía y 100 de Estados Unidos, en la cual se preguntaba qué caracterizaba a un estudiante talentoso en matemáticas. Los profesores con mayor experiencia en el campo de la enseñanza valoraban la resolución de problemas de forma creativa, cosa que resalta Miserandino y Subotnik (1995) diciendo que muchos estudiantes considerados talentosos matemáticamente tienen problemas con las habilidades puramente computacionales. Dichos autores también encontraron que la cultura coreana y la estadounidense tenían posturas diferentes con respecto a lo que consideran talento matemático, ya que en la cultura estadounidense se considera que el talento es innato, mientras que los coreanos le dan un mayor nivel al esfuerzo que a la capacidad, por lo que plantean que el talento matemático está en desarrollo.

Respecto a la caracterización se encuentra por ejemplo a Bicknell (2008), quien plantea que los individuos talentosos en matemáticas son determinados desde las perspectiva de ellos mismos, de sus padres y sus docentes; esto lleva a un consenso de ciertas características comunes en todos: la persistencia, el pensamiento flexible, la creatividad y el compromiso con la tarea.

En contraste con las anteriores visiones, Canché y Farfán (2017) proponen un cambio de paradigma, es decir, alejarse de las definiciones de superdotado y tomar una nueva postura del desarrollo del talento. Para esto proponen un trabajo de acuerdo con el potencial de cada individuo, teniendo en cuenta elementos del contexto, ya que el conocimiento para las autoras es una construcción continua de habilidades por medio de un entorno que promueva este desarrollo en todos los estudiantes. Definición que guiará esta investigación pues apoya el desarrollo del talento desde el potencial de los estudiantes.

En las investigaciones mencionadas se habla de la creatividad como una característica del talento. Leikin, Levav-Waynberg y Guberman (2011) por ejemplo, realizan una investigación empírica, en la cual se emplean tareas con múltiples solución (MST, por sus siglas en inglés) para el desarrollo de la creatividad. Estos autores encuentran que la fluidez y la flexibilidad son más naturales en el ser humano, pero que la originalidad va más allá; por lo tanto afirman que el componente más fuerte para determinar la creatividad es la originalidad, conclusión que es apoyada por Levenson (2011).

En particular para esta investigación el desarrollo del talento matemático está asociado al desarrollo creativo de cada individuo. Este aspecto del talento puede ser estudiado, a través de la formulación y trabajo en el aula de problemas desafiantes (Oktaç, Roa-Fuentes y Martínez, 2011).

De acuerdo con la revisión bibliográfica es posible afirmar que un estudiante talentos en matemáticas debe: Ser persistente, tener un compromiso con la tarea, ser flexibles, tener fluidez, ser original, mostrar predilección por los problemas, formular problemas, arriesgarse en la fase exploración de los problemas y disfrutar al trabajar sobre problemas desafiantes.

A partir de lo anterior surge la pregunta de esta investigación ¿Qué tipo de tareas son las más apropiadas para potenciar el desarrollo del talento matemático? Dando lugar a nuestro objetivo de investigación potenciar el talento matemático por medio de problemas desafiantes que promuevan el desarrollo de funciones cognitivas asociadas a la creatividad. Con el fin de dar respuesta a la pregunta y cumplir con el objetivo de investigación, se propone el siguiente marco conceptual.

Marco conceptual

Talento potencial

En este apartado se presenta la definición de talento potencial desde la perspectiva de la UNESCO y desde la perspectiva evolutiva de Canché y Farfán. El talento potencial según la UNESCO (2004) hace referencia al talento como aquel:

> "que aún no se ha desarrollado o evidenciado, es decir que el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar su o sus talentos, pero a causa de uno o más factores no lo ha podido evidenciar en sus esquemas de acción". (p. 28)

En particular esta investigación centra su postura del talento desde una perspectiva evolutiva, es decir, tomar una postura del desarrollo del talento, proponiendo un trabajo de acuerdo con el potencial de cada estudiante, teniendo en cuenta elementos del contexto (Canché

y Farfán, 2017), creando un entorno que posiblemente potencialice su talento de acuerdo a su capacidad individual que puede o no construir en una actividad grupal.

Talento matemático.

Para analizar cómo se desarrolla el talento matemático se utiliza el modelo propuesto por Pitta-Pantazi , Christou , Kontoyianni y Kattou (2011):

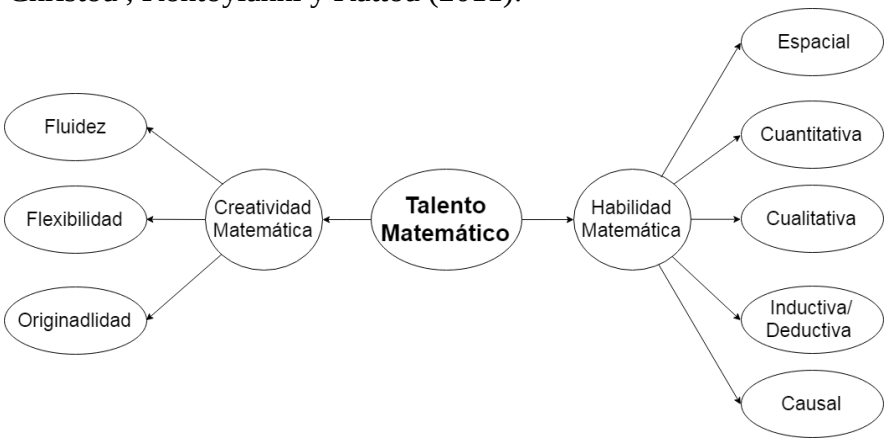


Figura 1. Modelo Talento Matemático adaptado de Pitta-Pantazi et al. (2011)

El modelo que guía el diseño y desarrollo de la investigación toma en cuenta el desarrollo de la creatividad y las habilidades matemáticas (Ver figura 1). A continuación se definen cada uno de estos constructos.

Creatividad matemática

La creatividad matemática se define como un proceso que involucra las siguientes funciones cognitivas: la fluidez, la flexibilidad y la originalidad (Torrence, 1995).

En este trabajo se toma la fluidez desde la perspectiva de Torrence como la cantidad de ideas que un individuo puede proponer ante un problema. Un ejemplo particular de este tipo de proceso es: se propone el siguiente problema "Los pollos y los conejos corren al aire libre. Juntos tienen 35 cabezas y 94 pies. ¿Cuántos pollos y cuántos conejos hay?" (Krutetskii, 1976, p.121), para resolver este problema los estudiantes pueden proponer diferentes ideas para resolver el problema como: realizar un sistema de ecuaciones, utilizar ensayo y error, realizar una suposición falsa para encontrar la solución, realizar pictogramas para identificar el número de patas de cada animal. En estas respuestas se identifica la fluidez como la exposición de las ideas de los estudiantes frente a los metodos de solución.

La flexibilidad se evidencia cuando el estudiante es capaz de realizar un cambio de enfoque al resolver un problema o revertir procesos mentales. Además puede proporcionar diferentes soluciones del mismo problema, desde diferentes perspectivas (Torrence, 1995). Siguiendo con el ejemplo anterior, una niña soluciona el problema desde dos enfoque diferentes. En el primer dice que si suponemos que son 35 gallinas entonces en total serían 70 patas por lo que sobrarían 24 patas, de donde deduce que estas perteneces a los conejos y por lo tanto hay 12 conejos y 23 gallinas (Krutetskii, 1976); el segundo enfoque lo realiza resolviendo el sistema de ecuaciones que la lleva a la misma solución.

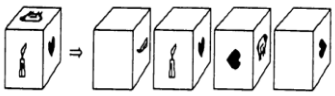
Finalmente, al suponer que los 35 animales son gallinas resulta ser una solución original, porque se evidencia cuando el estudiante construye una solución a un problema matemático poco frecuente entre sus pares o una solución que resulta singular para su experiencia (Leikin, 2009a). Esto es, la estudiante desarrolla el problema de forma inusual pues el camino regular de solución es por sistema de ecuaciones o mediante ensayo y error. Esto está determinado por las características particulares que determinan la experiencia de cada individuo.

Habilidad Matemática

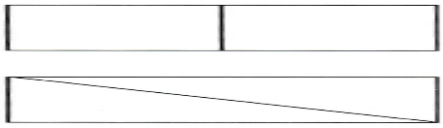
Por otra parte la habilidad matemática se divide en cinco tipos de habilidades, estas son: habilidades espaciales, cualitativas, cuantitativas, de razonamiento deductivo e inductivo y causales . Según Pitta- Pantaziet, et al., (2014) las habilidades espaciales se pueden evidenciar en la solución de problemas de rotaciones, de dependencia y hasta plegado de papel; las cualitativas están relacionadas con problemas que se centran en relaciones de diferencia y similitud; las cuantitativas se desarrollan mediante el cálculo numérico y el razonamiento algebraico y las causales tienen que ver con los problemas de causa y efecto. A continuación en la Tabla 1 se muestran unos ejemplos de problemas que desarrollan las habilidades matemáticas antes mencionadas.

Tabla 1

Ejemplos de problemas que desarrollan habilidades matemáticas.

Habilidades matemáticas	**Problema**	**Interpretación**
Espaciales	 Dibuja la figura que falta en cada cara. *Figura 2*. Problema de visualización 3D en Gutierrez (1991).	Las habilidades espaciales se ven en este problema cuando el estudiante puede realizar mentalmente las rotaciones y dibujar no sólo la figura sino identificar la posición.
Cualitativas	Veinte pasajeros viajan al aereopuerto Lanarca en bus. Doce de ellos llevan maleta de viaje, once llevan un bolso de computador y seis llevan los dos tipos de bolso. ¿Cuántos de ellos llevan sólo maleta de computador? (Problema tomado de Pitta-Pantazi et, al. 2011, p. 45)	Se evidencian cuando el estudiante puede relacionar la información de las personas que llevan los dos tipos de maletas, con las que llevan un solo tipo para poder realizar la exclusión de los datos que no le están dando una información relevante para la solución del problema.
De razonamiento inductivo/ deductivo	Compara uno de los rectángulos pequeños con uno de los triángulos rectángulos. Tienen la misma área o la de uno es	Se evidencian habilidades de razonamiento en el estudiante cuando puede relacionar que el triángulo rectángulo es la mitad del rectángulo inicial y a su vez el rectángulo pequeño también lo és, llevándolo a

mayor que la del otro.



deducir que sin importar la forma, los dos tienen la misma área por ser la mitad del mismo rectángulo.

Figura 3. Rectángulo dividido por la mitad de dos formas diferentes (NCTM, 2003, p. 194).

Fuente: Las autoras.

Para el desarrollo de esta investigación se propone diseñar y/o adaptar una serie de problemas desafiantes que involucren los diferentes componentes de las habilidades matemáticas para evidenciar en las soluciones de los estudiantes los procesos subyacentes de la creatividad matemática.

Metodología

En este apartado se muestra el proceso metodológico que guía este trabajo con el fin de responder la pregunta de investigación y por ende al objetivo propuesto.

Primera fase: Diseño e implementación de una prueba diagnóstica.

Con el fin de analizar los procesos cognitivos que dan cuenta de la creatividad (fluidez, flexibilidad y originalidad) de los estudiantes, se porpone realizar una prueba diagnóstica en la cual se diseñaran y/o se adaptaran problemas que estén relacionados con las habilidades matemáticas (cuantitativas, cualitativas, causales, de razonamiento y espaciales) para estudiar bajo el planteamiento de Torrence (1995) las distintas soluciones que brinden los estudiantes.

Segunda fase: Diseño de instrumentos.

En esta fase, se realiza primero el diseño y/o adaptación de los problemas bajo el marco de las habilidades matemáticas propuesto por Pitta-Pintaza, et, al (2011). Para esto se plantea diseñar tres cuestionarios que involucren problemas que vayan de menor dificultad a mayor dificultad. Dichos problemas son de tres tipos: mal planteados, con múltiple solución Leikin, Levav-Waynberg y Guberman, (2011) y paradojas relacionadas con el infinito Roa-Fuentes, (2012) ya que este tipo de problemas permiten estudiar la creatividad de los individuos.

Además del diseño de los cuestionarios también se propone el diseño de una entrevista semiestructurada por cada cuestionario que es aplicada a los estudiantes que participan de la investigación, inmediatamente después de cada sesión de cuestionario, con el fin de complementar las respuestas obtenidas en los registros escritos.

Finalmente se pretende diseñar e implementar una prueba final, la cual puede dar cuenta del proceso de los estudiantes durante la aplicación de los cuestionarios. El diseño de esta prueba será similar a la diagnóstica con el fin de analizar si los procesos cognitivos de la creatividad han sido potenciados, por lo tanto constará de problemas relacionados con las habilidades matemáticas.

Tercera fase: Implementación de los instrumentos y recolección de la información.

La recolección de datos se propone desarrollar por medio de tres instrumentos. El primer instrumento es la hoja de trabajo de cada estudiante; es decir, donde el estudiante soluciona los problemas propuestos en la segunda fase de esta investigación. El segundo instrumento está constituido por entrevistas y finalmente, el tercer instrumento es la videograbación de cada intervención. Todo esto con el fin de obtener la mayor información de la forma de pensar de los estudiantes a la hora de resolver los problemas.

Cuarta fase: Análisis de datos.

En esta fase se analizan las soluciones brindadas por los estudiantes a los problemas propuestos, a partir de Torrence (1995), esto es, la fluidez, la flexibilidad y la originalidad de estas, con el objetivo de dar cuenta de cómo el desarrollo investigativo permite potenciar o no el talento matemático.

Conclusiones y proyección de la investigación

El talento matemático ha sido ampliamente estudiado desde diferentes perspectivas, ya que en un momento predominó el talento visto como una característica innata; pero nuevas investigaciones han mostrado que el talento puede ser desarrollado, ya que no es suficiente con nacer con predisposición para desarrollar el talento, sino que es necesario estar en un entorno que lo propicie, razones que muestran la importancia de esta investigación.

El contexto en el que se realiza esta investigación es una escuela rural, conocida como Escuela Nueva en Colombia con estudiantes de cuarto y quinto gado. Dado que se espera mostrar que en este contexto particularmente especial, es posible desarrollar el talento matemático potencial. Este contexto brinda la oportunidad de trabajar con dos o más grados en un mismo espacio físico (aula regular), permitiendo un espacio que puede ofrecer evidenciar diferentes niveles de creatividad.

Referencias y bibliografía

Abdullah Ficici & Del Siegle (2008) International Teachers' Judgment of Gifted Mathematics Student Characteristics, *Gifted and Talented International*, 23:1, 23-38, DOI: 10.1080/15332276.2008.11673510.

Bicknell, B. (2008). *Who are the mathematically gifted? Student, parent, and teacher perspectives.* In Proceedings of ICME11. TG6: Activities and Programs for Gifted Students.

Bloom, B. (Ed.). (1985). Developing talent in Young people. New York: Ballentine.

Canché, E. y Farfán, R. (2017). El Talento en matemáticas desde una perspectiva sociocultural: un eje para el loro dela equidad educativa. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 97-118.

Clark, B. (1997). No child is just born gifted: Creating and developing unlimited potential. Recuperado el 25 de agosto de 2018 de: http://ektron.nagc.org/uploadedFiles/PHP/PHP_Article_Archive/Sept_96_-_Sept_97/No%20Child%20Is%20Just%20Born%20Gifted-Clark-3_97PHP.pdf

Demetra P., Constantinos C., Kontoyianni K., y Kattou M. (2011). A Model of Mathematical Giftedness: Integrating Natural, Creative, and Mathematical Abilities, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 11:1, 39-54, DOI: 10.1080/14926156.2011.548900

Feldhusen, J. F. (1992). Talent Identification and Development in Education (TIDE). *Proceedings of The Second Asian Conference on Giftedness: Gowing Up Gifted & Talented,* 199-206.

Gardner, H. (1995). Estructuras de la Mente: la teoría de las Inteligencias Múltiples. 2ª Edición. México FCE.

Gutierre, Ángel (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. Memoria del tercer congreso internacional sobre investigación en Educación Matemática. Universidad de Valencia.

Hernández, J., Hernández, J., Milán, M. A. (2007). La creatividad asociada al talento musical en alumnos superdotados. Respuestas educativas. *Ensayos*. (22), 83-97.

Kattou, M., Christou, C., Pitta-Pantazi, D. (2015). Mathematical creativity or general creativity. In K. Krainer, N. Vondrová (Eds.), Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education. Prague, Czech Republic: Charles University.

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. (Trad. Teller J.). Chicago, EEUU: The University of Chicago Press (Original en ruso, 1968).

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Guberman, R. (2011). Employing multiple solution tasks for the development of mathematical creativity: Two comparative studies. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of European Research in Mathematics Education (pp. 1094-1103).* Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Lupkowski-Shoplik, A. E., Assouline, S. G. (1994) Evidence of extreme mathematical precocity: Case studies of talented youths. Roeper Review. (Del international teachers judgment).

Miserandino, D., Subotnik, R., y Ou, K. (1995). Identifying and nurturing mathematical talent in urban school setting. The Journal of Secondary Gifted Education. En International Teachers Judgment.

National Councilof Teachers of Mathematics. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática

Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Rodríguez, M. (2011). Equity Issues Concerning Gifted Children in Mathematics: A perspective from Mexico. Atweh, B.,Graven, M., Secada, W., Valero, P.(Ed). Mapping Equity and Quality in Mathematics Education. (pp.351-364). New York.

Roa Fuentes (2012). El infinito: un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas. Tesis de doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del PIN. México

Singer, F., Sheffield, L., Freiman, V. y Brandl, M. (2016). Research On and Activities For Mathematically Gifted Students. En ICME-13 Topical Surveys. Nueva York: Springer Open.

Terman, L. M. (Ed.) (1925). Mental and physical traits of thousand gifted children. Genetic Studies of Genius, vol. 1, Stanford University Press, Stanford.

Torrance, E. P. (1995). The beyonders' in why fly? A philosophy of creativity. Norwood, NJ: Ablex.

UNESCO. (2004). La educación de niños con talento en Iberoamérica. (M. Benavides, A. Maz, & R. Blanco, Eds.) Santiago, Chile: Trineo S.A.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Evento contextualizado: estudo de um problema da Engenharia Civil para o ensino de Matemática

Eloiza **Gomes**
Instituto Mauá de Tecnologia
Brasil
eloiza@maua.br
Gabriel Loureiro de **Lima**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
gllima@pucsp.br
Barbara Lutaif **Bianchini**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
barbara@pucsp.br
Karina Bradaschia **Rocha**
Instituto Mauá de Tecnologia
Brasil
karina.rocha@maua.br
Paula Meirelles **Bolelli**
Instituto Mauá de Tecnologia
Brasil
paula.bolelli@maua.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é o de apresentar um evento contextualizado, elaborado a partir de um problema clássico da Engenharia Civil e também uma possível organização didática com vistas a ser desenvolvida em aulas de uma disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral, com o intuito de revisar conceitos anteriormente trabalhados na Educação Básica, mas sob um novo olhar: o das aplicações de tais conteúdos em disciplinas específicas da Engenharia e na futura área de atuação profissional do graduando. Como embasamento teórico, adotamos pressupostos da Matemática no Contexto das Ciências e do modelo didático associado a tal referencial, o Modelo Didático da Matemática em Contexto. O principal desafio vivenciado durante o processo de elaboração do evento contextualizado foi adaptar, tendo em vista o público-alvo constituído por ingressantes na universidade, um problema da Engenharia que engloba uma série de conceitos matemáticos, físicos e específicos que esse público ainda não domina.

Palavras-chave: Educação Matemática, Engenharia Civil, Evento Contextualizado, Cálculo Diferencial e Integral.

Introdução

Este artigo faz parte de uma pesquisa mais ampla, em desenvolvimento, em que estudamos, fundamentados na teoria a *Matemática no Contexto das Ciências* (MCC) (Camarena, 2013, 2017), a construção de *eventos contextualizados* (EC) para o ensino de Matemática em cursos de Engenharia. Apresentamos, neste trabalho, alguns elementos daquilo que Camarena (2017) denomina de *história de um evento contextualizado*, construído para ser utilizado em uma disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral, com o intuito de revisitar questões relativas ao estudo das funções trigonométricas e exponenciais reais de uma variável real, já trabalhadas pelo aluno na Educação Básica, mas que, em nossa visão, devem ser retomadas com um enfoque direcionado ao ensino superior e às aplicações com as quais ele irá se deparar nas disciplinas específicas da Engenharia e em sua futura atuação profissional.

O evento foi construído a partir de um problema clássico da Engenharia Civil normalmente trabalhado nos cursos de graduação desta habilitação da Engenharia. Tal problema é modelado por uma equação diferencial de 2ª ordem, conteúdo que, no âmbito da disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral, ainda não é acessível ao estudante. Da mesma maneira, há uma série de conceitos específicos da Engenharia que também não serão, neste momento, de domínio do graduando. Foi necessário, portanto, realizarmos uma adaptação do problema, tanto do ponto de vista da Matemática quanto da Engenharia, para que ele se tornasse viável de ser trabalhado com esse público. Ressaltamos que, na proposta que estamos apresentando, o estudante não irá resolver a equação diferencial envolvida na situação. Partindo da solução que já será fornecida, ele irá explorar, de maneira contextualizada, os conteúdos matemáticos visados.

Como um primeiro passo para efetivamente aplicarmos em sala de aula o EC construído, é que detalhamos, em relação a alguns aspectos, a história de tal evento e propomos uma primeira organização didática para o trabalho com o EC. Para que os conceitos de EC e de história de um EC possam ser devidamente compreendidos, na próxima seção abordamos alguns preceitos da teoria MCC.

Preceitos da MCC e a noção de EC

A teoria MCC, elaborada por Patricia Camarena há mais de trinta anos para subsidiar reflexões relativas ao ensino e a aprendizagem de Matemática em cursos nos quais essa ciência está a serviço, contempla, em uma de suas fases – para maiores detalhes a respeito desse referencial consultar Camarena (2010, 2013, 2017) e Lima, Bianchini e Gomes (2018) – um modelo didático específico, denominado *Modelo Didático da Matemática em Contexto* (MoDiMaCo).

Em tal Modelo, a principal ferramenta de trabalho para o professor em sala de aula é o que Camarena (2013) denomina de *evento contextualizado*. Um EC é concebido como um problema ou um projeto construído com o objetivo de integrar disciplinas matemáticas e não matemáticas que compõem o currículo de determinado curso de graduação, possibilitando, portanto, um trabalho interdisciplinar no ambiente de aprendizagem. No MoDiMaCo, desenvolvido a partir de pilares construtivistas, prevê-se que o evento seja trabalhado de forma colaborativa pelos estudantes, que devem atuar em equipes de três integrantes, tendo cada um deles um papel: *líder emocional*, *líder intelectual* e *líder operativo*. Para maiores esclarecimentos, consultar Camarena (2017).

Após identificar uma situação com potencial para gerar um EC – e, no caso específico desse trabalho, a fonte a que recorremos para a busca dessa situação foi um livro adotado como referência em uma disciplina específica da Engenharia Civil, a saber Mazzili, André, Bucalem e Cifú (2016) – o docente deve construir de fato o evento. Ressaltamos que, no caso do evento em análise neste trabalho, seu *nível cognitivo* (Camarena, 2017) é médio, uma vez que o problema que o originou é proveniente de uma outra disciplina que o aluno cursará em sua graduação.

Finalizada a construção do evento, o docente deve começar a redigir a história desse evento, ou, em outras palavras, realizar uma análise *a priori* daquela situação de ensino e elaborar um documento que, segundo Lima et al. (2018) a partir de Camarena (2017), deve incluir, dentre outros aspectos: a descrição e o papel do EC, os conhecimentos matemáticos envolvidos, as habilidades prévias esperadas durante a resolução do evento, os conhecimentos prévios de Matemática esperados, os conhecimentos do contexto que estão presentes no evento, as possíveis formas de resolução, os recursos tecnológicos que podem ser empregados, etc.

Antes de passarmos, na seção seguinte a apresentar alguns destes elementos da história do evento que elaboramos, convém salientar que, há dois eixos que estruturam o MoDiMaCo: a contextualização e a descontextualização. No primeiro, realiza-se, a partir dos EC, um trabalho interdisciplinar. Já no segundo, por meio de atividades individuais ou em grupos contemplando diferentes estratégias, "trabalha-se de forma disciplinar somente com a Matemática, com o nível de formalismo exigido pela futura profissão do estudante" (Camarena, 2017, p. 10), evidenciando que o conceito trabalhado por meio daquele EC poderá também ser aplicado em outras situações.

O EC elaborado[1], elementos de sua história e uma proposta de organização didática do EC

Nesta seção, apresentamos, em primeiro lugar, o contexto no qual a situação que originou o EC está imersa. Em seguida, explicitamos o evento, elementos de sua história e, finalmente, uma possível organização didática do trabalho com o EC.

O contexto a partir do qual o EC foi construído

O objeto de estudo no problema que deu origem ao EC é um pórtico de um pavimento, submetido a uma força estática, que fará com que a estrutura vibre livremente. Na engenharia estrutural, os pórticos são formas compostas por elementos lineares (normalmente vigas e colunas), conectados em suas extremidades de forma a não permitir rotações relativas (conexões rígidas). Os pórticos são projetados de modo a resistir a esforços normais (que tendem a esticar ou encurtar a estrutura), cortantes (forças que tendem a cisalhar a estrutura) e, principalmente, aos esforços de flexão (que tendem a curvar a estrutura) e são muito utilizados no travamento de edifícios, principalmente dos mais elevados, em que o padrão com repetições resulta em estruturas hiperestáticas.

Sua aplicação nas edificações data do final do século XIX e início do século XX, quando as estruturas de aço formavam um "esqueleto estrutural" fácil de ser construído, que gerava um

[1] A descrição de pórticos na Engenharia Estrutural que trazemos nesta seção, contexto que originou a construção do EC em tela, foi originalmente apresentada em trabalho ainda não publicado, de autoria dos autores desse artigo, que foi discutido durante a reunião do Grupo de Trabalho Ciências Básicas e Matemática na Engenharia ocorrida em setembro de 2018 durante o XLVI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, em Salvador, Bahia, Brasil.

espaço amplo sem pilares centrais e possibilitava versatilidade no *design* (Pauletti, 2010). As vantagens de se utilizar uma estrutura aporticada são que elas possuem menores deflexões (alterações ou desvios da posição natural para um dos lados) e distribuem melhor a carga quando comparadas com uma estrutura composta por viga-pilar (vigas simplesmente apoiadas nos pilares), pois a conexão rígida entre vigas e pilares faz com que os efeitos de flexão sejam também absorvidos pelos pilares. Além disso, a utilização na construção de edifícios do pórtico estrutural rígido de aço tem como vantagens os fatos dos pórticos serem economicamente viáveis, energeticamente eficientes, os pavimentos não serem tão suscetíveis a vibrações, entre outros fatores.

Antigamente, como forma de simplificar qualquer problema de Engenharia, era usual realizar apenas uma análise estática das estruturas, majorando os carregamentos (ou seja, forças atuantes na estrutura) pelos chamados coeficientes de amplificação dinâmica. Porém, com o passar do tempo e devido ao desenvolvimento de novas tecnologias, os sistemas estruturais tornaram-se cada vez mais esbeltos e passíveis de vibrações, sendo necessário, para que se faça corretamente, e conforme as normas técnicas, seu dimensionamento e verificação, o estudo das ações dinâmicas sobre eles atuantes - tais como ventos muito fortes, terremotos ou até mesmo grandes máquinas rotativas que podem ser colocadas dentro desses edifícios. (Mazzilli et al, 2016). Como é previsto por norma, os edifícios possuem um máximo deslocamento horizontal permitido, que é diretamente proporcional à altura do edifício, considerado tanto como um fator de segurança da estrutura, quanto para o próprio conforto dos usuários.

Na situação – inspirada naquelas abordadas por Mazzili et al. (2016) - a partir da qual o EC foi elaborado, o modelo estrutural é tido como *shear building*, no qual as vigas são consideradas infinitamente rígidas quando comparadas às colunas, além de toda a massa da estrutura estar concentrada nas lajes. Em modelos deste tipo, o deslocamento vertical e a rotação são restringidos. Além disso, no caso considerado, a estrutura é simétrica, o que faz com que o modelo passe de um sistema com 6 graus de liberdade (ou seja, 3 possíveis movimentos que podem ocorrer em cada nó da estrutura, que são o deslocamento horizontal, vertical e a rotação) para apenas um grau de liberdade (o deslocamento horizontal), como pode ser visto na Figura 1.

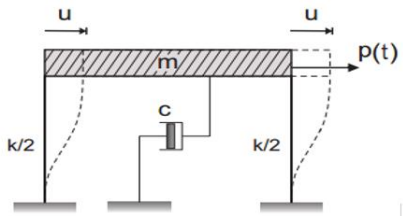


Figura 1. Modelo de um pavimento com um grau de liberdade.

O EC elaborado

Na sequência, apresentamos o evento contextualizado exatamente da maneira como ele seria proposto a uma turma de estudantes de uma disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral, com as devidas adaptações e explicações que se fazem necessárias para que ele possa ser compreendido por esse público. Salientamos que não apresentaremos a resolução do problema e nem esse será o objetivo em sala de aula na disciplina para a qual o evento foi elaborado; partindo da solução do evento e de questões diretamente relacionadas ao contexto do

problema, nossa intenção é levar os graduandos a revisitar conceitos matemáticos anteriormente estudados e que serão fundamentais na disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral e ao mesmo tempo a estabelecer vinculações entre tais conteúdos e aspectos da Engenharia Civil.

Considere um pórtico com massa $m = 384$ kg, rigidez de cada pilar $\frac{k}{2} = 19200$ N/m e taxa de amortecimento $\xi = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} = 0{,}05$, sendo c a constante de amortecimento. Uma força estática é aplicada sobre essa estrutura, causando um deslocamento inicial $u_0 = 0{,}1$ m. Em seguida, essa força é retirada bruscamente e a estrutura passa a vibrar livremente com velocidade inicial nula. Considerando apenas a possibilidade de deslocamento horizontal desse pórtico, a expressão que permite analisar o comportamento do deslocamento u em função do tempo é dada por:

$$u(t) = e^{-0{,}5t}[0{,}10\cos(10t - 0{,}05)]$$

Determine o número de ciclos necessários para que a amplitude do movimento se reduza a aproximadamente 80% da amplitude inicial.

Alguns elementos da história do EC

- O papel do evento: revisitar questões relativas ao estudo das funções trigonométricas e exponenciais reais de uma variável real, com um enfoque direcionado ao ensino superior e às aplicações com as quais o estudante irá se deparar nas disciplinas específicas da Engenharia e em sua futura atuação profissional.
- Habilidades prévias esperadas durante a resolução do evento: controle e validação das respostas obtidas; senso crítico, estabelecimento e validação/descarte de conjecturas, defesa de argumentos e ideias, interpretação da solução matemática encontrada em termos do contexto, autonomia, trabalho em equipe e comunicação.
- Conhecimentos matemáticos envolvidos: função exponencial (domínio, imagem, crescimento/decrescimento, intersecção com o eixo *y*, assíntotas, representação gráfica com sua devida interpretação); funções trigonométricas (domínio, imagem, período, amplitude, crescimento/decrescimento, interseções com os eixos coordenados, representação gráfica e sua devida interpretação).
- Conhecimentos prévios de Matemática esperados do estudante: aqueles oriundos da Educação Básica em relação aos conceitos matemáticos envolvidos no evento, habilidade de construir (com lápis e papel e recorrendo a recursos de tecnologias digitais), analisar e interpretar representações gráficas de funções, manipulação de expressões algébricas.
- Conhecimentos do contexto presentes no EC: a noção de pórtico; rigidez de uma estrutura; força estática; diferentes tipos de esforços sobre uma estrutura; vibração livre de uma estrutura; taxa de amortecimento; modelo estrutural *shear building*.
- Formas de resolução do evento: dentre as diferentes maneiras de resolver o EC, destacamos, em uma primeira análise, a gráfica (via lápis e papel ou via algum recurso tecnológico) e a analítica. Evidentemente, ao aplicar de fato tal evento em sala de aula, outras resoluções não previstas poderão ser apresentadas pelos estudantes.
- Obstáculos que os estudantes podem enfrentar durante a resolução do EC: ausência parcial dos conhecimentos prévios esperados; uma postura não proativa diante de um problema; dificuldade em trabalhar em equipes; desestímulo perante às primeiras dificuldades intrínsecas à resolução do EC.

- Possíveis recursos tecnológicos a serem empregados na resolução do EC: *softwares* como, por exemplo, MatLab e GeoGebra, calculadoras gráficas e ambientes virtuais de aprendizagem.

Tendo sido apresentados alguns elementos da história do EC elaborado, passamos, na sequência a detalhar uma possível organização didática para o trabalho com esse evento.

Uma proposta de organização didática do EC

Tendo consciência de que os conhecimentos do contexto da Engenharia Civil não são de domínio dos estudantes que estão ingressando na universidade e cursando uma primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, consideramos necessária uma etapa de familiarização, na qual os alunos farão uma pesquisa bibliográfica e/ou consultas junto a professores das disciplinas de Física e daquelas específicas da Engenharia a respeito dos conhecimentos do contexto presentes no EC (trabalho a ser desenvolvido extraclasse e que será desencadeado 10 dias antes do início do desenvolvimento do evento em sala de aula). Ao término do prazo para a realização das tarefas, os resultados obtidos deverão ser socializados em sala de aula e, para concluir essa etapa, o docente poderá disponibilizar ao graduando um texto elaborado em conjunto com professores da área específica, como aquele que apresentamos neste artigo na seção *O contexto a partir do qual o EC foi construído*.

A próxima etapa consistirá na composição das equipes formadas por três integrantes que trabalharão na resolução do problema que, neste momento, será entregue aos estudantes. O primeiro trabalho das equipes será então uma pesquisa, em sala de aula, desencadeada por discussões provocadas pelo professor a respeito de como se chegou a expressão que modela o deslocamento horizontal do pórtico em relação ao tempo. Neste momento, os estudantes poderão recorrer a materiais acessíveis na *internet* (acessados, por exemplo, a partir de seus celulares) e a livros e artigos sobre o tema disponibilizados pelo docente.

Nessa pesquisa, o aluno irá se deparar com conteúdos matemáticos e físicos que ainda não domina. O professor então deverá argumentar que o objetivo não é compreender tais conteúdos nesse momento, mas sim ter consciência de que, no cerne de um problema clássico de sua futura área de atuação profissional, estão uma série de conceitos que ele estudará em disciplinas básicas de Matemática e Física e dos quais precisará se apropriar. De qualquer maneira, o professor poderá dar uma ideia intuitiva para os alunos especialmente a respeito do que é uma equação diferencial, principal ideia matemática para a efetiva obtenção da expressão do deslocamento horizontal u em função do tempo.

Finalizada essa primeira etapa em sala de aula, o docente pode propor, em um ambiente virtual de aprendizagem, atividades individuais visando, de maneira descontextualizada, trabalhar com aspectos relativos às funções exponenciais e trigonométricas, suas respectivas representações gráficas e com a noção de produto de funções. O objetivo de tais atividades será recuperar, na estrutura cognitiva dos estudantes, conceitos essenciais para a continuidade do trabalho, em sala de aula, com o EC.

O próximo encontro presencial entre as equipes e o professor será destinado à resolução do evento. Neste momento, caso os estudantes enfrentem obstáculos que os impeçam de avançar rumo à resposta do EC, o docente poderá realizar intervenções, no sentido de auxiliá-los, mas sem fornecer-lhes a solução. Uma das estratégias que pode adotar é propor questões/atividades auxiliares, como por exemplo:

- ✓ Caso você não consiga construir a representação gráfica de u, inicialmente represente graficamente as funções cujas expressões algébricas são dadas por $f(t) = e^{-0,5t}$ e $g(t) = 0{,}10\cos(10\text{t} - 0{,}05)$.
- ✓ Qual seria a resposta do EC caso $u(t) = g(t) = 0{,}10\cos(10t - 0{,}05)$?
- ✓ Como você poderia obter a função u a partir das funções f e g?
- ✓ Finalmente, qual a representação gráfica de u?
- ✓ Analise a representação gráfica de u, comparando-a com a representação gráfica de g e buscando similaridades e diferenças entre os comportamentos de tais funções.
- ✓ A representação gráfica de u é coerente com a situação presente no EC?
- ✓ Analisando essa representação, que considerações você poderia fazer em relação ao comportamento do pórtico decorrido certo intervalo de tempo após a retirada da força estática aplicada?
- ✓ Qual o significado, no contexto do problema, para $u(t) < 0$, $u(t) = 0$ e $u(t) > 0$?
- ✓ Qual o comportamento de u quando os valores de t tendem ao infinito?
- ✓ Como identificar os ciclos e as amplitudes da função u a partir de sua representação gráfica?
- ✓ A partir do que foi discutido, qual é então o número de ciclos necessários para que a amplitude do movimento se reduza a aproximadamente 80% da amplitude inicial?

Após o final da aula e o fechamento do evento, solicitar que os estudantes produzam, individualmente, um relatório detalhado da atividade realizada, buscando explicitar, além das etapas de resolução do EC, os obstáculos enfrentados, as vinculações que estabeleceram entre os conteúdos matemáticos e aqueles específicos da Engenharia Civil presentes no problema e também os seus principais aprendizados oportunizados pela resolução do EC.

Considerações Finais

A partir dos estudos que, desde 2015, estamos desenvolvendo com base nos pressupostos da MCC e da identificação, em pesquisas anteriores, de situações de diferentes habilitações da Engenharia que podem inspirar a construção de EC, optamos, neste trabalho, por apresentar um evento elaborado a partir de um problema clássico da Engenharia Civil e uma possível organização didática com vistas a ser desenvolvida em aulas de uma disciplina inicial de Cálculo, com o objetivo de revisar conceitos anteriormente trabalhados na Educação Básica, mas sob um novo olhar: o das aplicações de tais conteúdos em disciplinas específicas da Engenharia e na futura área de atuação profissional do graduando.

Futuramente, aplicaremos efetivamente o evento com estudantes de uma disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral e confrontaremos os dados obtidos com a organização didática aqui apresentada, propondo, caso necessário, ajustes e refinamentos da proposta. Buscaremos ainda indícios da eficácia ou não, em termos de aprendizagem dos estudantes, da utilização desse tipo de EC junto àqueles que estão ingressando nos cursos universitários.

Concluímos esse trabalho, ressaltando uma dificuldade intrínseca à utilização de situações específicas da Engenharia em aulas de Matemática, especialmente naquelas ministradas no início dos cursos de graduação, que é o fato dos EC produzidos a partir delas envolverem muitos conteúdos matemáticos e do contexto das Engenharias que ainda não são de

domínio dos estudantes. Nesse sentido, precisamos nos atentar para não corrermos o risco de simplificar demasiadamente a questão e torná-la tão desinteressante ao aluno quanto um problema usual em sala de aula ou, de maneira oposta, não realizarmos qualquer tipo de adaptação, partindo da premissa de que apresentarmos um problema contextualizado garante a motivação do estudante, e, desta forma, torna-la inacessível ao nosso público-alvo.

Referências e bibliografia

Camarena, P. G. (2010). Aportaciones de Investigación al Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería. Recuperado em 28 de janeiro, 2016, de http://www.ai.org.mx/ai/archivos/ingresos/camarenagallardo/dra._patricia_camarena_gallardo.pdf

Camarena, P. G. (2013). A treita anõs de la teoria educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias". *Inovación Educativa*, 13(62), 17-44. Recuperado em 20 setembro, 2018, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000200003

Camarena, P. G. (2017). Didáctica de la matemática en contexto. Educação Matemática Pesquisa, 19(2), 1-26. doi: 3156.2017v19i2p1-26

Lima, G. L., Bianchini, B. L., & Gomes, E. (2018). Conhecimentos docentes e o Modelo Didático da Matemática em Contexto: reflexões iniciais. *Educação Matemática e Debate*, 2(4), 116-135. doi: https://doi.org/10.24116/emd25266136v2n42018a06

Mazzilli, C. E. N., André, J. C., Bucalem, M. L.& Cifú, S. (2016). **Lições em mecânica das estruturas: dinâmica.** São Paulo: Blucher.

Pauletti, R. M. O. (2010). **Pórticos**. *Palestra/Notas de aula* da Universidade de São Paulo. Recuperado em 02 abril, 2018, de http://www.lmc.ep.usp.br/disciplinas/pef2602/pef2602-2010-porticos.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Potencialidades do Aprender com Modelagem

Zulma Elizabete de Freitas **Madruga**
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
betefreitas.m@gmail.com
Maria Elizabete de Souza **Couto**
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
melizabetesc@gmail.com
Valderez Marina do Rosário **Lima**
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
valderez.lima@pucrs.br

Resumo

Este artigo objetiva apresentar um modelo metodológico construído a partir de uma pesquisa que analisou as relações entre processos criativos de diferentes profissionais e procedimentos de modelagem (matemática). O modelo, chamado *aprender com modelagem*, toma por base ideias teóricas de Bassanezi (2010) e Biembengut (2016). As análisesrealizadas com narrativas de10 profissionais de diferentes ramos, incentivaram a publicação desses resultados teóricos. Indicam-se caminhos para utilizar como prática pedagógica a modelagem por meio do *aprender com modelagem,* na busca por desenvolver criatividade e comunicação, no intuito de valorar a cultura e entorno dos estudantes. Como resultados apresentam-se as categorias: *Intenção* – escolha da temática a ser desenvolvida; *Projeção* – familiarização com o assunto, busca por subsídios; *Criação* – elaboração de esboços e 'produto' (modelo); *Produto* – validação e avaliação do modelo. Considerações e recomendações acerca da educação sugerem maneiras de utilizar o *aprender com modelagem* como alternativa pedagógica para qualquer ano de escolarização e disciplina.

Palavras-chave: educación matemática, modelagem matemática, aprender com modelagem, processos criativos, diversidade cultural.

Considerações Iniciais

A valorização das diferentesculturas é uma indicação dos documentos oficiais para toda a Educação Básica no Brasil.Giroux (1986) afirma que a cultura é um construto para compreensão das relações complexas entre a escolarização e a sociedade: "[...] a cultura é vista como um sistema de práticas, um modo de vida que constitui e é constituído por um jogo dialético entre comportamento específico de classe e circunstâncias de um determinado grupo social" (Giroux, 1986, p.137). O comportamento cultural trata-se de uma expressão que origina as artes e as técnicas como manifestações do fazer, integrando à realidade "artefatos e, por outro lado, as ideias, tais como religião, valores, filosofias, ideologias e ciência como manifestações do saber, que se incorporam à realidade na forma de 'mentefatos'" (D'Ambrosio, 1986, p. 47).

A cultura popular é constituída pelas formas de ser, agir, pensar e se expressar dos diferentes grupos. Suas práticas e ações sociais advêm de crenças, valores e regras morais que permeiam e identificam um agrupamento. A identidade cultural e a manifestação resultante em cada grupo derivam manifestações e festas populares diversas − que expressam a identidade própria −, advindas da mescla de diversas histórias, costumes, valores e culturas (Madruga & Biembengut, 2016).

Os profissionais que atuam nas diferentes manifestações culturais, produzem distintos produtos, e têm na *criatividade* o impulso para realização de seus trabalhos. Conforme Ostrower (2014), *criar* é conceber forma a algo novo, repleto de novas interpretações que se compõem na mente das pessoas, abarcando o relacionar, ordenar, configurar e significar. É dar existência, dar origem, gerar, inventar, produzir. A criação de algo acontece em todos os momentos, nas mais diversas profissões. A *arte*(atividade humana relacionada às manifestações de ordem estética) é expressa não somente nas manifestações populares, mas em todas as profissões.

A arte e os processos criativos são constantes em vários ramos profissionais. Dessa forma, busca-se conhecer o processo de criação de diversos profissionais para, posteriormente, poder dispor de indicações passíveis de serem postas em prática na Educação Básica, em particular, e, assim, instigar o interesse dos estudantes a aprender a pesquisar por meio da modelagem. Assim, o objetivo deste artigoé apresentar um modelo metodológico construído a partir de uma pesquisa que analisou as relações entre os processos criativos de diferentes profissionais e procedimentos de modelagem (matemática).

Marco Teórico

A modelagem na educação (também chamada de modelação), surge das ideias de modelagem matemática, propostas no Brasil inicialmente pelos professores/pesquisadores Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D'Ambrosio e Rodney Bassanezi,os quais deram impulso significativo para a implantação da modelagem no cenário de ensino brasileiro[1].

Modelagem matemática, na visão de Bassanezi (2010. p. 45), "trata-se de um processo dinâmico de busca de modelos adequados, que sirvam de protótipos de alguma entidade". Para o autor, modelo matemático consiste em um conjunto de relações matemáticas e símbolos que, de alguma maneira, representam o objeto estudado. De acordo com o autor, a modelagem

[1]Disponível em: http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Precursores Acesso em 30 de julho de 2018.

(matemática)[2] faz uma ligação entre as representações e o mundo. Bassanezi (2010) a define como um processo dinâmico, utilizado para obter e validar modelos (matemáticos). Ele a considera uma forma de abstração e generalização com intuito de prever tendências. "A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual" (Bassanezi, 2010, p. 24). O autor afirma que o benefício da modelagem (matemática) é possibilitar, por meio de cálculos, validar o modelo, efetuar previsões sobre o comportamento do sistema e tentar controlá-lo, uma vez que o processo permite uma aproximação da realidade sobre apresentações de um sistema ou parte dele.

De acordo com Biembengut (2014):

> Modelagem é o processo envolvido na elaboração de modelo [...]. Trata-se de um processo de pesquisa. A essência deste processo emerge na mente de uma pessoa quando alguma dúvida genuína ou circunstância instigam-na a encontrar uma melhor forma para alcançar uma solução, descobrir um meio para compreender, solucionar, alterar, ou ainda, criar ou aprimorar algo. E em especial, quando a pessoa tem uma percepção que instiga sua inspiração. (Biembengut, 2014, p. 21).

Biembengut (2016) delineou um método para o ensino de ciências e matemática denominado Modelagem na Educação – Modelação, dividido em três etapas: *percepção e apreensão*; *compreensão e explicitação*; e *significação e expressão*.

Percepção e apreensão

Percepção é um processo complexo que consiste em receber, identificar e classificar informações provenientes do meio ou do próprio corpo. É a primeira fonte de conhecimento necessária para que se possa fazer uma descrição do meio, uma decodificação e representação (apreensão). Posteriormente, a percepção tem relação com o pensamento, com a resolução de problemas e com os processos de decisão das pessoas.

Compreensão e explicitação

A compreensão pode ser considerada a ligação entre a percepção e o conhecimento. Compreender significa expressar, mesmo que intuitivamente, uma sensação. As percepções ou informações recebidas são selecionadas pela mente que, sobretudo, processa o que for interessante ou que está disponível para gerar ideias, compreensões e entendimentos.

Significação e expressão

Depois de compreendidas e explicitadas as informações ou percepções, há uma busca para representá-las ou traduzi-las. Estas representações são feitas por meio de símbolos ou modelos, e podem ser mentais ou externas. Quando uma compreensão passa a ser significativa para a mente, pode-se dizer que se transformou em conhecimento, ou seja, ocorreu a aprendizagem. Não são todas as percepções que geram aprendizagem, pois aprender significa mais do que armazenar informações, implica ter conhecimento.

Pressupostos Metodológicos

Este artigo apresenta resultados teóricos de uma pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen, 2010), a qual foi utilizado como procedimento metodológico o mapeamento na pesquisa

[2]O termo (matemática) expresso desta forma é uma denominação dos autores do artigos, e não dos teóricos, os quais utilizam apenas modelagem matemática.

educacional (Biembengut, 2008). Os dados advieram de duas fontes: pessoas e documentos. A fonte desta pesquisa é oriunda principalmente das pessoas, 10 profissionais que atuam em diferentes áreas (carnavalesco, figurinista, escultor, coreógrafo, compositor, arquiteta, designer de unhas artísticas, modista, pesquisador de ciências exatas e pesquisador de ciências humanas). Destas pessoas advieram: 1) as *entrevistas*, que perfizeram um total de aproximadamente 40 horas de gravação; 2) os dados coletados por meio de cerca de 60 visitas de *observações* das pessoas no processo de criação; e 3) os *documentos* e produções por elas fornecidas.

As *entrevistas,* por meio de narrativas*,*foram realizadas na maioria dos casos nos locais de trabalhos dos entrevistados, onde cada profissional narrou seu processo de criação, assim como histórias de vida. Em alguns casos, foi necessário mais de um momento de entrevista. Em um primeiro momento, o profissional falou sobre suas experiências e seu trabalho e, em outro momento, foi realizada uma entrevista mais direcionada, em que algumas perguntas foram feitas pela pesquisadora de modo a facilitar a análise do processo de cada uma das pessoas colaboradoras da pesquisa.

As *observações*realizadas nos espaços de trabalho, criação e produção de cada um dos profissionais entrevistados foram um dos tipos de levantamento de dados utilizado nesta pesquisa. Foram selecionados como colaboradores 10 profissionais que criam em diferentes áreas. Cinco deles têm relação direta com a manifestação cultural carnaval, por se tratar de um ambiente rico em criações.

Os *documentos* advieram de duas fontes: oriundos de busca teórica realizada pela pesquisadora e fornecidos pelas pessoas colaboradoras. Esses documentos basicamente consistem em: modelos e esboços, fotografias diversas (tanto de esboços como da produção finalizada), projetos e apostilas. Aliados às observações (fotos, vídeos e anotações no diário de campo); os documentos cedidos por cada um dos entrevistados (modelos por eles elaborados, principalmente); e as entrevistas por narrativas, foram suficientes para a análise.

Síntese dos resultados

Da análise emergiram quatro categorias: intenção, projeção, criação e produto. Estas, foram comparadas as etapas de modelagem (matemática) proposta por Biembengut (2016). Em um primeiro momento, o processo de todos os profissionais entrevistados, partem da escolha de determinada temática, ou problema, e passa: pela busca por subsídios ou levantamento de dados; pela construção (na maioria dos casos) de modelos mentais; por esboços, rascunhos e/ou protótipos; por modelos físicos expressos por meio de desenhos e/ou esquemas; e pela construção (quando necessário) do material que será apresentado às pessoas para avaliação e validação. A avaliação é feita não apenas no momento final, mas no decorrer de todo processo, e, caso haja necessidade, volta-se à(s) fase(s) anterior(es) para reformulações e/ou adaptações.

Estes procedimentos utilizados pelas pessoas para criar um produto, são similares aos processos de modelagem (matemática). Sintetizando estas relações, e comparando-as com as categorias de análise tem-se:

- *Intenção* – escolha do tema (Bassanezi, 2010); interação: reconhecimento da situação-problema – delimitação do problema (Biembengut, 2007); percepção e apreensão (Biembengut, 2016).
- *Projeção* – familiarização do assunto – coleta de dados e formulação de modelos (Bassanezi, 2010); familiarização com o assunto a ser modelado – referencial teórico e matematização – formulação do problema – hipóteses (Biembengut, 2007); percepção e apreensão; e,compreensão e explicitação (Biembengut, 2016).

- *Criação* – formulação do problema e resolução (Bassanezi, 2010); matematização – formulação do modelo matemático – desenvolvimento e resolução do problema a partir do modelo – aplicação (Biembengut, 2007); compreensão e explicitação; e, significação e expressão (Biembengut, 2016).
- *Produto* – validação e avaliação (Bassanezi, 2010); modelo matemático – interpretação da solução e validação do modelo – avaliação (Biembengut, 2007); significação e expressão (Biembengut, 2016).

Dessa forma, pode-se dizer que os procedimentos utilizados pelos profissionais entrevistados na execução de seus trabalhos criativos, expressos pelas categorias *intenção*, *projeção*, *criação* e *produto*, são similares aos procedimentos utilizados por diversos autores na modelagem matemática. Entende-se que tanto os processos de modelagem prescritos por Bassanezi (2010, 2015) e Biembengut (2007, 2014, 2016), quanto o *"aprender com modelagem",*descrito pelas categorias − '*intenção*', '*projeção*', '*criação*' e '*produto*'−, não são disjuntos, ou seja, não se tratam de processos lineares que consistem na superação de etapas. Contrariamente, trata-se de um processo análogo a uma engrenagem, no qual as 'correias' se juntam e trabalham em sintonia. Isso quer dizer que há um entrelaçamento entre as etapas que possibilita um 'ir e vir' conforme necessidade. A figura 1 apresenta esta ideia:



*Figura 1***.**Entrelaçamentos do *"aprender com modelagem".* Madruga (2016)

Acredita-se que a utilização destes procedimentos no planejamento escolar, ou seja, da modelagem como método de ensino com pesquisa,pode possibilitar ao estudante se interessar, também, por saber fazer, saber criar, isto é, saber pesquisar para produzir algo que possa contribuir com o meio que vive ou pretende atuar (Madruga & Biembengut, 2016).

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC traz a ideia da criação de situações de trabalho mais colaborativas, que se organizem com base nos interesses dos estudantes e favoreçam seu protagonismo. Uma delas é o desenvolvimento dos processos criativos e colaborativos, baseados nos interesses de pesquisa dos estudantes e na "investigação das corporalidades, espacialidades, musicalidades, textualidades literárias e teatralidades presentes em suas vidas e nas manifestações culturais das suas comunidades, articulando a prática da criação artística com a apreciação, análise e reflexão sobre referências históricas, estéticas, sociais e culturais" (Brasil, 2017, p. 472).

Nesse sentido, as diferentes manifestações artísticas podem contribuir com os processos educacionais nas mais diversas disciplinas. O estudo de distintos processos criativos, por exemplo, permite ao estudante interar-se de conceitos de diferentes áreas do conhecimento e, ao mesmo tempo, conhecer e valorar a cultura de cada grupo social.D'Ambrosio (1986) destaca elementos essenciais da evolução da matemática e seu ensino, elementos arraigados a fatores socioculturais. "Isto nos conduz a atribuir à Matemática o caráter de uma atividade inerente ao ser humano, praticada com plena espontaneidade, resultante de seu ambiente sociocultural e

consequentemente determinada pela realidade material na qual o indivíduo está inserido" (D'Ambrosio, 1986, p. 36).

A utilização dos princípios de modelagem mostra-se como uma possibilidade, buscando a formação de sujeitos capazes e sensíveis na identificação e na solução das questões atuais. Além disso, ambientes que proporcionem esses atributos são potenciais espaços para o desenvolvimento da criatividade. Garantir esses espaços em ambientes formais de ensino deve ser tarefa a ser cumprida na composição curricular.

Potencialidades do Aprender com Modelagem: como utilizar em sala de aula

De acordo com Bassanezi (2015), a utilização da modelagem no processo de ensino e de aprendizagem propicia a oportunidade de exercer a criatividade, não apenas em relação às aplicações das habilidades matemáticas, mas, principalmente, na formulação de problemas originais. A partir das ideias de Bassanezi (2015), Biembengut (2016) começa a ampliar o conceito de modelagem matemática para modelagem nas ciências e modelagem na educação – modelação, além de trazer a ideia de utilizar modelagem desde o início da Educação Básica, com o intuito de potencializar e desenvolver a criatividade nos estudantes desde os anos iniciais.

Para isso, propõe-se um *"aprender com modelagem"*, ou seja, utilizar as ideias de modelagem (matemática) para promover a aprendizagem dos estudantes de qualquer disciplina com vistas ao desenvolvimento de modelos, sejam eles matemáticos ou não, instigando a criatividade e a pesquisa em sala de aula.O *"aprender com modelagem"*, conforme se sugere, é divido em quatro etapas, as quais foram observadas no trabalho dos profissionais entrevistados: *intenção*, *projeção*, *criação* e *produto*. A saber:

- *Intenção*: é a fase inicial. O momento em que as ideias emergem e surge o tema que será desenvolvido. Todo processo criativo parte de um tema, de uma intenção. Da mesma forma, para *"aprender com modelagem"* é necessário que haja uma temática, seja ela específica e relacionada a algum conteúdo curricular (o que não é recomendável), ou relacionada a qualquer temática do interesse dos estudantes, sejam elas culturais, sociais, econômicas, ambientais, ou um problema específico de qualquer natureza enfrentado pela comunidade na qual a escola está inserida. Essas últimas são as mais recomendadas, pois, além de instigarem o interesse dos estudantes, estão inseridas em suas realidades.

Cabe professor a tarefa de conduzir a ação e de, no decorrer das fases, direcioná-la, por meio de indagações e orientações para os conteúdos curriculares das diversas disciplinas envolvidas. Esses conteúdos não aparecem de forma enfileirada, como nos currículos escolares, mas, sim, devem ser estudados na medida em que vão emergindo.Conforme D'Ambrosio (2001), o cotidiano está impregnado de saberes e fazeres próprios da cultura. "A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo, e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura" (D'Ambrosio, 2001, p.22).

- *Projeção*: é a fase em que o estudante começa a interar-se com a temática do estudo, ou seja, com a *intenção,* em que há uma busca por subsídios que sustentem teoricamente a pesquisa. Nesta etapa inicia a fase em que os conteúdos, não de forma linear, começam a emergir, e os estudantes passam a se inteirar dos diversos temas. É uma pesquisa teórica acerca do tema, em que professor e alunos investigam juntos e coletam o maior número possível de dados.

É quando a criatividade começa a fluir e são tomadas decisões importantes que os acompanharão até o final do processo. Nesta etapa começa a se delinear o caminho que os estudantes seguirão, é quando surge na mente a projeção do produto (modelo) que irão criar, seja este produto uma invenção nova e requintada; uma maquete que mostre suas realidades; uma equação matemática; uma composição musical; uma peça de teatro; uma dança; um artigo científico; um texto simples; uma peça de roupa; um desfile de escola de samba; um desenho; um mapa de sua realidade; um projeto de qualquer âmbito (social, cultural, ambiental, entre outros); uma sugestão de melhora para sua escola ou bairro; entre tantos outros; enfim, depende da criatividade dos estudantes.

- ***Criação***: é a fase em que o estudante efetivamente 'cria' seus modelos. Momento em que aparecem as primeiras produções por meio de 'tentativas' (esboços, rascunhos, desenhos, etc.), para posteriormente serem elaboradas de maneira definitiva. É a etapa de formulação e resolução do modelo (Bassanezi, 2010; Biembengut, 2007).

Esta é a fase em que os estudantes 'passam para o papel' tudo o que projetaram na fase anterior, momento em que os conteúdos curriculares começam a emergir, em que há uma sistematização de conceitos, mediados e auxiliados pelo professor, que assume o papel de 'figura secundária' no processo, deixando o 'protagonismo' para o estudante. Nesta etapa poderá ser necessário o auxílio de outros professores especialistas, dependendo da temática em questão, o que sugere um trabalho coletivo por parte dos professores na aprendizagem do estudante.

- *Produto*: é a fase em que ocorre a validação e avaliação do modelo elaborado pelos estudantes (Bassanezi, 2010; Biembengut, 2016). Cabe salientar que não se trata apenas da avaliação da aprendizagem, pois esta ocorre durante todo processo, desde a fase de intenção. A avaliação que se menciona aqui é a do produto, ou seja, do modelo elaborado, para verificar se ele é válido e reponde ao problema inicialmente proposto.

Se a solução, ou seja, o *produto* não for satisfatório, pode-se voltar a qualquer uma das etapas anteriores e rever a *criação*, a *projeção*, ou até mesmo a *intenção*. Dessa forma, o *'aprender com modelagem'* não se configura como um processo linear, muito pelo contrário, é um processo que pode ser cíclico, articulando as fases na medida em que haja necessidade. Ao finalizar o processo, é relevante expressar os resultados, a fim de que possa valer à outras pessoas que tenham interesse no assunto, assim como para o próprio estudante (Biembengut, 2014).Por meio do *"aprender com modelagem"* se podem aprofundar questões potencializadoras da criatividade, na busca por valorização do conhecimento cultural das comunidades, primando pelo desenvolvimento do potencial criativo dos estudantes e, com isso, possibilitando que aprendam conceitos de todas as disciplinas curriculares em qualquer fase de escolarização.

Considerações Finais

Esta artigo teve como objetivo apresentar um modelo metodológico construído a partir de uma pesquisa que analisou as relações entre os processos criativos de diferentes profissionais e procedimentos de modelagem (matemática). A análise dos resultados de uma pesquisa que serviu de base para essa discussão teórica, (Madruga, 2016) comprova que as pessoas, em variadas profissões, utilizam as etapas da modelagem (matemática). Observou-se que os 10 profissionais entrevistados, embora apresentando várias diferenças − profissionais, sociais, culturais e de escolaridade −, recorrem ao mesmo processo para produzir o seu modelo, o seu produto.

Desse modo, nos parece possível que a escola também as utilize no processo de ensino e aprendizagem. Assim, a proposta desta discussão é ampliar as ideias de Biembengut (2016), bem

como a dos demais pesquisadores da área, e tratar a modelagem na educação de uma forma ampla, que possa ser utilizada em qualquer componente curricular, desde os anos iniciais da Educação Básica até o Ensino Superior.

A ideia é trabalhar com as raízes de modelagem de Bassanezi (2010) e com a concepção de Biembengut (2016) que traz a ideia da modelagem como um método de ensino com pesquisa aplicado à educação em qualquer área do conhecimento, propondo novas fases que fazem consonância com as de Biembengut (2007, 2014), organizando as fases em agrupamentos que explicitam a linha tênue que as separam e por vezes se confundem, evidenciando que não são etapas estanques, e sim que se entrelaçam durante o processo, gerando uma rede de engrenagens que demonstra que as etapas não são disjuntas, podendo voltar às etapas anteriores para serem refeitas quantas vezes for necessário.

A proposta em questão é trabalhar com qualquer modelo, e não apenas com modelos matemáticos, e que possam ser utilizados por qualquer pessoa. A pesquisa mostrou que as pessoas recorrem a modelos e produzem algo que será avaliado e apreciado por diversas pessoas. Cada pessoa traz consigo valores culturais. E cabe à educação formal fazer essa ponte entre a modelagem e a cultura. Assim, ideia é apresentar um novo olhar, ampliar a concepção de modelagem, e mostrar que ela é utilizada em diversos ramos profissionais, instigando assim sua aplicação e desenvolvimento em qualquer ano de escolaridade, tendo em seu viés a questão da cultura, bem como o desenvolvimento da criatividade.

Referências

Bassanezi, R. C.(2010).*Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.* 3ª ed. 2ª reimpressão São Paulo: Contexto.

_____. (2015). *Modelagem Matemática teoria e prática.* São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. S. (2008).*Mapeamento na Pesquisa Educacional.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna.

_____. (2007). *Modelagem matemática & Implicações no Ensino e Aprendizagem de Matemática.* 3ª ed. Blumenau: Edifurb.

_____. (2014).*Modelagem Matemática no Ensino Fundamental.*Blumenau:Editora da FURB.

_____. (2016).*Modelagem na Educação Matemática e na Ciência*. São Paulo: Livraria da Física.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2010).*Investigação Qualitativa em Educação.* Porto, Portugal: Editora Porto.

Brasil. (2017).*Base Nacional Comum Curricular* - BNCC. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso: 3 jun.2017.

D'Ambrosio, U. (1986). *Da Realidade à Ação: reflexões sobre educação e matemática*, São Paulo: Summus.

_____. (2001).*Etnomatemática.* Elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica.

Giroux, H. (1986).*Teoria crítica e resistência em educação: Para além das teorias de reprodução.* Trad. Ângela Maria B. Biaggio. Petrópolis: Vozes.

Jacoby, S. S., & Kowalik, J. S. (1980).*Mathematical modelling with computers*. NJ: Prentice Hall.

Madruga, Z. E. F. (2016). Processos criativos e valorização da cultura: possibilidades de aprender com modelagem. *Tese de Doutorado*. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS.

Madruga, Z. E. F., & Biembengut, M. S. (2016).*Modelagem & Aleg(o)rias: um enredo entre cultura e educação.* Curitiba: Appris.

Ostrower, F. (2014).*Criatividade e processos de criação*. Petrópolis: Vozes.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conectando la matemática con la vida cotidiana

José Vidal **Jiménez** Ramírez
Universidad Autónoma de Sinaloa
México
vidaljr@uas.edu.mx
Faustino **Vizcarra** Parra
Universidad Autónoma de Sinaloa
México
faustinovizcarra@uas.edu.mx

Resumen

Matematizar figuras cotidianas sugeridas por estudiantes mediante la aplicación DESMOS para Smartphone, identificando los trazos que la forman y relacionarlos con la línea recta, circunferencia, parábola y/o elipse, y a su vez, con la ecuación general de segundo grado mediante la manipulación de sus parámetros. Y así, fomentar el gusto por las matemáticas y desarrollar en los estudiantes la comprensión de gráficas matemáticas.

Palabras clave: comprensión de gráficas, evaluación, matematizar y modelo matemático.

Problema de investigación

La comprensión de las gráficas es importante en la vida académica y cotidiana, esto va, desde interpretar gráficas en un contexto matemático, así como gráficas estadísticas en medios de comunicación, hasta la interpretación de un electrocardiograma.

Sin embargo, más que por su nivel de complejidad, la brecha entre las representaciones gráficas y el estudiante, en parte se debe a la estrategia que planea el docente para llevarla al aula, en la que enfatiza procedimientos y algoritmos, además de trabajar con graficas centradas en el contexto matemático, que al final dicho objeto matemático no le significa al estudiante, pues, poco ha cambiado lo que sucede en el aula con la introducción del enfoque por competencias en el nivel medio superior, es decir, se le sigue dando más importancia al objeto que a las prácticas de referencia situada. Así que, en la búsqueda de alternativas para lograr que a los estudiantes les guste interpretar las gráficas que se obtienen a través de manipular los parámetros de la ecuación de segundo grado, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué nivel de comprensión de la representación gráfica de la ecuación general de segundo grado logran los estudiantes de segundo grado, con apoyo de la aplicación DESMOS para manipular expresiones algebraicas a través del *smartphone*?

Objetivo

Determinar el nivel de comprensión de la representación gráfica de la ecuación general de segundo grado que logran los estudiantes de segundo grado, con apoyo de la aplicación DESMOS para manipular expresiones algebraicas a través del *smartphone*.

Marco teórico

La aplicación DESMOS se utiliza para matematizar figuras, y se implementa con éxito en proyectos de matemáticas realizados por estudiantes de nivel bachillerato (Evert, 2015). Se entiende por matematización, la construcción de un modelo matemático. Y de acuerdo con Freudenthal (1991), la matematización horizontal implica ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos, es decir, que el estudiante describa los problemas desde el mundo real al matemático. Y para determinar el nivel de comprensión de gráficas, se utiliza la clasificación de Curcio (1989), la cual consta de los siguientes niveles cognitivos: leer los datos, leer dentro de los datos y leer más allá de los datos.

Marco metodológico

El estudio realizado es de corte cualitativo con un objetivo de tipo interpretativo, en el cual se siguieron tres fases generales: de diagnóstico, de instrumentación y de evaluación. Y se llevó a cabo en un grupo del bachillerato, en el que participaron estudiantes de entre 15 y 17 años de un grupo de segundo grado del turno vespertino.

Resultados

Se observa que el 65% de los estudiantes logran matematizar una imagen compuesta por líneas rectas, circunferencias, parábolas y elipses, a través de manipular los parámetros de la ecuación general de segundo grado, por lo que su nivel de comprensión de gráficas se ubica en leer entre las gráficas. Y solo un 8% logra utilizar otras gráficas que no se pueden generar mediante la ecuación general de segundo grado, es decir, su nivel de comprensión de gráficas se ubica en leer más allá de las gráficas.

Conclusiones

A los estudiantes les gusta esta forma trabajar con las gráficas para matematizar figuras de la vida real, y hay estudiantes que se proponen excelentes retos para matematizar figuras con un alto grado de dificultad, en las que además se requieren gráficas diferentes a las que se pueden generar a través de la ecuación general de segundo grado.

Así pues, los estudiantes logran asociar los trazos que forman a una figura con líneas rectas, circunferencias, parábolas y elipses; y a su vez, asocian dichas curvas con la ecuación general de segundo grado a través de la manipulación de sus parámetros mediante la aplicación DESMOS. En este sentido, los estudiantes ven el acercamiento del mundo real con las matemáticas, como una forma de darle significado a esos símbolos matemáticos que para ellos solo significaban letras y números.

Referencias y bibliografía

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.

Evert, D. (2015). Graphing Projects with Desmos. *MATHEMATICS teacher, 108* (5), 388-391.

Freudenthal, H. (1991) *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La tecnología digital como herramienta mediadora para la modelización e interpretación de problemas en contexto: el caso del plano inclinado y la cicloide invertida

Freddy Yesid Villamizar Araque
freddymatedu@gmail.com, fvillamizar@cinvestav.mx
Alfredo Martínez Uribe
alfymago@hotmail.com , amartínezu@cinvestav.mx
Carlos Armando Cuevas Vallejo
ccuevas@cinvestav.mx
Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México

Resumen

En el presente trabajo se plantea la modelización como una alternativa para resolver situaciones en contexto de las matemáticas y la física. Particularmente se propone el problema del rodamiento simultáneo de dos bolas, una sobre media cicloide invertida y otra sobre un plano inclinado y explorar las ideas previas acerca del tiempo, velocidad y energía presentes en dicho experimento, así como la habilidad matemática para la interpretación de gráficas, obtenidas en la modelización del fenómeno, mediada con la tecnología digital. En los resultados de la actividad aplicada a estudiantes de maestría en educación matemática, se encontró que, la tecnología digital bajo una secuencia didáctica apoya el trabajo experimental simplificando los procesos de modelización de un fenómeno físico, y promueve el uso de las representaciones para resolver una situación problema.

Palabras clave: modelización, plano inclinado, braquistócrona, cicloide, tecnologías digitales.

Introducción

Una de las maneras que Galileo utilizó para interpretar la caída libre fue simplificada mediante el uso de planos inclinados y el uso de las proporciones que surgieron de la regla del valor medio geometrizada por Oresme (Drake, 1975; Clavelin, 1996; Hawking, 2003; Feynman, 2008). Por otra parte, la cicloide fue considerada por los antiguos matemáticos como la Helena de la geometría por ser una de las curvas más bellas, pero esa belleza, no radica tanto en su apariencia sino en las propiedades que esta posee. El problema de la cicloide planteado por Johann Bernoulli fue el siguiente: si tenemos dos puntos fijos A y B (A está a mayor altura y B a menor) ¿cuál debe ser el camino por el que una bola metálica pulida, ruede en el menor tiempo? (Figura 1) (Boyer, 1986; Portal Académico CCH, 2008; Cosmos y Matemáticas, 2013).

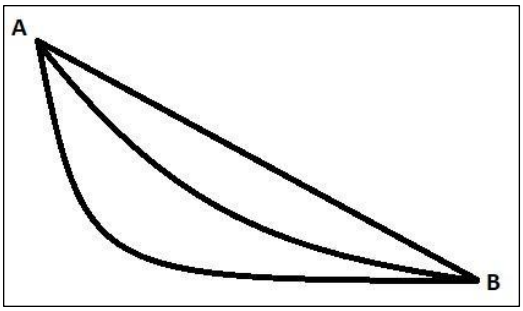


Figura 1. Ejemplos de trayectorias por la cual puede rodar una bola

Este tipo de situaciones por lo general inducen al estudiante a respuestas respecto del movimiento, situadas en las teorías aristotélicas o del ímpetu (McDermott, 1984; Saltiel y Viennot, 1985), ideas que por lo general no son acordes al conocimiento científico sino al sentido común, denominadas por algunos como *ideas previas* (Viennot, 1979). Por tal razón, nos cuestionamos lo siguiente:

- ¿Qué ideas previas manifiestan los estudiantes para interpretar la situación problema anterior sobre el rodamiento de una bola sobre un plano inclinado y otra sobre la cicloide invertida?
- ¿Cómo el uso de la tecnología digital permite al estudiante realizar procesos de modelización para interpretar una situación problema, modificando sus ideas previas?

Marco teórico

La situación problema descrita anteriormente, brinda un contexto para involucrar al estudiante dentro de una actividad donde se exploren las ideas previas sobre movimiento y posteriormente se promuevan cambios conceptuales. Las ideas previas son aquellos conocimientos que poseen los estudiantes, previos o posteriores a la enseñanza escolar, que por lo general, pueden ser erróneas, incompletas o que no concuerdan exactamente con el conocimientos científico además de ser persistentes (Viennot, 1979; Hierrezuelo y Montero, 2006). Al respecto McDermott (1984), Saltiel y Viennot (1985), afirman que muchas de las ideas que dan los estudiantes sobre el movimiento de un cuerpo (independiente del nivel académico), se pueden situar en las teorías aristotélicas o del ímpetu. Para efectos del presente trabajo, se recopilarán las ideas previas que poseen los estudiantes acerca de la caída de una pelota sobre un plano inclinado y media cicloide invertida (ver anexo 1 del apéndice A).

La situación planteada fue resuelta por Isaac Newton y su solución analítica dio origen al cálculo de variaciones (ver anexo 2). Una de las propiedades de esta curva (cicloide inverida) descrita en la solución de Newton se denomina *braquistócrona,* que proviene del griego *βραχιστοζ* (braquistos) que quiere decir, el más corto, y *χρονοζ* (cronos), tiempo; en otras palabras la braquistócrona se refiere a la curva de más corto tiempo. La solución analítica a dicha situación descrita en el anexo 2, requiere de conocimientos matemáticos más avanzados como el cálculo de variaciones, propuesto por Newton, sin embargo, consideramos que con la tecnología digital sirve como herramienta mediadora para la modelización sin tener que recurrir a la profundización de los cálculos.

La modelización o *modelling* es definida por Confrey y Maloney (2007, p. 60) como "El proceso de enfrentar una situación indeterminada, problematizarla, produciendo investigación, razonamiento, y estructuras matemáticas para transformar dicha situación". Esencialmente

puede describirse como el proceso de llevar una situación del mundo real a un modelo matemático que la represente, teniendo en cuenta que este modelo representativo permita predecir e interpretar la situación ideal del mundo real, tal y como se muestra en la figura 2 .

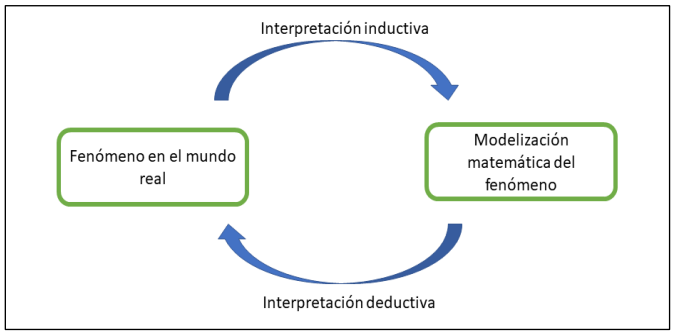


Figura 2. Modelo para la modelización matemática de las ciencias. (Lesh, 1997; Cirillo et al., 2016; Cuevas, Villamizar y Martínez 2017)

Por excelencia el modelo matemático de una situación física es algebraico; sin embargo, consideramos que, en el aprendizaje, los conceptos ya sean físicos o matemáticos presentes en un fenómeno físico, pueden manifestarse en diversas representaciones.

Para guiar la actividad en el proceso de modelización de la situación problema, utilizaremos el modelo Cuvima planteado por Cuevas, Villamizar y Martínez (2017), quienes incorporan de manera importante el uso de los dispositivos digitales (smartphone, Tablets o computadoras) como herramientas mediadoras en la experimentación de un fenómeno físico y la obtención de datos para su modelización. El modelo consta de cuatro marcos, los cuales aplicaremos para la situación planteada como se muestra en la Figura 3:

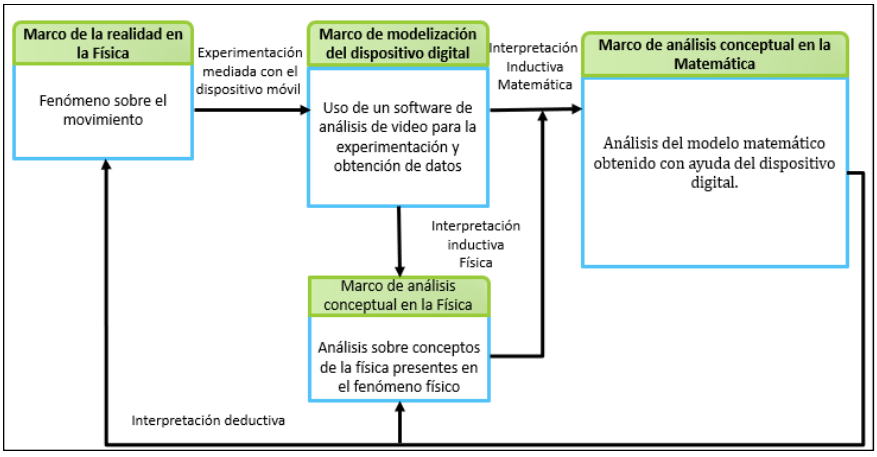


Figura 3. Adaptación del modelo Cuvima para la situación problema propuesta

- El primer marco (*Marco de la Realidad en la Física), parte de la situación problema acerca del fenómeno de movimiento de dos bolas al rodar libremente por dos superficies (plano inclinado y cicloide invertida).*
- El segundo marco (*Marco de modelización del Dispositivo Digital)*, está conectado al primero mediante un proceso de experimentación mediado con la tecnología digital. En este marco, el estudiante debe realizar el experimento apoyándose con recursos digitales para la obtención de datos del experimento. El dispositivo digital provee para la

modelización del fenómeno experimentado, datos ya sea mediante una imagen, registro tabular o alguna representación gráfica.

- El tercer marco (*Marco de Análisis Conceptual en la Física)* está conectado al tercero mediante el proceso de interpretación inductiva en la Física, el cual consiste en realizar un análisis (puede ser mediante la discusión grupal entre profesor y estudiantes) sobre los conceptos físicos implícitos en las representaciones dadas por el dispositivo digital sobre el experimento. En este caso se refiere a cómo se manifiesta la velocidad y sus cambios sobre el movimiento.
- En el cuarto marco (*Marco de Análisis Conceptual en la matemática)*, se realiza mediante el proceso de interpretación inductiva en la matemática, es decir, en la obtención de un modelo matemático que represente el fenómeno. En este caso, la tecnología digital puede ayudar en la obtención de este modelo ya se mediante una expresión algebraica, una representación geométrica o gráfica. El modelo obtenido que representa el fenómeno físico en la realidad debe ser validado mediante la interpretación deductiva, es decir, usar el modelo para describir la realidad y conceptos en la física. En este caso, los estudiantes harán uso del modelo matemático para interpretar la situación problema referente a la propiedad de la curva cicloide invertida, denominada braquistócrona.

El modelo Cuvima permite guiar las actividades de modelización mediante el uso de las tecnologías digitales y hacer énfasis en los conceptos de la física y matemáticas presentes en el fenómeno experimentados, mediante los procesos de interpretación inductiva y deductiva el cual debe ser guiado en la actividad por el profesor.

Metodología

Como instrumento de medición se aplicará un test en distintos momentos y una actividad de modelización, a diez estudiantes de maestría de educación matemática, de la siguiente manera:

- Aplicación del test para recopilar ideas previas (anexo 1) en una sesión de media hora.
- Experimentación con la cicloide invertida, sin uso de la tecnología digital. Los estudiantes dejarán rodar dos bolas de las mismas características, sobre un plano inclinado y sobre la cicloide invertida, en una sesión de media hora.
- Aplicación del test, posterior a la experimentación en una sesión de media hora.
- Experimentación de la situación problema mediada con el uso de la tecnología digital. En este caso harán uso de un software de análisis de video, en una sesión de hora y media.
- Aplicación del test, posterior a la experimentación con la tecnología digital, en una sesión de una hora.

Los resultados se analizarán teniendo en cuenta qué cambios en los razonamientos de los estudiantes hay antes de la experimentación y posterior a ella con y sin uso de la tecnología digital.

Resultados

Resultados parciales sobre el pretest (antes de la experimentación)

Se observaron respuestas variadas. Para 4/10 estudiantes la pelota que rueda sobre la superficie curva o cicloide invertida llega primero al suelo y con mayor velocidad, porque la inclinación hace que acelere más. Luego 4/10, otro grupo de estudiantes consideraron que la pelota que llega primero y con mayor velocidad, es la que rueda por la superficie recta o plano inclinado porque recorre menor distancia que la superficie curva. Finalmente, 2/10 estudiantes

consideraron que ambas bolas llegan al mismo tiempo y con la misma velocidad, porque las velocidades a pesar de que cambian, se pueden compensar en algún momento o simplemente porque parten simultáneamente a una misma altura, y además, porque las bolas son iguales.

Resultados posteriores a la experimentación sin tecnología digital.

Los estudiantes modificaron las respuestas referidas a que las bolas llegan al mismo tiempo y con la misma velocidad, y también los que respondieron que llegaba primero la bola sobre la superficie inclinada. Algunos explicaron que tenía que ver con que la superficie curva le "imprime" mayor velocidad a la bola, otros no daban argumentos.

Los resultados anteriores evidencian en algunos casos que los estudiantes manifiestan sus razonamientos con base en la forma de las trayectorias y en ningún caso utilizaron un razonamiento matemático para dar su explicación.

Resultados de las actividades con tecnología digital.

Los estudiantes realizaron la toma de un video sobre el experimento, el cual fue exportado a un software de análisis de video (*Tracker Physics*) para capturar los datos de posición, velocidad y aceleración del movimiento de cada bola a lo largo del tiempo. Los datos fueron llevados a una hoja de Cálculo en Geogebra (ver Figura 4).

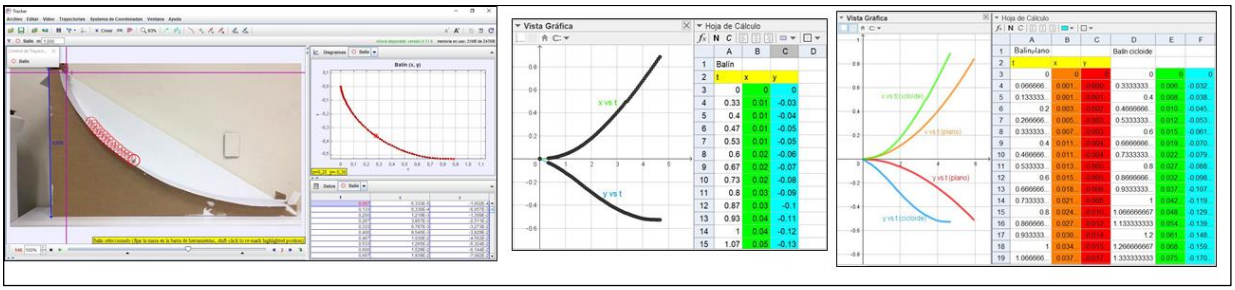


Figura 4. Modelización mediada por la tecnología digital y representaciones gráficas del movimiento de las bolas.

Los pasos de la modelización siguen los marcos del modelo Cuvima (Figura 3) y los resultados fueron discutidos al final de la actividad entre profesor y estudiantes.

Resultados posteriores a la experimentación con tecnología digital

Una vez que realizaron las actividades, se aplicó el test, observando que los estudiantes modificaron sus respuestas. Pese a que no hubo una respuesta basada en una solución analítica, los estudiantes hicieron uso de las representaciones (plano cartesiano, tabla de valores) para interpretar y dar una solución a la situación problema planteada. Se discutió acerca de la propiedad denominada braquistócrona en la cicloide invertida, a partir de las representaciones de velocidad y aceleración obtenidas mediante el uso de los dos paquetes de software.

Discusión de los resultados y conclusiones

La tecnología digital sirvió como una herramienta de apoyo en la experimentación como mediadora para la obtención de representaciones de un fenómeno físico y para la solución de una situación problema en el contexto de la física. Sin embargo, la interpretación de los conceptos tanto en la matemática y la física deben ser orientados mediante una secuencia didáctica implícita en la actividad.

El modelo Cuvima sirvió como modelo metodológico para que el profesor pudiera desarrollar el proceso de modelización, así como la organización de los recursos utilizados, es decir, proponer el momento adecuado para modelizar con la tecnología digital y posteriormente discutir e interpretar los resultados obtenidos. Las representaciones gráficas que surgen de la modelización del fenómeno experimentado, permitieron que los estudiantes modificaran sus ideas previas sobre el fenómeno físico.

Referencias y bibliografía

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Alianza Universidad Textos: Madrid.

Clavelin, M. (1996). La philosophie naturelle de Galilée. France: Albin Michel.

Confrey, J., y Maloney, A. (2007). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. In Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 57-68). US: Springer.

Cirillo, M., Pelesko, J., Felton-Koestler, M. y Rubel, L. (2016). Perspectives on Modeling in School Mathematics. In C. Hirsch & A. McDuffie (Eds.), Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics (p.p. 3-16).

Cosmos y Matemáticas (2013). *La Cicloide: La Helena de la Geometría.* Recuperado el 7 de octubre del 2018 en: https://matematicasycosmos.wordpress.com/2013/12/08/la-cicloide-la-helena-de-la-geometria/

Cuevas C.A., Villamizar, F.Y., y Martínez, A. (2017). Aplicaciones de la tecnología digital para actividades didácticas que promuevan una mejor comprensión del tono como cualidad del sonido para cursos tradicionales de física en el nivel básico. *Enseñanza de las Ciencias,* 35(3), 129-150.

Drake, S. (1975). The role of music in Galileo´s experiments. Scientific American, 232 (6), 98-104

Feynman, R. (1964/2008). *La conferencia perdida de Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del Sol*. Barcelona: Tusquets editores.

Hawking, S. W. (2003). A hombros de gigantes. Barcelona: Editorial Crítica.Portal Académico CCH (2008). *Curvas maravillosas. La braquistócrona*. Recuperado el 27 de septiembre del 2018 en: http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/rincon/curvas/html/braquis.html.

Hierrezuelo, J., y Montero, A. (2006). *La ciencia de los alumnos. Su utilización en la didáctica de la física y la química*. México: Fontamara.

McDermott, L.C. (1984). Research on conceptual understanding in mechanics. Physics Today, Julio, 24-34.

Portal Académico CCH (2008). Curvas maravillosas. La braquistócrona. Recuperado el 7 de octubre del 2018 en: http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/rincon/curvas/html/braquis.html

Saltiel, E., y Viennot, L. (1985). ¿Qué aprendemos de las semejanzas entre las ideas históricas y el razonamiento espontáneo de los estudiantes? (J. Carrascosa, traductor) Enseñanza de las Ciencias, 137-144.

Viennot, L. (1979). *Le raisonnement spontané en dynamique élemetaire.* París: Hermann.

Apéndice A
Anexo 1: situación problema planteada

Dos pelotas idénticas se deslizan libremente desde una misma altura. Una sobre un plano inclinado o rampa y la otra sobre una superficie curvilínea como se muestra en la Figura 5. Ambas superficies son lisas.

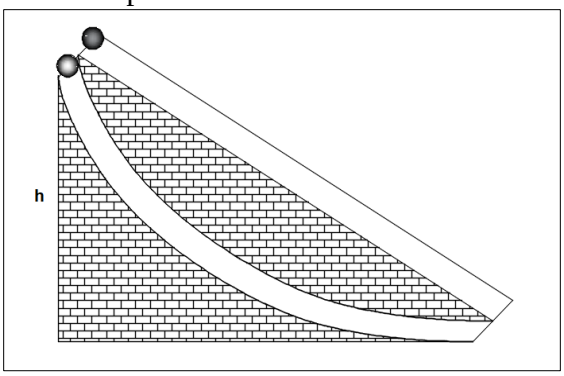


Figura 5. Plano inclinado vs cicloide invertida

1. ¿Qué pelota llegará primero al suelo? _____

Explica tu respuesta:

_____
_____
_____

2. ¿Qué sucede cuando las pelotas llegan al punto más bajo o a ras de suelo?:

a) La velocidad de la pelota de la superficie curva es MAYOR que la de la pelota en la rampa.
b) La velocidad de la pelota de la superficie curva es MENOR que la de la pelota en la rampa.
c) Las velocidades de cada pelota al llegar al suelo son IGUALES.
d) No sé

Explica tu respuesta. ¿Puedes proponer un razonamiento matemático?

Nota: se hará referencia a la magnitud de la velocidad neta.

Anexo 2: solución analítica de Newton sobre la cicloide invertida[1]

Si se toma un diferencial *dS* de la media cicloide invertida (ver Figura 6), se puede calcular su longitud de arco mediante la ec. 1:

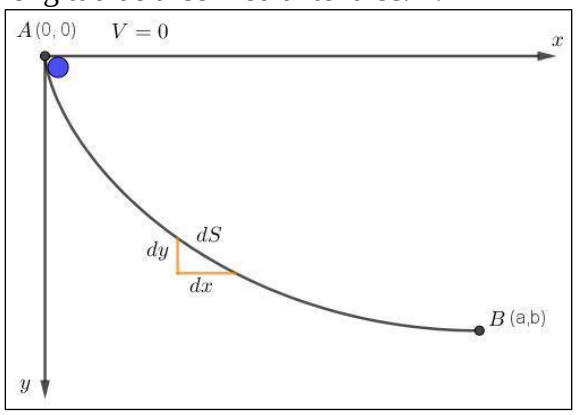


Figura 6. Media cicloide invertida con sus diferenciales

$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (ec. 1)

Sabiendo que la velocidad con la que rueda la bola es:

$V = \frac{dS}{dt}$ (ec. 2)

Obtenemos que:

$dt = \frac{dS}{v}$ (ec. 3)

Si utilizamos el teorema de la conservación de la energía mecánica, se obtiene que velocidad es:

$V = \sqrt{2gy}$ (ec. 4). De donde g es la aceleración de la gravedad.

De modo que al sustituir (1) y (4) en (3), se obtiene que:

$$dt = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}{\sqrt{2gy}}$$

$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{a=\pi R} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y}}\, dx$ (ec. 5)

Resolviendo (5) (se omite todo el procedimiento) se llega a determinar que las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$\{x = R(\theta - Sen(\theta))\ y = -R(1 - Cos(\theta))$ $0 \leq \theta \leq \pi$ (ec. 6)

Si el ángulo que barre la rueda es $\theta = \pi$ entonces, el tiempo más corto, en que la bola tarda en llegar del punto A al B es:

$t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ (ec. 7)

[1] La solución mostrada está escrita en término actuales, y no es precisamente la notación utilizada por Newton.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Resolução de Problemas e Modelização Matemática na Sala de Aula

Roger Ruben Huaman **Huanca**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
roger@uepb.edu.br
Marcos Antônio **Petrucci** de Assis
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Brasil
petrucci@ifpb.edu.br

Resumo

Este trabalho tem por objetivo discutir a Modelização Matemática associada à Resolução de Problemas na sala de aula enquanto um caminho para despertar o interesse, nos alunos, por tópicos matemáticos ainda desconhecidos. Para tanto, trazemos um recorte da disciplina Fundamentos de Álgebra, ministrada no ano de 2015, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Educação Matemática – PPGECEM da UEPB, por meio do relato de uma das aulas. A modelização matemática é, atualmente, uma forma de produção de conhecimento pelos alunos através de situações-problema nos quais eles são estimulados a pensar criticamente e criteriosamente sobre as melhores práticas para a resolução de questões, oriundas de suas próprias inquietações ou de provocações por parte do professor. Enxergamos a modelização matemática com uma alternativa metodológica para a sala de aula, em função das percepções dos alunos ao vivenciarem o trabalho com modelos matemáticos e problemas propostos em um momento de aprendizagem.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Modelização Matemática, Modelo, Álgebra, Geometria.

Introdução

Nos últimos anos, diversos pesquisadores e estudiosos se debruçam sobre as melhores práticas de resolução de problemas e de modelização matemática que resultem nesses objetivos de inserção do estudante no papel de protagonista da construção do próprio conhecimento ao modelar um problema/situação-problema. Trabalhar em sala de aula, a partir de um problema não é fácil, é uma tarefa desafiadora para os educadores matemáticos que buscam estratégias baseadas em Resolução de Problemas como suporte para melhorar sua prática de ensino,

conduzindo à aprendizagem do aluno.

Nesse sentido, consideramos que o ensino de matemática deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada para a resolução de problemas e a modelização matemática. Os alunos devem ser desafiados a resolver um problema e devem desejar fazê-lo, a partir de seus conhecimentos anteriores. Por outro lado, o problema ou um modelo matemático deverá exigir que busquem novas alternativas, novos recursos e novos conhecimentos para obter a solução, caso contrário não será para os alunos um problema ou modelo.

Com relação ao entendimento da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, Walle (2001) coloca que é preciso entender que ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. Pelo contrário, pressupõe-se todo um rigor metodológico, no qual o professor, apesar de intermediador entre o conhecimento e o aluno, é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante, em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na segunda parte, os alunos trabalham e o professor avalia esse trabalho. Na terceira parte, o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão, enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos matemáticos construídos.

Por essas razões, o ensino de Matemática através da resolução de problemas é importante, pois nos oferece uma experiência em profundidade, uma oportunidade de conhecer e delinear as dificuldades, de ter acesso às capacidades e limitações do conhecimento matemático que os estudantes possuem. O ensino através da resolução de problemas coloca ênfase nos processos de pensamento, de aprendizagem e trabalha os conteúdos matemáticos, cujo valor não se deve deixar de lado.

Modelização Matemática na sala de aula

A Matemática é uma ciência de padrão e ordem que pode nos revelar padrões ocultos que nos ajudam a compreender o mundo ao nosso redor. Hoje, a Matemática, muito mais do que aritmética e geometria, é uma disciplina diferente que trabalha com dados, medidas e observações da ciência, com inferência, dedução e prova e com modelos matemáticos de fenômenos naturais, de comportamento humano e de sistemas sociais. Se a Matemática é uma ciência de padrão e ordem, as representações são os meios pelos quais esses padrões são registrados e analisados (Onuchic & Huanca, 2013).

Segundo Huanca (2014, p. 115), "modelizar é estabelecer um modelo; modelo é o esquema teórico que representa um fenômeno". Assim, entende-se modelização matemática como a criação de modelos que constroem o entendimento conceitual e habilidades para resolução de problemas. A modelização matemática também reflete os principais componentes de competências e habilidades definidos por estudos de investigação como a compreensão conceitual, a resolução de problemas, o raciocínio matemático, comunicação, conexões e representação matemática.

A Modelização Matemática, na sala de aula, pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece. Ao mesmo tempo em que aprende

a arte de modelar, os alunos utilizam os modelos matemáticos para resolver determinadas situações nas áreas da Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outros. Nesse sentido, o aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas também "para uma cultura mais ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social" (BRASIL, 1999, p. 7). Dá-se, assim, ao aluno a oportunidade de estudar modelos matemáticos através de situações-problema.

Walle (2001), fala do papel dos modelos no desenvolvimento da compreensão, dizendo que, com frequência, ouve-se que bons professores usam uma abordagem de "pôr as mãos na massa" para ensinar matemática. Trata-se de materiais manipulativos ou físicos para modelar conceitos matemáticos que são, certamente, ferramentas importantes para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Ainda esse autor diz que, na utilização de modelos na sala de aula podem-se identificar três aspectos: ajudar a desenvolver novos conceitos ou relações; ajudar a fazer conexões entre conceitos e símbolos e assegurar a compreensão dos alunos.

De acordo com Huanca (2014), a Modelização Matemática enfatiza a importância de saber modelar problemas, condição necessária à formação do aluno no sentido de que: ela desperta o interesse pela Matemática, leva a sentir sua beleza; melhora a busca pela construção de novos conceitos matemáticos; desenvolve a habilidade em resolver problemas; e estimula a criatividade nos alunos. Para nós, implementar a Modelização Matemática em sala de aula e fora dela significa fazer Matemática ao modelar o problema.

Para Sadovsky (2010), a atividade de modelização integra conhecimentos de diferentes naturezas. Ao abordar um problema é necessário: escolher uma teoria para tratá-lo; reconhecer um modelo; escolher uma relação pertinente e encontrar os meios para representá-la; realizar explorações e reconhecer nelas algumas regularidades relevantes; utilizar conhecimentos sobre números e álgebra que permitam ajustar o uso do modelo; usar propriedades adequadas que permitam transformar as expressões e produzir conhecimento novo a respeito. Estes são aspectos essenciais no processo de modelização.

Lesh e Zawojewski (2007) dizem que, quando envolvido no processo de modelização, os modeladores passam por iterações de expressar, testar e rever o modelo de julgamento. Ao fazê-lo, simultaneamente, eles melhoram o seu modelo e também desenvolvem uma compreensão mais profunda das restrições e das limitações que ainda existem em cada fase do desenvolvimento deste, e aprendem a articular (para membros do grupo) os "trade-offs" e os benefícios de um modelo particular. Portanto, um componente muito importante do desenvolvimento de processos de modelização do indivíduo é o de aprender a interpretar e, eventualmente, produzir diferentes pontos de vista, a fim de facilitar o processo de revisão do modelo encontrado.

Na Modelização Matemática, o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo sua aula mais dinâmica juntamente com os alunos de acordo com o nível em que estão, além de obedecer ao programa curricular. É bom que se tenham vários modelos para que se possa optar entre eles e não por eles. Pois o seu aprimoramento ou adaptação cabe ao professor e a seu bom senso.

Olhando sob este prisma, estamos desenvolvendo, no Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática - GPRPEM da UEPB, uma pesquisa sobre Modelização

Matemática encarada como método de ensino-aprendizagem na sala de aula.

Com relação à Resolução de Problemas e à Modelização Matemática, podemos perceber que existem inúmeras formas de conceber o ensino da Matemática, cabe ao professor adequá-las a seu trabalho. Elas constituem duas alternativas bastante ricas dentro de um variado espectro de possibilidades que se apresentam como alternativas para o ensino-aprendizagem de Matemática na sala de aula.

O Estudo da Álgebra e da Geometria no Ensino

Quantos professores de matemática se sentiriam acossados pela pergunta: o que é Álgebra? E o que é Geometria? Com certeza, estas perguntas não devem possuir respostas simples ou, pelo menos, não uma que se aplique a todos os contextos algébricos ou geométricos.

Usiskin (1995) diz que não é fácil definir Álgebra e reforça o fato de que o conceito desta é diferente em contextos diversos, ao afirmar que a álgebra do ensino primário tem conotações muito diferentes daquela ensinada em cursos superiores. Nesse sentido, a modelização matemática proporciona uma compreensão melhor de técnicas e métodos de pesquisa em relação à esse estudo.

Sem dúvida, a Álgebra é um dos temas mais importantes e presentes em, praticamente, todas as áreas da matemática, desde estudos elementares até tópicos mais avançados. Ela tem um papel de extrema importância na representação dos mais variados elementos estudados em matemática, apesar de estudantes, professores e profissionais de diversas áreas fazerem uso desta com muita frequência e da importância de seu papel no ensino e na aprendizagem, algumas questões relativas à Álgebra são deixadas de lado, como: o que a diferencia da Aritmética e da Geometria? Qual a relação existente entre a Álgebra da Educação Primária e a Álgebra do Ensino Superior, que nos permite chamar ambas de Álgebra?

Segundo Brasil (2017), o ensino da Geometria tem tanta importância como qualquer outra parte da Matemática, são muitos os obstáculos encontrados para não o inserir no ensino, como também são diversas as causas dos erros cometidos, desde o ensino primário até as licenciaturas. Nesse sentido, o contato estabelecido entre os alunos das séries iniciais até o curso superior em relação à Geometria começa bem cedo, antes mesmo de qualquer tipo de formalização, eles ainda não têm conhecimento dessa relação e talvez isso acabe sendo perdido pelo modo como a formalização é estabelecida com o passar dos anos no ensino formal. Assim, a tendência por diversas vezes é de que os conhecimentos prévios que os alunos possuem acabem sendo desconsiderados quando entram na sala de aula e isso influencia muito para afastar do aluno a sua autonomia.

> A geometria tem sido menos ensinada nos últimos anos do que há vinte anos. A razão desse declínio deve ser buscada não na insatisfação quanto a seu conteúdo, mas antes nas dificuldades conceituais causadas pelas argumentações lógicas que constituem a essência da geometria. A maioria das dificuldades que se observam nos alunos em sala de aula está relacionada com a maneira de organizarem raciocínio e construírem argumentações lógicas a partir de modelos matemáticos (Dreyfus & Hadas, 1994, p. 59).

Nesse sentido, para que aconteça uma mudança no ensino da Geometria que seja realmente significativa é preciso utilizar a modelização matemática além de um interesse maior pelo assunto. Também, o professor sempre será a peça fundamental para que essa mudança aconteça, por isso é preciso uma boa formação, boas condições de trabalho e métodos adequados

a sala de aula.

No primeiro semestre de 2015, na disciplina Fundamentos de Álgebra do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PPECEM da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, escolhemos alguns textos sobre Álgebra e Modelização Matemática para leitura e discussão em sala de aula. O intuito era de aprofundar os conhecimentos teóricos, para que os estudantes obtivessem um conhecimento e uma preparação melhor para que pudessem levar a Modelização Matemática para as salas de aula. Não pretendíamos apenas aplicar tarefas prontas, mas oportunizar o desafio de aprender a criar modelos.

Neste trabalho, tentamos descrever um episódio de aula vivido pelo primeiro e segundo autores e pelos estudantes com relação ao modelo apresentado. O professor comentou:

– Seria bom procurar saber qual a melhor forma para fazer uma caixa, isto é, a que utilize um mínimo de material para um máximo de aproveitamento. Para isso, o primeiro autor entregou a folha A4 (recortada) na forma quadrada para todos, medindo 20 cm de lado. Conforme o esquema representado na figura 1.

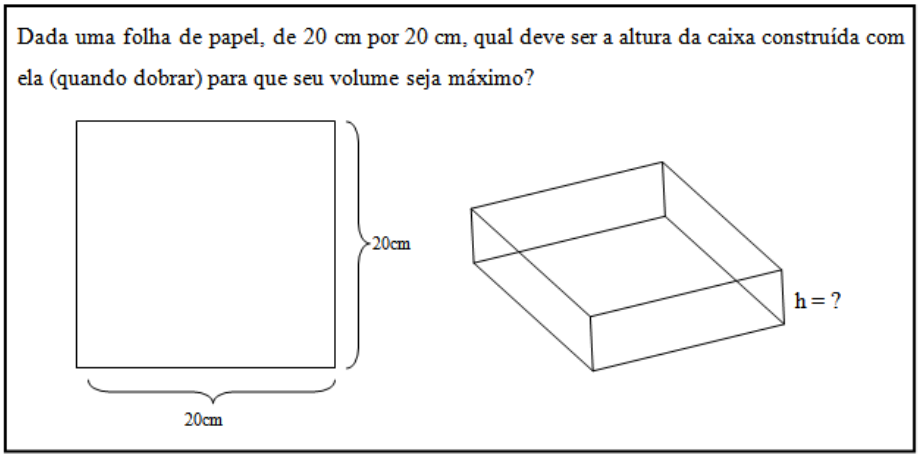


Figura 1. O modelo da embalagem.

Iniciou-se a discussão da resolução da situação-problema. O professor perguntou, referindo-se ao esquema exposto na figura 1, o seguinte:

- O que é um modelo? Esse modelo está relacionado com Álgebra? Com a Geometria? O que temos que fazer para construir a caixa?

Nesse momento, o representante de um dos grupos respondeu:

– Primeiro, temos que encontrar a equação que determina o volume da caixa em função da altura: V = área da base × altura.

Um componente de outro grupo complementou, com base na construção da figura 2:

– Como a base é quadrada, então a área da base é $(20 - 2h)^2$. Tomando "h" como sendo a altura da caixa, fizeram: $V = (20 - 2h)^2.h$. Deduziram que, como 0 < h < 10, não há altura negativa, nem podemos considerar $h \geq 0$, senão não teríamos como fazer uma caixa.

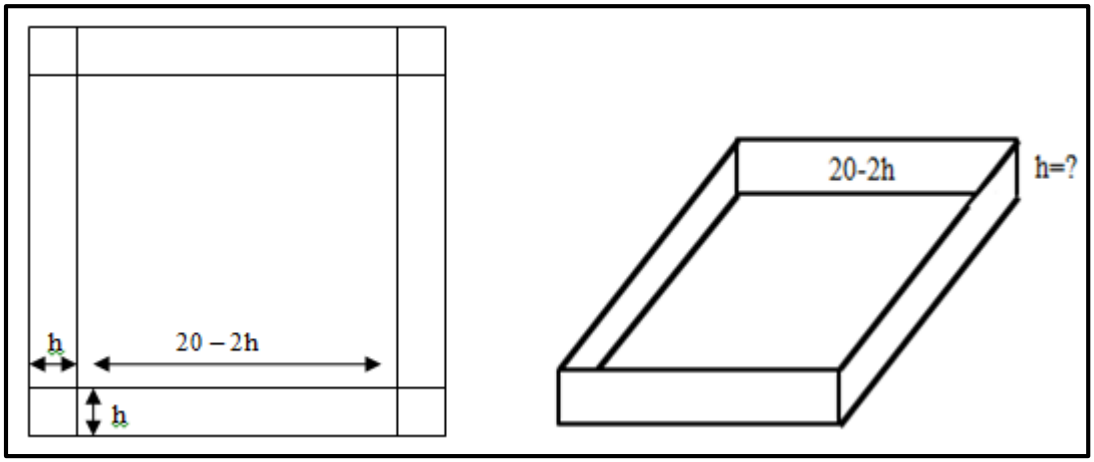


Figura 2. Medidas em função de *h.*

Então, $V = V(h) = (400 - 80h + 4h^2).h.$

Logo, $V(h) = 4h^3 - 80h^2 + 400h.$

Neste momento, apresentaram na lousa o conceito de pontos críticos de uma função. Para isso, usaram o cálculo diferencial, que estudaram na graduação. Mais especificamente, o ponto de máximo local e o ponto de mínimo local, justificando que a função derivada, nesses casos, era igual a zero.

Se $V(h) = 4h^3 - 80h^2 + 400h.$, calculando a derivada, escreveram: $V'(h) = 12h^2 - 160h + 400$. Como V'(h) = 0, logo $12h^2$ – 160h + 400 = 0 e, consequentemente, h_1 = 10 e $h_2 = \frac{10}{3}$. Como h está entre 0 e 10, então ele não pode ser 10. Portanto, o valor da altura da caixa procurada é igual a $\frac{10}{3}$, a fim de obtermos o máximo volume pedido no modelo.

Um dos estudantes perguntou:

– Como conseguiremos cortar $\frac{10}{3}$ de cada canto da folha, se esta conta não é exata?

O professor respondeu:

– Esta é uma motivação para se trabalhar com valores aproximados!

Este foi um modelo matemático, no caso o modelo da caixa, que nos prendeu à atenção e nos estimulou a fazer a Modelização Matemática. Nele, foram usados conceitos algébricos e geométricos, embora tenha se descuidado do conceito de medida.

Conclusão

Acreditamos que o trabalho de sala de aula deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. Os alunos devem ser desafiados a resolver uma situação-problema e desejar fazê-lo. O modelo deve conduzi-los a utilizar seus conhecimentos anteriores e, por outro lado, deverá exigir que se busquem novas alternativas, novos recursos, novos

conhecimentos para a obtenção da solução. Na tentativa de compreender a complexa ação de trabalhar em sala de aula, pudemos perceber também como um dos métodos de ensino a Modelização Matemática. Ela norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um modelo matemático. O modelo deve ser o ponto de partida para o desenvolvimento dos alunos, dando oportunidade para que possam refletir sobre o modelo proposto e ir em busca do conhecimento matemático.

Entendemos a modelização como um processo que vai além da ideia generalizada de construir modelos, para situar-se na noção de prática envolvida na resolução de problemas por meio da construção, (re)construção e interpretação de modelos. Portanto. a experiência de um modelo matemático, com os alunos envolvidos na disciplina Fundamentos da Álgebra, foi satisfatória e eles puderam perceber uma nova forma de aprender e de fazer Matemática através da resolução de problemas e de modelos matemáticos. Esperamos que nosso trabalho possa levantar novos questionamentos que ajudem os professores a perceber o valor da Matemática na formação de um cidadão crítico e reflexivo, necessário para uma sociedade em mudança.

Bibliografia e referências

BRASIL. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, Brasília, MEC.

Brasil, T. C. (2017). *O ensino da geometria através de resolução de problemas: explorando possibilidades na formação inicial de professores de matemática*. 2017. 260 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

Dreyfus, T. D., Hadas, N. (1994). Euclides deve permanecer – e até ser ensinado. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual.

Huanca, R. R. H. (2014). *A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação*: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática. 2014. 315f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Lesh, R., Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*: National Coucil of Teachers of Mathematics.

Ounchic, L R.; Huanca, R. R. H. (2013). A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: Frota, M. C. R.; Bianchini, B. L.; Carvalho, M. F. T. (Orgs.). *Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior*. Campinas: Papirus.

Sadovsky, P. (2010). *O ensino de matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios*. Editora Ática: São Paulo.

Usiskin, Z. (1995). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: Artur, F C; Albert, P. S. (Orgs.). *As ideias da álgebra*. Tradução H. D. Hygino. São Paulo: Atual editora.

Walle, J. A. V. (2001). *Elementary and Middle School Mathematics: teaching developmentally*. 4a ed. New York: Longman.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Un medio para la enseñanza de magnitudes directamente proporcionales

Ángela Katherine **Trochez-Tapia**
Universidad del Cauca
Colombia
angelikate91@hotmail.com
Yeny Leonor **Rosero-Rosero**
Universidad del Cauca
Colombia
yrosero@unicauca.edu.co

Esta investigación se realiza en el marco de la Maestría en Educación de la Universidad del Cauca, línea de Educación Matemática con el objetivo de hacer un aporte a la enseñanza de las Magnitudes Directamente Proporcionales (MDP) en la educación básica primaria. Se basa en la metodología de la Ingeniería Didáctica y se propone desarrollar dos fases. En la primera denominada análisis preliminares, se analizan las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica y en la segunda propone estructurar un medio en una situación didáctica que promueva el aprendizaje del objeto de estudio las MDP.

La investigación en este tema es pertinente, al respecto Obando, Vasco y Arboleda (2014) afirman que: "Razones, proporciones y proporcionalidad constituyen un campo ampliamente investigado en los últimos cincuenta años. Sin embargo, siguen siendo difíciles de aprender para algunos estudiantes. Por tanto es necesario hacer mayor investigación didáctica que permita nuevas comprensiones, y lograr mayores impactos en el sistema educativo". (p.59). En consecuencia, en este caso, se formula la pregunta *¿Cómo estructurar un medio en una situación didáctica para que permita estudiar algunas interacciones entre un sujeto y el medio en la enseñanza de las magnitudes directamente proporcionales en educación básica primaria?*

Por consiguiente, en la dimensión cognitiva se analiza cuáles son las dificultades que han encontrado los estudiantes para comprender y los profesores al enseñar este objeto matemático según Perry, P, Guacaneme, E y otros (2003) destacan dos. "Uno que tiene en cuenta la relación entre las dos medidas de una cantidad y para obtener el valor desconocido recurre a encontrar un "operador sin dimensión" o "escalar". El otro procedimiento tiene en cuenta la relación entre medidas correspondientes de diferentes cantidades y para obtener el valor desconocido recurre a un "factor funcional" entre las cantidades implicadas" (p.100), ver en la ilustración 1

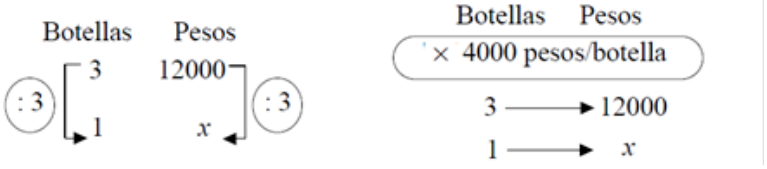


Ilustración 1. Esquema operador escalar y operador funcional. Perry, P, Guacaneme, E y otros (2003)

La dimensión epistemológica estudia la naturaleza del objeto matemático, en este caso las MDP, al surgimiento del concepto y referencias sobre la enseñanza del mismo en otra época. Por ejemplo: si dos magnitudes son tales que al doble o triple, de la cantidad de la primera, le corresponde el doble o triple de la segunda, entonces se dice que hay una correlación entre esas magnitudes; es decir, que si una de las dos magnitudes aumenta, la otra lo hace de la misma manera y si una disminuye la otra también. Para esta dimensión se considera la estructura del medio como una herramienta de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) para hacer el estudio del objeto epistemológico en la educación matemática, ver ilustración 2.

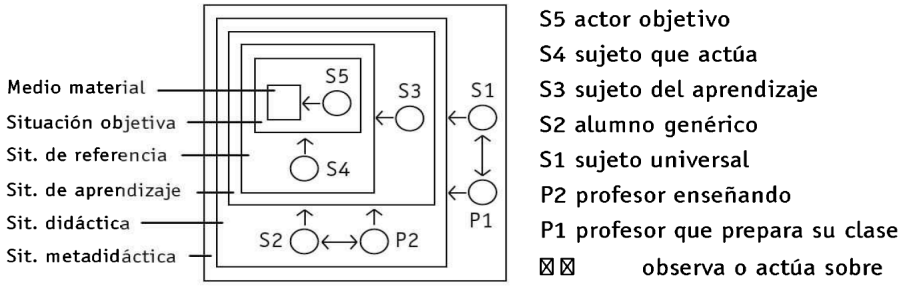


Ilustración 2. Estructura del Medio. Brousseau, G (2007)

La dimensión didáctica hace referencia a la manera convencional de enseñanza de los conceptos matemáticos, usualmente de forma algorítmica basada en memorizar y una parte operativa, para esta investigación las MDP.

Finalmente, para la estructura del medio se asume el planteamiento de Fregona, D y Báguena, P. (2011) quienes afirman que, la noción de medio es particularmente interesante y productiva desde el punto de vista teórico, ya que permite abordar diversas cuestiones específicas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La teoría es una modelización sobre los procesos de producción de conocimientos matemáticos según las condiciones creadas por el docente para que el alumno se encuentre con un conocimiento bien determinado, esto permitirá analizar más finamente las diferentes relaciones del estudiante, del profesor y las posibles interacciones con el objeto a estudiar.

Referencias y bibliografía

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones*. Buenos Aires Argentina: libros del Zorral. Traducción: Dilma Fregona.

Fregona D, y Báguena Pilar O. (2011). *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática.* Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina.

Obando G, Vasco C & Arboleda L. (2014) *Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción, y la proporcionalidad: Un estado del arte.* Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa. 17 (1): 59 - 81. DOI: 10.12802/relime.13.1713.

Perry, P., Guacaneme, E, Andrade, L. & Fernández F. *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer.* Universidad de los Andes. D.R. © 2003. ISBN 958-695-092-1. Bogotá 2013).

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Análisis de la construcción de modelos matemáticos de estudiantes de ingeniería

Jazmín **Juárez** Ramírez
Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional
México
jjuarezr@ipn.mx
José María **Chamoso** Sánchez
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es
María Teresa **González** Astudillo
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España
maite@usal.es

Resumen

La modelación permite a los estudiantes aprender las matemáticas de manera aplicada en otras áreas del conocimiento y mejorar su capacidad para formular, solucionar e interpretar situaciones reales. La falta de procesos completos de modelación, así como el escaso tiempo dedicado al análisis, interpretación y validación de soluciones, son algunos de los principales problemas en los cursos de matemáticas superiores. Este trabajo tuvo como objetivo analizar la forma en que los estudiantes de ingeniería construyen modelos de situaciones reales con ecuaciones diferenciales. Los resultados mostraron que los estudiantes no concedieron la misma importancia a todas las etapas del proceso de modelación, y que no consideraron necesario contrastar sus resultados con datos reales, ni explicar otras posibles aplicaciones del modelo. Esto conduce a cuestionar la necesidad de otorgar un papel más importante a la modelación matemática y proponer alternativas para mejorar la práctica docente para la formación de futuros ingenieros.

Palabras clave: Ecuación diferencial, educación matemática, educación superior, ingeniería, modelación.

Introducción

Uno de los objetivos más importantes de los cursos universitarios de matemáticas es que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos para aplicarlos en contextos diferentes del cual se aprendieron. Cuando la modelación matemática se presenta mediante problemas

planteados en un contexto del mundo real, fomenta que los estudiantes formulen preguntas sobre el contexto y piensen en la utilidad de sus conocimientos matemáticos (Santos & Reyes, 2011). La modelación propicia que los estudiantes integres las matemáticas en otras áreas del conocimiento, logren una mayor comprensión de los conceptos matemáticos, se interesen por las aplicaciones de las matemáticas, utilicen su creatividad para formular y resolver problemas y aumenten su capacidad para trabajar en grupo (Godino, Batanero, & Font, 2004). A través del aprendizaje de la modelación, los estudiantes pueden comprender cómo se originaron muchos conceptos y estructuras matemáticas, así como sus aplicaciones fuera de las matemáticas (Alsina, 2007).

Al respecto, cabe recordar que uno de los principios rectores para la educación matemática establece que un programa de matemáticas de excelencia requiere una enseñanza eficaz que involucre a los estudiantes en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas que fomenten su habilidad para dar sentido a las ideas y para razonar de una manera matemática (NCTM, 2015). Sin embargo, en algunos de los programas de las asignaturas de matemáticas en educación superior, la práctica de modelación matemática se reduce a las aplicaciones, las cuales no son más que problemas propuestos en los libros de texto. Es decir, el papel que tiene la modelación en los cursos de matemáticas para ingeniería, en la mayoría de los casos, es de carácter teórico y se basa en modelos preestablecidos que los estudiantes resuelven como simples ejercicios. Según Córdoba (2011), el proceso de modelación se enseña en las aulas de manera parcial, evitando confrontar a los alumnos con etapas claves de este proceso. En la literatura sobre modelación matemática, se pueden encontrar distintos ciclos o procesos de modelado, que dependen de diversas orientaciones y enfoques de cómo se entiende el modelado y, además, en algunos casos, si se utilizan tareas complejas.

Todo lo anterior, conduce a considerar la importancia de mostrar en el aula el proceso de modelación matemática con ecuaciones diferenciales no solamente como un ciclo dinámico para entender ciertos problemas o situaciones, sino como una forma de motivar un proceso de aprendizaje, en el cual los estudiantes experimenten las matemáticas como un medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria. Por tanto, se propuso el diseño de una experiencia con estudiantes de ingeniería en un curso de matemáticas, con el propósito de analizar la forma en que los estudiantes desarrollan un modelo matemático a partir de una situación de la vida real. La realización de este trabajo puede justificarse al considerar que la modelación matemática propicia en el estudiante habilidades tales como la integración de la matemática con otras áreas del conocimiento, interés por la matemática frente a su aplicabilidad y estímulo de la creatividad en la formulación y resolución de problemas.

Marco teórico

En algunas investigaciones se han estudiado los problemas que enfrentan los estudiantes al construir el modelo matemático de un fenómeno físico, sus elementos, la interpretación de su solución, su relación con una situación real y las etapas que se deben seguir para construirlos. Algunos estudios han reportado que los estudiantes presentan dificultades para interpretar físicamente los términos de una ecuación diferencial y traducirlos de una descripción física a una descripción matemática (Rowland, 2006, Rowland & Jovanoski, 2004). Estas dificultades pueden atribuirse a la existencia de vínculos débiles entre las matemáticas y los procesos físicos, así como a los típicos problemas a los que están acostumbrados los estudiantes en el aula. Al analizar la forma en que los estudiantes transfieren el conocimiento del uso de las ecuaciones diferenciales para una situación de otra disciplina, se ha encontrado que la mayoría de los

alumnos que resuelven la ecuación diferencial no intentan analizar la solución y, que algunos estudiantes simplemente trazan una gráfica de la solución, sin comentar la evolución futura del sistema que se analiza (Crouch & Haines, 2004; Chaachoua & Saglam, 2006). En ese sentido Klymchuk, Zverkova, Gruenwald y Sauerbier (2008) recomiendan alentar a los estudiantes escribir detalladamente todos los pasos del proceso de modelación, incluso para problemas de aplicaciones simples, ya que esto puede prepararlos para enfrentar problemas de la vida real que requieren habilidades de modelado avanzado en otros cursos y también en su trabajo futuro.

Sin embargo, es importante señalar que a pesar de que al resolver problemas clásicos de modelado los estudiantes realizan diagramas para mejorar la comprensión de la situación y reconocen la importancia de comprender la situación física y entender qué deben calcular, existe una falta de comprensión de las variables y constantes involucradas en el proceso, así como de la relación entre ellas (Soon, Tirtasanjaya, & McInnes, 2011). Algunos estudios mostraron que al desarrollar proyectos centrados en la investigación, la aplicación de conceptos matemáticos, su relación con el tema, y la construcción de los modelos contribuyen de manera importantes a la percepción de los estudiantes sobre la relación entre las matemáticas y la realidad (Jacobini & Wodewotzki, 2006).

Las investigaciones existentes sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática indican que la construcción de modelos en el aula podría cambiar la percepción de los estudiantes sobre las matemáticas. Sin embargo al representar una situación de la vida real con un modelo matemático los estudiantes encuentran dificultades, ya que la mayoría de los cursos de matemáticas se basan en el estudio de técnicas de solución donde predomina el enfoque algorítmico con escasa vinculación real, por tanto, es necesario promover el desarrollo de actividades para que los estudiantes utilicen los diversos enfoques de solución.

Metodología

Participantes y contexto

La experiencia se llevó a cabo durante dos semestres consecutivos del curso escolar 2016/2017, en el desarrollo de la asignatura ecuaciones diferenciales, que se imparte en el primero de los 4 años de la Ingeniería en Sistemas Computacionales (ISC), que ofrece la Escuela Superior de Cómputo (ESCOM-IPN), en la Ciudad de México. En el primer semestre (curso A) participaron en la experiencia 26 estudiantes (8 mujeres, 31%, y 18 hombres, 69%), y en el segundo semestre (curso B), participaron 27 estudiantes (6 mujeres, 22%, y 21 hombres, 78%).

Desarrollo de la experiencia

Los estudiantes realizaron a cabo un proyecto que consistía en construir, resolver y analizar el modelo matemático de una situación real. Para llevar a cabo esta actividad los estudiantes en ambos cursos se organizaron en pequeños grupos de 5 estudiantes y desarrollaron una serie de tareas comunicándose a través de un foro virtual. En el diseño del proyecto se consideraron algunas recomendaciones sobre las ventajas del aprendizaje colaborativo mediado por foros virtuales (Cheng, Paré, Collimore & Joordens, 2011). Las tareas realizadas por cada grupo trabajo fueron las siguientes:

1. Seleccionar del libro de texto del curso (Zill, 2012), un problema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que tuviera una aplicación real.
2. Construir, resolver y analizar el modelo matemático del problema seleccionado.

3. Diseñar una presentación electrónica para exponer su trabajo en el aula.
4. Valorar el trabajo de otro grupo (curso A) y su propio trabajo (curso B) a través del foro virtual, indicando las modificaciones que realizarían en términos del proceso de modelación matemática adaptado del modelo de Camarena (2009), que se estudió en el aula (Tabla 1).

Tabla 1

Proceso de modelación matemática

Etapa	Descripción
1. Identificar variables y leyes por aplicar	Determinar las variables responsables del cambio en el sistema y formular un conjunto de premisas del sistema por describir.
2. Plantear ecuación	Escribir la ecuación diferencial correspondiente.
3. Establecer condiciones	Determinar las condiciones del problema.
4. Resolver ecuación	Aplicar los métodos estudiados para obtener la resolución general.
5. Aplicar condiciones	Aplicar las condiciones para determinar la resolución particular.
6. Graficar resolución	Expresar la resolución particular con un gráfico.
7. Contestar pregunta original	Explicar el resultado en el contexto de la situación real.
8. Analizar resultado	Validar el resultado contrastándolo con datos conocidos.
9. Identificar el modelo	Explicar si son posibles otras aplicaciones del sistema.

Recogida de datos y análisis de la información

Se tomaron como datos los mensajes de los estudiantes en el foro virtual durante el desarrollo del proyecto. Estos fueron transcritos y se organizaron en unidades de análisis. Se consideró como unidad de análisis (UA) cada idea con significado propio, entendida como una unidad de pensamiento que expresaba una única información, extraída de un segmento de la aportación.

Para determinar la forma en que los estudiantes construyeron un modelo matemático, se analizó el contenido de las aportaciones de los estudiantes en términos del proceso de modelación matemática estudiado en el aula. Se categorizaron en función de los aspectos a los que se referían, tratando de identificar aspectos comunes. Se observó que, en sus aportaciones, los estudiantes mencionaron aspectos relacionados con el proceso de modelación matemática y a otros aspectos que no tenían relación con éste. Posteriormente se elaboró un sistema de categorías para clasificar las aportaciones de los estudiantes en tres partes, según los aspectos relacionados con el diseño, contenido matemático o de otro tipo en cada caso:

- *Diseño*, referido a aspectos relacionados con el diseño de la presentación, a los que aluden como: 1) *Efectos visuales* (colores, efectos, animaciones y recuadros), 2) *Características de texto* (formato de las ecuaciones, estilo de las fuentes y errores en la escritura), y 3) *Presentación* de la diapositiva sin especificar elementos.
- *Contenido matemático*, referido a los aspectos de las etapas del proceso de modelación matemática con ecuaciones diferenciales.
- *Otros*, referido a elementos sin relación con el diseño o el contenido matemático.

Las aportaciones de los estudiantes se asignaron al sistema de categorías, en cada grupo y en cada curso.

Resultados

La distribución de las unidades de análisis (UA) de las aportaciones en el foro de los estudiantes en cada grupo de trabajo, y en cada uno de los cursos A y B, en función de las categorías del contenido descritas, se organizaron teniendo en cuenta los aspectos que se mencionaron y la frecuencia con que se hizo (Tabla 2 y Tabla 3).

Tabla 2

Distribución de UA de las aportaciones de los grupos de trabajo en el curso A

Categorías		Grupos curso A					Total
		G1A	G2A	G3A	G4A	G5A	
Diseño (D)	Efectos visuales	1	2	2	0	1	6(43%)
	Características de texto	0	3	0	2	0	5(36%)
	Presentación	1	2	0	0	0	3(21%)
Total		2	7	2	2	1	14%(100)
Contenido Matemático (C)	Identificar variables y leyes por aplicar	0	0	1	2	0	3(3%)
	Plantear ecuación	1	0	0	1	3	5(6%)
	Establecer condiciones	1	0	0	0	0	1(1%)
	Resolver ecuación	5	9	5	7	3	29(33%)
	Aplicar condiciones	4	2	0	0	0	6(7%)
	Graficar resolución	6	2	3	7	9	27(30%)
	Contestar pregunta original	0	0	1	0	0	1(1%)
	Analizar resultado	0	0	0	0	0	0(0%)
	Identificar el modelo	5	0	6	5	1	17(19%)
Total		22	13	16	22	16	89(100%)
Otros (O)		3	2	10	6	14	35(100%)
Total		138(100%)					

Tabla 3

Distribución de UA de las aportaciones de los grupos de trabajo en el curso B

Categorías		Grupos curso B					Total
		G1B	G2B	G3B	G4B	G5B	
Diseño (D)	Efectos visuales	0	1	0	14	6	21(68%)
	Características de texto	2	0	0	0	3	5(16%)
	Presentación	0	0	0	3	2	5(16%)
Total		2	2	1	2	17	11
Contenido Matemático (C)	Identificar variables y leyes por aplicar	0	0	0	0	5	5(4%)
	Plantear ecuación	0	3	8	3	4	18(15%)
	Establecer condiciones	0	4	4	5	1	14(12%)
	Resolver ecuación	8	1	2	10	10	31(26%)
	Aplicar condiciones	0	0	0	2	0	2(2%)
	Graficar resolución	10	6	4	0	8	28(24%)
	Contestar pregunta original	0	0	0	1	0	1(1%)
	Analizar resultado	5	1	2	0	0	8(7%)
	Identificar el modelo	0	0	3	2	5	10(9%)
Total		22	23	15	23	23	33
Otros (O)		3	5	7	8	8	10
Total		183(100%)					

Se observa que el total de los porcentajes de UA de las aportaciones en el foro virtual de los grupos de trabajo, en los cursos A y B, globalmente, fue similar en las categorías Contenido matemático (C) y Diseño (D) (prueba ji-cuadrado [$\chi^2(2) = 3.31$, $p > 0.05$]; no se consideró la categoría Otros.

En general se observa que el aspecto que los estudiantes mencionaron en sus aportaciones con mayor frecuencia fue *graficar solución*, y en menor grado *contestar pregunta original*.

Se observa que los estudiantes del curso B, en sus aportaciones en el foro, al revisar su propio trabajo mencionaron más aspectos relacionados con las etapas *Establecer ecuación* y *Establecer condiciones* que los estudiantes del curso A al revisar el trabajo de otro grupo. Por otro lado las aportaciones de los estudiantes del curso B tuvieron en cuenta los elementos relacionados con la etapa *Analizar resultado*, al contrario que los del curso A, que no los mencionaron.

Se compararon las frecuencias de los aspectos mencionados en la categoría Contenido matemático entre los cursos A y B y se observó que existieron diferencias significativas [$\chi^2(8) = 27.72$, $p < 0.001$]. Esto no sucedió para la categoría Diseño [$\chi^2(2) = 4.68$, $p > 0.05$]. Es decir la frecuencia de los aspectos mencionados en el foro en relación al proceso de modelación matemática, al evaluar una presentación inicial, estuvo relacionada con la manera en que los estudiantes realizaron la revisión.

Discusión de resultados

Llama la atención que la mayoría de los estudiantes, en cada grupo, no concediera importancia al hecho de identificar las variables involucradas al construir un modelo matemático, así como las leyes que gobiernan el sistema físico. Estos aspectos, que pueden parecer básicos, pueden evidenciar una dificultad de comprensión, lo que corrobora los resultados de algunas investigaciones (Soon et al., 2011; Klymchuk et al., 2008) cuando analizaron las dificultades que enfrentan los estudiantes al traducir una situación cotidiana en un problema matemático y encontraron una escasa comprensión de los estudiantes al identificar las cantidades variables y constantes del sistema. Por otro lado entre los aspectos que los estudiantes mencionaron con mayor frecuencia se encuentra *graficar solución,* sin embargo, al presentar sus trabajos en el aula solo mostraron las gráficas sin relación con un análisis de comportamiento, en ese sentido los resultados coinciden con los de Chaachoua y Saglam (2006), que encontraron que algunos estudiantes simplemente trazan una gráfica de la solución, sin comentar la evolución futura del sistema que se analiza.

Al exponer sus trabajos en el aula los estudiantes mostraron que eran conscientes de la existencia de una gran variedad de fenómenos que podían representarse con ecuaciones diferenciales. Algunos estudiantes seleccionaron problemas que les resultaban interesantes pero no consideraron que podría resultar complicado abordarlos, quizás porque se situaban en contextos donde los alumnos tenían poca experiencia. En este sentido puede parecer que se asemeja a lo establecido por Jacobini y Wodewotzki (2006) al señalar que, después de trabajar con actividades que impliquen modelado, los estudiantes rompen con la idea de que la matemática es puramente abstracta y encuentran su enfoque práctico en la vida cotidiana.

Conclusiones

Los aspectos mencionados por los estudiantes de ingeniería en el foro en relación con las etapas del proceso de modelación matemática fueron considerados de diferente manera. Por

ejemplo los estudiantes de ambos cursos hicieron escasa referencia a los aspectos que implicaran la construcción del modelo: *identificar variables y leyes por aplicar*, *plantear ecuación* y *establecer condiciones*, a pesar de que fueron tratadas en el aula, al resolver ejemplos de situaciones de la vida real con el proceso de modelación matemática. Sin embargo, los aspectos relacionados con la solución de la ecuación diferencial y su interpretación gráfica fueron los que más se mencionaron.

En referencia al contenido de las aportaciones de los estudiantes de ingeniería en el foro, al valorar una presentación electrónica, varió en función de la manera en que los estudiantes desarrollaron el proyecto de modelación matemática, es decir, en general al valorar su propio trabajo hicieron referencia a aspectos con diferente frecuencia que al valorar el trabajo de otro grupo.

El hecho de que se observen diferencias entre la frecuencia de los aspectos mencionados relacionados con las etapas del proceso de modelación matemática, confirma nuevamente que los estudiantes de ingeniería comprenden de diferente forma estas etapas. Parece ser que para los estudiantes, en general, el proceso de modelación matemática se reduce a la solución algorítmica de una ecuación diferencial como un paso teórico, apartándolas de sus campos de aplicación.

El estudio podría completarse introduciendo un enfoque experimental para analizar la comprensión del proceso de modelación matemática como, por ejemplo, proponiendo a los estudiantes una experiencia determinada que les permitiera tomar datos aunque ello pudiera favorecer la predicción más que la comprensión. Otra posibilidad podría ser considerar un ejemplo concreto para todos los estudiantes como podría ser el que pueden experimentar en otras asignaturas que están cursando en su carrera.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente subvencionado por la Universidad de Salamanca [2017/00111/001 (K118/ 463AC01)]; European Union, Project Erasmus+ [2017-1-ES01-KA203-038491], Ministerio de Economía y Competividad de España [PSI2015-66802-P], RED8-Educación Matemática y Formación de Profesores [EDU2016-81994-REDT].

Referencias y bibliografía

Alsina, C. (2007). Teaching applications and modelling at tertiary level. En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W, Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 469-474). New York: Springer.

Camarena, P. (2009). Mathematical models in the context of sciences. En M. Blomhøj & S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 117-131). Denmark: Roskilde University.

Chaachoua, H., & Saglam, A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications*, *25*(1), 15-22.

Cheng, C. K., Paré, D. E., Collimore, L. M., & Joordens, S. (2011). Assessing the effectiveness of a voluntary online discussion forum on improving students' course performance. Computers & Education, *56*(1), 253-261.

Córdoba, J. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México.

Crouch, R., & Haines, R. (2004). Mathematical modelling: Transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(2), 197-206.

Falsetti, M., & Rodriguez, M. (2005). A proposal for improving students' mathematical attitude based on mathematical modeling. *Teaching Mathematics and its Applications*, *24*(1), 14-28.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2004). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: ReproDigital.

Jacobini, O. R., & Wodewotzki, M. (2006). Mathematical modelling: A path to political reflection in the mathematics class. *Teaching Mathematics and its Applications*, *25*(1), 33-42.

Klymchuk, S., Zverkova, T., Gruenwald, N., & Sauerbier, G. (2008). Increasing engineering student´s awareness to environment through innovative teaching of mathematical modelling. *Teaching Mathematics and its Applications*, *27*(3), 123-130.

NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. México: 3D editorial.

Rowland, D. R. (2006). Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(5), 553-558.

Rowland, D. R., & Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(4), 503-516.

Santos, M., & Reyes, A. (2011). Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(3), 313-336.

Soon, W., Tirtasanjaya, L., & McInnes, B, (2011). Understanding the difficulties faced by engineering undergraduates in learning mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(8), 1023-1039.

Zill, D. (2012). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: Cengage.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Modelagem Matemática e projetos temáticos na Educação Básica: exemplos de duas maneiras de conduzir

Regina Helena de Oliveira Lino **Franchi**

Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC

Brasil

regina.franchi@ufabc.edu.br

Resumo

O objetivo principal deste artigo é exemplificar e discutir posibilidades de conduzir atividades de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática Critica. Tem como base duas pesquisas, de cunho qualitativo, cujos dados foram produzidos a partir do desenvolvimento de projetos temáticos de Modelagem Matemática na Educação Básica, em contextos diferenciados. Os aporte teóricos utilizados referem-se à Modelagem Matemática e à Educação Matemática Crítica. Cada um dos projetos é descrito dando destaque para a forma como foram conduzidos, de acordo com os contextos escolares nos quais se inserem. Como resultados destacamos a possibilidade de desenvolver projetos de Modelagem mesmo em contextos escolares restritivos, bastando para isso adequar a forma de conduzir as atividades. Destacamos também a importância de o professor estar atento às oportunidades que se apresentam para trabalhar os conteúdos matemáticos assim como de estimular reflexões e posturas críticas nos estudantes.

Palavras chave: modelagem matemática, educação matemática crítica, educação básica, projetos temáticos, posturas críticas.

Introdução

No Brasil, assim como em outros países, muito se discute sobre possibilidades de utilização da Modelagem Matemática em contextos escolares e sobre sua caracterização na Educação Matemática. Há publicações a respeito de pesquisas e práticas de Modelagem, focalizando as maneiras de conduzir as atividades, a atuação dos alunos e dos professores nesse

contexto, revelando diversidade de abordagens e perspectivas para a Modelagem no âmbito educacional.

Neste artigo enfoco o desenvolvimento de atividades de Modelagem na Educação Básica, por meio de projetos temáticos, com temas escolhidos pelos estudantes. São apresentados e discutidos dois projetos, com características diferentes, desenvolvidos em escolas brasileiras. Ambos fizeram parte de pesquisas, de cunho qualitativo, nas quais a Modelagem foi trabalhada segundo os pressupostos da Educação Matemática Crítica. As pesquisas completas que são aqui referenciadas podem ser obtidas em Ferreira (2013) e Campos (2015).

O objetivo principal deste artigo é exemplificar e discutir duas formas diferentes de conduzir atividades de Modelagem a partir de temas, com o enfoque da Educação Matemática Crítica. Para tanto, apresento inicialmente aspectos de cunho teórico sobre a Modelagem no âmbito educacional, abordando a perspectiva e a concepção de Modelagem considerada, estabelecendo relações com a Educação Matemática Crítica e com o desenvolvimento de projetos. Em seguida descrevo cada um dos projetos, dando destaque para a forma como foram conduzidos. Apresento também alguns dos resultados obtidos.

Modelagem, Projetos Temáticos e Educação Matemática Crítica

Pode-se dizer que a Modelagem Matemática tem sua origem na Matemática Aplicada, com a utilização de conceitos matemáticos para interpretar fenômenos e resolver problemas de outras áreas de conhecimento, que não a própria Matemática. Nesse contexto a Modelagem é entendida como o processo de formulação dos modelos matemáticos. Ela vem para a Educação Matemática quando professores e pesquisadores consideram a possibilidade de utilizá-la em aulas como estratégia para contextualizar, aplicar e ensinar Matemática.

Das reflexões sobre o uso da Modelagem nas aulas de Matemática e das pesquisas sobre o tema surgem diferentes concepções sobre a Modelagem na Educação Matemática, que diferem em alguns pontos, mas, que admitem como característica comum a abordagem de situações da realidade por meio da Matemática. A concepção adotada nos projetos aqui descritos é a de Barbosa (2001) que caracteriza a Modelagem Matemática como "um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade" (p. 31).

Autores como Bassanezi (2002), Burak (2010) e Franchi (2007), entre outros, defendem que a Modelagem pode ter como ponto de partida a investigação sobre temas de interesse dos estudantes. Problemas podem ser formulados e resolvidos tendo como referência os estudos a respeito do tema pesquisado:

> O desenvolvimento de projetos temáticos usando a Modelagem Matemática pode ser uma alternativa para educar por meio da Matemática. As investigações a respeito de temas escolhidos pelos estudantes, ou negociados com o professor, podem propiciar reflexões acerca dos contextos dos temas. Nos processos de organizar e representar os dados obtidos, assim como nas problematizações e procura de soluções, é possível abordar conceitos matemáticos relacionados. (Ferreira; Franchi, 2016, p. 2)

Quando nos ambientes de investigação das situações da realidade a Matemática é usada para compreender, interpretar, procurar soluções e se posicionar criticamente frente aos problemas investigados (Araújo, 2009; Franchi, 2002; Barbosa, 2001) a Modelagem se enquadra na chamada perspectiva sociocrítica (Kaiser & Siriramann, 2006), em

consonância com a Educação Matemática Crítica. Para Araújo (2009) "o propósito central dessa perspectiva relaciona-se a objetivos pedagógicos de compreensão crítica do mundo" (p. 57).

Skovsmose (2007) indica que "a educação matemática crítica está ligada aos diferentes papéis possíveis que a educação matemática pode e poderia desempenhar, em um contexto sociopolítico particular" (p.74). Para o autor, a educação tem que ter papel ativo no combate às disparidades sociais, o que não é possível se as pessoas não questionam, não conhecem e não cobram seus direitos, não se posicionam diante das situações que vivem (Skovsmose, 2005). Nesse sentido a Educação Matemática Crítica deve promover a cidadania crítica (Skovsmose, 2008).

A participação dos estudantes em projetos de Modelagem desenvolvidos na perspectiva sociocrítica pode contribuir para a formação crítica do estudante e despertar "novos olhares, quer sobre a matemática e os fatos investigados, quer sobre a realidade social que se encontra ao seu redor" (Jacobini e Wodewotzki, 2006, p. 73).

As maneiras de conduzir atividades de Modelagem com as características que destacamos são muitas. A seguir exemplifico duas dessas maneiras, descrevendo projetos desenvolvidos em contextos diferentes, ambos com temas escolhidos pelos estudantes.

Projeto Um: tema único

O projeto, denominado neste artigo como Projeto Um, foi desenvolvido com alunos do nono ano do ensino fundamental de uma escola privada brasileira. Participaram 16 alunos com idades entre 14 e 16 anos. Foram encontros semanais, realizados em horario diferente e de forma independente das aulas regulares da disciplina Matemática, durante três meses.

A pesquisa, na qual o projeto se insere, foi desenvolvida por Campos (2015) e teve a seguinte questão de investigação: "Que contribuições uma proposta pedagógica orientada pela Modelagem Matemática pode trazer para o desenvolvimento de posturas críticas nos estudantes?". Buscou identificar as contribuições da forma de condução das atividades de Modelagem Matemática de uma sala de aula democrática e dos diálogos para desenvolvimento de posturas críticas nos estudantes. Por essa razão as atividades foram conduzidas de modo a estimular as manifestações e diálogos entre todos os envolvidos no projeto. Sempre que possível as decisões foram compartilhadas, oportunizando as iniciativas dos participantes.

Os estudantes foram convidados a escolher temas que desejassem estudar. Divididos em três grupos fizeram uma pesquisa inicial sobre os temas: Serra de Ouro Branco, Copa do Mundo e Cinema. Apresentaram essas pesquisa aos demais colegas da classe e, após discutirem sobre as possibilidades de continuidade nos diferentes temas, optaram por abordar um único tema, a saber, o tema Copa do Mundo. Vale ressaltar que o assunto despertou interesse pois o Brasil estava prestes a sediar a Copa de 2014.

Continuando os trabalhos, cada grupo realizou nova pesquisa exploratória sobre o tema, escolhendo os assuntos que iriam estudar. Os assuntos foram: manifestações populares e repercussões da Copa do Mundo de 2014; gastos com a Copa do Mundo de 2014; pontos positivos e negativos da realização da Copa do Mundo de 2014 no Brasil. Cada grupo sintetizou suas pesquisas em textos elaborados coletivamente. Houve outra apresentação aos colegas e decidiram aprofundar os estudos no tema "gastos com a Copa". Durante essa etapa foi possível

perceber que os alunos não estavam se posicionando críticamente sobre o tema, muitas vezes apenas reproduzindo opiniões divulgadas pela mídia. Buscando estimular a reflexão crítica foram selecionadas reportagens com pontos de vista diversos sobre o tema e proposto que os participantes realizassem um estudo sobre elas. As reportagens foram debatidas, nessa oportunidade de forma mais crítica.

Os participantes se interessaram, em seguida, por estudar os gastos com a construção dos estádios. Fizeram um levantamento sobre os gastos de cada estádio, discutindo a pertinência da construção de cada um, naquela região e naquele momento. Procuraram entender também a origem das verbas destinadas às construções e as fontes de financiamento. Para entender as possibilidades de financiamento entrevistaram um comerciante local que havia obtido um financiamento de banco público brasileiro para a sua loja.

Tendo consciência sobre o montante dos gastos, e estimulados pelo professor, decidiram avaliar o que poderia ser feito localmente, na cidade em que residiam, com o valor gasto para a construção de dois dos estádios. Identificaram que havia déficit de moradias na cidade e resolveram avaliar as possibilidades de construção de casas populares. Pesquisaram sobre locais adequados de acordo com as necessidades da população, sobre o tipo de residência, sobre a localização da casa no terreno e sobre os custos de construção. Para isso fizeram pesquisas na internet, visitaram uma imobiliária, um conjunto habitacional e entrevistaram um morador desse conjunto. Em seguida fizeram a estimativa do número de casas que poderiam ser construídas dentro das condições escolhidas. Concluíram que com os gastos para construção de dois dos estádios poderiam ser construídas 11460 casas populares. Nas figuras 1 e 2 temos anotações dos estudantes sobre essas conclusões.

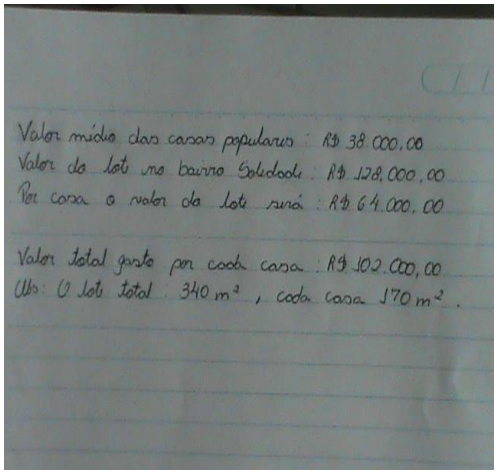


Figura 1. Custo da casa.

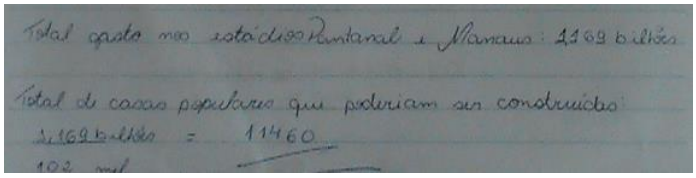


Figura 2. Estimativa do número de casas.

Tendo finalizado o projeto, apresentaram os resultados para os demais alunos da escola, conduzindo um debate sobre o tema. Ao final do estudo foi perceptível mudanças nas posturas dos estudantes, sendo questionadores, refletido críticamente sobre as informações, buscando alternativas variadas para resolver problemas e se posicionando críticamente frente às situações diversas que estudaram.

Projeto Dois: temas diversos

O projeto, denominado neste artigo de Projeto Dois, foi desenvolvido em duas turmas do

primeiro ano do ensino médio, de uma escola pública brasileira. Em cada sala havia 35 estudantes, com idades variando entre 14 e 18 anos. Foi desenvolvido em aulas regulares da disciplina Matemática. Parte da carga horária foi reservada para o projeto e parte dedicada às demais atividades do currículo. Das seis aulas semanais da disciplina, em média duas foram utilizadas para a Modelagem, durante quatro meses.

A pesquisa na qual o projeto se insere foi desenvolvida por Ferreira (2013) e teve a seguinte questão de investigação: "*Que contribuições uma proposta pedagógica baseada na Modelagem Matemática e no uso de Ambientes Informatizados pode trazer para a abordagem do conceito de Função na perspectiva da Educação Matemática Crítica?"*. Havia, portanto, dois aspectos principais a serem considerados: o desenvolvimento deveria possibilitar reflexões críticas nos contextos dos temas escolhidos e também possibilitar a abordagem dos conteúdos matemáticos relativos ao tema "funções", constante do plano de ensino da disciplina.

Inicialmente os alunos, organizados em grupos, escolheram temas de seu interesse. Cada grupo fez uma pesquisa exploratória sobre o tema escolhido, construiu um texto coletivo (em ambiente virtual colaborativo) e preparou sua apresentação para os demais colegas da sala. Alguns dos temas foram: pontos turísticos da cidade de Ouro Preto (Casa dos Contos), Segunda Guerra Mundial (holocausto), Música, Drogas (alcoolismo), Redes Sociais e Desenho Artístico (mangá). Um grupo de cada sala foi escolhido para apresentar inicialmente seu trabalho. Nessa etapa ocorreram discussões ligadas aos temas, cabendo aos grupos se posicionarem criticamente frente aos questionamentos levantados pelos colegas, defendendo suas opiniões com base nas pesquisas realizadas.

Na etapa seguinte foi trabalhado o conceito de função utilizando os dados apresentados pelos diferentes grupos a respeito dos temas pesquisados. Foram construídas situações nas quais os estudantes tinham que organizar os dados em tabelas com duas colunas, estabelecendo correspondências entre elas e avaliando suas características. Buscou-se, com isso, construir o conceito de função, que foi em seguida definido formalmente.

Depois os demais grupos apresentaram seus trabalhos, na mesma dinâmica anteriormente descrita, fomentando as discussões críticas a respeito dos temas. Em seguida foram feitas interpretações dos gráficos apresentados pelos grupos e por fim matematizações e elaborações de modelos matemáticos, tendo como base os dados dos trabalhos.

A título de exemplo trago uma problematização levantada por um dos grupos que visitou um ponto turístico da cidade, onde havia uma exposição de Moedas Brasileiras. Os estudantes se interessaram por entender os motivos que levaram o país a ter realizado tantas trocas de moedas no passado e descobriram que o motivo foi a grande desvalorização da moeda provocada pela inflação. Muitas das trocas ocorreram dividindo o valor por mil e mudando o nome da moeda. Trazendo para um contexto da época em que o projeto foi desenvolvido, buscaram fazer uma previsão sobre em que momento poderia haver necessidade de trocar a moeda novamente no Brasil. Desenvolveram estratégias para responder a pergunta, considerando a média de inflação dos últimos dez anos. Inicialmente fizeram cálculos ano a ano. Percebendo a regularidade, propuseram uma fórmula e, com uso de calculadoras obtiveram a resposta. Nas anotações apresentadas na Figura 3 estão os cálculos feitos por um dos grupos e a estimativa de 119 anos para uma possível troca de moedas.

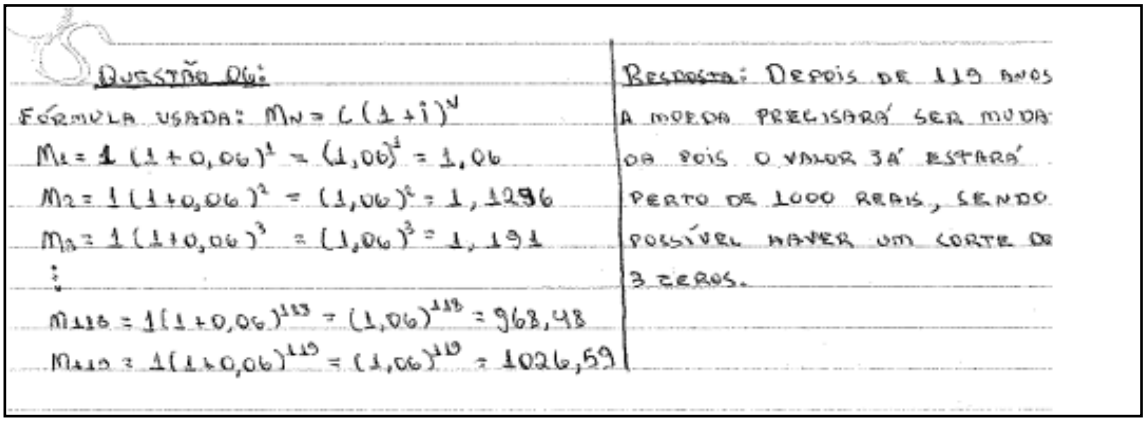


Figura 3: Estimativa da troca de moedas.

A Matemática foi utilizada para encontrar uma solução para o problema proposto e, com isso, foi possível discutir a importância do controle da inflação para a economia do país e para a vida dos cidadãos.

Considerações Finais

Os dois projetos descritos referem-se a pesquisas relativas à Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática Crítica. Foram desenvolvidos de forma a estimular a reflexão e a crítica dos estudantes sobre os temas abordados.

A forma como cada um foi conduzido foi determinada pelos contextos nos quais estavam inseridos. O Projeto Dois foi desenvolvido nas aulas de Matemática, em uma condição bem restrita, uma vez que havia necessidade de cumprir o planejamento da disciplina, de acordo com as normas da escola, inclusive com calendário comum estabelecido com os demais professores das outras salas do mesmo ano. Embora se buscasse flexibilizar o currículo abrindo espaço para a Modelagem, era preciso cumprir o programa. A estratégia utilizada foi dividir as aulas, reservando parte delas para a Modelagem. Embora os grupos pudessem trabalhar livremente com os temas escolhidos, houve o olhar atento do professor para perceber as oportunidades de abordar o conteúdo matemático previsto (no caso, funções) a partir dos dados coletados pelos grupos nos diferentes temas e das matematizações feitas buscando responder às questões levantadas pelos grupos. Então, a partir de certo tempo, não houve mais a necessidade de dividir as aulas entre conteúdo e Modelagem, as duas coisas se integraram. Cada grupo escolheu um tema diferente mas tudo foi socializado, de modo que todos conheceram todos os assuntos e trabalharam com eles.

Já o Projeto Um foi desenvolvido em horário separado das aulas regulares de Matemática. Não havia preocupação com o conteúdo matemático em si. Mas é claro que também foram aproveitadas as oportunidades de trabalhar a Matemática que apareceu relacionada aos assuntos estudados. Nesse projeto, embora os grupos tivessem inicialmente escolhido temas diferentes, as decisões foram sendo tomadas na direção de trabalhar um tema único para os três grupos formados. O tema foi sendo delimitado ao longo das atividades, procurando focar em algo mais

específico. Dessa forma, o tema geral Copa do Mundo foi se transformando em "gastos com a Copa" e depois, mais especificamente, gastos com os estádios. Vale destacar a oportunidade percebida pelo professor em trazer o tema geral para uma reflexão crítica local, que de certa forma transformou o tema Copa no Brasil em Habitação na cidade de Ouro Branco. Isso gerou um envolvimento ainda maior dos estudantes.

Em ambos os projetos foi perceptível a mudança de comportamento dos estudantes que, no início tiveram uma participação de certa forma tímida, mas, que foram, ao longo do trabalho, se envolvendo e participando mais, tomando decisões, expondo suas ideias e expressando opiniões. Por meio da Matemática foi possível compreender a realidade, encontrar soluções para os problemas formulados e refletir de forma crítica sobre os contextos estudados. Foi possível perceber também o protagonismo dos participantes, não apenas nas iniciativas durante os trabalhos, como também nas alternativas que encontraram e propuseram para modificar os contextos estudados. Dessa forma foi possível identificar o potencial das atividades do ponto de vista pedagógico, com relação às posibilidades de aprendizagem da Matemática e do desenvolvimento de posturas críticas nos participantes. Destacamos também os resultados das pesquisas desenvolvidas no que diz respeito às contribuições da Modelagem Matemática para a Educação Matemática Crítica.

Referencias y bibliografía

Araújo, J. L. (2009). Uma abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *Alexandria, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia.* 2,2, 55-68.

Barbosa, J. C. (2001) *Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores.* Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Bassanezi, R. C. (2002) *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* São Paulo: Contexto.

Burak, D. (2010) Modelagem Matemática so bum olhar da Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. *Revista de Modelagem na Educação Matemática.* 1,1, 10-27.

Campos, D. G. (2015) *O desenvolvimento de posturas críticas nos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental por meio da Modelagem Matemática.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil.

Ferreira, N. S. (2013) *Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação como ambiente para a abordagem do conceito de Função segundo a Educação Matemática Crítica.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil.

Franchi, R. H. O. L. (2001) *Uma proposta de matemática para cursos de Engenharia utilizando modelagem matemática e informática.* Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Franchi, R. H. O. L. (2007) Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e na Informática como possibilidades para a Educação Matemática. *Modelagem Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.* Recife: SBEM. 3,177-193.

Ferreira, N. S. & Franchi, R. H. O. L. (2017) *Contribuições das tecnologías para ambientes de*

aprendizagem de Modelagem Matemática no Ensino Médio. Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática, X, Maringá 2017. Anais. Maringá: UEM, p. 1-13

Jacobini, O. R., & Wodewotzki, M. L. L. (2006) Uma reflexão sobre a Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática Crítica. *Bolema*, 25, 71-88.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006) A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, 38 (3), 302-310.

Skovsmose, O. (2005). *Educação Matemática Crítica: A Questão da Democracia.* Campinas: Papirus.

Skovsmose, O. (2007). *Educação Crítica - Incerteza, Matemática, Responsabilidade.* São Paulo: Cortez.

Skovsmose, O. (2008). *Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica.* Campinas: Papirus.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Propuesta de enseñanza: los recorridos del Sol.

Orfa Yanet **Quintero** Alzate
Institución Educativa El Corazón
Colombia
oryaquial@hotmail.com
Diana Marcela **Cadavid** Urrego
Colegio Santa Leoní Aviat
Colombia
cadavidu@gmail.com
Octavio Arley **Velásquez** Londoño
Institución Educativa Campo Valdés
Colombia
ovelasquez.iecampovaldes@gmail.com

Resumen

En este trabajo se hace una propuesta de enseñanza para las áreas de ciencias naturales y exactas, con la posibilidad de integrarse con otras áreas. Se hace uso de la geometría para construir un modelo que permita visualizar el recorrido del Sol en diferentes ciudades en los días de solsticios y equinoccios, esto con el objetivo de que el estudiante reconozca su entorno y lo lleve a leer una realidad que a veces parece lejana. Se desarrolla con estudiantes de grado undécimo de una institución privada del municipio de Copacabana (Ant). Se realiza una introducción a la actividad, un análisis del modelo y un trabajo conjunto para la construcción de la maqueta. Al final de este las estudiantes manifiestan agrado por la actividad debido a que logran encontrarle una finalidad, por ejemplo, a la construcción de rectas paralelas y perpendiculares al ver su aplicabilidad en situaciones reales.

Palabras clave: Paralelismo, perpendicularidad, latitud, solsticio, equinoccio, coordenadas, modelo geocéntrico.

Introducción

En la antigüedad se propusieron varios modelos del universo, pero solo uno surge como ganador dentro de todos estos, el modelo geocéntrico propuesto por Claudio Ptolomeo, que con el paso del tiempo es mejorado. Este modelo fue una estructura completa desde el punto de vista matemático, solo que la sencillez y, las diferencias en los cálculos con las mediciones hechas que se van presentando desde el siglo XVI con la creación de

instrumentos más precisos que los anteriores le dan mayor validez a un nuevo modelo, el heliocéntrico. La estructuración de un modelo a partir de la matemática le da validez y seriedad a este, pero en el ámbito educativo es necesario un modelo adicional que ayude a entender o visualizar como se presenta el modelo matemático. Por eso, a través de la historia es muy común encontrar instrumentos educativos (modelos representativos) que ayudan a entender cómo se ha llevado a cabo el proceso de creación y comprensión del conocimiento científico.

En los instrumentos que tradicionalmente se han utilizado para enseñar astronomía y matemática aplicada, como lo plantean Ten Y Monros, 1985; están la esfera armilar, el zócalo de Ptolomeo, el torquetum, la ballestilla, todos estos con el objetivo de facilitar la comprensión de la bóveda celeste.

En este trabajo se propone construir un instrumento que como los anteriores, ayude a la comprensión de un fenómeno físico periódico, como lo es el recorrido aparente del sol alrededor de la Tierra. Para este se recurre al modelo geocéntrico y se hace uso de conceptos geométricos como paralelismo, perpendicularidad, arco, circunferencia, área, ángulo; reflejando así la integración de diversas ciencias, en este caso, geometría y astronomía en función de un solo objetivo.

En el campo educativo, no cabe duda de la importancia del aprendizaje de la geometría para la comprensión de modelos matemáticos que describen un sinnúmero de fenómenos físicos que se observan en el Universo. Pero es, su tratamiento en la escuela el que presenta dificultades y al final de un proceso los resultados que evidencian los estudiantes quizás no son los esperados. Una de las recomendaciones es enfatizar en la construcción de significados de los contenidos geométricos a través de su utilidad, aquí los estudiantes deberán pasar de un control empírico a un control por parte del razonamiento, construyendo así el saber geométrico. (Gadino, 2007) Es tarea pues del docente, encontrar situaciones que busquen analogías, y generalizaciones donde se descubran aplicaciones en distintos contextos, se propende entonces desarrollar según Hoffer, 1981 (Bomone,Chiappero y Pellegrino, 2007) las habilidades en geometría como son: visuales, verbales, de dibujo, lógicas y de aplicación.

Con base en lo anterior, esta propuesta quiere evidenciar que lo que se enseña en la escuela puede tener una permanente aplicación en la vida real, buscando así que a medida que se comprenden y generalicen los conceptos geométricos los estudiantes podrán leer mejor su entorno.

Teniendo en cuenta los estándares básicos de aprendizaje, este trabajo se alinea con algunos de ellos en los que la geometría toma importancia para la modelación de situaciones física. Uno de estos es: "Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas", El estándar corresponde al pensamiento espacial y sistemas geométricos para el grado 9.

Objetivo general

Desarrollar una propuesta de enseñanza de los recorridos aparentes del Sol en el grado undécimo, haciendo uso de conceptos geométricos y teniendo como base al modelo geocéntrico.

Objetivos específicos

- Aplicar los teoremas de paralelismo y perpendicularidad de las rectas para generar planos paralelos.
- Relacionar la latitud de una ciudad con el recorrido del sol, teniendo presente el eje de rotación de la tierra.
- Construir una maqueta que permita la visualización de los recorridos aparentes del Sol en los días de solsticio y de equinoccio.
- Mostrar la interdisciplinariedad de la actividad propuesta.

Desarrollo de la propuesta

Contextualización:

Para el desarrollo de la actividad se elige el grado undécimo del Hogar y Colegio Santa Leoní Aviat, una Institución de carácter privada del municipio de Copacabana (Antioquia) que cuenta con 65 niñas internas, las cuales pertenecen al hogar debido a que poseen bajos recursos económico y sus familias no pueden estar con ellas por cuestiones laborales, porque viven en veredas alejadas de la Institución o porque quienes se hacen responsables de ellas no pueden tenerlas de tiempo completo en sus hogares.

Actividad previa:

Previo a la realización de la actividad, se hace un recuento de cómo se producen las estaciones del año y la importancia de los equinoccios y los solsticios para el inicio de estas. Para ello se hace una lluvia de ideas con los conocimientos de las estudiantes (ellas trabajaron el tema en octavo) y luego se proyecta un video para dejar claras las ideas fundamentales sobre los equinoccios y solsticios.

También con el apoyo de un globo terráqueo, se recuerda cuáles son las coordenadas terrestres y cómo obtener la latitud y longitud de determinada ciudad, centrándose en la latitud ya que es la coordenada que se utilizaría en la actividad. Las estudiantes quedan con el compromiso de consultar de alguna ciudad su latitud, clima y altura con el objetivo de analizar la relación de estas variables con la ubicación de la ciudad y de integrar otras áreas del conocimiento en la actividad.

Finalmente, se recuerda cómo construir rectas paralelas y perpendiculares con regla y compás, con el fin de que se puedan realizar construcciones precisas y que las estudiantes apliquen dichos conceptos en la construcción de modelos reales y encuentren significativo su aprendizaje.

Construcción de la maqueta:

Con la orientación de quienes desarrollamos esta propuesta y una guía diseñada previamente con las indicaciones para la construcción del modelo, las estudiantes organizadas en grupos de tres construyen sus maquetas, teniendo en cuenta ciudades que se encontraban en diferentes latitudes; esto con el fin de observar las trayectorias del sol en un mismo día pero en un lugar diferente de la tierra.

Con el desarrollo de la actividad, las estudiantes logran encontrarle una finalidad a la construcción de rectas paralelas y perpendiculares debido a que pueden ver su aplicabilidad en situaciones reales (poder generar planos paralelos para representar los solsticios de verano e invierno) y en áreas del conocimiento que son de su interés (la astronomía).

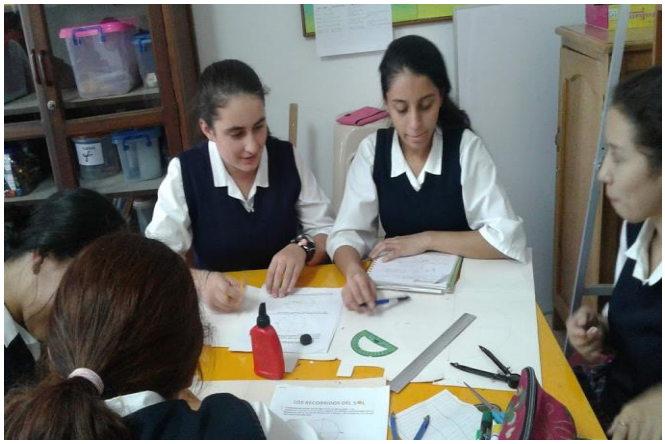



Figura 1 y 2. Proceso de construcción de la maqueta

Socialización y conclusiones:

Luego de que las estudiantes terminaran de construir sus modelos, se muestra cómo varía la duración del día en las diferentes ciudades de acuerdo con la latitud a la que se encuentran y se analiza cómo ésta se relaciona con el clima de dichos lugares y lo que implica la relatividad cuando se habla de los equinoccios y solsticios con respecto a los hemisferios terrestres.

Las estudiantes manifiestan asombro al observar sus trabajos debido a que logran comprender por qué en algunos lugares del mundo (como por ejemplo en Rusia, que lo vieron con la transmisión del mundial 2018) hay luz solar a las 8:00 pm.

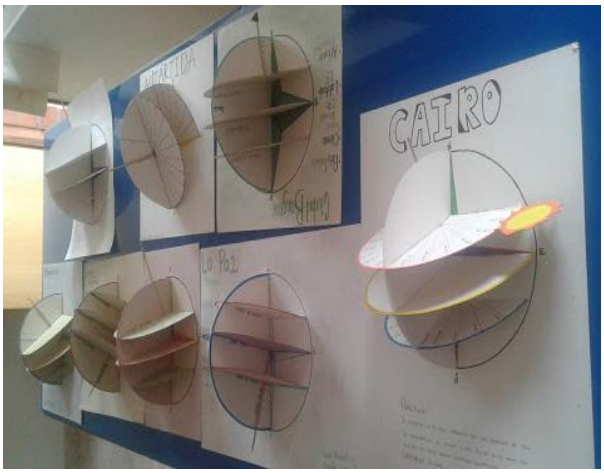



Figura 3 y 4. Momento de socialización

Conclusiones:

La construcción de la maqueta permitió mostrar a las estudiantes una de las aplicaciones reales que tienen los teoremas de paralelismo y perpendicularidad, aún teniendo en cuenta que la interpretación de la construcción era espacial, tomando así un nuevo sentido el uso de los conceptos geométricos estudiados en clase.

En el área de ciencias sociales se trabajan las coordenadas geográficas como puntos en la superficie del planeta desconociendo que están relacionadas con las coordenadas esféricas y que

son necesarias para comprender el recorrido aparente del Sol. A través de la maqueta se observa esta relación y la interdisciplinariedad para abordar un fenómeno.

Recomendación:

Posterior a este trabajo se puede hacer un abordaje matemático que relacione la latitud de una ciudad y el tiempo de presencia del Sol por encima del horizonte local.

Referencias y bibliografía

Baena Ruiz, J., Coriat Benarroch, M., Marín del Moral, A & Martínez López, P.S. (1996). La esfera. Editorial Sintes. Barcelona. 79-94

Bomone, I. M., Chiappero, M. C & Pellegrino, M. A. (2007). Enseñar geometría: necesidad y desafío. *Revista Novedades Educativas, 195, 63-65.*

Gadino, A. (2007). Geometría en la escuela: El cuánto, el para qué, el qué y el cómo. *Revista Novedades Educativas, 195, 58-62.*

Monros, M. A., Ten, A. E. (1985). Historia y enseñanza de la astronomía, II. La posición de los cuerpos celestes. *Revista enseñanza de las ciencias, Vol 3, 47-56.*

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A (re) construção de saberes matemáticos proporcionada pela metodologiade Ensino-Aprendizagem-Avaliação de derivadas através da Resolução de Problemas

Erica Marlúcia Leite **Pagani**
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Brasil
ericapagani@terra.com.br

Resumo

Este artigo é um recorte dos resultados de uma tese de doutorado em que se investigoucomo ocorre o ensino e a aprendizagem de derivadas no contexto da Resolução de Problemas. A pesquisa é qualitativa e foi desenvolvida por meio da observação participante e análise documental, numa turma de 2º ano do Ensino Médio integrado ao Técnico. Assumimos a concepção de resolução de problemas como um ponto de partida para ensinar Matemática, entendida como um meio de(re)construir conhecimentos a partir de anteriores e ao longo do processo de resolução de um ou mais problemas.Assim é considerada como uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação permitindo que o aluno possa construir seu próprio aprendizado com compreensão e significado. Retratamos alguns episódios ocorridos durante a realização das atividades e apresentamos recortes que nos permitiram perceber como a (re)construção de conhecimentos é favorecida ao se ensinar derivadas através da resolução de problemas.

Palavras chave: Educação Matemática, resolução de problemas, ensino profissionalizante,derivadas, (re)construção de saberes.

Introdução

Este trabalho apresenta parte dos resultados de uma tese de doutorado desenvolvida com estudantes do 2º ano do Ensino Médio integrado ao Técnico do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), na qual investigamos como ocorre o ensino-aprendizagem-avaliação de derivadas através da Resolução de Problemas.

Julgamos adequado,primeiramente,ouvir professores e alunos do curso técnico de Eletrônica sobre a importância dos conteúdos de Cálculo na grade curricular e sobre suas aplicabilidades na área técnica. Nesse sentido, uma das nossas primeiras ações de pesquisa foi conhecer, através de questionários, o que professores das disciplinas técnicas e alunos do 3º ano do curso técnico de Eletrônica têm a dizer sobre a utilização dos conteúdos de Cálculo em disciplinas da área técnica de Eletrônica (Pagani, Allevato, 2014a). Através das vozes desses

professores e alunos constatamos que o ensino de derivadas[1] e integrais no Ensino Médio Técnico de Eletrônica do CEFET-MG realmente se fazia necessário e carecia de atenção.

O grupo que participou da pesquisa desenvolvida em sala de aula era composto por 34 alunos que desenvolveram as atividades em duplas. Eram alunos de 16 e 17 anos de idade, que cursavam as disciplinas técnicas no período da manhã e as disciplinas do núcleo comum, como a Matemática, no turno da tarde. Não havia nesse grupo alunos que estivessem repetindo a série, de maneira que os conteúdos relativos a derivadas eram, até então, supostamente desconhecidos pelos mesmos.

Metodologia da pesquisa

Este trabalho se inserenuma pesquisa de abordagem qualitativa realizada por meio da observação participante e da análise documental.

A pesquisa qualitativa tem como principal objetivo compreender os fenômenos que se observa, favorecendo o enfoque interpretativo e presumindo que o conhecimento vai se (re)construindo constantemente nas relações estabelecidas entre os sujeitos de pesquisa. Não se preocupa com a representatividade numérica dos dados, nem trabalha com instrumentos estatísticos ou regras. Ao contrário, esse tipo de abordagem enfatiza a descrição e a indução (Bogdan; Biklen, 1994).

Na pesquisa que realizamos, a partir da proposição de problemas (problema gerador) os alunos eram estimulados a construir conhecimentos sobre derivadas, recorrendo, inicialmente, aos seus conhecimentos de Matemática. Os alunos trabalharam em grupos (duplas), discutiram processos de resolução do problema, analisaram as soluções, sempre estimulados e orientados pela professora pesquisadora. A professora pesquisadora também pode avaliarcontinuamente o ensino e a aprendizagem, adequando e reformulando os problemas, quando necessário. Dessa forma é que entendemos que a investigação que aqui relatamos se insere na modalidade de pesquisa participante.Os documentos utilizados para obtenção de informações são os manuscritos com os registros das resoluções dos problemas propostos aos alunos e que foram entregues à professora pesquisadora.

O ensino e aprendizagem de Cálculo

A partir do nosso interesse no ensino e na aprendizagem de Cálculo, julgamos conveniente fazer um levantamento de algumas teses e dissertações (Pagani; Allevato, 2014b) que, de alguma forma, abordassem esse tema, a fim de construirmos um balanço que apontasse os rumos que as pesquisas estão seguindo e quais contribuições têm trazido em seus textos.

Como era de se esperar, este mapeamento realizado apontou que, apesar de existirem alguns trabalhos que discutem o Cálculo no Ensino Médio, a maior parte das pesquisas discute o Cálculo no âmbito do Ensino Superior. Esse mapeamento nos levou a perceber que as dificuldades existentes no ensino e na aprendizagem de Cálculo, evidenciadas pelos altos índices de reprovação nos cursos iniciais, constituem a principal motivação para a realização dos trabalhos analisados.

Observamos, na literatura pesquisada, que o debate sobre o ensino e a aprendizagem de conteúdos e ideias básicas do cálculo no ensino médio ainda é bastante limitado. Todavia, há

[1]Quando usamos a palavra derivadas, estamos nos referindo a derivadas de funções reais de uma variável real

consenso quanto ao ensino de ideias e elementos do Cálculo no Ensino Médio ser bastante pertinente nos dias de hoje, uma vez que esses conteúdos podem estar ao alcance de alunos desse nível de ensino e que o cálculo é uma disciplina de relevante importância no desenvolvimento da ciência e da tecnologia.

Os estudos realizados apontam que as discussões sobre o ensino e a aprendizagem de conteúdos de Cálculo no Ensino Médio ainda carecem de atenção e reforçaram nossa proposta de investigar novas metodologias que favoreçam o ensino-aprendizagem de derivadas nesse nível de ensino. Vale ressaltar que não encontramos na literatura pesquisada trabalhos que investiguem o ensino de Cálculo no contexto do Ensino Médio Técnico. Isso nos levou a crer que há carência de investigações sobre o ensino de Cálculo na Educação Básica.

O ensino de Matemática através da Resolução de Problemas

As investigações sobre Resolução de Problemas surgem com George Polya, na década de 1940 e ressurgem na década de 1970, após o declínio da Matemática Moderna e, no fim desse período, a Resolução de Problemas emerge na Educação Matemáticae é caracterizada por considerar o aluno, no processo de ensino e aprendizagem, um ser ativo, e por primar pela construção do conhecimento, e não pela simples repetição de técnicas e algoritmos.

A partir da década de 1980, principalmente, foram feitos grandes esforços no sentido de desenvolver materiais e currículos que pudessem favorecer o trabalho com Resolução de Problemas na Matemática. Esses esforços foram e continuam sendo úteis para ajudar os professores interessados em tornar a Resolução de Problemas o foco em suas salas de aulas. Entretanto, isso não foi suficiente para que esse trabalho em sala de aula atingisse o sucesso desejado, e isso se deve, provavelmente, à pouca ou quase nenhuma concordância entre as diferentes formas de se trabalhar com Resolução de Problemas sendo ela o foco da matemática escolar (Onuchic, 1999; Schroeder e Lester, 1989). Uma das maneiras de distinguir essas diferentes concepções sobre Resolução de Problemas, apresentada por Hatfield (1978 apud Shroeder, Lester, 1989, p. 32) e ratificada por Schroeder e Lester (1989),continua presente no ambiente de ensino, sendo elas: (1) Ensinar **sobre** a Resolução de Problemas,(2) Ensinar (Matemática) **para** a Resolução de Problemas,(3) Ensinar (Matemática) **através** da Resolução de Problemas.

Assumimosque problema é "tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em fazer"(Onuchic; Allevato, 2011, p. 81) e conduzimos o trabalho em sala de aula sob a perspectivada terceira concepção, em que a resolução de problemas é considerada como um ponto de partida para ensinar Matemática, entendida como um meio de se obter novos conhecimentos a partir de anteriores ou ao longo do processo de resolução de um ou mais problemas.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas é uma perspectiva de ensino que está apoiada na tríade ensino-aprendizagem-avaliação e que utiliza o problema para desenvolver a construção do conhecimento de algum conceito matemático de forma que o aluno possa construir seu próprio aprendizado com compreensão e significado.O ensino-aprendizagem de tópicos matemáticos começa a partir de um problema, que seja útil ao desenvolvimento do conteúdo; ou seja, que contenha aspectos fundamentais desse tópico matemático que se quer trabalhar em aula. Encaminhamos as atividades em sala de aula

segundo essa metodologia, utilizando 9 (nove) etapas apresentadas por Allevato e Onuchic (2009): 1) Preparação do problema- Selecionar o problema visando a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado de problema gerador. 2) Leitura individual. 3) Leitura em conjunto-Formar grupos (duplas) e solicitar a leitura do problema. 4) Resolução do problema- Os alunos, em seus grupos, buscam resolvê-lo. 5) Observar e incentivar- O professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. 6) Registro das soluções na lousa-representantes dos grupos registram na lousa, suas soluções. 7) Plenária-Para essa etapa todos os alunos são convidados a discutirem as diferentes soluções registradas na lousa pelos colegas. 8) Busca do consenso- Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto. 9) Formalização do conteúdo-Neste momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formal"- organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema.

Saberes matemáticos e (re)construção de conhecimentos

As atividades realizadas pelos alunos e as respostas às mesmas registraram episódios que nos levaram a estruturar a análise e a discussão dos dados segundo categorias seguintes, dentre elas, os saberes matemáticos e (re)construção de conhecimentos.Não discutiremos aqui todas as atividades realizadas pelos alunos, e sim, recortes das resoluções entregues por eles. Analisando os protocolos entregues pelos alunos, esses recortes foram escolhidos por realçarem elementos e episódios que evidenciam saberes matemáticos e estratégias utilizadas pelo grupo de alunos para construírem o conceito de derivadas e reconstruírem outros.Para realizarmos o trabalho, cujo objetivo principal era desenvolver o conceito de derivada de uma função, iniciamos com problemas que tratavam do conceito de taxa de variação média, como a seguir, apresentado na figura 01:

Um corpo em movimento retilíneo inicia seu movimento num instante t=0. A Tabela I informa sua posição em cada instante t da sua trajetória:

Tempo (t) em segundos	Posição (s) em metros
0	0
1	$1/4 = 0{,}25$
2	1
3	$9/4 = 2{,}25$
4	4
5	$25/4 = 6{,}25$

Tabela I

A partir das informações acima, registre na segunda coluna da Tabela II o valor (em metros) da distância percorrida pelo corpo por segundo em cada intervalo de tempo Δt :

Tempo (Δt) em segundos	Deslocamento por segundo (em média)
de t=0 a t=1	
de t=0 a t=2	
de t=2 a t=5	
de t=1 a t=4	
de t=0 a t=5	

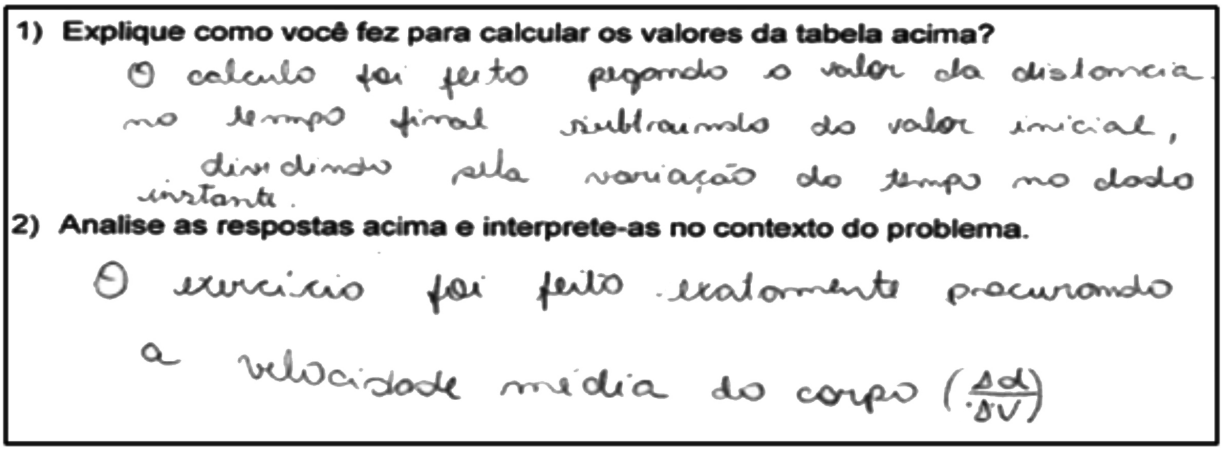
Tabela II

1) Explique como você fez para calcular os valores da tabela acima.
2) Analise as respostas acima e interprete-as no contexto do problema.

9.

Figura 01. Problema 01/atividade 01

Nos protocolos analisados, observamos que todos os alunos entenderam o que foi solicitado na Tabela II e, desconsiderando os pequenos erros de cálculo, realizaram essa parte da atividade corretamente. Entretanto, ao responderem os itens 1 e 2 deste problema, apresentaram respostas como as das figuras 2 e 3 a seguir.


1) **Explique como você fez para calcular os valores da tabela acima?**

O calculo foi feito pegando o valor da distancia no tempo final subtraindo do valor inicial, dividindo pela variação do tempo no dado instante.

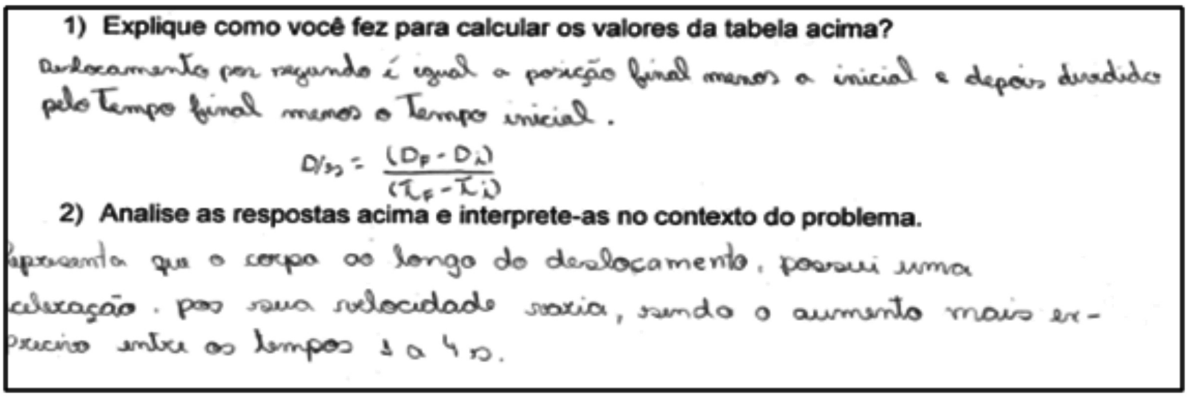
2) **Analise as respostas acima e interprete-as no contexto do problema.**

O exercicio foi feito exatamente procurando a velocidade média do corpo ($\frac{\Delta d}{\Delta V}$)

Figura 02

Percebemos nas respostas da figura anterior que a dupla conseguiu descrever corretamente como resolveu essa parte do problema. Em seguida, relacionou o deslocamento por segundocalculado à velocidade média do corpo, embora cometendo um pequeno erro ao representar essa velocidade por $\frac{\Delta d}{\Delta V}$ao invés de $\frac{\Delta d}{\Delta t}$.

Outros participantes procederam da mesma maneira para realizarem os cálculos, entretanto, foram além ao responderem o item 2.


1) **Explique como você fez para calcular os valores da tabela acima?**

Deslocamento por segundo é igual a posição final menos a inicial e depois dividido pelo Tempo final menos o Tempo inicial.

$$D/s_2 = \frac{(D_f - D_i)}{(T_f - T_i)}$$

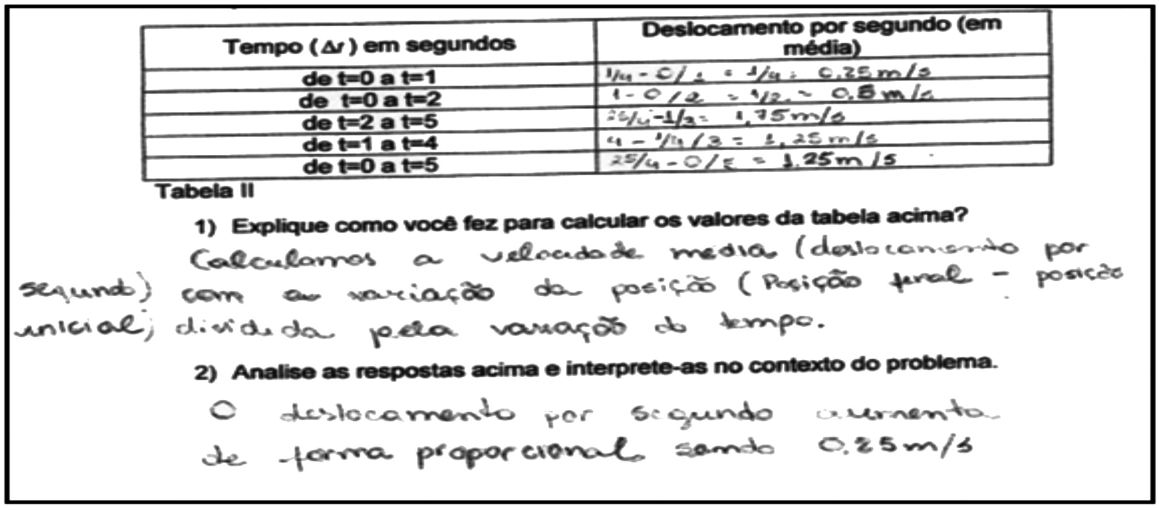
2) **Analise as respostas acima e interprete-as no contexto do problema.**

Apresenta que o corpo ao longo do deslocamento, possui uma aceleração. pois sua velocidade varia, sendo o aumento mais expressivo entre os tempos 3 a 4 s.

Figura 03

A resposta do item 1, apresentada por essa dupla, também reflete a compreensão de que o deslocamento solicitado é dado pela variação do deslocamento dividido pela variação do tempo no intervalo dado. Ao responderem o item 2, os integrantes da dupla deixaram claro que associaram esse deslocamento à velocidade média e perceberam a variação da velocidade média, associando-a à aceleração positiva do objeto. O problema permitiu aos alunos perceberem detalhes das variações, variações nas variações, que ocorreram nessa situação relacionada ao deslocamento de um corpo. Isso indica que o aluno foi mostrando "frações" do seu

conhecimento construído durante o processo de ensino de derivadas através da Resolução de Problemas. Percebemos aí momentos em que os alunos tentaram relacionar o conteúdo matemático com outros, como os da Física, o que sugere que essa associação é facilitada pela metodologia de ensino através da Resolução de Problemas, pois ela permitiu ao aluno se expressar em cada uma das etapas propostas e utilizadas nesta pesquisa para encaminhar as atividades em sala de aula. Agora apresentamos outras respostas na figura 04 a seguir:



Tempo (Δt) em segundos	Deslocamento por segundo (em média)
de t=0 a t=1	1/4 - 0/1 = 1/4 = 0,25 m/s
de t=0 a t=2	1 - 0/2 = 1/2 = 0,5 m/s
de t=2 a t=5	25/4 - 1/2 = 1,75 m/s
de t=1 a t=4	4 - 1/4/3 = 1,25 m/s
de t=0 a t=5	25/4 - 0/5 = 1,25 m/s

Tabela II

1) Explique como você fez para calcular os valores da tabela acima?

Calculamos a velocidade media (deslocamento por segundo) com a variação da posição (Posição final - posição inicial) dividida pela variação do tempo.

2) Analise as respostas acima e interprete-as no contexto do problema.

O deslocamento por segundo aumenta de forma proporcional sendo 0,25 m/s

Figura 04

Esta figura retrata que alguns alunos, na tentativa de encontrarem padrões nas respostas, que lhes permitissem estabelecer relações com os conteúdos apre(e)ndidos no decorrer da trajetória escolar, cometeram enganos que nos fizeram retomar conceitos, como o de proporcionalidade, a fim de sanar as dúvidas que se apresentavam.

As respostas deste protocolam mostram que a dupla realizou corretamente os cálculos do deslocamento médio; no entanto, ao interpretá-lo no contexto do problema, "percebeu" que entre algumas linhas da Tabela II havia uma variação de 0,25. Com isso, acreditaram, erroneamente, que essa "regularidade" indicava uma relação de proporcionalidade. Ao recolhermos as atividades, convidamos essa dupla para registrar sua resolução na lousa, colocando-a para reflexão com os demais alunos, em plenária. Isso proporcionou um debate bastante produtivo sobre o conceito de proporcionalidade e nos deu a oportunidade de esclarecer aos alunos, ainda que rapidamente, o que são grandezas direta e inversamente proporcionais. Após sanarmos as dúvidas, destacamos a definição formal de proporcionalidade.

Desse modo, o momento da plenária nos oportunizou esclarecer dúvidas, tanto com relação a conhecimentos prévios quanto com relação ao novo conteúdo que estava sendo construído, além de nos permitir mostrar a necessidade e a relevância de uma escrita matematicamente correta. A professora pesquisadora salientou a importância dos alunos se expressarem, de questionarem e de ajudarem todo o grupo a chegar a um consenso sobre a resposta correta. Paraconcluir o trabalho com o Problema 01/Atividade 01, a professora pesquisadora formalizou a definição de taxa de variação média de uma função num intervalo dado.

.Além disso, como já mencionado anteriormente, os alunos também já tinham conhecimento sobre velocidade e aceleração de um corpo. Observamos que o ensino de derivadas através da Resolução de Problemas permitiu que esses alunos identificassem

conhecimentos anteriores e promovessem relações entre a Física e a Matemática. Dessa forma, foram construindo novos conhecimentos, (re)construindo outros e, nesse movimento, identificaram relações entre conteúdos de Matemática ou entre conteúdos de Matemática e outras áreas do conhecimento.

Retratamos alguns momentos ocorridos durante a realização das atividades e apresentamos recortes que nos permitiram perceber como a (re)construção de conhecimentos é favorecida ao se ensinarem derivadas através da Resolução de Problemas.

Considerações Finais

Este trabalho teve origem nas inquietações a respeito do ensino e da aprendizagem de derivadas, que surgiram no decorrer da minha trajetória pessoal e profissional. Como professora de Matemática do Ensino Médio integrado ao Técnico no CEFET-MG, observei e vivenciei dificuldades no processo de ensino-aprendizagem desses conteúdos durante muitos anos.

Fundamentadas em nossos estudos sobre a Resolução de Problemas, em particular sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, planejamos as atividades sobre derivadas a serem desenvolvidas em sala de aula. Essa metodologia considera o problema, aqui chamado de problema gerador, como recurso inicial e um meio através do qual o aluno vai (re)construir conhecimentos. Inicialmente, foram elaborados 17 problemas geradores que, por vezes, foram reelaborados durante o processo a fim de atender às demandas de sala de aula.

Ao desenvolvermos as atividades em sala de aula utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, buscamos entender que contribuições o uso dessa metodologia traz para o trabalho com derivadas no Ensino Médio integrado ao Técnico. O desenvolvimento das atividades seguiu as 9 (nove) etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2009), em cujo processo o professor se apresenta como mediador na construção de conhecimentos.

Apesar das dificuldades e desconfianças iniciais dos alunos, vivenciamos uma experiência muito rica com esse trabalho. Presenciamos os alunos construindo gradativamente seus conhecimentos sobre derivadas, tendo o problema como ponto de partida para o ensino, para a aprendizagem e formalização do conteúdo.

Uma das metas deste trabalho era promover oportunidades aos alunos de construção de conhecimento, possibilitando-lhes questionar e entender seus próprios pensamentos. Nesse sentido, a metodologia utilizada para desenvolver o conteúdo de derivadas em sala de aula foi de fundamental importância, pois, ao utilizar o problema como veículo para aprendizagem, o aluno passa a ser protagonista desse processo.

Após o trabalho realizado com os problemas que envolviam cálculos, interpretação geométrica, reflexões sobre notação e linguagem matemática, a definição de derivada de uma função num ponto foi recebida com naturalidade pelos alunos, que perceberam a relação entre ela e os aspectos discutidos no decurso das atividades. Isso nos faz acreditar que trilhamos um percurso que favorece o processo de construção de conhecimentos.

Referências

Allevato, N.S.G. ; Onuchic, L. R. (2009) *Ensinando matemática na sala de aula através daresolução de problemas*. Boletim GEPEM**,** Rio de Janeiro, ano 31, n. 55, p. 133-154. Disponível em http://www.ufrrj.br/SEER/index.php/gepem/article/view/54/87. Acesso em 26 de set. 2015.

Bogdan, R. C., Biklen, S. K.(1994)*Investigação Qualitativa em Educação Matemática: umaintrodução à teoria e aos métodos***.** Lisboa: Porto Editora.

Onuchic, L. R. (1999). *Ensino-Aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In:Bicudo, M. A. V.(Ed.) Pesquisa em educação matemática. UNESP, São Paulo, Brasil.p.199-220.

Onuchic, L. R. ; Allevato, N. S. G. (2011) *Pesquisa em resolução de problemas: caminhos*, *avanços e novas perspectivas*. Bolema**,** Rio Claro, ano 25, n. 41, p. 73-98.

Pagani, E. M. L; Allevato, N. S. G. (2014a) *Derivadas e integrais no ensino médio integrado aotécnico*: o que pensam professores e alunos. Disponível emhttp://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/epd/issue/view/44/showToc.Acesso em: 25 de set. 2015

Pagani, E. M. L; Allevato, N. S. G. (2014b) *Ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral: um mapeamento de algumas teses e dissertaçõesproduzidas no Brasil*Revista VIDYA, Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 61-74, 2014. Disponível emhttp://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/42/166. Acesso em: 07 de jun. 2015

Schroeder, T. L.; Lester Jr, F. K. (1989)*Developing and Understanding in Mathematics via Problema***Solving.** In: TRAFTON, P. R. ; SHUTLE A. P. (ed.). New Directions for Elementary School Mathematics. Reston: NCTM, p. 31-42.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Elementos de prueba en geometría euclidiana en ambiente de papel-y-lápiz: estudio con alumnos de bachillerato

José Luis **López** Hernández
Escuela Nacional Preparatoria Antonio Caso, UNAM
México
jose.lopez@enp.unam.mx

Resumen

En este artículo reportamos las pruebas y argumentaciones dadas por 15 estudiantes de bachillerato (16-17 años de edad) al resolver problemas de congruencia de triángulos, en ambiente de papel-y-lápiz y tecnológico cabri-géomètre; sin embargo, aqui sólo son reportadas aquellas en ambiente estático. Los estudiantes resolvieron individualmente los problemas y al término de la solución de cada uno de estos, el profesor del grupo abrió una discusión plenaria, cuyo objetivo fue que los estudiantes dieran a conocer la forma en que ellos los habían resuelto. Las pruebas y argumenatciones dadas por los estudiantes, de los nueve problemas que les fueron propuestos, coinciden con las reportadas en la literatura de investigación relacionada con este tema. Nuestros resultados sugieren que los estudiantes, con frecuencia, en sus pruebas y argumentaciones se apoyan en evidencias empíricas, intuiciones e incluso en experiencias personales surgidas de las figuras geométricas que les fueron proporcionadas en los problemas.

Palabras clave: Prueba, geometría, congruencia, resolución de problemas.

Introducción

Desde hace aproximadamente 40 años, se ha venido discutiendo la pertinencia o no de incluir el tema de la demostración en el currículo de matemáticas de los niveles básicos (secundaria y bachillerato). Es cierto que no todos los temas de matemáticas de estos niveles educativos necesitan de una prueba formal; sin embargo, cuando los estudiantes inician el estudio de temas de geometría euclidiana ciertos resultados o problemas contenidos en sus libros de texto, requieren que los estudiantes den argumentos de porqué cierta propiedad geométrica es válida. Gran parte de los estudiantes de estos niveles educativos no se interesa en comprender, o bien en aprender cómo demostrar ciertas proposiciones de geometría euclidiana, pues para ellos las propiedades geométricas y algunas proposiciones, dado que son apoyadas en figuras, suelen ser evidentes.

Marco conceptual

La literatura de investigación relacionada con la demostración en matemáticas, y en el ámbito educativo es extensa. Por limitaciones de espacio, en este documento sólo incluimos algunas referencias bibliográficas; cuyo énfasis es la prueba y la argumentación dadas por los

estudiantes en los diversos niveles educativos. Por ejemplo, Van Dormolen (1977, citado por Ibañes & Ortega, 2005, p. 25), se refiere a tres niveles de demostración, dados por los estudiantes; tales niveles son: a) nivel cero; caracterizado porque el estudiante se enfoca únicamente en objetos concretos, b) nivel uno, se caracteriza porque el estudiante piensa en objetos como representantes de una clase, c) nivel dos; en este nivel el estudiante es capaz de generalizar. Bell (1976) propuso tres propósitos de la demostración; ellos son: verificación, iluminación y sistematización; de Villiers (1993, citado por Ibañes & Ortega, 2005, p. 29) comenta dos funciones de la demostración: descubrimiento y comunicación; por su parte, Balacheff (1987) menciona dos tipos de demostraciones en que los estudiantes utilizan los ejemplos: las pragmáticas, basadas en la *ostensión*; en este tipo de prueba, los estudiantes recurren a la acción y a ejemplos concretos, y las intelectuales; apoyadas éstas en la formulación de las propiedades matemáticas puestas en juego y en las relaciones que existen entre ellas. A su vez, las demostraciones pragmáticas se subdividen en varios tipos: el empirismo ingenuo, la experiencia crucial, el ejemplo genérico y la experiencia mental. Siñeriz y Ferraris (2005), Van Ash (1993, citado por Ibañes & Ortega, 2005, p. 26) y Hanna (1990), entre otros, han contribuido también al estudio y desarrollo de la prueba, de acuerdo con el tipo de lenguaje y grado de formalidad utilizados.

Más allá de los diferentes procesos de argumentación y prueba utilizados por los estudiantes para justificar los resultados en geometría, existe la problemática relacionada con los diversos tipos de interpretación de una representación geométrica, en la que el razonamiento y la visualización son aspectos de suma importancia, tal como son discutidos por Camargo, Perry y Samper (2005) y por Palais (1999). Atendiendo a la problemática antes bosquejada, en esta investigación nos planteamos el siguiente objetivo: Explorar la función de la tarea en ambiente de papel-y-lápiz en la demostración. Es decir, cómo la tarea sugerida por el profesor, motiva y hace ver la necesidad de probar resultados. En este artículo, pretendemos dar respuesta a la pregunta: ¿Qué tipos de pruebas emergen durante las soluciones dadas por los estudiantes a problemas geométricos de congruencia de triángulos?

Metodología

Descripción de la población

Este estudio se llevó a cabo con 15 estudiantes (16-17 años de edad) de segundo año de una escuela preparatoria ubicada en la Ciudad de México. Los estudiantes no tenían experiencia en cómo llevar a cabo demostraciones en geometría. Durante tres sesiones de trabajo (la primera de una hora y las otras dos de dos horas, cada una de ellas, fueron conducidas por el autor del presente artículo), los estudiantes resolvieron problemas de geometría euclidiana; que incluyeron tareas como: reconocimiento de figuras, construcciones geométricas, uso de teoremas y criterios de congruencia de triángulos, así como la validación de sus resultados. Debido a problemas de espacio, en este artículo sólo documentamos el trabajo de siete estudiantes; cuyas demostraciones ejemplifican los diversos tipos de demostraciones reportados en la literatura de investigación.

Selección y modificación de los problemas

Del libro Geometría Plana y del Espacio (Wentworth & Smith, 1979), fueron elegidos nueve problemas de congruencia de triángulos; estos problemas fueron modificados en cuanto a su redacción original. Fue llevada a cabo la solución *a priori* de los problemas propuestos a los

estudiantes; tales soluciones tienen el objetivo de prever las posibles pruebas y argumentaciones de los estudiantes.

Implementación de los problemas y acopio de datos

Se dispuso de 10 a 15 minutos para la resolución de cada problema (de manera individual), y de algunos minutos para la discusión grupal; conducida por el investigador. Se cuenta con el registro de los nueve problemas de la actividad, con sus respectivas respuestas dadas por cada uno de los estudiantes, usando papel y lápiz, así como las videograbaciones del trabajo individual y de la discusión grupal.

En seguida, son mostrados cuatro problemas (la numeración de estos no significa el orden en que fueron propuestos) así como las pruebas y argumentaciones que dieron los estudiantes.

Problema 1: En el cuadrado $\square ABCD$ [1] (Figura 1), P es punto medio de $\overline{AB}$. Prueba que $\overline{PC} = \overline{PD}$.

Ejercicio 4

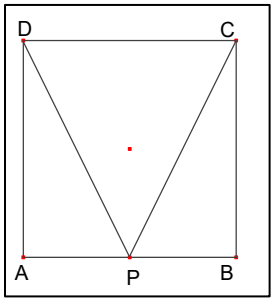


Figura 1.Cuadrado y triángulos.

Estudiante A2. Argumentación deductiva formal.

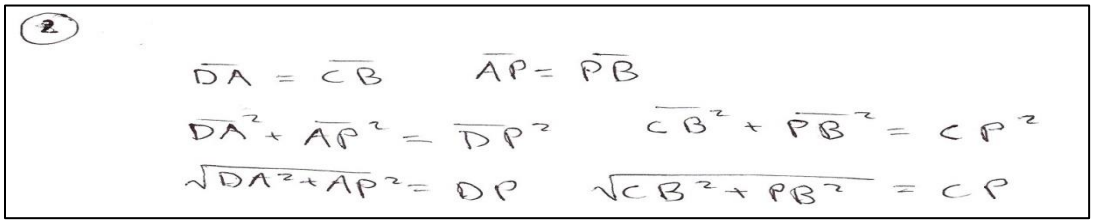


Figura 2. Uso del Teorema de Pitágoras.

La Figura 2 muestra el uso de las hipótesis del problema: dado que $\overline{DA} = \overline{CB}$ y $\overline{AP} = \overline{PB}$, al utilizar el *Teorema de Pitágoras* se concluye que $\overline{PC} = \overline{PD}$.

[1] $\square ABCD$ es cualquier cuadrado cuyos vértices son A, B, C y D.

Estudiante A4. Explicación por evidencia.

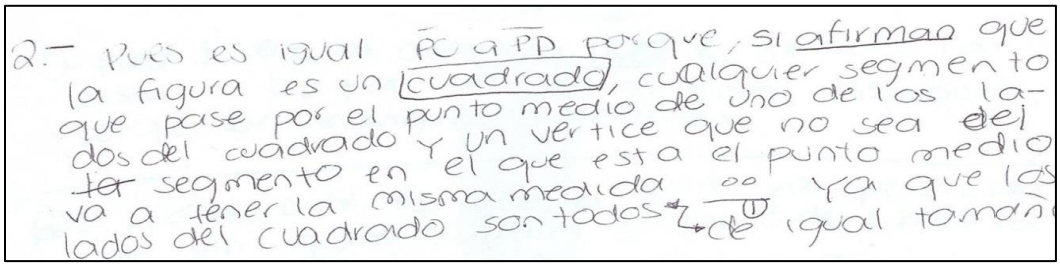


Figura 3. Argumentación apoyada en evidencias.

Como se muestra en la Figura 3, el estudiante afirma que los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$ miden lo mismo, únicamente por el hecho de que la figura, cuyos vértices son A, B, C y D es un cuadrado, pero no da argumentación alguna.

Estudiante A5. Explicación por dibujo.

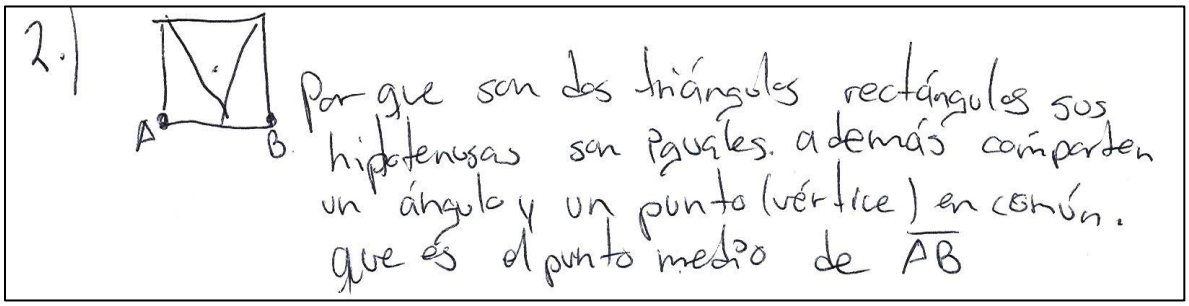


Figura 4. Afirmaciones apoyadas en la figura.

Como se muestra en la Figura 4, el estudiante afirma que $\overline{PC} = \overline{PD}$, porque observa que P es punto medio de uno de los lados del cuadrado y que se forman triángulos rectángulos, cuyos lados son lados del cuadrado. Sólo afirma sin argumentar.

Estudiante A11. Prueba por visualización.

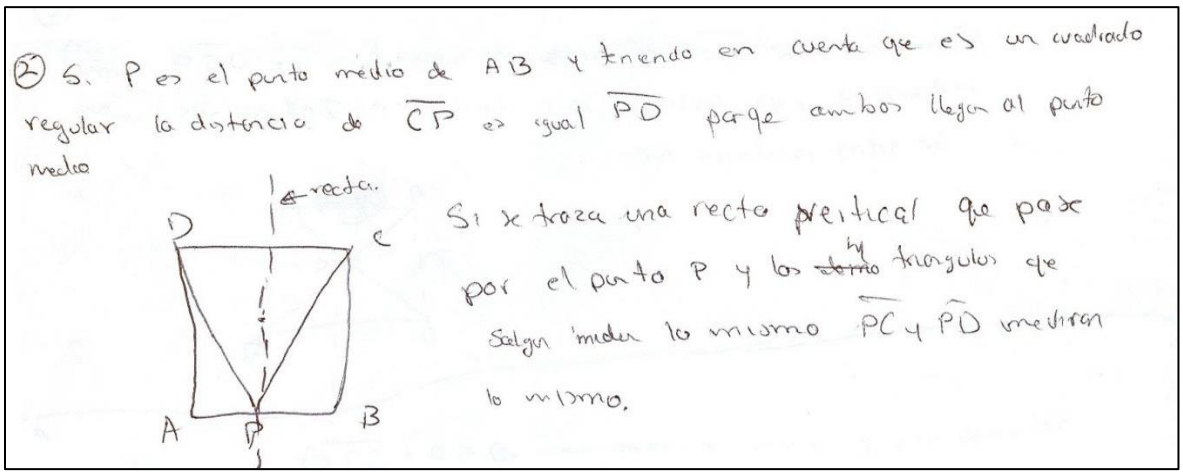


Figura 5. Argumentos apoyados en la visualización de la figura.

La Figura 5 permite observar que el estudiante se enfoca en los elementos de la representación gráfica, y construye la recta auxiliar que pasa por P, para obtener cuatro triángulos congruentes, lo cual le ayuda a concluir que $\overline{PC} = \overline{PD}$.

Problema 2: En la Figura 6, $\overline{AC} = \overline{BC}$ y $\overline{AD} = \overline{BD}$. Prueba que $\measuredangle CBD = \measuredangle DAC$.

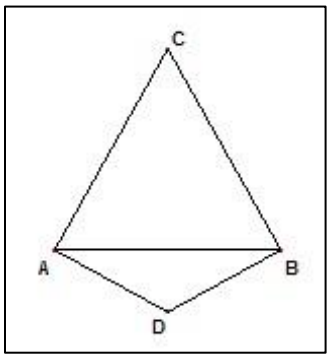


Figura 6. Cuadrilátero y triángulos.

Estudiante A2. Argumentación deductiva coloquial.

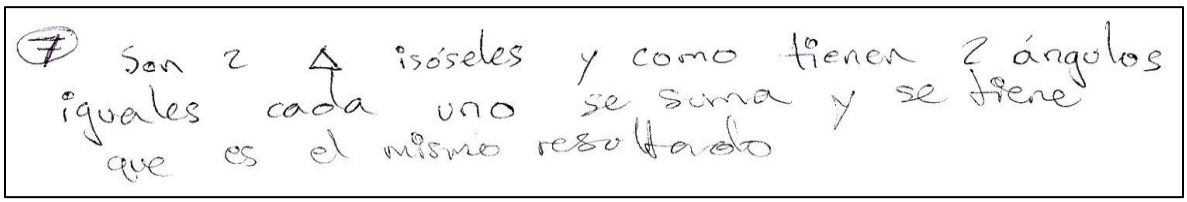


Figura 7. Argumentos apoyados en la figura dada mediante el uso de lenguaje coloquial no claro.

De acuerdo con la Figura 7, el estudiante utiliza un lenguaje coloquial para argumentar la validez de la proposición a partir de las propiedades de los triángulos isósceles. Así mismo, parece deducir que los ángulos de interés son iguales porque los ve como la misma suma de dos ángulos; sin embargo, la manera de escribir sus ideas no es clara.

Estudiante A11. Explicación coloquial.

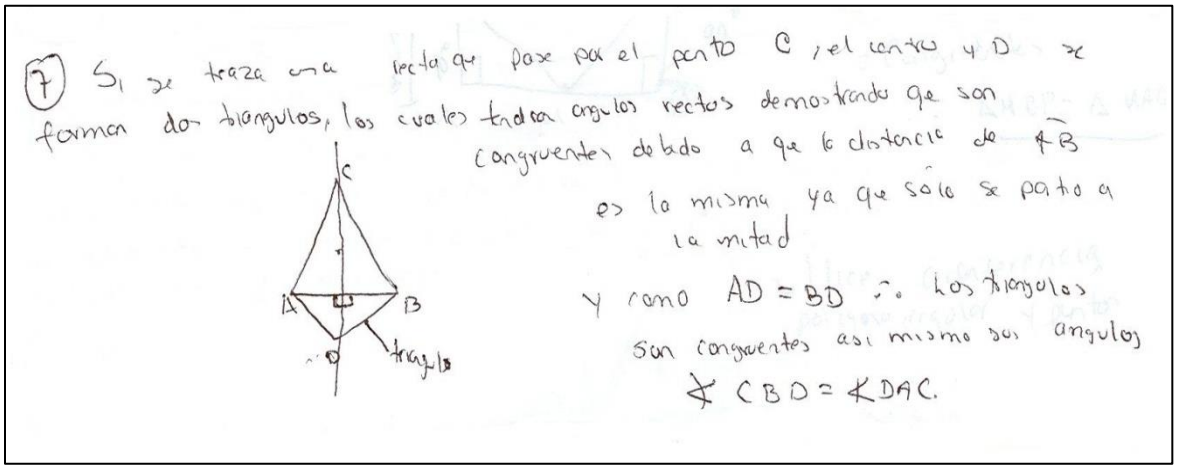


Figura 8. Argumentación apoyada en acciones evidentes.

De acuerdo con la Figura 8, el estudiante utiliza un lenguaje coloquial para probar la afirmación. Él traza la recta auxiliar $\overline{CD}$ que corta a $\overline{AB}$ en su punto medio de manera perpendicular, y como $\overline{AD} = \overline{BD}$, concluye (por el criterio LLL) que $\Delta\, ADC$ [2] es congruente a $\Delta\, BDC$.

Problema 3: En $\Delta\, ABC$ equilátero (Figura 9), P y Q son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Prueba que $\overline{AP} = \overline{BQ}$.

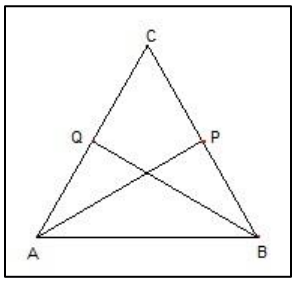


Figura 9. Triángulos.

Estudiante A10. Explicación por evidencia.

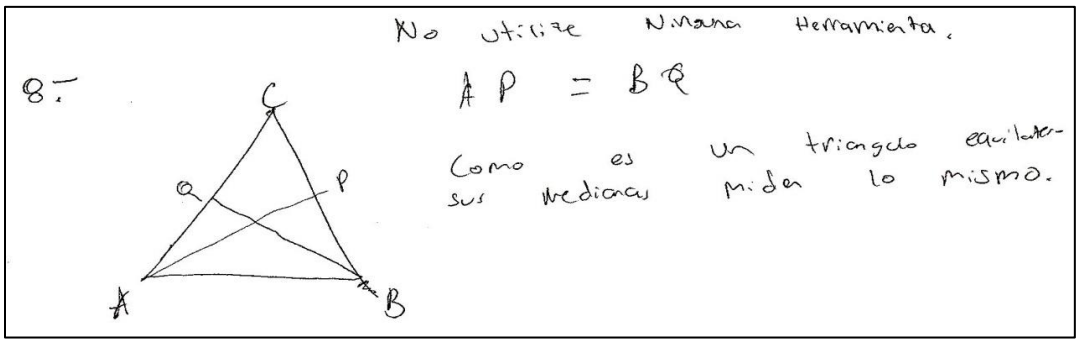
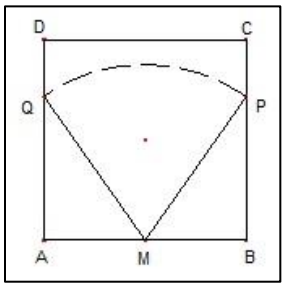


Figura 10. Argumentación apoyada en evidencias.

De acuerdo con la Figura 10, el estudiante afirma que las medianas tienen la misma longitud por el solo hecho de que el triángulo es equilátero. No da argumentación alguna.

Problema 4: En $\square\, ABCD$ (Figura 11), el punto medio de $\overline{AB}$ es M. Con centro en M se describe el arco $\widehat{QP}$ [3] que corta a $\overline{AD}$ en Q y a $\overline{BC}$ en P. Prueba que $\Delta\, MBP$ es congruente a $\Delta\, MAQ$



[2] $\Delta\, ADC$ es cualquier triángulo cuyos vértices son A, D y C.
[3] $\widehat{QP}$ es cualquier arco de circunferencia con extremos Q y P.

Figura 11. Cuadrado, triángulos y segmento de arco.

Estudiante A12. Explicación coloquial.

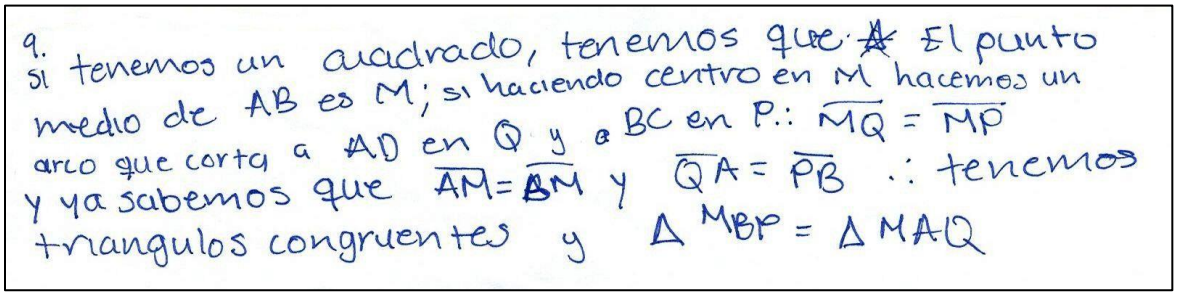


Figura 12. Afirmaciones no evidentes.

En la Figura 12 se observa que para el estudiante, dos triángulos son congruentes si dos de los lados de uno son iguales a dos de los lados del otro, y entonces concluye que los triángulos rectángulos son iguales, aunque no se refiere al ángulo recto.

Estudiante A7. Prueba que explica.

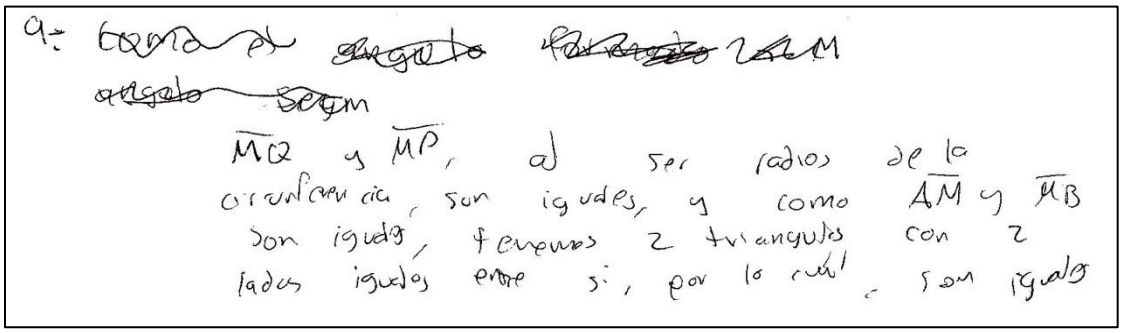


Figura 13. Uso de conceptos geométricos para explicar la prueba.

Como se observa en la Figura 13, el estudiante proporciona una justificación basada en la congruencia de triángulos (criterio LAL). Dos lados correspondientes iguales (y el ángulo recto, que no menciona) le bastan para afirmar que los dos triángulos rectángulos involucrados son iguales.

Conclusiones

En general, de la segunda y tercera sesión de trabajo se observa que la mayoría de los estudiantes justificó los resultados con un lenguaje coloquial y, en ocasiones, los procesos de argumentación fueron imprecisos o incompletos; sin embargo, en algunos casos, sí utilizaron un lenguaje simbólico formal con claridad. En general, los estudiantes elaboraron, de manera aceptable, las demostraciones en las que recurren a la congruencia de triángulos, o al menos, este elemento les permitió intuir y elaborar un discurso con el que trataron de justificar los resultados.

A la luz de las respuestas de los estudiantes, en esta investigación, los tipos de prueba que emergen durante las soluciones a los problemas geométricos de congruencia de triángulos son los ya mencionados en la literatura de investigación relacionada con la prueba en matemáticas. En nuestra investigación, constatamos que existe gran dificultad, por parte de los estudiantes, para identificar elementos auxiliares que pueden serles útiles para asegurar la veracidad del resultado. Los estudiantes necesitan desarrollar un razonamiento intuitivo de los objetos geométricos para

tener acceso, tanto a un mejor entendimiento de la geometría euclidiana como a un razonamiento deductivo formal para su estudio; para lograr lo anterior, se requiere tomar en cuenta el tipo de tareas a resolver y la manera en que éstas son guiadas.

Referencias y bibliografía

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(12), 147-176.

Bell, A. W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23-40.

Camargo, L., Perry, P. & Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿Puede tener un papel protagónico? *Educación Matemática, 17*(3), 53-76.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Ibañez, M. & Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *Números, 65*, 19-40.

Palais, R. S. (1999). The visualization of mathematics: toward a mathematical exploratorium. *Notices of the AMS, 46*(6), 647-658.

Siñeriz, L. & Ferraris C. (2005). Tipos de prueba: una de las categorías de un modelo teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría. *Memorias del VII Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy.

Wentworth, J. & Smith, D. E. (1979). *Geometría plana y del espacio.* México: Porrúa.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Modelos matemáticos emergentes desde transformación de superficies con reciclables

Evelio Marcial Plaza Montes
Maestría en Educación Matemática, Universidad de Antioquia.
Colombia
evelio12plaza@gmail.com

1. PRESENTACIÓN

Esta propuesta investigativa afronta como problemática la dificultad que reflejan los estudiantes de educación media de la Institución Educativa San Pedro de Urabá, para analizar, comprender, proponer y argumentar modelos matemáticos que emergen desde una transformación de superficie, la cual, se observa que ellos no relacionan modelos con fenómenos de su entorno. Por tanto, es oportuno estudiar un proceso de modelación matemática, buscando aprovechar el contexto de la institución, para que a través del aprovechamiento del reciclaje de residuos plásticos, se pueda construir bloques ecológicos para ubicarlos en una superficie a estilo placa huella, permitiendo utilizar este contexto para estudiar diferentes modelos matemáticos aplicados a la realidad, construidas por ellos mismo. Esta investigación se está realizando con estudiantes de educación media de la Institución Educativa San Pedro de Urabá; la cual se encuentra ubicada en el casco urbano del municipio de San Pedro de Urabá, departamento de Antioquia, Colombia. Con esta propuesta y el apoyo del método STEM como estrategia metodológica, pretendo investigar el estudio de modelos matemáticos emergentes desde una transformación de superficies con estos residuos plásticos, dándole un sentido práctico y real a las matemáticas, transversalizando los diferentes pensamientos, para poder ser competentes matemáticamente.

Otro trabajo investigativo desarrollado por Valle (2013) tras la necesidad de implementar la utilización de botellas plásticas de tipo pet como unidad estructural para la mampostería liviana, después de varios análisis físicos mecánicos, concluye que presenta mejor característica que los bloques convencionales cuya resistencia a la compresión aumento en 23.63 kg/cm^2 con respecto a las unidades estructurales. **Estudios de investigación de este tipo no se ha hecho en establecimientos educativos, ya que muy poco se implementan trabajos de ingeniería, especialmente el diseño de bloques ecológicos con botellas plásticas recicladas tipo Pet**.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los lineamientos curriculares de matemáticas (1998), luego afirmados con los estándares básicos de matemáticas escritos por el MEN (2006), propone en la educación una reestructuración en lo referente a lo teórico y metodológico, estableciendo elementos que permitan actualizar el currículo en las diferentes áreas fundamentales de nuestro país. En estos elementos se pueden identificar dos aspectos básicos que son: los pensamientos matemáticos y el

desarrollo de procesos de aula, direccionando el aprendizaje de las matemáticas en contexto para los estudiantes, tomando como eje central en dicha contextualización las situaciones problemas.

Los modelos matemáticos emergentes desde una transformación de superficies, son fórmulas, ecuaciones o inecuaciones que representan una realidad. Las unidades de superficie son utilizadas en el concepto geométrico de área de figuras planas. El plano cartesiano es una herramienta útil al representar geométricamente estas superficies. Nicole (2008) nos dice que: "El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representa por sus coordenadas o pares ordenados", este plano cartesiano es una herramienta necesaria en diversos campos el cual nos permite el interdisciplinar de las matemáticas con otras ciencias del conocimiento. En los estándares de matemática planteados por el MEN (2006), nos dice que el estudiante debe "conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños" , en este sentido, desde nuestra propuesta de trabajo, transformar superficies significa modificar cualidades físicas de una determinada región geográfica de la institución (garajes bicicletas); este cambio se producirá aprovechando el reciclaje de residuos plásticos como contexto para construir bloques ecológicos. Los bloques ecológicos hechos con botellas plásticas recicladas cumplirán el rol de piedras, la cual será una propuesta innovadora en el campo de ingeniería a través del método STEM como estrategia metodológica. En la utilización de la modelación matemática como proceso en la enseñanza, se podrá estudiar modelos matemáticos emergentes desde una transformación de superficies en contexto de residuos plásticos. Con todo este planteamiento hago la siguiente pregunta de Investigación: **¿De qué manera emergen modelos matemáticos desde una transformación de superficies en contexto de residuos plásticos con estudiantes de educación media?**

3. OBJETIVO: Analizar modelos matemáticos emergentes desde una transformación de superficies en contexto de residuos plásticos con estudiantes de educación media.

4. APROXIMACIÓN AL MARCO TEÓRICO

El ciclo de modelación no es entendido como una ruta secuencial y estática, sino de un ir y venir a través de los momentos y subprocesos hasta que el estudiante pueda o no construir un modelo matemático ajustado a la situación, y éste responda a la solución del problema. Esto se produce, debido a que las rutas del proceso de modelación en los estudiantes son diferentes (Blum & Borromeo-Ferri, 2009). Es decir, esto depende de los diferentes caminos en la construcción de un modelo matemático cuando aborda una situación en el contexto o un fenómeno de la vida cotidiana (Bossio, 2019, p.44).

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bossio, J. (2014); Un proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto del cultivo de plátano con estudiantes del grado décimo al generar modelos lineales. Urabá, Antioquia.

Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas; MEN. (2006) p.56; p.78; p.68.

MEN. (1998). *Lineamientos Currriculares de Matematicas* . Bogotá, Colombia .

Nicole, M. (2008); El plano cartesiano; www.monografias.com; p.1

Valle, C. (2013); Utilización de botellas plásticas tipo pet como unidad estructural para la mampostería liviana; Riobamba- Ecuador

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Dominios de la Geometría y del Análisis y su articulación por medio de la modelización y la tecnología digital

[1]Jesús Victoria Flores **Salazar**[1]
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
jvflores@pucp.pe
Verónica **Neira** Fernández
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
vneira@pucp.pe
Flor Isabel **Carrillo** Lara
f.carrillo@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
Elizabeth **Montoya** Delgadillo[2]
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
elizabeth.montoya@pucv.cl

Resumen

En la comunicación, se presenta una tarea de modelizaciónsobre función cuadrática que forma parte de la secuencia didáctica de un proyecto de investigación internacional en ejecución,cuya finalidad es promoverla articulación de los dominios de la Geometría y el análisis por medio de la modelización y la tecnología digital.Como referenciales teóricos y metodológicos, setomanaspectos del Espacio de Trabajo Matemático-ETM, ciclo de modelización y de la Ingeniería Didáctica respectivamente; se presenta el análisis apriori de la tareamencionada,puesse está en la etapa de construcción y discusión de la secuencia; se resalta en el análisis a priori la activación del plano Semiótico-Instrumental[Sem-Ins] y se privilegian los paradigmas Geometría Natural (GI), Geometría Axiomática Natural (GII), Análisis Geométrico/Aritmético (AG) y Análisis Calculatorio (AC), lo que da indicios de la articulación de los dominios de la Geometría y del Análisis.
Palabras clave: modelización, tecnología, función cuadrática, plano [Sem-Ins].

[1] Proyecto de investigación "Articulación de dominios matemáticos por medio de la modelización y la tecnología digital en profesores de Matemática" (DGI 575/ PUCP).
[2] Fondecyt 1171744 Conicyt-Chile.

Introducción

La comunicaciónpresenta una tarea sobre función cuadrática, que es la adaptación de una tarea de la investigación de Almonacid (2018), y que forma parte de una secuencia didáctica (conjunto de tareas) comopartedel proyecto de investigación "Articulación de dominios matemáticos por medio de la modelización y la tecnología digital en profesores de Matemática" en el que participan investigadores de la Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-PUCV y del Laboratorio de Didáctica de la Matemática André Revuz- Universidad de Paris Diderot-Paris 7.

En relación a la noción de la función cuadrática,se debe tomar en cuenta el pensamiento relacional y covariacional (Ozaltun y Bukova, 2017) y, además, la coordinación de las diferentes representaciones de la misma. Por otro lado, en cuanto a la necesidad de incorporar ambientes de representaciones dinámicas, como el GeoGebra, en la enseñanza de las funciones cuadráticas, las investigaciones de Lima (2016) y también la de Salazar (2015) mencionan que la mediación del GeoGebra facilita, por medio de sus representaciones en las ventanas algebraica y gráfica de manera simultánea, la construcción de la noción de función cuadrática, además de favorecer el análisis y entender la naturaleza variable de la función cuadrática (Ávila,2011). En relación a ello, la investigación de Lagrange y Minh (2016) muestran que los aspectos relacionales, variacional y de coordinación de representaciones mediada por la tecnología digital en la enseñanza de la función cuadrática pueden ser estudiados vinculando dominios de la Matemática, como la Geometría y el Análisis. Por otro lado, Briceño y Buendía (2015) mencionan que la modelización permite vincular conocimientos matemáticos con contextos de la ciencia.

En ese sentido,los recientes trabajos del enfoque del Espacio de Trabajo Matemático-ETM (Kuzniak, 2011; Montoya-Delgadillo y Vivier, 2014; Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016)abren perspectivas nuevas para la investigación y la comprensión y articulación de distintos dominios matemáticos, como se ha evidenciado en los congresos temáticos desarrollados desde el 2009, porque viabiliza el análisis de los diferentes niveles de transposición en la enseñanza de la Matemática gracias a los diferentes tipos de ETM (referencia, idóneo y personal). Tambiénse enfatiza la necesidad de una enseñanza que favorezca la articulación entre la Geometría y los problemas que surgen del mundo real por medio de tareas de modelización y seresalta además la necesidad de articular la Geometría con otros dominios matemáticos.

En cuanto al ETM del análisis, este ha sido objeto de muchas investigaciones que incluyen el proyecto ECOS-Sud (2014-2016), desarrollado entre el Laboratorio de Didáctica André Revuz- Universidad de Paris Diderot-Paris 7 y el Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad de Valparaíso PUCV de Chile (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016). Un fenómeno identificado en ese proyecto de investigación es la perspectiva puntual-global-local del tratamiento que se le da a ciertos objetos matemáticos. Por otro lado, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) muestran que existen estudios en los que se investiga la mediación de la tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en los que se proponen tareas en la que los cambios de dominios matemáticos son fundamentales; sin embargo, no se ha encontrado evidencias sobre investigaciones que articulen estos dos dominios matemáticos mediados por la modelización y la tecnología digital.

Espacio de Trabajo Matemático-ETM,Modelización e Ingeniería Didáctica

En cuanto al marco de los Espacios de Trabajo Matemático (en adelante ETM), permite caracterizar la manera en que las nociones matemáticas adoptan significado en un contexto detrabajo dado. Según Kuzniak y Richard (2014), un ETM es un espacio abstracto organizado para asegurar el trabajo matemático en el contexto educativo y está basado en la articulación de dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo. El plano epistemológico está compuesto por tres componentes o polos a saber: el representamen, que se constituye de los registros de representación semiótica; los artefactos, que son elementos materiales o simbólicos utilizados y el referencial,que está constituido por las propiedades, los teoremas, las definiciones. El plano cognitivo se compone de los procesos de visualización, construcción y prueba.

Los planos epistemológico y cognitivo se articulan mediante una génesis semiótica, basada en los registros de representación semiótica que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional; una génesisinstrumental, que permite operacionalizar los artefactos en el proceso de construcción y una génesis discursiva de la prueba, que da sentido a las propiedades para dejarlas al servicio del razonamiento matemático. Esta articulación no debe ser entendida como la unión individual entre los componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino más bien como una relación dinámica de dos o incluso tres génesis. Por ello, Kuzniak y Richard (2014) identifican tres planos verticales, que son el plano Semiótico-Instrumental [Sem-Ins], Instrumental-Discursivo [Ins-Dis] y Semiótico-Discursivo [Sem-Dis].Otro aspecto del ETM que consideramos es la noción de paradigma como "el conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico" (Kuzniak, Montoya y Vivier, 2016, p. 7) en un contexto educativo.

En relación al dominio de la Geometría, se introdujeron tres paradigmas: Geometría I (Geometría natural), en el cual hay una relación con el mundo real y la fuente de validación está basada en lo tangible; Geometría II (Geometría natural axiomática), en el cual se pierde la relación a la realidad y se trabaja más bien sobre el modelo geométrico, la fuente de validación están basadas en las reglas axiomáticas y Geometría III (Geometría axiomática formal), donde se genera una separación completa del mundo real y la fuente de validación están basadas en la axiomática elegida. Además, se enfatiza la necesidad de una enseñanza que favorezca la articulación entre la Geometría y los problemas que surgen del mundo real por medio de tareas de modelización. En cuanto al dominio del Análisis, específicamente en el paradigma del Análisis Matemático estándar, se distinguen los siguientes paradigmas: Análisis Geométrico/Aritmético (AG), que permite interpretaciones nacidas de la Geometría, del cálculo aritmético o del mundo real. Análisis Calculatorio (AC), en el que las reglas del cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos y, finalmente, Análisis Real (AR), que es caracterizado por una mirada global a las características de la noción matemática, con reglas que dependen de la topología usada.

Con respecto a la modelización, Blum y Borromeo Ferri (2009) explican que el desarrollo de la habilidad de modelizar moviliza nociones y objetos de los distintos dominios de las Matemáticas. En ese sentido, para la modelización de la tarea sobre función cuadrática,se toma en cuenta el ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007). De acuerdo con este ciclo, la situación real debe ser entendida para poder formular el problema (1). Para conseguir un modelo real, es necesario que previamente sea simplificada y estructurada (2). Por medio de supuestos, generalizaciones y formalizaciones, se realiza la matematización (3). Después, se trabaja matemáticamente (4). Posteriormente,la solución matemática debe ser interpretada (5). En la

situación inicial, para lograr una solución real, seguidamente, se valida (6) todo el proceso y se muestra que la solución real resuelve el problema y que el modelo es el apropiado o que el modelo debe ser rediseñado en una nueva circulación por el ciclo. Por último, el proceso de solución debe ser divulgado (7).

En relación a los aspectos de la Ingeniería Didáctica (ID),Artigue (1995)la refiere como "un esquema experimental basado en las 'realizaciones didácticas' en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (p. 36). Las cuatro fases consideradas en la ID son análisis preliminar (fase 1), concepción y análisis a priori (fase 2),experimentación (fase 3), análisis a posteriori y validación (fase 4), siendo esta interna ya quees la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Los aspectos de la ID que se utilizan en la investigación son coherentes con la construcción, implementación y valoración de las tareas (secuencia didáctica) de la investigación. En ese sentido, en la fase 1 de la ID se realiza la revisión de literatura sobre el objeto de estudio, modelización, tecnología digital y aspectos del enfoque del Espacio de Trabajo Matemático que cimientan la investigación. En la fase 2, se construyen las tareas (secuencia didáctica) que deben ser lo suficientemente abiertas para permitir diferentes interpretaciones y el uso de diferentes ETM y deben poder modelizarse y resolverse con la mediación de tecnología digital, tanto en Geometría como en análisis. Cabe resaltar, que se presenta una tarea de modelización sobre función cuadrática que forma parte de la secuencia didáctica de un proyecto de investigación en ejecución, ya que se está en la etapa de construcción y discusión de la secuencia. Posteriormente, se debe desarrollar lo que corresponde a las fases 3 y 4 de la ID,que están programadas para abril 2019, tanto en la PUCP/Perú como en la PUCV/Chile. En esta parte es que seaplican las tareas de la secuencia, para identificar si cumple con el propósito para la que fue construida. Es bueno destacar que, para realizar el análisis a posteriori, se debe organizar los datos recolectados. Para ello, se debe codificar la información de modo que se puedan encontrar, por ejemplo, similitudes, diferencias y/o conexiones entre ellos con el fin de poder identificar y analizar la articulación de los conocimientos matemáticos en los dominios de la Geometría y del Análisis.

La tarea de modelización

Se presenta la tarea (ver figura 1) y, en base a esa información, se estructuran tres etapas para el desarrollo de la misma, según el ciclo de modelización.

Los estudiantes de un Centro de Música de una universidad peruana, con motivo de la semana de aniversario institucional están organizando un concierto, de "acceso libre" al público. En él, participarán solistas y grupos de hasta ocho integrantes, entre cantantes y músicos.

Para para la presentación del concierto se cercará un escenario de forma rectangular (ver figura abajo); pero, no será necesario cercar la parte en frente del público. Se sabe que el Centro dispone de tarimas, escaleras y cercas para 24 m de perímetro.

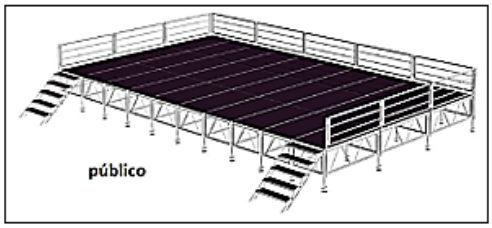


Figura 1. Tarea de modelización (Almonacid, 2018)

Primera etapa: está orientada a identificar los valores que intervienen, la relación entre ellos y la naturaleza del comportamiento del modelo implícito y clasificamos en la etapa 2 del ciclo de modelización. Para ello, se solicita que se abra el archivo GeoGebra *representación_dinámico1.ggb* (ver figura 2) y que se realicen una serie de acciones como arrastrar el deslizador y utilizar la hoja de cálculo para relacionar los valores de los lados, etc.

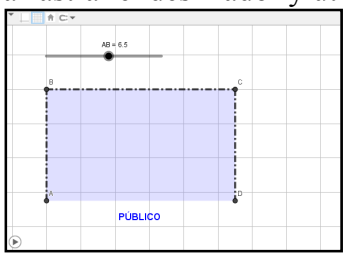


Figura 2. representación_dinámica1 (Almonacid, 2018)

Se espera, a priori, que a partir de la manipulación de los artefactos deslizador y cuadrícula se realicen exploraciones y sea posible conjeturar y validar que el valor que está variando es el área y ésta lo hace en función de la medida de la longitud del segmento AB. Estas acciones, evidenciarían la activación del plano [Sem-Ins]. Además, se considera que, al utilizar nociones de longitud de segmento y medida de área, se estaría privilegiando al paradigma de la Geometría Natural (GI);sin embargo, también se realizan tratamientos aritméticos elementales, lo que indica que también el paradigma del Análisis Geométrico/ Aritmético (AI) está siendo privilegiado.

Segunda etapa: tiene como propósito determinar la expresión matemática que modelice la medida del área del escenario en función de la longitud del segmento AB. Para ello, se debe tener en cuenta sus representaciones en el registro tabular y gráfica. Se clasifica esta etapa en la etapa 3 del ciclo de modelización.A priori, se podrían presentar dos procedimientos diferentes: el primerotoma en cuenta las representaciones figural y tabular y el segundo las representaciones tabular y gráfica (ver figura 3) para hallar el modelo matemático solicitado.

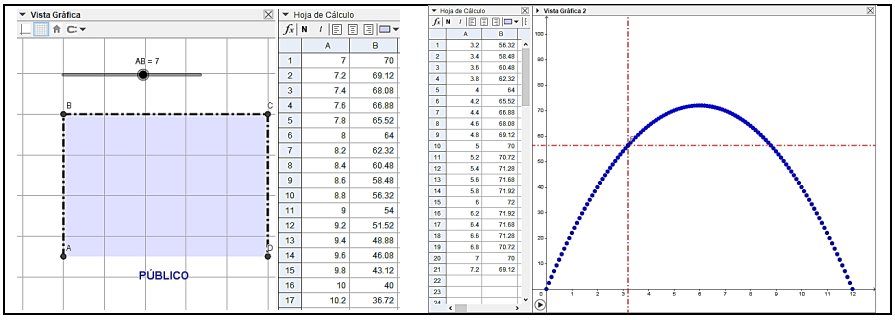


Figura 3. Primer y segundo procedimiento a priori (Almonacid, 2018)

Con el primer procedimiento, se espera que se continúe activando la genesis semiótica en el dominio de la Geometría, ya quepor medio de la fórmula del área de un rectángulo se reemplacen las longitudes de los lados del rectángulo de la siguiente manera:$Área = AB \times BC$

$$\text{Área} = (x)(24 - 2x)$$
$$\text{Área} = 24x - 2x^2$$
$$A(x) = 24x - 2x^2$$

Para finalmente,$A(x) = -2x^2 + 24x$ donde $x \in < 0{,}12 >$

En base a la percepción de la Vista Gráfica y los valores en la hoja de cálculo, el uso de la fórmula de medida de área de la región rectangular, la noción de función y los tratamientos algebraicos realizados,en el sentido del ETM, es posible afirmar que se activa el plano [Sem-Ins] y que está en proceso el cambio del dominio de la Geometríaal del análisis; sin embargo, a diferencia de la etapa anterior, el paradigma privilegiado es del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).Con el segundo procedimiento, se espera que se consideren algunos datos proporcionados en la hoja de cálculo. Por ejemplo:

$x = 5$, y su correspondiente valor $f(4) = 70$

$x = 6$, y su correspondiente valor $f(4) = 72$

Luego, se evalúen los valores en el modelo cuadrático de la siguiente manera:

$$f(5) = 25a + 5b + c = 70$$

$$f(6) = 36a + 6b + c = 72$$

Mediante tratamientos algebraicos se resuelva el sistema de ecuaciones y se hallen los valores de los parámetros de la función cuadrática ($a = -2,\ b = 24$ y $c = 0$).Posteriormente, se exprese el modelo matemático: $f(x) = -2x^2 + 24x$, donde $x \in < 0{,}12 >$.

Otro procedimiento (estrategia) es que el estudiante haga interpretaciones desde la gráfica y reconozca la función cuadrática, con esto hay un cambio al dominio del análisis (o cálculo).En este sentido, se puede dar*estrategia 1:* identificar el vértice de la parábola y, basados en la simetría que le entrega la curva (AG) o bien, determinar su vértice V = (-b/2a, f(-b/2a), lo cual lo clasificamos en el paradigma AC. O la *estrategia 2:* identificar el máximo usando derivadas en la función $f(x) = 24x - 2x^2$(derivar, igualar a cero, encontrar los puntos críticos y evaluar para determinar el máximo en este caso). Para el presente caso, clasificamos esta posible respuesta en el paradigma AC.Sea con cualquiera de los dos procedimientos, se espera, a priori, que se relacione la medida del segmento BC en función del segmento AB, se consideren las restricciones del segmento AB y que la coordinación de estos registros (figural, tabular y/o gráfico) permita construir el modelo matemático del área del escenario rectangular en función de la longitud de uno de sus lados. Al igual que en el procedimiento anterior, con este procedimiento se evidenciaría también el cambio de dominio de la Geometría al dominio del Análisis. En ese sentido, el paradigma privilegiado, en este, es el del Análisis Calculatorio (AC).

Tercera etapa: se solicita que en la barra de entrada de la vista gráfica del GeoGebra se ingrese la expresión matemática anterior y que se configuren los ejes X e Y, en escala de 1:10, y se pregunta:*Después de hacer un análisis sobre la cantidad máxima de integrantes e instrumentos que se presentarán en el concierto,se ha concluido que el área del escenario debe medir 70 m^2. Este año los encargados de armar el escenario renovarán las cercas de los lados AB y CD y comprarán nuevas cercas. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del escenario si se busca ahorrar en los costos del concierto?*

A priori,una de las posibles estrategias que se espera es que se ingrese la recta constante $y = 70$ a la barra de entrada y con la herramienta perpendicular y punto de intersección, se identifiquen los puntos de intersección $A(5; 70)$ y $B(7; 70)$de la representación gráfica de las rectas con la función cuadrática, como muestra la figura 4, lo que permite dar respuesta a la pregunta planteada.

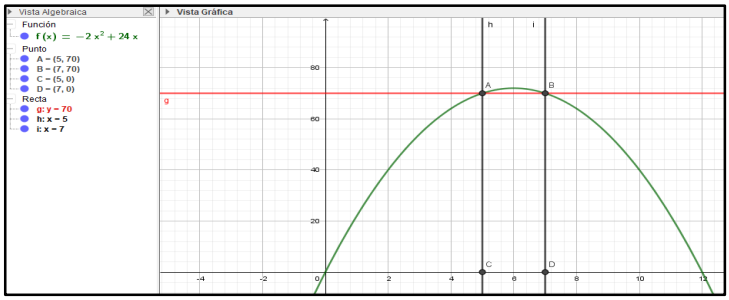


Figura 4. Tercera etapa a priori (Almonacid, 2018)

A partir de la activación de la Vista Gráfica, el uso de herramientas gráficas, como lo son puntos y rectas, se puede afirmar que el paradigma priorizado por los estudiantes, en esta estrategia, es el paradigma del Análisis Aritmético/Geométrico (AG).

Algunas consideraciones

La tarea presentada, en base alos aspectos de la Ingeniería Didáctica y al ciclo de modelización,está organizada en tres etapas. Así, la primera etapade la tarea está relacionada a los procesos de construcción, simplificación/estructuración y matematización dirigida al reconocimiento de variables, relación entre ellas y reconocimiento del comportamiento de la función implícita; la segunda etapa está compuesta del trabajo matemático para hallar el modelo matemático y, finalmente, la tercera fase relacionada a la interpretación y validación del modelo matemático encontrado.

En cuanto al análisis a priori de la tarea, que se realiza con base en el ETM y en el que se evidencian las fases del ciclo de modelización, en la primera etapa se privilegia el paradigma de la Geometría Natural (GI) y de la Geometría Axiomática Natural (GII).

En cuanto a la segunda y tercera etapa, se privilegianlos paradigmas del Análisis Geométrico/Aritmético (AG) y Análisis Calculatorio (AC).

En las tres etapas, se espera activar todo el ETM y sus planos y la articulación de los dominios de la Geometría y del análisis. El problema planteado parte de la etapa 2 del ciclo de modelización, por lo tanto, en la fase de experimentación de la ID, se espera una discusión en cuanto a los materiales y cuestiones de la realidad que pongan de manifiesto un problema real y no sea uno que comienza desde la etapa 2 del ciclo de modelización.

En términos del ETM, estos problemas son llamados tareas emblemáticas que luego, con la modificación a lo real, se pueda enfrentar así a los estudiantes a un problema de modelización con la tecnología digital como mediador en la articulación de dos dominios matemáticos.

Agradecimiento: A la Dirección de Gestión de la Investigación-DGI de la Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP, por el apoyo brindado en el marco del proyecto "Articulación de dominios matemáticos por medio de la modelización y la tecnología digital en profesores de Matemática". ID-575/DGI-PUCP.

Referencias y bibliografía

Almonacid, A. (2018). *Modelización de funciones cuadráticas: Espacio de trabajo matemático personal de estudiantes de humanidades.* Tesis del grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Artigue, M. (1995).Ingeniería Didáctica. En: M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, P. E. (2011). *Razonamiento covariacional a través del Software dinámico: el caso de la variación lineal y cuadrática* (tesis de maestría). Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia. Obtenido de http://bdigital.unal.edu.co/6765/1/43480455.2012.pdf

Blum, W., &Borromeo Ferri, R. (2009).Mathematical Modelling: ¿Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), *45-58.* Obtenido de http://gorila.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/viewFile/1620/1087

Blum, W. y Leiss, D. (2007).How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? En Haines y otros (eds.) *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics,* 222-231. Chichester: Horwood Publishing.

Briceño, O. A., & Buendía, G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte* (45), 65-83. Obtenido de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/viewFile/656/1189

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9 – 24. Obtenido de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME*, 17(4-I), 17-28.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48, 721–737.

Kuzniak A., Montoya E. y Vivier L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*(15), pp. 235-249. Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/Cuadernos/CuadernosCompletos/Cuaderno15.pdf

Lagrange, J.-B., & Minh, T. K. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM MathematicsEducation,* 48, 793–807.

Lima, E. (2016). *Sequência didática usando o Geogebra na aprendizagem de função quadrática no ensino fundamental II*,(tesis de maestría). Manaus-Am., Brasil: Universidade Federal do Amazonas. Obtenido de https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/5551

Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2014).Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 739–754.

Ozaltun, A., &Bukova, E. (2017).Revealing Ozgur's thoughts of a quadratic function with a clinical interview: Concepts and their underlying reasons. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 3*(1)*, 122-134.*

Salazar, J. V. F. (2015).Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática. *Revista Unión.* (41), 57-67. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo3.pdf



Caracterizando las estrategias heurísticas de pruebas estandarizadas

Ana María **Palacios** Rojas.
Facultad de Educación, Universidad del Cauca
Colombia
anamariarojas@unicauca.edu.co
Sandra Marcela **Chito** Cerón.
Facultad de Educación, Universidad del Cauca
Colombia
marcelachito@unicauca.edu.co
Sandra Liceth **Solarte** Alvear.
Facultad de Educación, Universidad del Cauca
Colombia
sandrasolarte@unicauca.edu.co

Resumen

Esta propuesta de investigación busca caracterizar las estrategias heurísticas que emplean los estudiantes de grado sexto de dos instituciones educativas de la ciudad de Santiago de Cali, en pruebas estandarizadas, diseñadas bajo el enfoque de resolución de problemas que involucran gráficos estadísticos, a través de una investigación- acción, dado que conocerlas podría fortalecer los procesos educativos, más si tiene en cuenta los parámetros bajo los que se diseñan y lo que evalúa este tipo de exámenes.

Palabras Claves: Situaciones problema, estrategias heurísticas, pruebas estandarizadas.

Introducción

Esta investigación se enmarca en la Educación Matemática, especialmente en la interpretación de gráficos estadísticos. Dado que, hoy día la estadística juega un papel importante en el currículo actual, muestra de ello son las pruebas estandarizadas que deben presentar los estudiantes, de manera que esta exploración pretende caracterizar las estrategias heurísticas empleadas por estudiantes de dos instituciones educativas de la ciudad de Cali, en la resolución de problemas que involucran gráficos estadísticos de pruebas estandarizadas (hacer una tabla, un gráfico, ensayo y error, entre otras). Pues, conocer las estrategias heurísticas podría fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, a través de habilidades propias del educando y su forma de interactuar con el mundo.

Presentación del problema

En 2012 Colombia obtuvo el menor puntaje en el apartado de resolución de problemas de las pruebas PISA, los estudiantes solo pueden resolver problemas muy simples en situaciones conocidas, utilizando el ensayo y el error (Cárdenas, 2014). Esto se debe no solo, a la poca apropiación de conceptos sino también de sus habilidades para resolver una situación problema, es decir, de sus estrategias heurísticas. Teniendo en cuenta que, a muchos estudiantes les resulta difícil aprender matemática debido a que "(…) no consiguen determinar a qué operación aritmética se refiere el enunciado de algún problema (dificultades en la transición del lenguaje natural al lenguaje matemático) (…)" Sarmiento (2004, p.108).

En este escenario, es relevante conocer y fortalecer las estrategias heurísticas que emplean los estudiantes de grado sexto, inicio de la educación secundaria. Con el ánimo de obtener una diversidad de estrategias heurísticas, esta investigación se llevará a cabo en dos instituciones de la ciudad de Cali, una del sector público y otra privado aludiendo a que los diferentes contextos socioeconómicos en los que se desenvuelven los estudiantes puedan influir en el surgimiento de nuevas estrategias. De menara que, el método a desarrollar será una *investigación-acción*, a través de una serie de fases que incluirán análisis documentales.

Avance del estado del arte

El lenguaje gráfico de los problemas estadísticos desarrollan el razonamiento matemático, fortalecen las habilidades de comunicación y gestión de la información, ya que los problemas bien seleccionados según Santos (2008) "ofrecen oportunidades para que los estudiantes desarrollen estrategias de solución informales, altamente contextualizadas" (p.16).

Estrategias de solución o también llamadas estrategias heurísticas definidas por Santos (como se citó en Palacios y solarte, 2013) como las "(…) sugerencias generales que ayudan a un individuo a entender mejor un problema o a avanzar hacia su solución (…)" (p.36).

Finalmente, la solución de situaciones problema de tipo estadístico, a partir de estrategias heurísticas podría amplía el aprendizaje del estudiante en la medida que exploraré sus habilidades, método que hoy por hoy es un componente y esencial en la educación.

Referencias y bibliografía

Cárdenas, J. (2014). *La evaluación de la resolución de problemas en matemáticas: concepciones y prácticas de los profesores de secundaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Extremadura, Colombia.

Palacios, A & Solarte, S. (2013*). Estudio de la resolución de problemas matemáticos no rutinarios de docentes de matemáticas en formación: una aproximación a las estrategias heurísticas*. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Santos, M. (Septiembre de 2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En Ricardo; Gómez, Bernardo; Camacho, Matías; Blanco, Lorenzo (Eds.), Investigación en educación matemática XII, Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Valencia, España. Recuperado de https://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

Sarmiento, M. (2004). *La enseñanza de las matemáticas y las nuevas tecnologías de la información y comunicación*. (Tesis de doctorado). Recuperado de file:///C:/Users/anyta/Downloads/Memoria.pdf

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Juegos de estrategia potencializadores del proceso de comunicación en la resolución de problemas

Leonilde **Pardo** Aguilera
Escuela de Educación, Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga
leito.pardo.1997@gmail.com

Resumen

Desde los estudios pitagóricos sobre los números utilizando configuraciones que formaban mediante el juego, hasta los hallazgos de nuestro siglo, tienen en cuenta el juego como una forma distinta de aprendizaje de las matemáticas.Esta propuesta se enfocó en el uso de juegos de estrategia para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas relacionados con el pensamiento numérico, con este fin, se diseñó una unidad didáctica buscando propiciar espacios para el trabajo en equipo a través de socialización de estrategias, explicación de procedimientos, presentación de justificaciones y sustentación de argumentos.Se realizaron siete sesiones que contrastaron las etapas de resolución de problemasde Polya y las etapas de desarrollo de juegosde Guzmán. La investigación se enmarcó bajo una metodología cualitativa con un enfoque de Investigación Acción.Los resultados mostraron el progreso de los estudiantes en cuanto a resolución de problemas y el fortalecimiento del proceso comunicativo.

Palabras clave: juegos de estrategia, proceso de comunicación, pensamiento numérico, resolución de problemas, unidad didáctica.

Introducción

A lo largo del tiempo, se ha considerado el juego como una actividad universal debido a que no solo los niños lo practican sino cualquier ser humano sin importar su edad. El impacto de los juegos en la historia de las matemáticas ha sido de gran relevancia debido a que siempre el componente lúdico ha dado lugar a una buena parte de sus creaciones.

El juego y la matemática tienen características comunes, por ende, se considera una estrategia didáctica con grandes beneficios para enfrentar al estudiante ante la resolución de problemas y superar las dificultades que en ellos se presentan; Guzmán (1984) expresa

"la matemática es en gran parte juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumentos matemáticos" (p. 10). Desde esta perspectiva, las matemáticas escolares deben hacer un tránsito de la matemática pasiva en el aula cuyo objetivo es la ejercitación de contenidos a una matemática activa que promueva el desarrollo de competencias no solo matemáticas sino también científicas y ciudadanas.

En Colombia, el Ministerio de Educación nacional ha considerado formar ciudadanos matemáticamente competentes, en este propósito ha expedido documentos como los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencia donde aborda la importancia de enseñar de manera articulada teniendo en cuenta los procesos generales de la actividad matemática y el contexto.

En este afán de emprender nuevos retos y de buscar la superación de dificultades presentadas por los estudiantes en la pruebas saber de los años anteriores los cuales indican debilidad en el proceso de comunicación y de razonamiento en la resolución de problemas, surge el problema de investigación. Por ello, se propuso el uso de juegos de estrategia para potenciar el proceso de comunicación en la resolución de problemas, enfocado principalmente en las habilidades de interpretación, explicación y justificación.

Marco de referencia

El juego se ha considerado una estrategia viable para la enseñanza de las matemáticas brindando ambientes propicios para su aprendizaje, lo confirman estudios realizados que definen el juego, determinan por qué utilizarlos, para qué sirven y cómo usarlos para que logren el objetivo.

Se entiende por juegos de estrategia aquellos que, para conseguir su objetivo (lograr una determinada posición, dejar al contrincante sin fichas, ser el último en coger un objeto de un montón...), en cada momento el jugador debe elegir una de las diversas posibilidades existentes. El conjunto y la combinación de estas elecciones o tácticas es la estrategia que el jugador emplea para ganar o no perder. Son un buen recurso para introducir a los estudiantes en la resolución de problemas y en los hábitos típicos del pensamiento matemático.

La resolución de problemas, tema relevante en materia de enseñanza y aprendizaje, abarca una serie de aspectos que para lograr el objetivo deben estar íntimamente relacionados. Según la teoría de Piaget, las personas durante su niñez presentan tres tipos diferentes de formas de razonar. De esta manera, la capacidad de resolver problemas en los estudiantes requiere de una actividad mental y lógica que está directamente relacionada con el grado de madurez fisiológica de cada niño, así como, del medio social y cultural en el que interactúa, de las habilidades y destrezas de cada uno, de los conocimientos previos que tenga acerca de las matemáticas, de la comprensión lectora que posea, de los miedos y temores que tenga o que se le generen, de los estímulos, de la metodología y del ambiente escolar.

Vigotsky (1987) determinaba que el juego podría ser socializador cuando el niño espontáneamente socializara, transmitiera valores y costumbres en su medio social o podría ser factor de desarrollo cuando permitiera en el niño conocer, desarrollar pensamiento y

dominar situaciones. Además argumenta que a través del juego se crea un espacio intermedio entre la realidad objetiva y la imaginaria, lo que permite realizar actividades que realmente no se podrían llevar a cabo, espacio que denomino "zona potencial de aprendizaje".

Para hacer uso de los juegos es importante conocer su funcionalidad ya que de esto depende obtener los resultados propuestos, Guzmán (1984) propone la manera de desarrollar un juego orientado a la resolución de problemas, y argumenta que el juego tiene cuatro fases de aplicación. De otra parte, Polya (2004) establece cuatro etapas en la resolución de un problema, esta relación es determinante para conocer el modo de pensar, razonar y actuar de los estudiantes y de esta forma ayudarlos a corregir sus errores.

La manera en que se procede cuando se quiere encontrar una estrategia ganadora en un juego es similar al proceso de resolución de un problema; al respecto Edo, Baeza, Deulofeu y Badilla (2008) realizan un paralelismo: una primera etapa de comprensión (antes de hacer, trataré de entender), otra de exploración y planificación (tramaré una estrategia), una tercera de ejecución (miraré si mi estrategia me lleva al final) y una última de revisión (sacaré jugo al juego).

No todos los juegos tienen estrategia ganadora pero, descubrir esto, también es importante, al igual que, entender que este no es el único objetivo de los juegos. Todo esto se consigue en la manera en que se desarrollen las habilidades intelectuales en los estudiantes. Mientras que mucho del conocimiento que enseñemos será obsoleto en unos años, las habilidades de pensamiento, una vez se adquieren, permanecerán con los estudiantes toda su vida.

El propósito de la investigación es el fortalecimiento de habilidades propias del proceso de comunicación.

> En los últimos años se ha notado que la función de la comunicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es cada vez más importante ya que permite una verdadera interacción profesor-conocimiento-estudiante", es un proceso de interacción social que contribuye a solucionar diferentes problemas, situaciones interpretativas y producción de discursos argumentativos;esto es, la forma de usar el lenguaje. (Jiménez y Pineda, 2013, p. 107)

> Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas. Podría decirse con Raymond Duval que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama "registros de representación" o "registros semióticos", no parece posible aprender y comprender dicho contenido. (Ministerio de Educación Nacional 1994, p. 9)

Metodología

El presente proyecto investigativo se desarrolló desde un enfoque de tipo cualitativo mediante la descripción detallada de los fenómenos que rodeaban a los participantes, la exploración y profundización de sus experiencias, por lo tanto, se ubica en el campo de la Investigación Acción teniendo como referentes a Alberich (2017) y a Elliott (1993).

El proceso de investigación toma como punto de partida el modelo cíclico de Lewin (1992) el cual comprende tres momentos: la planificación, la acción o intervención de aula, por último, la reflexión que comprendió la evaluación.

Unidad didáctica: "Interpreto Jugando…Analizo Resolviendo"

La propuesta didáctica puesta en marcha estuvo constituida por una serie de sesiones que contenían situaciones problema incorporadas en juegos que a través de su exploración y realización desencadenaron procesos de interpretación, explicación, justificación, razonamiento, análisis, experimentación que junto a las discusiones, conjeturas y argumentaciones permitieron desarrollar actitudes positivas en los niños hacia las matemáticas.

Aprovechando la imaginación de los niños y su gusto por lo misterioso se creó una historia con personajes fantásticos, dotados de vida y que provenían de la fantasía infantil que animan al niño a explorar sus propios caminos, a construir sus reglas y a descubrir la manera de hacer las cosas a partir de su interpretación personal, su bagaje y su creatividad. La manera de cómo abordar cada situación, la verbalización del proceso de resolución junto con argumentaciones del porqué de las afirmaciones es uno de los pilares de la evaluación del aprendizaje, de igual manera, la forma de resolver, la estrategia de solución y el análisis de cada una, complementan el proceso de evaluación.

La propuesta plantea una historia cuya función es buscar ayuda y enviar una serie de retos matemáticos los cuales tienen que resolver los niños. La solución a los enigmas está al alcance de todos, ya que se pueden resolver utilizando diversas estrategias, dependiendo de los conocimientos previos que cada cual tenga. El objetivo no es que un solo niño lo logre, sino que a través de la cooperación todos los equipos puedan llegar a la solución para así poder disfrutar todos juntos el tesoro del Ogro.

La historia inicia con el enojo explosivo del Ogro "Polifemo" en la celebración del día de la santita "Pachamama" patrona del bosque y defensora de la naturaleza, situación que tuvo lugar en el castillo encantado del bosque "Las mil y una noche" debido a que todos sus invitados siempre le ganaban los juegos en los que participaba y tanta fue su ira que ordenó a todos sus colaboradores que cerraran el castillo inmediatamente y que nadie podía salir hasta descubrir qué estaba sucediendo; les indicó repartir folletos en los alrededores del castillo informando lo sucedido e invitando a cumplir una serie de tareas para salir de allí.

La primera de ellas, correspondía a una serie de retos a cambio de ganar indulgencias para dejarlos libres y para esto requerían de ayuda externa con el fin de resolver las distintas tareas. Es así como uno de los folletos llega a manos de una hada madrina (la profesora), quien le cuenta la situación a los niños y éstos muy preocupados por los

personajes en cautiverio, empiezan a ayudarlos enviándoles los resultados de los retos a través de una urna viajera, ubicada en el salón de clase, que sería revisada todas las noches por el ogro y obtendrían los estudiantes un puntaje especial por sus respuestas.

La segunda tarea consistía en una carrera de observación, donde los niños y niñas debían atravesar por cinco estaciones con el fin de seguir la pista y descubrir un número mágico que los llevaría a descifrar un misterio para ayudar al ogro a cumplir un compromiso adquirido con la santita "Pachamama".

Logrando de manera exitosa la solución de los retos y su participación en la carrera de observación, los personajes misteriosos quedarían libres y los niños, tendrían la posibilidad de disfrutar de una fiesta de Halloween con todos los gastos pagos por el Ogro, la fiesta estaría condicionada a una tercera y última tarea relacionada con la organización de la misma celebración. Con esta actividad termina la historia, donde además los niños y la profesora conocen finalmente al Ogro "Polifemo" y a los personajes misteriosos.

Tabla 1

Estructura de las sesiones

Partes	Número de la sesión	Contenido de la sesión
Primera parte "Colección de juegos"	1ª Sesión	Noticia 1: Juego cerrar quinces
	2ª Sesión	Noticia 2: Quien coge el último pierde
	3ª Sesión	Noticia 3: Mini computador de Papy
	4ª Sesión	Noticia 4: Llegando a cien
Segunda parte "Carrera de observación"	5ª Sesión	La carrera la conforman cinco estaciones y para llegar allí cada una tiene una pista diferente que se tendrá que resolver.
Tercera parte "La fiesta de Halloween"	6ª Sesión	Por grupos organizaron una fiesta para cuarenta y dos invitados, por lo tanto, cada grupo tuvo una misión que cumplir.
	7ª Sesión	Los niños después de realizar cada misión explicaron cómo lo hicieron, participaron de la fiesta, recibieron al Ogro y compartieron todos.

*Fuente:*autora.

La solución a los enigmas estaba al alcance de todos, ya que se podían resolver utilizando diversas estrategias dependiendo de los conocimientos previos que cada cual tenía. El objetivo no era que un solo niño lo lograra, sino que a través de la cooperación todos los equipos llegaran a la solución para así poder disfrutar todos juntos el tesoro del Ogro.

Resultados

En el diagnóstico se observó gran disponibilidad para presentar la prueba y utilizar sus experiencias y pre saberes para resolver el problema,reconocimiento de la necesidad de seguir una estrategia para solucionar un problema matemático, se les facilitó más explicar el procedimiento pero no justificarlo con propiedad y veracidad, en cuanto al manejo de

operaciones básicas presentaron dificultad para ejecutarlas y se vio una necesidad enorme de aprobación del maestro para realizar continuar generando así dependencia.

Durante el proceso de intervención se pudo percibir en los estudiantes que en el comienzo se les dificultó el interpretar principalmente las reglas de los juegos y por lo tanto, la creación de estrategias para resolverlos no fueron efectivas en su totalidad, respecto al uso de operaciones matemáticas en la resolución de problemas se vio un progreso siendo más competitivos y asertivos, mantuvieron una actitud positiva frente al éxito como al fracaso buscando siempre mejorar, al explicar los procesos y justificar la elección de la estrategia para resolver el problema incrementaron su seguridad frente a la exposición de resultados asumiendo con valor la oposición de argumentos, valoración de la lectura atenta de enunciados y la importancia de la interpretación en el proceso comunicativo a través de cartas y el desarrollo de las fichas de trabajo.

En la prueba final se logró verificar la superación en gran medida, de dificultades en cuanto a resolución de problemas matemáticos, el juego, despertó el interés de los estudiantes y los mantuvo motivados hacia el aprendizaje, el fortalecimiento de habilidades comunicativas, el trabajo en equipo y actitud positiva frente a las matemáticas y el mejoramiento de habilidades de pensamiento matemático al utilizar y relacionar los números, las operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión.

Conclusiones

La comparación entre los resultados de la prueba diagnóstica, la prueba final y los hallazgos obtenidos en la intervención con la Estrategia Didáctica de Juegos de estrategia, permiten dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cómo potenciar en estudiantes de cuarto grado de primaria, el proceso de comunicación en la resolución de problemas a través de juegos de estrategia? Claramente se evidencia que el fortalecimiento de habilidades propias del ser humano se consigue mediante el uso de nuevos métodos de aprendizaje basados en la resolución de problemas contextualizados y en la aplicación de propuestas interesantes para los estudiantes y planeadas acorde a la edad, todo ello dentro de un marco de pensamiento crítico y aprendizaje activo.

De esta forma, se separa de enfoques tradicionales relacionados con la ejercitación de los algoritmos y el cálculo por sí solo. Se potencian dichas habilidades indispensables para obtener éxito en la resolución de problemas, a través del uso de gran variedad de situaciones de aprendizaje donde los estudiantes puedan explorar y participar independientemente de sus pre saberes encontrando agrado y persistencia al afrontar situaciones problémicas relacionadas con el uso de las matemáticas y donde se fomente el trabajo en equipo, la organización y la toma de decisiones. Al respecto, los resultados permiten ver que los estudiantes valoraron la lectura atenta de los enunciados para poder comprender los juegos, identificar las reglas y en la fase de verbalización de los resultados y del proceso de resolución vieron la importancia de esforzarse para hacerlo de forma coherente, ordenada y clara.

Momentos como, la forma de comunicarse por escrito con el Ogro a través de cartas y el desarrollo de las fichas de trabajo son actividades en las que la interpretación como habilidad logra un papel muy importante en el proceso comunicativo de los estudiantes. De

igual manera, se potencian habilidades de pensamiento matemático cuando los niños utilizan y relacionan los números, las operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático para crear estrategias, poner en práctica estrategias ganadoras y resolver los distintos juegos y problemas presentados analizando las distintas opciones de solución, aprendiendo de los errores y valorando la posibilidad de mejorar; estas actividades engrandecen el proceso de razonamiento y resolución de problemas en los niños. Finalmente, se puede concluir que los niños mejoraron sus procesos matemáticos y sobre todo su gusto, confianza y persistencia para afrontar situaciones problémicas relacionadas con el uso de la Matemática.

Referencias y bibliografía

Alberich, T. (2017). *Metodologías participativas*. Argentina:Unicen.Recuperado de http://beu.extension.unicen.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/123456789/246/Metodologias%20participativas.pdf?sequence=1

Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J. y Badilla, E. (2008). El estudio del paralelismo entre las fases de la resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática Unión*, *14*. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/14/Union_014_009.pdf

Elliott, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Ediciones Morata.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2004). *Didáctica de la matemática para Maestros*. Universidad de Granada. Recuperado de www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza.* Sociedad canaria de profesores de matemáticas Isaac Newton. Santacruz de Tenerife. Recuperado de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/sites/default/files/mguzman/06juegomat/juegosmatensenanza/juemat.htm#A

Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas.*Revista Suma,*4, 61-63.

Jiménez, A. y Pineda, L. M. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y Ciencia*, *16*, 101-116. Recuperado de https://revistas.uptc.edu.co/index.php/educacion_y_ciencia/article/download/3243/2920/

Lewin, K. (1992). *La investigación-acción participativa: inicios y desarrollos*. Editorial Popular.

Ministerio de Educación Nacional(MEN). (1994). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (MEN). (1994). *Ley General de Educación,* Ley 115 de 1994. Colombia. Bogotá D.C.

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton universitypress.

Tripero, A. T. (2011). Vygotsky y su teoría constructivista del juego. *E-Innova*. Recuperado dehttp://biblioteca.ucm.es/revcul/e-learning-innova/5/art382.php#.Vz3bitRrukp

Vigotsky, L. S. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*.La Habana: Editorial Científico-Técnica.

Yuste, F. C. (2008). Las matemáticas de los no matemáticos.Enciclopedia online Ecured. Recuperado de http://www.ecured.cu/zonade_desarrollo_próximo

.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Un estudio sobre el razonamiento probabilístico de estudiantes de grado once de un colegio del sector público de Cali

Juan Carlos Galindo **Realpe**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
juan.galindo@correounivalle.edu.co.
Karen Velasco **Restrepo**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
karen.velasco@correounivalle.edu.co.

Resumen

La vida diaria se encuentra permeada de eventos que tienen estrecha relación con el azar y la probabilidad. Sin embargo, a pesar de la presencia tan evidente de esta ciencia en la cotidianidad, la importancia que se le da en Colombia, aún sigue siendo mínima en comparación con otros temas matemáticos que se enseñan en la escuela. Por lo tanto, este trabajo se orienta en abordar las dificultades que presentan los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas probabilísticos, a causa del sistema de creencias (carga cultural) que influye de manera significativa durante la toma de decisiones que se presentan en nuestra vida. Para ello se realizó el diseño de una pruebadiagnóstica y tres hojas de trabajo en las cuales se propusieron actividades que giraban en torno a tres diseños realizados en GeoGebra, los cuales simulan situaciones probabilísticas comunes para los estudiantes.

Palabras clave: Resolución de Problemas, GeoGebra, probabilidad, sistema de creencias.

Presentación

El presente trabajo, hace parte de una investigación que se encuentra en curso y que tiene como propósito central, abordar las dificultades que presentan los estudiantes de grado once en el desarrollo del pensamiento probabilístico, a causa del sistema de creencias. Para ello,se diseñó una prueba diagnóstica con el fin de determinar el nivel de pensamiento probabilístico que poseen los estudiantes y posteriormente, de acuerdo a los datos obtenidos, se diseñaron tres actividades didácticas con sus respectivas hojas de trabajo, haciendo uso del software dinámico de GeoGebra. Estas actividades deben permitir que el estudiante alcance un nivel de pensamiento crítico en cuanto a conceptos probabilísticos y que se aleje de argumentos que puedan basarse en

algún sistema de creencias que conducen, con mucha frecuencia, a una predicción errónea de diferentes situaciones que se pueden presentar en nuestra vida. Con los diseños que se presentan en GeoGebra, el estudiante tiene la posibilidad de observar con más claridad cuáles son las características probabilísticas que se presentan al momento de lanzar tres monedas, dejar caer cierta cantidad de balotas por un circuito o incluso de jugar a la lotería.

Debido a las diferentes características con las que cuenta GeoGebra es posible que el estudiante tenga un papel más participativo y exploratorio en las diferentes actividades que se presentan, de modo que pueda por sí mismo construir conocimientos probabilísticos que le ayuden a tomar decisiones, utilizando bases mucho más sólidas que las de los sistemas de creencias.

Marco de la investigación

El marco teórico que fundamenta la problemática, el diseño de los instrumentos de investigación y el análisis de los resultados obtenidos a través de estos instrumentos, abarca cuatro elementos fundamentales:

El proceso de Resolución de Problemas

Trabajo de Schoenfeld. De acuerdo con Santos (1992),Schoenfeld señala en su propuesta que en el proceso de resolución de problemas intervienen las siguientes dimensiones:

- Dominio del conocimiento
- Estrategias Cognoscitivas
- Estrategias Metacognitivas
- Sistema de Creencias

Para el desarrollo de esta investigación, es importante tener en cuenta el sistema de creencias, el cual según Schoenfeld, citado en Santos (1992), hace referencia a las ideas de los estudiantes sobre las matemáticas y como resolver problemas, se considera un aspecto muy importante dentro de la propuesta de Schoenfeld, debido a que, lo que un estudiante piensa acerca de las matemáticas influye fuertemente en la forma en como resuelve problemas en matemáticas.

Lo anterior, se evidencia en la investigación llevada a cabo por Sánchez y Benítez (1997), en la cual, se puede observar que las creencias que tienen los estudiantes sobre el concepto de probabilidad, influyen considerablemente en el proceso de Resolución de Problemas. La investigación en mención, es detallada a continuación.

Los niveles de pensamiento probabilístico

El proyecto realizado por Sánchez y Benítez (1997), tenía como propósito describir algunas características del razonamiento probabilista de estudiantes de distintos niveles de escolaridad, cuando se enfrentan a problemas de probabilidad, definiendo así, los siguientes niveles del pensamiento probabilístico:

- **Impredicción:** se ubican aquí, a aquellos estudiantes que consideran que es imposible predecir resultados en situaciones aleatorias.

- **Determinístico:** en este nivel, se ubican los estudiantes que consideran que los resultados de una situación, en la cual interviene el azar, depende de causas divinas, físicas o empíricas.
- **Mecánico:** aquellos estudiantes que hacen uso de manera incorrecta de algoritmos para dar respuesta a una situación propuesta, lo que refleja que es resultado de un aprendizaje memorístico, carente de significado.
- **Pre-rigor:** se ubican aquí, aquellos estudiantes que vislumbran algunos resultados de un evento (no todos), tiene una capacidad más elevada para argumentar y se ha alejado un poco del nivel de pensamiento determinístico.
- **Rigor:** en este nivel se encuentran los estudiantes, que para argumentar hacen uso de diferentes representaciones para un problema, en otras palabras, pueden argumentar matemáticamente.

El uso de múltiples representaciones

De acuerdo con Rivas (2009), la mayoría de profesores de matemáticas, tienden a centrar su atención y aceptar como único medio de representación, el sistema simbólico algebraico (considerado el más formal), y pocas veces se hace explicita la relación entre las distintas formas de representación de los conceptos matemáticos, lo que genera que el aprendizaje adquirido por los estudiantes sea deficiente.

Por lo tanto, se consideró importante dentro de esta investigación, desarrollar y presentar a los estudiantes hojas de trabajo y diseños en el software GeoGebra, que conlleven a la utilización y articulación de los diferentes tipos de representación semiótica, debido a que como lo afirma Hitt (2001), en la Resolución de Problemas, las representaciones son consideradas como el corazón de las matemáticas.

Mediación Instrumental

De acuerdo con Moreno (2002), existen dos metáforas importantes en la construcción del conocimiento matemático en la escuela cuando se usan instrumentos de mediación, y son definidas de la siguiente manera:

- La metáfora de las herramientas de amplificación: se puede pensar aquí en una lupa, debido a que la herramienta nos permite ver, amplificado, lo que no se veía a simple vista.
- La metáfora de las herramientas de re-organización cognitiva: sugiere pensar en un microscopio, debido a que permite ver lo que no era posible sin la herramienta.

Con lo anterior, se puede decir entonces que se habla de herramienta, cuando un estudiante la usa como auxilio en la realización de cálculos o graficas dentro de un problema cuya solución ya ha encontrado, es decir, solo genera efectos de amplificación. En este caso, la herramienta no modifica, sino que complementa el pensamiento del estudiante.

Metodología

Es importante aclarar, por un lado, que el tipo de estudio es de corte mixto, denominado de esta forma debido a que las hojas de trabajo aplicadas a los participantes se analizaran desde los

enfoques cualitativo y cuantitativo, y por otro que el estudio se estructura, de las siguientes fases tal como se evidencia en la figura 1:

- Diseño
- Validación
- Uso de la Tecnología
- Recolección
- Análisis

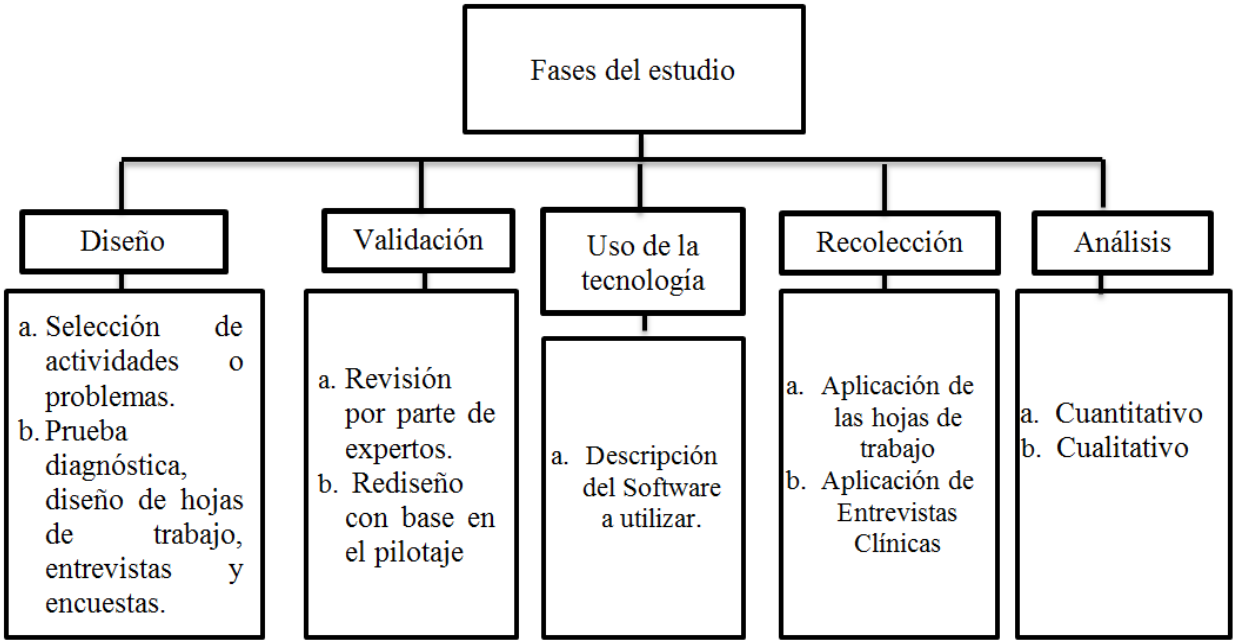


*Figura 1.*Fases del estudio. (Elaboración propia).

En la primera fase (diseño) se seleccionaron actividades, estructuradas de acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias en matemática propuestos por el Ministerio de Educación de Colombia (MEN 2006), para el grado once. Dichas actividades debían permitir una adecuada elaboración de preguntas que estarían presentes en la prueba diagnóstica y para ello se tuvo en cuenta una serie de criterios expuestos por Benítez (2006). La encuesta se realizó con el fin de identificar algunas características del pensamiento probabilístico que tenían los estudiantes y de este modo poder clasificarlos teniendo en cuenta los niveles de pensamiento probabilístico definidos por Sánchez y Benítez (1997), los cuales van desde la impredicción hasta un pensamiento riguroso.

La segunda fase consistió en realizar un pilotaje, de la prueba diagnóstica y las hojas de trabajo diseñadas, con el fin de que los diseños fueran revisados por expertos (director de la investigación, profesores con conocimiento en la elaboración de propuestas en tecnologías digitales y profesores del colegio escogido), y de acuerdo a las sugerencias recibidas, se procedió a realizar los respectivos ajustes, debido a que se considera que tales orientaciones fueron significativas dentro de este proceso para alcanzar los objetivos propuestos.

La tercera fase tenía como propósito presentar a los estudiantes algunas instrucciones sobre el manejo de GeoGebra con el fin de que pudieran desenvolverse con mayor facilidad en las actividades propuestas en las hojas de trabajo.

Adicionalmente, siguiendo a Benítez (2006), dentro de esta fase se implementarán las siguientes acciones:

- Descripción general del software.
- Taller de manejo de tecnología.
- Solución de problemas.

El tiempo destinado para el desarrollo de cada hoja de trabajo fue de una hora y se realizó en un aula dotada de los equipos suficientes y el software requerido.

La cuarta fase (recolección de la información), se llevó a cabo en el colegio Pedro Antonio Molina sede "Los Vencedores", durante el segundo semestre del año en curso, con estudiantes de grado once, tal como se ha mencionado anteriormente.

Esta fase se considera fundamental, debido a que a partir de esta se analiza y se procesa la información que se obtienen en cada una de las actividades que conforman la propuesta didáctica.

La información, fue obtenida de las siguientes fuentes:

- La prueba diagnóstica de entrada y salida.
- Las hojas de trabajo.
- Encuestas y entrevistas, según sea el caso.

Finalmente, con los datos obtenidos, se espera realizar en el transcurso del mes de noviembre del año en curso, el análisis, cuantitativo y cualitativo, de la información obtenida, y de esta manera, dar respuesta a las preguntas de investigación que son la guía para la realización de este trabajo, y además, se podrá evaluar el impacto de las actividades que fueron propuestas, en el salón de clase, a los estudiantes.

Conclusiones preliminares

De acuerdo a la información obtenidahasta el momento, la mayoría de los estudiantes participantes del estudio, se encuentran ubicados en los niveles de predicción y determinístico. Por lo tanto, se espera que con la intervención docente, la puesta en acto con el software GeoGebra y las hojas de trabajo, alcancen un nivel superior a estos.

Adicionalmente, se espera que, a través de los instrumentos diseñados, de las respuestas y los procedimientos, los estudiantes logren construir heurísticas y estrategias de control que les permitan resolver problemas de probabilidad con argumentaciones matemáticas.

Por último, consideremos que de acuerdo con Moreno (2002) es posible que el uso sostenido de la herramienta desemboque en cambios a nivel de las estrategias de solución de problemas y a nivel de la manera misma como se plantea el problema. Por lo tanto, se espera, que al usar GeoGebra como herramienta de mediación de la investigación, el

pensamiento matemático del estudiante quede afectado positivamente y se generen efectos de reorganización conceptual.

Referencias y bibliografía

Benítez, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios en la resolución de problemas con el uso de tecnología. Tesis Doctoral.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N, México.

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática. En P. Gómez & L. Rico (Eds.), *Educación Matemática, en Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 165–176). Universidad de Granada, Granada.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! En *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (pp.46–95). Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co.

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Ed.), *Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia.* (pp. 81–86). Bogotá, Colombia.

Rivas, A. (2009). *Un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en secundaria (Tesis de Maestría)*. Universidad Autónoma de Coahuila, México.

Sánchez, E., y Benítez, D. (1997). Algunos acercamientos al razonamiento probabilista de los alumnos. *Actas de Las Undécima Reunión Latinoamericana de Matemáticas Educativa*, *11*, 157–161. Recuperado de: http://clame.org.mx/uploads/actas/alme 11.pdf

Santos, M. (1992). Resolución de Problemas: El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación Matemática*, *4*(agosto), 16–23.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La Tienda de Matemáticas: Estrategia de ayuda entre iguales.

M. Guadalupe **Leal** Zamorano
Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro México
gpeleal07@gmail.com

Resumen

En este reporte se enuncian los principales hallazgos recuperados de la implementación de "La Tienda de Matemáticas" como estrategia de *ayuda entre iguales*, en la que los estudiantes avanzados (vendedores) ofrecen ayudas a sus compañeros (compradores). Se llevó a cabo en dos escuelas secundarias del estado de Querétaro, México. En la primera, a nivel grupo, constituyendo el precedente de la segunda, en la que se estableció a nivel escuela, participando como vendedores nueve alumnos de los tres grados, siendo el taller de dibujo técnico y el cambio de turno, el espacio y horario propicios para el desarrollo del proyecto. Se realizó un estudio narrativo mediante un proceso inductivo, en el que se concluyó que la ayuda entre iguales es ideal para implicar a los estudiantes en la *resolución de problemas matemáticos.*

Palabras clave: Educación secundaria, enseñanza-aprendizaje, pensamiento matemático, resolución de problemas, ayuda entre iguales.

Tema objeto de estudio

En el campo de la Educación Matemática la *resolución de problemas* es un tema relevante, tanto para la investigación como para el diseño e implementación de estrategias didácticas. Asimismo, el Sistema Educativo Mexicano (SEM), en sus planes y programas de estudio para la Educación Secundaria, ha considerado, desde 1993, la resolución de problemas como eje rector de las matemáticas y, con el propósito de situar el objeto de estudio *la ayuda entre iguales en la resolución de problemas* en el contexto actual, se retoman dos ámbitos del perfil de egreso, enunciados en el Modelo Educativo 2018, pensamiento matemático y, colaboración y trabajo en equipo, que refieren, respectivamente: "Amplía su conocimiento de técnicas y conceptos

matemáticos para plantear y resolver problemas" y "Reconoce, respeta y aprecia la diversidad de capacidades y visiones al trabajar de manera colaborativa".

Al respecto, se llevó a cabo un estudio narrativo con las evidencias de las dos etapas de la propuesta didáctica, para dar respuesta a la *pregunta*: ¿Cuáles son los principales hallazgos de la ayuda entre iguales que implican a los alumnos de secundaria en la resolución de problemas matemáticos?, por lo que se planteó el siguiente *objetivo*: Reconstruir una narrativa con los principales hallazgos de "La Tienda de Matemáticas" como estrategia de ayuda entre iguales en la resolución de problemas. En la cual los estudiantes avanzados asumen el rol de vendedores de ayudas pedagógicas y los alumnos que presentan dudas toman el rol de compradores de dichos apoyos, utilizando para la compra-venta monedas didácticas.

Para ello se retoman los acontecimientos más sobresalientes sucedidos durante la aplicación del estudio en las escuelas participantes, la "15 de septiembre", ubicada en la localidad de Vizarrón, Cadereyta, Querétaro; con 9 grupos de 35 alumnos en promedio; en la cual se implementó por primera vez el proyecto, en su fase *salón de clase* en un grupo de tercer grado, durante el ciclo escolar 2004-2005 y, años más tarde, en el ciclo 2010-2011, se llevó a cabo como *proyecto de escuela* en la secundaria "Las Américas", con domicilio en la ciudad de Querétaro, México. Esta última institución integrada por 36 grupos, 18 en cada turno, con una población total aproximada de 1500 alumnos.

Antecedentes y fundamentación teórica Estado de la cuestión

En este apartado se abordan los antecedentes relacionados con los enunciados generales que constituyen el objeto de estudio. Con respecto a la *resolución de problemas matemáticos*, Polya (1965) propone un procedimiento que consta de cuatro etapas: Comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva (p.19). Asimismo, Labarrere (1987), refiere cuatro momentos: Análisis inicial del problema, determinación de la vía de solución, ejecución de la solución y control de la solución realizada (p.37). Por otro lado, Barrantes (2006) expone los cuatro componentes cognitivos propuestos por Allan Schoenfeld: Los recursos, las heurísticas, el control y el sistema de creencias; los primeros son los conocimientos que el sujeto posee relacionados con el problema matemático, las heurísticas son las técnicas y estrategias para solucionar el problema, el control incluye planificar, estimar y tomar decisiones durante el proceso de resolución y, con respecto a las creencias el autor considera que afectan el proceso.

En relación a la *ayuda entre pares*, Moliner, Gambaro y Prades (2010) afirman que es un método de aprendizaje conjunto que se desarrolla en un clima de confianza y genera actitudes positivas hacia el estudio. Mosca y Santiviago (2012) refieren que en ese vínculo se favorece el interés por el aprendizaje y la asunción de compromisos; al respecto Valdebenito y Durán (2013) destacan el aprendizaje que adquiere el tutor durante la preparación previa para ayudar a su compañero, quien, de acuerdo con Durán y Flores (2014), se implica responsablemente en el estudio, estableciéndose una relación asimétrica, es decir, ambos alumnos enseñan y aprenden (Durán, Flores, Mosca y Santiviago, 2015) y, lo más importante es que la diversidad de capacidades y visiones se convierten en una fuente de aprendizaje. (Flores, Durán y Albarracín, 2017, p. 70).

La clase de matemáticas

Retomando la idea de ser matemático para alguien, de Chevallard, Bosch y Gascón (1998), se diseñó "La Tienda de Matemáticas" en un grupo de 3° de la escuela Secundaria General "15 de Septiembre", durante el tratamiento del tema ecuaciones lineales, correspondiente al Programa

de estudios 1993; en la cual los dos primeros equipos en resolver correctamente el problema planteado para la clase, se convierten en vendedores de ayudas pedagógicas y el resto de los estudiantes, si lo requieren, son los compradores de explicaciones para la consecución del objetivo propuesto en la sesión de trabajo.

La clase se desarrolla en tres momentos, en las *actividades de inicio* se plantea un problema y se lleva a cabo un análisis grupal del texto, a partir de una lluvia de ideas guiada por preguntas orientadora encaminadas a la comprensión de los datos, condiciones y exigencia del problema; en seguida los estudiantes forman triadas por afinidad. Posteriormente, en las *actividades de desarrollo,* los alumnos se dedican a resolver el problema con sus compañeros de equipo, mientras tanto la docente atiende las ayudas pedagógicas y, una vez que terminan con éxito una o dos triadas, los integrantes de esos equipos se ocupan de ofrecer las ayudas, más conocidas entre ellos como pistas, solicitadas por los alumnos que prefieren acudir a la tienda para lograr la resolución del problema. Por último, una vez concluida la compra-venta de ayudas, en las *actividades de cierre,* se realiza un análisis grupal de los procesos efectuados con la finalidad de fortalecer el pensamiento matemático y, en caso de ser pertinente, la docente introduce los algoritmos convencionales como un procedimiento más.

Fundamentos conceptuales

La primera consigna que sustenta la creación de "La Tienda de Matemáticas" refiere que hay una buena razón para aprender y enseñar matemáticas porque en la vida cotidiana uno se puede ver conducido a hacer de matemático para alguien. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998, p.35), es decir, no sólo el matemático o el maestro de matemáticas pueden hacer matemáticas, sino cualquier persona y en particular los alumnos al ayudar a sus compañeros en la resolución de problemas. Así es como surge la iniciativa de generar estrategias didácticas que impulsen el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la resolución de problemas, como es el caso de la *ayuda entre iguales,* porque los vendedores enseñan y aprenden ayudando a sus compañeros, teniéndoles paciencia si no saben algo, conversando en un clima de confianza. (Moliner, Gambaro y Prades, 2010).

En base a que la ayuda entre iguales es una estrategia que promueve el aprendizaje compartido y las relaciones interpersonales, se describe como la vinculación entre dos personas que establecen una relación asimétrica a partir de un objetivo común, conocido y compartido (Duran, Flores, Mosca y Santiviago, 2015, p. 32), para este caso, la resolución de problemas matemáticos. A partir de esta premisa se constituyen los enunciados que sustentan el análisis del objeto de estudio, teniendo en cuenta que en la formación de diadas se genera un *aprendizaje mutuo,* en el que se decreta una relación de ida y vuelta entre vendedor y comprador para lograr la resolución compartida, favoreciendo la autoestima y la implicación responsable en la actividad; porque, *estudiar juntos* sugiere saber trabajar en equipo y representa una extraordinaria oportunidad para las relaciones interpersonales. De este modo, el comprador recibe una atención ajustada a su zona de desarrollo próximo, en un clima de confianza, sintiéndose protagonista de su propio proceso de aprendizaje, derivado de la resolución del *problema matemático*.

Aprendizaje mutuo, de acuerdo con Duran y Flores (2014), consiste en "la capacidad de compartir el conocimiento y las experiencias entre los participantes" (p. 7), en cuanto a que aprenden de manera recíproca, es decir, se establece una relación bidireccional que soslaya la trasmisión del conocimiento, puesto que el vendedor de ayudas, aun cuando conoce la solución del problema, en el momento de dialogar con su compañero está en ocasión de aprender, por

ejemplo diversas formas de ofrecer ayuda, otros conocimientos, más heurísticos o los mismos pero desarrollados bajo otra perspectiva, esto es, se percata de algunas relaciones que no había detectado en su propia resolución y, bajo estas condiciones, se siente satisfecho por tener la facultad de aprender ayudando; por su parte el comprador se visualiza como un aprendiz que también puede enseñar y que, por ello, tiene muchas posibilidades de lograr su meta, implicándose responsablemente en la resolución del problema. En este sentido, Duran y Flores (2014) afirman que ejercer el rol de tutor favorece la implicación, la responsabilidad y la autoestima, mejorando las habilidades sociales, comunicativas y de ayuda. (p. 8).

Estudiar juntos, representa una excelente oportunidad para aprender a trabajar en equipo, porque los estudiantes se reúnen en diadas para resolver juntos los problemas de matemáticas, de forma que, mediante las relaciones interpersonales, surge la empatía y la confianza en sí mismo, creándose compromisos colaborativos. De esta manera, el vendedor enseña y aprende ayudando a su compañero, teniéndole paciencia cuando no sabe algo, generando así un clima de confianza (Moliner, Gambaro y Prades, 2010), en el que el comprador recibe una atención ajustada a su zona de desarrollo próximo, es decir, mediante la colaboración logra el nivel superior en el desarrollo (Dubrovsky, 2005, p. 29), porque la ZDP se define como la distancia entre el nivel de desarrollo real y el nivel de desarrollo potencial.

Problemas matemáticos. Considerando que el principal motivo de la ayuda entre iguales es la resolución de problemas matemáticos, para efectos del presente estudio "Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo." (Campistrous, L y Rizo, C., 1996, pp. IX-X). Entonces la situación exigida tiene que ser desconocida para la persona que acepta realizar la transformación. En este caso se incide en el desarrollo del pensamiento matemático, teniendo en cuenta que "un problema matemático es aquel que demanda del sujeto una intensa actividad cognoscitiva" (Labarrere, 1987, p. 19), porque para acceder a la respuesta tiene que pensar, razonar y encontrar los conocimientos y procedimientos que se espera conducen a la respuesta.

Diseño y metodología

Este trabajo se inscribe en el enfoque cualitativo, se realizó un diseño narrativo el cual, mediante un proceso inductivo, pretende entender los procesos de la ayuda entre iguales, a partir de las vivencias de las personas que las experimentaron (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p. 487). De este modo se contextualizó el momento y el lugar donde ocurrieron las experiencias didácticas, de forma que se identificaron tres categorías de análisis: aprendizaje mutuo, estudiar juntos y problemas matemáticos; para reconstruir los hechos y entretejerlos en una narrativa general que enuncia los hallazgos más sobresalientes de la implementación de "La Tienda de Matemáticas", en la que se destacan las ventajas que ofrece *la ayuda entre iguales* como estrategia para abordar el pensamiento matemático mediante la re*solución de problemas*.

La recogida de la información se llevó a cabo a partir de la revisión de los documentos archivados, correspondientes al desarrollo de cada una de las etapas; de la primera, el informe de los resultados y, de la segunda, el proyecto escrito presentado a las autoridades escolares, las listas de asistencia de los vendedores, la bitácora de registro de los compradores y el informe de los resultados; siendo éstos recursos las principales evidencias que facilitan el análisis a posteriori de la puesta en marcha de la estrategia. Además, es importante destacar que se cuenta

con el antecedente de la autoría, la propia intervención y, consecuentemente, la observación participante.

En relación a los participantes, el equipo de vendedores, del proyecto de escuela, se conformó inicialmente por 9 alumnos de los tres grados y de ambos turnos, seleccionados bajo los siguientes criterios: partícipes del entrenamiento para las Olimpiadas de Matemáticas, dispuestos a trabajar en el proyecto e interesados para implicarse en una estrategia de colaboración. Por su lado, los compradores fueron alumnos de la escuela, de cualquier grado y turno, que asistían al taller de dibujo técnico, con la finalidad de solicitar ayuda para resolver sus problemas de matemáticas.

Resultados Los principales hallazgos recuperados de la primera etapa de "La Tienda de Matemáticas", como estrategia de ayuda entre iguales, en el salón de clase son, en cuanto al *aprendizaje mutuo,* gran motivación por aprender ayudando, debido a que la mayoría de los alumnos manifiestan interés por asumir el rol de vendedores y en determinado momento lo consiguen, al respecto la Alumna 1 afirma: "aprendí a esmerarme en mi trabajo para lograr estar en la tienda", en este rubro, Duran y Flores (2014) refieren que quien ejerce el rol de tutor se implica responsablemente y mejora su autoestima (p.7); en relación a *estudiar juntos*, la misma estudiante expresa, "aprendí a trabajar en equipo (…), compartimos ideas, puntos de vista y aprendimos a respetar ideas y sugerencias"; por consiguiente todos los estudiantes del grupo logran terminar, en un ambiente de confianza, la solución de los *problemas matemáticos*, porque "es una forma de aprender mejor" (Alumno 2), a pesar de que "un problema matemático es aquel que demanda del sujeto una intensa actividad cognoscitiva" (Labarrere, 1987, p. 19) y, en este caso, también es notorio que algunos equipos persisten en lograr la resolución sin comprar ayudas, fortaleciendo con su perseverancia el pensamiento matemático.

También, es importante mencionar que en esta primera experiencia sobresale el Alumno 3, quien logra ser vendedor en casi la totalidad de las clases, convirtiéndose en el ayudante más solicitado, mismo que aprovechando esta coyuntura desarrolla diversas habilidades que le aseguran el éxito en su labor, porque de acuerdo con Duran y Flores (2014) el rol de tutor promueve habilidades sociales, comunicativas y de ayuda (p. 8). En suma, "la tiendita consistía en que la profa nos ponía un problema, lo resolvíamos en equipo y el primer equipo que acababa se ponía en la tiendita a vendernos información" (Alumna 4).

En la segunda etapa, el proyecto inicia a petición de algunos alumnos de la escuela, quienes participaron en las etapas eliminatorias de la Olimpiada Nacional de Matemáticas para Alumnos de Secundaria (ONMAS) y que manifestaron su deseo por continuar trabajando con los problemas matemáticos, de tal manera que, una vez formalizada la propuesta, ellos mismos se encargan de hacer la difusión y la organización interna del proyecto. En base al *aprendizaje mutuo,* se puede afirmar que los vendedores aprenden ayudando, teniendo en cuenta que es convincente la mejora en su desempeño durante la resolución de problemas en clase, como refiere un vendedor: "me sirvió mucho para reforzar mis conocimientos en las matemáticas" (Alumno de primer grado), con ello se confirma que la ayuda entre iguales es una estrategia de aprendizaje basada en la formación de parejas que establecen una relación de ida y vuelta (Duran, Flores, Mosca y Santiviago, 2015, p. 32).

Otro aspecto sobresaliente relacionado con *estudiar juntos* consiste en que los vendedores formulan problemas con anticipación, dirigidos a los compradores sistemáticos, es decir, a los alumnos que acuden regularmente, "por ejemplo de mi salón éramos seis y pues siempre íbamos" (Alumna A), en este caso Valdebenito y Duran (2013) sugieren que la preparación previa de los tutores facilita el aprendizaje de los tutorados, debido a que ajustan la ayuda a la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), favoreciendo el tránsito del nivel de desarrollo real al nivel de desarrollo potencial (Dubrovsky, 2005).

Por otro lado, es relevante mencionar que algunos estudiantes se incorporan al proyecto como compradores y posteriormente se convierten en vendedores, puesto que la ayuda entre iguales fomenta procesos motivacionales y relacionales que inciden positivamente en la resolución de problemas. En este sentido, Mosca y Santiviago (2012) afirman que en el vínculo entre tutor y tutorado se internalizan representaciones y valores que favorecen el interés por el aprendizaje y la asunción de compromisos. Lo anterior se ilustra con los comentarios de una vendedora: "pues cuando empezó el proyecto yo no estaba dentro porque en realidad no me gustaban las matemáticas (…) fue una experiencia muy bonita porque conocí a más personas y aprendí más (Alumna de 2° grado).

Un hallazgo más consiste en que la mayoría de los participantes mantienen el interés en la resolución de los *problemas matemáticos*, mismos que demandan del alumno "una intensa actividad cognoscitiva" (Labarrere, 1987, p. 19) porque la situación exigida es desconocida y la persona debe querer hacer la transformación, a partir del planteamiento inicial (Campistrous, L y Rizo, C., 1996). Asimismo, los vendedores expresan que cada vez les resulta más fácil ayudar a sus compañeros, al respecto, Duran y Flores (2014) refieren que el tutor desarrolla diversas habilidades (p. 8), por lo tanto, "era más fácil porque me enseñaba gente que iba en mi grupo y edad (…) y me tuvieron mucha paciencia en todo." (Alumna B); "podía preguntar con más confianza" (Alumna C), porque los vendedores enseñan y aprenden ayudando a los compradores, teniéndoles paciencia si no saben algo, propiciando un clima de confianza. (Moliner, Gambaro y Prades, 2010).

Además, es importante enfatizar que, una vez familiarizados con la resolución de problemas, los vendedores que cursan el primer grado son capaces de ayudar a los compradores de segundo grado y, por último, la trascendencia del proyecto se ve reflejada al final del ciclo escolar cuando dos vendedoras de segundo, por iniciativa propia, ayudan a sus compañeros de grado en su preparación para el examen extraordinario, fortaleciendo en ellos el pensamiento matemático que los llevó a la acreditación de la asignatura. **Conclusiones**

Mediante un proceso inductivo fue posible reconstruir una narrativa general de las vivencias de los alumnos que participaron en la conformación de "La Tienda de Matemáticas" como estrategia de ayuda entre iguales.

Los estudiantes ampliaron sus conocimientos de técnicas y conceptos matemáticos al plantear y resolver problemas entre iguales y, al mismo tiempo, aprendieron a respetar la diversidad de capacidades y visiones al trabajar de manera colaborativa.

De esta forma se puso en evidencia que, "La Tienda de Matemáticas", es una propuesta centrada en los alumnos, porque con el *aprendizaje mutuo*, mejoraron su autoestima y se implicaron responsablemente en la resolución de *problemas matemáticos* y, al *estudiar juntos*,

aprendieron a trabajar en equipo, por consiguiente, la ayuda entre iguales es una estrategia con un potencial incalculable para el desarrollo del pensamiento matemático.

Por último, cabe resaltar la evolución de dicha estrategia, creada en el salón de clase (20042005), transformada en proyecto de escuela (2010-2011) y, sin perder su esencia, reestructurada en un nuevo proyecto de escuela denominado "Alumnos tutores en la resolución de problemas matemáticos" (2014-2015), el cual constituye la ponencia presentada en la XIV CIAEM e integrada en la publicación *Educación Matemática en las Américas.*

Referencias y Bibliografía

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas: El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática, 1*(1), 1-9. Recuperado de https://docplayer.es/319024-Resolucion-de-problemas-el-trabajo-de-allan-schoenfeld1.html

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprender a resolver Problemas Aritméticos.* La Habana: Pueblo y Educación.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* México: SEP.

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). Resolución de Problemas. En Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas, 15*, 31-38. Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/pdf/Vol15Prob.pdf

Dubrovsky, S. (2005). *Vygotsky su proyección en el pensamiento actual*. México: Novedades educativas.

Duran, D. y Flores, M. (2014). Prácticas de tutoría entre iguales en universidades del Estado español y de Iberoamérica. *REICE revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficiencia y Cambio en Educación, 13* (1), 5-17. Recuperado de https://repositorio.uam.es/bitstream/handle/10486/666590/REICE_13_1_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Duran, D., Flores, M., Mosca, A. y Santiviago, C. (2015). Tutoría entre iguales: Del concepto a la práctica en las diferentes etapas educativas. *InterCambios, 2*, (1), 31-39. Recuperado de http://grupsderecerca.uab.cat/grai/sites/grupsderecerca.uab.cat.grai/files/art3_duran.pdf

Flores, M., Duran, D. y Albarracín, Ll. (2017). Razonar en pareja: Tutoría entre iguales para desarrollar la resolución cooperativa de problemas. *Aula de Innovación Educativa, 266*, 69-73. Recuperado de http://grupsderecerca.uab.cat/grai/sites/grupsderecerca.uab.cat.grai/files/razonar-enpareja-tutoria-entre-iguales-para-desarrollar-la-resolucion-cooperativa-de-problemasau26681506.pdf

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª. Edición). México: McGraw-Hill.

Labarrere, A. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas de matemáticas en la escuela primaria.* La Habana: Pueblo y educación.

Moliner, L., Gambaro, M. L., & Prades, X. (2010). Aprender mientras enseñas. *Cuadernos de Pedagogía, 405*, 28-30. Recuperado de http://grupsderecerca.uab.cat/grai/sites/grupsderecerca.uab.cat.grai/files/aprendermientrasense%C3%B1aslidon.pdf

Mosca, A. y Santiviago, C. (2012). *Fundamentos conceptuales de la tutoría entre iguales: La experiencia de la universidad de la República*. Montevideo: Universidad de la República.

Polya G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (27ª reimp.). México: Trillas.

Valdebenito, V. y Duran, D. (2013). La tutoría entre iguales como un potente recurso de aprendizaje entre alumnos: Efectos, fluidez y comprensión lectora. *Perspectiva educacional, formación de profesores, 52* (2). Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=333328170008

Secretaría de Educación Pública (2018). *Aprendizajes clave para la Educación Integral*. México: Autor. Recuperado de https://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/indexedubasica-niveles.html

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Classificando os Quadriláteros: uma Situação Didática envolvendo leitura

Luciano Soares **Gabriel**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
lussoga@hotmail.com

Cidimar **Andreatta**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
cidimarcol@gmail.com

Resumo

O presente trabalho refere-se a um recorte de uma pesquisa de Mestrado concluída junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul. Tem como objetivo principal compreender como uma situação didática, apoiada na teoria das situações didáticas, pode contribuir para o ensino de Geometria – Quadriláteros – no Ensino Fundamental II. A elaboração da situação didática baseou-se em noções da Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, realizada com estudantes do sétimo ano, na qual foram analisados os diálogos dos alunos, as resoluções escritas e seus comportamentos frente à atividade proposta. Considerando o que se mostrou nos dados da pesquisa, foi possível verificar que a interação dos alunos com as atividades realizadas estimulou o desenvolvimento do pensamento matemático e geométrico através da resolução de problemas que estimularam a utilização das habilidades de observação, formulação, comunicação, argumentação e validação.

Palavras chave: Educação Matemática, Educação Básica, Ensino de Geometria, Situação Didática, Quadriláteros.

Introdução

Como professor de Matemática do Ensino Básico na rede privada de ensino, há 14 anos, e vice-diretor de uma escola estadual, há 10 anos, tenho presenciado a dificuldade dos alunos em aprender Matemática, sobretudo no que se refere a conteúdos geométricos. Seja pelo despreparo de alguns professores para ensinar tais conteúdos, seja pela falta de materiais didáticos pedagógicos de apoio ou pela não familiaridade de alguns docentes com recursos tecnológicos, a Geometria torna-se de difícil compreensão e, até mesmo, sem significado para muitos estudantes.

Diante disso, decidimos trabalhar com esse tema em nossa pesquisa de mestrado (GABRIEL, 2017). Para isso, debruçamo-nos em leituras e estudos sobre o processo histórico de como ocorreu e ainda ocorre o ensino da Geometria no Brasil. Percebemos que, depois de uma época de abandono que se configurou após o Movimento da Matemática Moderna, hoje seus conteúdos estão presentes nas escolas brasileiras e as práticas pedagógicas para seu ensino estão recebendo atenção de professores e pesquisadores. Contudo, concluímos que é um ramo da Matemática que ainda carece de mais cuidado no que diz respeito à aprendizagem dos alunos, ao material didático e à formação de professores.

Verificamos os apontamentos relativos à Geometria destacados nos documentos brasileiros de orientações curriculares e consideramos as orientações atuais acerca das possíveis abordagens para seu ensino. Segundo PCN (BRASIL, 1998), o estudo da Geometria deve ter como ponto de partida a análise de figuras através de observações, manuseios e construções, que permitam elaborar conjecturas e identificar propriedades, ou seja, o documento recomenda estimular o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades.

Por isso, elegemos o conteúdo Quadriláteros para criar uma sequência didática, pois, dentre as inúmeras figuras geométricas, os quadriláteros possuem propriedades envolvendo os seus elementos (lados, ângulos, diagonais, área, perímetro, etc.) que, quando trabalhados adequadamente, permitem os alunos raciocinar indutiva e dedutivamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, desenvolvendo, assim, o pensamento geométrico. Notamos, portanto, que o estudo com os Quadriláteros vai ao encontro das recomendações dos PCN (BRASIL,1998).

Outro motivo que nos impulsionou para o trabalho com Quadriláteros foi o fato de encontrarmos nos objetivos indicados na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) sobre o ensino de Geometria, um específico relativo a esse conteúdo: "Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão de classes entre eles" (BRASIL, 2017, p. 259).

Ao adotarmos, como objeto de investigação, analisar as contribuições de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem do conteúdo Quadriláteros, buscamos aporte teórico na Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brosseau (2008), para elaboração das atividades que comporiam a sequência. Algumas dessas atividades serão relatadas na presente comunicação.

A Teoria das Situações Didáticas

Brousseau (2008) expõe como ideia básica, em sua Teoria das Situações Didáticas, aproximar o trabalho do aluno do modo como é produzida a atividade científica verdadeira, ou seja, o aluno se torna um pesquisador, testando conjecturas; formulando hipóteses; provando resultados; construindo modelos, conceitos e teorias, e socializando os resultados diante da resolução de um problema. Ainda segundo o autor, o aluno deve ser sempre estimulado a esforçar-se para superar seus limites e, com esforço próprio, construir novos conhecimentos. Para isso, sugere que o estudante passe por cinco etapas diante da resolução de um problema: • Etapa de devolução: ato pelo qual o professor cede ao aluno uma parte da responsabilidade pela aprendizagem.

- Etapa de ação: é aquela na qual o aluno, que se encontra ativamente empenhado na procura da solução de problema, realiza determinadas ações mais imediatas. Caracteriza-se pelo predomínio do aspecto experimental e operacional.

- Etapa de formulação: o aluno já utiliza na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada.

- Etapa de validação: os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações que fizeram, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações).

- Etapa de institucionalização: o professor retoma parte da responsabilidade cedida aos alunos e institucionaliza o saber construído, estabelecendo um caráter mais objetivo e universal para o conhecimento.

Assim, ao elaborarmos a sequência didática proposta neste trabalho, selecionamos e criamos atividades que oferecessem aos estudantes a oportunidade de vivenciar as cinco etapas sugeridas por Brousseau (2008) na resolução de um problema.

Entretanto, é necessário observar que essas etapas não têm um início e um fim especificamente delimitado, mas se entrelaçam fortemente durante o seu desenvolvimento. O reconhecimento das etapas, por parte do professor, é fundamental para o êxito, tanto na elaboração, quanto na aplicação de uma situação didática, pois desse reconhecimento depende o grau de mediação do docente.

Metodologia de Pesquisa

Para que pudéssemos coletar informações sobre as potencialidades da atividade que aplicamos em contribuir para o ensino e aprendizagem sobre os Quadriláteros, realizamos uma pesquisa de natureza qualitativa, na qual foram analisados os diálogos dos alunos, as resoluções escritas e seus comportamentos frente à atividade. Escolhemos atuar diretamente no ambiente de investigação – uma sala de aula regular do 7º ano do ensino fundamental, com 33 alunos de uma escola pública do interior do estado de São Paulo, durante o segundo semestre letivo do ano de 2016 –, envolvendo-nos com a situação por meio de uma pesquisa naturalista ou de campo, que, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 106) "[...] é aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece [...]". A aplicação da atividade foi conduzida pelo próprio pesquisador, que assumiu as aulas de Matemática durante esse período.

As atividades desenvolvidas com os estudantes da pesquisa foram realizadas em aulas duplas, ora individualmente, ora com grupos de três estudantes. Os grupos foram formados de forma aleatória e se mantiveram os mesmos do início ao fim da pesquisa.

O registro das informações fez-se por meio de fotos, gravações de áudio entre os diálogos ocorridos nas aulas, anotações (diário de campo) e documentos elaborados pelos alunos (resoluções escritas que os alunos fizeram para as atividades que compõem a sequência didática). A observação cuidadosa das aulas foi fundamental para que pudéssemos ter maior segurança na coleta dos dados, no intuito de não deixarmos passar despercebidas informações relevantes para a pesquisa.

A análise e a interpretação dos dados iniciaram-se juntamente com a coleta e foram tomando forma à medida que eram redigidas as anotações. Para interpretarmos os dados das atividades desenvolvidas, foram analisadas as anotações das observações do diário de campo, as fotos e áudios dos alunos durante as aulas e, principalmente, o material produzido por eles ao realizarem os registros das resoluções das atividades propostas.

Através dos resultados obtidos por meio dos registros e da análise documental, confrontamos as informações obtidas com a posição dos autores que deram sustentação teórica para o desenvolvimento da pesquisa.

As Atividades

As atividades que apresentaremos a seguir nos remetem às ideias de Freitas (2008). Segundo ele, cabe ao professor criar situações para que o aluno se aproprie dos conhecimentos, valorizando o que ele já sabe e envolvendo-o na construção do saber matemático. Utilizando esse pensamento como referência, decidimos criar uma história de aventura que cativasse o aluno com uma leitura de seu interesse, que fosse agradável e que estivesse de acordo com sua faixa etária, despertando, assim, a criatividade dos estudantes e abrindo portas para o incrível universo lúdico. A história criada serviu como alicerce para o desenvolvimento de todas as demais atividades da sequência didática, incluindo as descritas neste trabalho.

A História: O reino dos Quadriláteros

Há muito tempo, quando os humanos nem pensavam em existir, o mundo era dominado por estranhas criaturas: os polígonos. Tinham poderes mágicos, falavam, movimentavam-se e pensavam.

A luta pelo domínio do planeta era constante entre essas figuras geométricas e, para evitar grandes guerras, eles se dividiam em reinos. Havia o reino dos triângulos, o dos quadriláteros, o dos pentágonos, o dos hexágonos... Mas, frequentemente, aconteciam golpes, através dos quais uns tentavam invadir o reino dos outros em busca do domínio supremo.

Na tentativa de evitar esses golpes e manter a tranquilidade, os quadriláteros construíram uma grande muralha em torno de seu reino, com apenas uma passagem de acesso, onde um quadrilátero, com fortes poderes, exercia função de guarda.

Qualquer um que ousasse chegar perto da passagem, já de longe escutava os gritos do guarda que assim dizia:

-É um quadrilátero? Tem certeza de que tem quatro lados? Se não tiver, afaste-se, pois algo ruim pode lhe acontecer.

Assim era resolvido o problema das invasões no reino dos quadriláteros. Contudo, dentro do próprio reino, havia subdivisões. E, como o centro das terras era um lugar fértil e muito bonito, todos queriam lá habitar, porém era impossível, já que o espaço era notoriamente pequeno.

Assim, mais uma vez fortes e poderosos se beneficiavam, ficando com as melhores terras e, com o medo de perderem esse prestígio, novas muralhas eram levantadas e novos guardas foram designados para manter a hierarquia no reino.

A força e o poder dos polígonos de quatro lados eram medidos de acordo com algumas de suas características: lados paralelos lhes davam um poder, ângulos retos outros, lados congruentes outros. Existia, portanto, desde quadriláteros sem poderes até outros que acumulavam vários.

A política no reino dos quadriláteros funcionava assim: na muralha mais externa ficava um guarda que só deixava entrar polígonos com quatro lados. Perguntava e verificava se o polígono realmente tinha quatro lados. Havendo a confirmação, dava-lhe um colar com a identificação de quadrilátero.

Na segunda muralha, interna à primeira, a porta de entrada para terras um pouco mais férteis era vigiada por guardas que faziam uma restrição a mais para quem quisesse entrar. Perguntavam aos quadriláteros se tinham pelo menos um par de lados paralelos e, se tivessem, recebiam um outro colar com identificação de trapézios. Desse modo, nessas terras, entravam os trapézios mais simples (com apenas um par de lados paralelos) e também os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados, que também podiam ser considerados trapézios, já que possuíam a característica exigida pelo guarda.

Para adentrar a área cercada pela terceira muralha, o guarda exigia dois pares de lados paralelos. Os que conseguiam entrar recebiam um colar com a identificação de paralelogramos. Entravam os paralelogramos mais simples (com dois pares de lados paralelos) e também os retângulos, losangos e quadrados, todos acumulando três colares, visto que podiam ser considerados quadriláteros, trapézios e paralelogramos.

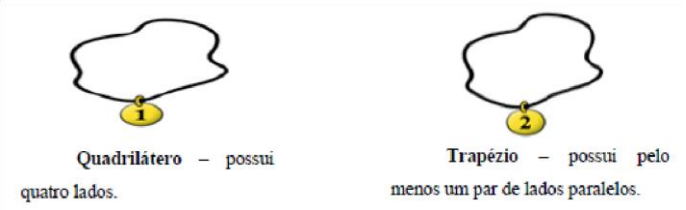
A quarta e a quinta muralha se entrelaçavam na região mais rica do reino. A entrega do colar pelo guarda da quarta muralha só acontecia com a condição de que os paralelogramos que lá quisessem entrar tivessem todos os ângulos retos. Já o da quinta muralha, se o paralelogramo tivesse todos os lados iguais.

Na região central (entrelace das quarta e quinta muralhas) também havia guardas e estes não exigiam uma nova característica para liberar a entrada, mas que os pretendentes tivessem todas as características e colares entregues pelos cinco guardas anteriores.

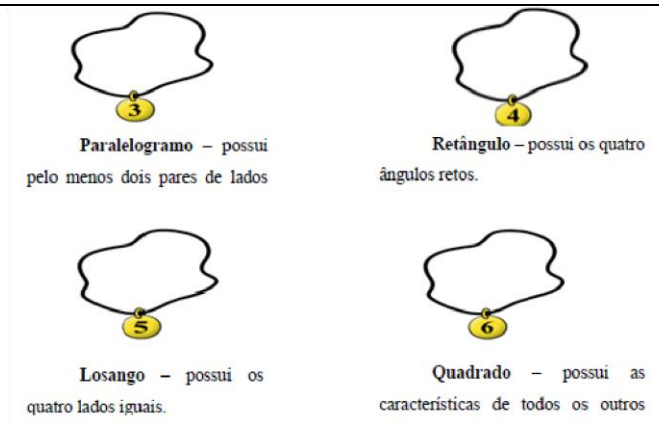
Uns quadriláteros podiam andar por todo o reino, visto que colecionavam todos os colares e tinham todos os poderes; outros somente em algumas regiões (pois possuíam apenas alguns colares) e outros em uma única região.

Durante milhares de anos, os quadriláteros organizaram-se assim até que, um dia, um pentágono irregular conseguiu esconder seu menor lado, passou-se por quadrilátero, entrando no reino e destruindo todos os quadriláteros e deixando apenas essa lenda como lembrança do reino.

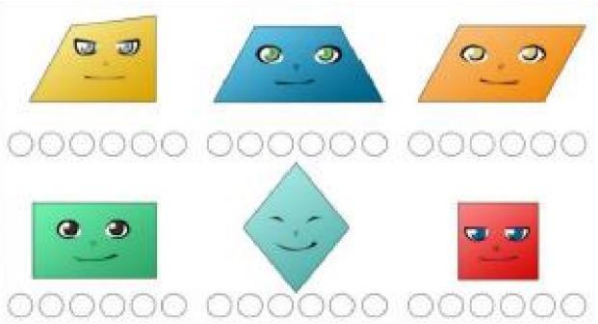
Atividade 1



Conhecendo essa história, você pode ajudar os quadriláteros abaixo que perderam seus colares. Vamos considerá-los numerados conforme a seguir:



Agora distribua-os de acordo com as características de cada quadrilátero, inserindo o número correspondente a cada colar nas circunferências que estão abaixo de cada quadrilátero a seguir:



Quadro 01. Atividade 1. *Fonte*: Gabriel (2017).

Gostaríamos de ressaltar que a abordagem utilizada na sequência didática para classificar os quadriláteros, de acordo com suas propriedades, foi realizada através de uma perspectiva hierárquica, onde se considera a classificação de um conjunto de conceitos de modo que os mais particulares são, muitas vezes, subconjuntos dos mais gerais (BONGIOVANNI, 2004). Assim, o objetivo da atividade, realizada individualmente após a leitura da história, era apresentar essa classificação. Durante o Ensino Fundamental I, os alunos se deparam, em geral, apenas com a

classificação de Euclides, partitiva e excludente, em que cada quadrilátero é distinto um do outro, não podendo, por exemplo, um quadrado ser considerado como paralelogramo ou retângulo ou losango. A atividade foi realizada pelos alunos sem dificuldade: dos trinta e um alunos presentes, apenas dois cometeram algum tipo de erro durante a distribuição dos colares que classificavam os quadriláteros.

Depois de lerem a história e realizarem a atividade anterior, os alunos já possuíam a noção de que um mesmo quadrilátero poderia ser classificado de maneiras diferentes. Era necessário, agora, compreenderem como era feita essa classificação. Os PCN (BRASIL, 1998) sugerem a realização de atividades de observação, manipulação, representação e construção de figuras de modo que os alunos possam fazer conjecturas e identificar propriedades. Então, para que essa compreensão fosse realizada com sucesso, seguimos as indicações dos PCN e, novamente, fundamentados na teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, formulamos as próximas atividades de nossa sequência didática. Segundo Brousseau (1996), o aluno deve ter um papel ativo diante de uma situação didática programada pelo professor, vivenciando momentos de investigação em sala de aula.

Atividade 2
A pedido do senhor de todos os polígonos, os quadriláteros tiveram de enviar a planta para mostrar como estava dividido seu reino. Dois quadriláteros ficaram responsáveis por essa tarefa, mas até agora não entregaram: um disse não saber fazer e o outro está quase terminando. Ajude o quadrilátero que disse não saber desenhar seu reino.

Quadro 02. Atividade 2. *Fonte*: Gabriel (2017).

Durante a realização da atividade, na qual precisavam desenhar o reino dos quadriláteros, percebemos que a maioria dos estudantes utilizava uma folha de rascunho para levantar hipóteses de como seria esse reino - desenhavam, apagavam e desenhavam novamente. Nessa fase experimental e operacional, achamos interessante o fato de que, para desenharem o reino, deixavam o texto com a história e a atividade de distribuição dos colares sobre a carteira. Desenhavam progressivamente conforme realizavam a releitura do texto e consultavam a atividade anterior.

Depois de muitas tentativas, observamos que os alunos chegaram a um desenho final que, cuidadosamente, foi passado a limpo na folha que continha o enunciado da atividade. Dentre os desenhos que entregaram, percebemos que nove deles não condiziam com a história contada.

Assim, passadas as etapas de ação e formulação (atividades 1 e 2), os alunos precisavam validar, debatendo com seus colegas, a veracidade de seus pensamentos. Para isso, demos início à atividade 3.

Atividade 3
Para verificar se seu desenho está correto, reúna-se com seu grupo, recorte alguns quadriláteros e distribua-os pelas regiões do reino. Se achar necessário, refaça o desenho.

Quadro 03. Atividade 3. *Fonte*: Gabriel (2017).

Pedimos para que se sentassem em grupo. Não falamos o que estava certo ou errado em cada ilustração, apenas pedimos para que recortassem alguns quadriláteros e tentassem

encaixálos em seus desenhos. O grupo todo tentava distribuir os quadriláteros no desenho individual de cada membro.

Durante a realização da atividade pelos alunos em nenhum momento falávamos qual era a ilustração correta; apenas estimulávamos os alunos com perguntas do tipo "Por que você acha que o seu desenho está correto? Por que você acha que o desenho de seu colega está errado? Você consegue mostrar onde está o erro no desenho de seu colega?" Assim, eles mesmos, através de esforços próprios, chegaram a um consenso de qual era a forma correta de desenhar o reino dos quadriláteros. Segundo Brousseau (2008), nessa situação os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer. O aluno não só comunica uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado.

Para termos ciência da decisão tomada pelo grupo a respeito de qual desenho estava correto, solicitamos aos alunos, embora não estivesse previsto na atividade, que elegessem um desenho do grupo para ser enviado ao senhor de todos os polígonos como a planta do reino dos quadriláteros e entregasse ao seu professor.

Conforme a atividade era finalizada, os alunos novamente nos chamavam em suas carteiras, mas agora para explicarem o porquê da escolha de um desenho em detrimento a outro. Percebemos que alguns alunos conseguiram convencer seus colegas e que os alunos convencidos aceitaram a argumentação, mudando de opinião e aceitando entregar o trabalho do colega para representar o grupo. Finalizamos, assim, a fase de validação dessa situação didática.

Considerações Finais

Analisando os apontamentos e descobertas revelados pelos alunos em seus diálogos e registros, entendemos que a abordagem do conteúdo matemático – Quadriláteros – através de atividades didáticas, apoiada na Teoria das Situações Didáticas, contribuiu para o ensino de Geometria. As atividades proporcionaram aos alunos refletir, simular processos e realizar tentativas ao se depararem com um problema, formulando, testando e reformulando hipóteses para resolvê-lo. Também oportunizaram a realização de elaboração de justificativas para validarem seus raciocínios. Durante o processo de validação vivenciado pelos estudantes, desenvolveram habilidades de argumentação e comunicação matemática, aprimorando, assim, seu vocabulário matemático e compartilhando diferentes estratégias de resolução de um problema. Percebemos, ainda, que a troca de experiências proporcionada pelo trabalho em grupos auxiliou os adolescentes a desenvolverem atitudes de colaboração mútua, socialização e interação, aumentando a autoconfiança, a autonomia e fortalecendo o pensamento crítico de cada membro do grupo.

Referências Bibliográficas

BONGIOVANNI, V. (2004). As diferentes definições dos quadriláteros notáveis. *Revista do Professor de Matemática*, 55, 30-32.

BRASIL. (2017). *Ministério da Educação*. Base Nacional Comum Curricular: documento preliminar, terceira versão, Brasília, DF: MEC.

_____. (1998). *Ministério da Educação e do Desporto*. Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. 3 ed. Brasília, DF: MEC.

BROUSSEAU, G. (2008). Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo, SP: Ática.

_____.(1996). Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. (pp. 35-113). Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa, Portugal: Instituto Piaget.

FIORENTINI, D.; & LORENZATO, S. (2009). Investigações em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados.

FREITAS, J. L. M. (2008). Teoria das Situações Didáticas. In: Sílvia Dias Alcântara Machado (org.). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. *Educ*, 77-111.

GABRIEL, L. S. (2017). *Contributos de uma sequência didática para o ensino de quadriláteros: compreensões a partir da teoria das situações didáticas*. 145f. (Dissertação de Mestrado, Universidade Cruzeiro do Sul) Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Programa de PósGraduação em Ensino de Ciências e Matemática.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Una aproximación al álgebra escolar desde la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación

Sebastián **Castañeda** Martínez
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
sebastian.castaneda.martinez@correounivalle.edu.co
Carolina **Castañeda** Martínez
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
castaneda.carolina@correounivalle.edu.co
Ligia Amparo **Torres** Rengifo [1]
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ligia.torres@correounivalle.edu.co

Resumen

Esta investigación tiene como propósito favorecer el acercamiento al álgebra en estudiantes de grado 8° de la Educación Básica colombiana a través de la Resolución de Problemas aritméticos haciendo uso del concepto de ecuación. Para lo anterior, se realiza el diseño y puesta en acto de una propuesta de aula que integra aspectos didácticos, curriculares y matemáticos. La propuesta consta de dos situaciones, cada una con cuatro problemas y una serie de tareas, que permiten guiar a los estudiantes en el proceso de resolución para caracterizar sus tipos de razonamiento y desempeños. La estrategia metodológica es de tipo cualitativa, ya que permite la recolección de información basada en la observación de los comportamientos, características y respuestas de los estudiantes frente a las situaciones propuestas, para la posterior interpretación de los resultados.

Palabras clave: Resolución de Problemas, ecuación, pensamiento aritmético, pensamiento algebraico, didáctica.

[1] Directora del Trabajo de Grado

Planteamiento del problema

Las investigaciones realizadas en los últimos años en el campo de la Educación Matemática (Freudenthal, 1983; Gallardo y Rojano, 1988; Brousseau, 1989; Kieran, 1992; Rojano, 1994; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Puig, 1998; Socas, 2007; Socas 2011; Castro 2012) dan cuenta de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Las dificultades presentes en los estudiantes parecen manifestarse en la falta de comprensión y funcionalidad de ese conocimiento, lo cual se evidencia por medio de errores conceptuales y procedimentales, que no permiten que los estudiantes analicen fenómenos matemáticos, interpreten resultados, solucionen problemas relacionados con la vida diaria, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas, entre otros.

Particularmente, en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, estas dificultades son categorizadas por Castro (1994), en dificultades intrínsecas al objeto (epistemológico), dificultades inherentes al propio sujeto (ontológico) y dificultades en las técnicas de enseñanza (didáctico). Las dificultades intrínsecas al objeto se deben en gran medida a la naturaleza misma del álgebra, es decir, a su lenguaje formal, que se dota de símbolos y reglas (sintaxis), lo cual genera en los estudiantes errores de tipo procedimental y conceptual, como por ejemplo, errores al resolver problemas algebraicos (convertir los enunciados del lenguaje natural al lenguaje formal), errores con el uso de paréntesis, concebir los valores de las incógnitas solamente como números u objetos, errores al considerar el signo igual como se hacía en aritmética, es decir, tener la noción que a la izquierda del signo igual se encuentra una operación mientras que a su derecha se encuentra el resultado (como $2 + 7 = 9$ pero $2x + 7y \neq 9$ó $9xy$), en lugar de verlo como un signo de equivalencia entre dos polinomios. Las dificultades inherentes al sujeto se enmarcan en la complejidad que supone la abstracción y la generalización de los conceptos algebraicos y las dificultades presentes en las técnicas de enseñanza se deben a la forma tradicional de enseñar de los docentes.

Por lo anterior, se presenta la Resolución de Problemas como una alternativa para la aproximación al álgebra, expuesta por Bednarz, Kieran y Lee (1996), que permite diferenciar y caracterizar los problemas de tipo algebraico (transformar cantidades y encontrar relaciones entre cantidades) y de tipo aritmético (buscar cantidades conocidas y desconocidas), es decir, que existe un puente significativo, puesto que los problemas aritméticos abordados desde lo algebraico, podrían influenciar un tránsito de la aritmética al álgebra más flexible, ya que analizar un problema desde los dos dominios, permite identificar nuevas características en la estructura algebraica. Por lo tanto, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo favorecer el acercamiento al álgebra escolar en estudiantes de grado 8° de la Educación Básica de una Institución particular de la ciudad de Santiago de Cali, a través de la resolución de problemas aritméticos haciendo uso del concepto de ecuación?

Marco de referencia conceptual

La fundamentación de los referentes conceptuales se hace desde las perspectivas didáctica, curricular y matemática, que permiten sustentar la problemática planteada, el diseño de la propuesta de aula y análisis de los resultados obtenidos de su implementación, en estudiantes de grado 8° de la Educación Básica Secundaria. En la primera perspectiva se sitúan las dificultades que se presentan en el tránsito de la aritmética al álgebra, al tener como eje central la resolución de problemas desde un enfoque metodológico para el desarrollo de la propuesta de aula. La segunda se aborda desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). En la tercera perspectiva se referencian algunos conceptos matemáticos que emergen en el diseño de la propuesta de aula, donde el foco principal es la ecuación de primer grado con una incógnita.

En la primera perspectiva se organizan dos aspectos fundamentales, el primero son las dificultades presentes en el tránsito de la aritmética al álgebra mencionadas anteriormente, en el segundo se precisan elementos de la resolución de problemas abordados en Bednarz y Janvier (1996), quee procura esclarecer las condiciones de la evolución del razonamiento algebraico en un contexto de resolución de problemas, al ser esta una de las perspectivas más significativas desde la historia y enseñanza del álgebra. Además, permite analizar los problemas planteados a los estudiantes, de tal forma que se gradúe su complejidad y así observar un progreso, teniendo en cuenta los procedimientos disponibles que poseen los estudiantes para manipular y llegar a la solución de dichos problemas. Por otra parte, proporciona parte de la caracterización del tipo de problemas que se pretenden abordar en la propuesta de aula, es decir, permite observar la estructura de los problemas propuestos, con el objetivo de construir problemas con contextos reales. Además, la metodología cualitativa de entrevista semi-estructurada utilizada permite analizar el tipo de pensamiento que desarrollan los estudiantes al resolver problemas.

En la segunda perspectiva los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) aportan elementos claves para el desarrollo y consolidación de la propuesta de aula, puesto que hacen énfasis en desarrollar pensamiento matemático en los estudiantes e invitan a cuestionarse el para qué enseñar y no qué enseñar. Particularmente, en los Procesos Generales, Conocimientos Básicos y Contextos se centra la atención en la resolución y planteamientos de problemas, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y los contextos de la vida diaria respectivamente.

En adición, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) proponen una estructura desde una coherencia vertical y horizontal de las competencias que se pretenden desarrollar en los estudiantes, categorizadas por grados de escolaridad, es decir, 1° a 3°, de 4° a 5°, de 6° a 7°, de 8° a 9°, de 10° a 11° y por tipo de pensamiento matemático. Para fines de este trabajo se tendrán en cuenta la coherencia vertical y horizontal del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos de grado octavo a noveno, relacionados con el proceso de resolución de problemas en un contexto real.

Por último, en la tercera perspectiva se presentan conceptos netamente matemáticos acerca de los polinomios y las ecuaciones, que son de vital importancia en la construcción de la propuesta de aula, y el enfoque esperado desde la resolución de problemas en el tránsito de la aritmética al álgebra, pretende hacer que los estudiantes aborden estos conceptos.

En conclusión, para el diseño de la propuesta de aula se resaltan y sintetizan aspectos relevantes desde las tres perspectivas planteadas anteriormente puesto que permite articular y relacionar cada una de estas perspectivas para la consolidación de la propuesta basada en la resolución de problemas. La figura 1 evidencia lo anterior así:

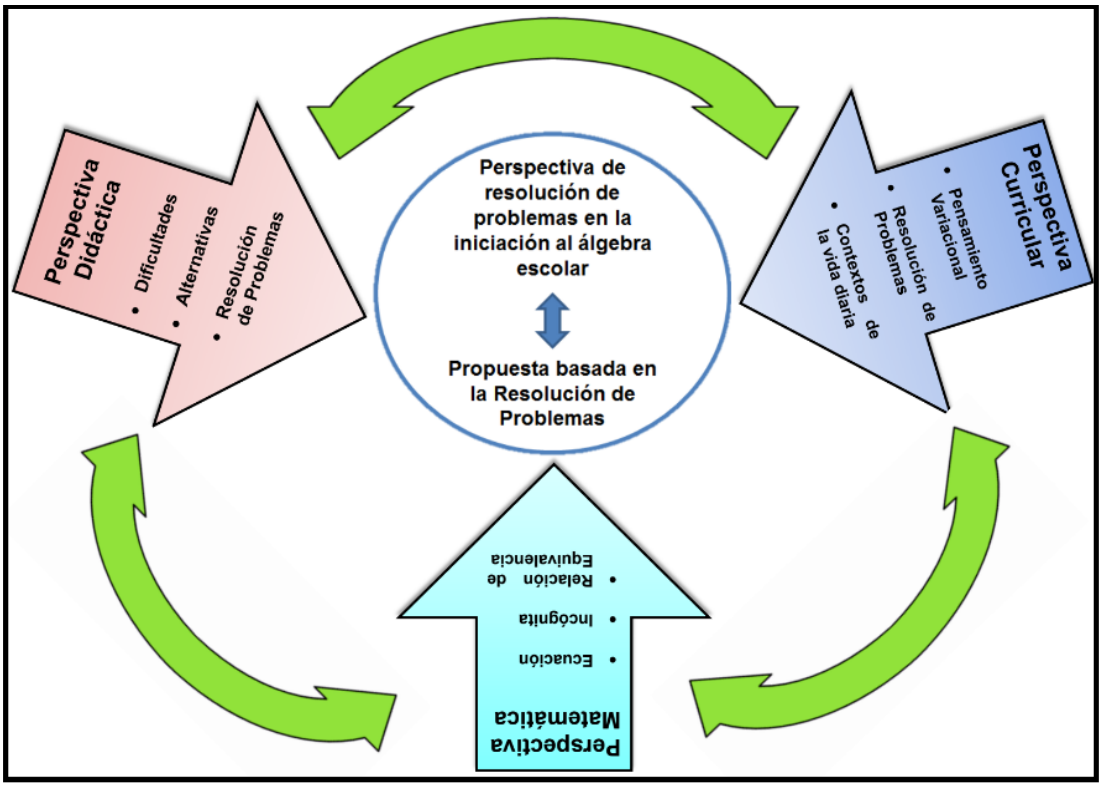


Figura 1. Diagrama de la relación entre las perspectivas didáctica, matemática y curricular.

Metodología

Las estrategias metodológicas que se utilizan son de tipo cualitativas, ya que permiten la recolección de información basada en la observación de los comportamientos, características y respuestas de los estudiantes frente a las situaciones propuestas, para la posterior interpretación de los resultados. Particularmente, se centra la atención en el estudio de casos y la entrevista clínica semi-estructurada. La primera, es una estrategia de investigación que permite describir y caracterizar situaciones, conocimientos, acciones, sin hacer juicios, además tiene la intencionalidad de obtener información, resultados teóricos y prácticos, con el fin de analizar las experiencias de los estudiantes. La segunda estrategia de investigación se complementa con la primera, debido a que permite reunir opiniones e ideas espontáneas y reales de los estudiantes con el fin de analizar los procesos de razonamiento que poseen, por medio de preguntas estructuradas con la flexibilidad de cambiarlas con base en las respuestas de los entrevistados (Camargo, 2018). El trabajo se desarrolla en cuatro fases que son, documentar la problemática, articulación del marco de referencia conceptual y diseño experimental, implementación y análisis de los resultados y conclusiones y recomendaciones didácticas.

Sobre la experimentación

La propuesta de aula se conforma por dos situaciones, cada una con cuatro problemas, dos problemas con composición homogénea de dos relaciones aditivas, un problema con composición homogénea de dos relaciones multiplicativas y el último problema con composición no homogénea de dos relaciones, con diferentes vínculos entre las relaciones en cada situación. La situación 1 tiene como dominio numérico el conjunto de los números naturales y la situación 2 tiene como dominio numérico el conjunto de los números racionales positivos. En adición,

cada problema contiene una serie de tareas que tienen como propósito direccionar al estudiante en el proceso de resolución para caracterizar sus tipos de razonamiento y desempeños.

Para la construcción de la propuesta de aula se establece un **análisis preliminar** que determina los criterios de análisis para el tránsito de problemas aritméticos a algebraicos que son: *el dominio numérico, la naturaleza de los datos (conocidos o desconocidos), el contexto, la estructura de las relaciones involucradas, la complejidad relativa de los problemas con respecto a las relaciones involucradas y las estrategias espontáneas de los estudiantes*. Además, se caracterizan los problemas en **problemas de repartición desigual** y se clasifican por factores de complejidad en cuanto a la naturaleza de las relaciones: *Composición homogénea de dos relaciones aditivas, composición homogénea de dos relaciones multiplicativas y composición no homogénea de dos relaciones.*

Por otra parte, se seleccionaron 30 estudiantes de grado 8° de la Institución Educativa Técnico Industrial 20 de Julio, de la ciudad de Santiago de Cali, Colombia, para la implementación de la propuesta de aula. Las edades de los estudiantes oscilan entre los 13 y 15 años, pertenecientes a un nivel socioeconómico medio. Los estudiantes tienen conocimientos básicos en aritmética que les permite resolver los problemas planteados en la propuesta de aula. Cabe resaltar que los estudiantes no han tenido un acercamiento al álgebra simbólica.

Un ejemplo del contenido de las situaciones es:

SITUACIÓN 1: FIESTA DE LOS NIÑOS Y PROBLEMAS ARITMÉTICOS.

En el mes de octubre, en muchos países se realizan actividades dedicadas a los niños y niñas. Entre esas actividades están: compartir dulces y colocarse el disfraz de su personaje favorito. La Institución Educativa Técnico Industrial 20 de Julio no es la excepción. Por ello, los profesores de primaria realizan actividades acordes a esta fecha. Particularmente, la profesora Mayerleny acompaña a sus estudiantes de grado tercero, cuarto y quinto de primaria disfrazados a pedir dulces por todos los salones.

Ayuda a la profesora a resolver las situaciones que se le presentaron.

Problema 1: Grupos de estudiantes y problema con composición homogénea de dos relaciones aditivas.

La profesora Mayerleny necesita saber cuántos estudiantes asistieron al colegio en los grados 3°, 4° y 5° antes de comenzar la actividad de pedir dulces por todos los salones**.** Si se sabe que en los tres grados asistieron 90 estudiantes, y el grado 3° tiene 16 estudiantes más que el grado 5°, y el grado 4° tiene 10 estudiantes más que el grado 3°. ¿Cuántos estudiantes asistieron en cada grado?

Tareas

Indica cómo se conforma la cantidad total de estudiantes.

1. a. De acuerdo con el problema, indica si los datos involucrados permiten calcular la cantidad de estudiantes de cada grado o si por el contrario hacen falta datos.
   b. Explica tu respuesta.
2. Sí Carolina, estudiante de grado 4° afirma que la cantidad de estudiantes de grado 5°es de 20

estudiantes.
   a. Escribe la validez de está esta afirmación.
   b. Explica tu respuesta.
3. Indica cuál de los grados tiene el mayor número de estudiantes.
4. Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de 3°.
5. Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de 4°.
6. Indica cuántos estudiantes asistieron en los grados 3°, 4° y 5°.

Problema 2: Recogiendo dulces y problema con composición homogénea de dos relaciones aditivas.

Los grados 3°, 4° y 5° recogieron 300 dulces. Los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°, y los estudiantes de grado 5° recogieron 50 dulces más que los estudiantes de grado tercero. ¿Cuántos dulces recogió cada grado?

Tareas

1. Daniel estudiante de grado 4°, afirma que los grados 3°, 4° y 5° tienen la misma cantidad de dulces, es decir 100 dulces para cada grado.
   a. Escribe si esta afirmación es verdadera o falsa.
   b. Explica tu respuesta.
2. Según el problema los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°. De acuerdo a la afirmación anterior los estudiantes de grado 4° recogieron 100 dulces. Explica esta situación.
3. Escribe como se calcula el total de dulces recogidos de acuerdo a lo que recogió cada grupo.
4. Cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 3°
5. Cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5°
6. Si x representa la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 4° completa la siguiente tabla.

Lenguaje natural	Lenguaje algebraico
Cantidad de dulces de grado 4º	x
Cantidad de dulces de grado 3°	
Cantidad de dulces de grado 5º	
Cantidad de dulces entre los tres grados	
Cantidad total de dulces en los tres grados es 300	

7. ¿Cuántos dulces recogió cada grado?

Discusión de resultados

En el análisis preliminar se puede evidenciar que los estudiantes desarrollan estrategias, modelos y convicciones para resolver problemas, los cuales se ven reflejados cuando ellos se

enfrentan a problemas algebraicos. Las concepciones desarrolladas en aritmética son el punto en el cual surgen nuevas soluciones, que pueden ser consideradas como obstáculos o como principios en la construcción del conocimiento, debido a que por una parte los estudiantes tienen arraigado una forma o estrategia para resolver problemas, lo cual puede presentar una resistencia para una evolución del pensamiento aritmético al algebraico o por el contrario pueden ayudar al estudiante a identificar estrategias más efectivas, para reconstruir los conocimientos previos de tal forma que se propicie un acercamiento al pensamiento algebraico.

Se espera que en el momento de la presentación de la comunicación se tengan resultados más contundentes y precisos con relación a los resultados puesto que la propuesta está en desarrollo.

Referencias y bibliografía

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Aproximaciones al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N & Janvier, B. (1996). *Surgimiento y desarrollo del álgebra como una herramienta en la solución de problemas. Continuidad y discontinuidad con aritmética.* En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), Aproximaciones al álgebra. Perspectivas para la investigación y enseñanza (pp. 115-136).

Brousseau, G. (1989), 'Les obstacles ´epist´emologiques et la didactique des math´ematiques'. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), Construction des savoirs. Obstacles et conflits, Les Editions Agence d'ARC, Quebec, 41-63.

Camargo, L. (2018). Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Manuscrito no publicado.

Castro, E. (1994). "Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)" Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. Dordrecht: Reidel. 1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. Researchs in Didactique dec Mathématiques, 9, 155- 18.

Kieran, C. (1992). El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar. En Grows, D.A. (Ed.), Manual de Investigación en Matemática Enseñanza y Aprendizaje. Macmillan Publishing Company. New York, pp. 390-419.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). Lineamientos curriculares para matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia.

Puig, L. (1998). Cómo poner un problema en ecuaciones. Valencia. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf

Rojano T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y

enseñanza. Enseñanza de las Ciencias 12 (1)

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), Investigación en Educación Matemática XI (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números, revista de didáctica de las matemáticas, 77, 5-34.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Operaciones básicas con algoritmo gráfico[1] en la escuela primaria

Angel **Totolhua** Tlaque
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
atotolhua@cinvestav.mx
Marta **Valdemoros** Alvarez
Departamento de matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen

Los obstáculos conceptuales y operatorios que presentan los alumnos de sexto año de primaria para realizar tareas en las que intervenga la adición, sustracción, así como la multiplicación y la división de números fraccionarios, son centrales en el presente trabajo de investigación. Las tareas presentadas son ejemplificadas por medio del algoritmo canónico y el algoritmo gráfico, para dar una idea de cómo resolver cada una de ellas, sin embargo, los alumnos presentan una serie de dificultades en ambos algoritmos, no obstante, los errores que cometen los alumnos son más claramente verificados al realizar el algoritmo gráfico, el cual nos da la oportunidad de tener más indicios de cómo enfrentar dichas dificultades tanto conceptuales como operatorias y alcanzar el aprendizaje significativo de la mayoría de los alumnos de sexto grado de primaria, lo cual es fundamental para el proceso de investigación al que sirve de preámbulo este artículo.

Palabras clave: Números fraccionarios, algoritmo canónico, algoritmo gráfico, obstáculos conceptuales y operatorios, aprendizaje.

Introducción

El análisis de las estrategias y las dificultades que los alumnos de sexto grado de primaria enfrentan para resolver problemas en los que es necesario aplicar la multiplicación y la división de números fraccionarios son fundamentales para explicar cómo en Educación Básica, el conocimiento de los números fraccionarios o racionales suele considerarse como una difícil problemática; sin embargo, como se explicará más adelante la multiplicación de fracciones y en especial la división de fracciones es una de las operaciones con números racionales más mecánica y menos comprendida por los alumnos tanto de la escuela primaria como de la escuela secundaria (Tirosh, 2000, Cengiz, 2011).

[1]Algoritmo gráfico, definido por Kieren (1983) como aquel algoritmo que se realiza por medio de figuras geométricas o expresiones gráficas.

En consecuencia, los resultados obtenidos por los alumnos son muy bajos como se demuestra en la prueba Planea aplicada a alumnos de sexto grado de primaria y la prueba Sisat aplicada a alumnos de la Escuela secundaria[2].

El tratamiento que se da a estos números en las escuelas de México es muy importante, ya que abarca una gran cantidad de tareas en el libro de texto para el alumno de sexto grado denominado *Desafíos Matemáticos* (SEP, 2017), en total se registraron 21 lecciones de un total de 85, es decir, el tema de fracciones abarcó casi un 25 % del total de lecciones.

La problemática planteada no se presenta como algo trivial que se resolverá sólo con el conocimiento de los números naturales, y sin tener conciencia de que el tratamiento de los números racionales debiera considerarse independientemente de dichos números naturales.

Marco teórico

El aprendizaje de las fracciones como lo señalan diversos autores son de una complejidad, como lo señala Kieren (1983) "la construcción del número racional es más amplia que la de los números naturales".

La enseñanza de las fracciones en México se inicia en la escuela primaria, se presta especial atención en los primeros años a la suma y resta de números fraccionarios, y en losdos últimos años la multiplicación y división, entonces surge naturalmente una pregunta: ¿por qué los alumnos que ingresan a la escuela secundaria no tienen un conocimiento sólido en cuanto a las cuatro operaciones básicas con el uso de números fraccionarios?

La suma y la resta de números fraccionarios se presentan en la escuela primaria como un referente similar al de los números naturales, ya que las 2 cantidades similares involucradas e identificados como sumandos producirán una tercera cantidad similar (Swartz, 1989), del mismo modo las cantidades similares involucradas en la resta producirán una tercera cantidad similar (Swartz et. al. 1989)

La multiplicación y especialmente la división de fracciones se presentan en la escuela primaria y en la escuela secundaria como las operaciones de mayor dificultad en cuanto a su aprendizaje se refiere, y los maestros tienen que recurrir a múltiples estrategias de enseñanza para que los estudiantes adquieran este aprendizaje; aunque cabe decir que algunos estudiantes se conforman con aprender algunos tipos de algoritmos que los lleve al resultado, pero que lamentablemente no entiendan los significados conceptuales de dicha operación.

Algunas propuestas de cómo resolver los algoritmos los encontramos incluso en redes sociales, las cuales poco aportan al aprendizaje de los estudiantes y si los confunden con respecto a lo que aprenden en la escuela.

Entre las dificultades más sobresalientes de la multiplicación y división de fracciones se observa que los números fraccionarios al parecer operan de manera contraria a los números naturales, es decir, al realizar la multiplicación de números naturales partimos de la idea de que las cantidades multiplicadas inicialmente darán como resultado un número mayor (Swartz, 1989, Vergnaud, 1983), mientras que si las cantidades multiplicadas son números fraccionarios entonces el resultado final será menor que las cantidades iniciales; en cambio al realizar la división de números naturales, el cociente de dichos números dará una cantidad menor,

[2] Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes (Planea),y Sistema de alerta temprana (Sisat), son evaluaciones aplicadas a los alumnos de sexto de primaria y secundaria en México.

mientras que en la división de números racionales el cociente será mayor, por lo que los estudiantes dudan de cualquiera de estos resultados, ya que no se apegan a lo aprendido en cuanto a los números naturales[2].

Otra dificultad en el aprendizaje de los números racionales se refiere a la relación que existe entre la situación problemática y la operación apropiada para resolverla (Jensen, 2015, Fishbein, 1985) ya que pensamos que no sólo es importante llegar al resultado correcto, sino tener la certeza de que el alumno utilizó la o las operaciones adecuadas para llegar al resultado final, pues no es recomendable confiar solo en la intuición de los estudiantes ante este tipo de dificultades.

En cuanto a los campos conceptuales enunciados por Vergnaud como "un conjunto de situaciones, cuyo dominio requiere el dominio de varios conceptos de diferentes naturalezas", podemos decir que el campo conceptual utilizado en este trabajo sólo se referirá a los conocimientos que tengan que ver con las expresiones gráficas (Kieren, 1985), y todas aquellas ideasque los alumnos tengan en cuanto a representar gráficamente las situaciones problemáticas que tiene que ver con los números fraccionarios.

En este trabajo se pretende rastrear los conocimientos más primitivos de los niños en cuanto a las operaciones básicas en las que se involucra el uso de los números fraccionarios.

Teoremas en acción

El teorema en acción[3] es fundamental en este trabajo de investigación ya que a través de él pretendemos analizar las dificultades que tiene los estudiantes para resolver una situación problemática, pero que en muchas ocasiones no las pueden expresar verbalmente, sólo realizan las operaciones que consideran necesarias para resolver el problema, pero no se detienen a analizar cuál o cuáles caminos siguieron para obtener la respuesta.

A través de los teoremas en acción se pretende valorar cada una de las estrategias intuitivas utilizadas por los estudiantes para transformar el conocimiento intuitivo en conocimiento explícito, así como conocer que tanto saben o no saben nuestros alumnos, para ayudarlos en la consolidación de su conocimiento.

La intención de este trabajo de investigación es dar a los alumnos las herramientas necesarias para que conozcan cómo funciona la suma y resta de fracciones a través del "algoritmo gráfico" (Kieren, et. al. 1985), para que de manera autónoma puedan intuir también por qué funciona la multiplicación y la división en los números fraccionarios.

Metodología

Muestra

Se aplicó un cuestionario a 33 alumnos de sexto grado de una escuela primaria ubicada en la periferia de la capital del Estado de Puebla, la institución fue seleccionada porque es una de las que mejor desempeño ha tenido en la prueba Enlace y Planea de los últimos años, por otra parte, la maestra titular del grupo muestra una gran disposición para el trabajo de los números fraccionarios.

[3] Teoremas en acción definidos por Vergnaud como las relaciones matemáticas que los estudiantes toman en cuenta cuando eligen una operación o una secuencia de operaciones para resolver un problema.

Tareas

Las tareas asignadas a los alumnos fueran las mismas, y se diseñaron en el marco de la presente investigación, el tiempo para realizarlas fue libre y cada alumno entregó su trabajo cuando había terminado, se pidió a todos los alumnos que contestarán sin presión alguna y anotaran todas sus operaciones,y aunque algunas de ellas las considerarán como incorrectas las dejaran plasmadas en el cuestionario, sólo con una pequeña nota que ellos considerarán pertinente.

Se presentó como primera y segunda tarea la suma y resta de fracciones, para conocer hasta qué punto tienen los alumnos un conocimiento sólido en cuanto a lo conceptual y lo operatorio, y saber si cuentan con los conocimientos necesarios para realizar la multiplicación y división de números fraccionarios.

En las cuatro primeras tareas propuestas se presentan el ejemplo de cómo resolverla, en la última tarea se pide que de manera libre se resuelva con los propios medios de los alumnos, enseguida se pide alos alumnos resuelvan otra tarea similar a la presentada. Se solicitó a cada uno de los alumnos utilizará la figura del rectángulo para resolver cada tarea y/o en su caso manejará cualquier otro procedimiento.

El análisis de cada ítem se realizó tomando como base lo propuesto por Vergnaud, como *teorema en acción* para analizar cada una de las estrategias utilizadas por los alumnos, y de este modo tratar de definir su conocimiento en cuanto a la suma, resta, multiplicación y división de números fraccionarios a través del algoritmo gráfico, propuesto en este trabajo de investigación.

El cuestionario consta de 5 reactivos, los cuales se presentan a continuación:

Reactivo 1. Presenta una suma de fracciones.

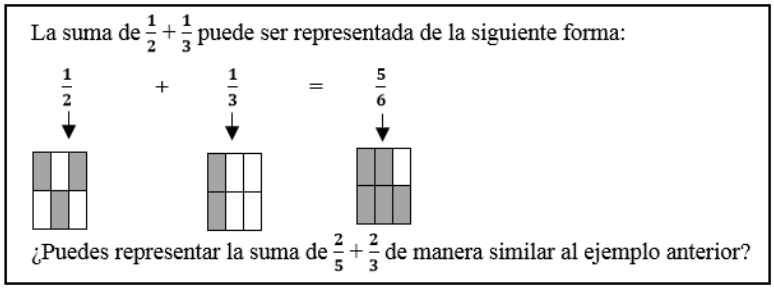


*Figura 1.*Reactivo 1.

Esta tarea ha sido incluida en el cuestionario porque tiene el propósito de indagar que tanto saben los alumnos en cuanto a la suma de fracciones, utilizando los dos algoritmos presentados.

Respuestas correctas:

Estrategia 1, preservación del todo. Tres alumnos realizan la suma de fracciones de manera correcta, además realizan la suma de fracciones con Algoritmo Grafico como se muestra en la figura 2.

[4] Algoritmo canónico, definido como la operación matemática de mayor uso y realizada de manera universal.

Se observa que estos alumnos tienen un concepto sólido en lo que se refiere a la suma de fracciones tanto en el algoritmo canónico[4] como en el "algoritmo gráfico" (Kieren, et. al. 1985).

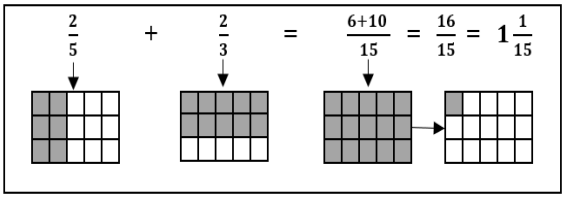


Figura 2. Preservación del todo.

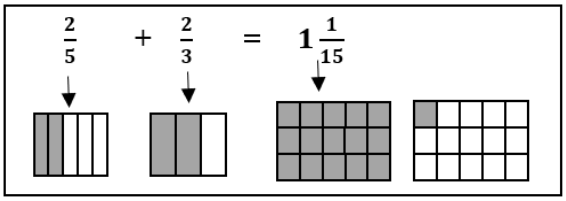


Figura 3. Conservación de figuras independientes.

Estrategia 2, conservación de figuras independientes. Seis alumnos realizan la operación de manera correcta. El resultado del algoritmo gráfico también es correcto, sin embargo, las dos figuras que representan los sumandos están representados de manera independiente como si se tratara de dos figuras ajenas, que no podrían ser sumadas, tanto por su tamaño diferente, como por su equidivisión. Figura 3.

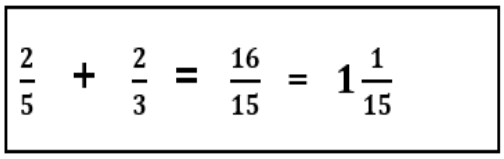


Figura 4. Algoritmo canónico.

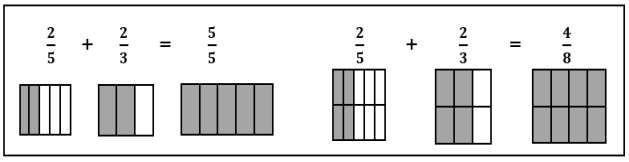


Figura 5. Constancia de números naturales

Estrategia 3, algoritmo canónico. Catorce alumnos realizan el algoritmo de manera correcta (fig. 4), sin tomar en cuenta el ejemplo y la indicación propuesta en el cuestionario, algunos intentan realizar el algoritmo gráfico, pero ninguno lo realiza correctamente.

Realizan de manera libre el algoritmo gráfico, pero no logran obtener la respuesta que obtuvieron en la operación, intentan de diversas maneras obtener el mismo resultado tanto en el algoritmo canónico como en el algoritmo gráfico, sin lograrlo.

Respuestas incorrectas:

Estrategia 1, constancia de números naturales. Seis alumnosresuelven la tarea como si se tratara de números naturales, realizan la partición de cada una de las figuras de manera correcta, pero no pueden operar ambas cantidades fraccionarias, trazan cada figuracomo ajena e independiente y ajustan los resultados, como se muestra en la figura 5.

Estrategia 2, libre. Cuatro alumnos representan los números fraccionarios de manera libre y al parecer en relación directa a los números naturales, trazan figuras para realizar el algoritmo grafico también de manera libre, se nota que tiene un conocimiento limitado en cuanto a los números fraccionarios, pero funcional acerca de los números naturales.

El presente ítem obtuvo un total de 23 respuestas correctas y 10 incorrectas, lo cual muestra un manejo aceptable en cuanto a la suma de fracciones, los alumnos que contestaron incorrectamente muestran un anclaje persistente enfocado al manejo de los números naturales.

Reactivo 2. Presenta una resta de fracciones.

Esta tarea ha sido incluida en el cuestionario porque tiene el propósito de indagar que tanto saben los alumnos en cuanto a la resta de fracciones, utilizando los dos algoritmos presentados.

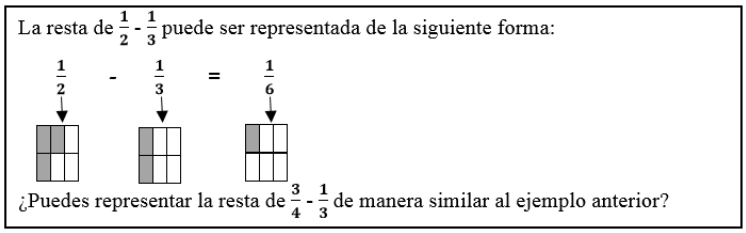


Figura 6. Resta de fracciones.

Respuestas correctas:

Estrategia 1, preservación del todo. Tres alumnos realizan el algoritmo de manera correcta, también realizan correctamente el algoritmo gráfico con figuras rectangulares, como se muestra en la figura 7.

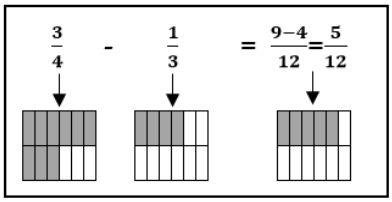


Figura 7. Preservación del todo

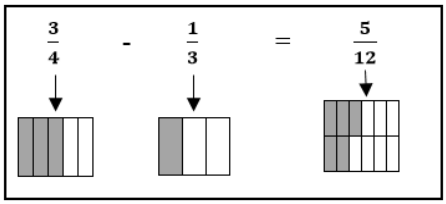


Figura 8. Conservación de figuras independientes.

Estrategia 2, conservación de figuras independientes. Ocho alumnos realizan la operación de manera correcta, también realizan correctamente el resultado del algoritmo gráfico, pero los sumandos están representados de manera independiente como si se tratara de dos figuras independientes, que no podrían ser restadas tanto por su diferente tamaño como por su equidivisión, como se presenta en la figura 8.

Estrategia 3, algoritmo canónico. Cuatro alumnos realizan la operación de manera correcta con el algoritmo canónico, pero no realizan el algoritmo gráfico a través de las figuras propuestas en la tarea.

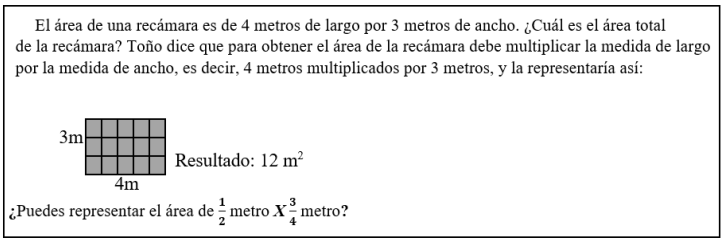
Respuestas incorrectas:

Estrategia 1, constancia de números naturales. Ocho alumnos tratan de realizar la operación con el algoritmo canónico, pero tienen un conocimiento muy limitado de cómo realizar la operación y por lo tanto las respuestas son muy variadas e incorrectas, también intentan realizar el algoritmo gráfico y trazan de manera correcta tanto el minuendo como el sustraendo con figuras que están representadas de manera independiente como si se tratara de dos figuras ajenas, que no podrían ser restadas, se observa un manejo fijo hacia los números naturales.

Estrategia 2, libre. Diez alumnos solo realizan el algoritmo canónico, pero de manera incorrecta, no realizan algún intento por resolver a través del algoritmo gráfico, al parecer tienen un conocimiento limitado de como operar los números racionales.

El presente reactivo obtuvo un total de 15 respuestas correctas y 18 incorrectas, lo cual muestra una clara diferencia en cuanto al reactivo anterior y muestra un manejo incorrecto tanto en lo conceptual como en lo operatorio.

Reactivo 3. Multiplicación de fracciones.



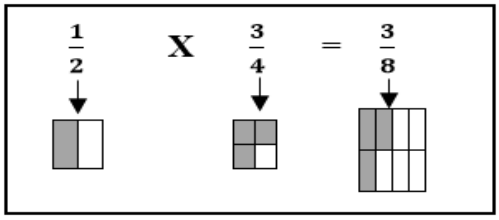


Figura 9. Multiplicación de fracciones. *Figura 10.*Conservación de figuras independientes.

Respuestas correctas:

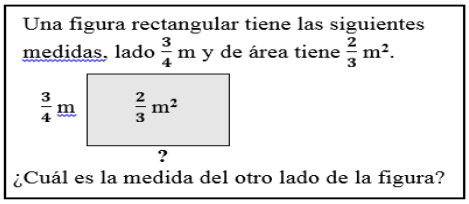
Estrategia 1, conservación de figuras independientes. Siete alumnos realizan la operación con algoritmo canónico de manera correcta, y también el algoritmo gráfico es correcto, aunque siguen manteniendo a cada una de las figuras como independientes y ajustando las figuras que representa a cada número fraccionario con el resultado correcto, como se muestra en la figura 10.

Estrategia 2, algoritmo canónico. Diecisiete alumnos realizan la operación de manera correcta y luego registran el mismo resultado en una figura rectangular de 8 partes, no realizan el algoritmo gráfico solo trazan la figura rectangular de ocho partes para anotar el resultado.

Respuestas incorrectas:

Estrategia 1, libre. Nueve alumnos realizan diferentes operaciones de manera libre e incorrecta, algunos intentan realizar el algoritmo gráfico, pero también lo realizan de manera errónea, al parecer no tiene claro cómo realizar la operación de multiplicación de fracciones. El presente reactivo obtuvo un total de 24 respuestas correctas y 9 incorrectas, lo cual muestra nuevamente un manejo aceptable en cuanto la multiplicación de fracciones.

Reactivo 4. División de fracciones. Reactivo 5 División de fracciones.



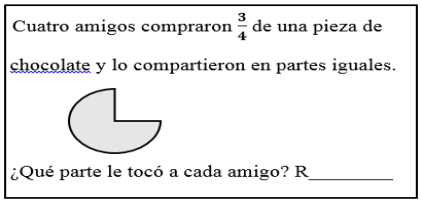


Figura 11. *Figura 12.*

Únicamente el alumno Cristian contesto correctamente las dos tareas propuestas, realizó la operación de división de fracciones de manera adecuada, todos los demás alumnos contestaron de manera libre e incorrecta.

Conclusiones

La suma de números fraccionarios representó un poco dificultad, ya que 23 alumnos de los 33 contestaron correctamente, sin embargo, la resta de fracciones representó una mayor dificultad ya sólo 15 de los 33 alumnos contestó correctamente, en cuanto a la multiplicación de fracciones el porcentaje de alumnos nuevamente se incrementó ya que 24 de los 33 alumnos contesto correctamente, incluso supero el número de estudiantes con respecto a la suma de fracciones, pero la división de fracciones representó una mayor dificultad, pues solamente un alumno contestó correctamente cada una de las dos tareas propuestas.

La intención de trabajar con expresiones gráficas como se muestra en las cuatro primeras tareas es dar mayor importancia al algoritmo gráfico, el cuál además nos permite saber hasta qué nivel se encuentra el conocimiento de los alumnos de sexto grado de primaria en cuanto a los números fraccionarios, y tratar de que los demás alumnos accedan a este conocimiento por este medio.

La división de fracciones se presenta como el mayor reto por aprender en la escuela primaria, en este trabajo de investigación solamente se presentan el modelo partitivo y el inverso del producto de medidas, como dos ejemplos muy claros para ser aprendidos en la escuela primaria, y que serán abordados posteriormente en el proceso de investigación.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (1990). 'Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.

Berenson, S., Vidakovic, D., (1995) Rural Students' Informal knowledge of division. Paper presented at the Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (17th PME-NA, Columbus, OH, October21-24, 1995).

Cengiz, N., Rathouz, M. (2011). 'Take a bite out of fraction division'.*Mathematics Teaching in the Middle School, 17(3),* 146-153.

Fischbein, E., Deri, M., Sainati, M., Sciolis, M. (1985). The Role of Implicit in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*, 3-17.

Jensen, A., Hohensee, C., (2015). Examining and elaborating upon the natureof elementary prospective teachers' conceptionsof partitive division with fractions.

Kieren, T. E. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical education.*(pp. 506-525).

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Schwartz, J.: 1988, 'Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operations', in J. Hiebert and M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, NJ: Lawrence Erlbaum Association, pp. 41-52. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 125-147.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (127-174). London: Academic Press.

Vergnaud, G.: 1988, 'Multiplicative structures', in J. Hiebert and M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, NJ: Lawrence Erlbaum Association, pp. 141-161. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Hare! & J. Confrey (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (41-60). Albany, NY: State University of New York Press.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2018) Libro de Texto Gratuito. *Desafíos matemáticos. Libro para el Alumno Sexto Grado*. Educación básica. Primaria. México D.F.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Constituyendo prácticas matemáticas en proyectos pedagógicos de modelación -PPM-

Fabian Arley Posada-**Balvin**
Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte -UFRN-Brasil
fabian@ccet.ufrn.br - fapoba@gmail.com

Resumen

La modelación matemática puede ser entendida como una forma de solucionar problemas no matemáticos mediante la matemática. Cuando ese proceso es usado en contextos pedagógicos, toma otras dimensionalidades que van más allá de la matemática aplicada. En este trabajo presentamos un análisis del proceso de constitución de prácticas matemáticaen contextos Pedagógicos de Proyectos de Modelación -PPM-, que por la manera como son constituidas, pueden ser entendidas con el significado de objetos e/o de instrumentos y por esa vía, de modelos matemáticos. Ejemplificamos el procesomediante la producción de un grupo de alumnos de un curso de matemática para Biología de la universidad UNESP/SP/Brasil, a quienes se les propuso como tarea desarrollar un proyecto de modelación en una temática del propio interés. Concluimos que las prácticas matemáticas se constituyen por la coordinaciónde variaciones espacio-temporales de las cantidades escogidas como pertinentes, con formas generales de correlación entre esas mismas cantidades.

Palabras clave:modelación matemática, teoría de la actividad, producción de conocimiento matemático, enseñanza y aprendizaje de matemática.

A manera de Introducción

De acuerdo con tradiciones filosóficas racionalistas, la teoría yla práctica se encuentran categóricamente separadas, cada uno con sus propias características e identidades. De un lado, la teoría en forma de ideas, conceptos, creencias, hipótesis, conjeturas e imaginarios, cuya existencia ideal permite describir realidades posibles pasadas por apropiación y futuras por creación. Pero, de otro, la práctica caracterizada por acciones reales ejecutadas sobre objetos materiales (que existen independiente de la conciencia humana), a partir de la propia corporeidad extendida por instrumentos. Bajo esa perspectiva, teoría y práctica, además de diferentes, se presentan con carácter opuesto negándose mutuamente y, de cierta forma, caracterizándose con grados de importancia de acuerdo con intereses particulares.

Otra manera de plantear a relación entre teoría y práctica esa partir de perspectivas más contemporáneasde corte antropológico y socio-cultural. En estos casos, separarcategóricamente la teoría de la práctica se torna insostenible. De acuerdo con estas posturas, aunque se puedan crear discursos que las categoricen con naturaleza diferente, en realidad son dos mundos que secondicionan y se co-determinanmutuamente. Teoría y práctica conviven dialécticamente en unidad, haciendo quela práctica, de un lado, pierda su carácter ingenuopor el enriquecimiento y la concretud de los constructos teóricos, y la teoría, de otro, su carácter de especulativa mediante criterios de verdad que solamente la práctica puede ofrecerle.

Tal indisolubilidad puede percibirse principalmente en las más variadas actividades humana. Para Leontiev(1978, 1979), las actividades humanas se caracterizan por ser unidades moleculares, no aditivas, de acciones materiales y de reflexiones mentales de sujetos corpóreos en que converge tanto a capacidad de idealizar (teorizar) mediante anticipaciones y proyecciones, como acciones corpóreas externas (prácticas). En esas condiciones las actividades humanas se tornan materialmente objetivas siempre que la realidad sea pensada, idealizada y proyectada teóricamente, produciendo no solamente nuevas acciones prácticas y realidades materiales innovadoras, sino también creando condiciones de desarrollo para los sujetos que las realizan. Visto así, las acciones prácticas, además de ser puntos de partida para la construcción de teorías son su fin, en la medida que los avances teóricos dependen de los procesos transformadores del mundo material.Para transformar el pensamiento y producir nuevos conocimientos es necesario generar nuevos sistemas de prácticas en los sujetos.

De ese modo, las acciones prácticas de los sujetos no pueden verse únicamente como simples imitaciones o repeticiones mecánicas de tradiciones sociales. Son formas de los seres humanos controlan y transformar el mundo natural y social en que viven para satisfacer sus propias necesidades. Pero también son formas de resistencia; de exposición, de formacióny transformaciónde sus creencias, sensibilidades, percepciones, idearios, conocimientos y comprensiones en un aquí (espacial) y un ahora (temporal). Por esa razón, aunque las acciones y operaciones sean desarrolladas principalmente por individuos, en realidad las prácticas son sociales, condicionadas por diferentes tipos de instituciones. Las prácticas, por tanto,son acciones proyectadas y realizadas por sujetos, medianteel uso de instrumentos culturales materiales y simbólicos, orientadas a transformar a naturaleza material y social con el propósito de satisfacer sus más diversas necesidades.

Las prácticas matemáticas como un tipo particular de práctica social.

En términos generales, la matemática puede ser considerada como un área de investigación históricamente consolidada y delimitada.Una manera de interpretar eso es que la matemática, como sucede con cualquier conocimiento, se constituye mediante un conjunto de acciones que indica una forma específica de pensar y actuar legitimadas culturalmente y por eso cambiantesen el tiempo y en el espacio.Llamaremos a este tipo de práctica de "práctica matemática". Que el término matemática esté adjetivando al de práctica, indica que las acciones encarnan una forma particular en que los sujetos organizan suas y reflexiones, de la misma manera como lo sería una práctica adjetivada de política, religiosa o económica. Pero, por otro lado, se refiere a que es posible diferenciar cada una de ellas como maneras de controlar el medio social y material en que se vive. Para (Obando, Arboleda, & Vasco, 2014) las prácticas matemáticas se refieren

> *"…a cierta forma de acción de losindividuos, en sus relaciones entre sí, y con el medio, a través de los procesos deobjetivación tanto de la cantidad y la*

> *forma -por ejemplo, medir, contar, comprar,vender, intercambiar, construir, fabricar, estimar, describir, localizar-, como de la variación de una u otra -movimiento, cambio, comparación, transformación, y otras-…"*

De ahí queal comprender a la matemática como una práctica social particular, no solo gana autonomía e identidad, sino también el carácter de instrumento que auxilia el desarrollo y consolidación de otros tipos de prácticas culturalmente diferenciadas.

La práctica de modelación: un contexto para la constitución de prácticas matemáticas.

Académicos preocupados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática han ponderado el potencial del proceso de modelación matemática como un camino didáctico y/o pedagógico para el desarrollo de contenidos curriculares y de formas de racionamiento matemático. (Bassanezi, 2002; Blum, Galbraith, Henn, &Niss, 2007; Meyer, Caldeira, &Malheiros, 2011). Una de las tendencias del uso de este proceso es verlo como "una forma de estudiar el mundo real con el universo de la matemática" (Meyer et al., 2011) que, con propósitos didácticos/pedagógicos, se traduce en presentar diferentes problemas a los estudiantes, para que los resuelvan aplicando el conocimiento matemático aprendido en el aula de clase.

Esta forma de entender la modelación matemática en contextos escolares, resalta la idea de que los problemas que serán modelados conllevan consigo una carga intencional, previamente establecida por el profesor, para que de alguna forma emerjan ciertos contenidos conceptuales y/o procedimentales previamente establecidos en el currículo de matemática. De acuerdo con Borba (2009); Borba& Villarreal (2005), un trabajo en aula de clase así, está más próxima de una perspectiva de resolución de problemas que de modelación. Interpretando estos autores, uno de los valores didácticos, pedagógicos y cognitivos más importantes que el proceso de modelación matemática debería ofrecer a contextos escolares, tiene que ver con la posibilidad de entenderlo como un espacio para la producción de conocimiento en general, y matemático en particular. La propuesta, es dar la oportunidad a los alumnos para que sean los protagonistas, no únicamente en la resolución de los problemas propuestos por el profesor, sino también en la formulación de los mismos, según sus propios intereses.

Para alcanzar tal propósito, proponen asemejar el proceso de modelación con un trabajo por proyectos, que denominan "Proyectos Pedagógicos de Modelación –PPM-", en donde los alumnos son convidados a: 1- escoger un tema de intereses colectivo; 2- plantear alguna situación problemática al interior del tema escogido y 3- construir argumentos para intentar resolver los problemas planteados y/o preguntas formuladas. La principal intención es crear un espacio pedagógico para el desarrollo de acciones análogas a las ejecutadas por investigadores cuando realizan sus respectivas investigaciones; o sea, escoger un campo de estudio de interés, delimitarlo por medio del planteamiento de cuestionamientos y/o definición de problemáticas, para finalmente buscar respuestas y/o soluciones.

En medio de este proceso se pueden crean condiciones de potencialidad para constituir prácticas matemáticas. Constitución que puede tornarse necesario, posible, deseable y/o importante de acuerdo con las características de cada proyecto. Esto significa que, en el contexto de los PPM, constituir prácticas matemáticas puede ser entendido en el mismo sentido que autores como Bassanezi (2002) consideran como modelación matemática, en términos de la

aplicación de la matemática a problemas del cotidiano.

Dispersión de semillas por zoocoría: un ejemplo de PPM

Los participantes de la investigación fueron alumnos de un curso de matemática aplicada para Biólogos en formación de la universidad Paulista "JúlioMesquitaFilho" (UNESP), sede Rio Claro del estado de San Pablo, Brasil. Al inicio del curso los alumnos fueron invitados por el profesor a formar grupos entre cuatro y seis alumnos para desarrollar un PPM. Como producto final del semestre, debían entregar un texto escrito síntesis del proceso de investigación, producir un video relacionado con la temática y realizar una presentación oral para el resto de los compañeros de clase. Uno de los proyectos desarrollados fue titulado "Dispersión de semillas por Zoocoría"

Aunque el proceso de desarrollo de los PPM consta de tres grandes momentos íntimamente conectados como ya explicado: 1- elección del tema; 2- planteamiento de la situación problema y 3- resolución, aquí nos concentraremos en algunos análisis del tercer momento, pues si bien es cierto que las prácticas matemáticas se van constituyendo paulatinamente en cada etapa hasta constituirse como parte importante del proyecto, es en el momento de construcción de los argumentos para dar solución al problema que las acciones orientadas a tal fin se hicieron más visibles.

Una vez fue escogida la temática, los alumnos formularon como pregunta problematizadora la siguiente: ¿Cómo aplicar los estudios sobre estrategias de dispersión de semillas por animales en la restauración de un área degradada? En entrevista con los alumnos, mencionaron que el interés por esta pregunta provenía de un trabajo previo enque una de las alunas había participado. Cuestión que también llamó la atención a una colega que también habíatrabajado recogiendoinformación en una empresa de São Paulo/Brasil que realizaba investigaciones prácticas de recuperación forestal.Formulada la pregunta problematizadora el PPM fue desarrollado en torno de dos conceptosestructurantes: estrategia y eficiencia en la dispersión de semillas por animales.

Siguiendo las ideas de Magurran(1988), texto recomendado por una investigadora del área con que los alumnos habían tenido clase en la universidad, los alumnos comentaron que el concepto de "estrategia" es definido como los métodos usado por las plantaspara atraer os animales dispersores y la "eficiencia" como la creación de condiciones para que el dispersor pueda efectuar la dispersión y la semilla logre su germinación y desarrollo. En ambos casos, enfatizan los alumnos, se está hablando de condiciones naturales de interacción mutua entre plantas y animales como un proceso de equilibrio ecológico, donde las plantas producen alimentos y los animales, al consumirlos, se encargan de diseminar las semillas.

Desde un punto de vista matemático, los alumnos propones quela estrategia y la eficiencia deben ser comprendidas comocantidadespotencialesde germinación a partir de la interrelación entre diferentes especies de animales y plantas, cuyas posibles formas de interacción responden a variables aleatorias. En palabras de Magurran (1988),es necesario medir la riqueza o abundancia relativa de cada especie de animaly planta con que interactúacuya medida se da por la cantidad y la regularidad con que ciertos animales se aproxima a ciertas plantas. En otras palabras, es necesario contar el número de especies en un espacio muestral; construir modelos de patrones de distribución; y, crear índices de proporción de especies en grupos determinados.Básicamente, afirmaron los alumnos, se trata deun cuantitativo de remoción de semillasy de índice de importancia relativa, indicadopor elporcentaje de alimento consumido por cada animal.

Para ejemplificar el proceso, los alumnos presentaron un ejercicio con aves.Los datos usados hacían parte de uno de los proyectos en el que de la alumna había participado. En entrevista explicaron que la técnica utilizada consiste en ir al campo que se estabaqueriendo restaurar por un periodo de tiempo determinado (mínimamente 10 horas a la semana) y realizar un proceso de conteo de las aves que llegan e interactúan,categorizadas por especies, familias y géneros.Además de clasificarel tipo de plantasy determina si el ave consume o no los frutos.

Esa información, afirmaron,era colocadaen las siguientes ecuaciones obteniendo así el cálculo final del cuantitativo de remoción de semillas y el índice de importancia de la planta. $CR = ln\left[\left(\frac{V}{T}\right).\left(\frac{N}{V}\right).\left(\frac{I}{N}\right)\right]$ y $I = \sum \frac{C_i/E_i}{S}$, donde V= número de visitas del ave; T=tiempo (10 horas); N=número de frutos manipulados, I= número de frutos ingeridos; E_i =número total de especies que se alimentan de los frutos de la planta i; S = número total de la especie de las plantas de la muestra y $C_i$indicador de si el ave consume o no el fruto de la planta i, con valor uno si lo consume o cero si no lo hace.

Discusión sobre la constitución de prácticas matemáticas en PPM.

Para diferentes investigadores la íntima relación entre las diferentes formas de conocimiento y los procesos de modelación es indiscutible, pues razonar basado en modelos y sus formas asociadas constituye uno de los núcleos epistemológicos de comprensión y transformación de sistemas científicos y sociales (Jurdak, 2016; Lehrer&Schauble, 2007; Williams &Goos, 2013). Para Lehrer&Schauble (2007), por ejemplo, las raíces de la modelación se encuentran en el concepto de analogía, considerando que, en su nivel más básico, un modelo es una analogía, donde un conjunto familiar de objetos y relaciones pueden sustituir, por analogía, otro conjunto tal vez de menor familiaridad con el objetivo de ganar nuevas comprensiones, otras formas de tratamiento y, por esa vía, nuevos procesos de conceptualización.

Una manera de interpretar esa idea es considerar los modelos como medios o instrumentos de observación, de entendimiento, de manipulación y por veces de control entre diferentes sistemas. Es en ese sentido, que la modelación matemática puede ser analizado en una doble vía y no apenas en una como acostumbra hacerse.De un lado, como una manera de representar, por medio de conceptos y relaciones matemáticas, una situación no matemática, como explica Bassanezi (2002). Y de otro lado, en términos del camino inverso: un sistema no matemático asumiendo el papel de modelo para un sistema matemático, como proponen Urquhart (2008) y Williams y Goos(2013). En ambos casos los objetos, relaciones y problemas de un sistema no solo representan y pueden ser representado análogamente por el otro sistema, mas también permite formas de acción relacionadas con el sistema modelado.

En ese sentido, puede decirse que el sistema modelo y el modelado se constituyen mutuamente y se co-determinan dialógicamente, pues modificaciones en uno de ellospuede implicar ajustes en el otro. Dependiendo del interés de los sujetos involucrados se define cual es el sistema modelado y cual el modelo. Generalmente tal decisión depende del tipo de problema que se desee y/o se requiera resolver. Esta manera de entender la modelación flexibiliza los análisis relacionados con procesos de producción de conocimiento y de creación de diferentes niveles de verdad y confianza mediante la resolución de algunas contradicciones dialécticas que se generan, no solo por la convergencia de diferentes campos teóricos, sino también por el encuentro de aspectos empíricos emergentes de la experiencia, con conceptos teóricos

provenientes de prácticas académicas científicas.

En los PPM no es diferente. Como fue brevemente presentado, el propósito de responder a la pregunta: ¿Cómo aplicar los estudios sobre estrategias de dispersión de semillas por animales en la restauración de un área degradada? q llevó al grupo de alumnos a apropiarse de un conjunto de concepto teóricos y usarlos en la comprensión, producción y transformación de su experiencia empírica de conteos multivariados y la dispersión de semillas en particular. En ese proceso los conceptos científicos de la ecología, de la estadística y la matemática jugaron un papel de particular importancia provisionando a la experiencia empírica con lenguajes formales y poniendo a un lado la intuición cotidiana del asunto, para enriquecerla con las reglas de tratamiento propias de los sistemas teóricos (en este caso estadístico y matemático). En este caso en particular, las técnicas estadísticas y los conceptos matemáticos representados en las ecuaciones de cuantitativo de remoción de semillas y de índice de importancia fueron escogidas como modelos matemáticos del fenómeno empírico.

Las prácticas matemáticas así constituidas, como modelos matemáticos,se tornanpaulatinamente y de manera simultánea en instrumentos y objetos, pues mientras que forman parte de los argumentos construidos para intentar dar solución a la situación problemática formulada, se van objetivando. Tal interpretación permite comprender que, las prácticas matemáticas así constituidas cristalizan una permanente tensión entre contrarios de los cuales se pueden destacar: niveles de generalización-particularización, procesos de covariación-correlación, carácter de aleatoriedad-determinismo entre las cantidades de magnitud pertinentes a la situación estudiada.

Estas tensiones fueron apreciadas durante todo el proceso de desarrollo del proyecto de modelación mediante las diferentes formas de enunciación discursivas tanto verbales como escritas de los sujetos involucrados. Un ejemplo puede ser apreciado en el momento que los alumnos explicaron, en el trabajo escrito y en la presentación del proyecto para los colegas, las técnicas de recolección de información mediante el conteo empírico del número de aves que llegan al área de intervención, la clasificación en especies, familias y géneros y la interacción con las diferentes plantas y frutos, pero principalmente de como todo ese proceso se simplificaba a partir de introducir los resultados en los ordenadores previamente programados con los modelos matemáticos representados en las ecuaciones de cuantitativo de remoción y de índice de importancia.

Se puede percibir que la explicación conceptual usando las ecuaciones (para los alumnos fórmulas) en términos ecológicos y biológicos (modelo ecológico y biológico) apelan a una relación de covariación entre magnitudes discretas (número de aves y plantas) que interactúan aleatoriamente y cuyo proceso de cuantificación implica pensar las relaciones entre ellas de forma multivariado (modelo estadístico). Mientras queapelando a la fórmula (modelo matemático), hay un intento de retirar la temporalidad,la espacialidad y la naturaleza aleatoria del fenómeno con el propósito de programar un ordenador y producir nuevos conocimientos por simulación(Levy, 1997).

A manera de conclusión

Una primera conclusión que queremos destacar es que las prácticas matemáticas (modelos matemáticos) constituidas en el contexto de este PPM son fruto de la coordinación de procesos de variación espacio-temporales de las cantidades escogidas como pertinentes, con formas generales de correlación entre esas mismas cantidades y en las que, para el caso aquí presentado,

el procedimiento de comparación por cociente entre cantidades jugó un papel fundamental en dicha coordinación. Un importante aspecto del razonamiento proporcional.Relacionado con este aspecto, destacamos es que las relaciones proporcionales que permitió resolver algunas de las tensiones entre opuestos en conflicto antes mencionadas, en particular la coordinación entre la covariación y la correlación de variables, requirió de la interacción entre sujetos con diferentes niveles de experiencia con la situación, la estadística y la matemática.

Por esa razón, ya que los PPM son desarrollados en contextos educativos, resaltamos como segunda conclusión que el acompañamiento durante todo el semestre a los alumnos fue fundamental. Apoyados en las ideas de la teoría de la actividad (Engeström, 1987; Leontiev, 1978) y del constructo teórico Seres-humanos-con-medios (Borba& Villarreal, 2005),usamos la noción de acto instructivo, para este proceso. Los actos instructivos fueron entendidos como acciones intencionadas, realizadas por actores humano (generalmente representado por el profesor y otros expertos en el tema) para orientar a los actores menos experimentados (generalmente representado por los alumnos) mediante el uso de artefactos culturales materiales y simbólicos, generándose un espacio colectivo,en sala de aula, de producción y reproducción de conocimiento relativo a los conceptos que están en juego. Eso sin importar que tales conceptos formaran parte, en ese instante del contenido conceptual preestablecido en el currículo de la materia, invitando al profesor a romper protocolos rígidos comunes en contextos escolares.

Referencias y bibliografía

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W., &Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and aplications in mathematicseducation: the 14th ICMI Study*. New York: Springer.

Borba, M. (2009). Potentialscenarios for Internet use in themathematicsclassroom. *ZDM MathematicsEducation*, *41*, 453–465. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0188-2

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and theReorganizationofMathematicalThinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. UnitedStateofAmerica: Springer.

Engeström, Y. (1987). LearningbyExpanding: AnActivity - TheoreticalApproachtoDevelopmentalResearch. Recuperado 29 de enero de 2014, de http://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm

Jurdak, M. (2016). *Learning andTeaching Real World ProblemSolving in SchoolMathematics: A Multiple-Perspective Framework for Crossing theBoundary*. Switzerland: Springer InternationalPublishing.

Lehrer, R., &Schauble, L. (2007). A developmental approach for supportingheepistemologyofmodeling. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modellingand Applications in MathematicsEducation: The 14th ICMI Study* (pp. 153-160). New York: Springer.

Leontiev, A. N. (1978). *Actividad, conciencia y personalidad*. Buenos Aires: Ediciones Ciencias del hombre.

Leontiev, A. N. (1979). *La actividad en la psicologia*. La Habana: Libros para la educación.

Levy, P. (1997). *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informatica*. Editora 34.

Magurran, A. (1988). *Ecologicaldiversityand its measurement*. United StateofAmerica: Princeton Universitypress.

Meyer, J. F., Caldeira, A., & Malheiros, A. P. (2011). *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Obando, G., Arboleda, L. C., &Vasco, C. E. (2014). Filosofía, matemáticas y educación: una perspectiva histórico-cultural en educación matemática. *Revista Científica Universidad distrital*, *3*(20), 72-90.

Urquhart, A. (2008). TheBoundary Between Mathematics and Physics. En *ThePhilosophyofMathematicalPractice*. Oxford UniversityPress: Paolo Mancosu.

Williams, J., &Goos, M. (2013). Modellingwithmathematics and technologies. En M. A. K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Thirdinternationalhanbookofmathematicseducation* (pp. 549-569). London: Springer.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

LEM naescola: o primeiro ano de umprojeto de ensino, extensão e pesquisa[1]

Fabian Arley Posada **Balvin**
Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
fapoba@gmail.com
Alexandre Silva de **Oliveira**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
alexandreoliveira.mat@gmail.com
Ayronn da Silva **Santos**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
ayronnssantos@gmail.com
Kelvin Leysson Bulhões da **Silveira**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
kelvinleysson@gmail.com

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo descrever o desenvolvimento do primeiro ano do projeto intitulado LEM na escola, realizado na Escola Estadual Governador Walfredo Gurgel, localizada na cidade de Natal-RN, no Brasil. O trabalho busca ainda, explicitar a continuidade das ações realizadas na instituição de ensino, iniciando-se a partir das ações de integrantes do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID, seguindo para a implementação de projetos de extensão, iniciação cientifica júnior e ensino, de maneira orgânica, favorecendo desta forma o estreitamento das relações entre a Universidade Federal do Rio Grande do Norte e essa determinada escola, dos quais, juntos, podem desenvolver além do raciocínio lógico-matemático, o senso crítico dos alunos, tornando-os protagonistas de sua própria aprendizagem e de seu papel como cidadão.

[1]Apoio: Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – DMAT/UFRN, Pró-Reitoria de Extensão da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – PROEX/UFRN e Fundação de Apoio à Pesquisa do Rio Grande do Norte – FAPERN.

Palavras - chave:Educação, Matemática, Raciocínio lógico-matemático, Laboratório de Ensino de Matemática.

Introdução

Como parte das atividades propostas, os bolsistas do subprojeto de Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID, para o primeiro semestre do ano de dois mil e dezessete, foi formulada uma iniciativa de trabalho que tornasse possível experimentações orientadas ao favorecimento de processos de pensamento matemático, para dessa forma incentivar uma maior interação social e coletividade entre os alunos da Escola Estadual Governador Walfredo Gurgel, localizada na cidade de Natal – RN, no Brasil.

Norteados por esse propósito e em diálogo com a administração da escola, tornou-se possível reativar o espaço que originalmente tinha sido projetado para que funcionasse como Laboratório de Ensino de Matemática – LEM, mas que devido a problemas relacionados com processos burocráticos, se encontrava subutilizado. Com isso, os esforços passaram a ser conduzidos a tornar o LEM da escola um ambiente favorável para essas investigações e um ponto de encontro agradável que os alunos possam utilizar para desenvolver atividades lúdicas e acadêmicas como, estudar, compartilhar experiências, manipular materiais ou socializar, de maneira geral.

Devido a disponibilidade favorável de utilização do LEM, a equipe vem idealizando, estruturando e executando alguns subprojetos que fossem atrativos e de fácil aceitação pelos alunos, alguns deles são: o *Clube de Matemática* e o *Xadrez na Escola*.

O Xadrez na Escola, foi idealizado para ser executado em três fases: A primeira direcionada ao aprendizado dos alunos em relação as noções básicas do jogo, contribuindo para um maior interesse pelo xadrez e por seus desafios. Para a segunda fase, a ideia seria moldar um conjunto de situações que pudesse estabelecer relações entre o xadrez e o contexto matemático da resolução de problemas, por meio de oficinas práticas e experimentos relacionados a forma como os alunos resolvem os desafios propostos nas mais diferentes situações e jogadas. Por fim, para a terceira fase, o propósito seria explorar mais efetivamente as possíveis conexões entre o raciocínio lógico-matemático e os desafios inerentes ao jogo de xadrez e, com isso, criar possibilidades para o desenvolvimento do pensamento lógico através da resolução de problemas matemáticos e não matemáticos.

O Clube de Matemática, por sua vez, teve sua execução possibilitada um pouco depois do Xadrez na escola, em um momento que os alunos da instituição de ensino já estavam um tanto quanto mais habituados ao ambiente proposto no LEM. Para esta vertente do projeto, vem sendo idealizadas oficinas, onde os professores podem encontrar as relações de situações cotidianas com a matemática, e a partir disso, realizaram aulas lúdicas, buscando sempre incentivar a participação ativa dos alunos durante as oficinas, proporcionando aos alunos uma autonomia em desenvolver ideias e buscar de forma dinâmica a aquisição de novos conhecimentos e curiosidade.

Ao final do primeiro ano de realização do projeto, devido aos rumores que as Bolsas de Iniciação à Docência seriam descontinuadas, os bolsistas do PIBID, até então, sob a orientação do supervisor do subprojeto na escola, selecionaram dentre os estudantes, monitores voluntários para que continuassem o trabalho iniciado no LEM. Simultaneamente, foi aberto pela Pró-reitoria de Extenção da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – PROEX/UFRN um

edital para projetos relacionados a educação. Nesse momento surgiu o projeto "**LEM na escola"** liderado pelo professor (primeiro autor) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – DMAT/UFRN, um professor da escola e os licenciandos (demais autores) numa tentativa de manter os alunos e os professores da escola na dinâmica até o momento conseguida e potenciar as mudanças positivas que estavam acontecendo.

No primeiro semestre do ano dois mil e dezoito, a Fundação de Apoio à Pesquisa do RN – FAPERN abriu um edital oferecendo bolsas para alunos de escola pública a partir do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Júnior – PIBIC Jr. Para esse edital, inscrevemos um projeto intitulado **O Laboratório de Ensino de Matemática: Ambiente de Formação Científico-Matemática dos Estudantes do Ensino Médio**. Depois de uma série de etapas o projeto foi aprovado, possibilitando a continuidade das atividades e a vinculação de novos integrantes, dentre eles, sete alunos de ensino médio da própria escola e outros licenciandos voluntários do departamento.

Atualmente, o projeto se encontra em seu segundo ano de execução. O que anteriormente se iniciou como uma tentativa de aproveitamento de uma sala, tornou-se uma iniciativa que engloba, simultaneamente propostas de ensino, extensão e pesquisa cientifica. Voltando-se principalmente para jovens da periferia da cidade, projetando para os mesmos, perspectivas diferenciadas de futuro em conjunto com as universidades públicas.

O raciocínio lógico-matemático: propósito norteador

Desde o início das intervenções do projeto, o interesse por criar um espaço para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático tem sido um dos principais objetivos a serem alcançados, pois de acordo com os documentos base curriculares da educação matemática brasileira, esse é um dos propósitos da matemática escolar na medida que pode auxiliar em diversas situações problema encontradas diariamente.

Dentre as competências especificas para a Matemática, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC afirma que: "Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático" (BRASIL, 2017, p. 530). Por isso, alguns autores consideram que desenvolver o raciocínio lógico-matemático como um objeto orientado de aprendizagem possui valor pedagógico significativo.

A partir do que afirmam Vila e Callejo (2006), a relação entre as situações-problema e o raciocínio matemático torna-se considerável pedagogicamente na medida em que,

> […] um problema não é simplesmente uma tarefa matemática, mas uma ferramenta para pensar matematicamente, um meio para criar um ambiente de aprendizagem que forma sujeitos autônomos, críticos e propositivos, capazes de se perguntar pelos fatos, pelas interpretações e explicações, de ter seu próprio critério estando, ao mesmo tempo, abertos aos de outras pessoas.
>
> (Vila & Callejo, 2006, p. 10).

Conforme estes autores, na medida em que os indivíduos enfrentam diversas situações-problema, os mesmos podem desenvolver formas de raciocínio lógico-matemático que, posteriormente, serão usadas como instrumentos na resolução de novas situações, oportunizando

um aprendizado progressivo e, assim, tornando possível considerar que tanto as situações quanto os raciocínios tornam-se meios e fins simultaneamente.

O uso do Laboratório de Ensino de Matemática tornou-se fundamental para tais finalidades, uma vez que o LEM, de acordo com Santos, Santos & Santos Júnior (2017), "[…] se configura como uma alternativa significativa para a abordagem de conteúdos, auxílio na resolução de problemas e, principalmente, na construção de conhecimentos matemáticos o que corrobora as atuais ideias sobre a utilização do LEM". (Santos et al., 2017, p. 11)

Nos âmbitos de pesquisa em Educação Matemática, o Laboratório de Ensino de Matemática ser pensado como um suporte pedagógico é de fundamental importância para a formação de professores. Como afirma Khidir, Rodrigues & Silva (2012):

> O Laboratório de Educação Matemática tem como objetivos: intervir na formação didática do licenciando; potencializar estudos sobre a formação do professor e suas implicações no processo de ensino e aprendizagem; produzir e utilizar material didático-pedagógico para o desenvolvimento de atividades para o ensino e a aprendizagem da Matemática; possibilitar vivência de práticas de ensino de Matemática, tendo como parâmetro a estruturação didática do processo de ensino e seus elementos constitutivos; e proporcionar situações onde licenciandos compreendam conceitos matemáticos e suas metodologias de ensino. (Khidir et al, 2012, p. 3)

Nessa perspectiva, torna-se possível observar esses apontamentos e analisar quais seriam as ideias que poderiam ser aproveitadas a partir desta metodologia, para contribuir de maneira efetiva para a formação do jovem cidadão. A partir do momento que os alunos deixam de ser meros receptores das informações fornecidas pelo professor, para tornarem-se, ativos nos processos de ensino e aprendizagem, passam a ter uma maior familiaridade com os conteúdos matemáticos, com seu ambiente escolar e, principalmente, com seu processo de formação enquanto cidadão crítico e consciente de seu lugar em sociedade, sendo esta uma das principais intencionalidades implícitas do projeto **O Laboratório de Ensino de Matemática: Ambiente de Formação Científico-Matemática dos Estudantes do Ensino Médio**,do ponto de vista de iniciação cientifica júnior.

Diante dessas concepções, a equipe responsável pelo projeto na escola decidiu abordar a resolução de problemas como um instrumento pedagógico, auxiliando o desenvolvimento de processos inerentes ao raciocínio lógico-matemático de um grupo de alunos da instituição de ensino, através do Xadrez na escola e do Clube de matemática. Para isso, foram idealizadas e estruturadas diversas intervenções que poderiam proporcionar os resultados esperados.

O Xadrez na escola, baseia-se nas perspectivas de Neto (2008) do qual considera o jogo uma alternativa significativa para o desenvolvimento de habilidades relevantes ao contexto escolar, principalmente, a respeito das possibilidades para as conexões necessárias a formulação do pensamento matemático. Assim,

> *[...] jogar xadrez passa pela condição de saber dominar as regras do jogo, saber Matemática passa por uma condição análoga. Então, quais são as regras mais fundamentais para aprender Matemática? As atitudes de alunos e professores de como participar das aulas de Matemática podem ajudar a construir algumas delas para melhorar o aprendizado. Esse aspecto geral do jogo, de servir como modelo de um tipo específico de conhecimento, pode auxiliar professores e alunos a refletirem sobre as formas de aquisição do conhecimento matemático. Uma reflexão*

> *importante para melhorar o significado do que se aprende e para que se aprende. (NETO, 2008, p 51)*

Fundamentados nesses autores, a equipe buscou proporcionar situações orientadas a incorporar tanto o jogo de xadrez, bem como alicerçar os processos de iniciação cientifica dos alunos, tentando adaptar isso ao cotidiano escolar, mediante a realização de diversas intervenções, tanto através do Clube de Matemática, como a partir do PIBIC – JR e o Xadrez na escola.

Processos metodológicos

Ao longo do primeiro ano de projeto, houveram muitas intervenções direcionadas a aumentar o interesse dos alunos pelo uso do Laboratório de Ensino de Matemática e, mais diretamente, pelo jogo de xadrez. Dentre elas, destacaram-se duas atividades devido suas particularidades e contribuições para com os propósitos do projeto.

A primeira atividade a ser mencionada foi o **I Campeonato de Xadrez – EEGWG**, que contemplou todas as turmas da escola, com alunos desde o sexto ano do Ensino Fundamental até a terceira série do Ensino Médio. Esse campeonato foi elaborado de acordo com os propósitos do projeto, através da tentativa de incentivar o interesse dos alunos pela Matemática, a partir do xadrez e, além disso, contribuir para que ocorresse uma maior interação social alicerçada no respeito aos colegas, como um dos valores éticos de convivência.

O período de preparação para o campeonato ocorreu diariamente durante o intervalo das aulas e, deste então, o LEM fica aberto todos os dias nesse período da manhã e alguns dias à tarde, sob a monitoria de pelo menos um dos alunos vinculados ao Programa de Iniciação cientifica Júnior, para que a comunidade escolar seja acolhida e possa realizar qualquer atividade. Há também a disponibilidade dos monitores responsáveis caso os professores – não necessariamente os de Matemática – desejem realizar alguma atividade no laboratório.

A segunda atividade foi relacionada a partidas de exibição de um jogo de Xadrez Humano Temático durante a Mostra Cultural da escola. O Xadrez Humano Temático é caracterizado por utilizar pessoas no lugar das peças convencionais, divididos em dois exércitos de dezesseis peças – nesse caso pessoas – formando um tabuleiro usual. Para facilitar o processo de execução, assim como em um campo de batalha simbolizada pelo xadrez, os reis comandam as demais peças.

Para que as exibições acontecessem da melhor forma possível o apoio da escola com relação ao projeto como um todo tornou-se fundamental. A direção permitiu que fosse pintado no pátio da escola, de forma permanente, um tabuleiro de sessenta e quatro metros quadrados.

O interesse dos alunos pelo Xadrez Humano Temático foi tão positivo e apreciado pela escola, que a mesma no ano de dois mil e dezoito, inscreveu a atividade como um projeto artístico de caráter teatral na I Mostra de Projetos de Cultura e Arte das Escolas da Rede Estadual de Ensino do Rio Grande do Norte. O tema escolhido pelos alunos dessa vez foi uma releitura da invasão de Lampião a Cidade de Mossoró. Nesta exibição, os estudantes encenaram o conflito entre os cangaceiros liderados por Lampião (Rei preto) e a resistência da cidade liderada pelo prefeito Rodolfo Fernandes (Rei Branco), em cima do tabuleiro de xadrez, onde o combate seria

representado como um jogo de xadrez[2], atuando dessa forma como uma intervenção interdisciplinar, incentivando as mais diversas competências escolares.

Nesse mesmo ano, foram notórias que as intervenções do ano anterior entraram para o calendário escolar, o **II campeonato de Xadrez - EEGWG** superou a quantidade de inscritos de sua primeira edição e o Xadrez Humano foi novamente uma das principais atrações da mostra científica escolar.

Além das responsabilidades assumidas pelos alunos relacionados a iniciação cientifica já citados durante todo o texto, aconteceram intervenções pontuais, buscando desenvolver o pensamento crítico. Para isso foi realizado um estudo dirigido do livro **O que é cientifico?** de Rubem Alves, onde os mesmos tiveram que preparar apresentações simulando comunicações orais. Os alunos ainda realizaram oficinas no LEM relacionadas a artes, por inciativa própria, evidenciando ainda mais a proposta inicial de protagonismo do aluno.

No que tange o Clube de Matemática, foi realizada uma oficina de criptografia, em duas etapas, a primeira da qual os alunos ambientaram-se com o tema, através do filme **O jogo da imitação**(2014)e na segunda etapa foram apresentados a história da criptografia, aprendendo como alguns de seus métodos funcionam e sendo incentivados a resolver alguns problemas matemáticos relacionados ao tema. Os alunos participantes dessa oficina foram os monitores do Laboratório de Ensino de Matemática da escola, e a perspectiva é que posteriormente eles apliquem esta mesma oficina para algumas turmas na instituição de ensino.

A equipe organizadora está iniciando a segunda fase do subprojeto Xadrez na Escola, referente ao uso do jogo de xadrez como uma ferramenta pedagógica que possibilita a construção de processos de raciocínio lógico-matemático e, com isso, promovendo melhorias no desempenho dos estudantes tanto na disciplina de Matemática, como também referente aos processos de desenvolvimento social, através das relações interpessoais criadas pelos participantes do projeto no LEM da escola.

O Clube de Matemática continuará aplicando oficinas com os mais diversos temas matemáticos, contando com a participação tanto com os monitores quanto dos demais alunos da escola. Já o subprojeto O Laboratório de Ensino de Matemática: Ambiente de Formação Científico-Matemática dos Estudantes do Ensino Médio, continuará participando ativamente dos eventos escolares e aprofundará ainda mais a participação em eventos científicos.

Reflexões conclusivas

A confiança proporcionada pelas intervenções estruturadas e executadas através dos subprojetos relacionados ao Laboratório de Ensino de Matemática da instituição, vem se tornando cada vez mais consistente, contribuindo para o LEM ser, atualmente, o único laboratório a ser gerenciado apenas por alunos, sob a orientação da equipe idealizadora do LEM na escola, demonstrando a aceitação das intervenções realizadas no laboratório por parte da direção e dos estudantes, que compreenderam a relevância da utilização de formas alternativas de abordagens pedagógicas.

[2]Para maiores informações a respeito da invasão de Mossoró pelo bando de Lampião, os autores recomendam a leitura do artigo de Falcão (2018) onde o historiador além de explicar como foi o ataque dos cangaceiros, explana toda uma problematização acerca do papel da mídia da época nesse processo.

O **I Campeonato de Xadrez – EEGWG**eaexibição de partidas de Xadrez Humano Temático, contribuíram de forma pertinente para o aumento na quantidade de alunos participantes do projeto, uma vez que o LEM vem se tornando cada vez mais frequentado. Além de ter contribuído para a escolha de monitores, o campeonato também incentivou o respeito e a cooperação dos estudantes e ainda gerou uma parceria inesperada, mas bastante gratificante com o professor de Educação Física do turno da tarde, conseguindo romper as fronteiras existentes entre os turnos, mostrando que o LEM pode contribuir com o corpo escolar e potencializar a interdisciplinaridade.No caso do Xadrez Humano Temático, além das oportunidades e premiações já mencionadas anteriormente, a atividade gerou nos alunos uma relação de companheirismo, amizade e confiança, uma vez que se intitularam a família do xadrez.

No Clube de Matemática foi possível perceber um interesse dos alunos em conhecer uma perspectiva que antes não tinham inferido, visto que as aplicações da matemática muitas vezes não eram tão evidentes, já que é insólito a busca na percepção de ações da mesma no cotidiano.

O Laboratório de Ensino de Matemática: Ambiente de Formação Científico-Matemática dos Estudantes do Ensino Médio, por sua vez, contribui para a formação crítica dos alunos, possibilitando que os mesmos assumam uma postura de protagonismo dentro e fora da escola.

A equipe responsável acredita, de maneira geral, que a proposta de consolidar a cultura associada ao Laboratório de Ensino de Matemática vem sendo avaliada de bem sucedida, mediante os seguintes fatores: a quantidade de alunos envolvidos no projeto; o crescente número de inscritos no campeonato; o aumento progressivo dos participantes no LEM; os resultados obtidos pela exposição do Xadrez Humano Temático, dentro e fora da escola; e, por fim, a positividade com que a direção e a comunidade escolar se posicionaram em relação as intervenções direcionadas aos projetos estruturados no laboratório.

Portanto, o projeto segue construindo processos que possam favorecer a formação do jovem cidadão, capaz de usar as formas de raciocínio lógico-matemático para solucionar situações-problema que emergem de seu cotidiano, incentivando a criticidade e o protagonismo social.

Referências bibliográficas

Alves, R. (2007). *O que é científico?* (2. ed.). São Paulo: Loyola.

Brasil (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base*.Brasília: MEC/CONSED/UNDIME.

Falcão, M. L. (2018). Batismo de fogo: imprensa e monumentalização da narrativa sobre o ataque de lampião a Mossoró (1927- 1931). *Ponta de lança*, *12*(22), 43-61 Recuperado de: https://seer.ufs.br/index.php/pontadelanca/article/view/9379

Khidir, K. S., Rodrigues, R. F. & Silva, W. M. (2012). Laboratório de Educação Matemática: ensino e pesquisa mediados pela extensão. *Escola de Inverno de Educação Matemática*, Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil, 3.

NETO, A. R. (2008) *Geometria e estética: experiências com o jogo de xadrez*. São Paulo: Editora da UNESP.

Grossman, N., Ostrowsky, I. &Schwarzman, T. (Produtores) &Tyldum, M. (Diretor). (2014). *O jogo da imitação*. [DVD]. Nova Iorque: The WheinsteinCompany.

Santos, J. M. A.; Santos, A. L.; SANTOS, V. B. JR. (2017). Utilidade do laboratório de ensino de matemática no processo de ensino e aprendizagem segundo a visão de professores. *Congresso Internacional de Ensino de Matemática*, Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil, 7.

Vila, A. &Callejo, M. L. (2006). *Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas*.Porto Alegre: Artmed.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Experiencia de modelización matemática con profesores y futuros profesores

María Florencia **Cruz**
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral
Argentina
ma.florenciacruz@gmail.com
Sara **Scaglia**
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
Argentina
sbscaglia@gmail.com
Cristina **Esteley**
Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
esteley@famaf.unc.edu.ar

Resumen

En este trabajo se describe una experiencia desarrollada con profesores y futuros profesores de matemática en un taller en el que se emplea la modelización matemática como abordaje pedagógico para generar un entorno de producción de definiciones geométricas.
Los participantes en el taller, luego de desarrollar diversas actividades que los conducen a establecer definiciones para un grupo de poliedros, son invitados a relatar la experiencia transitada y, posteriormente, a interpretar estos relatos en términos de un proceso de modelización matemática.
En esta comunicación se estudian estos relatos y sus respectivas interpretaciones con el objeto de conocer los sentidos atribuidos por los docentes a la experiencia. En general, los docentes y futuros docentes interpretan el proceso de construcción y análisis de definiciones en términos de un proceso de modelización matemática.
Palabras clave: Modelización matemática, Sentido, Definiciones, Poliedros, Profesores en matemática, Futuros profesores.

Introducción

Diversos autores en el ámbito de educación matemática realzan las potencialidades o ventajas didácticas de la puesta en juego de propuestas de enseñanza en las que se emplea la modelización matemática (MM) como abordaje pedagógico (Bassanezi y Biembengut, 1997 y Villarreal, Esteley y Smith, 2018). Así mismo se destaca la necesidad de reflexionar en torno a la preparación de profesores y a la formación continua de profesores en desempeño (Even y Ball, 2009). En particular, Biembengut y Hein (2004) señalan que los profesores muy raramente

reciben orientación acerca de cómo utilizar la modelación matemática como método de enseñanza de las matemáticas en la educación formal de grado.

En el contexto internacional se han desarrollado diversas investigaciones en las que se trabaja la MM y la formación inicial y continua de profesores (Maass, y Engeln, 2018; Robutti, Cusi, Clark-Wilson, Jaworski, Chapman, Esteley, Goos, Isoda, y Joubert, 2016). Particularmente en Argentina se pueden mencionar trabajos en la misma línea, como, por ejemplo, Esteley (2014) y Villarreal et al. (2018).

Para contribuir con aportes para la formación docente, en el marco de la Reunión Pampeana de Educación Matemática (REPEM) realizada en 2018 en Argentina se diseña y lleva adelante un taller para docentes y futuros docentes en matemática. El taller tenía como objetivos "construir definiciones de ciertos objetos geométricos tridimensionales a partir de un trabajo relacionado con los procesos de modelización matemática y […] analizar el propio proceso de modelización matemática llevado a cabo durante la construcción de definiciones" (Autores et al, año, p.). En las condiciones del taller no solo se analiza la producción matemática sino que también emerge como conocimiento didáctico el empleo del proceso de MM pensado como herramienta pedagógica para la construcción de definiciones matemáticas (en este caso particular, geométricas).

En la primera parte del taller se trabajó en torno a la construcción de definiciones a partir de la realización de actividades que permitieron involucrar a los asistentes en los subprocesos del proceso de MM, en el sentido de Esteley (2014), mientras que en la segunda se reflexionó acerca del proceso vivido. En esta última, los participantes realizaron relatos escritos que daban cuenta de la experiencia llevada a cabo por ellos y un análisis de dichos relatos a partir del esquema del proceso de MM propuesto por Esteley (2014).

En esta comunicación se presenta un análisis de los relatos realizados en el último encuentro por los profesores y futuros profesores en matemática que participaron del taller. Estos relatos, realizados en torno a la experiencia de construir definiciones de figuras geométricas tridimensionales, se estudian con el objeto de conocer los sentidos que le atribuyeron los docentes y futuros docentes a la experiencia. En particular, se estudia si interpretan las actividades desarrolladas a partir de los subprocesos que intervienen en el proceso de MM y cómo lo expresan.

Aportes teóricos

Bassanezi y Biembengut (1997) proponen una reflexión acerca del potencial del empleo del proceso de modelización matemática para enseñar matemática. Este proceso comprende una serie de procedimientos que comienzan con la elección del tema seguida de una investigación para recoger datos (mediante búsqueda bibliográfica, entrevistas, experimentos, entre otros). Continúa con la elaboración del problema y la selección de las variables esenciales que éste involucra mediante un proceso de abstracción. Se sistematizan los conceptos que se van a utilizar para el modelo matemático y se valida luego el modelo. Si es satisfactorio, se puede utilizar para actuar sobre la realidad. Si el modelo no es adecuado, se reinicia el proceso.

Esteley (2014, p.54) retoma aportes de Bassanezi (2002) para elaborar una esquematización del proceso de MM. Este último es de naturaleza matemática y fuente de inspiración para pensar la modelización matemática como abordaje pedagógico.

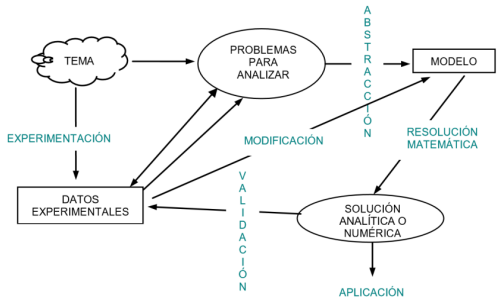


Figura 1. Esquema del proceso de modelización matemática (Esteley, 2014).

En este trabajo interesa retomar este proceso para el estudio de fenómenos intra-matemáticos (Sadovsky, 2005), en particular, la construcción de definiciones de figuras tridimensionales. Esta perspectiva tiene puntos de encuentro con la posición de Freudenthal (1983), que sostiene que las ideas y estructuras matemáticas han sido creadas para organizar fenómenos matemáticos y/o del mundo real, puntualizando, "Por medio de las figuras geométricas, como triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado, uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos" (p.28). En términos similares, se considera que las figuras poliédricas permiten organizar los fenómenos de los objetos tridimensionales que guardan ciertas características (por ejemplo, resultan de la yuxtaposición de polígonos planos respetando determinadas condiciones).

Sanchez Mármol y Pérez Beato (1961) afirman que "definir un concepto representado por una palabra o símbolo, quiere decir, expresar su significado mediante otras palabras o símbolos cuyo valor se conozca" (p.3). Por su parte, Borel (1962) sostiene que una de las características de una definición es que dos personas diferentes, al interpretarla, piensen en el mismo objeto. En este trabajo, se considera que la elaboración de definiciones, y en particular, de definiciones vinculadas con figuras poliédricas, brindan una oportunidad para llevar a cabo los procedimientos involucrados en un proceso de MM de naturaleza intra-matemático: la exploración para obtener datos (identificación de regularidades), la abstracción de características relevantes, la formulación de un modelo (la definición) que dé cuenta del concepto y que caracterice unívocamente un conjunto determinado de objetos, la utilización de ese concepto para hacer referencia a un universo determinado de objetos (en este caso, poliedros cuyas caras son polígonos regulares).

Se adopta la noción de modelo matemático, la propuesta en Biembengut y Hein (2004). "Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión" (p.106). En el taller las definiciones emergentes son consideradas un conjunto de relaciones matemáticas que permiten caracterizar el universo de poliedros trabajados.

La elaboración de definiciones interpretada como un proceso de MM brinda la posibilidad de involucrar a los participantes en una experiencia de formación cuyo objeto de enseñanza lo constituye este mismo proceso. Los relatos solicitados, a los profesores y futuros profesores, sobre las actividades llevadas a cabo por ellos en el marco del taller, les permite organizar sus experiencias de interacción en torno a la situación planteada (Da Ponte, Segurado y Olivera, 2003) y dar cuenta de sus interpretaciones sobre el proceso de MM llevado a cabo.

Larrosa (2005) sostiene que las palabras "producen sentido, crean realidad, y, a veces, funcionan como potentes mecanismos de subjetivación" (p. 166). Este autor afirma que las

palabras usadas para nombrar lo que se hace, se piensa, se percibe o se siente dan cuenta del sentido otorgado a "lo que somos y a lo que nos pasa" (p. 167). Es así como las palabras utilizadas en los relatos de los docentes y sus posteriores interpretaciones dan indicios de los sentidos atribuidos al proceso de MM transitado durante la experiencia.

Modalidad de trabajo

El taller se organizó en tres encuentros de dos horas cada uno durante tres días consecutivos en el marco de la REPEM. Los participantes trabajaron en cinco grupos de cuatro o cinco integrantes que se mantienen constituidos del mismo modo durante toda la experiencia.

En el primer encuentro se presentan doce figuras poliédricas que se forman con polígonos regulares, ocho representaciones tridimensionales planas de poliedros y cuatro imágenes de la vida real que se pueden asociar con poliedros. Se exhiben también representaciones en materiales manipulativos de todas las figuras tridimensionales. Se solicita a los participantes: "determinar familias de poliedros no dicotómicas con el universo dado de figuras tridimensionales cuyas caras son polígonos regulares y establecer una definición para cada familia que no contenga afirmaciones negativas" (Autores et al, año, p.). Luego de este momento se realiza un debate colectivo en el que cada grupo expone su producción y se discuten aportes de Winicki-Landman y Leikin (2000) respecto a los principios lógicos que se deben cumplir al definir un concepto matemático y a la relación que se presenta entre definiciones, equivalentes[1], consecuentes[2] y en competencia[3].

En el segundo encuentro se trabaja con las figuras poliédricas nuevamente y con libros de texto de nivel secundario, libros de geometría e internet. Se solicita que analicen definiciones que se encuentran en los dispositivos mencionados y estudien la equivalencia entre dichas definiciones y las realizadas en el primer encuentro. Posteriormente se pide "revisar las definiciones establecidas para cada familia. Enunciar una definición que resulte del análisis realizado" (Autores et al, año, p.). Se realiza un debate colectivo en el que cada grupo explicita el trabajo llevado a cabo y se discuten los aportes teóricos de Winicki-Landman y Leikin (2000) y de Borel (1962) en torno a la equivalencia entre definiciones.

En el tercer encuentro se presenta en primera instancia la consigna **a** y una vez resuelta la misma la **b**:

Tabla 1

Consigna presentada en el tercer encuentro, tomada de Cruz et al (2018, p 46.)

a) Escribir un relato acerca de los diferentes momentos transitados para lograr la construcción de las definiciones que caracterizan a cada familia de poliedros. **b)** Analizar y comparar el relato con el esquema de modelización de Esteley (2014).

Se entregó a cada asistente un folio que contenía el esquema de la Figura 1 con una breve caracterización de cada subproceso (experimentación, abstracción, resolución, validación, modificación y aplicación) del proceso de modelización mencionado.

[1] Dos definición son equivalentes sí y sólo sí el conjunto de objetos sobre el que se discute es el mismo para ambas.
[2] Dos definiciones son consecuentes cuando un conjunto de objetos es subconjunto propio del otro, razón por la cual el conjunto de condiciones que definen a estos conceptos se relacionan por una inclusión propia en sentido opuesto.
[3] Dos definiciones son definiciones en competencia cuando no son consecuentes y los conjuntos de objetos se intersecan pero no son iguales. Hay condiciones o propiedades que comparten y otras que los diferencian.

El solicitar un relato que dé cuenta del proceso vivido se fundamenta en la posibilidad de reflexionar en torno a la experiencia, lo cual puede permitir conocer el sentido atribuido por los profesores y futuros profesores a lo realizado en el marco del taller. Al respecto Villarreal y Esteley (2017) afirman que "la experiencia vivida produce sentido pero, al mismo tiempo, las palabras escogidas para relatarla reconfiguran esa experiencia vivida ofreciendo la posibilidad de formación del sujeto de la experiencia" (p. 26). Cabe destacar que los participantes manifestaron su consentimiento para que sus relatos sean empleados para el análisis de la experiencia.

Una mirada sobre los relatos de los profesores y futuros profesores

En la reflexión realizada en torno a los relatos de los participantes se identifican las producciones como Grupo 1 (G1), Grupo 2 (G2), Grupo (G3), Grupo (G4) y Grupo (G5). Las respuestas de los docentes y futuros docentes sobre los distintos momentos transitados durante los dos primeros encuentros (consigna **a**) versan sobre algunas cuestiones comunes que se describen a continuación.

En primer lugar los relatos de cuatro grupos hacen referencia a la observación y a la búsqueda de regularidades para identificar los rasgos que permitan caracterizar las figuras. Por ejemplo, "*G1: En un primer momento se intentó buscar regularidades", "G2: 1º Momento: Para poder agrupar los poliedros comenzamos a analizar que características compartían* […]*", "G3: 1º Observar los poliedros, 2º caracterizarlos"* y *"G5: Observación de los poliedros. Encontrar caract. en común"*. Estas descripciones son compatibles con los subprocesos de experimentación y abstracción (Esteley, 2014), dado que suponen la obtención de datos experimentales o empíricos que ayudan a la formulación de definiciones y se comienzan a identificar y vincular las variables seleccionadas.

En segundo lugar, en los relatos se menciona el resultado de la exploración anterior, en términos de una breve descripción de la clasificación realizada a partir del uso de vocabulario geométrico. Esto se interpreta como el subproceso de resolución (Esteley, 2014). Por ejemplo el Grupo 3 afirma que clasifican las figuras en "*Poliedros que al menos una de sus caras en un triángulo y poliedros que al menos una de sus caras es un cuadrilátero*". Cabe destacar que esta caracterización se considera como un primer modelo (definición) elaborado por este grupo.

En tercer lugar se destacan las instancias de trabajo en grupos pequeños (de interpretación), así como de socialización durante el trabajo colectivo. Por ejemplo "*G1: En una segunda instancia analizamos las definiciones creadas por cada grupo. Constatamos si algunas de ellas eran equivalentes ó si podían enriquecer nuestra primera construcción de definición* […] *Tuvimos que establecer acuerdos dentro del grupo y repensar la consigna*". Estos relatos son compatibles con el subproceso de validación (Esteley, 2014), en el sentido que el trabajo colectivo contribuyó en la aceptación o modificación del modelo.

En cuarto lugar cabe destacar que en todos los relatos se mencionan consideraciones respecto a la tarea de comparar definiciones para determinar si entraban en alguna de las categorías presentadas (equivalentes, consecuentes o en competencia). Por ejemplo: "*G4: En formato papel recibimos las respuestas de la clase anterior y la analizamos en (buscamos ejemplos) función de los tipos de definición (equivalentes, consecuentes y en competencia)"*. Estas descripciones también se asocian con el subproceso de validación.

En quinto lugar los cinco grupos expresan consideraciones respecto a la búsqueda en libros de texto y/o internet de las definiciones. A modo de ejemplo se exponen dos producciones "*G2:*

No encontramos definiciones equivalentes en libros de texto ni en internet" y "*G4: Analizamos libros de texto…Buscamos definiciones*". Estos relatos también se relacionan con el subproceso de validación, dado que se ofrece nuevamente la oportunidad de comparar la definición elaborada con las halladas.

Finalmente en todos los casos se hace referencia a las decisiones asumidas por el grupo pequeño respecto de sostener las definiciones inicialmente elaboradas o bien de modificar como consecuencia de compararlas con las halladas en los libros o con las que presentaron los otros grupos, por ejemplo, "*G3: Buscamos definiciones en libros de texto, tratando de relacionarlas con las nuestras, lo cual nos sirvió para volver a revisarlas, lo cual fue reforzado en la puesta en común*". Estas descripciones se identifican con el subproceso de modificación (Esteley, 2014) que permitió a los participantes decidir sostener o modificar las definiciones elaboradas.

Con respecto al análisis y comparación del relato realizado con el esquema de modelización, en general los profesores y futuros profesores lograron identificar y caracterizar los momentos transitados según los distintos subprocesos propuestos por Esteley (2014). Cabe señalar que el Grupo 2 no menciona estrictamente en su descripción los subprocesos, por lo que al final del análisis se realizan consideraciones en torno a este relato. Los otros cuatro grupos realizaron su análisis en torno a los mismos como se describe a continuación.

Los cuatro grupos reconocen en su trabajo haber transitado por el subproceso de experimentación. Tres de ellos en el primer momento, durante la tarea de observar y manipular los poliedros, "*G3: Observar los cuerpos en fotocopias y manipular los cuerpos concretos*". A su vez, el primer grupo considera que "*la experimentación, la abstracción y la resolución no fueron etapas separadas*". En esta afirmación, los participantes parecen poner en evidencia una fuerte interconexión entre estos subprocesos asumiendo un desarrollo no lineal del trabajo matemático.

Asimismo, los cuatro grupos hacen referencia al subproceso de abstracción. Lo identifican con buscar características (*G3: Cuando comentamos las características que íbamos notando en común para cada familia*), elaborar definiciones (*G4: Hacer la definición*) y enumerar rasgos o propiedades geométricas (*G5: Poliedros regulares y no regulares*).

Los cuatro aluden a la validación. Dos (Grupo 3 y Grupo 4) mencionan los momentos de puesta en común como instancias de validación de su propia producción. El Grupo 1 menciona que validan al "*verificar que los poliedros que componían la primera familia cumplían las características que se explicitaban en la definición*". Se menciona también el trabajo con los libros de texto o internet para validar la producción, (G5: *Buscamos def. en libros, int*.[internet], *etc. Comparamos con las elaboradas en el grupo*) así como el análisis de las relaciones entre definiciones (Grupo 3).

Dos grupos señalan el subproceso de modificación como consecuencia de la comparación de las definiciones con las halladas en libros de texto (G1, G5) y otro de la puesta en común (G4). Por ejemplo, el Grupo 5 describe "*Modificamos, identificamos la def. otorgada por los libros de textos y reformulamos la def. original, respaldo por el libro de texto*". El Grupo 3 no menciona el subproceso modificación.

Los cuatro grupos mencionan el subproceso de aplicación, dos para indicar que no es posible identificarlo en el relato realizado (G1 y G3). En particular el Grupo 3 afirma: "*usar la definición fuera del contexto de la actividad […] No entra en nuestro relato*". Sin embargo este Grupo en la consigna **a** expresa: "*en cada vértice de un prisma de cualquier base, concurren tres*

aristas" y afirma que se trata de un ejemplo de "*características que a veces pasan desapercibidas*". En este sentido se considera que emerge una propiedad geométrica en el trabajo realizado, lo cual podría concebirse como una aplicación. El Grupo 4 manifiesta duda frente a este subproceso "*¿Lograr y organizar las definiciones para las familias de poliedros*?" y el Grupo 5 menciona el respaldo de la definición elaborada con lo hallado en los libros de texto.

Únicamente en dos relatos se expresan consideraciones respecto al subproceso de resolución. El Grupo 1 hace referencia al mismo al señalar que experimentación, abstracción y resolución se desarrollan interrelacionadas. Por otra parte el Grupo 3 reconoce este subproceso al realizar la escritura de la definición, en sinergia con la interpretación realizada anteriormente por las autoras de este trabajo.

El Grupo 2 en su narración emplea otros términos que se mencionan en el esquema. Explicitan "*a) Tema: nos presentan los poliedros. b) Extracción de características de los poliedros. c) Crear definiciones según las familias. d) Planteamos las definiciones con las características elegidas."* En este sentido se aprecia que logran discriminar que el tema de trabajo es "Poliedros" y las consideraciones realizadas posteriormente parecen asociarse a abstracción y resolución a pesar de que no lo explicitan. Posteriormente afirman "*No pudimos validar ni modificar por ello las definiciones quedaron como estaban*", esta última afirmación puede deberse a que no encuentran en libros de textos e internet definiciones equivalentes a las propias. Finalmente expresan "Se *puede analizar que las definiciones no solo podían agruparse los poliedros con los que trabajamos sino que se extienden a cualquiera*", lo cual parece hacer referencia a la aplicación.

Reflexiones finales

En los relatos que dan cuenta de lo realizado durante las tareas de elaboración y estudio de definiciones (consigna **a**) los participantes del taller incluyen descripciones que permiten vincular la experiencia vivida con los diferentes subprocesos que componen el proceso de MM. Es decir, las reflexiones acerca de la experiencia vivida posibilitaron otorgar sentido a lo realizado en instancias de producción de definiciones geométricas en términos de los diversos componentes de los procesos de MM.

En relación con las interpretaciones de los profesores y futuros profesores del relato a partir del esquema y de la caracterización del proceso de MM planteados por Esteley (2014), se evidencian en todos los casos una cercanía entre lo destacado por los participantes y lo propuesto por la autora, por lo que se logra cumplir con los objetivos del taller. Es de destacar que en los relatos de los sujetos se aprecia el desarrollo no lineal de los subprocesos del proceso de MM, tal como lo plantea Esteley (2014). Además emergen y se discuten posibles modos de validación, como ser, el empleo de libros de textos, los momentos de trabajo colectivo en el aula de matemática, entre otros; también se pone de manifiesto la influencia de la validación en la decisión acerca de la aceptación o modificación del modelo. Llama la atención, no obstante, que un solo grupo asume la elaboración de la definición en términos del subproceso de resolución, es decir, que reconoce en la definición el modelo construido. Este aspecto amerita un análisis más profundo que trasciende este trabajo. Poder avanzar sobre este aspecto podría ofrecer información sobre el sentido de las definiciones en el marco de un trabajo matemático.

Se considera que la modelización matemática como estrategia pedagógica resultó una estrategia adecuada para reflexionar en torno a la elaboración de definiciones en matemática.

Asimismo, se han encontrado evidencias de que los sentidos atribuidos por los profesores y futuros profesores a la experiencia son compatibles con un proceso de MM.

Bibliografía y Referencias

Publishing Company.

Larrosa, J. (2005). Entre las lenguas. Lenguaje y educación después de Babel. Barcelona: Laertes, S.A.

Maass, K & Engeln, K. (2018). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. *ZDM*, 50, 273–285.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M., & Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration. ZDM Mathematics Education, 48(5), 651–690.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy*. Buenos Aires: libros del Zorzal.

Sanchez Mármol & Pérez BeatoBassanezi, R.C. & Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *Números*, 32, 13-25.

Biembengut, M. & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática,* 16(2), 05-125.

Borel, E. (1962). La definición en Matemáticas. En F. Le Lionnais (ed.): *Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático* (pp.: 25-35). Buenos Aires: Eudeba.

Autores et al. (año). Título. N. Di Franco (Ed.), *VII Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 42- 47). Santa Rosa: Universidad Nacional de la Pampa.

Da Ponte, J.P., Segurado, M.I. & Oliveira, H. (2003). A collaborative project using narratives: What Happens when Pupils Work on Mathematical Investigations? En A. Perter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Begg (Eds.), *Collaboration in teacher education: Examples from the context of mathematics education* (pp. 85-97). Dordrecht: Kluwer.

Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: Voces y Sentidos*. Córdoba: Filosofía y Humanidades/UNC.

Even R. & Ball D. (Ed.). (2009) *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study.* New York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel (1961*). Geometría métrica, proyectiva y sistemas de representación*. Madrid: SAETA.

Villarreal, M. & Esteley, C. (2017). Futuros profesores de matemática: narrativas de sus primeras prácticas en escenarios de modelización. En D. Fregona, S.Smith, M. Villarreal y F. Viola (Eds.), *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la Educación Matemática,* (pp. 5-50). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Villarreal, M., Esteley, C. & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM*, 50, 327–341.

Winicki–Landman, G & Leikin, R. (2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions. Part 1. For the Learning of Mathematics, 20 (1), 17-21.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Modelación con Tracker para el aprendizaje de movimientos en el plano

Guillermina **Ávila** García
CECyT 11, Instituto Politécnico Nacional
México
gavilag@ipn.mx
Liliana **Suárez** Téllez
CGFIE, Instituto Politécnico Nacional
México
lsuarez@ipn.mx

Resumen

El estudio presenta un análisis reflexivo sobre la enseñanza de la Física I, en el Centro de Estudios Científicos y Tecnológico No. 11 (CECyT No.11) "Wilfrido Massieu" del Instituto Politécnico Nacional (IPN), incluyendo los componentes de la Reforma Integral de Educación Media Superior y el Nuevo Modelo Educativo IPN, documentos que constituyen el marco educativo e institucional, para el trabajo se consideró la adecuación del alineamiento constructivo y la integración de TIC para lograr un aprendizaje profundo en los alumnos en Física I; el desarrollo de esta experiencia; considera la exploración del problema y posibles soluciones, en este caso las actividades de aprendizaje, objetivo curricular y las tareas de evaluación, se explora y realizan experimentos, así como el análisis de los movimientos con el software Tracker, el avance de los aprendizajes alcanzados de acuerdo con los niveles de comprensión, finalmente se considera realizar posibles modificaciones que permitan la mejora.

Palabras clave: Modelación, Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), Alineamiento constructivo, Tracker, Aprendizaje profundo.

La enseñanza de la Física en Nivel Medio Superior

La Física hace énfasis en la formación y desarrollo de habilidades de razonamiento crítico y pensamiento científico, búsqueda de información, de trabajo en grupo y de resolución de problemas, teóricos y experimentales.

Su enfoque teórico-experimental permite abordar situaciones problemáticas que se le presentan al alumno, en las cuales establece planteamientos, realiza transformaciones

elementales de tal manera que reflexiona sobre los fenómenos naturales facilitando los procedimientos empíricos, deductivos e inductivos tanto para la aplicación de las leyes y principios de la Física, así como la solución de problemas relacionados con las temáticas.

En el aprendizaje de las ciencias es necesario profundizar en sus estructuras cognitivas para enriquecer y fomentar el aprendizaje profundo en los alumnos, a partir de la toma de conciencia y reconocimiento de las relaciones entre los modelos interpretativos que les proporciona la ciencia y sus propias concepciones alternativas.

En este trabajo, las actividades de aprendizaje son conjuntadas en la enseñanza y la integración de las TIC (en este caso el software Tracker).

La implementación del alineamiento constructivo, consistió en la adecuación del plan y programa de estudios de la unidad de aprendizaje: Física I, para después elaborar las actividades de enseñanza aprendizaje (AEA), con la integración del instrumento de mediación Tracker, software que permite el estudio de variables físicas, gráficos y tabulaciones de una manera interactiva; para observar los niveles de comprensión alcanzados por los alumnos, elaboración de instrumentos mediante los cuales se registrarán mediciones de la sesión expositiva y experimental, y de esta manera obtener resultados de evaluación y determinación del aprendizaje obtenido por los alumnos.

El enfoque profundo que menciona Biggs (2010), el que integra una transformación de la buena enseñanza adecuándola a conseguir que la mayoría de los alumnos utilicen los procesos de comprensión del nivel cognitivo superior.

Biggs (2010) argumenta

> Un buen sistema de enseñanza alinea el método y la evaluación de la enseñanza con las actividades de aprendizaje establecidas en los objetivos, de manera que todos los aspectos de este sistema están de acuerdo en apoyar el adecuado aprendizaje del estudiante. Este sistema se denomina alineamiento constructivo, basado en los dos principios del constructivismo: aprendizaje y alineamiento en la enseñanza. (p. 29)

Considerando lo anterior, se tomó en cuenta una de las problemáticas a la que nos enfrentamos en el CECyT 11, en la enseñanza de la Física que es la tendencia de los alumnos hacia la memorización de las fórmulas para resolver un problema, que apunta a la parte teórica, también otra situación es el descuido de la parte práctica, la que es fundamental, para que el alumno mediante procesos experimentales logré comprender en qué momento aplicar una ecuación y entienda el fenómeno que ocurre.

Antes de iniciar con la implementación del cambio, se dará una breve explicación de la fundamentación propia de la unidad de aprendizaje, uno de los temas de mecánica clásica, tema central que se adecua al alineamiento constructivo. El plan y programa de estudios proponiendo una actividad de inicio para identificar todos los conocimientos previos que tiene el alumno y cómo lo relaciona con otras unidades de aprendizaje (Biggs, 2010).

Una vez que el alumno soluciona el problema en papel, se propone que realice una actividad que debe inventar como una forma de aprendizaje en la Física y posteriormente ese experimento se lleva a cabo en el patio escolar para después analizarlo con la herramienta Tracker para el análisis de los movimientos en el plano.

La actividad que se propuso a los alumnos una situación inicial sobre movimiento,

mediante la lectura e identificación de las variables del problema, para después, de manera gráfica representar la solución.

La tarea inicial consiste en resolver un problema relacionado con el movimiento que realiza un personaje al que se nombró Ronning, donde los alumnos señalaron mediante el trazo de una gráfica, las trayectorias que recorrió dicho personaje, además de expresar el tipo de movimiento que realizó de acuerdo a los temas vistos en la clase, correspondiente a cinemática.

Se aplicó el aprendizaje activo con el siguiente enunciado de propuesta de problema "Ronning", en adelante nos referiremos a "problema de Ronning".

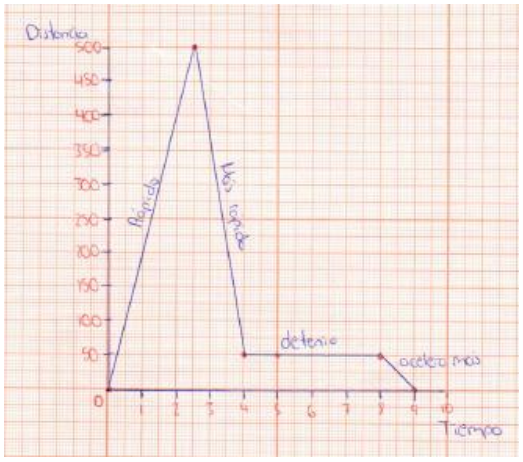


Figura 1. Solución gráfica al problema de "Ronning"
Elaboración propia

En la Figura 1 se encuentra el tipo de solución al problema presentado en forma textual, los estudiantes tienen que interactuar con la situación descrita, tomar decisiones sobre las variables, los ejes y los trazos que configurar la gráfica solicitada. En el texto de la actividad se les pide descargar el Tracker, simular el movimiento descrito en el problema y tomar un video para analizar la situación por medio de las gráficas y el análisis de los datos que se obtienen del Tracker. En el siguiente apartado se describe la tarea que hacen los estudiantes al reproducir el proceso de modelación con Tracker a partir de una situación que ellos inventan.

Construcción del conocimiento: actividad de los alumnos

El avance de los alumnos se identifica por medio de las tareas del problema inventado por ellos mismos, donde describen la situación para darle una solución a través de los conocimientos previos y de la integración de conceptos de movimiento que incluye también la experiencia de solución a la actividad inicial y en esa medida el alumno es más reflexivo y sofisticado en su aprendizaje.

Actividad del equipo 3 (conformado por 4 alumnos y 1 alumna). Problema de tiro parabólico

Se lanza una pelota de tenis de una altura de dos metros, la cual hace una trayectoria parabólica. Verifique la parte experimental usando el programa de Tracker para conocer la trayectoria y tiempos. (Como puede observarse los alumnos cambiaron un poco la redacción, porque su fin era verificar qué sucedía con Tracker).



Figura 2. Trayectoria del lanzamiento de la pelota de tenis, analizado con Tracker
Fuente: Elaboración propia

Como puede observarse en la Figura 2, hay un rebote de la pelota tenis que es lo que podemos observar en la parte final de la gráfica y efectivamente, se comprobó con cronómetro en mano que, tardo 4 segundos en hacer la trayectoria. Mientras que Tracker hace una medición de tiempo más precisa. En la tabla 1, se observa las conclusiones de comparación que el equipo de trabajo realiza después del análisis realizado.

Tabla 1. Comparación de la solución en Tracker y papel de la tarea inicial, equipo 3.

Solución del problema en papel	Solución del problema en Tracker
La tarea inicial nos sirve como referente para saber la trayectoria del móvil. El software Tracker es un excelente programa que permite observar los detalles mínimos del experimento.	*Consideramos que el análisis en Tracker es muy preciso, nos facilitó mucho utilizar el software, porque permite observar los mínimos detalles de movimiento que realiza el objeto en cuestión.*

Fuente: Elaboración propia

Se observa que los alumnos, no sólo se quedan con el análisis del movimiento uniforme acelerado, sino que además realizan el análisis de otros movimientos en el plano, constatando lo que se ve en clase de manera teórica. Las evidencias antes mostradas son concluyentes para

indicar que los alumnos ya no se encuentran en un nivel de aprendizaje superficial, han avanzado a niveles cognitivos superiores, en las conclusiones muestran argumentos fundamentados en la teoría con el conocimiento alcanzado.

Experimento de "Cohete Hidráulico

Posteriormente a los problemas inventados los alumnos realizaron el experimento de "Cohete Hidráulico", el cual consiste en realizar un cohete hidráulico y grabar la trayectoria del cohete para analizarlo mediante el software de Tracker.

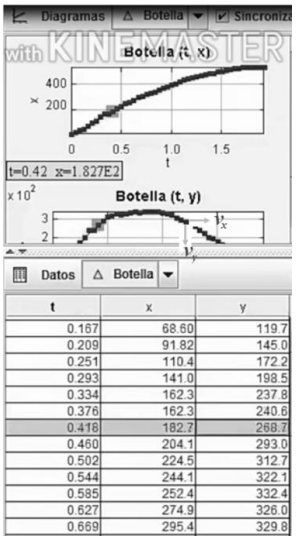
En los experimentos se puede observar los siguientes tipos de movimientos: caída libre, tiro vertical y tiro horizontal, tiro parabólico, este último como la combinación de los anteriores.

Se muestran los experimentos que realizamos para el comparativo.



Figura 3. Primer lanzamiento del cohete hidráulico
Botella a ¼ litro de capacidad de agua
Fuente: Elaboración propia

Análisis



t	x	y
0.167	68.60	119.7
0.209	91.82	145.0
0.251	110.4	172.2
0.293	141.0	198.5
0.334	162.3	237.8
0.376	162.3	240.6
0.418	182.7	268.7
0.460	204.1	293.0
0.502	224.5	312.7
0.544	244.1	322.1
0.585	252.4	332.4
0.627	274.9	326.0
0.669	295.4	329.8

Figura 4. Análisis de la trayectoria
Fuente: Elaboración propia

El cohete siguió una trayectoria parabólica que sale del origen con cierta velocidad. El vector velocidad tiene sus componentes tanto en x como en y.

Y los datos que nos arroja en el punto final es su llegada al suelo. El tiempo de vuelo (subida y bajada es de 0.42 s).

Las componentes de la velocidad del cohete son:

Evaluación por medio de items

Finalmente, se realizó una evaluación por ítems para verificar el avance del aprendizaje de los alumnos. A manera de ejemplo tomamos uno de los ítems trabajados.

ÍTEM 2

Observe la figura, la cual permitirá que analice y conteste cada uno de las preguntas propuestas en los incisos.



Figura 5. Velocidad y dirección de un objeto

Fuente: Hewitt, P. G., & Lira, J. A. F. (2004). Física conceptual (Vol. 6). Addison Wesley.

a) ¿En qué sección o secciones de la figura se muestra un cambio de velocidad?

b) ¿En qué sección o secciones de la figura se muestra un cambio de dirección?
c) Observe la sección 1 de la figura y establezca, ¿qué es aceleración?
d) En la última sección de la figura, ¿la velocidad del cuerpo 1 es igual que la velocidad del cuerpo 2?

En la figura 6, se muestra la gráfica de los resultados obtenidos en el ítem 2, de acuerdo con los niveles de la taxonomía SOLO propuestos para la evaluación de tema.

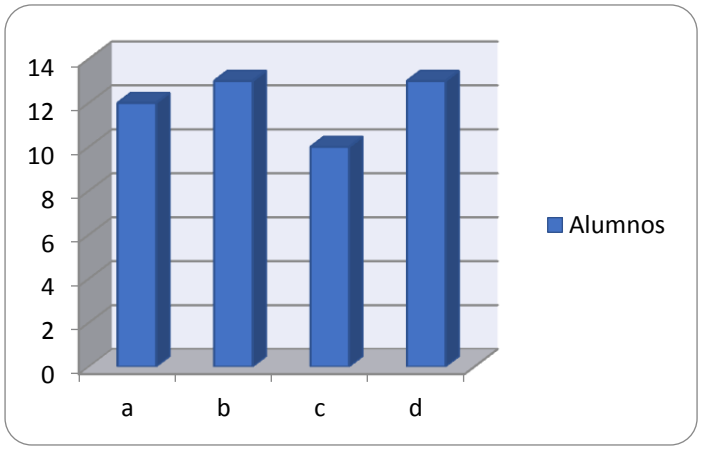


Figura 6. Gráfica de resultados obtenidos del ítem 2

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con los resultados del ítem aplicado, el 80% que corresponde a 12 alumnos contestan de manera correcta el inciso ⓐ, el cual se encuentra en el nivel uniestructural, relacionando todos los conceptos de manera inmediata, este nivel está caracterizado porque los alumnos por simple inspección de la imagen, observan el cambio de velocidad en la sección I y II.

En el caso de la respuesta al inciso ⓑ, solo 86.6% que corresponde a 13 alumnos responden de manera correcta, considerando que en la sección II se observa el cambio de dirección.

En el inciso ⓒ, el 66.66% que corresponde a 10 alumnos, responden de manera correcta, considerando que la aceleración es la variación de la velocidad de un móvil en cada unidad de tiempo, mientras que los otros 5 alumnos sólo escriben que es un cambio de velocidad, sin tomar en cuenta el tiempo.

En el inciso ⓓ, el 86.6% que corresponde a 13 alumnos, responden de manera correcta, analizando y deduciendo que el cuerpo 1 tiene mayor velocidad que el cuerpo 2. Mientras que otros alumnos responden que el cuerpo 2 tiene mayor velocidad que el cuerpo 1, esto es incorrecto.

Conclusiones

En este trabajo se integraron problemas y situaciones, donde los alumnos realizaron un análisis profundo y señalaron en dichas situaciones qué ecuaciones debían ocupar, sin llegar a la memorización, algunos alumnos consideran de mayor importancia el sólo memorizar las ecuaciones para utilizarlas para la resolución de problemas, por lo cual, un ajuste de manera más detallada que se trabajará en un segundo momento, es permitir que el alumno entienda los problemas que analiza, de manera más profunda, permitirán recordar las ecuaciones de movimiento, sin la necesidad de memorizarlas.

Una vez que se ha experimentado el cambio y analizar los ajustes finos que se requieren, se deberá aplicar nuevamente, siempre tomando en cuenta la reflexión inicial, volviendo al primer paso, aunque ya con el conocimiento añadido de lo ocurrido.

Se logró:

- ✓ Destacaron las destrezas de los alumnos en el uso de Tracker.
- ✓ El trabajo colaborativo, al compartir las experiencias del uso de la herramienta tecnológica entre los alumnos.
- ✓ Fomento de la actitud crítica y reflexiva en el alumno, a través del uso de herramientas (en este caso Tracker).
- ✓ Investigación autónoma por parte del alumno para el aprendizaje y mejora continua de la herramienta tecnológica (uso del Tracker).
- ✓ La mayoría de los alumnos cuenta con los recursos tecnológicos que permitieron que desarrollaran su trabajo en Tracker.

Referencias y bibliografía

Arceo, F. D. B., Rojas, G. H., y González, E. L. G. (2010).Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista. México: McGraw-hill

Biggs, J. (2010). Calidad del aprendizaje universitario. España: Narcea ediciones.

Gil, S. (2014). Experimentos de Física usando las TIC y elementos de bajo costo. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Alfaomega Grupo Editor Argentino.

Hewitt, P. G., y Lira, J. A. F. (2004). Física conceptual (Vol. 6). México: Pearson

Instituto Politécnico Nacional (2004) Nuevo Modelo Educativo del IPN. México: Instituto Politécnico Nacional.

Red Onmidia LTDA. (2015). Diccionario ABC. Sao Paulo, Brasil. Recuperado el 10 de noviembre de 2016, de http://www.definicionabc.com/medio-ambiente/lluvia.php

Restrepo, B. (2004). La investigación-acción educativa y la construcción de saber pedagógico. Educación y educadores, núm. 7. Colombia: Red de Revistas Científicas.

Sears, F., Zemansky, M., Young, H. D., y Freedman, R. (1999). Física universitaria vol. 1. México: Addison Weswy Longman.

Suárez, L; Cordero, F; Daowz, P; Ortega, P; Ramírez, A; Torres, J L; (2005). De los paquetes didácticos hacia un repositorio de objetos de aprendizaje: un reto educativo en matemáticas. Uso de las gráficas, un ejemplo. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 8() 307-333. Recuperado el 10 de octubre de 2018, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=331427204016

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Experimentación discursiva y figuración

Leonora **Díaz** Moreno
Universidad de Valparaíso
Chile
leonoradíazmoreno@gmail.com
Maximiliano **Núñez**
Liceo Eduardo de la Barra
Chile
Maximilianonunez.30@gmail.com

Resumen

Se ilustran potencialidades de lo narrativo para lograr la inmersión estudiantil en una situación experimentalcomo parte de prácticas de modelación en el estudio de un fenómeno, en aulas de matemáticas de educación secundaria. La modelación se orienta a que los estudiantes constituyan dipolos modélicos articulando dos entidades: desde la operatividad de una de estas intervienen en la otra. Articulan una tabla de datos o una figura o una expresión algebraica con elfenómeno de elasticidad del resorte por ejemplo. Se analizan elaboraciones estudiantiles y se reportan evidencias de su inmersión en la situación experimental que se narra.En un marco de investigación-acción se suscribe la investigación de diseño.
Palabras clave: modelación, narrativa, figuración.

Introducción

En nuestro país, como en otros de la región, se reclama por un cambio en las metodologías de enseñanza en un marco de reformas estructurales, para ofrecer a los jóvenes la posibilidad de desarrollar las habilidades del siglo XXI, señalando como una de ellas a la modelación (Ministerio de Educación de Chile, 2012) junto con abordar y resolver situaciones problemáticas concurrentes con la capacidad para involucrarse en procesos en los que participan dos o más personas (habilidad medida por PISA 2015).Intentando explicar este tipo de resultados desde un punto de vista de política educacional, se afirma que el país no cuenta con una infraestructura adecuada para el desarrollo de las habilidades de modelar en el marco del trabajo en equipo, más allá de la intencionalidad que ponga el profesorado en ello.

La perspectiva de modelación y experimentación que se suscribe se orienta a quitar fuerza a ingentes requerimientos de infraestructura como son los laboratorios de experimentación. Las evidencias muestran que es posible ofrecer a los estudiantes oportunidades

de vivenciar prácticas de modelación con experimentación, desde la colaboración y también en contextos de vulnerabilidad. Más específicamente se presentan evidencias de inmersión en experimentación discursiva provenientes de producciones estudiantiles, cuando los estudiantes vivencian un diseño de enseñanza con base en modelación. Tal diseño intenciona el desplazamiento del trabajo estudiantil desde uno individual y competitivo a uno colaborativo y en equipos, configurándose habilidades concurrentes (Contreras, C., 2014). El diseño aborda la modelación de un fenómeno a partir de la experimentación discursiva, la que se configura por una narración literal que describe el suceso experimental y una tabla con datos provenientes del experimento.

Marco referencial

Interesa estudiar la modelación como parte de los procesos de aprendizajes matemáticos. El acto de modelar se entiende como una práctica recurrente de diversas comunidades, que articula dos entidades con la intención de intervenir en una, lo modelado, a partir de la otra, el modelo. Desde esta perspectiva, no existen modelos y sus matemáticas, independientes de quien modela y de la comunidad que le da cabida. Se suscribe una mirada socioepistemológica de modelación (Arrieta y Díaz, 2015). En la perspectiva de estos autores interesa que los estudiantes establezcan dipolos modélicos mediante la articulación de dos entidades desde la operatividad de una de ellas, para intervenir en la otra. Por ejemplo, articular una tabla de datos o una figura o una expresión algebraica con el fenómeno de elasticidad del resorte o la caída de los graves. Tal articulación constituye, para la vivencia del estudiante que modela, una nueva entidad, el dipolo modélico (op. cit. p. 35).

La inmersión estudiantil en experimentación discursiva se estudia con base en producciones de los estudiantes, las que tienen un carácter narrativo y provienen de vivenciar un diseño de enseñanza con base en modelación.

Se suscribe para los conocimientos matemáticos lo que plantea Candela (1999) cuando concibe al conocimiento científico como una construcción social sujeta a procesos discursivos específicos, que incluyen tanto las versiones sobre ciertos temas como la organización del discurso, las maneras de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras (y figuras) procesos y resultados de la experiencia, de validar un conocimiento y de establecer una verdad. Y a que lo matemático se inventa como herramienta para organizar fenómenos del mundo físico, social y mental (Freudenthal, 1991) para atender aprendizajes de matemáticas creadas para gestionar el cambio en tanto se predicen y controlan estados futuros (Cantoral, 2004).

Entre los trabajos sobre la naturaleza del conocimiento narrativo más sugerentes de las últimas décadas, se cuentan los estudios, desde una mirada filosófica, de Johnson (1987) sobre el lenguaje y el conocimiento corporalmente encarnado; el trabajo de Lakoff y Johnson (1980) sobre la metáfora y el texto "Wheremathematics comes from" de Núñez y Lakoff (2001) sobre la naturaleza encarnada del conocimiento matemático. Estos trabajos, entre otros, ilustran un contexto signado por importantes desarrollos en el campo del lenguaje y las neurociencias.

Para Connelly y Clandinin (1995) somos organismos contadores de historias, los relatos nos descubren que la experiencia misma tiene un referente que está hecho de relatos. KieranEgan (1998) y James Wertsh (1991) difunden la importancia de lo narrativo en pedagogía y didáctica, en el mundo de habla hispana. Egan insiste en revalorizar el papel de los relatos en educación. Comparte con Bruner (1988) que la narración posibilita captar y pensar el mundo y la propia

experiencia, siendo un medio eficaz que ayuda a recordar y que a la vez proporciona un ambiente cómodo y acogedor para la fantasía y la imaginación. Para Wertsch se trata de una herramienta central para comprender la forma en que los estudiantes se representan un número muy importante de contenidos escolares, sus epistemes (Díaz, 2005).

Una narración nos trae a la mano un "evento especial" en el devenir de los procesos de entendimiento del estudiantado. Lo narrado no se reduce a las expresiones literales puesto que una figura, al decir de Carrasco, Díaz y Buendía (2014) también constituye una narración, la que en el caso de este estudio, apoya a la narración literal para configurar el experimento narrado. En efecto, se identifican en ella propósitos comunicativos que se expresan a través de una estructura argumental, unas herramientas que concurren a configurarla y metáforas de base que entran en juego.

Abordamos los análisis de las producciones estudiantiles recogidas en la investigación, incorporando estos elementos a una sensibilidad teórica con soporteen el programa del Pensamiento y Lenguaje Variacional (Cantoral, 2004).

Metodología

Este estudio se desarrolla bajo el paradigma metodológico de investigación de diseño y experimentación, el que se inscribe en un marco de investigación-acción (Molina, 2006). Se experimenta con base en un diseño de modelación validado internamente (Arrieta, 2003).

En el ámbito de la educación matemática la modelación se trabaja desde distintas perspectivas. En la visión socioepistemológica de Arrieta y Díaz (2015) no hay modelación sin interacción con el fenómeno que se intenta modelar, por lo que la primera fase de la modelación es la experimentación en sentido amplio. Cada modalidad de la experimentación, sea esta presencial, discursiva o virtual, trae consigo características propias que imprimen su huella en la forma de modelar.En la experimentación discursiva los estudiantes se enfrentan a una narración constituida por un relato literal, una figura y una tabla de datos.

En las primeras aplicaciones del diseño se incluía la figura. En un aula inclusiva que incorpora de modo intencional estudiantes tanto con dificultades específicas de aprendizaje como con necesidades educativas de carácter permanente, uno de los equipos comunicó con figuras sus desarrollos, interviniendo cada vez la figura inicial del resorte. Esta situación ilustra el poder comunicativo de la figuración (Carrasco, Díaz, Buendía, 2014).

Así, para favorecer la inmersión de cada estudiante en la experimentación discursiva, se les solicita que elaboren una figura que exprese la situación experimental, la que se les comunica mediante una narración literal y una tabla de datos obtenidos de la experimentación.Se refuerza la inmersión de los estudiantes en esta modelación discursiva, solicitándoles que describan en sus propias palabras el experimento y que reconozcan en la tabla, valores tomados de la situación.Se espera que los estudiantes reconozcan a la tabla como una herramienta que registra datos que varían juntos o que covarían. Cierra aquí la primera fase del diseño, esto es, la modelación discursiva.

Se reportan desarrollos de las tres actividades correspondientes a la experimentación discursiva: 1. Dibujar o hacer una figura de la situación narrada; 2. Describir con sus palabras el experimento; y, 3. Informar la covariación correspondiente con un dato numérico que registra la tabla.

El estudio consideró seis grupos de cuatro estudiantes, cuatro grupos de tres estudiantes y cuatro grupos de dos estudiantes, provenientes de dos establecimientos de educación secundaria de la región de Valparaíso, Chile.

Resultados y análisis

Analizamos a continuación evidencias de inmersión de estudiantes, provenientes de la experimentación con la situación experimental de la elasticidad de un resorte

Caso 1.

La figuración recupera la situación experimental de modo exhaustivo desde la narrativa literal y la tabla. Su estructura de cómic explicita un momento inicial, uno intermedio y el final de la experiencia, evidenciando su transcurrir en un tiempo. La figura inicial muestra un soporte que sustenta al resorte, del que cuelga un portapesas vacío. A éste se fija una aguja de arrastre que indica un punto en la primera parte de una regla graduada adyacente. Los anillos del resorte están comprimidos. Una flecha guía la visión a la figura siguiente, la que deja implícito al soporte. La escena final muestra los anillos del resorte difuminado distendidos, seis pesas en el portapesas y debajo de éste en paréntesis, la cantidad de 120 gramos, una flecha ennegrecida indica hacia la posición de 225 mm., en línea y a la derecha de la regla graduada. Una escena intermedia se comunica por medio de una flecha tenue para la aguja de arrastre unida a un globo. En este se lee la cantidad de 60 gramos, evocando al portapesas con tres pesas. La aguja indica una posición en la regla graduada que, además, en línea con ella y a su derecha, registra la cantidad correspondiente de 135 mm.

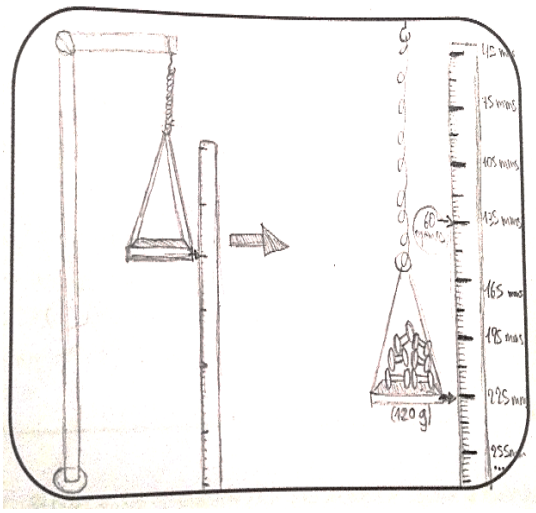


FIGURA 1. Elasticidad del Resorte Equipo A

Herramientas. Resorte comprimido y portapesas vacío que supera en dimensiones al resorte. Resorte distendido difuminado y con detalle portapesas con seis pesas; dos tipos de flechas, tres para indicar la posición del portapesas y la cuarta para dirigir la vista a las dos escenas que siguen, unas más ennegrecidas que otras, para señalar el paso del tiempo entre las escenas. Dos reglas graduadas, la segunda añade las elongaciones de la tabla. Un globo que informa una segunda escena: la elongación correspondiente a tres pesas.

Argumentos. Se estructura la figuración con dos figuras y tres escenas, mostrando el dinamismo de la situación experimental (fenómeno y numerización) logrando una descripción figural completa del experimento.

Metáforas de base. Dos figuras, una inicial en vista general y la segunda en zoom, con tres escenas y foco en el desplazamiento del portapesas y los valores que indica la flechita, según se agregan o quitan pesas.

Caso 2.

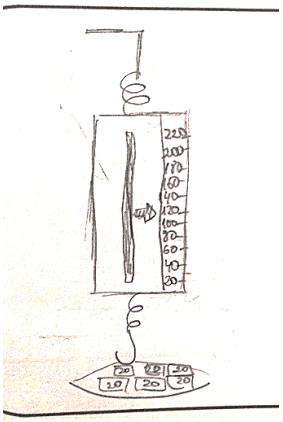


FIGURA 2. Elasticidad del Resorte. Equipo B

Herramientas. Un portapesas en la continuidad imaginada de la figura. La figura se asemeja a una antigua pesa de resortes que fuera de uso frecuente en ferias de antaño. Un rectángulo vertical central porta una flechita móvil ennegrecida que señala en dirección a una regla graduada con cantidades que crecen de 20 en 20 desde la base hacia arriba.
Argumentos. Se estructura una figura rectangular en el centro. Sobre y bajo ella se observan segmentos del resorte, sindicándolo como esencial para determinar pesos en el rango de 20 a 220 grs. La flechita subiría conforme se le añaden pesas, a contrapelo de la elasticidad del resorte. Algún engranaje interno estaría revirtiendo el movimiento de deslizamiento de la flechita.
Metáforas de base. El artefacto mecánico como foco de la figura. Este invisibiliza al fenómeno de elasticidad del resorte que se pretende modelar.

Desde un extremo de un soporte cuelga un resorte que sostiene un portapesas con seis pesas. Se completa la figura anteponiendo a la parte central del resorte una barra vertical con una flecha en su centro que señala 120 gramos en una regla graduada con pesos desde o a 220 gramos, plasmando el momento en que la balanza tiene seis pesas. El dibujo opaca la relación de esos pesos con elongaciones correspondientes en el resorte, las que, presentes en la tabla, omite en la figura.

Caso 3.

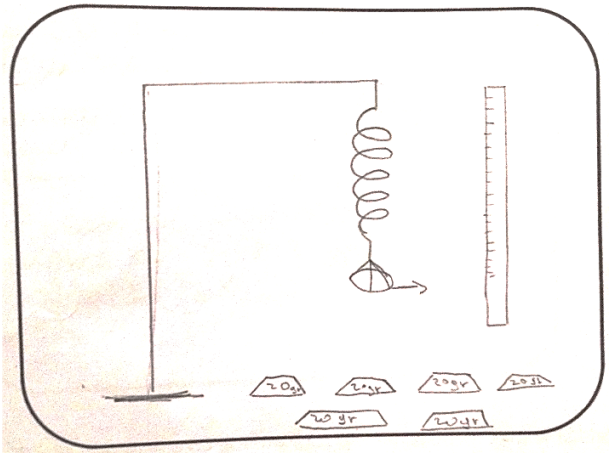


FIGURA 3. Elasticidad del Resorte. Equipo C

Herramientas. Se figuran cosas que enuncia la narración literal: soporte universal del que cuelgan un resorte y de este un portapesas, Flechita para indicar cantidades de pesos del portapesas y una regla graduada. No atienden a las acciones que se narran y que constituyen a esas cosas en herramientas de la experimentación: obtención de datos y tabla en la que se registran.
Argumentos. El equipo recupera una situación previa a la experimentación, informando insumos de esta.

Metáforas de base. Una disposición de objetos como evocación de un momento potencial de experimentación.

Se dibuja un resorte sujeto a un soporte universal, un portapesas colgando del resorte conectado a su vez con una flechita que indica a una regla graduada. La figura muestra seis pesas de 20 gramos, las más cercanas de mayor tamaño y las que se alejan del observador más pequeñas.

En la segunda actividad, los estudiantes que hicieron la Fig. 1, describen la situación en sus palabras,

> Como se puede observar en el dibujo al colocar pesas en el portapesas éste va bajando hasta alcanzar 225 mms (6 pesas); y si vamos quitando pesas el portapesas

> sube 30 mms por cada pesa que se quite y esto es gracias a la elongación que adquiere por las pesas y la contracción al quitarlas (las pesas).

La textualidad da cuenta desu inmersión en unaacción experimental en 56 palabras, sintetizando articuladamente las 67 palabras y la tabla de la experimentación narrada original. Relacionan a cada ubicación con un número de pesas, expresando los valores con sus unidades de medida, en tanto se trata de cantidades de magnitudes. Dan forma a una narrativa literal que interpreta el fenómeno: unas propiedades físicas de elongación y contracción que no adjudican a alguna entidad del arreglo experimental y que se manifiestan de un modo reversible según se ponen o quitan pesas del portapesas. Un resorte evanescente en el dibujo y ausente en su literalidad, concurre con un deslizamiento cognitivo que acaba por constituir a la cantidad de pesas en factor causal de subidas y bajadas del portapesas. Su "ley física" sería algo como "el portapesas va bajando según se van poniendo pesas y se contrae al quitarlas. El portapesas sube 30 mm por cada pesa que se quite".

Sigue la descripción de quienes hicieron la figura 2,

> Este es un objeto que permite medir el peso en gramos de cualquier cosa que le pongan encima. Usted pone un objeto en el portapesas, el peso del objeto hace que el resorte que está conectado con el indicador se estire, mostrando así el peso.

El grupo se desplaza de la situación experimental propuesta, focalizando en el instrumento de medida de pesos que subyace al arreglo experimental. Su "ley física"podría expresar que "el objeto en el portapesas estira al resorte y el indicador conectado a este resorte, muestra una cantidad de peso en una regla graduada". Los estudiantes significan con su ley, una covariación "cualitativa" de peso y estiramiento del resorte.

La descripción asociada con la figura 3 señala de modo lacónico "Vamos a decir que la ubicación del portapesa depende del peso". Sintetizan la situación experimental con una dependencia de la ubicación del portapesas respecto de cada peso. El resorte jugaría un rol de fondo o de contexto en su interpretación de la situación experimental.

Conforme al propósito de la tercera actividad, a saber, que los estudiantes articulen la narración literal con la tabla de datos, un grupo responde por la posición de la flechita cuando el portapesas tiene 60 grs.: "Estaría en los 135 mms de la regla, ya que lo dice la tabla". Aluden tanto a su figuración de la situación como a la tabla de datos, articulando nuevamente narración literal y tabla de datos. Otro grupo interpreta la narración literal articulada con la tabla,dando forma en su respuesta a su ley de covariación "cualitativa" de peso y ubicación de la flechita (estiramiento del resorte),

> Quedaría en 135 mms, cuando el portapesas está vacío y se le coloca peso, este se empieza a estirar y así se puede determinar el peso del objeto y la ubicación de la flechita.

El tercer grupo, alusar la frase "Su ubicación será de 135 mms" muestra la articulación literal-tabular. Explicita su consulta a la tabla y añade que verifican la información, aunque sin detallar como lo habrían hecho, "nos dirigimos a la tabla "verificamos que la información estaba correcta".

Conclusiones

El análisis de los desarrollos estudiantiles pone en evidencia las potencialidades de la experimentación discursiva: las actividades y su secuencia conducen a que los estudiantes vivencien un ambiente experimental con altos grados de inmersión, verosimilitud e interacción con el fenómeno y su numerización. Desde la perspectiva de Candela (1999) los estudiantes han desarrollado una actividad científica que les abrió a la elaboración de unos procesos discursivos específicos, que incluyeron sus interpretaciones sobre ciertas situaciones, sus maneras de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras (y figuras) procesos en una primera fase de inmersión en experimentos narrados.

Así la modelación discursiva se constituye en una alternativa para aulas de matemáticas, que suelen carecer de la implementación propia a un laboratorio para realizar experimentos empíricos. En el marco de actividades de modelación solicitadas por los currículos de nuestro país y de la región, los experimentos discursivos se constituyen en una herramienta didáctica pertinente para poner en escena prácticas socioescolares(Díaz, 2012) de experimentación discursiva en aulas de matemáticas.

Referencias y bibliografía

Arrieta, J. (2003) Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis presentada para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Arrieta, J., Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socio epistemología. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.18(1), 19–48 doi: 10.12802/relime.13.1811}

Bruner, J. (1988). Realidad mental y mundos posibles. Gedisa, Barcelona.

Candela, A. (1999). Ciencia en el aula: los alumnos entre la argumentación y el consenso, México/ Buenos Aires/ Barcelona: Paidós.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional, Una Mirada Socioepistemológica. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 17, Tomo I, pp. 1-9. México.

Carrasco, E., Díaz, L., Buendía, G. (2014). Figuración de lo que varía. Enseñanza de las Ciencias. Revista Enseñanza de las Ciencias, 32.3, pp.365 – 384.

Connelly y Clandinin, Editores (1995). Déjame que te Cuente, ensayos sobre narrativa y educación. Edición en castellano. Barcelona. Laertes. 1995.

Contreras, C. (2014). Desplazamiento de prácticas socioescolares desde una experiencia de modelación. Tesis de Profesorado en Matemática e Informática Educativa. Universidad Católica Silva Henríquez. Santiago de Chile.

Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. Relime Vol. 8, Núm. 2, julio, 2005, pp. 145-168. doi: 10.12802/relime.13.1811}

Díaz, L. (2012) La perspectiva socioepistemológica y las comprensiones de la construcción y reconstrucción de saberes matemáticos. Panel de Socioepistemología. XXVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Belo Horizonte, Brasil.

Egan, K. (1998) Narrativa y aprendizajes. Una travesía de inferencias. En McEwan, H. y Egan, K. (comp.), La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación. Amorrortu editores, Buenos Aires.

Freudenthal, H. (1991). Revisitingmathematicseducation. Dordrectht: KluwerAcademicPublishers.

Johnson, M. (1987) TheBody in theMind. Chicago UniversityPress. Chicago.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1980). MetaphorsWe Live By. Chicago UniversityPress. Chicago.

Ministerio de Educación (2012). Matemática. Bases Curriculares 2012. Santiago de Chile: Autor.

Molina, M. (2006). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. Tesis de Doctorado en Educación. Granada. España.

Núñez, R., Lakoff, G. (2000). WhereMathematics Comes From. Editorial Basic Books, New York.

Núñez, M., Zambrano, S., Díaz, L. (2017). Figuras que comunican elementos de lo cuadrático. Reporte de investigación en XXXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Lima. Perú.

PISA (2015). Disponible en http://www.oecd.org/pisa/data/2015-technical-report/

Wertsh, J. (1993). Voces de la mente. Un enfoque socio cultural para el estudio de la Acción Mediada. Madrid: Visor Distribuciones.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Organización por métodos y estrategias en el cálculo de áreas de triángulos

Vicente **Carrión** Miranda
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav
México
vcarrion@cinvestav.mx
François **Pluvinage**
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav
México
fpluvinage@cinvestav.mx

Resumen.

Se expone una forma para la organización de distintos métodos y estrategias utilizables para afrontar la resolución de problemas relacionados con propiedades métricas de las figuras geométricas. Se relacionan con el aprendizaje conceptos aritméticos, geométricos y algebraicos insertos en los programas escolares. En particular se trabajan maneras de obtener el área de una clase particular de triángulos, simultáneamente rectángulos e isósceles. La diversidad de métodos presentada obedece a las respuestas que resultaron de la aplicación a dos muestras, una de profesores y otra de estudiantes del nivel escolar medio, participantes en un trabajo de investigación sobre el tema. En el presente documento no se exponen los resultados observados, solamente la parte teórica de la conceptualización matemática.

Palabras clave: resolución de problemas, isometría, composición de transformaciones, producto escalar, producto vectorial.

Introducción

El escrito se compone de dos partes. La primera, la que se presenta en este texto, contiene los elementos conceptuales matemáticos, básicos, requeridos para afrontar y resolver el problema que se plantea. En este mismo apartado se describe y se desarrolla una exploración en la que se usan diversos métodos y algunas estrategias posibles para la búsqueda del área. Se expone una variedad de métodos que muestra una organización de las diferentes formas posibles de enfrentarse a la búsqueda y al desarrollo de los procedimientos que encauzan la llegada a los últimos resultados.

El problema planteado consiste en determinar el área de un triángulo que vértices se posicionan en las intersecciones de las rectas que conforman una rejilla, o malla. En otro contexto, se puede decir que las coordenadas de los vértices del triángulo en cuestión se expresan con números enteros. El problema consiste en utilizar "todos los métodos posibles" para encontrar el área del triángulo y, con detalle, escribir cada forma de afrontar y llegar al resultado que se pretende obtener. Finalmente, en la búsqueda del área en estudio se considera una generalización relacionada con triángulos que sus vértices son puntos cualesquiera del plano cartesiano.

Los métodos seguidos para obtener el área del triángulo se organizan en tres formas, caracterizadas por los niveles conceptuales involucrados en los distintos modos de abordar la resolución:

a. Una vía para dar seguimiento a la resolución del problema basada en las propiedades de invariancia del área por transformaciones rígidas, las isometrías.
b. Métodos que se apoyan en el cálculo de las longitudes de los elementos lineales del triángulo, medidas de lados, alturas, radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo.
c. Métodos que, además de apoyarse en las medidas de los elementos lineales del triángulo, se basan en las medidas de sus ángulos y en el uso de relaciones y fórmulas trigonométricas.

La segunda parte del escrito describe los elementos teóricos y metodológicos involucrados en una investigación sobre el tema, realizada con muestras de profesores y alumnos de niveles preuniversitarios. También contiene el análisis e interpretación de la información recabada en la investigación y las conclusiones de la indagación.

Debido a su extensión no se expone en este documento la fase experimental de la investigación. El desarrollo, el análisis y las conclusiones, se dejan para otro escrito. En la primera parte se exponen únicamente los elementos conceptuales matemáticos necesarios y los diferentes métodos para abordar el problema.

El problema

El lado del cuadrado **ABCD** tiene por medida cuatro unidades. Se divide en dieciséis cuadraditos de una unidad de área. Por diferentes métodos, encontrar el área del triángulo **EFC**, *Figura 1*.
Se espera que los participantes en la investigación orienten sus respuestas siguiendo algunos de los métodos y estrategias que enseguida se exponen.

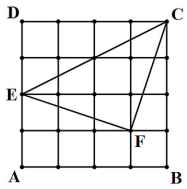


Figura 1

1. La resolución del problema por el primer método

Se hace uso del método de transformaciones geométricas para afrontar el problema de encontrar el área del triángulo **EFC** de la *Figura 1*. Con movimientos preestablecidos, transformaciones rígidas, los pequeños polígonos obtenidos con particiones, ubicados en el interior del triángulo **EFC**, se cambian de posición y se colocan en lugares diferentes. Estos movimientos permiten transformar conformaciones en otros objetos geométricos equivalentes, de una misma área, que pueden ser más simples, conducentes a determinar las áreas de las primeras figuras (Boltianski, V. G., 1981, pp. 2-38).

Se trazan el cuadrado **ABCD** y el triángulo **EFC**, *Figura 2*. Realizar las siguientes tareas escribiendo los cálculos necesarios en las preguntas que los requieran. Además, escribir las razones que justifiquen los pasos del desarrollo que conduce a las respuestas.
¿Cuáles son los valores de las áreas de cada uno de los polígonos incluidos en el cuadrado **ABCD**, *Figura 2*?

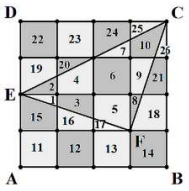


Figura 2

¿Qué conjuntos diferentes de polígonos congruentes existen en la *Figura 3*? Ayuda:

a. ¿Cuáles son los triángulos congruentes con el triángulo **ERM**, △(1)?
b. ¿Cuáles son los triángulos congruentes con el triángulo **PRE**, △(2)?
c. ¿Cuáles son los trapecios rectángulos congruentes con el trapecio rectángulo **GMRS**, ⏢(4)?
d. Encontrar otros conjuntos de polígonos congruentes en la Figura 3.

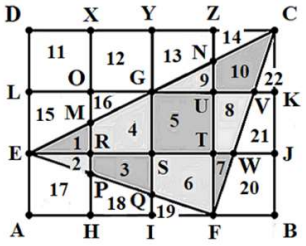


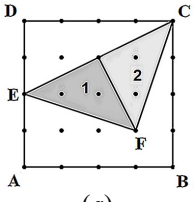
Figura 3

A partir de la *Figura 3*, encontrar composiciones de transformaciones que cambien el triángulo **ERM**, △(1), al triángulo **PRE**, △(2), al trapecio rectángulo **GMRS**, ⏢(4), al trapecio rectángulo **EAHP**, ⏢(17), al trapecio rectángulo **QSRP**, ⏢(3) y a de los cuadrados **DLOX**, □(11) y **XOGY**, □(12) en otras figuras que les corresponden. .

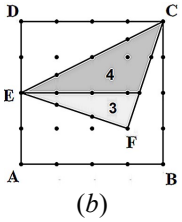
1.1. ¿En qué consiste la resolución del problema por el primer método?

El sustento del primer método de resolución está en la invariancia por isometrías de las dimensiones de una figura geométrica, en específico, su área. Se hace uso del método de estas transformaciones para afrontar la resolución del problema de encontrar el área del triángulo **EFC** de la *Figura 4*. Las transformaciones isométricas, como son la traslación, la rotación y la reflexión, conservan la forma y las dimensiones de las figuras geométricas; es decir, corresponden a movimientos rígidos que preservan la relación de congruencia de los objetos geométricos. Esta situación permite cambiar de posición las figuras para crear nuevas formas de áreas equivalentes (Turégano Moratalla, P., pp. 28-32).

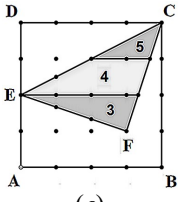
1.1.1. Utilizando equivalencia de áreas de polígonos, la propiedad aditiva del área de figuras en el plano y transformaciones que conservan área, encontrar y sumar las áreas del interior del triángulo **EFC**, en los incisos de la *Figura 5*.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 5

1.1.2. En los incisos de la *Figura 6*, con el uso de la equivalencia de áreas de polígonos, de la propiedad aditiva del área de figuras en el plano y con el método de transformaciones isométricas, sin aplicar fórmulas para áreas, determinar las áreas de cada una de las regiones que conforman el polígono correspondiente al complemento relativo de triángulo **EFC**, respecto al cuadrado **ABCD**. Luego, sumarlas para obtener el área de ese complemento. Después, obtener el área del triángulo **EFC** con la diferencia del área de cuadrado **ABCD** menos el área del complemento.

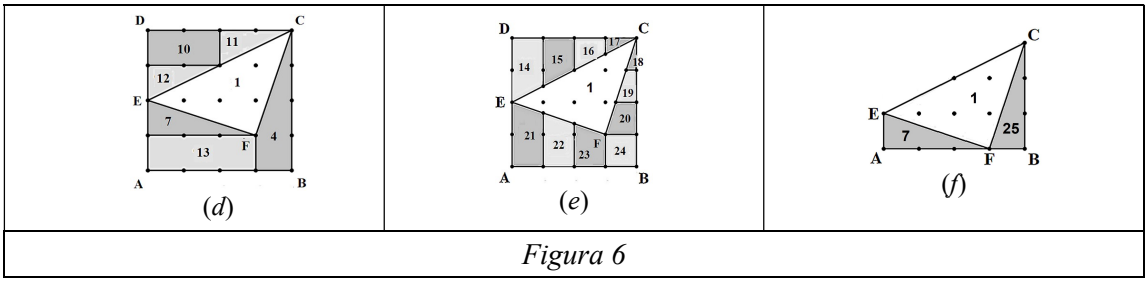


Figura 6

1.1.3. En los incisos de la *Figura 7*, con el uso de la equivalencia de áreas de polígonos, de la propiedad aditiva del área de figuras en el plano y por medio de rotaciones o reflexiones, explicar la forma en que se transforma el triángulo **EFC** en otros polígonos equivalentes, sin aplicar fórmulas para áreas, determinar el área del triángulo **EFC**.

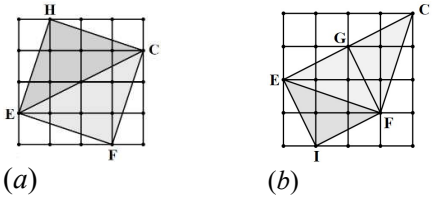


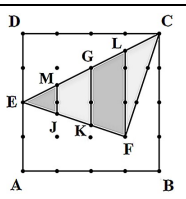
Figura 7

2. La resolución del problema por el segundo método

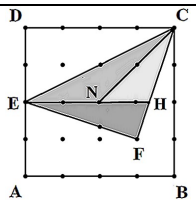
En esta parte se hace uso de cálculos mediante el empleo de fórmulas. En vez de reconstruir en las figuras los elementos lineales del triángulo **EFC**, lados o alturas, se calculan o se miden. Con base en estas medidas se utilizan fórmulas para calcular el área donde intervienen las longitudes de los lados y de las alturas del triángulo.

El sustento del segundo método de resolución se encuentra en el empleo de isometrías. Se emplean el método de estas transformaciones y fórmulas que conducen a la obtención del área del triángulo **EFC**. En la búsqueda de estos elementos geométricos se emplea el teorema de Pitágoras.

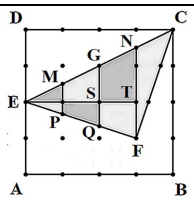
2.1. Obtener las áreas de los polígonos incluidos en el triángulo **EFC** de cada inciso de la *Figura 8*. Calcular longitudes de los segmentos de recta correspondientes a bases y alturas requeridos para aplicar fórmulas. Luego, sumarlas para obtener el área del triángulo **EFC**.



(*d*)



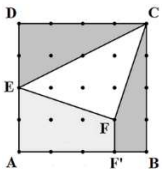
(*e*)



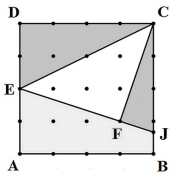
(*f*)

Figura 8

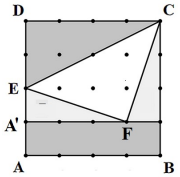
2.2. En los incisos de la *Figura 9* calcular longitudes de lados, alturas u otros segmentos necesarios y determinar las áreas de cada una de las regiones que conforman la figura del complemento relativo de triángulo **EFC** respecto al cuadrado **ABCD**. Luego, sumarlas para obtener el área de ese complemento. Después, obtener el área del triángulo **EFC** con la diferencia del área de cuadrado **ABCD** menos el área del complemento.



(*a*)



(*b*)

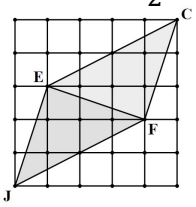


(*c*)

Figura 9

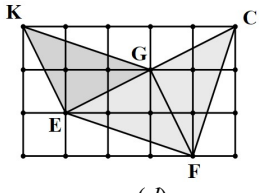
2.3. En los incisos de la *Figura 10* calcular longitudes de lados, alturas u otros segmentos necesarios y determinar las áreas de cada una de las regiones que conforman algún polígono que incluya al triángulo **EFC**. Después, a partir del área de este nuevo polígono obtener el área del triángulo **EFC** examinando la parte proporcional del área del triángulo respecto a la del polígono. En la *Figura 10* se muestran varias formas de obtener polígonos que conduzcan a diversas formas de tener el área del triángulo **EFC**. Encontrar otras transformaciones para llegar a fórmulas semejantes.

a. $\acute{A}rea(\triangle \mathbf{EFC}) = \dfrac{\acute{A}rea(\square \mathbf{JFCE})}{2}$.



(*c*)

b. $\acute{A}rea(\triangle \mathbf{EFC}) = \acute{A}rea(\square \mathbf{EFGK})$.



(*d*)

Figura 10

2.4. Se utilizan fórmulas para calcular el área donde intervienen las longitudes de los lados y de las alturas del triángulo, obtenidas con el empleo del teorema de Pitágoras. En lo que sigue sólo se establecen las fórmulas para el cálculo del área del triángulo **EFC**.

a. El ángulo **EFC** es recto. El área es igual a la medida de la base $\overline{\mathbf{EF}}$ por la mitad de la medida de $\overline{\mathbf{FC}}$, la altura del triángulo **EFC**.

$$\textit{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{(\mathbf{EF})(\mathbf{FC})}{2},$$ *Figura 11*.

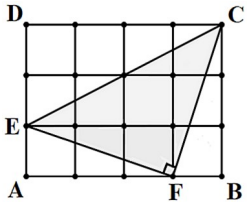


Figura 11

b. El área es igual a la medida de la base $\overline{\mathbf{CE}}$ por la mitad de la medida de $\overline{\mathbf{FG}}$, la altura del triángulo **EFC**.

$$\textit{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{(\mathbf{CE})(\mathbf{FG})}{2},$$ *Figura 12*.

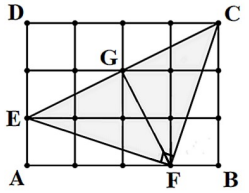


Figura 12

c. El triángulo **EFC** es isósceles. La altura $\overline{\mathbf{FG}}$ también es bisectriz del ángulo **EFC**, *Figura 12*. El área se calcula con la fórmula

$$\textit{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \mathbf{CE}\cdot\sqrt{(\mathbf{EF})^2 - \frac{(\mathbf{CE})^2}{4}}$$

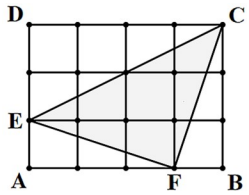


Figura 13

d. $\textit{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \sqrt{s(s-\mathbf{EF})(s-\mathbf{FC})(s-\mathbf{CE})}$, donde $s = \frac{\mathbf{EF}+\mathbf{FC}+\mathbf{CE}}{2}$, *figura 13*.

e. $\textit{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{(\mathbf{EF})(\mathbf{FC})(\mathbf{CE})}{4(\mathbf{GF})}$, *Figura 14*.

f. La circunferencia de centro **L** y radio **LG** = *r* está inscrita en un triángulo **EFC**, *Figura 15*. $s = \frac{\mathbf{EF}+\mathbf{FC}+\mathbf{CE}}{2}$. $\textit{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = rs$.

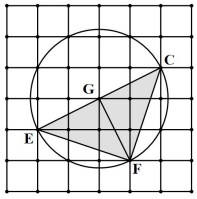


Figura 14

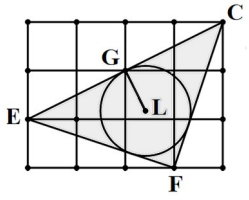


Figura 15

g. Se obtiene el área de un triángulo con la fórmula de Pick. Las coordenadas de los vértices del triángulo **EFC** son números enteros, según se ilustra en la *Figura 16*.

- ***I*** es el número de puntos sobre los segmentos de recta interiores de la retícula del triángulo **EFC** y
- ***B*** es el número de puntos que están en los segmentos del contorno del triángulo **EFC** entonces, el área se obtiene con la fórmula $\textit{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{B}}{2} - 1$

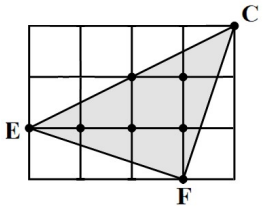


Figura 16

En la *Figura 16*, se tiene ***I*** = 3 y ***B*** = 4; de donde, $\textit{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = 5$.

3. La resolución del problema por el tercer método

Se obtiene el área del triángulo **EFC** con recursos de trigonometría. Además de ser necesarios las medidas de los segmentos de rectas característicos de un triángulo, en este apartado se requiere calcular las medidas de los ángulos en función de las medidas de los lados. Es aquí donde se precisa del empleo de las relaciones trigonométrias. Para calcular el área del triángulo se dispone de varias fórmulas trigonométricas. Enseguida se utilizan algunos conceptos tigonométricos para obtener por varias formas el área del triángulo **EFC**.

3.1¿En qué consiste la resolución del problema por el tercer método?

El tercer método de resolución se fundamenta en el empleo de distintos conceptos, relaciones y ciertas fórmulas de trigonometría. Las longitudes de los lados del triángulo se encuentran usando el teorema de Pitágoras y con estos valores se tienen las relaciones trigonométricas que involucran los ángulos del triángulo. Estos valores se sustituyen en fórmulas específicas que conllevan a obtener el área buscada.

3.1.1. Con las siguientes fórmulas generales se obtiene el área de un triángulo, *Figuras* 18 y *19*.

$$\text{Área}(\triangle\mathbf{ABC}) = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot sen(\mathbf{C}), \qquad \text{Área}(\triangle\mathbf{ABC}) = \frac{a^2 \cdot sen(\mathbf{B}) \cdot sen(\mathbf{C})}{2 \cdot sen(\mathbf{B}+\mathbf{C})}$$

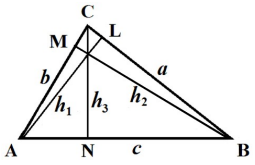


Figura 18

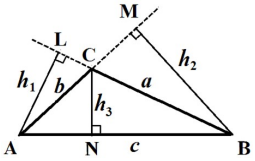


Figura 19

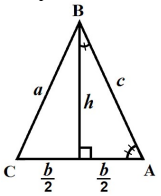


Figura 20

3.1.2. Para un triángulo isósceles se tiene que $\angle\mathbf{ACB} = \angle\mathbf{BAC}$ y $a = c$, *Figura 20*. El área del triángulo **ABC** se calcula con las fórmulas. $\text{Área}(\triangle\mathbf{ABC}) = \frac{a^2 \cdot sen(2\mathbf{A})}{2}$

4. La resolución del problema por el cuarto método

En el cuarto método se extiende el espacio de acción al plano completo, no sólo en rejillas equivalentes a usar coordenadas expresadas con números naturales o enteros. El caso es más general. Se requiere el uso de números reales. Este cuarto método de resolución participa del empleo de un sistema de coordenadas cartesianas, conceptos de geometría analítica, operaciones con vectores y sus propiedades.

4.1 ¿En qué consiste la resolución del problema por el cuarto método?

La base fundamental del cuarto método de resolución está, en primer lugar, en el empleo de distintos conceptos y ciertas fórmulas de geometría analítica. Se utiliza la fórmula correspondiente a un determinante de tercer orden para expresar el área de un triángulo. En segundo lugar, se encuentra vectorialmente la misma área por dos vías. En la primera se aprovecha la ventaja de que la definición de producto escalar de dos vectores lleva directamente

al cálculo del área del triángulo. En la segunda, se tiene una oportunidad semejante, el área buscada se establece con el uso directo de la magnitud del producto vectorial de dos vectores.

4.1.1. Desarrollar el procedimiento requerido para obtener la fórmula para encontrar el área de un triángulo de los siguientes vértices, *Figura 21*:

$\mathbf{E} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{F} = (x_2, y_2)$, $\mathbf{C} = (x_3, y_3)$. $\text{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$.

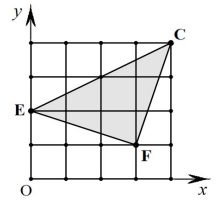


Figura 21

4.1.2. Desarrollar el proceso para obtener que el área de un triángulo. Es igual a la mitad del valor absoluto del producto escalar de los vectores $\overrightarrow{\mathbf{CE}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{CF}}$, *Figura 22*.

$$\textit{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathbf{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{EC}}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\,|(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)|.$$

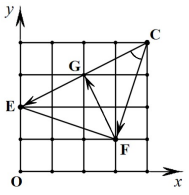


Figura 22

4.1.3. Desarrollar el proceso para obtener que el área de un triángulo. Es igual a la mitad de la magnitud del producto vectorial de dos vectores de punto inicial común determinados por dos lados de un triángulo de los siguientes vértices, *Figura 23*:

$\mathbf{E} = (x_1, y_1, 0)$, $\mathbf{F} = (x_2, y_2, 0)$, $\mathbf{C} = (x_3, y_3, 0)$.

$\overrightarrow{\mathbf{EF}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$, $\overrightarrow{\mathbf{EC}} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2, 0)$.

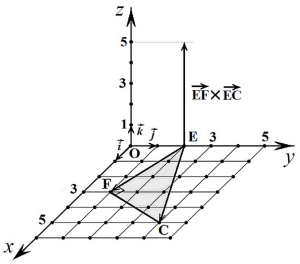


Figura 23

$$\textit{Área}(\triangle\mathbf{EFC}) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathbf{EF}} \times \overrightarrow{\mathbf{EC}}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Palabras finales

La enseñanza del cálculo del área de triángulos presentada en los libros de texto en el nivel medio se focaliza mediante una fórmula. La consecuencia es una insuficiente, reducida e insignificante conceptualización del área, reportada por varios investigadores. Nuestra idea es que el trabajo, apoyándose en una diversidad de métodos, pueda compensar esta carencia. En el análisis de los comportamientos y de las respuestas resultantes de las propuestas de exploraciones matemáticas, expuestas en este primer texto, se podrá ver si se cumple esta expectativa.

Referencias y bibliografía

Boltianski, V. G. . (1981). Figuras equivalentes y equicompuestas. Moscú: MIR.

Turégano Moratalla, P. (1993). De la noción de área a su definición: investigación histórica sobre las técnicas, métodos y conceptos que condujeron a la teoría de la medida. España: Universidad de Castilla-La mancha.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Actividad Matemática como objeto de investigación: comprensiones y perspectivas teóricas.

María Camila **Ocampo**-Arenas
Estudiante de maestría, Universidad de Antioquia
Colombia
camila.ocampo@udea.edu.co
Mónica Marcela **Parra**-Zapata
Magister en educación, Universidad de Antioquia
Colombia
monica.parra@udea.edu.co

Resumen

En la presente comunicación, presentamos el resultado de una revisión crítica de la literatura realizada en el marco de la Maestría en Educación, de la Universidad de Antioquia, el proyecto de maestría tiene como objetivo caracterizar la Actividad Matemática de los estudiantes de Educación Primaria que participan en procesos de Modelación Matemática. La revisión la realizamos específicamente del término Actividad Matemática mediante el software atlas.ti y tuvo como objetivo reconocer las comprensiones que la literatura reporta con respecto al término Actividad Matemática. La literatura reportó tres acepciones de este término; como las tareas matemáticas que se asignan al estudiante, como *lo que hace un matemático* y como las acciones que realiza un sujeto cuando estudia matemáticas. Lo anterior sugiere comprensiones heterogéneas del término y de sus implicaciones en el aula.

Palabras clave: Educación Matemática, Actividad Matemática, revisión de literatura, acciones, tareas.

Introducción

La preocupación por la formación matemática de los estudiantes en diferentes grados de escolaridad ha hecho propicio el desarrollo de investigaciones y líneas de trabajo al interior de la Educación Matemática. De manera particular, el término Actividad Matemática ha sido ampliamente utilizado en Educación Matemática, tanto en aspectos ligados a las matemáticas escolares como a la filosofía de las matemáticas. Investigaciones adelantadas con relación a la Actividad Matemática proponen diferentes acepciones de esta, según sea la corriente teórica a la cual respondan, esto sugiere comprensiones heterogéneas del término y diversas implicaciones para el aula. Por lo anterior, propusimos indagar ¿Cuáles son las acepciones que la literatura reporta con respecto al término Actividad Matemática y en qué marcos están ubicados?

A continuación, presentamos el método utilizado en la revisión de la literatura, los resultados que encontramos y las conclusiones a las que nos llevó dichos resultados. Finalmente presentamos las referencias bibliográficas que utilizamos.

Método

Para dar respuesta a la pregunta que orientó este estudio realizamos una revisión crítica de la literatura (Jesson y Lacey, 2006). Este tipo de estudios es de carácter descriptivo, perceptivo y analítico, que busca una comparación entre textos, para así llegar a aquellos planteamientos que aun requieren ser profundizados e investigados. Para la búsqueda de los textos utilizamos las palabras clave "mathematical activity" o "Actividad Matemática", en las bases de datos[1] Springer, Scopus, ERIC, SciELO y el motor de búsqueda Google Académico. En esta búsqueda encontramos 102 documentos que estudiamos a partir de sus títulos, resúmenes y palabras clave. Los criterios de selección giraron en torno a la relación de los textos con el término Actividad Matemática en los estudiantes, además tuvimos en cuenta el año de publicación (desde 1992 hasta 2018) y el propósito del documento. Con lo anterior determinamos 15 textos para su análisis. El análisis, la comparación y la organización de los textos la realizamos con la ayuda del software atlas.ti[2].

A partir de las lo que pretendíamos que los textos develaran, se generó la tabla 1 que presentamos a continuación.

Tabla 1
Orientaciones para el análisis

Pregunta orientadora de la revisión de la literatura	***Preguntas específicas para la revisión de la literatura***	***Códigos software atlas.ti***
¿Cuáles son las comprensiones que los autores manifiestan con respecto al término* Actividad Matemática *y en qué marcos están ubicados?	¿Cómo se define la Actividad Matemática?	***-"Definición AM":*** *se refiere a los apartados donde se encuentra una definición explícita del término Actividad Matemática*
	¿Cuáles son las teorías, referentes y marcos en los cuales se describe la Actividad Matemática? ¿Qué aspectos de la teoría caracterizan la Actividad Matemática?	***-"Teoría":*** *se refiere a las teorías en las cuales están enmarcados los autores y la investigación como tal.*

Fuente: las autoras.

La primera columna de la tabla corresponde a la pregunta global que orientó la revisión de la literatura. La segunda columna hace referencia a las preguntas específicas para develar aquellas comprensiones del término Actividad Matemática. Y la tercera columna muestra los

[1]Para el uso de las bases de datos mencionadas se cuenta con acceso por parte de la Universidad de Antioquia, a la cual pertenecemos las autoras.
[2] Para el uso del Software se tiene la licencia por parte del grupo de investigación, al cual pertenecemos las autoras.

términos utilizados en el Software para la codificación de los textos. Es importante aclarar que dichos códigos surgieron *a priori* con el fin de categorizar apartados de los textos que dieran cuenta de lo que reporta la literatura con respecto a lo que se entiende por Actividad Matemática y las corrientes epistemológicas en la cual los autores leídos están enmarcados.

Para el análisis de los datos partimos de un proceso de sistematización, el cual entendemos como el proceso de compilar y codificar los textos seleccionados, acorde con las preguntas mencionadas en la tabla 1, para ser analizados y generar conclusiones de lo propuesto (Jesson y Lacey, 2006).

En el software atlas.ti utilizamos códigos que permitieron clasificar la información ("Definición AM" y "Teoría"); luego de la lectura de los textos y su codificación, empleamos las herramientas informe y red que posee el programa para evidenciar las relaciones, confrontaciones y diferencia entre las ideas encontradas.

Para el análisis crítico y comprensivo de los textos leídos y su respectiva categorización, generamos relaciones entre lo que plantean los autores en el texto y nuestras percepciones y comprensiones respecto a la Actividad Matemática. Finalmente, realizamos la discusión que tomó como base las ideas de los textos y nuestras ideas y las preguntas realizadas en la tabla 1, con relación al término Actividad Matemática (Jesson y Lacey, 2006).

Resultados

Comprensiones de Actividad Matemática

La literatura reporta tres acepciones del término Actividad Matemática, puede verse como las tareas matemáticas que se asignan al estudiante, como *lo que hace un matemático*, o como las acciones o procesos que lleva a cabo un sujeto que estudia matemáticas al enfrentarse a una tarea.

Cuando se entiende la Actividad Matemática como las tareas matemáticas que se asignan al estudiante, se refiere al uso de la palabra con respecto a una situación específica que el docente pone en el aula para el desarrollo de un tema o para repasar dicha temática (Blanco, 2010; Haris y Ilma, 2011; Cordellas, 2016). En esta visión de Actividad Matemática no se centra la atención en el estudiante, ni en el docente sino en cómo con la herramienta (Actividad Matemática) se promueve o evalúa el conocimiento y su desarrollo. Cortadellas (2016) plantea una diferenciación entre tareas de memorización, de procedimientos sin conexión, de procedimientos con conexión y de lo que él denomina *hacer matemáticas*. En este sentido la autora reconoce algunas características que se deben proponer en el aula cuando el estudiante hace matemáticas como la aproximación a la tarea, la exploración y aplicación de los conceptos inmersos en la tarea, el análisis de la actividad (tarea) y de las posibles soluciones, aspectos emocionales inmersos en el proceso.

La Actividad Matemática entendida como "lo que hace un matemático" se refiere a aquellas cuestiones en las que están inmersas las prácticas profesionales de los matemáticos. Esta visión empieza a relacionar las acciones de los sujetos con el conocimiento matemático. Su interés está en describir a qué tipo de Actividad Matemática están enfrentados los matemáticos, orientado al descubrimiento del conocimiento, la explicación, la justificación y la comprensión del conocimiento puesto en práctica (Giaquinto, 2005).

La acepción que se refiere a lo que hace un sujeto que estudia matemáticas, autores como Chevallard (1999); Bosch, Chevallard y Gascón (1997), afirman que la Actividad Matemática,

tiene que ver con aquellas acciones que llevan a cabo los estudiantes de matemáticas al enfrentarse a una tarea. La literatura reporta que dichas acciones se refieren a procesos de comunicación, análisis, comparación, comprensión y reflexión que realizan los estudiantes al proponerles una tarea; que en la mayoría de los casos retoma aspectos presentes en su vida cotidiana. Al participar en dicha tarea, los estudiantes utilizan la descripción, la clasificación, la definición y la demostración como principales componentes de la Actividad Matemática (Barquero, Bosch, y Gascón, 2014; Bosch, García, Gascón, y Ruiz, 2006; Espinoza, Barbé, y Gálvez, 2011; Godino, Gonzato, y Wilhelmi, 2014; Ponte, 2004; Wernet y Nurnberger-Haag, 2015).

Continuado con la acepción de lo que hace un sujeto que estudia matemáticas, Obando (2015) reconoce que la Actividad Matemática está estructurada y dicha estructuración se visibiliza en las prácticas matemáticas. De igual forma plantea la importancia de la historia en el estudio de la Actividad Matemática, ya que, esto permite comprender la concepción de las matemáticas en la cultura, analizada a lo largo del tiempo, y así determinar las tareas que propone el docente, las cuales propiciarán dichas prácticas matemáticas mediadas por técnicas, formas de discursividad y objetos/conceptos, que finalmente configuran la Actividad Matemática del estudiante.

Las tres acepciones encontradas del término Actividad Matemática muestran que, a pesar de que los textos analizados no tienen el mismo enfoque epistemológico sus ideas de Actividad Matemática giran en torno a aquellas cuestiones que tienen que ver con el *hacer matemáticas,* ya sea de un matemático, de un profesor o de los estudiantes. A continuación, presentaremos aquellas perspectivas teóricas en las que se enmarcan los autores mencionados con el fin de determinar su influencia o no en las acepciones que tienen.

Perspectivas teóricas con respecto a la Actividad Matemática

En los documentos revisados reconocemos algunas teorías en las que se enfocaban los autores. Entre dichas teorías se encontraron la heurística, la antropológica de lo didáctico, la filosofía de las matemáticas y la teoría de la actividad.

En la heurística, se propone la creación de medios o estrategias que permitan facilitar la búsqueda de soluciones a problemáticas propuestas en diversas tareas. De igual manera, esta teoría se preocupa por comprender qué preguntas o tareas se le deben plantear a los estudiantes en el área de matemáticas (Cortadellas, 2016), y aunque no lo hacen de manera explícita, se puede deducir que estas reflexiones se enfocan en propiciar espacios para la Actividad Matemática, en los cuales el estudiante proponga, argumente y cuestione asuntos propios de su cotidianidad.

La teoría antropológica está relacionada con las situaciones didácticas de Brousseau y se centra en las actividades humanas y en consecuencia en lo antropológico (Bosch, García, Gascón y Ruíz, 2006). La teoría antropológica de lo didáctico ha sido desarrollada principalmente por Chevallard, quien en sus textos la define como aquella que sitúa la Actividad Matemática. El autor dice que toda actividad humana puede describirse mediante un modelo dado a partir de lo que él denomina la praxeología. Este último concepto se vincula con las tareas que el docente utiliza para generar Actividad Matemática por parte de los estudiantes en el aula (Bosch et al., 2006).

La filosofía de las matemáticas es la teoría en la que se enmarca Giaquinto (2005), quien habla de lo *que hace un matemático*, según el autor dicha teoría se ha ocupado de manera principal de la teoría de las matemáticas, y ha centrado su atención en los teoremas, objetos y demostraciones como tal; sin embargo, el autor también reconoce el interés de la teoría por estudiar las prácticas matemáticas entre los filósofos. En esta teoría priman aquellas cuestiones como la ontología, la epistemología y los métodos matemáticos, que dejan caracterizar las actuaciones de los matemáticos.

La última teoría identificada es la teoría de la actividad, la cual es comprendida por Obando (2015) a partir de la perspectiva histórico cultural en la Educación Matemática. En dicha teoría el sujeto y sus acciones son la base de la actividad. De igual manera en esta teoría priman los objetos, los conceptos, y la cultura; es decir, aquellos aspectos propios del contexto en el que se desarrolla la actividad.

Conclusiones

La revisión de la literatura nos permitió identificar tres acepciones, como las tareas matemáticas que se asignan al estudiante, como *lo que hace un matemático*, o como las acciones o procesos que lleva a cabo un sujeto que estudia matemáticas al enfrentarse a una tarea. En las tres acepciones identificamos que las tareas son una fuente de mediación con respecto a las matemáticas y que es a partir de ellas que se ve *lo que hace un matemático, un profesor* o lo que *hace un sujeto que estudia matemáticas.* De igual manera nos mostró que estas comprensiones son heterogéneas cuando las vemos en torno a la Educación Matemática; es decir, comprensiones variadas generan diferentes énfasis en el aprendizaje de las matemáticas, y en los procesos que se involucran en este, porque dependen de su postura epistemológica.

La Actividad Matemática en la mayoría de los textos, va dirigida hacia las concepciones y actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones en contextos cercanos a su cotidianidad, donde los estudiantes toman posturas y plantean ideas para llegar a una solución. En este proceso sus acciones van dirigidas a generar conjeturas, a discutirlas y a tomar decisiones apoyados en sus pensamientos y en lo aprendido con respecto a las matemáticas.

Finalmente, resaltamos que la comprensión de lo que es Actividad Matemática va a depender del ambiente configurado por la corriente epistemológica en la cual se posicionen los investigadores, docentes e incluso, de alguna manera, los estudiantes. De manera particular en esta revisión reportamos la Actividad Matemática como las tareas matemáticas que se asignan al estudiante, como *lo que hace un matemático*, o como las acciones o procesos que lleva a cabo un sujeto que estudia matemáticas al enfrentarse a una tarea. Esta comprensión llevará consigo una configuración directa de los elementos mencionados en párrafos anteriores como lo es la comunicación, las tareas y el papel de estudiantes y los docentes.

Referencias y bibliografía

Barquero, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2014). Incidencia del "aplicacionismo" en la integración de la modelización Bosch, M., Chevallard, I., y Gascón, Jmatemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de Las Ciencias*, 32 (1), 83–100.

Blanco. (2010). Análisis del papel de las imágenes en actividades matemáticas. *Premisa*,12 (46) 39–47.

. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.*Cali, Colombia:* Editorial Horsori.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la

articulación de la matemática escolar . Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, *18*(2), 37–74.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorieanthropologique du didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 19 (2): 221-265.

Cortadellas, T. (2016). Interpretación y clasificación de la demanda cognitiva de actividades matemáticas que involucran a los números fraccionarios y decimales en Educación Primaria. *Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *92*, 7–19.

Espinoza, L., Barbé, J., y Gálvez, G. (2011). Limitaciones en el desarrollo de la actividad matemática en la escuela básica: el caso de la aritmética escolar. *Estudios Pedagógicos*, *37*(1), 105–125.

Godino, J. D., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar . Implicaciones, *1*, 199–219.

Giaquinto, M. (2005). Mathematical Activity. EnSpringer Science & Business Media (Ed.), Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics, (75–87).

Haris, D., y Ilma, R. (2011). The role of context in third graders' learning of area measurement. *IndoMS. JME*, *2*(1), 55–66.

Jesson, J., & Lacey, F. (2006). How to do (or not to do) a critical literature review. *Pharmacy Education*, *6*.

Obando, G. (2015). Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3 y 4 de una institución educativa de la Educación Básica. (Tesis doctoral). Universidad del valle. Cali, Colombia. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4538.2249

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos.En Graó (Ed.), La Actividad Matemática En El Aula, (25–34).

Wernet,J. L., y Nurnberger-Haag, J. (2015). Toward broader perspectives of young children's mathematics: Recognizing and comparing Olivia's beliefs and activity. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *16*(2), 118–141.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Possíveis contribuições do uso de jogosaliados a resolução de problemascomo estratégia para o ensino da Matemática no6º ano

Lúcia Vera Lima **Teixeira**
Escola Patronato Madre Mazzarello- Anápolis
Brasil
luciavera-lima@hotmail.com
Maria Dalvirene **Braga**
Universidade de Brasília
Brasil
dalvirenebraga@gmail.com
Rui **Seimetz**
Universdade de Brasília
Brasil
rseimetz@unb.br

Resumo

Com objetivo de investigar maneiras de utilizar jogos associados a resolução de problemascomo estratégia de ensino da Matemática e suas contribuições no processo de ensino aprendizagem de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, foi realizadaessa pesquisa de abordagem qualitativa, com utilização de entrevista e observação para coleta de dados. Pode-se identificar queo uso de jogos como estratégia de ensino é feito de forma esporádica pelo professor, mesmo percebendo que os alunos se sentem mais motivados a participar das aulas quando se faz uso deste recurso, mostrando necessidade de uma mudança na cultura pedagógica e na identidade profissional do educador. Conclui-se que essa estratégia contribui para aprendizagem significativa, pois o aluno passa a construir relações entre o jogo e o conteúdo.
*Palavras-chave***:** metodologia de ensino, jogos,resolução de problemas, didática da matemática,aprendizagem significativa.

Introdução

No exercício da nossa função de docente em Matemática, constatamos que esta disciplina muitas vezes é vista com complexidade pelos alunos, o que exige do professor certa maleabilidade na escolha dos métodos aplicados no planejamento e desenvolvimento de suas aulas, e assim possibilitar que o estudo e aprendizagem de Matemática seja mais motivante e atrativo aos alunos.Uma provável origem para o desinteresse dos alunos na aprendizagem, nas

aulas de Matemática, pode ser destacada pelo seguinte trecho: "[...] isso pode ser atribuído ao exagero no treino de algoritmos regras desvinculadas de situações reais [...]" (Dante, 1998, p.13). Já o trabalho de Cunha e Silva (2012), aponta que o ensino da Matemática vem sendo trabalhado O ensino da Matemática no ensino fundamental é composto por duas fases. A primeira compreende aos anos iniciais, e tem como mediador, na maioria dos casos, o professor pedagogo que não tem formação específica na área. A segunda compreende os anosinsistentemente de forma mecânica e, por consequência, desestimulante.

Entendemos que é essencial que as aulas de Matemática devam se desenvolver por meio de estratégias que cativem o aluno, despertem o desejo de aprender e participar da sua aprendizagem, assumindo a responsabilidade sobre isso. Desse modo, acreditamos que uma forma de proporcionar resultados positivos é a participação dos alunos em jogos nas aulas de Matemática, aliada à Resolução de Problemas que deve ser mais conhecida, utilizada e disseminada. Vale salientar que quando trabalhamos com Resolução de Problemas, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem (ONUCHIC, 2005).

Ao eleger como tema desta pesquisa uma investigação a respeito das possíveis contribuições do uso de jogos aliados a resolução de problemas no ensino da Matemática para alunos do 6º ano no Ensino Fundamental, com os resultados obtidos espera-se contribuir para uma aprendizagem participativa e cativante de conteúdos de matemática.

O grupo de alunos pesquisado estava em fase de transição, ensino fundamental I, onde normalmente tem apenas um professor para ministrar todas as disciplinas, e se insere num contexto, onde passa a ter diferentes professores para cada disciplina, e acaba distanciando-se do lúdico, por estar em contato com grupos de diferentes faixas etárias. Nesta conjuntura, sugere-se que o professor crie situações para motivar os alunos a aprenderem uma disciplina que pode se mostrar mais complexa do que até eles então conheciam.A busca por respostas a este cenário de ensino se mostra relevante por trazer aspectos que possam incentivar e sustentar a aplicação de jogos como metodologia de ensino no contexto escolar.

Referencial Teórico

Ensino da Matemáticano Ensino Fundamental

finais, e é mediada por professores com formação específica na área, os quais esperam receber alunos já alfabetizados em Matemática, ou seja, que dominem princípios básicos relacionados ao sistema de numeração, as quatro operações fundamentais, as figuras geométricas, noções de grandezas e medidas, análises simplificadas de gráficos e tabelas, entre outros.

Assim, esta disciplina adquiri grande importância nos anos iniciais, por desenvolver na criança o pensamento lógico e servir como base para as demais séries e anos de ensino (Alves, 2016).Nesse sentido, podemos considerar a Matemática no ensino fundamental como um alicerce para os demais anos. Daí a importância de professores com uma formação adequada, capazes de oportunizar aos seus alunos a motivação que desperte neles habilidades e interesse pela disciplina. Entretanto, o que se vê é uma prática de ensino da Matemática que, muitas vezes, não está direcionada a construção do conhecimento matemático com significado, e que, ao contrário, tende a ser apresentada como algo disciplinador e excludente, realidade que parece permanecer ao longo da educação básica.Uma possibilidade que veremos a seguir está

relacionada ao ensino da Matemática mediado por jogos aliado a resolução de problemas.

Ensino da Matemática mediado por jogos aliado a resolução de problemas

Observa-se,que "a Matemática vem sendo insistentemente trabalhada de modo abstrato, onde as fórmulas e regras vêm sendo aplicadas de maneira puramente mecânica e, portanto, totalmente desestimulante" (Cunha; Silva, 2012, p.3).Cabe aqui ressaltar que na dinâmica de ensino-aprendizagem o aluno aprende não somente por meio daquilo que o professor planeja ensinar. É importante que o professor tenha a sensibilidade de inserir em seu planejamento situações em que seja permitida a troca de experiências.

Miranda (2016, p.11), aborda o conceito de Aprendizagem Significativa, onde "novos conhecimentos devem articular-se com os conhecimentos prévios do estudante", e completa sugerindo que é urgente a necessidade de um trabalho pedagógico mais criativo. Logo, faz-se importante que as aulas da disciplina de Matemática sejam planejadas para garantir autonomia de pensamento, e que mostrem aos alunos que, além das regras referentes às operações realizadas e dos conceitos apresentados existe sim uma aplicação prática.Cumprindo assim com a função da escola que, conforme Machado (2011, p.14) é "propiciaro acesso aos conhecimentos matemáticos, assegurando aos alunos o desenvolvimento individual e a sua integração na sociedade, em que a capacidade de resolver problemas com criatividade passa a ser condição indispensável".

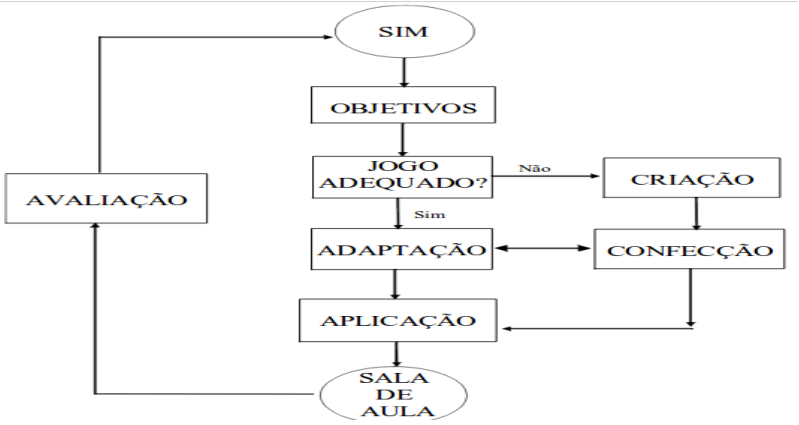
Se o professor não trabalha a disciplina como constituinte de valor, aos poucos o aluno deixa de percebê-la como tal, e assim ela deixa de contribuir de fato para a formação dos alunos. Groenwald; Timm (2000) apontam três aspectos que justificam a incorporação de jogos nas aulas, "são estes: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais", o que para estes "permite que o aluno faça da aprendizagem um processo interessante e até divertido". Assim, sugere-se que os docentes utilizem métodos de planejamento em conjunto com os alunos, para que estes se interessem pelas atividades que serão desenvolvidas e consigam inserir estas em sua realidade escolar e social.

Tipos de jogos

O entendimento do termo "jogos" aqui considerado, é o mesmo apontado por Flemming (2004, p.4): jogos são"as atividades relacionadas com o ensino, de natureza recreativa, usadas em sala de aula para obtenção de um maior rendimento no processo ensino-aprendizagem de um conteúdo específico ou para o desenvolvimento de competências e habilidades específicas".

Flemming (2004), apresenta uma classificação dos jogos conforme seus objetivos, agrupando-os de acordo com: (1) aprimoramento de atitudes; (2) introdução e fixação de conteúdos; (3) motivação e desenvolvimento de hábitos. Alves (2007), por sua vez, apresenta uma classificação de jogos em dois grupos: (1) descandeadores de nova aprendizagem; e (2) de fixação/aplicação de um conceito já desenvolvido. E propõe uma metodologia para orientar a escolha e utilização de jogos no ensino da Matemática, ilustrada na figura 1.

Figura 1
Fluxo de escolha de jogos no planejamento didático



Fonte: Flemming. 2004

Sugere-se a utilização do fluxo apresentado na figura 1 por parte do professor, para o planejamento de situações de aprendizagem, considerando o perfil dos alunos envolvidos, e fazendo as adaptações necessárias a realidade na qual estes estão inseridos.Assim, considerando que a inserção de jogos no processo de ensinoreflete as concepções do professor e as classificações para estes descritas por Flemming (2004) e Alves (2007), opta-se pela utilização dos chamados jogos de fixação no que tange esta pesquisa, por dar suporte a fixação e construção de conceitos.

Metodologia

Foi realizada uma pesquisa de abordagem qualitativa, que conforme Gerhardt; Silveira (2009), não enfatiza a representatividade numérica, e sim o aprofundamento de questões relacionadas a um determinado grupo, neste caso alunos e professores de Matemática do local pesquisado, e o significado de suas ações e relações diante do objeto da pesquisa.

O objetivo foi investigar de que maneira a utilização de jogos de fixação aliados a resolução de problemas, como estratégia de ensino de Matemática, contribui no processo de ensino aprendizagem de alunos no 6º ano do Ensino fundamental II, de uma escola do município de Anápolis-GO. Participaram da pesquisa 10 (dez) alunos do 6º ano e 01 (um) professor de Matemática do local de amostra.

Para coleta de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: (1) a aplicação de entrevistas estruturadas, por ter uma relação de perguntas, seguindo os estudos de Gil (2008), e (2) a observação dos alunos e professores participantes da pesquisa, que, segundo Lüdke e André (1986), permite um contato mais estreito do pesquisador com o objeto da pesquisa e (3) aplicação dos jogos.Posteriormente, prosseguiu-se com a relação de análises e inferências quanto a realidade identificada, buscando a compreensão da existência ou não de benefícios no processo de ensino-aprendizagem, e ainda a opinião dos professores regentes em relação a tais atividades, descrevendo os resultados encontrados na forma de relatório de pesquisa.

Apresentação e análise dos dados

Os dados foram coletados a partir da observação de uma professora de Matemática de uma escola situada no munícipio de Anápolis-GO, e de um grupo com dez (10) alunos da turma de 6º ano do qual a professora é regente. A partir da entrevista inicial, feita com a professora regente, no que diz respeito ao planejamento e as estratégias de ensino utilizadas, foi identificado que:

> "*O planejamento é feito semanalmente, observando o plano anual estabelecido no início do ano letivo* [e que] *as estratégias de ensino utilizadas são o uso do livro didático, resolução dirigida de exercícios, confecção de cartazes, levantamento e apresentação de dados em gráficos, construções utilizando materiais reciclados, aula expositiva e dialogada".*(Professora regente, 2018).

Apesar de não análise sobre o planejamento anual de ensino, pode-se inferir que o método de ensino por ela aplicado tem uma tendência pouco voltada para a investigação, reflexão e tomada de descisões, que podem ser alcançadas pelo uso de jogos.

Nessa mesma entrevista inicial, a professora aponta, que:"*O comportamento dos alunos é considerado satisfatório, apesar de em alguns momentos eles mostrarem-se um pouco inquietos ou apáticos aos exercícios apresentados. Eles interagem mais comigo (professora) e entre si, quando a aula tem recursos diferenciados".*

Pode-se observar que na perspectiva profissional da professora regente, seu modo de ensino aprendizagem está correto e alcançando resultados satisfatórios. Entretanto, não é identificado inicialmente uma preocupação da professora observada em inserir seus alunos em situações de trocas de experiência constante, nem a articulação da estratégia de ensino com o conhecimento prévio dos alunos, indo em desencontro com a "aprendizagem significativa" citada por Miranda (2016, p.11).

Quanto ao uso de jogos, a professora regente fez o seguinte apontamento inicial:

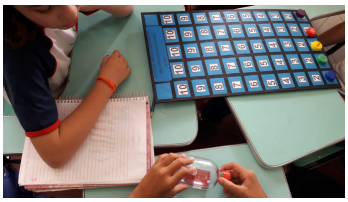
> *"Eu uso muito pouco os jogos em sala de aula, opto mais pelas construções ou confecções de materiais em casa, mas julgo como importante e válido para a dinâmica de sala de aula, pois mostram-se mais próximos a realidade dos alunos. Então sim, eu vejo alguma mudança no comportamento e, também, na aprendizagem quando consigo trazer jogos para a sala de aula. E quando o faço, exploro o máximo possível e recorro a ele durante as demais aulas relacionadas ao conteúdo abordado pelo jogo".*(Professora regente, 2018).

Nota-se que, em poucas ocasiões, a professora utiliza de jogos como metodologia de ensino de Matemática. Além disso, a partir da entrevista e das observações iniciais, pode-se dizer que os jogos como estratégia de ensino contribuem por tornar as aulas mais dinâmicas, e atrativas aos alunos. Isto porque é capaz de conduzi-los a interagir de fato com o objeto de ensino e assim produzir resultados, ou seja, conhecimentos.

O uso dos jogos de fixação, conforme as classificações Flemming (2004) e Alves (2007), funcionam no contexto escolar como a porta inicial para a aprendizagem de um determinado conteúdo, e permitem também sua utilização como um recurso contínuo ao qual se possa recorrer enquanto se aplica um determinado conteúdo. Ainda durante o período de observação, foram feitas algumas sugestões para a professora regente, no sentido de utilizar jogos de fixação. Os jogos escolhidosforam: *"Corrida dos 900*", indicado para a fixação de conteúdos de múltiplos, divisores e tabuada da multiplicação (Vide figura 2) e *"A. S. M. D. - Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão*", indicado para fixação das quatro operações matemáticas fundamentais" (Vide figura 3).

Figura 2Figura 3

Corrida dos 900 A.S.M.D.



Fonte: autora. 2018



Fonte: autora. 2018

Dentre os alunos observados, a maioria está entre os que não apresentam interesse pelas atividades de Matemática ou apresentam as vezes em determinadas situações. Estes apresentam melhor participação quando as atividades envolvem jogos, sendo esta preferida por todos, não havendo dentre eles quem não prefira este tipo de recurso.Confirmando que a disciplina aplicada sem a utilização de recursos que incentivem o aluno a interagir faz da Matemática algo abstrado, mecânico e desestimulante (Cunha; Silva, 2012).

Após a utilização de jogos de fixação como estratégia de ensino, foi realizada nova entrevista com a professora regente, com o intuito de identificar se houve alguma mudança na perspectiva de ensino. Na perspectiva da professora regente:*"Através dos jogos matemáticos as turmas apresentam excelentes resultados, pois têm como objetivo estimular a sua criatividade de investigar e descobrir as relações entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos a serem estudados".*

Para a professora, a exploração dos jogos como recurso tornou a aula mais "atraente" aos alunos, e incluiu no processo de aprendizagem a prática de questionamentos sobre a dinâmica do jogo e sobre os conteúdos por eles explorados.Nesse ponto vemos a importância do professor se sentir à vontade para inserir esses recursos em seu planejamento, incluindo em seu método de ensino o chamado "trabalho pedagógico criativo" e a aprendizagem criativa" (Miranda, 2016).

Quanto ao comportamento dos alunos, a professora registra que ocorrem mudanças significativas, justificadas pelo fato de que os mesmos têm espírito curioso e investigador, além disso, gostam de sair da rotina de livros e cadernos. Em sua avaliação sobre o comportamento e a motivação dos alunos frente ao uso de jogos matemáticos, fez os seguintes apontamentos:

> *"Vejo que, por meio de atividades com jogos os estudantes com dificuldade de aprendizagem mudam a imagem negativa do ato de não entender determinado conteúdo matemático. E os jogos permitem experiências desafiadoras que lhes garantam que aprender Matemática é muito interessante, pois está no nosso cotidiano (eles contam experiências vividas no dia-a-dia)".*
>
> (Professora regente, 2018).

Para ela, o processo de inclusão de jogos aliados a resolução de problemas, de forma geral, apresentou melhorias, tanto de aprendizagem de conteúdos quanto de comportamento, pois incentiva a obediência de regras e a resolução de atividades com mais segurança e habilidades.

Assim, pode-se dizer que a aprendizagem significativa ocorreu junto com a mudança de comportamento dos alunos, que passaram a desenvolver suas habilidades e comportamentos em relação a disciplina de Matemática e, também, em relação ao compartilhamento de ideias entre professor e alunos. Essa mudança foi percebida pela professora, ao apontar que:

> *"Dentre tantas coisas, o jogo favorece o estudante a resgatar o prazer em aprender (melhora a criatividade, senso crítico, participação, entre outros). Tem como desvantagem, quando os jogos são mal utilizados, os estudantes jogam, brincando e se sentem motivados pelo jogo, sem saber qual o objetivo está em sala de aula, jogando por jogar. O jogo por si só não tem propósito".* (Professora regente, 2018).

Ficou compreendido que o uso de jogos com propósito é facilitador do trabalho pedagógico desenvolvido pela escola e pelo professor, e pode sim desenvolver noaluno características relacionadas a criatividade e a integração na sociedade (Machado, 2011), bem como o crescimento pessoal relacionado a aspectos operacionais e cognitivos.

Conclusões

Com as observações realizadas em ambiente escolar, de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, em conjunto com a professora regente, pode-se identificar que: 1) a utilização de jogos de fixação aliados a resolução de problemas, no ensino da Matemática, é feita de forma esporádica, mesmo apresentando resultados satisfatório quando aplicados, enquadrando-se no que pode ser dito como recurso diferenciado de ensino; 2) é necessário um processo de aculturação dos professores para que a utilização de estratégias de ensino diferenciadas, como é o caso dos jogos, sejam incluídas na rotina escolar com maior regularidade e frequência; e 3) que o uso de jogos de fixação contribuiu sim para a aprendizagem de conceitos matemáticos no grupo de alunos observados, visto que eles melhoraram a forma de ver e enxergar a disciplina de Matemática sob um ponto de vista diferente, onde esta pode ser aplicada em situações corriqueiras, as quais muita vezes eles nem percebiam ter influência da disciplina, como num simples jogo de tabuleiro.

Assim, foi possível identificar por meio desta pesquisa que a aprendizagem significativa ocorre com o uso de jogos, por propiciar aos alunos momentos de interação e troca de experiências entre si e com o professor. Essa interação é que trará os resultados na aprendizagem pois posiciona o aluno como figura central no processo, permtindo o desenvolvimento dele como indivíduo e como parte integrante de um grupo, ou seja, individual e coletivo.

Prospectivas

Essa investigação revelou a importância de repensarmos a prática pedagógica no processo ensino- aprendizagem de Matemática que, ainda hoje, valoriza decorar fórmulas, mudando para uma Matemática prática, como a professora regente relatou. Sugere-se a avaliação dessa estratégia de ensino em outros anos, com a finalidade de compreender se a inserção de jogos, como recursos diferenciados apresenta resultados a longo prazo e com alunos mais próximos do final do ciclo da educação básica.

Por fim, salientamos a necessidade de novas investigações a respeito dos benefícios das atividades com uso jogos em todo ensino básico e a respeito da influência da mediação do professor por meio dessa metodologia nas estratégias matemáticas dos estudantes.

Referências

Alves, E. M. S.(2007).*A ludicidade e o Ensino de Matemática*. 4ª edição. Campinas-SP: Pairus.

Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=LwWgxeyPdJQC&oi=fnd&pg=PA15&dq=tipos+de+jogos+de+fixa%C3%A7%C3%A3o&ots=LyBr1a7kOu&sig=RKzeBY52mm_rM8U6KdXHDA1UvRU#v=onepage&q=tipos%20de%20jogos%20de%20fixa%C3%A7%C3%A3o&f=false> Acesso em: 13 Ago 2018.

Cunha, J. S. C.; Silva, J.A. V. (2012). *A importância das atividades lúdicas no ensino da matemática.III Escola de Inverno de Educação Matemática*. Rio Grande do Sul: Universidade Federal de Santa Maria, 2012, 12p. Disponível em: <w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_Cunha_Jussileno.pdf> Acesso em: 04 Dez 2017.

Dante, L. R. (1989)*Didática da resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Ática.

Flemming, D. M.(2004).*Criatividade e Jogos didáticos*. *Anais do VIII Encontro Nacional da Educação Matemática.* SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC39923274934.pdf> Acesso em: 13 Ago 2018.

Gerhardt, T. E.; Silveira, D. T. [Orgs.]. (2009).*Métodos de Pesquisa*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120 p. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf> Acesso em: 14 Ago 2018.

Gil, A. C.(2008).*Métodos e técnicas de pesquisa*. 6ª Ed. São Paulo: Editora Atlas.

Groenwald, C. L. O.; Timm, U. T.(2000).*Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula*. Só Matemática. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/artigos/a1/> Acesso em: 13 Ago 2018.

Lüdke, M.;Andre, M. E. D. A.(1986).Métodos de coletas de dados: observação, entrevista e análise documental. In: LÜDKE, Menga; ANDRE, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. *Pesquisa em Educação – abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Machado, A. I.(2011).*O lúdico na aprendizagem da Matemática*. Monografia. Curso de Especialização em Desenvolvimento Humano, Educação e Inclusão Escolar. Brasília: UAB/UnB, 2011, 58p. Disponível em: <bdm.unb.br/bitstream/10483/2120/1/2011_AparecidaItamaraMachado.pdf> Acesso em: 04 Dez 2017

Miranda, S.(2016).A ludicidade como estratégia didática favorecedora de aprendizagens significativas e criativas. p. 11-37 In: Antônio Villar Marques de Sá, Luiz Nolasco de Rezende Júnior e Simão de Miranda (Org.) *Ludicidade: desafios e perspectivas em educação*. Jundiaí: Paco Editorial, 2016, 260 p.

Onuchic, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.(2011), *Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectiva*s. Bolema, Rio Claro, v.25, n.41 p.73- 98. Dez.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Modelización en el aula matemática

Andrés **Ortiz** jiménez
Facultad de Educación, Universidad Católica de la Santísima Concepción
Chile
aortiz@ucsc.cl
María **Aravena** díaz
Facultad de Ciencias Básica, Universidad Católica del Maule
Chile
maravena@ucm.cl
Horacio **Solar** bezmalinovic
Facultad de Educación, Universidad Católica de Chile
Chile
hsolar@uc.cl
Leonardo **Cárdenas** calderón
Facultad de Educación, Universidad Católica de Chile
Chile
lcardenc@uc.cl

Resumen

Este taller promueve un trabajo independiente que permitirá a los/las docentes participantes involucrarse en un ciclo de modelamiento desde dos puntos de vista. El primero, a través de un trabajo con problemas de modelado matemático para que pongan a prueba sus habilidades, destrezas, conocimientos matemáticos, procesos de comunicación y argumentación en los diferentes momentos del ciclo de modelado; y el segundo, analizar como ese proceso modelación puede implementarse en el aula. Se privilegiará un trabajo colaborativo mediante la interacción grupal con las diferentes situaciones que le permitan acercarse a los conceptos y procesos desde una perspectiva contextualizada, que puedan relacionar y valorar desde sus propias realidades, el rol de la modelación para describir diferentes fenómenos de la realidad.

Palabras clave: Competencias matemáticas, modelización, ciclo de modelamiento, desarrollo profesional profesores.

Introducción

La modelización de situaciones ha sido ampliamente investigada, mostrando que cuando es incorporada en el aula, permite el desarrollo de capacidades de alto nivel, necesarias para enfrentar un mundo cada vez más matematizado (Keitel, 1993; Aravena & Caamaño, 2007; Gómez, 2007). Sin embargo, Blomhoj & Carreira (2009) nos señalan que la modelización en la formación de profesores tanto de primaria como de secundaria sigue siendo una cuestión pendiente. Lo anterior es complejo, pues dentro de las competencias matemáticas que han generado consenso a nivel internacional, se destacan como esenciales preparar a los profesores

en la formulación de problemas que involucren procesos de modelación, la utilización del lenguaje matemático, la comunicación y argumentación matemática y la capacidad de analizar y construir modelos matemáticos en diferentes contextos (Niss & Højgaard, 2011).

Esta tensión entre desarrollo de competencias y formación de profesores es señalada por Kauertz y sus colaboradores, quienes indican que la relación entre el desarrollo de las competencias y la enseñanza es todavía vaga, y las evaluaciones no proporcionan información del proceso de desarrollo de las competencias, sino que señalan las metas que deberían haberse logrado, proporcionando información que es útil para el diseño de políticas públicas en educación, pero no para orientar procesos de enseñanza (Kauertz, Newmann, & Hearting, 2012).

Justificación teórica del taller

Respecto a la modelización, existen autores que la sitúan como la base de la actividad matemática; debido principalmente a que en las tareas de modelización de situaciones se da un especial énfasis al proceso seguido por los estudiantes en dichas tareas, esto es, a procesos mediante las cuales realiza "la adecuación a los propios actos de conocimiento y no al contenido de los propios actos*"* (Gómez, 2007, p. 32*),* dando así más importancia a los procesos cognitivos que a los modelos obtenidos (Aravena, Caamaño y Giménez, 2008; Blomhøj, 2004); ello se puede ver reflejado en el marco teórico de PISA 2015 (OECD, 2016) en que se describe cada una de las siete competencias matemáticas según el ciclo de modelización.

En este sentido, planteamos que modelar un fenómeno observado o utilizar un modelo para comprender o resolver alguna situación, contribuye a una mejor formación de los alumnos en cualquier fase de escolaridad, fomenta el desarrollo de habilidades que ayuda a una mejor comprensión de conceptos matemáticos para su aplicabilidad y saber integrar la matemática a otras áreas del saber (Biembengut, 2016). Desde el punto de vista del aprendizaje, si el modelaje se torna parte del centro de la actividad matemática escolar, el estudiante en situaciones de su interés, aumentará su comprensión en el uso de datos, estimulará el uso de su capacidad matemática, desarrollará la comprensión de fórmulas algebraicas y la habilidad argumentativa, criticando y defendiendo los modelos creados al contrastar sus resultados con los de situaciones de la vida real (Saeki, Ujiie & Kuroki, 2007, citado en Biembengut, 2016: 102). En los primeros años de enseñanza primaria, la modelización se asocia a cuando los niños generan y desarrollan sus ideas y procesos matemáticos propios, para formar sistemas de relaciones que son generalizables y reutilizables (English, 2006).

Según Maaß (2006) para modelizar un problema real hay que moverse entre la realidad y la matemática. El proceso de modelación comienza en el mundo real; simplificando, estructurando e idealizando este problema se obtiene un modelo real. La matematización del modelo real conduce a un modelo matemático. Trabajando dentro de las matemáticas se obtiene una solución matemática; la cual tiene que ser primero interpretada para obtener una solución interpretada y luego validada. Si la solución o el proceso elegido no resulta ser adecuado a la realidad, los pasos o quizás incluso la totalidad del proceso de modelización necesita ser revisado. En la figura 1 se ilustra la propuesta de Maaß (2006) que se inicia con la simplificación del problema real, en donde la situación real puede manipularse de manera de obtener un modelo real, haciendo supuestos de diversas hipótesis, fragmentando el problema o bien se suponen despreciables ciertas variables. Utilización de sistemas de representación, esquemas, dibujos, reconocimiento de las variables que intervienen, identificación de las condiciones iniciales. Se busca alguna similitud con algo conocido del mundo matemático, lo cual es muy importante para poder enfrentar el proceso de matematización. (Gómez, 2007; Aravena, 2016). Esto nos permite obtener un modelo matemático inicial, que la autora denomina modelo real.

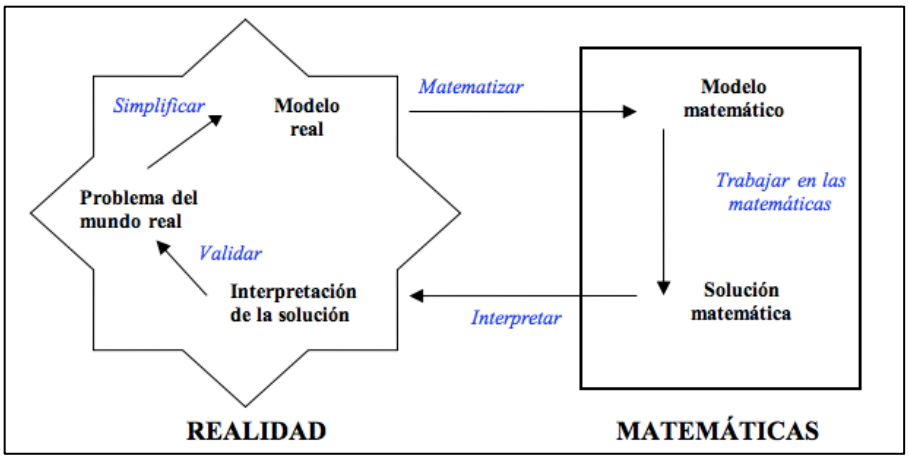


Figura 1. Procesos de modelación matemática (Maaß, 2006)

La entrada al mundo matemático se denomina Matematización. Este se genera mediante la traducción donde se sustituyen las palabras por símbolos y expresiones matemáticas (ecuación, funciones, etc.). Aquí se consigue una formulación matemática del problema y de manera natural se obtienen un problema en términos matemáticos. Esto es, el significado de matematización es la descripción de relaciones matemáticas que interpretan el proceso. En el proceso de matematización se aplican los métodos matemáticos tales como propiedades, algoritmos que resuelven el problema en términos matemático, hasta obtener una solución matemática del problema (Gómez, 2007; Niss, 2013), lo que se denomina la formulación del modelo.

La interpretación de la solución es la salida del mundo matemático, lo que se requiere es analizar si el modelo formulado es el adecuado, es saber si da respuesta al problema real. Si es un buen ajuste para los datos del problema, ver márgenes de errores, reestudiar los resultados numéricos obtenidos en términos del problema propuesto. Interpretar es saber si hay diversas soluciones, cual es la más adecuada al problema (Aravena, 2016).

Luego se entra a la etapa de validación, donde se requiere evaluar el modelo con nuevos datos del domino o proyectar nuevos datos, esto es, justificar la validez del modelo, si satisface las condiciones iniciales.

Finalmente se estudia el análisis y proyección del modelo, lo que no está descrito explícitamente en el esquema de Maaß (2006), pero que requiere ser analizado en todo proceso de modelación matemática (Gómez, 2007; Aravena, 2016). Aquí se analiza las fortalezas y limitaciones del modelo, esto es, el modelo presenta limitaciones que están relacionadas con las decisiones iniciales, cuando se fragmentó o con las condiciones iniciales del objeto real como deformaciones por el medio ambiente, etc. Hay que tener presente, que el modelo es adecuado, si las condiciones se mantienen, pues si cambian las condiciones, como por ejemplo en el problema de la temperatura, el modelo no sirve. O que no es posible generalizar para otras situaciones.

Las fortalezas están relacionadas con la posibilidad de generalizar el modelo para situaciones similares. Por ello, la generalización es un paso importante en todo proceso de modelación, pues lo que se busca es tratar de modelar una situación real para poder luego buscar una generalización que permita contar con una expresión algebraica o analítica (cuando se habla de analítica es de todo el proceso) que nos lleve a su utilización en situaciones similares (Aravena, 2016). Así nos evitamos que para cada situación muy similar tengamos que iniciar todo el proceso de modelamiento, lo cual no sería eficiente. Así la generalización permite contar con un modelo que nos sirve para diversas situaciones muy similares unas de otras.

Propuesta del Taller

Situación para modelar: "Cuidemos el Medio Ambiente" (Aravena y Caamaño, 2007). En 1896 el científico sueco Svante Arrhenius fue el primero en predecir el efecto invernadero como resultado de las emisiones de dióxido de carbono en el aire por parte de los países industrializados. La quema de combustibles fósiles continúa produciendo 5,4 mil millones de toneladas de carbono al año, las cuales son absorbidas por la atmósfera y por los océanos. En 1990 el Grupo Internacional sobre el Cambio de Clima (GICC) pronosticó que, de continuar la tendencia actual, aumentará la temperatura promedio global de la Tierra. La tabla 1 muestra los datos del aumento de la temperatura global pronosticada en grados Celsius.

Tabla 1

Aumento de la temperatura global pronosticada en grados Celsius

Año	Temperatura
1980	0.0
2000	0.42
2020	0.84
2040	1.26
2060	1.68
2080	2.10

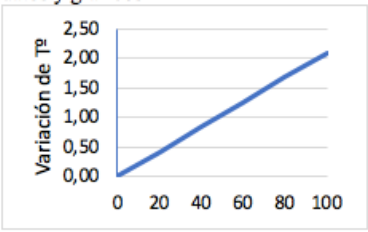
A partir de la información, responda las siguientes preguntas: (1) Determina un modelo de manera que concuerde con los datos y representa gráficamente; (2) Tomando tu expresión general (o modelo) explica el significado de los coeficientes de la función; (3) Predice la temperatura estimada para los años: 2030 y 2085

Análisis del Taller

El análisis comienza con la parte de simplificación del problema real, el cual se muestra en la figura 2.

Datos: Años; Aumento de temperatura en grados Celsius

Utiliza sistemas de representación: Tabla de datos y gráficos



t	Años	Temperatura en °C
0	1980	0.0
20	2000	0.42
40	2020	0.84
60	2040	1.26
80	2060	1.68
100	2080	2.10

Condiciones iniciales:

Despreciar la temperatura antes de 1980. Considerar el año 1980 como el año t= 0. Incremento de la temperatura constante (0.42° C) cada 20 años.

Figura 2. Simplificación del problema real

Posteriormente, empieza la *Matematización* en donde se identifican las relaciones matemáticas. En la situación de este taller, el modelo matemático inicial se relaciona con la función lineal o afín y por tanto se produce un cambio de representación, pasando del algebraico al geométrico o del geométrico al algebraico, lo anterior se puede observar en la figura 3

(A) Modelo Matemática Inicial

Relaciona la situación con la función afín $f(x) = mx + b$ y la ecuación corresponde a: $y = mx + b$

Utiliza cambios de representación, del algebraico al geométrico o viceversa.

Identifican las ecuaciones o relaciones de acuerdo con el contexto del problema.

Utilización de propiedades, algoritmos y aplicabilidad de teoremas

(B) Proceso de Matematización

El incremento de la T° es directamente proporcional con el incremento de los años

Incremento en años (t)	Años	Temperatura en °C (T)	Incremento en °C (d)
-	0	0.0	-
20	20	0.42	0.42-0= 0.42
20	40	0.84	0.84-0.42= 0.42
20	60	1.26	1.26-0.84= 0.42
20	80	1.68	1.68-1.26= 0.42
20	100	2.10	2.10-1.68= 0.42

Se calcula la pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2.10 - 0.42}{100 - 20} = \frac{1.68}{80} = 0.021$$

Como la ecuación de la recta tiene la forma $y = 0.021x$

También se puede encontrar la regularidad

$$\frac{y}{x} = k$$

sabiendo que $x \neq 0; y \neq 0$

Entonces el modelo matemático es $T(t) = 0.021 \cdot t$

Figura 3. Matematización

A partir de lo anterior se establece la FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO FINAL (en términos numéricos). Como la gráfica de la recta pasa por el origen (0,0) se tiene que $b = 0$, así la ecuación de la recta es $T(t) = 0.021 \cdot t$. Posteriormente, ver figura 4, se inicia la VALIDACIÓN, en la cual se dan las etapas: Verificación y validación con datos numéricos; Generalización del modelo.

Verificación y validación con datos numéricos

Verificación Se consideran dos puntos de la gráfica.

P_1= (20, 0.42)
P_2= (100, 2.10)

Se tomará el punto t= 60.

Luego,
$y = 0.021 \cdot 60$
$y = 1.26$

Generalización del modelo.

Sea la variable dependiente y que se corresponde con el aumento de la temperatura °C (T). Y la variable independiente x que se corresponde con los años (t). Entonces tenemos que el aumento de T en función del año queda de la siguiente forma

T(t) = m t

$T(A) = m \cdot A$

$$T(A) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot A$$

Luego,
$d = y_2 - y_1$
$t = x_2 - x_1$

Matematizando:

Se reemplaza $d = y_2 - y_1$; $t = x_2 - x_1$

$$\boxed{T(A) = \frac{d}{t} \cdot A}$$

Validación y verificación

Validación del modelo general
d= 0.42
t= 20 entonces,

$$\frac{d}{t} = \frac{0.42}{20} = 0.021$$

Como el modelo tiene la forma

$T(A) = \frac{d}{t} \cdot A$ $\quad T(A) = 0.021 \cdot A$

Verificación

Se considerará un tiempo de 60 años (A), luego de 1980.
Entonces,

$T(A) = 0.021 \cdot 60$ $\quad T(A) = 1.26$

Figura 4. Verificación y validación con datos numéricos. Generalización del modelo.

Luego, en la figura 5 se mostrará un análisis y proyección de las limitaciones y fortalezas del modelo

Fortalezas:	**Limitaciones del modelo**	**Comunicación matemática.**
El modelo puede ser utilizado para diferentes intervalos de tiempo, y diferentes incrementos de temperatura. Por ejemplo: el aumento de la temperatura en el núcleo del sol en los últimos millones de años.	No es aplicable para calcular temperaturas antes del año 1980. No es aplicable si el aumento de la temperatura no es constante.	Dar respuesta al problema real. El modelo generalizado sirve para encontrar la temperatura en años posteriores a 1980.

Figura 5. Verificación y Validación con datos numéricos. Generalización del modelo

Habiendo finalizado el proceso, es importante analizar las posibles dificultades y mencionar algunas soluciones (ver tabla 2) cunado se está desarrollando esta actividad matemática con los estudiantes.

Tabla 2

Posibles dificultades y soluciones al implementar el problema en el aula

Posibles dificultades y obstáculos	**Posibles Soluciones**
No relacionan los datos de la tabla con una proporción directa.	Hay que recordar que la constante de una proporción directa es de la forma $k = \frac{y}{x}$
No reconocer la ecuación de la recta.	Ubicar los valores de la tabla como puntos en el plano cartesiano, y unirlos mediante una recta.
No saber escribir la forma general de la ecuación de la recta.	Apoyar en recordar forma general de la ecuación de la recta.
No saber encontrar la pendiente en una ecuación de la recta.	Relacionar la pendiente de la recta con la constante de proporcionalidad (k).
No relacionar el coeficiente de posición con el punto que pasa por el origen.	Los alumnos discutan en grupos cual es la diferencia de una función afín y una función lineal.

Por último, mostramos un plan de clases, con lineamientos generales para la gestión del modelamiento de la situación presentada en el aula (ver tabla 3)

Tabla 3

Lineamientos para una implementación en el aula

	Tiempo	**Rol del estudiante**	**Rol del profesor**
Comprender el problema	15 Minutos	• Leer el problema y organizar los datos • Utiliza información para complementar tabla que presenta la situación. • Reconocer y nombrar las variables involucradas.	• Introducir el problema a la clase. • Observar, guiar y atender a los grupos de trabajo para aclarar dudas sin entregar soluciones.
Desarrollar una solución por sí mismos.	40 Minutos	• Graficar la información de la tabla. • Relacionar la gráfica con la ecuación de la recta. • Describir el modelo inicial. • Matematizar y completar un modelo de acuerdo con el problema. • Modelo final.	• Responder consultas de los estudiantes. • Acercar a los estudiantes a utilizar los conceptos de: pendiente, constante de proporcionalidad y coeficiente de posición.
Discusión grupal del	20 Minutos	• Analizan el o los modelos propuestos. • Se discute el modelo final que da respuesta al problema.	• Observar y orientar el trabajo de los estudiantes complementando

ciclo de modelación.		• Validación y verificación del modelo final.	los conceptos con lenguaje matemático y notación. • Atener sus dudas y fomentar sus ideas sin entregar soluciones.
Conclusión	20 Minutos	• Presentan soluciones y extrapolan los resultados obtenidos al problema y su contexto. • Generan conclusiones y generalizaciones a partir del problema. • Proyectan posibles generalizaciones y aplicaciones. • Argumentan matemáticamente sus procesos y resultados	• Escuchar y criticar constructivamente las ideas, dudas y comentarios de los estudiantes. • Complementar las respuestas de los estudiantes, fomentar las diferentes líneas de pensamiento y valorar los distintos modelos propuestos.

Reflexiones finales del taller

Este taller hace que los profesores participantes vivan una tarea de modelización con una interpretación renovada de lo que es el "aprendizaje significativo" en una perspectiva de cambio constante. La enseñanza de un objeto matemático debe ser contextual, debe contemplar su aspecto informativo, de elementos de otras ciencias, su aspecto formativo, centrado en el desarrollo del pensamiento, el fomento del espíritu crítico y la práctica del razonamiento lógico, todo ello basado en la resolución de problemas (Aravena, Caamaño & Giménez, 2008). Esto se complementa con la necesidad de crear contextos adecuados para enseñar a matematizar, como forma de dar significatividad al proceso de hacer matemática. En efecto, existe consenso en que el aprendizaje y la enseñanza, deben partir de contextos que revistan interés y que tengan pertinencia en el mundo real. Sin embargo, usualmente los contextos se utilizan después de haber enseñando a los alumnos las matemáticas formales. Otro aspecto que esperamos que los profesores vivan con este taller, es una experiencia de aprendizaje cooperativo, que se reconoce como un medio potente para abordar problemas matemáticos, flexible de hacer fluir los mecanismos individuales de construcción del conocimiento matemático de los estudiantes, además es un buen productor o reproductor de argumentos matemáticos, permitiendo generar mecanismos de integración del conocimiento, evitando la descontextualización y posibilitando la vinculación con otras áreas, en que se reconoce, además, que todo conocimiento se construye en estrecha relación con los contextos en los que se usa, y que, no es posible separar los aspectos cognitivos, emocionales y sociales presentes en el contexto en que se actúa.

Referencias y bibliografía

Aravena, M., & Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *33*(2), 7-25.

Aravena, M., Caamaño, C., & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(1), 49-92.

Aravena, M. (2016). La modelación matemática en Chile (2016). En Arrieta, Jaime y Díaz, Leonora (eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. España: Gedisa.

Biembengut, M. S. (2016). Modelaje Matemático en la Educación Brasileña: Historia de las Ideas e Ideas de las Historias. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). *Investigaciones Latinoamericanas*. Barcelona: Gedisa.

Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling—a theory for practice. En B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-160). Göteborg University: National center for mathematics education.

Blomhøj, M., & Carreira, S. (2009). Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. En *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 6-13).

English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational studies in mathematics*, *63*(3), 303-323.

Gómez, J. (2007). *La matemática reflejo de la realidad. La modelización matemática como herramienta para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas*. Badajoz: FESPM.

Kauertz, A., Newmann, K. & Hearting, H. (2012) Competence in science education. En Fraser, et. al (Eds.), *Second International Handbook of Science Education* (711-721). London: Springer.

Keitel, C. (1993). Implicit mathematical models in social practice and explicit mathematics teaching by applications. *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications. Chichester: Ellis Horwood*, 19-30.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142.

Niss, M. (2013) Modeling a Crucial Aspects of Students´ Mathematical Modeling. En R. Lesh, P. Galbarith, C. Haines, A. Hurford (Eds). *Modeling Students´ Mathematical Modeling Competencies. (*pp. 43-59). *ITCMA 13*. M VI, 378 V8 Springer: Dordrecht Heidelberg New York London.

Niss, M. & Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.*(English edition). IMFUFA tekst n. 485/2011. Roskilde: Roskilde University.

OECD. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. OECD Publishing: Paris.



Um cenário das pesquisas envolvendo Resolução de Problemas em edições da CIAEM

Cidimar **Andreatta**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
cidimarcol@gmail.com Norma
Suely Gomes **Allevato**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
normallev@gmail.com

Resumo

A presente comunicação consiste em um mapeamento das pesquisas envolvendo a temática Resolução de Problemas que foram apresentadas na Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), nas edições de 2011 e 2015. O corpus de pesquisa deste trabalho teve como fonte de coleta de dados os anais da referida Conferência, disponibilizados nos *sites* dos eventos. Procurou-se evidenciar a forma como a CIAEM foi se constituindo como um evento importante de discussão para a Educação Matemática nas Américas. De modo especial, buscou-se abordar características marcantes dos trabalhos que envolveram a Resolução de Problemas como temática central, tendo em vista a variedade de temáticas que constituem a Conferência. Os resultados da pesquisa demonstram, de um modo geral, que os trabalhos apresentam convergências com a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e campo de discussões teóricas em favor da aprendizagem dos estudantes.

Palavras chave: Ensino de Matemática, Resolução de Problemas, Pesquisa em Educação Matemática, Situações-Problema, Ambientes de Aprendizagem.

Introdução

Esta comunicação tem por objetivo apresentar um mapeamento dos trabalhos/pesquisas, relacionados à temática Resolução de Problemas - RP[1], apresentados nas duas últimas edições da Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM, nos anos de 2011, no Brasil, e 2015, no México.

[1] Optamos neste trabalho por utilizar a sigla "RP" para designar Resolução de Problemas.

De acordo com o Comitê Interamericano de Educação Matemática, a CIAEM é o primeiro grupo regional criado na Comissão Internacional de Instrução Matemática - ICMI, tendo sua primeira edição realizada na Colômbia em 1961. Diversos países sediaram a conferência desde sua primeira edição até a última, em 2015 no México. A referida Conferência vem sendo realizada a cada quatro anos e, até o presente momento, já houve catorze edições, nos anos de 1961, 1966, 1972, 1975, 1979, 1985, 1987, 1991, 1995, 1999, 2003, 2007, 2011 e 2015. Na última edição, em 2015, foram apresentados mais de quinhentos trabalhos, com a participação de aproximadamente mil profissionais da área de ensino, envolvendo 23 países.

A CIAEM configura-se como uma importante Conferência para a área de Ensino da Matemática, em nível internacional, pois é um evento interamericano, concentrando a maior parte das edições em países da América do Sul, com uma tradição de trabalho acadêmico de matemáticos e educadores de grande experiência, como Marshall Stone, Luis Santaló, Ubiratan D'Ambrosio, entre muitos outros. Tal importância, verifica-se, também quando direcionamos o olhar para o quantitativo de participantes nas últimas edições, em relação às demais, conforme se observa na tabela 1.

Tabela 1

Quantidade de participantes em edições da CIAEM

Edições da CIAEM	País - Sede	Participantes
1961	Colômbia	48
1966	Peru	84
1972	Argentina	209
1975	Venezuela	281
1979	Brasil	569
1985	México	180
1987	República Dominicana	316
1991	Estados Unidos	141
1995	Chile	1.080
1999	Uruguai	600
2003	Brasil	600
2007	México	800
2011	Brasil	1.800
2015	México	1.000

Fonte: construção dos autores

Podemos verificar um aumento significativo de participantes nas edições de 1995 e 2011, realizadas, respectivamente, no Chile e no Brasil, assim como percebemos uma maior ocorrência da Conferência em países da América do Sul, tendo o Brasil e o México sediado mais de uma vez o evento, com três edições em cada um. O próximo encontro da CIAEM será realizado pela segunda vez na Colômbia, no mês de maio do ano de 2019.

O presente texto configura-se como um mapeamento, retratando o estado do conhecimento, uma vez que se refere a um lócus específico e restrito de investigação acerca da temática Resolução de Problemas em eventos científicos, de acordo com Romanowski e Ens (2006). Para realizar o mapeamento proposto nesta pesquisa, analisamos as Comunicações Científicas das

edições de 2011 e 2015 relacionadas à temática Resolução de Problemas, apresentadas no grupo de trabalho direcionado a essa temática específica e nos demais grupos voltados a outras temáticas, mas que também abordaram a RP. Utilizamos como fonte de consulta para seleção dos trabalhos mapeados os títulos e os resumos dos artigos. Em alguns casos foi necessária a consulta ao trabalho na sua totalidade.

Nesse sentido, o trabalho em questão apresenta, inicialmente, nesta indrodução, o contexto histórico de constituição e evolução da CIAEM, que foi se configurando como um importante evento da área de Educação Matemática nas Américas. Na parte metodológica são abordados os Focos Temáticos selecionados para mapeamento dos trabalhos, suas tendências e as convergências e divergências na RP. Por fim, trazemos as considerações finais e as referências.

Metodologia

A presente pesquisa configura-se como estado de conhecimento, cujo objetivo é relatar análises dos trabalhos que foram apresentados nas edições da CIAEM de 2011 e 2015, relacionadas à temática Resolução de Problemas nos formatos de Comunicação Científica.

As análises foram organizadas em focos e subfocos temáticos, de acordo com os referenciais teóricos de Fiorentini (2002), conforme relacionados na Tabela 2. Fiorentini (2002) destaca que são diversas as formas de organização ou categorização de trabalhos: pela metodologia da pesquisa utilizada, pelo referencial teórico, pelos objetivos de investigação ou pelos paradigmas epistemológicos da pesquisa. A opção utilizada neste artigo é por focos temáticos, indo ao encontro das contribuições do trabalho de mapeamento realizado por Fiorentini (2002, p. 4), que destaca:

> [...] essa forma de organização exige que se identifique, para cada trabalho, o foco principal da investigação. Esse processo não é simples ou direto, pois acontece de forma indutiva e, às vezes, dedutiva, exigindo ajustes individuais (para cada estudo) e grupais (envolvendo um conjunto de estudos). A vantagem é que as categorias construídas emergem do material sob análise e não da literatura propriamente dita, embora, neste processo, o diálogo com a literatura e outras formas de classificação seja conveniente e necessário.

Na próxima seção, são apresentados os focos temáticos que identificamos nos trabalhos analisados nas Conferências de 2011 e 2015, acompanhados de alguns dados.

Alguns Resultados

Tendências dos trabalhos

Conforme já explicitado, a organização dos trabalhos está direcionada em focos temáticos a partir dos pressupostos teóricos de Fiorentini (2002). Organizar trabalhos tematicamente não é uma tarefa fácil, mas permite-nos identificar e comparar os diferentes olhares e resultados produzidos pelos trabalhos, independente das opções teóricas e metodológicas dos autores.

As contribuições teóricas de Kilpatrick (1996), ao destacar critérios para julgar/avaliar pesquisas em Educação Matemática também foram importantes na delimitação dos focos e subfocos temáticos deste trabalho, principalmente em se tratando dos critérios de: Relevância e

pertinência em relação à: Educação e à Educação Matemática; Coerência teórico-metodológica; Contribuições ao processo de pesquisa e ao campo teórico e prático da Educação Matemática.

Identificamos neste mapeamento 30 trabalhos na edição da CIAEM de 2011 e 23 trabalhos em 2015 relacionados à temática RP, totalizando 53 trabalhos, organizados na Tabela 2 em Focos e Subfocos Temáticos. Na organização, foram identificados sete focos temáticos e dez subfocos. Alguns trabalhos apresentam relação com mais de um foco; porém, nesse caso, foi dada prioridade à temática de maior abrangência no trabalho.

Tendo em vista a quantidade de trabalhos categorizados, optamos por relacionar somente as autorias dos trabalhos organizados nos focos e subfocos temáticos e não os títulos das pesquisas, conforme apresentado.

Tabela 2

Categorização dos trabalhos

FOCO TEMÁTICO	SUBFOCO	Autores	CIAEM	
			2011	2015
Estudos com a RP nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos matemáticos	Silva/Spinillo (2011) Santos/Camargo (2011) Rozal et al (2015) Polo/Rivera (2015)	02	02
	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem	Henriques et al. (2011) Justo et al. (2015)	01	01
	Leitura, interpretação e produção de problemas matemáticos	Lautert/Ferreira (2011) Coutinho (2011)	02	-
Estudos com a RP nos Anos Finais do Ensino Fundamental	A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos matemáticos	Justo/Echeveste (2011)	01	-
	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem	Coelho et al. (2011) Grando/Hubner (2011) Assunção et al. (2015)	02	01
	A metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da RP	Morais/Onuchic (2011)	01	-
	A RP numa dimensão contextual de aprendizagem (produção de narrativas e letramento matemático)	Almeida/Fiorentini(2011)	01	-
Estudos com a RP no Ensino Médio	A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos matemáticos	Orfão (2011) Rodrigues et al. (2015)	01	01
	Registros de representação semiótica na RPs	Rodrigues/Carrião (2011)	01	-
	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem	Paiva et al. (2011) Gusmão et al. (2011) Pacheco/Roazzi (2011) Souza/Silva (2015) Meira/Medeiros (2015) Braga/Sa (2015) Bravo et al. (2015) Zamorano (2015)	03	05

Estudos com a RP no Ensino Superior	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem (Engenharia Didática)	Toso et al. (2011) Martinez et al. (2011) Matassa et al. (2011) Pita et al. (2011) Mendoza/Delgado (2011)	05	-
	A RP numa dimensão contextual de aprendizagem (produção de narrativas e letramento matemático)	Enriquez/Efremov (2015)	-	01
Estudos com a RP em livros didáticos	Análises de conteúdos matemáticos a partir de livros didáticos	Chaves/Neves (2015)	-	01
FOCO TEMÁTICO	SUBFOCO	Autores	CIAEM	
			2011	2015
Estudos com a RP sobre o professor de Matemática: formação inicial e continuada	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem	Cavalcante/Rego (2011) Arenas/Rico (2015) Velandia/Leal (2015)	01	02
	A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da RP	Costa/Allevato (2015)	-	01
	A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos e teorias matemáticas	Matos et al. (2015) Dias/Alves (2015) Castiblanco/Vargas (2011) Zamorano (2011) Pinilla/Vanegas (2011)	03	02
	Concepções/conhecimentos docente sobre a RP e Identificação de tipos de problemas/exercícios matemáticos	Klein/Pereira (2011) Lima/Manrique (2011) Proença/Pirola (2011) Mendoza et al. (2011) Vale/Barbosa (2015) Oliveira/Passos (2015) Barbosa/Vale (2015) Raiva et al. (2015) Marquez/Robelo (2015)	04	05
	Análises das possibilidades e dificuldades no processo de elaboração de problemas matemáticos	Azeredo et al. (2011)	01	-
Estudos com a RP no campo da Educação não formal	A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos e teorias matemáticas	Meneghetti et al. (2011)	01	-
	Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem	Costa et al. (2015)	-	01

Fonte: construção dos autores

Percebemos que o foco temático "Estudos com a RP sobre o Professor de Matemática: formação inicial e continuada" possui a maior quantidade de trabalhos, perfazendo um total de 35% dos trabalhos analisados. Em seguida, temos "Estudos com a RP no Ensino Médio", com 11 trabalhos, e "Anos Iniciais do Ensino Fundamental", com 8 trabalhos. No geral, percebemos um equilíbrio na concentração dos trabalhos entre a Educação Básica e o Ensino Superior, quando direcionamos o olhar para o foco temático da formação inicial e continuada de professores. Neste

foco a maior parte dos trabalhos volta-se à formação inicial de professores, mas eles são frutos de pesquisas realizadas na Educação Básica.

Em relação aos subfocos temáticos, a maior parte dos trabalhos está organizada no subfoco "Estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem", concentrando aproximadamente 50% dos trabalhos analisados. Os trabalhos organizados neste subfoco envolvem pesquisas relacionadas à Resolução de Problemas como metodologia de ensino com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem, desde jogos, materiais concretos e atividades lúdicas a ambientes práticos e recursos relacionados à tecnologia da informação e comunicação, como *softwares* e jogos digitais. Outro subfoco que concentrou uma quantidade significativa de trabalhos foi "A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos e teorias matemáticas", que envolveu pesquisas com foco central no desenvolvimento e na investigação de conteúdos matemáticos específicos, de acordo com a etapa de escolarização.

É importante destacar também que o subfoco "Concepções/conhecimentos docente sobre a RP e Identificação de tipos de problemas/exercícios matemáticos" esteve relacionado somente ao foco temático da formação inicial e continuada de professores, porém concentrou 9 trabalhos, representando 16% dos trabalhos analisados. As pesquisas deste subfoco estão relacionadas aos conhecimentos e às concepções que os professores e futuros professores possuem acerca de aspectos da RP envolvendo diferentes métodos de pesquisa, tais como entrevistas, aplicação de questionários, grupos focais, observações de aulas, dentre outras. A Tabela 3, relacionada a seguir, apresenta um resumo da quantidade dos trabalhos organizados nos focos temáticos.

Tabela 3

Distribuição dos trabalhos nos focos temáticos

FOCOS TEMÁTICOS	QUANTIDADE	PERCENTUAL
Estudos com a RP nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	08	15,0
Estudos com a RP nos Anos Finais do Ensino Fundamental	07	13,0
Estudos com a RP no Ensino Médio	11	20,3
Estudos com a RP no Ensino Superior	06	11,1
Estudos com a RP em livros didáticos	01	1,8
Estudos com a RP sobre o professor de Matemática: formação inicial e continuada	19	35,1
Estudos com a RP no campo da Educação não formal	02	3,7

Fonte: construção dos autores

Considerando a quantidade de trabalhos selecionados neste cenário de mapeamento, propomos uma discussão mais contextualizada, envolvendo os sete focos temáticos, e não necessariamente uma abordagem específica de cada trabalho. Alguns subfocos temáticos se repetem entre os focos temáticos, o que demonstra convergências com os métodos e os objetos de estudo das pesquisas. Tais convergências facilitaram o agrupamento e a organização dos trabalhos, e contribuíram para um olhar mais crítico no julgamento dos trabalhos, indo ao encontro dos critérios de análise de Kilpatrick (1996), citados anteriormente.

De um modo geral, quase todos os trabalhos são de natureza empírica e envolvem pesquisas em ambientes formais de aprendizagem. Em relação ao primeiro foco temático,

direcionado aos anos Anos Iniciais do ensino fundamental, percebemos uma predominância maior de trabalhos em relação ao subfoco "A RP como estratégia de ensino para o desenvolvimento de conteúdos/conceitos matemáticos". Cabe ressaltar neste foco temático que o trabalho de Justo et al. (2015) investigou também a formação de professores que atuavam no ensino fundamental, porém o foco maior foi a aprendizagem matemática com problemas envolvendo alunos em uma escola pública no sul do Brasil.

No foco temático Anos Finais do ensino fundamental, há uma convergência de trabalhos que investigaram a RP como estratégia de ensino com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem. É importante destacar que o trabalho de Assunção et al. (2015) utilizou situaçõesproblema em uma avaliação diagnóstica como estrategia para verificar os conhecimentos prévios dos alunos e não abordou procesos de RP.

O foco temático com a RP no Ensino Médio foi o segundo maior em quantidade de trabalhos com destaque para pesquisas relacionadas a estratégias/habilidades na RP com diferentes recursos e ambientes de aprendizagem. Ainda neste foco temático, ressalta-se que o trabalho de Rodrigues et al. (2015) esteve relacionado a dois subfocos, pois investigou o ensino de função quadrática por meio da RP com o uso do Geogebra.

De grande relevância também é o foco temático relacionado aos estudos envolvendo a RP sobre o professor de Matemática: formação inicial e continuada, que concentrou a maior parte de todos os trabalhos analisados. Marquez e Robelo (2015) apresentaram resultados interessantes, mostrando que os professores fazem confusão entre exercício e problema, apontando para uma mecanização no desenvolvimento de habilidades do pensamento matemático. Ainda neste foco temático, a pesquisa de Costa e Allevato (2015) mostra que é possível estabelecer conexões entre duas sub áreas da Matemática, de forma integrada, por meio da metodologia de ensinoaprendizagem-avaliação através da RP. O trabalho mostra a importância para que futuros professores vivenciem a RP como metodologia de ensino e percebam a possibilidade do trabalho integrado com os conteúdos matemáticos.

Considerações Finais

O presente mapeamento possibilitou-nos ampliar os olhares para a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, que pode favorecer a aprendizagem de conteúdos matemáticos. De um modo geral, a maior parte dos trabalhos apresenta características que convergem com tal metodologia, demonstrando possibilidades reais de utilizá-la na Educação Básica, no Ensino Superior e até em ambientes de Educação não formal.

A Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM constituiu-se como um grande evento na área de ensino de Matemática nas Américas, dada a quantidade de trabalhos apresentados em suas últimas edições. Vale ressaltar que, no no caso específico de trabalhos envolvendo a Resolução de Problemas, mesmo em uma edição sediada fora do Brasil, o maior número de trabalhos apresentados foi brasileiro.

A Conferência de 2011 teve uma apresentação bem maior de trabalhos brasileiros do que o evento de 2015. Tanto em 2011 quanto em 2015, a maior parte dos textos esteve relacionada à formação inicial e continuada de professores, considerando que a maior abrangência foi direcionada à Educação Básica. Não identificamos trabalhos que envolvessem a RP na educação infantil nos dois eventos analisados.

Ao direcionarmos o olhar para os subfocos temáticos, é importante considerar a predominância dos trabalhos relacionados a "Estratégias/habilidades na RP com diferentes

recursos e ambientes de aprendizagem", o que demonstra convergência com a RP como recurso metodológico em favor do processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos, indo ao encontro das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), quando destaca que o ponto de partida de uma atividade matemática não deve ser a definição dos conteúdos, mas a resolução de problemas que possa levar à construção desse conteúdo.

De certa forma, apresenta convergência também com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), quando percebemos que a BNCC faz referência a RP como recurso para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, sendo objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo do ensino fundamental.

Neste contexto, esperamos que o presente mapeamento se constitua em uma fonte de consulta a trabalhos que possam interessar a pesquisadores, professores e estudantes envolvidos com a temática de Resolução de Problemas, tendo em vista o cenário que aqui apresentamos de pesquisas desenvolvidas entre os diversos países das Américas.

Referências Bibliográficas

Assunção, J. A., Chirone, A. R. R., Mendoza, H. J. G., & Delgado, O. T. (2015). Análise da avaliação diagnóstica da estratégia de situações problemas em expressões algébricas. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática* (p. 9). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas/México, Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/.

Brasil (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, *Ministério da Educação e do Desporto*. Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil (2017). Conselho Nacional de Educação. Resolução 2/2017. Institui e orienta a implantação da Base Nacional Comum Curricular. Brasília, *Ministério da Educação*.

Costa, M. S., & Allevato, N. S. G. (2015). Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da resolução de problemas. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática*, (p. 12). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas/México, Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/.

Fiorentini, D. (2002). Mapeamento e balanços dos trabalhos do GT-19 (Educação Matemática) no período de 1998 a 2001. *Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*, 25, 1-17, Recuperado de http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/mapeamento.pdf.

Justo, J. C. R., Santos, J. F., Borga, M. F., & Rebelo, K. S. (2015). Desempenho de alunos dos anos iniciais do ensino fundamental na resolução de problemas aditivos e multiplicativos. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática*, (p. 12). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas/México, Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/.

Kilpatrick, J. (1996). Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. Tradução: Rosana G. S. Miskulin, Cármen Lúcia B. Passos, Regina C. Grando e Elisabeth A. Araujo. *Zetetiké*, *4*(5), 99-120.

Marquez, J. H., & Robelo, O. G. (2015). Ejercicio y problema dos caras de la misma moneda. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática*, (p. 11). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas/México, Recuperado de http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/.

Rodrigues, P. F. C., Côrrea, M. S., Suett, W. B., & Barros, M. D. (2015). Resolução de Problemas:

Abordagem ao Ensino da Função Quadrática. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática*, (p. 12). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas/México, Recuperado de http://ciaemredumate.org/memorias-ciaem/xiv/.

Romanowski, J. P., & Ens, R. T. (2006). As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. *Diálogo Educ, 6*(19), 37-50, Recuperado de http://alfabetizarvirtualtextos.files.wordpress.com/2011/08/as-pesquisasdenominadas-do-tipo-estado-daarte-em-educac3a7c3a3o.pdf.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Metacognición a través de la solución de problemas matemáticos en la escuela Primaria.

Cristina **Sánchez** Montes
Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro
México
cristina.cbeneq@gmail.com

Resumen

Este trabajo describe los resultados obtenidos al implementar actividades que favorecen el desarrollo de la *capacidad metacognitiva*, en estudiantes de educación primaria, por medio de la *solución de problemas matemáticos* con texto. Teniendo lugar en la Escuela Primaria Rafael Ramírez Castañeda, Querétaro, Méx., con una población de 40 alumnos de tercer grado, de los cuales se estudiaron seis casos. Se realizó una investigación-acción, bajo la metodología cualitativa, teniendo como eje el método inductivo. La estrategia *"cuadernillo de secretos matemáticos"*, desarrollada en seis sesiones de trabajo, permitió que los estudiantes analizaran el texto, eligieran los datos funcionales, construyeran una *vía de solución*, explicaran sus decisiones y seleccionaran aquellas palabras secretas que resultaron pieza clave de su solución. Concluyendo que los alumnos requieren trabajar bajo *una secuencia general* que los lleve a la reflexión y que existen conocimientos esenciales que deben ser activados antes de colocarlos frente a un problema.

Palabras clave: Educación primaria, capacidad metacognitiva, problemas matemáticos, solución de problemas, construir vía de solución, explicar procedimiento de solución, secretos matemáticos, secuencia general. **Tema objeto de estudio**

En la *educación primaria*, que forma parte de la Educación básica del Sistema Educativo Mexicano (SEM) y con fundamento en el Plan de estudios 2011, durante el ciclo escolar 20172018, se dio marcha al proyecto de investigación "Desarrollo de la metacognición a través de la solución de problemas matemáticos", con el propósito de dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo desarrollar la capacidad metacognitiva, en estudiantes de 3er grado de primaria, por medio de la solución de problemas matemáticos con texto?, lo que llevó al planteamiento del siguiente

objetivo: *Desarrollar la capacidad metacognitiva*, por medio de la *solución de problemas matemáticos* con texto.

De acuerdo al plan y programa de estudios, referente al Modelo Educativo (2018), se busca que los estudiantes utilicen el pensamiento matemático al formular explicaciones, aplicar métodos, poner en práctica algoritmos (…) afrontar la resolución de un problema hasta entonces desconocido para ellos. Además, se busca que comprendan la necesidad de justificar y argumentar sus planteamientos y la importancia de identificar patrones y relaciones como medio para encontrar la solución a un problema (…) se interesen, se involucren y persistan en encontrar la resolución a los problemas (p.213).

Dado el diagnóstico inicial, en el cual los alumnos reflejan habilidad para el cálculo mental más no para solucionar problemas matemáticos y explicar su procedimiento, se presenta la necesidad de propiciar los espacios necesarios para el constante *análisis y reflexión* por parte de los alumnos durante todas las clases de matemáticas del ciclo escolar, formalizando el proceso con la estrategia del "*cuadernillo de secretos matemáticos*" desarrollado en seis sesiones consecutivas, donde se solicitó a los estudiantes leer los problemas planteados, seleccionar los datos explícitos e implícitos, analizar las preguntas de cada uno, idear un plan de solución, explicar las decisiones tomadas durante el proceso e identificar aquellas *palabras "secretas"* o clave que les permitieron a ellos *construir su vía de solución.*

De esta manera, el presente estudio da una muestra de los resultados obtenidos en la Escuela Primaria Rafael Ramírez Castañeda, turno vespertino, ubicada en la ciudad de Santiago de Querétaro, Qro. México. La institución está integrada por siete grupos, donde se distribuyen 238 estudiantes. De manera general, los resultados del diagnóstico intuitivo, arrojados por el Sistema de Alerta Temprana (SisAT), que consiste en una prueba para evaluar la habilidad en cálculo mental por parte de los alumnos, se observó que el 75% del grupo respondieron acertadamente, sin embargo y a manera de contraste, no demostraron haber reflexionado en problemas matemáticos planteados durante otra prueba.

Al respecto se estudia una muestra intencional, de 6 alumnos de tercer grado, seleccionados bajo los criterios presentes: De acuerdo al diagnóstico instrumental se eligen dos alumnos con *nivel alto de explicación del procedimiento,* dos más con un *nivel intermedio de explicación del procedimiento* y finalmente dos de un *nivel bajo de explicación del procedimiento.* Los primeros explicaron paso a paso el procedimiento y detallaron la razón por la que tomaron ciertas decisiones, los segundos lo hicieron de manera breve y general, omitiendo detalles, los últimos únicamente indicaron el tipo de operación que utilizaron, sin indicar la razón de su aplicación, o bien no explicaron nada.

Fundamentación teórica

Fundamentos conceptuales

Con base en los resultados contrastantes obtenidos del diagnostico, donde más del 50% de los estudiantes tienen resultados favorables en calculo mental pero que al solucionar un problema planteado muestran dificultad y difícilmente explican su procedimiento, surge la iniciativa por realizar un trabajo de investigación para indagar cuáles son aquellos elementos favorables para desarrollar en los niños su *capacidad metacognitiva*, surgiendo el cuestionamiento: ¿qué tan importante es el desarrollo de la metacognición en el ámbito educativo?, bien, un primer

acercamiento a esta respuesta es que éste hecho permite que los estudiantes se mantengan alertas de sí mismos, que se conciban como solucionadores de problemas para que puedan monitorearse y controlar sus procesos mentales. La enseñanza de las habilidades metacognitivas puede significar un gran avance en el logro de los aprendizajes, para ello, "es importante dar la posibilidad a los alumnos de exponer y escuchar la descripción del proceso con el que se llegó al aprendizaje, al descubrimiento del principio o del hallazgo de la solución (Klinger, 1999 citado en Correa Z. & Fancy C. 2002, p. 60).

Por consiguiente, es importante que los *problemas matemáticos* sean diseñados de acuerdo a la realidad de los estudiantes, a su nivel cognitivo y con el objetivo de ser analizado, de acuerdo con Labarrere (1987), un problema matemático consiste en demandar del sujeto una intensa actividad cognoscitiva, ya que no se tiene acceso a la respuesta con sólo utilizar la memoria, lo que obliga a pensar, razonar y encontrar aquellos conocimientos necesarios que conducen a construir una respuesta.

De esta manera, mediante el trabajo con el cuadernillo de secretos matemáticos, se hacen planteamientos asociados al contexto de los educandos, motivándolos a la *solución de problemas matemáticos*, para Labarrere (1987) la solución de un problema es visto como un proceso de pensamiento, siendo indispensable permitir la interacción del alumno con el problema. Es necesario brindar a los alumnos una base, por lo cual se considera a Polya (1965) quien plantea cuatro fases para solucionar un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida.

Capacidad metacognitiva. El término metacognición fue acuñado en 1980 por John Flavell, quien la asumió como el más alto nivel de actividad mental, que controla los otros niveles inferiores, en otras palabras, se identifica con el conocimiento de la actividad cognitiva y el control que se ejerce sobre ella. Así mismo afirma que involucra dos procesos, el primero es el conocimiento metacognitivo, que se refiere al conocimiento que tiene la persona sobre sus propios recursos cognitivos, de lo que se le exige en una situación específica y las estrategias necesarias para actuar con efectividad, en otras palabras, se trata de un "saber qué", de ahí la necesidad por motivar y cuestionar constantemente a los alumnos sobre sus procesos de solución. En el otro extremo tenemos al control cognitivo, el cual hace referencia a la habilidad para manipular o controlar los recursos y las estrategias cognitivas con el fin de asegurar la solución exitosa a un problema, por lo que implica planear, monitorear, revisar y evaluar, todo ello nos lleva al "saber cómo" (Correa Z.& Fancy C. 2002, p. 59)

Al respecto, Hugo Barrantes (2006) realiza un trabajo basado en las investigaciones de Alan Schoenfeld (1985), quien a su vez considera como antecedentes las ideas de Polya (1965). El punto es que para trabajar con la resolución de problemas se deben tomar en cuenta diversos factores o dimensiones, mismos que se presentan a continuación: 1) Recursos, aquellos conocimientos previos que poseen los estudiantes de manera estructurada, resultando importante para el profesor saber cuáles son las herramientas con las que cuenta el aprendiz antes de enfrentarlo a la solución de un problema; 2) Heurísticas, estas son las estrategias que pueden ser usadas para resolver un determinado problema; 3) Control, hace referencia a la capacidad para controlar el trabajo, se debe desarrollar la habilidad para monitorear y evaluar su propio proceso, esta dimensión involucra cinco acciones (entendimiento, creación de un diseño, monitoreo del proceso, puesta en acción del diseño y revisar el proceso de solución); 4) Sistema de creencias, relacionado a las nociones previas sobre las matemáticas, mismas que pueden representar un obstáculo si éstas son

falsas, pues las creencias afectarán la manera en que el alumno se comporte a la hora de enfrentarse a un problema matemático.

Problemas matemáticos con texto. En la tercera categoría, se encuentran los problemas matemáticos, para comenzar tomaremos como referente a Labarrere (1987) , para quien un problema, bajo el sentido psicológico del término, se comprende como toda situación que no puede ser resuelta a partir de la aplicación mecánica de conocimientos, es decir, operando simplemente con la memoria; todo problema implica para el que lo resuelve, la necesidad de realizar un esfuerzo cognoscitivo. (p.19)

Existe una gran variedad de problemas, sin embargo, este documento refiere el uso de dos en específico, el primero es el *problema matemático con texto*, en él se describe cierto hecho de la vida real, empleando un lenguaje común o cotidiano, donde se dan determinados valores de la magnitud que representa la cantidad expuesta, su formulación se acompaña de algunas indicaciones o referencias verbales. Éste tipo de problemas "desempeñan un importante papel en la adquisición de conocimientos y en el desarrollo de habilidades y hábitos, y del pensamiento del alumno". En los problemas con texto, la operación no está indicada, por lo que es necesario hallarla en el proceso de solución (Labarrere, 1987, pp. 19-20). El segundo es el problema de razonamiento, y como su nombre lo indica, estos problemas no pueden resolverse sin una dosis alta de razonamiento, esto es, de análisis lógico, de elaboración de hipótesis e inferencias, y por el hecho de exigir una alta dosis de trabajo mental, este tipo de problemas tiene gran relevancia e impacto en la formación del pensamiento y en la asimilación de los conocimientos matemáticos. (Labarrere, 1987, p. 28).

Solución de problemas matemáticos. Para comprender esta categoría, es indispensable hacer en primera instancia un paréntesis para diferenciar los términos, solución y resolución de problemas, mientras que el primero se refiere al proceso, donde se realizan determinadas transformaciones (operaciones) matemáticas sobre el problema, conduciendo o no a la respuesta correcta, la resolución por su parte es cuando el alumno determina o logra tener la respuesta correcta, sin dar la mayor relevancia al proceso de solución (Labarrere, 1987, p. 31). Por lo tanto, para Labarrere (1987) la solución de un problema es visto como un proceso de pensamiento, donde es punto clave la interacción del alumno con el problema, en el cual éste produce transformaciones no sólo en el plano material externo, sino también en el plano mental interno, todo ello manifestado en forma de nuevos conocimientos o reafirmación de los ya adquiridos, en el desarrollo de determinadas habilidades. Por ejemplo en el caso del cuadernillo de secretos matemáticos, los estudiantes buscan solucionar los problemas planteados, al analizar, seleccionar elementos clave y construir una vía de solución para, finalmente, argumentar su procedimiento de inicio a fin, poniendo énfasis en la razón de su toma de decisiones.

De acuerdo con Polya (1965) existen cuatro fases para solucionar un problema, de las cuales se retoman las tres primera, mismas que tienen relación con ver claramente lo que se pide, captar las relaciones existentes entre los diversos elementos, identificar lo que liga a la incógnita con los datos para poder trazar un plan, posteriormente ponerlo en ejecución y finalmente volver atrás, cuando se encuentre la solución para revisarla y discutirla; a continuación de describen con mayor detalle cada una de ella:

1. *Comprender el problema*: éste debe ser planteado de manera interesante, ni fácil ni difícil, y promover que el alumno desee resolverlo. Una vez planteado, los educandos deben poder separar las principales partes del problema, que son: la incógnita, los datos y la condición, dando nombre a estos elementos. Para finalizar esta fase, debe preguntarse ¿Son suficientes los datos para resolver la incógnita? (p.29). En lo personal, se considera que el alumno debe tener conocimientos previos sobre los algoritmos que utilizará en su solución, esto genera una mayor comprensión del problema.
2. *Concebir un plan*: Se tiene un plan cuando se sabe al menos grosso modo qué cálculos, razonamientos o construcciones se han de efectuar para determinar la incógnita. Lo esencial en la solución de un problema es el concebir la idea de un plan, por su parte las preguntas y sugerencias que el docente haga deben tener por objeto provocar "ideas brillantes" que permitan al alumnado hacer uso de su bagaje de información previa y aplicarla en la situación planteada. (p. 30).
3. *Ejecutar el plan*: Si el alumno ha concebido realmente un plan podrá ejecutarlo individualmente paso a paso, siempre y cuando él mismo haya trabajado en el plan, aunque un tanto ayudado, y si ha concebido la idea final con satisfacción; sin embargo, existe un peligro de que el estudiante olvide el plan, lo que ocurre fácilmente si lo ha recibido completamente del exterior y lo ha aceptado por venir de su maestro. (p. 33). Es importante considerar que, si el alumno no se involucra en la construcción de su plan de acción ante un problema, pasará que será meramente un ejecutor de pasos indicados y no existirá un razonamiento del mismo.

Diseño y metodología

El presente documento está inscrito en el paradigma cualitativo, en éste enfoque se incluyen una variedad de concepciones, visiones, técnicas y estudios no cuantitativos, Hernández (2010, p. 17). Su desarrollo es posible gracias al *estudio de casos,* el cual permite elegir intencionalmente a los alumnos más representativos de los tres grupos analizados durante la investigación. Teniendo como estrategia implementada la investigación-acción, su beneficio principal es que ésta permite analizar las acciones humanas y las situaciones sociales experimentadas (Elliot, 2000, p. 4). Es posible hacer una conexión entre las categorías teóricas surgidas de la revisión bibliográfica y las categorías empíricas encontradas mediante el análisis e interpretación de los hallazgos emergentes.

La recogida de información se obtuvo a partir de la revisión de los cuadernillos de los estudiantes, que como ya se menciono con anterioridad fueron llamados *cuadernillos de secretos matemáticos,* donde los alumnos analizaron, seleccionaron elementos relevantes, construyeron una vía de solución, señalaron los secretos encontrados (claves) y explicaron su toma de decisiones, durante el procedimiento ejecutado. Del mismo modo, se trabajó mediante la observación participante y la recogida de datos por medio de la bitácora de clase, donde se anotó todo aquello relevante del discurso desarrollado por los estudiantes.

Resultados

Los principales hallazgos obtenidos durante la intervención, son presentados a continuación con base en las tres categorías generales explicadas en la fundamentación teórica; en cuanto a los *problemas matemáticos*, se observa que la forma de pensar del grupo es diversa y por tanto

significativa, pues perciben de formas diferentes los planteamientos, lo que propicia una variedad de soluciones interesantes al momento de compartir con el resto de los compañeros; "Un problema matemático es aquel que demanda del sujeto una intensa actividad cognoscitiva" (Labarrere, 1987, p. 19) partiendo de éste supuesto, se reconoce que los *conocimientos previos* que tienen los estudiantes son clave fundamental al momento de tener enfrente un problema matemático, pues sus recursos cognitivos permiten la *construcción de la vía de solución*, así mismo los niños demostraron habilidad para localizar tanto los datos explícitos como los implícitos (aquellos ocultos) de cada planteamiento, lo que habla de un nivel de análisis que va más allá del plano superficial, esto denota *una reflexión constante,* que se encuentra relacionada con la habilidad que desarrollaron para hacer conexión entre las *"palabras secretas"* (clave) y el tipo de operación a realizar. Otro punto importante a considerar es que al analizar los problemas tuvieron la oportunidad de mejorar su percepción de los mismos, ya que desarrollaron su habilidad por *relacionar información* contenida en los distintos momentos del problema, lo que los motivó a *ser conscientes* de sus decisiones y a tomar en cuenta todo dato posible que funcione como apoyo en la solución.

Con relación a la *solución de problemas***,** es importante seguir considerando la diferencia entre resolución y solución, pues mientras la primera se refiere meramente a obtener el resultado correcto, la segunda por su parte presta atención al proceso realizado para llegar a un resultado (Labarrere, 1987), de ahí que se brindó mayor interés a la solución, de la cual se encontró que es favorable para los alumnos contar con una *secuencia general de análisis*, ya que conocer pasos clave, es esencial para organizar sus ideas, prestar atención a sus decisiones e idear un plan de solución mejor estructurado, asegurando de esta manera un mayor porcentaje de éxito a la hora de obtener el resultado final del problema. Por su parte Polya (1965), hace mención de cuatro fases para solucionar un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Considerando las tres primeras, para que los alumnos lograran concebir su plan de acción, ayudó el hecho de analizar las palabras que tiene cada problema, de ahí resultaron los *secretos matemáticos*, mismos que en un apartado de su cuadernillo mencionaron junto con su explicación, por ejemplo una alumna escribió: "*5 cada uno" me ayudó a saber que hiciera una multiplicación* (Alumna A, 3°A), así mismo otra alumna menciona : *dividí porque la mamá de Sofía tenía que sentar a los invitados en las sillas, así que era una repartición por eso dividí.* (Alumna B, 3°A).

Otro punto a tener en cuenta es que los alumnos requieren *monitoreo* por parte del docente al momento de ejecutar su plan de solución y ese apoyo extra que piden a la parte docente va disminuyendo en la medida que se adentran y familiarizan más con la *secuencia general* de análisis, así como cuando mantienen su interés, atención y auto-vigilancia permanente, aunado a este fenómeno es posible darse cuenta de que el trabajo entre pares permite favorecer zonas de desarrollo próximo, pues al tener la oportunidad de socializar sus ideas y explicaciones, se permite aprender en conjunto y tener en cuenta otras vías de solución diferentes a la propia, lo que abre un panorama mayor en cuanto a la solución de problemas matemáticos. Para cerrar con este punto, es relevante hacer mención de la importancia existente en la necesidad de que los estudiantes recuerden en todo momento la pregunta del problema, esto para que mantengan un *control* de su propio procedimiento y así verificar que siguen en el camino correcto para llegar al resultado final.

Otros aspectos sobresalientes, son los relacionados a la *capacidad metacognitiva***,** por ejemplo que es necesario el anclaje de conocimientos previos con las exigencias del problema, al igual que para favorecer el desarrollo de ésta capacidad, se requiere que las tareas estén adecuadas a las características cognitivas de los alumnos, esto viene a complementar lo mencionado por Flavell (1985) para quien el conocimiento metacognitivo se refiere a la información, procedural y declarativa, la cual guía la actividad cognitiva conformada por creencias y conocimientos adquiridos a través de diferentes experiencias vitales, que se han almacenado en la memoria de largo plazo.

Por otro lado y de acuerdo con las dimensiones de la metacognición, con base en los recursos y las heurísticas que explica Barrantes (2006), en este caso los *recursos* son relevantes, pues todo conocimiento matemático resulta funcional, algorítmicos y no algorítmicos, las *heurísticas* resultan interesantes, ya que conforme el alumno aprende estrategias y técnicas, éstas le permiten crear con mayor rapidez una vía de solución, finalmente se retoma Schoenfeld (1985) para explicar el *control* sobre las decisiones tomadas, al momento de ser explicadas ya sea de manera oral o escrita, lo que compromete al estudiante a analizar a profundidad el problema y a definir cuidadosamente su estrategia de solución.

Para cerrar, los diferentes tipos de conocimiento que el alumno va experimentando son relevantes en la siguiente medida: encontrar *palabras secretas* les permite saber qué hacer (conocimiento declarativo), una vez que saben qué hacer, es momento de elegir una o más operaciones matemáticas, de las cuales requieren tener conocimeinto sobre su procedimiento algorítmico (conocimiento procedimental), promoviendo la habilidad para manipular o controlar los recursos y las estrategias cognitivas con el fin de asegurar la solución exitosa a un problema, por lo que implica planear, monitorear, revisar y evaluar, todo ello nos lleva al "saber cómo" (Flavel,1980). Al tener diversos datos, deben enfocarse en las consignas o preguntas para decidir el momento en que utilizarán cada procedimiento conocido, lo que representa un *saber cuándo* (conocimiento condicional), por ejemplo una alumna menciona: *multipliqué 42 X 12 y me dio 504, hice una multiplicación porque decía en el problema que quería llenar las bolsas con 12 dulces y la pregunta decía cuántos dulces necesitaba, entonces como eran 42 invitados por eso multipliqué* (Alumna B, 3°A).

Conclusiones

Por medio de un proceso analítico, los principales hallazgos del trabajo de investigación sobre la temática del desarrollo de la "Metacognición a través de la solución de problemas matemáticos" permiten afirmar las siguientes aportaciones:

- Es importante que los alumnos conozcan y manejen el procedimiento algoritmos convencionales, para que puedan vincularlos con mayor rapidez a las palabras clave de los problemas e idear la vía de solución.
- Es necesario que los alumnos recuerden en todo momento la pregunta del problema para tener control de la solución.

- Cuando los alumnos tienen una *secuencia general* de análisis como base, mientras más se apropien de ella, menor necesidad tendrán de preguntar al docente, pues serán capaces de monitorear autónomamente su propio procedimiento.
- Conforme el alumno aprende estrategias y técnicas, éstas le permiten crear con mayor facilidad una vía de solución.
- Para desarrollar la capacidad metacognitiva, se requiere que los problemas estén adecuados a las características cognitivas del alumno.
- Al momento que se le pide a un estudiante explicar la manera en que obtuvo el resultado, esto lo compromete a analizar a profundidad el problema, incluyendo las palabras *secretas* (clave), así como monitorear constantemente su estrategia de solución.

Con estas afirmaciones es posible llegar a la conclusión de que los alumnos, independientemente de su grado escolar, pueden desarrollar su capacidad metacognitiva a través de la solución de problemas matemáticos, pues ello implica no solo resolver usando información memorizada, sino que se trata de algo más complejo, que puede ser similar a un "entrenamiento del pensamiento", el cual no es de ninguna forma riguroso, sino todo lo contrario, los motiva a ver más allá de lo superficial, a analizar los datos tanto explícitos como implícitos, a buscar entre sus recursos cognitivos, partir de su realidad y contexto, así como de sus conocimientos previos para construir vías de solución que deben ser argumentadas, permitiendo a los estudiantes estar en alerta permanente.

Referencias y Bibliografía

Barrantes, Hugo (2006). *Conferencia sobre Resolución de problemas: El trabajo de Allan Schoenfeld*. Recuperado de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno1/Cuadernos%201%20c%204.pdf

Correa Z. & Fancy C. (2002). *Hacia una conceptualización de la metacognición y sus ámbitos de desarrollo.* Chile: Horizontes Educacionales. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=97917885008

Elliot J. (2000) *La investigación – acción en educación*. España: Morata . Recuperado de: http://www.terras.edu.ar/biblioteca/37/37ELLIOT-Jhon-Cap-1-y-5.pdf

Hernández Sampieri R., Fernández Collado, C. y Baptista L., P. (2010). *Metodología de la sdinvestigación* (5ª. Edición). México : McGraw-Hill . Recuperado de: https://investigar1.files.wordpress.com/2010/05/1033525612-mtis_sampieri_unidad_11.pdf

Labarrere Sarduy, A. F. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas de matemáticas en la escuela primaria.* La Habana: Pueblo y educación.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: problema solving, metacognition, and sense making in mathematics. New York : D. Grows* . Recuperado de: http://howtosolveit.pbworks.com/f/Schoenfeld_1992%20Learning%20to%20Think%20Mathematically.pdf

Secretaria de Educación Pública (2011). *Plan y programas de estudios 2011 de Educación primaria. Programa de estudios 2011*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública (2018). *Modelo Educativo: Educación Básica.* México: Autor. Recuperado de https://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/index-edubasica-niveles.html

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Construcción de trayectorias en el plano con *Scratch*

María **Mina**
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
mdelvmina@gmail.com
Mónica **Villarreal**
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) - Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, Universidad Nacional de Córdoba
Argentina
mvilla@famaf.unc.edu.ar

Resumen

Presentamos los resultados de un trabajo de investigación de naturaleza descriptiva acerca de la matemática que aparece en simulaciones de situaciones de la realidad diseñadas por estudiantes de primer año de enseñanza secundaria, usando el software *Scratch* (https://scratch.mit.edu/). En particular, reportamos aquí acerca de las estrategias de construcción de trayectorias en el plano implementadas para definir el movimiento de los personajes de la simulación. Caracterizamos esta experiencia como una *tarea de exploración*. El análisis realizado revela el producto de un colectivo *estudiantes-con-Scratch* donde aparecen diversos procedimientos de traducción, condicionadas por la tecnología a disposición, de las representaciones de los estudiantes acerca de movimientos de objetos de la realidad, en puntos que definen trayectorias para esos movimientos.

Palabras clave: simulaciones, software *Scratch*, tareas de exploración, enseñanza secundaria

Introducción

El software *Scratch*, desarrollado por el Grupo *Lifelong Kindergarten* del Instituto Tecnológico de Massachusetts, es un lenguaje visual de programación, de fácil aprendizaje aún para niños pequeños, que permite la creación de modelos, simulaciones, historias interactivas, juegos o animaciones (Maloney, Resnick, Rusk, Silverman & Eastmond, 2010). En la Figura 1 aparece una secuencia de comandos de *Scratch* aplicada al personaje que allí aparece (un gato), donde luego de desplazarlo 10 pasos con el comando *"mover"*, el personaje pregunta "¿Llueve?".



Figura 1. Secuencia de programación con *Scratch.*

Con este tipo de tecnología, los estudiantes de enseñanza secundaria disponen de un recurso digital para la creación de simulaciones de situaciones de la realidad, construyendo la secuencia de códigos apropiada. Un caso particular de construcción de simulaciones se consigue con la programación en dispositivos digitales tales como *Scratch*. Autores como Biembengut & Hein, (2003), y Maltempi & Dalla Vecchia (2013), reconocen en una secuencia de programación un caso particular de modelo matemático que intenta traducir, aún de manera simplificada, la realidad simulada.

En esta comunicación buscamos responder la pregunta acerca de qué matemática aparece en las producciones de estudiantes de enseñanza secundaria cuando se los invita a diseñar con *Scratch* una simulación de una situación de la realidad elegida por ellos. El reporte que presentamos contiene parte de los resultados obtenidos en un trabajo de investigación que explora y describe esta matemática. Aquí, en particular, presentamos cuáles son los conocimientos y estrategias puestas en juego por los estudiantes en la construcción de trayectorias en el plano para los personajes que aparecen en sus simulaciones.

Marco teórico

Adoptamos la perspectiva epistemológica de *humanos-con-medios* (Borba & Villarreal, 2005) para analizar la experiencia de construir con *Scratch* una simulación de una situación de la realidad. Según estos autores, el constructo *humanos-con-medios* hace referencia a un colectivo conformado por humanos y sus tecnologías como la unidad básica e indisoluble productora de conocimiento. En esta unidad cognitiva los medios con los cuales se produce conocimiento aparecen no meramente como recursos auxiliares facilitadores de tareas, sino como algo esencial, constitutivos del conocimiento producido (Villarreal, 2012).

Desde una perspectiva pedagógica, una tarea en donde se propone a los estudiantes la selección de un tema de la realidad para simular puede considerarse como una *tarea de exploración* (Ponte, Branco & Quaresma, 2014) en donde las metas de aprendizaje no aparecen bien delimitadas y las soluciones a los problemas son inciertas. Según estos autores, este tipo de tareas se caracteriza por promover en los estudiantes la construcción de nuevos conceptos, representaciones, o procedimientos, o el uso creativo de conceptos ya aprendidos. Así, en tales situaciones de enseñanza, los estudiantes se involucran en actividades que invitan a "descubrir regularidades, relaciones, semejanzas y diferencias con el fin de obtener generalizaciones" (Ponte & Matos, 1992, p. 239). En una *tarea de exploración*, el aprendizaje de conocimientos y procedimientos se evidencia en la fluidez con la que los estudiantes llevan a cabo procesos de traducción de una forma de representación en otra (Ponte et al, 2014).

Procedimientos Metodológicos

La investigación se llevó a cabo en un curso de primer año de enseñanza secundaria conformado por 21 alumnos de 12-13 años de edad (11 mujeres y 10 varones) en una escuela pública de gestión privada de la ciudad de Córdoba, Argentina. La primera autora de este trabajo era la profesora a cargo. En las clases de ese curso era frecuente el uso de recursos para aprender matemática tales como hojas de cálculo, graficadores dinámicos, calculadoras, Internet, entre otros. Actividades relativas a los elementos de un sistema de coordenadas cartesianas, ubicación y lectura de puntos en el plano ya habían sido objetos de enseñanza en ese curso con anterioridad a la experiencia. Como parte de las actividades curriculares, se invitó a los estudiantes a formar grupos, elegir una situación de la realidad de su interés y construir con *Scratch* una simulación de la misma. Los estudiantes no habían tenido experiencia previa en programación. Antes de comenzar con la tarea, se destinaron tres clases de 40 minutos cada una donde se mostró el modo de funcionamiento de *Scratch* mediante ejemplos elaborados por la profesora para resolver cálculos, ecuaciones, y construcción de figuras geométricas mediante el empleo de comandos de desplazamientos y giros.

Se destinaron 10 clases, de 40 minutos cada una, para que los estudiantes construyeran sus simulaciones. La actividad se desarrolló en el laboratorio de informática de la escuela, en el cual había computadoras suficientes para que los estudiantes trabajaran en pares (salvo un grupo que quedó conformado por tres estudiantes). Los estudiantes perfeccionaban su trabajo de una clase a otra. De las 10 clases, dos se destinaron para que los estudiantes relataran a sus compañeros el estado de avance del trabajo y el uso de estrategias exitosas que habían implementado.

Se obtuvieron 10 documentos de *Scratch* con el resultado final de la simulación por cada grupo, junto a otros tres o cuatro documentos adicionales como versiones previas. Los resultados que aquí se reportan son el producto del análisis de estos documentos.

Para indagar acerca de la matemática que apareció en las simulaciones construidas por los estudiantes para implementar, en particular, trayectorias de objetos en el plano, adoptamos una perspectiva de *arqueología matemática* (Skovsmose, 1992), es decir, de búsqueda de las raíces matemáticas presentes en las secuencias de programación diseñadas por los estudiantes. Esta búsqueda se acompañó con la mirada analítica de los efectos y acciones que aparecieron en las simulaciones. Realizamos un análisis buscando establecer relaciones entre los movimientos y acciones observados en los personajes animados, y los comandos del software implementados para conseguirlos.

Resultados y análisis

En este estudio nos focalizamos en el análisis de simulaciones que muestran la producción de diversas trayectorias de personajes en la pantalla de una computadora. Consideramos una *trayectoria* en el plano como el lugar geométrico de los puntos del plano *(x, y)* que describen las posiciones sucesivas de un objeto en movimiento. Este conjunto de puntos queda definido, en nuestro caso, mediante una secuencia de comandos de programación en *Scratch* que produce el movimiento de objetos en el plano de la pantalla. A continuación, describiremos cuatro simulaciones que muestran el uso de estos comandos y las trayectorias generadas. Posteriormente, analizaremos estas producciones en conjunto. Cada simulación se identificó con un título que intenta describir su contenido.

¿Bailamos?: una trayectoria horizontal

La Figura 2 muestra, a la izquierda, una escena en la cual dos jóvenes se encuentran bailando y a la derecha parte de una secuencia de programación que determina los movimientos del joven. En esa secuencia se observa el uso de dos comandos de movimiento: *"ir a x:... y:..."* y *"deslizar en... segs a x:... y:..."*. Luego de ejecutar los comandos *ir a x:-270 y: -8* y *esperar 12 segundos*, mediante el comando *deslizar en 2 segs a x:-40 y:*-8, el muchacho fue llevado en línea recta a la posición *x=-40*, *y=-8*, antes de que exprese *"¡Hola!, bailemos juntos"*. Los valores iguales (-8) para la coordenada *y* de estos puntos, provocan el movimiento horizontal del personaje.



Figura 2. Implementación de movimiento a un punto de la pantalla.

Un capítulo de los Simpson^{TM}: trayectoria a lo largo de una poligonal

Una de las simulaciones producida por un grupo muestra una secuencia de la serie televisiva *Los Simpson*, en donde uno de sus personajes principales, Homero, sale de su casa siguiendo la senda que se encuentra frente a ella (ver Figura 3). Este escenario resultó de un proceso de edición, llevada a cabo por las estudiantes, a partir de imágenes obtenidas en Internet, puesto que el software no las traía incorporadas en su librería de escenarios y personajes.



Figura 3. Secuencia de posiciones de Homero Simpson a lo largo de la senda de salida de su casa.

En nuestra exploración acerca de la estrategia empleada por los estudiantes para que el personaje recorra una trayectoria poligonal que siga la forma geométrica de la senda que aparece en la Figura 3, encontramos la definición de dos segmentos de recta (ver Figura 4[1]), de extremos $A = (-30, -79)$ y $B = (-22, -109)$ y, $B = (-22, -109)$ y $C = (18, -116)$, respectivamente. La secuencia de programación que se ve a la derecha, en la Figura 4, muestra cómo se logró la trayectoria de Homero que se observa en la Figura 3.

[1] Los sistemas de coordenadas cartesianas de las Figuras 4, 6 y 8, y los puntos que se observan en ellos, fueron elaborados por las autoras como parte del proceso de arqueología, tomando la información de las coordenadas que aparecen en los comandos de movimientos respectivos.

De esta manera, el personaje describe un movimiento a lo largo del camino en dos tramos rectos, seguido posteriormente de un movimiento horizontal paralelo al eje de las abscisas del sistema de referencia, definido por el comando *"mover 50 pasos"*, que llevará al personaje hacia el automóvil.

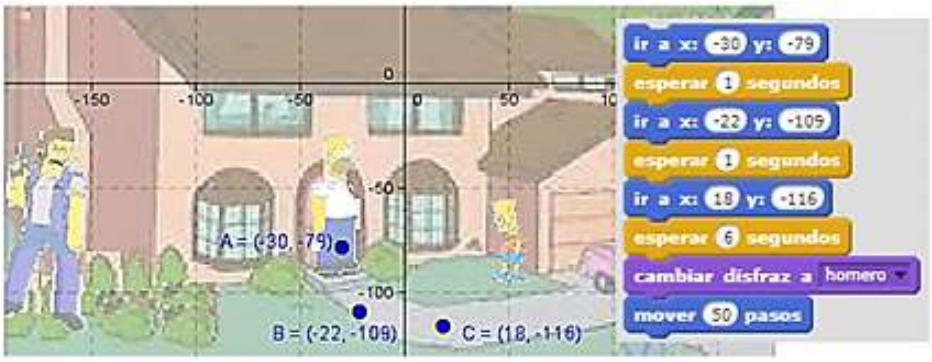


Figura 4. Coordenadas de los puntos de la trayectoria del personaje.

La habilidosa jugadora de básquet: composición de trayectorias

Un grupo de estudiantes diseñó una secuencia de programación para simular el movimiento de una pelota durante un juego de básquet (ver Figura 5).

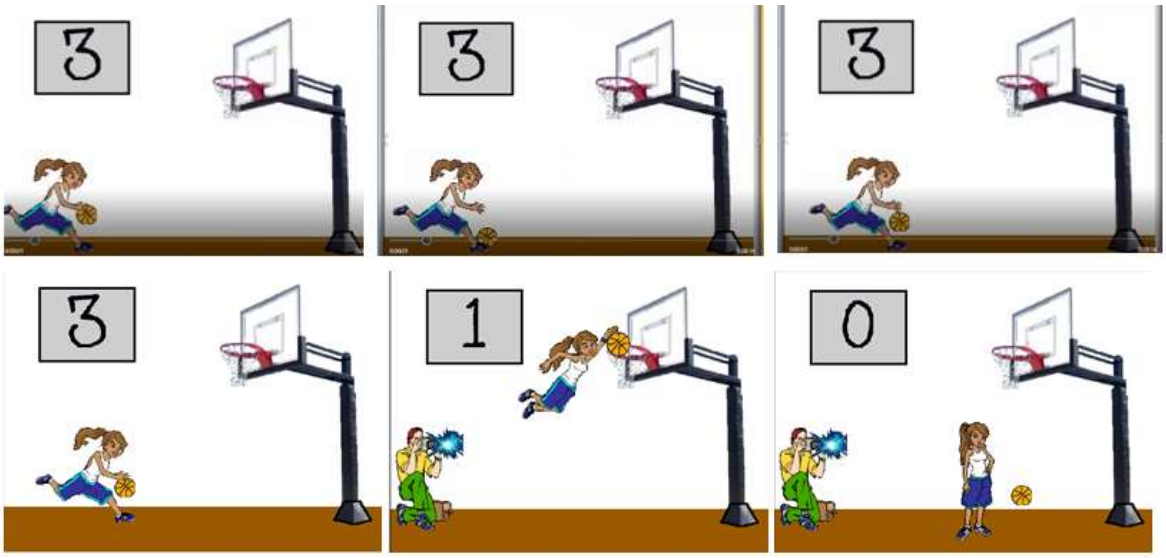


Figura 5. Trayectoria de una pelota de básquet.

Los estudiantes construyeron, para la pelota de básquet, dos instancias distintas de una trayectoria compuesta: una para el "dribbling", y otra para el rebote en el suelo, posterior al enceste. La Figura 6 muestra, para cada una de estas porciones de la trayectoria, las secuencias de programación creadas y las coordenadas de los puntos definidos por los estudiantes representados en sendos sistemas de coordenadas. En el caso del dribbling (Figura 6 (a)) se definen dos segmentos de recta de extremos *A*= (-132, -88) y *B* = (-102, -129) y, *B*= (-102, -129) y *C* = (-81, -91) que muestran el rebote y avance de la jugadora con la pelota. En la Figura 6 (b) se muestra la secuencia de comandos que producen el movimiento de rebote vertical de la pelota en el suelo luego del enceste. Se observa que la trayectoria vertical se genera al mantener fijo en 83 el valor de la abscisa de cada punto.

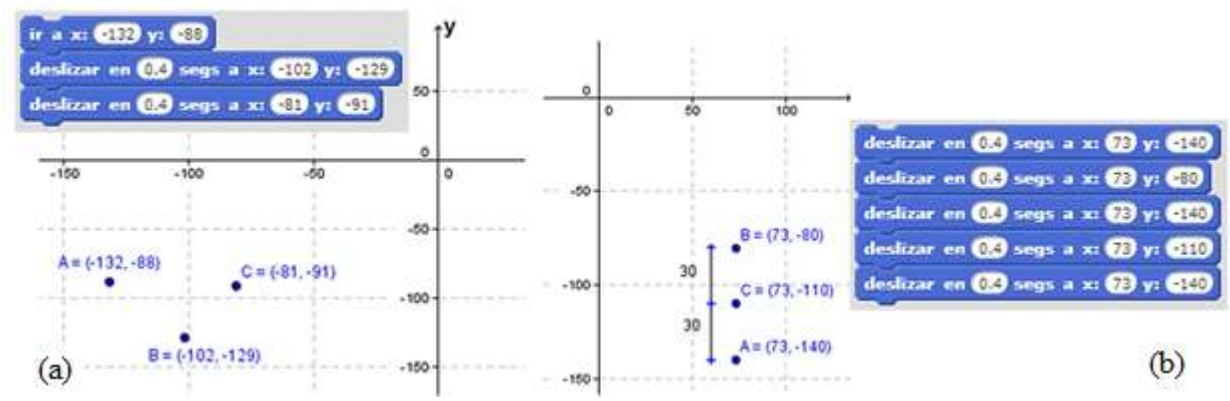


Figura 6. Coordenadas de los puntos de una trayectoria compuesta para una pelota de básquet.

Persecución de terror en cielo nocturno: trayectoria cuasi-elíptica

En otra de las simulaciones con *Scratch* apareció una bruja que vuela por el cielo nocturno huyendo de un murciélago que la persigue (Figura 7).



Figura 7. Selección de una secuencia de persecución.

La bruja describe varias vueltas en la pantalla, siguiendo en sentido anti horario, una trayectoria cuasi-elíptica definida por una sucesión de puntos. La Figura 8 muestra la secuencia de programación elaborada por los estudiantes para generar la trayectoria de la bruja y la representación, en un sistema de coordenadas cartesianas, de los puntos que pertenecen a su recorrido por la pantalla. En la sucesión de puntos que muestra el sistema de coordenadas de la Figura 8 se aprecia la simetría con respecto a los ejes coordenados que caracterizan a los pares de puntos.

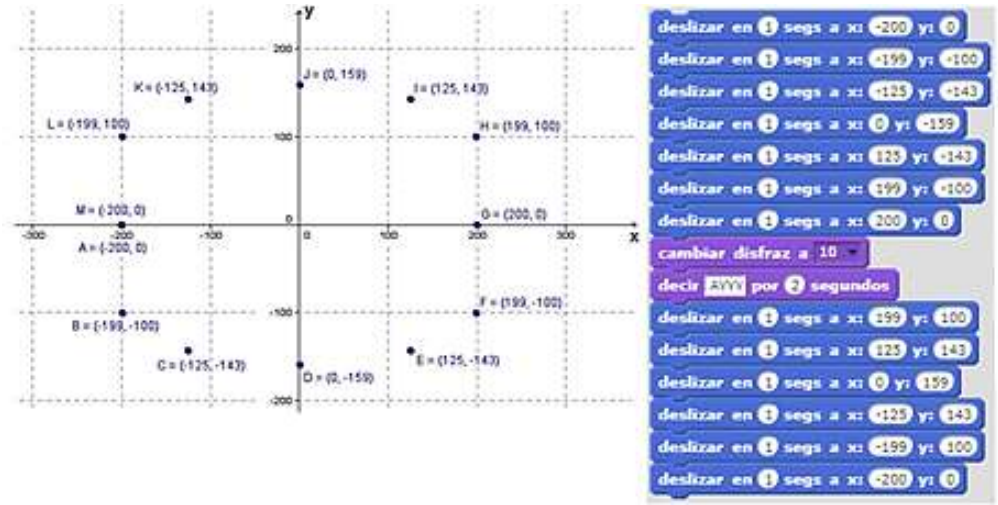


Figura 8. Trayectoria cuasi-elíptica definida por una serie de puntos que pertenecen a ella.

Breve análisis conjunto de las producciones de los estudiantes

El proceso de definir un conjunto de puntos para crear diversas trayectorias resultó facilitado por la posibilidad que brinda *Scratch* de leer, en la misma pantalla, las coordenadas que definen una determinada posición cuando se ubica el mouse sobre tal posición. Esta información, que aparece en la forma *x: … y:…*, para cada instancia del movimiento de un personaje, fue traducida por los estudiantes en valores para los argumentos en los diferentes comandos de movimiento de programación que utilizaron.

Este simple recurso del software habilitó a que los estudiantes pudieran experimentar con distintas posiciones para sus personajes, según una trayectoria premeditada, y descubrir, tal como lo señalan Ponte y Matos (1992), regularidades, relaciones, semejanzas y diferencias en las coordenadas de los puntos para crear movimientos particulares obteniendo generalizaciones. Por ejemplo, puntos ubicados en una recta paralela al eje de las ordenadas mantienen la misma abscisa y esto permite generar movimientos verticales o, puntos simétricos respecto al eje de las ordenadas (o abscisas), tienen las mismas ordenadas (o abscisas), lo cual es de utilidad para generar trayectorias que muestren simetrías. Estas dos ideas se evidencian en su aplicación repetida y sistemática en la simulación del rebote vertical de la pelota de básquet (Figura 6), en el primer caso, o en la trayectoria semi-elíptica seguida por la bruja (Figura 8), en el segundo caso. Una valoración análoga puede realizarse para trayectorias paralelas al eje de las abscisas, como la del joven de la Figura 2, definiendo puntos de igual ordenada. En el caso de Homero, la posibilidad dada por el software de insertar una imagen particular habilitó la creación de una trayectoria por tramos a lo largo de una senda.

Por otra parte, los comandos de movimiento fueron incluidos en la programación en vínculo con otros que permiten dar mayor realismo a las simulaciones. Por ejemplo, la definición de puntos para el movimiento de la bruja, permitió que sus coordenadas establecieran, a su vez, instancias para el cambio de orientación de la bruja. La Figura 7 muestra cómo el personaje apunta a la derecha o a la izquierda en distintas instancias de su movimiento. Esto es conseguido con el uso del comando *"cambiar disfraz a 10"* que puede distinguirse en el primer bloque de color morado de la Figura 8, luego de que la posición del personaje fuera (200,0), como se muestra en el bloque del comando inmediatamente anterior.

Este tipo de generalizaciones para las características de las coordenadas de puntos del plano no fueron objeto de enseñanza previa a la construcción de las simulaciones con *Scratch*. La fluidez con que los estudiantes llevaron a cabo procesos de traducción de una forma de representación en otra (Ponte et al, 2014) con la herramienta a disposición, evidencia la conformación de colectivos de *estudiantes-con-Scratch* como productores de estas trayectorias particulares. Las traducciones que se evidenciaron en los trabajos de los estudiantes fueron variadas. Por ejemplo, la traducción de una trayectoria imaginada a una colección de puntos en el plano y el uso de las regularidades encontradas en las coordenadas de los puntos al considerar ciertas trayectorias. O la traducción de una colección de puntos que describen un movimiento deseado en argumentos para los comandos de *Scratch* que, siguiendo una secuencia adecuada, permiten reproducir la trayectoria buscada.

Conclusiones

Teniendo en cuenta las características de una *tarea de exploración* según la perspectiva de Ponte et al (2014), podemos afirmar que los resultados presentados proporcionan evidencia de la aplicación de un contenido conocido (el sistema de coordenadas cartesianas y sus elementos)

de manera creativa y en una situación completamente nueva para los estudiantes, apareciendo la matemática como necesidad de responder cuestiones del tipo ¿cómo hago para qué...? La actividad puede reconocerse como una propuesta que brindó autonomía a los estudiantes en la selección del tema a simular, y en la cual no se previó un contenido matemático específico como objeto de enseñanza. Los estudiantes tuvieron que apelar a representaciones conocidas (puntos en el plano definidos por pares ordenados en un sistema de coordenadas cartesianas) y explorar otras nuevas donde fue necesario otro formato de representación para usar los comandos de *Scratch.*

Para finalizar, reconocemos que la tarea propuesta a los estudiantes de construir con *Scratch* una simulación de alguna situación de la realidad, habilitó exploraciones informales con el recurso que permitieron definir trayectorias en el plano a través de conjuntos de pares ordenados *(x, y)*. Es esperable que la construcción de trayectorias más elaboradas, tales como, circulares, hiperbólicas, parabólicas, sinusoidales, etc., se mantengan fuera del alcance de alumnos jóvenes como los que participaron en esta experiencia. Sin embargo, los ejemplos anteriores demuestran un estudio minucioso del movimiento deseado por los estudiantes para sus personajes, y la traducción del mismo a las coordenadas necesarias para implementar una secuencia de puntos apropiada. Coincidiendo con Papert (1995), estas exploraciones podrían facilitar el acceso fututo a modos más formales de definir trayectorias en el plano, como lo son las expresiones algebraicas que las representan.

Referencias

Biembengut, M. & Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática no Ensino,* San Pablo: Editora Contexto.

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the re-organisation of mathematical thinking: Information and communication technologies, modelling, experimentation and visualisation.* Nueva York: Springer.

Maloney, J., Resnick, M., Rusk, N., Silverman, B., & Eastmond, E. (2010). The scratch programming language and environment. *ACM Transaction on Computing Educ*ation, 10*(4)*

Maltempi, M. V. & Dalla Vecchia, R. (2013). About mathematical modeling in the reality of the cybernetic world. *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education,* 1097-1106.

Papert, S. (1995). *La Máquina de los Niños: Replantearse la Educación en la Era de los Ordenadores.* Barcelona: Paidós Ibérica.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations. En J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 239-254). Berlin: Springer.

Ponte, J., Branco, N. & Quaresma, M. (2014). Exploratory activity in the mathematics classroom. En Y. Li, E. Silver, & S. Li. (Ed.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 103-125). Dordrecht: Springer.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una Filosofía de la Educación Matemática Crítica.* Bogotá: Una Empresa Docente

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Revista Virtualidad Educación y Ciencia,* 3*(5),* 73-94.



Diferentes representações na solução de uma tarefa de contagem

Natália Alcazar de **Matos**
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
nalcazarm@gmail.com

Mariana **Moran**
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
mmbarroso@uem.br

Valdirene Maria dos **Santos**
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Brasil
valdirene_santos2@hotmail.com

Resumo

Ao se deparar com um problema de geometria com o apoio de uma figura, o aluno precisa criar em sua mente estratégias que o auxiliem em sua solução, o que lhe permite recorrer à diversas representações semióticas como ferramentas de visualização. Este trabalho investigou, a partir da visualização figural, as representações semióticas que alunos do 7o e 8o ano do Ensino Fundamental, utilizam para resolver um problema de contagem. A metodologia adotada é de natureza qualitativa, com análise dos dados descritiva e interpretativa. A tarefa foi aplicada a 70 alunos, em duplas, num contexto de sala de aula de matemática. Para a análise dos dados, utilizamos os registros de representação semiótica de Duval e a concepção do termo "visualização" adotada por Isabel Vale, com base em alguns pesquisadores da área. Nos resultados observamos que a língua materna foi a representação mais utilizada e a algébrica, a menos utilizada.

Palavras-chave: Representações Semióticas, Visualização, Figura, Ensino Fundamental.

Introdução

Num cotidiano de sala de aula de matemática, a visualização de objetos geométricos e dos resultados matemáticos que existem, é uma necessidade para que se possa compreender os problemas propostos e utilizá-los nos diversos ramos das ciências e evidentemente da própria matemática. Segundo Vale (2014, p. 121), atualmente já não é mais suficiente que os

alunos se restrinjam apenas a resolver problemas rotineiros realizando cálculos e memorizando fatos ou procedimentos. É preciso ser capaz de reconhecer e definir problemas, gerar vários caminhos para chegar a uma solução, identificar os mais eficientes ou elegantes e comunicar os resultados. Estas capacidades podem ser cultivadas e desenvolvidas, desde que se proporcionadas oportunidades de aprendizagem apropriadas para despertar o potencial criativo, inovador e crítico. Destaca-se aqui, então, o potencial das tarefas como um segmento da sala de aula, cujo objetivo é despertar a atividade dos alunos de modo a promover um ambiente que proporcione tais oportunidades.

De acordo com Stein e Smith (2009), uma tarefa é definida como "um segmento da actividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular" (p.22). Podendo ser abertas ou fechadas, tratar de problemas, exercícios, execução de procedimentos ou aplicabilidade de conceitos. Dentre os vários elementos discutidos entre os pesquisadores como fatores que influenciam a aprendizagem de matemática, tem-se que as tarefas têm ganhado espaço significativo, recebendo atenção de vários países que buscam promover o desenvolvimento da educação matemática, conforme apontam Cyrino e Jesus (2014). Apesar disso, são recentes os estudos a respeito deste tema no Brasil. Também Vale (2014), afirma que as tarefas influenciam a forma como os alunos aprendem, principalmente se forem relacionadas com a resolução e a formulação de problemas que podem levar a compreensão de conceitos e ao mesmo tempo incentivar o desenvolvimento de dimensões do pensamento criativo e ressalta: "a aprendizagem depende fortemente do professor e das tarefas que este propõe" (p. 122).

Com base em Ponte (2014), destacamos que na resolução de uma tarefa é de fundamental importância o modo como os alunos interpretam as representações indicadas nos enunciados e como criam e interpretam as suas próprias representações. Em particular, no âmbito da geometria, o forte apelo visual dos problemas oportuniza que o aluno recorra à diversas representações semióticas como ferramentas de visualização para sua solução, uma vez que: "Visualização é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre fotos, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de desenvolver ideias anteriormente desconhecidas e entendimentos avançados" (Arcavi, 1999, p. 26).

Assim, corroborando também com Duval (1999), temos que o visualizar pode permitir que os alunos desenvolvam flexibilidade para percorrer entre as diferentes representações semióticas, pois a "visualização refere-se a uma atividade cognitiva que é intrinsicamente semiótica" (p. 9).

O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval deu início à Teoria dos Registros de Representação Semiótica em 1986 quando se deu conta de que na matemática trabalhamos somente com as representações de seus objetos e não com os objetos propriamente ditos (Freitas &Rezende, 2013). Dessa forma, pensando em impedir que os alunos confundam o objeto matemático com a sua representação, Duval enfatiza a importância de se trabalhar com representações variadas que não limitem a capacidade de compreensão e aprendizagem mesmo sem a existência física desses objetos.

Em se tratando da geometria, Duval (2012) esclarece que ao se visualizar um desenho de um objeto geométrico, se este for tridimensional a sua representação será bidimensional e deste modo, perceber as características particulares desse objeto, como regularidades, paralelismos, ortogonalidades etc., não é uma tarefa muito simples. Por isso, o pesquisador defende a necessidade do conhecimento de várias representações de um mesmo objeto para que suas propriedades e características sejam exploradas auxiliando, assim, na compreensão e

na construção do conhecimento matemático. Como registros de representação, Duval (2011) elenca: registro figural (RF) – "as representações produzidas para que possamos 'ver' (p. 84), sendo as figuras em geometria, as mais naturais; registro simbólico – pode ser visto na forma de representações numéricas (RN) e algébricas (RA); registro da linguagem materna (RLM) – "constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento" (p. 83) e pode ser considerado como um enunciado de um teorema, a descrição de algumas propriedades, a explicação para a solução de uma tarefa etc; e o registro gráfico (RG) – que consiste na construção de gráficos cartesianos, seja com instrumentos de desenho ou por meio de *softwares*.

Para este trabalho, exploramos somente os três primeiros registros, haja vista que estes apareceram naturalmente dentre as soluções dos alunos participantes para as tarefas propostas. Mais ainda, identificamos traços da flexibilidade entre as representações contidas nesses registros já que alguns alunos apresentaram mais de uma representação para a solução da tarefa de contagem proposta.

É possível que com esses registros sejam efetuadas transformações de representações semióticas que exijam um certo desempenho cognitivo do indivíduo. Para este trabalho, falaremos especificamente do tratamento. O tratamento é uma transformação que ocorre internamente ao registro, ou seja, uma mudança realizada sem sair do registro inicial (Duval, 2009). Por exemplo, no caso das figuras tem-se a possibilidade de explorá-las heuristicamente por meio de uma reconfiguração de suas subfiguras. Dessa forma, o tratamento pode ser efetuada em ambientes figurativos de modo a encontrar a solução para a tarefa que se está sendo proposta.

De acordo com Vale (2012), o trabalho com tarefas de contagens em ambientes figurativos constitui uma boa estratégia para desenvolver nos alunos capacidades de ver (identificação, decomposição, rearranjo, disposição) e contribuem para uma melhor flexibilidade de visualização e pensamento. Desta forma, a autora afirma que é crucial para os alunos verem as relações entre os termos sucessivos, permitindo-lhes traduzir os padrões visuais identificados através de expressões numéricas como primeiro passo para chegar à generalização – o cerne do pensamento algébrico.

Deste modo, este trabalho executado pelo GPEG – Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria, tem como objetivo investigar, a partir da visualização figural, quais as representações semióticas que alunos do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual do município de Maringá, utilizam para resolver uma tarefa de contagem.

Materiais e métodos

A metodologia adotada para esta pesquisa é de natureza qualitativa, sob o paradigma interpretativo, pois propõe-se refletir sobre o que há de característico e particular nas situações analisadas.Segundo Denzin e Lincoln (2011), "os pesquisadores qualitativos estudam coisas dentro de seus contextos naturais, tentando entender, ou interpretar, os fenômenos em termos dos significados que as pessoas lhes atribuem"(p.3).A análise de dados foi realizada de forma descritiva e interpretativa, sob a luz dos referenciais citados anteriormente, dentre os quais destacamos Duval e sua teoria a respeito das representações semióticas.

A tarefa aqui analisada foi aplicada no ambiente de sala de aula de uma escola estadual de Maringá, no estado do Paraná, Brasil.Os participantes foram 70 alunos, do 7º e 8º ano, que foram organizados em duplas. A tarefa foi aplicada pela própria professora da turma, que a longo prazo desenvolve um trabalho por meio de tarefas. Foi disponibilizado aos alunos papel

quadriculado para que registrassem suas resoluções e a tarefa foi impressa e entregue as duplas como na imagem abaixo.

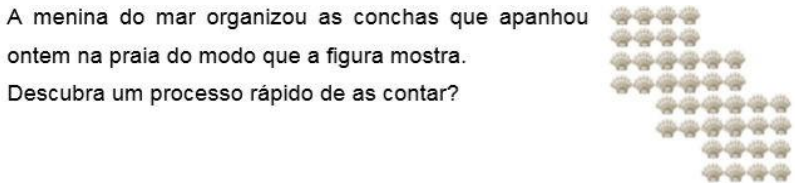


Figura1.Tarefa de contagem proposta aos estudantes.

Esta tarefa é proposta por Vale (2012), neste trabalho a autora tem como objetivo entender de que maneira uma experiência didática baseada em padrões figurativos é um contexto adequado para obter expressão de generalização e pode contribuir para promover a aprendizagem matemática, em particular o pensamento algébrico ao nível do ensino básico por alunos e (futuros) professores. Para isso, recolheu as resoluções realizadas em turmas do 3º e 4º ano.

Após analisar o trabalho desta autora consideramos esta tarefa como adequada para a obtenção dos nossos dados de modo que estes nos permitissem alcançar o objetivo de investigar quais as representações semióticas que alunos do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental utilizam para resolver uma tarefa de contagem, a partir da visualização figural.

Os dados foram coletados por meio do registro escrito feito pelos alunos nas folhas de papel quadriculado e de entrevista realizada com a professora da turma.

Resultados

A tarefa aqui analisada é intitulada “Conchinhas” e após ser entregue foi solicitado aos alunos que descobrissem um processo rápido para a contagem das conchas, sem que essa contagem fosse feita uma a uma. Como esperado, diferentes representações semióticas foram utilizadas pelos alunos.

Para a análise e classificação das respostas, consideramos que os estudantes utilizaram uma representação figural para solucionar a tarefa, quando estes realizaram um tratamento da figura dada ou reproduziram outra figura com o objetivo de obter uma solução para a tarefa. Como representação numérica, enquadramos as soluções que se apoiaram em cálculos estritamente numéricos e àqueles que recorreram a formalização matemática por meio de letras ou quantificadores matemáticos, classificamos, como representação algébrica. Por fim, as respostas descritas pela linguagem natural, ou seja, as descrições que consistiam em explicações da solução para a tarefa, categorizamos como representações na linguagem natural.

A figura a seguir indica as representações utilizadas pelos alunos e as suas frequências:

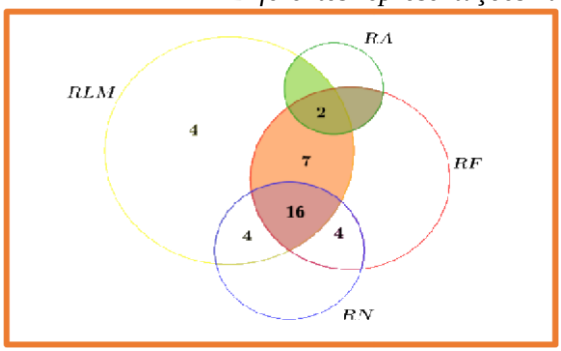


Figura 2. Representações semióticas utilizadas pelos estudantes.

Observamos que, das 37 tarefas: 33 apresentaram o uso da RLM, 29 o uso da RF, 24 da RN e 2 da RA; 25 apresentaram o uso da RLM e da RF, simultaneamente e 16 apresentaram o uso da RLM, RF e RN, simultaneamente.

Discussões

Com base nos dados coletados foi possível observarmos que a tarefa de contagem proporcionou aos estudantes o uso das diferentes representações em prol de sua solução. A visualização da figura suscitou, em sua maioria, o uso da RLM com o objetivo de explicar a solução para a tarefa. Arcavi (1999) e Vale (2015) explicam que a visualização não está apenas relacionada com a ilustração, mas é reconhecida como uma componente do raciocínio estreitamente relacionada ao conceitual e não somente ao perceptual, e além disso, Vale (2015) esclarece que Krutetski (1976) indica o despertar do pensamento lógico verbal em situações que envolvem a recorrência à visualização de figuras. Sendo assim, das 37 tarefas, 33 apresentaram essa exploração além da perceptual, ou seja, utilizaram-se da RLM para explicitar seus raciocínios e desses, 4 estudantes utilizaram somente a RLM.

Como exemplo do uso da RLM destacamos:

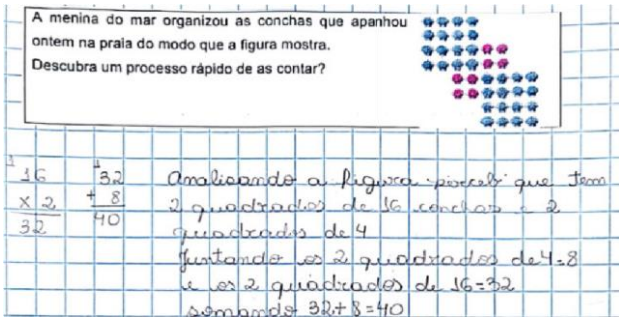


*Figura 3.*Resolução de um estudante na linguagem materna.

O estudante recorreu à linguagem para expressar seu entendimento da solução do problema.

Na solução desta tarefa também encontramos o uso da RF, ou seja, alguns estudantes, no processo de visualização da figura, realizaram tratamentos figurais com o objetivo de encontrar a solução para a tarefa. "A visualização pode suscitar o desenvolvimento da intuição e a capacidade de ver novas relações" (Vale, 2015, p. 04). O apelo à RF ocorreu em 29 dos 37 estudantes, no entanto, nenhum aluno recorreu somente a essa representação, ou seja, todos desse grupo viram a necessidade de aliá-la a uma outra representação de modo a dar sentido para suas soluções.As representação mais utilizada pelos estudantes em parceria com a RF foi a RLM e, em seguida, a RN. Godino (2012) cita que para Arcavi (2003), a visualização consiste no processo de criação, interpretação e reflexão acerca de imagens, diagramas e

desenhos permitindo representar ou comunicar uma certa informação. No caso desta pesquisa, observamos que a forma que os alunos mais recorreram para comunicar seus raciocínios figurais, resultantes da visualização, foi a RLM. Como exemplo, temos:

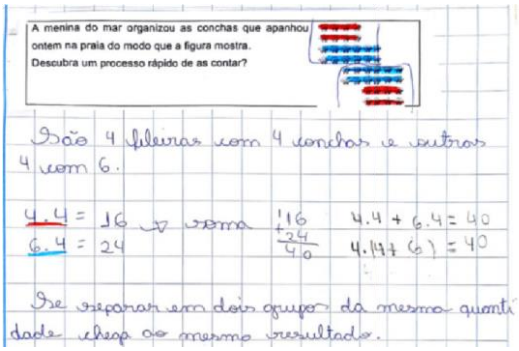


Figura 4. Resolução de um estudante na linguagem materna e na numérica.

Nesse exemplo temos a recorrência à representação na linguagem materna e na numérica, com o objetivo de esclarecer o raciocínio realizado com a representação figural. Tal fato, nos faz observar que, assim como afirmam Vale e Barbosa (2018), a visualização é uma ferramenta poderosa na abordagem da geometria, mas também de outros campos, como o numérico. Logo, devemos encontrar tarefas que estimulem, por meio da visualização, essa potencialidade de se apresentar várias soluções corretas para um mesmo problema, e mais ainda, percorrendo diferentes representações. Duval (2003) relaciona os fracassos ou os bloqueios dos alunos ao ato de manter um enclausuramento de representação semiótica, já que tal fato, também impede que os alunos utilizem seus conhecimentos prévios forçando-os a utilizar somente a técnica ensinada pelo professor.

Como solução a essa tarefa, também obtivemos o uso da Representação Algébrica, no entanto essa foi pouco requerida, já que das 37 tarefas, somente 2 tarefas apresentaram uma solução algébrica. A seguir, um exemplo dessa aplicação:

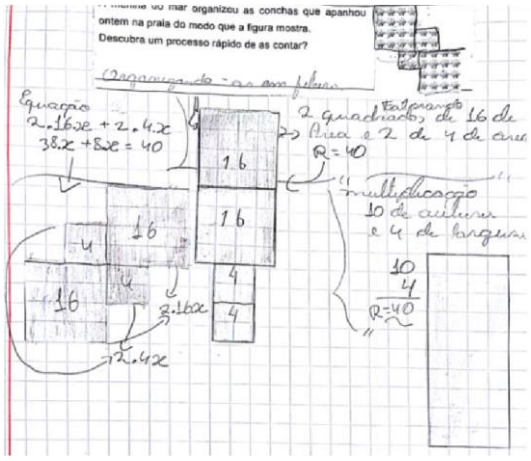


Figura 5. Resolução de um estudante na representação algébrica.

Observe que o aluno recorreu a uma equação de primeiro grau com o objetivo de solucionar a tarefa proposta. Embora o enunciado da tarefa solicitasse que os estudantes descobrissem um processo rápido para solução, foi possível percebermos que estes

procuraram um processo que fosse mais rapidamente pensado por eles, o que não necessariamente significa ser um processo rápido de solução. No caso desses estudantes que apresentaram a solução exposta na Figura X, tal contexto figurativo/visual despertou um pensamento algébrico como forma de explorar a solução para essa tarefa proposta.

Destacamos que muitas outras soluções interessantes, que utilizaram de representações figurais, numéricas, algébricas e na linguagem materna, foram realizadas, no entanto devido a limitação de exposição neste arquivo, destacamos somente alguns. Tais soluções poderão ser expostas e discutidas durante a apresentação no evento.

Considerações Finais

Por fim, concluímos que a tarefa proposta, que consistia num trabalho com padrões figurativos/visuais, revelou-se com grande potencial para promover a relação entre as diferentes representações semióticas. Os alunos utilizaram representações variadas, tais como: língua materna, figural, numérica e algébrica, sendo a língua materna a utilizada com maior frequência e a algébrica, a menos utilizada.

Tal tarefa permitiu aos estudantes uma flexibilidade visual importante que levou-os a buscar diferentes estratégias de abordagem que permitiram solucionar o problema. Acreditamos que, com esse trabalho, corroboramos com o pensamento de Vale (2015) que afirma ver potencialidades no ato de estimular os alunos a apresentarem diferentes resoluções, contrariando a ideia tão difundida de que o importante e que basta ao aluno é conseguir uma resposta correta, independente desta ser a mais simples ou a mais interessante.

Nesse sentido, tal implementação, além de despertar o uso das diferentes representações para sua solução, também ofereceu oportunidade para que os alunos utilizassem a habilidade de visualização, o que foi verificado por meio dos registros apresentados por eles.Nestes é possível perceber que os alunos relacionaram questões conceituais além da percepção, conforme Vale, Barbosa e Pimentel (2014), que apontam que a visualização não está relacionada somente com a ilustração mas é principalmente reconhecida como uma componente do raciocínio e do pensamento.

Portanto, o desafio consiste não somente em aplicar tarefas, mas em selecionar tarefas que proporcionem a aprendizagem, despertem a curiosidade e o interesse a ponto de encontrar não somente uma solução, mas a melhor solução.

Referências e bibliografia

Arcavi, A. (1999).*The role of visual representations in the learning of mathematics*. XXIConference on the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter,Mexico, 26-1.

Cyrino, M. C. C. T., Jesus, C. C. (2014). *Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática*. Ciência& Educação, Bauru, v. 20, n. 3, 751-764.

Duval, R.(1999). *Semiosis y pensamento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales*. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidade del Valle.

Duval, R.(2003). *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: Machado, S. D. A. (Org). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus,11-33.

Duval, R.(2009).*Semiósis e Pensamento Humano*: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Duval, R.(2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas*. Org.:Tânia M. M. Campos.Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM.

Duval, R.(2012). *Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência*. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat: Florianópolis, v.07, n.1, 118-138.

Denzin, N. K.,Lincoln,Y. S.(2011).*Introduction: The discipline and practice of qualitative research*. The Sage handbook of qualitative research (4th ed., 1-19). Thousand Oaks, CA: Sage.

Freitas, J. L. M., Rezende. (2013). V. *Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica*. Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM: Campo Mourão – PR, Jul-dez.

Godino, J. D.,Gonzato, M.,Cajaraville, J. A., Fernández, T.(2012). *Una aproximación ontosemiótica a lavizualización em educación matemática*. Revista de Investigación y experiencias didácticas - Enseñanza de lasciencias,n. 30.2, 109 - 130.

Ponte, J. P. (2014). (Org.) *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Stein, M. H., Smith, M. S. (2009).*Tarefas matemáticas como quadro para reflexão*: da investigação à prática. Educação e Matemática, n° 105, 22-28.

Vale, I. (2012). *As tarefas de padrões na aula de matemática*: um desafio para professores e alunos. Revista Interacções, n. 20, 181-207.

Vale, I. (2015). *A criatividade nas (re)soluções visuais de problemas*. Revista Educação e Matemática Nº 135 - Novembro/Dezembro.

Vale I., Barbosa A. (2018).*Mathematical problems: the advantages of visual strategies*, Journal of the European Teacher Education Network - Jeten, vol. 13, 23-33, Viana do Castelo, Portugal.

Vale I.; Barbosa A.; Pimentel T. (2014). *Tarefas para promover a criatividades em matemática*, EIEM, Sesimbra, Portugal.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Posicionamiento de los estudiantes y la efectividad en resolución de problemas en trabajo colaborativo.

Nicole **Fuenzalida** Díaz
Centro de Investigación Avanzado en Educación, Universidad de Chile
Chile
nicole.fuenzalida@ciae.uchile.cl
Carmen Gloria **Espinoza**
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Chile
cespinoza@dim.uchile.cl
Farzaneh **Saadati**
Centro de Investigación Avanzado en Educación, Universidad de Chile
Chile
farzaneh.saadati@ciae.uchile.cl

Resumen

El siguiente estudio hace un examen sobre los cambios de comportamiento de dos estudiantes con distintos posicionamiento en formación primaria que participan en una actividad estructurada de resolución de problemas de manera colaborativa. Se analizaron 3 sesiones grabadas en vídeo de sus actividades en el aula. El seguimiento de las actividades muestra cómo los estudiantes mantienen o cambian sus posiciones, evidencian aprendizajes considerables en el trabajo colaborativo y cómo esto permite adquirir habilidades individuales para trabajar la resolución de problemas de manera progresiva efectivamente. Los resultados destacan el impacto de la propuesta de resolución de problemas con base en el trabajo colaborativo, el impacto que tiene en la autoeficacia y puede hacer una contribución importante a los profesores de matemáticas.

Palabras clave:autoeficacia, comportamiento, resolución de problemas, trabajo colaborativo

Introducción

En las escuelas chilenas las habilidades matemáticas están prácticamente ausentes y los docentes actúan en general siguiendo un modelo obsoleto (Saadati et al., 2018). Distintos estudios caracterizan las clases de matemáticas en Chile como una enseñanza centrada en el profesor, donde es él quien hace las preguntas, hace que los estudiantes sigan la exposición en el pizarrón o trabajen individualmente resolviendo problemas (Araya y Dartnell, 2009). Ellos declaran que los estudiantes hacen muy pocas preguntas matemáticas, prácticamente sin razonamiento matemático deductivo. Según Preiss y otros (2012), cuando los profesores realizan

resolución de problemas (RP), se enfocan mayormente en entrenar destrezas y realizar procedimientos rutinarios, de manera que las nociones matemáticas más que desarrolladas, son comunicadas. Frente a este escenario es que nace ARPA o "Activando la Resolución de Problemas en las Aulas" que busca capacitar a profesores en RP mediante talleres de Desarrollo Profesional (DP). El objetivo del PDes generar un cambio en la percepción de la matemática y su aprendizaje con unatransformación consecuente en el actuar del profesor en el aula para mejorar las habilidades de RP de los estudiantes. ARPA busca proveer un ambiente activo y equitativo de aprendizaje para todos los estudiantes independiente de su género, carácter o habilidades. El objetivo de este estudio es revisar cómo ARPA afecta el comportamiento (como resolutor de problemas y como miembro del grupo) de dos estudiantes durante el trabajo en grupo.

ARPA: La propuesta de ARPA es llevar una metodología al aula para tratar la RP, la que consiste en realizar una actividad de RP centrada en los estudiantes. La principal herramienta es el trabajo en grupo colaborativo entre los estudiantes organizado aleatoriamente y monitoreado por el profesor quien interviene en los grupos cuando estos tienen dudas o dificultades. La metodología se compone de cuatro etapas,en donde las interacciones del profesor hacia el grupo se realizanmediante preguntas para activar la RP, estimular el trabajo colaborativo o consolidar los resultados y el trabajo de los estudiantes, sin dar respuestas o entregando la solución. Además, según cada grupo, el profesor puede entregar simplificaciones o extensiones del problema en la medida que las necesiten. El profesor da el tiempo y el espacio para que los estudiantes puedan trabajar en la actividad.

Marco Teórico

Usamos como lente laperspectivasociocognitiva que asume que el aprendizaje humano se puede generar mediante la observación en las actividades sociales, de hecho nuestro interés es analizar el rol de las interacciones sociales en el aprendizaje. Esta perspectiva nos permite profundizar en cómo una persona puede desarrollar su aprendizaje a través de trabajo colaborativo.

La teoría de la carga cognitiva se desarrolló a fines de la década de 1980 a partir de un estudio sobre resolución de problemas de Sweller (1988). La teoría de la carga cognitiva se basa en la arquitectura cognitiva de los alumnos individuales, específicamente estáenfocada en la adquisición de conocimiento generalizados como un medio para facilitar habilidades flexibles de resolución de problemas. Esta teoría se ocupa del aprendizaje de tareas cognitivas complejas, en las que los alumnos a menudo se sienten abrumados por la cantidad de elementos de información interactiva que deben procesarse simultáneamente antes de que pueda comenzar un aprendizaje significativo. Al aplicar esta teoría a los entornos de aprendizaje colaborativo, se puede argumentar que si las personas deben trabajar juntas y aprender de manera efectiva y/o eficiente en grupos, se debe entender la posición como miembro del grupo y también su sistema cognitivo como resolutor de problemas individuales. Este marco teórico podría proporcionar una mejor comprensión de los factores que determinan cuándo y cómo el trabajo colaborativo será efectivo y eficiente para el aprendizaje (Kirschner, Paas y Kirschner, 2009). La colaboración puede aumentar la aptitud de los colaboradores cuando juntos pueden acceder a más recursos que cuando trabajan individualmente.

Metodología

Este es estudio basado en dos casos una chica y un chico que participan en cursos donde se implementan ARPAs en una comuna rural de la región de O'higgins, en Chile. Con la finalidad de obtener casos sin sesgo, los estudiantes fueron seleccionados de manera aleatoria en donde los profesores participantes del DP no tuvieron influencia. Los estudiantes participantes de la muestra, no estudian en el mismo establecimiento, sin embargo, su entorno educativo es similar. Ambos comenzaron en 5° año de formación primaria a trabajar la RP con la metodología ARPA y han continuado en el estudio hasta 6°año. Las profesoras, implementan la metodología en sus clases una vez por mes y en cada una de esas implementaciones se grabó vídeo y audio a los estudiantes participantes del estudio en el trabajo en grupo para resolver un problema no rutinario con niveles de dificultad crecientes. El primer problema fue: *Un señor que hace bicicletas y triciclos tiene 19 ruedas y decide hacer bicicletas y triciclos con ellas ¿Cuántos tipos de cada uno debe hacer para usar todas las ruedas?*Para este estudio se consideraron las primeras tres ARPAs en las que los estudiantes participaron. Para el análisis de vídeo utilizamos un marco teórico para identificar los cambios en el comportamiento de los estudiantes, este se enfocó en dos niveles; primero el o la estudiante como miembro del grupo y segundo en la RP.

Resultados

A continuación se mostrarán los resultados del análisis con el fin de identificar las posiciones específicas que construyeron su aprendizaje en el trabajo colaborativo de RP.

El caso de Rosa

ARPA 1: Esta fue la primera experiencia de la estudiante trabajando colaborativamente en la RP. Durante esta actividad la estudiante no parece estar comprometida con la RP, es más podríamos definirla como una estudiante pasiva debido a que son otras estudiantes del grupo quienes tienen el control del desarrollo del problema. En esta primer ARPA la estudiante trabaja en un grupo conformado por 3 chicas más y en donde 2 de ella lideran la resolución dándole poco espacio a las dos restantes.

> E1: Ya, a ver, pueden ser tres triciclos. No, 4 triciclos y nos quedan… 19 menos 12 resten 19 - 12
> E2: Se pueden fabricar 3 bicicletas y 4 triciclos
> R: Ósea, con 19 ruedas ¿cuánto me alcanza para hacer de estos? (en voz baja)
> E1: Para hacer esto (Estudiante señala la hoja de Rosa)
> E2: Mira se pueden hacer 3 triciclos y te quedan 10 ruedas (Rosa duda)
> E1: Se pueden hacer 3 triciclos y 5 bicicletas (Rosa escribe la solución en su hoja de resolución) Mira, acá pongan la respuesta y acá abajo pongan como lo hicimos. (Rosa mira lo que escriben las estudiantes en sus hojas)

El trabajo en esta ARPA no es propiamente un trabajo colaborativo, si bien existen pequeños espacios en donde la estudiante puede explicar o preguntar sobre el desarrollo del problema, el grupo no construye sobre las ideas de la estudiante, es más, las intervenciones de la estudiante son tímidas, preguntando en voz baja a sus compañeras de grupo. Finalmente, la estudiante no resuelve el problema por sí misma, pero logra comprenderlo gracias al desarrollo de sus compañeras. Durante el trabajo en la RP la estudiante se mantiene atenta a como se desarrolla el problema, sin embargo ella asume que necesita la ayuda de su grupo para entenderlo el problema, ella es pasiva. Luego de unos minutos, en donde sus compañeras resuelven el problema inicial, la estudiante logra comenzar a resolver la extensión entregada por la profesora de manera autónoma.

ARPA 2: Al comienzo de esta ARPA todos los estudiantes interactúan de igual manera, tanto Rosa como sus compañeros de grupo conversan con la finalidad de entender el problema y buscar qué es lo se les solicita. Mientras los compañeros de Rosa afirman conocer el resultado, Rosa no comprende lo que hay que hacer, por lo que pregunta a sus compañeros y no deja de cuestionarse el encabezado del problema lo que finalmente la lleva a objetar los resultados que sus compañeros de grupo proponen sin comprender a cabalidad el enunciado del problema.

Luego la profesora interviene por primera vez en el grupo, en esta intervención la profesora indirectamente confirma que el resultado que obtuvo el grupo no es correcto y como ayuda les entrega material concreto. Después de la intervención de la profesora, Rosa logra mantenerse activa en la resolución del problema y es quién la lidera, ella es quién toma la iniciativa de resolver el problema y direcciona el grupo para lograr encontrar el resultado. Rosa no se detiene ningún momento de la actividad, debido a que el problema le resulta un desafío muy alto Rosa se mantiene comprometida con la resolución del problema y se interesa en involucrar a sus compañeros en la actividad.

ARPA 3: En el tercer ARPA la estudiante se encuentra en un grupo compuesto solo por niñas que no están comprometidas con la RP, en un principio, la estudiante intenta estimular a sus compañeras para que inicien el trabajo colaborativo sin tener mucho éxito:

R: Es que no sé cómo hacerlo (comienza a buscar lápices)
E 2: Rosa unicornia
E 1: ¿Qué vas a dibujar en artes?
E 3: La pileta.
E 2: Un paisaje

Rosa no logra comprometer a sus compañeras en la resolución ni obtener un resultado hasta que luego de unos minutos la estudiante asume que el desafío es muy alto: "No sé cómo hacerlo", sin embargo, persevera en la resolución y luego vuelve a retomar.

Durante esta ARPA, la estudiante utiliza distintas estrategias para mantenerse activa en el trabajo, entre ellas vuelve leer el problema, trata de involucrar a sus compañeras, les explica sus estrategias sin éxito, pide ayuda a la profesora e interactúa pasivamente con los grupos a su alrededor para obtener ideas. Luego de 20 minutos de trabajo perseverante la profesora interviene guiando de manera excesiva el problema para luego entregar material concreto al grupo con claras instrucciones. Una vez que la estudiante comienza el trabajo con la ayuda del material concreto y de la profesora, ya no le interesa involucrar al resto del grupo, por lo tanto, el trabajo no es colaborativo y la estudiante resuelve de manera individual el problema y las extensiones.

R: 6, 7, 8, 9, 10. (Organiza y cuenta el material concreto)
E 1: Tengo sueño ¿Quién no quería venir al colegio? Yo no quería venir…
E 2: Si, por eso yo vine porque que había que hacer el trabajo de artes.
E 1: El de historia.
E 2: Historia no nos toca, nos toca tecnología y ese ya lo terminamos.
R: Si hay otra forma (dice organizando su material concreto, sin mirar a sus compañeras para luego escribir en su hoja sin compartir el resultado)

El caso de José

ARPA 1: En esta, la primera experiencia en ARPA, José es parte de un grupo de 5 estudiantes (igual que en todas las experiencias siguientes). Al inicio de la actividad José logra entender individualmente el problema pero no tiene interés en resolverlo, su interés está en dirigir el trabajo del grupo para que éste resuelva el problema. El trabajo comienza con material concreto lo que permite que José entienda rápidamente, el nivel de dificultad del problema es bajo y no alcanza a ser una dificultad. José se preocupa solo de distribuir las tareas del grupo, dando indicaciones y preocupado de que todos avancen a la par, manejando los tiempos, solicitando que todos participen según sus indicaciones. Sus compañeros de grupo se muestran incómodos con la manera de trabajar de José ya que no les es posible participar de manera libre en el grupo, deben apegarse a lo que él les indica. A pesar de esto, José procura que todos los estudiantes participen, sin embargo, no le preocupan las interacciones entre los otros estudiantes, solo las que dirige él.

J: Tienen todos sus cubos

E1:(dirigiéndose a José) ¿Oye, de cuántas maneras hacer las ruedas?

J: ¿Sánchez cómo se hace las ruedas?

J: Según ustedes ¿qué deberían hacer con los cubos?

E2: Tenemos que juntar de cada uno, por ejemplo…. (José interrumpe a su compañero)

J: Juntamos 3 cubos y después 2, eso tenemos que hacer

E2: Ósea, 3 y 2, 3 y 2, ir juntando

J: Vayan armando

Durante el trabajo José valida más las respuestas y/o intervenciones de la profesora que las de sus compañeros de grupo, toma decisiones sin consultar al grupo y opta por aclarar sus dudas con la profesora antes de consultarlo con su grupo.

ARPA 2: En esta ARPA José mantiene su rol dentro del trabajo en grupo, en esta segunda experiencia José continúa dirigiendo las interacciones de sus compañeros, la diferencia entre esta actividad y la anterior radica en que la dificultad del problema resulta ser mayor al problema de la actividad anterior. El desafío del problema resulta ser tan alto para José y su grupo que finalmente no logran obtener una respuesta válida para el problema. Durante la actividad hay indicios de que José no entiende el problema, las instrucciones que les da a sus compañeros de grupo no están relacionadas y no aportan a la resolución del problema.

J: ¿Cuántas combinaciones puedes hacer con 20 bolitas? (José lee la pregunta del problema)

E1: 20x20….. 20x20….20 por 20… ahí ya está po

J: ahh ya ¿cuánto es 20x20?

E3: 400

(José lee nuevamente el problema e interviene la profesora preguntando a José sobre lo que escribió en su hoja)

P: ¿por qué pusiste 20 x 20?

J: porque E3 me lo dijo

A lo largo de todo el trabajo esta es la actitud que predomina en José incluso cuando sus compañeros sugieren una estrategia distinta a la que estaban trabajando, él está tan centrado en solo dar indicaciones que no considera los aportes de otros.

E3: chiquillos porque mejor no vamos haciendo las pelotitas con los distintos sabores.

(Estudiantes E1 y E2 discuten sobre a estrategia que propone E3)

J: multipliquen 20 x 20.

ARPA 3: En esta ARPA José nuevamente asume el rol de líder dentro del grupo, asignando tareas a sus compañeros, sin embargo en esta actividad valida las estrategias que proponen sus compañeros. Además se hace partícipe de la resolución de problema y comienza sutilmente a aportar con soluciones, defender sus ideas, buscar explicaciones y a disputar las aseveraciones de sus compañeros de grupo.

J: Ya Miguel lee el problema (E1 lee el problema para todos sus compañeros)

J: Cata entendiste algo (Cata comienza a buscar una estrategia y traza una línea de largo 15 cm. en su hoja, José observa)

J: Buena Cata, buena estrategia. Ya chiquillos todos hagan lo que está haciendo la Cata, todos pongan la regla y marquen hasta 15.

(Todo el grupo replica la estrategia de la compañera en su hoja incluido José. El espera a que todos terminen de dibujar las líneas en sus hojas...)

J: ¿terminaste miguel? ¿Cómo vas Ariel? ¡Eso Cata eso! Ya Ariel hace una combinación que te de 15 luego otra y otra, así vamos avanzando cada uno dando combinaciones

E2: ¡Yo tengo una!

Como comentario general de todas las actividades observadas, constatamos que el comportamiento de José resulta ser estructurado, no existe un motivo aparente para que él sea el líder en la actividad, su posición no es otorgada por el grupo ni autoproclamada por él durante el ARPA. Pese a la elección aleatoria del estudiante por parte del equipo de investigación tenemos la hipótesis que José recibió instrucciones para liderar el grupo.

Que aprendimos de estos casos

De acuerdo con los resultados observados durante el primer ARPA, Rosa estuvo completamente ajena al trabajo colaborativo del grupo, lo que significa que no tenía ningún aporte que hacer a la resolución del problema, durante la actividad solo se preocupó por obtener el resultado final. Según Barnes (2004) durante toda ARPA 1 Rosa se posicionó como una persona en necesidad de ayuda. Cuando la profesora entrega el problema, Rosa busca ayuda en sus compañeras para comprender el problema, sin embargo, sus preguntas no demuestran suficiente esfuerzo por entender e involucrarse en la resolución, es más, en los casos que interviene para comprender el problema baja su tono de voz sin ser perseverante para demandar una respuesta que sea suficiente para entender. Esto demuestra que Rosa no cree tener las capacidades para resolver problemas de manera individual. Creemos que esta estudiante tiene baja autoeficacia en resolver problemas en la etapainicial del programa ARPA.

En ARPA 1 José es todo lo contrario al rol que Rosa juega en la primera experiencia, según Barnes (2014) José asume el rol de gerente y portavoz, esto se evidencia en que José posee una alta autoeficacia lo que le permite entender rápidamente el problema sin embargo, al comprender el problema individualmente José no se hace parte del trabajo en grupo porque asume la misión de que el grupo debe entender y resolver, es decir, él se posiciona por sobre sus compañeros como replicando la actitud que tendría un profesor/monitor al dirigir o guiar el trabajo en grupo.

En ARPA 2 tanto Rosa como José asumen el mismo rol que en las experiencias pasadas, el punto de inflexión de esta actividad para ambos estudiantes es la dificultad del problema que

determina la posición de Rosa y afecta la capacidad de resolver problemas de José. La diferencia entre la primera experiencia de Rosa y la segunda, es que en la segunda todos los integrantes del grupopueden tomar el mismo rol de críticos (Barnes, 2004), todos son capaces de hacer preguntas, sin embargo éstas no contribuyen en el avance en la resolución del problema, es por esto que Rosa oscila entre un rol crítico y facilitador (Barnes, 2004), empoderándose en el grupo pero conservando la necesidad del trabajo de sus compañeros. José por su parte, no logra entender el problema a diferencia de la experiencia anterior, por lo que todas sus contribuciones como gerente (Barnes, 2004) son negativas y perjudican el desarrollo del problema. La actividad es un completo fracaso en cuanto a obtener un resultado para el problema, experiencia que sienta un precedente en José como resolutor de problemas y como miembro del grupo.

En ARPA 3 Rosa continúa siendo una estudiante que necesita ayuda externa para entender el problema pero debido a las dificultades que tiene para trabajar en grupo, vuelve a cambiar su posición a"*networker"*(Barnes, 2004), buscando ayuda fuera de grupo, escuchando conversaciones de otros grupos y preguntando a la profesora y solicitando material concreto. Este escenario permite ver que Rosa aprende a moverse de manera flexible y obtener ventajas sobre el grupo durante el trabajo colaborativo. Respecto a la experiencia anterior, notamos un cambio en la actitud de José frente al trabajo colaborativo, creemos que lo ocurrido en ARPA 2 sirve para que José logre involucrarse en la resolución del problema del ARPA 3 considerándose un miembro del grupo y valorando los aportes de los compañeros y a pesar de mantener su rol, José transita hacia un rol más crítico y colaborador (Barnes, 2004). Rosa tiene un gran avance en sus habilidades para resolver problemas. De acuerdo a Polya (1954) el primer paso para resolver un problema es entender el problema, en el caso de Rosa inicialmente ella no está interesada en entender el problema y ella nunca se enfoca en esta etapa, solo busca la respuesta final. Sin embargo este modo de actuar cambia de manera significativa en el ARPA 3. En la última ARPA es obvio que ella cambia su creencia sobre su capacidad para resolver problemas, esto es un cambio positivo en su autoeficacia,incluso cuando ella pregunta por una explicación su voz es más firme que en el primer ARPA.

En cuanto a José, a pesar de que su meta inicial es que el grupo resuelva el problema, solo con su dirección, logramos ver que efectivamente aprende a trabajar en grupo reconociendo que puede apoyarse en sus compañeros y no solo en la profesora. José que ya poseía una alta autoeficacia, lo que inicialmente lo marginó de la resolución en ARPA 1 debido a que toma un rol de profesor frente a sus compañeros, reconsidera esta posición luego de ARPA 2, dado que reconoce que independiente de su rendimiento y elevada autoeficacia, necesita de sus compañeros para avanzar en la resolución de problemas y que el rol de gerente no es suficiente para contribuir a sus solución.

Conclusiones

Ambos casos nos sirven para ejemplificar, de manera preliminar, los efectos que ARPA como DP tiene en los estudiantes. Rosa, como señalan las mediciones nacionales e internacionales sobre los estudiantes chilenos, posee inicialmente una baja autoeficacia y poco interés en la RP matemáticos, además de no tener estrategias claras para trabajo colaborativo. Mientras que José cumple con el perfil del estudiante varón con interés en la matemática y con alta autoeficacia sin embargo, al igual que Rosa carece de estrategias para trabajar de manera colaborativa y si bien cree tener la capacidad de resolver problemas, en esta experiencia se cuestiona esa capacidad (Zimmerman, 1989). Durante el transcurso de las tres ARPAs analizadas

para este trabajo, se comprueba un notable avance en la capacidad de ambos estudiantes para trabajar colaborativamente, aun cuando los estudiantes tienen distinta posición y carácter ante la RP. Según Barnes (2004) el trabajo colaborativo provee oportunidades para que cada estudiante pueda tener diferentes posiciones en el grupo, como persona en búsqueda de ayuda o mánager. En donde todo dependerá del cómo el estudiante aprovecha esas oportunidades que el trabajo colaborativo le brinda.

En el caso de estos estudiantes, podemos ver que ambos aprendieron a flexibilizar su rol predominante, aunque nunca lo abandonaron completamente. Rosa mantiene su necesidad de ayuda y José su calidad de gerente, sin embargo, el interés en comprender y resolver el problema los insta a tener mayor compromiso e involucramiento en el trabajo en grupo y posibilita que ambos transitan hacia un rol más crítico en la RP. De acuerdo a este estudio podemos concluir que los estudiantes de sexto año de formación primaria, independiente de sus distintos posicionamientos en un grupo, sus diferentes niveles de autoeficacia, sus distintos grados de flexibilidad y agencia aprenden a trabajar colaborativamente mejorando su capacidad de resolver problemas. Se reconoce que en el trabajo colaborativo existen dificultades y aspectos negativos asociados al posicionamiento como se evidencia en ambos estudiantes cuando no se involucran en la resolución de problemas. Sin embargo, sugerimos que a pesar de esto el trabajo colaborativo tiene efectos positivos en la RP y esto puede ser una contribución importante para los profesores.

Referencias y bibliografía

Araya, R., &Dartnell, P. (2009). Saber pedagógico y conocimiento de la disciplina matemática en docentes de educación general básica y media. En Selección de investigaciones primer concurso FONIDE: evidencias para políticas públicas en educación (pp. 157–198).

Barnes, M. (2004, November). The use of positioning theory in studying student participation in collaborative learning activities. In Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education, Melbourne (Vol. 28).

Kirschner, F., Paas, F., &Kirschner, P. A. (2009a). A cognitive load approach to collaborative learning: United brains for complex tasks. Educational Psychology Review, 21, 31–42.

Polya, G. (1954) Patterns of plausible inference. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.

Preiss, D. (2010). Folk pedagogy and cultural markers in teaching: Three illustrations from Chile. In D. Preiss & R. J. Sternberg (Eds.), Innovations in educational psychology: Perspectives on learning, teaching, and human development (pp. 325–356). New York, NY: Springer.

Radovic, D., & Preiss, D. (2010). Discourse Patterns Observed in Middle-School Level Mathematics Classes in Chile. Psykhe, 19, 65–79.

Saadati, F., Cerda, G., Giaconi, V., Reyes, C., &Felmer, P. (2018). Modeling Chilean Mathematics Teachers' Instructional Beliefs on Problem Solving Practices. International Journal of Science and Mathematics Education, 1-21.

Schunk, D. H., &Ertmer, P. A. (2000). Self-regulation and academic learning: Self-efficacy enhancing interventions. In Handbook of self-regulation (pp. 631-649).

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. Cognitive Science, 12, 257–285.

Zimmerman, B. J. (1989). A social cognitive view of self-regulated academic learning. Journal of EducationalPsychology, 81, 329–339.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La evaluación en la modelación matemática. Una revisión crítica de literatura

Jonathan **Sánchez**-Cardona
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
Jonathan.sanchezc@udea.edu.co
Paula Andrea **Rendón**-Mesa
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
Paula.rendon@udea.edu.co

Resumen

La presente revisión crítica de literatura centra su atención en indagar por la evaluación en la modelación matemática, particularmente responde por cuestiones que se relacionan concómo las investigaciones enmodelación matemática tienen en cuenta los intereses y propósitos de formación de los sujetos. La revisión realizó una búsqueda en las bases de datos ERIC, Scielo y Scopus a partir de la cual se seleccionaron 22 documentos que fueron analizados a la luz de cuatro categorías. A partir de los documentos analizados se logró identificar que la tendencia en los reportes de investigación es hacia las estrategias y herramientas para evaluar aprendizajes matemáticos y se deja de lado otros aprendizajes que se pueden alcanzar a través de la modelación.

Palabras clave: Evaluación, formación profesional, modelación matemática.

Introducción

En las últimas dos décadas, la modelación matemática se ha convertido en un dominio de investigación con alto grado de consolidación al interior de la Educación Matemática (Niss, Blum y Galbraith, 2007). Blum y Borromeo-Ferri (2009) señalan que, a través de la modelación, los estudiantes pueden comprender y producir significados de los objetos matemáticos articulados a los fenómenos reales que se estudian. Según Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017) diferentes tipos de tareas y formas de hacer modelación ofrecen otras posibilidades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de la modelación misma. Estos alcances abren caminos para la investigación de las maneras de promoverlos y evaluarlos en la cotidianidad escolar. Tanto en los aprendizajes como en las maneras de evaluarlos existen

desarrollos y amplias discusiones en educación matemática y modelación. En este sentido preguntarse por la evaluación en la modelación matemática exige hacer una revisión de literatura sobre los aportes y avances investigativos que se han desarrollado, de tal forma que las nuevas investigaciones hagan uso de los hallazgos y resultados que otras investigaciones ya han aportado.

En particular Frejd (2013) desarrolló una revisión de literatura sobre los modos de evaluar en modelación matemática. Este estudio ofreció una perspectiva amplia de los enfoques utilizados y sugeridos para evaluar competencias de los estudiantes en los modelos y la modelación matemática. Sin embargo, la pregunta por los procesos y estrategias situadas en los contextos e intereses de los sujetos que participan en diferentes ambientes y tareas de modelación matemática sigue estando abierta. Es por esto, que este documento presenta de la evaluación y la modelación matemática, el método utilizado en la revisión crítica de literatura y las conclusiones centradas en los aportes y avances en la investigación internacional en relación con la evaluación en la modelación matemática.

La evaluación y la modelación matemática

Diferentes autores se han preocupado por la evaluación en la educación matemática, algunos de ellos han desarrollado investigaciones que apuntan a mejorar los procesos evaluativos, tanto en las herramientas e instrumentos utilizados para evaluar las matemáticas como en el constructo teórico (Hošpesová, 2018; Iannone y Jones, 2017; Niss, 1993a, 1993b; Suurtamm et al., 2016). Una de las apuestas en la evaluación de los aprendizajes es que se asuma de carácter formativo debido a que con ella se permite la realimentación constante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Brown y Pickford, 2013; Hamodi, López, y López, 2015).

Las producciones científicas resaltan las diferentes posibilidades que tiene la modelación matemática en los procesos formativos de las matemáticas (Bassanezi, 2002; Niss, Blum, y Galbraith, 2007). La modelación matemática posibilita que los estudiantes relacionen conceptos matemáticos con fenómenos reales, de tal forma que se realizan comprensiones y producen diferentes significados de conceptos matemáticos, también se posibilita el desarrollo de competencias y de visiones de las matemáticas, dado que, al establecer relaciones entre esta área y la realidad, se promueven usos de la matemática como una ciencia útil (Blum y Borromeo-Ferri, 2009).

La pregunta por los aportes que la modelación matemática y la evaluación ofrece a la formación matemática de los estudiantes continúa siendo motor para el desarrollo de investigaciones, más aún, con la diversidad de maneras y perspectivas con las que cuenta la modelación matemática tanto en la investigación como en la cotidianidad escolar (Kaiser, Blomhøj, y Sriraman, 2006; Maaß, 2010; Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes, y Sánchez-Cardona, 2017). En este sentido, resulta necesario indagar por los aportes y avances en la investigación internacional con relación a la evaluación en la modelación matemática.

La evaluación en modelación matemáticas no solo se ha ocupado de investigar por los aprendizajes de contenidos y las competencias; sino también, del desarrollo e implementación de procesos. Así, Fredj (2013) en su revisión de literatura se enfocó en indagar por los modos de evaluar en modelación matemática; para tal fin, este autor revisó 76 artículos resultados de investigación y encontró una visión de la evaluación que centra su atención en ciertos momentos particulares y no en todo el proceso desarrollado por los estudiantes. En particular, la revisión

informa que las investigaciones giraron en torno a ¿Cómo evaluar? Y ¿Con qué instrumentos evaluar? y deja de lado componentes situados de la evaluación que responden a cuestionamientos relacionados con el sujeto que se evalúa - ¿A quién se evalúa? -.

Como resultado de su estudio, Frejd (2013) ofreció una perspectiva amplia de los enfoques que utiliza y sugiere para evaluar competencias de los estudiantes en los modelos y la modelación matemática. Sin embargo, la pregunta por los procesos y estrategias relacionadas con las necesidades específicas de formación de los sujetos que participan en diferentes ambientes y tareas de modelación matemática sigue abierta. Este tipo de preguntas es relevante, pues la literatura internacional reconoce la necesidad de desarrollar procesos de modelación matemática que se articulenconlos intereses y propósitos de los estudiantes (Borba y Villarreal, 2005), así como a sus necesidades de formación profesional (Rendón-Mesa, 2016; Romo-Vázquez, 2014).

La presente revisión crítica de literatura se centra su atención en las visiones y estrategias que se utilizan para la evaluación en la modelación matemática acorde con los intereses, propósitos y metas de formación de los sujetos involucrados. Por tanto, se propone responder la pregunta ¿Cómo las investigaciones sobre evaluación en modelación matemática han tenido en cuenta los intereses y propósitos de formación de los sujetos? Con el fin de dar respuesta a esta pregunta se analizaron 22 documentos resultado de una búsqueda en las bases de datosERIC, Scielo y Scopus, así como un proceso de selección acorde con la pregunta antes descrita.

Método

Se realiza una revisión crítica de literatura de la evaluación en los procesos de modelación matemática con la intensión de determinar teóricamente las conceptualizaciones y resultados reportados en el campo investigativo. Se resalta la importancia de determinar las diferentes conclusiones a las cuales han llegado investigaciones internacionales, con el fin de sustentar teórica y empíricamente los avances de la evaluación en la modelación matemática. Una revisión crítica de literatura implica analizar las diferentes investigaciones reportadas y cruzar datos con el fin de determinar el estado investigativo en el cual se encuentra determinado tema (Jesson y Lacey, 2006).

La International CommissiononMathematicalInstruction en su estudio 14 - ICMI Study 14 - (Blum et al., 2007) recolectó diferentes investigaciones y trabajos desarrollados en evaluación en modelación matemática hasta el año 2007. Por esta razón, en la presente revisión se decidió incluir artículos de revista, capítulos de libro y memorias de eventos a partir del año 2007.

Dado que la búsqueda se centra en los componentes de la evaluación de los aprendizajes en la modelación, se incluyeron investigaciones empíricas que se desarrollaron de la temática en el ámbito de la formación matemática de profesionales, de tal forma que se reporten estrategias, herramientas y conclusiones en relación con la evaluación en la modelación. En la indagación realizada en las bases de datos se utilizaron cinco ecuaciones de búsqueda. Estas ecuaciones fueron necesarias dado que es posible encontrar en la literatura internacional diferentes formas de escritura para referirse a la modelación, como por ejemplo, *modelling y modeling*. Así mismo, en las ecuaciones de búsqueda se incluyeron las palabras *assessment, evaluation y assesing*.

Las cincoecuaciones de búsquedautilizadasfueron: i) “Mathematical Modelling” AND “Assessment” AND “education”; ii) “Mathematical Modeling” AND “Assessment” AND “education”; iii) “Mathematical Modelling” AND “evaluation” AND “education”; iv) “Mathematical Modeling” AND “evaluation” AND “education”, y finalmente v) “Mathematical

Modelling" AND "assessing" AND "education"

Se debe agregar que en la base de datos Scopus se delimitó la búsqueda con la ayuda de los filtros Engineering, ComputerScience, Social Science, Mathematics, Medicine, Chemical Engineering, Economics, Econometrics y Finance. Se utilizaron estos filtros dado que el interés de la revisión de literatura se centró en la evaluación en los procesos de modelación matemática en correspondencia con los intereses y propósitos de formación de los sujetos.

El periodo establecido para la inclusión de documentos fue desde el 2007 hasta marzo de 2018. Esta búsqueda arrojó un total de 204 documentos entre capítulos de libro, artículos de revista especializados y memorias de eventos. La información básica de estos documentos (Año, autores, título, palabras clave, abstract-resumen-introducción y revista-libro) se organizó en una hoja de cálculo. A partir de esta organización se delimitaron los siguientes criterios de selección con el fin de constituir el conjunto de documentos que finalmente se analizarían.

Criterios de selección

De los 204 documentos encontrados con las ecuaciones de búsqueda, se procedió a determinar si se repetían documentos. La disposición de la lista de textos en la hoja de cálculo posibilitó la identificación de los documentos duplicados. Después de este proceso quedaron 103 documentos. A continuación, los siguientes criterios fueron determinantes al momento de realizar la lectura del título y abstract-resumen e introducción para determinar la inclusión o no del documento en la revisión de literatura final, i) en el documento se reporta una relación entre la evaluación y la modelación matemática, ii) el propósito del documento se relaciona con la evaluación de los procesos de la modelación matemática, iii) el propósito del documento se relaciona con la enseñanza o el aprendizaje de un saber o conocimiento, iv) el documento no solo presenta y evalúa la aplicación de modelos matemáticos en otros contextos, como la ingeniería y las finanzas, sino que su propósito tiene relación con la formación profesional.

Al momento de realizar una lectura del abstract y título de los 103 documentos a la luz de los cuatro criterios de inclusión, se logró definir un total de 22 documentos. Estos fueron posteriormente analizados a partir de cuatro categorías i) propósito de la evaluación ii) momentos de evaluación iii) estrategia de evaluación y iv) perfil profesional-evaluación. Dicho análisis permitió evidenciar que las estrategias situadas con respecto al perfil profesional de los estudiantes, no es un aspecto que la evaluación en la modelación matemática tenga en cuenta

El análisis de los documentos inició con la lectura de cada documento y su codificación acorde con los criterios presentados en la Tabla 1.

Tabla 1

Categorías para el análisis

Categorías	Preguntas orientadoras
Propósito de la evaluación	¿Qué se evalúa cuando se implementa la modelación matemática?
Momentos de evaluación	¿En cuáles momentos/fases de la modelación matemática se realiza la evaluación?
Estrategia de evaluación	¿Cuáles instrumentos son utilizados en los procesos evaluativos de la modelación matemática?

Perfil profesional – evaluación	¿A quién se evalúa? ¿Qué relación hay entre el perfil profesional y la evaluación implementada?

Fuente: Elaboración propia. 2018.

Con el fin de dar respuesta a la pregunta que orienta la revisión de literatura se organizaron cuatro categorías para el análisis de los documentos. Cada una de las categorías cuenta con al menos una pregunta que pretende dar cuenta de los diferentes procesos evaluativos reportados en las diferentes investigaciones. Es de resaltar que las categorías descritas en la Tabla 1, se configuraron en la medida en que se realizóla lectura de los documentos, en particular se trató de responder a preguntas relacionadas con, ¿qué evaluar? ¿Cómo evaluar? ¿Dónde se evalúa? y ¿A quién se evalúa? En este sentido, se resalta que el nombre de las categorías y las preguntas que las orientan se configuraron antes y durante el proceso de lectura de los documentos de la revisión de literatura.

Análisis, resultados y conclusiones

Las anteriores cuatro categorías responden de manera general a los procesos evaluativos que se logran caracterizar en la revisión de los documentos. La primera categoría da cuenta del foco de atención en los procesos de evaluación en la modelación matemática. La segunda de los momentos específicos en los que se realiza la evaluación. La tercera resalta los instrumentos y técnicas utilizadas para realizar los procesos evaluativos y finalmente la cuarta resalta la relación que existe entre el proceso evaluativo desarrollado y el perfil profesional de los sujetos.

Se resalta que la evaluación de la modelación matemática reportada por Aydogan et al., (2017) y Diefes-Dux, et al. (2012) se enfoca en la apropiación que tienen los estudiantes en la solución de un problema que se sustenta en modelos matemáticos. Además, de la forma de comunicación de la solución encontrada. Mientras que el trabajo presentado por Flores, et al. (2016) se enfoca en los conceptos y procedimientos matemáticos que se utilizan para llegar a una solución y validación de un problema. Las investigaciones de Aydogan et al., 2017; Diefes-Dux et al., 2012 y Flores et al., 2016 reportan la importancia que tiene en los procesos de modelación matemática el trabajo en grupo.

En algunas investigaciones (Aydogan et al., 2017; Hoskingson, 2010; Diefes-Dux et al., 2012 y Flores et al., 2016) se evidenció que la evaluación se realiza a lo largo de todo el proceso de modelación matemática, algunos centrados en los procesos matemáticos, otros en los procesos comunicativos, pero como regularidad se identificó que la evaluación no se deja para el final del proceso.

Estos resultados sugieren la necesidad de desarrollar más investigaciones en las que la evaluación no solo se centre en el desarrollo de habilidades, competencias y conocimientos matemáticos; sino que también, se tenga en cuenta los procesos desarrollados por los estudiantes al realizar modelación matemática, donde el centro de interés no sea solo el modelo matemático, sino que se logre valorar el proceso desarrollado. Es decir, las decisiones que se tomaron para comprender, analizar y resolver el fenómeno estudiado.

La literatura que se incluyó en el análisis evidenció que el centro de atención al evaluar la modelación matemática varía dependiendo de los intereses de los profesores y de los currículos institucionales. Así mismo, se identificaron diferentes tipos de herramientas y técnicas para evaluar la modelación. En la mayoría de las investigaciones se identificó la importancia que tiene el trabajo en equipo. Se debe agregar que, en la mayoría de los estudios revisados, las

evaluaciones desarrolladas no tienen en cuenta el perfil profesional de los estudiantes, dado que la concepción de evaluación y las técnicas utilizadas no se sustentan, ni tampoco se relacionan con el perfil profesional de los sujetos. En este sentido la tendencia en la investigación es hacia las estrategias y herramientas para evaluar el aprendizaje de conceptos matemáticos y no otros aprendizajes como la comunicación y argumentación que se pueden alcanzar a través de la modelación.

Agradecimientos

Agradecimientos a los profesores Jhony Alexander Villa Ochoa y Mónica Marcela Parra Zapata y a otros integrantes de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática por las sugerencias realizadas a las diferentes versiones del documento. También a la Universidad de Antioquia por su apoyo a través del proyecto Estrategias Evaluativas para la Modelación Matemática (CODI-Facultad de Educación).

Referencias

Aydogan Yenmez, A., Erbas, A. K., Cakiroglu, E., Alacaci, C., & Cetinkaya, B. (2017). Developing teachers' models for assessing students' competence in mathematical modelling through lesson study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(6), 895–912.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Sao Paulo: Editora Contexto.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Vol. 10). Boston, MA: Springer US

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Brown, S., & Pickford, R. (2013). *Evaluación de habilidades y competencias en Educación Superior* (Ediciones). Madrid.

Diefes-Dux, H. A., Zawojewski, J. S., Hjalmarson, M. A., & Cardella, M. E. (2012). A Framework for Analyzing Feedback in a Formative Assessment System for Mathematical Modeling Problems. *Journal of Engineering Education*, *101*(2), 375–406.

Flores, E. G. R., Montoya, M. S. R., & Mena, J. (2016). Challenge-based gamification and its impact in teaching mathematical modeling. En *Proceedings of the Fourth International Conference on Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality - TEEM '16* (pp. 771–776). New York, New York, USA: ACM Press.

Frejd, P. (2013). Modes of modelling assessment-a literature review. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(3), 413–438.

Hamodi, C., Pastor, V. M. L., & Pastor, A. T. L. (2015). Medios, técnicas e instrumentos de evaluación formativa y compartida del aprendizaje en educación superior. *Perfiles Educativos*, *37*(147), 146–16

Hoskinson, A. (2010). How to Build a Course in Mathematical – Biological Modeling : Content and Processes for Knowledge and Skill, *9*, 333–341.

Hošpesová, A. (2018). Formative Assessment in Inquiry-Based Elementary Mathematics. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs* (pp. 249–268). Cham: Springer.

Iannone, P., & Jones, I. (2017). Special issue on summative assessment. *Research in Mathematics Education*, *19*(2), 103–107.

Jesson, J., & Lacey, F. (2006). How to do (or not to do) a critical literature review. *Pharmacy Education*, *6*(2), 139–148

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, *38*(3), 302–310.

Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285–311.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 3–32). Boston, MA: Springer US.

Niss, M. (1993a). *Cases of Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study*. (M. Niss, Ed.), *New ICMI Study Series* (Vol. 1). Dordrecht: Springer Netherlands.

Niss, M. (1993b). *Investigations into Assessment in Mathematics Education An lCMI Study*. (M. Niss, Ed.) (Vol. 2). Dordrecht: Springer Netherlands.

Rendón-Mesa, P. A. (2016). *Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: aportes de la modelación matemática*. Universidad de Antioquia

Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática*, *especial* (25 años), 314–338.

Suurtamm, C., Thompson, D. R., Kim, R. Y., Moreno, L. D., Sayac, N., Schukajlow, S., … Vos, P. (Sobran iniciales en los nombres) (2016). *Assessment in Mathematics Education*. *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Cham: Springer International Publishing

Villa-Ochoa, J. A., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, *18*(36), 219–251

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Articulación entre el conocimiento en matemática y física a través de la modelación

Alexander **Castrillón-Yepes**
Universidad de Antioquia
Colombia
alexander.castrillony@udea.edu.co

Ana Carolina **González-Grisales**
Universidad de Antioquia
Colombia
ana.gonzalez2@udea.edu.co

Sebastián **Mejía** Arango
Universidad de Antioquia
Colombia
sebastian.mejia4@udea.edu.co

Paula Andrea **Rendón-Mesa**
Universidad de Antioquia
Colombia
paula.rendon@udea.edu.co

En este trabajo se presentan algunos avances de una investigación que se realiza en el marco del programa de licenciatura en matemática y en física de la Universidad de Antioquia (Colombia). El problema de investigación emerge de la práctica pedagógica que se desarrolla en una institución educativa del municipio de Caldas, Antioquia; el cual se centra en la desarticulación entre el conocimiento en matemática y física en estudiantes de educación media técnica.

La génesis del problema se sustenta de dos cuestiones. La primera tiene que ver con el análisis de los documentos rectores de la educación colombiana (Estándares Básicos de Competencia, lineamientos curriculares y Derechos Básicos de Aprendizaje) y aportes de la literatura en didáctica de las ciencias naturales y de la matemática. La segunda cuestión parte de las observaciones institucionales y las descripciones en los diarios pedagógicos de los maestros en formación en práctica pedagógica que asumen el rol de investigadores. Dichas descripciones permitieron revelar cuestionamientos de los estudiantes referente a la utilidad de la matemática y su uso en otros contextos (Diarios de campo sesiones de clase 9 y 18 de octubre de 2018), y la

desarticulación entre las representaciones matemáticas de la "realidad física" localizadas en las experiencias que se realizaron durante el proceso de práctica (Diario de campo sesión de clase 4 de octubre de 2018). Así, el objetivo principal del trabajo es analizar las articulaciones que los estudiantes de educación media técnica construyen frente al conocimiento en matemática y física a partir de la modelación.

Algunos referentes teóricos para sustentar dicha articulación, muestran cómo la modelación se utiliza tanto en la enseñanza de la matemática y de las ciencias mediante las actividades experimentales. Autores como Blum (2011) sostienen que la modelación matemática se puede entender como una estrategia de enseñanza que permite establecer relaciones entre un dominio matemático con uno extra-matemático. De acuerdo con la intención investigativa y las prácticas pedagógicas si el dominio extra-matemático es la física, se podrían evidenciar articulaciones entre ambas áreas del saber que aporten a cumplir el objetivo propuesto. Por tanto**,** es importante considerar los modelos físicos y la experimentación, lo que García y Rentería (2011) definen como *modelización experimental,* como un elemento dentro de la investigación.

En ese orden de ideas, hablar de la modelación matemática en la educación en ciencias, permite según Malvern (2000) vincular las reglas científicas (observaciones de comportamiento, leyes, etc.) que tienen relación directa con la experimentación; asunto que permite rastrear el problema enunciado en esta investigación acerca de la desarticulación entre las representaciones matemáticas y la "realidad física". Así mismo, Vizcaíno y Terrazzan (2015) sostienen que la matematización de la física es importante para la comprensión y la formalización de las leyes físicas.

En el poster se mostrarán la contextualización, justificación y delimitación del problema de investigación a partir de los recursos documentales que se utilizan como planes institucionales y los diarios pedagógicos de los maestros en formación, al igual que un acercamiento al marco teórico y metodológico con la intención de presentar un instrumento que nos permita atender al problema propuesto.

Referencias bibliográficas

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (p. 15-30). Springer, Dordrecht.

García, J., y Rentería, E. (2011). Modelización de problemas para desarrollar habilidades de experimentación. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (29), 44-64.

Malvern, D. (2000). Mathematical models in science education. En Gilbert, J. y Boulter. C. (Eds.), Developing models in sciencie. (pp. 59-90). New York: Springer, Dordrecht.

Vizcano, D., y Terrazzan, E. (2015). Diferencias trascendentales entre matematización de la física y matematización para la enseñanza de la física. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, 38(38).

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Constitución comprensiva del objeto mental "límite matemático" realizada por estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones

Oscar Javier **González** Pinilla
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
oscarmateud@gmail.com
Camilo **Arevalo** Vanegas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
camiloarevaloul@gmail.com

Resumen

En el presente artículo, se aborda la problemática asociada a la construcción comprensiva de conceptos matemáticos en los estudiantes; quienes fundamentan sus prácticas en la trivialización de la matemática, como su aprendizaje por imitación, repetición o memorización. Ante esta problemática, se hace necesario dar a conocer nuevas formas de llevar al aula los conceptos matemáticos, donde se privilegien prácticas significativas, como la propuesta por Freudenthal (1983), la *constitución de objetos mentales*. Desde esta perspectiva, se identifica la necesidad de mostrar mediante datos empíricos que a partir de la matematización de situaciones es posible la constitución del objeto mental *"límite"* en estudiantes de educación media. En el abordaje de esta situación, se pudo evidenciar progresivos avances en la comprensión del objeto mental por parte de los estudiantes, demostrando que es posible promover en ellos prácticas matemáticas significativas centradas en la matematización y a su vez la construcción de un concepto matemático.

Palabras clave: Resolución de problemas, objetos mentales, matematización, Educación matemática realista, Fenomenología didáctica, modelo matemático, conceptos matemáticos.

Planteamiento del problema

La comprensión significativa de conceptos matemáticos debería ser una preocupación esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina. Sin embargo, las prácticas actuales de los estudiantes se centran en la memorización y repetición de algoritmos, que en muchas ocasiones logran desarrollar de forma correcta, pero sin la abstracción correcta del concepto que involucra sus procedimientos, lo que implica que el estudiante haga matemáticas, pero sin

comprenderlas. Respecto a esto, Balacheff (1987) señala que son cada vez más frecuentes los procesos de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos fundamentados en la "imitación", donde existe la tendencia por parte del estudiante a permanecer atentos a los distintos momentos de los que el docente dispone al solucionar un problema, encontrando la mayor necesidad o preocupación, en realizar la reconstrucción de una buena imitación, en la que el estudiante crea la falsa idea de que lo importante no es comprender, validar o justificar, sino copiar bien y repetir algorítmicamente lo que el profesor dice y hace. Esto pone en evidencia ciertas dificultades que los alumnos enfrentan al relacionar el concepto matemático involucrado en una situación problema con el procedimiento que realiza al momento de darle solución.

Uno de los factores que inciden en dicha dificultad, es precisamente que las situaciones problemas que los docentes proponen a sus estudiantes para desarrollar sus habilidades en la comprensión de un concepto carecen de sentido para éste, ya sea por estar muy ligados a la misma matemática o por no ser suficientemente comprensible siquiera en su enunciación; lo que irremediablemente lleva a abandonar la esencia del concepto reemplazándola por el procedimiento, con las nefastas consecuencias que esto trae en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Se hace indispensable entonces encontrar situaciones problemas que motiven la actividad autónoma por construir el concepto por parte de los estudiantes, a partir de contextos realísticos; esto es, situaciones capaces de ser imaginables y comprensibles, donde la "realidad" no se restringe exclusivamente a problemas contextualizados o ligados a la vida real del estudiante, sino a aquellas situaciones que son claras, perceptibles y accesibles para él, quien debe aprender matemáticas desarrollando y aplicando herramientas matemáticas en situaciones que tengan sentido para quien los resuelve. En este sentido, lo que se debe buscar al interior del aula, es la resolución de problemas como práctica matemática cuya actividad característica es la *matematización* (Freudenthal, 1983). Esta postura es fundamental en el enfoque teórico de la Educación Matemática Realista (EMR), pues propone trabajar la matemática inicialmente como actividad humana y solo después como cuerpo cerrado de teoremas y axiomas formales. Dicha actividad es la de resolver y buscar problemas que ayuden a organizar la realidad o la matemática misma; o como lo señala su fundador Freudenthal (1983),

> *Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas (Freudenthal, 1983, p.7)*

Freudenthal se refería a la matematización de la realidad como la marera de organizar la matemática a partir de los fenómenos, a lo que llamo el *análisis fenomenológico*, que tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Para Freudenthal la *"Fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlos en su relación con los fenómenos para los que fueron creados y a los que han sido extendidos en el proceso de aprendizaje de la humanidad, y, cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, es fenomenología didáctica," (1985, p. 9).*

Desde esta perspectiva, la enseñanza clásica de las matemáticas se ha constituido en un proceso de enseñanza-aprendizaje inicial de los objetos del pensamiento, para después llegar a los

fenómenos que son organizados por ellos, esto es, primero los conceptos y después las aplicaciones. La propuesta de Freudenthal, sugiere la *constitución de objetos mentales*[1] a partir de la organización de los fenómenos para los cuales ha sido creado. En este sentido, la constitución de objetos mentales precede a la construcción de conceptos, que se logra solo si se alcanza una organización de los fenómenos que son medios descritos por el objeto mental en cuestión. Por lo tanto, para poder adquirir los conceptos matemáticos a través de fenómenos, es necesario un paso intermedio, la constitución de objetos mentales. En estos objetos mentales se recogen todos los significados de todos los fenómenos que están en relación con los conceptos implicados, y, de este modo se pude llegar hasta el significado del concepto. Así el objetivo principal de la enseñanza es, según Freudenthal, la constitución de objetos mentales.

Diseño y metodología de investigación

Desde el enfoque de la EMR, se manifiesta la necesidad de diseñar tareas por parte del docente en un contexto realista, entendiendo esto como situaciones problemáticas imaginables y comprensibles para los estudiantes, para lo cual pueda generarse una *actividad de matematización*; es decir, organizar o estructurar la realidad, a partir de los fenómenos en torno a un objeto mental que permitan acceder a conocimientos matemáticos formales. En este sentido, se busca una metodología de tipo cualitativo/interpretativo llamada *fenomenología didáctica* donde las situaciones deben ser seleccionadas de modo que puedan ser organizadas por los objetos matemáticos que los estudiantes deben constituir y se relacionan directamente con la finalidad del *diseño didáctico*, donde se asumen algunos elementos metodológicos y técnicos que configuran la acción de diseñar las situaciones problemas realísticas por parte del docente, a lo que desde el enfoque se le llama didáctizar.
El diseño metodológico de la propuesta se centra en la aplicación de una situación problema realístico a matematizar llamada *"el terreno óptimo*", que generen fenómenos matematizables y que sean organizados por el objeto mental de "límite matemático", y que se enuncia de la siguiente manera:

Un agricultor ha comprado un terreno y quiere usar una parte de éste para su pequeño cultivo de tomate de árbol, para cercarlo dispone de 100 metros de alambre y suficientes postes; sin embargo, desea que su producción sea la máxima posible con los recursos disponibles. Ustedes han sido contratados para diseñar el modelo óptimo para los fines del agricultor.

A esta situación se diseñan unas tareas que buscan que los estudiantes promuevan actividades de matematización, en este caso se estudiarán las primeras dos tareas que se llevaron al aula, direccionadas a constituir el objeto mental de límite matemático; de la siguiente manera:

Tarea 1: En grupos de tres estudiantes, diseñen la representación de un terreno (1cm::1m) con una lámina de icopor, tome 100 cm de lana que representarán el alambre para cercar el terreno cultivable y chinches para los postes. Use el material para hacer una representación de sus sugerencias al agricultor y diseñe el terreno cercado que a su consideración es el óptimo para mayor producción de tomates.

[1] Lo que Freudenthal llama *objetos mentales* es lo que Fichsbein denomina *intuiciones* y Piaget *representaciones*

Tarea 2: Realizar una exposición a manera de debate en el que se dé a conocer el diseño construido por cada grupo, justificando el porqué de su creación y atendiendo a la pregunta: ¿Por qué su diseño es el óptimo para garantizar que el agricultor obtendrá la mayor producción de tomates?

Resultados

Tarea 1:

Los estudiantes en sus respectivos grupos realizaron el diseño de un terreno cercado usando la lana (alambre) y los chinches (postes) dentro del terreno total (icopor). Cada grupo elaboró un diseño concertado y que en su opinión era el terreno óptimo para cultivar, entendiendo lo "optimo" como dependiente del área, por lo que el problema fundamental para los estudiantes era buscar un diseño de terreno que contemplara el área máxima que se podía construir con un perímetro de 100 cm, atendiendo a la pregunta, ¿Qué forma y características debe tener el terreno para que la producción de tomates sea máxima? La construcción del terreno atendía a las siguientes especificaciones:

- El terreno debe ser totalmente cerrado
- El terreno cercado debe estar dentro del terreno mayor.
- Debe usarse el total de alambre (lana) proporcionado.
- La cantidad de postes (chinches) será elección de cada grupo.
- La forma del terreno puede ser rectilínea o curvilínea.



Figura 1. Algunos diseños de terreno construidos por los estudiantes

Como se ve en los diseños de cultivo elaborados por cada grupo (Figura 1), se evidencia que los estudiantes se preocupan por obtener una superficie amplia con los recursos disponibles; es decir, su preocupación principal está en diseñar un terreno con la mayor superficie posible, con la restricción de tener un perímetro de 100 cm. Aquí surgen figuras rectilíneas y un intento por figuras curvilíneas; diseños que se entraron a discutir a manera de debate en la tarea número 2.

Tarea 2

La situación problema propuesta ofrece una variedad de estrategias de solución. Permite que los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros. En este caso, abre la posibilidad de discutir el grado de eficacia de las destrezas usadas. A continuación, se presenta una de las muchas discusiones entre los estudiantes a la hora de defender sus diseños. Se eligen tres casos específicos, el diseño del círculo, el del octágono regular y la figura mixta (rectilínea y curvilínea), donde se tenía por objetivo que argumentaran a favor de sus propios diseños y en contra de los demás, usando razones lógicas y convincentes para poder validar que su propuesta era la más asequible para los cometidos del agricultor:

Grupo 1: Octágono regular

Grupo 2: Circulo

Conversación

Grupo 1: Nuestro diseño es un octágono regular (mostrando su diseño) y consideramos que es el que tiene mayor área porque las esquinas forman ángulos amplios lo que asegura que se aprovecha el terreno; al contrario de lo que pasa con un triángulo o un cuadrado, donde las esquinas son demasiado cerradas. En el caso del cuadrado de 90º; tendríamos ángulos pequeños lo que implicaría una reducción del terreno y una pérdida de superficie.




Figura 2. Grupo 1 mostrando que el octágono regular tiene ángulos obtusos y que el diseño del triángulo desaprovecha superficie por tener ángulos agudos

Grupo 2: pues no creo que el octágono sea el de mayor área; porque nosotros hicimos el círculo precisamente porque creemos que entre menos lados rectos tenga la figura más superficie vamos a tener; porque lo que hacen los ángulos, sea cual sea la amplitud, es reducir el espacio del terreno.



Figura 3. Grupo 2 mostrando su diseño circular usando la mayor cantidad de postes

Grupo 1: Pues para mí entre más ángulos amplios tenga el terreno; es decir, entre más lados tenga, vamos a asegurar que los ángulos sean obtusos y por lo tanto su abertura encerrará mayor cantidad de terreno.
Grupo 1: Pero una figura que tenga solo líneas rectas y además con ángulos obtusos será un terreno que encierre mayor área.
Grupo 2: Pero en el caso del círculo no tengo lados, y por tanto no tengo ángulos, lo que asegura que estoy encerrando la totalidad de terreno que se puede cercar con 100 m de alambre.
Grupo 1: Pero ustedes en realidad no tiene un círculo, porque para obtener un círculo usted necesitaría de muchos postes y por lo que veo su cultivo tiene una cantidad de postes fija, espere y cuento 1, 2, 3, 4,…, 49, 50 (realizando el conteo de chinches del diseño circular) son como 50 chinches lo que generaría una figura de cincuenta lados.



Figura 5. Estudiante del grupo 1 haciendo el conteo de postes del diseño del grupo 2

Grupo 1: Yo creo que independientemente de la forma del terreno, todos estamos usando la misma cantidad de alambre por lo tanto tendríamos figuras de la misma área.
Profesor: Lo que usted asegura entonces, es que, dado que todas las figuras tienen el mismo perímetro de 100 m, esto implica que ¿todos tendrán la misma área?
Grupo 1: No, eso es mentira, porque por ejemplo yo hice esta operación (sacando una hoja con cálculos matemáticos) en un cuadrado de 100 cm de perímetro tenemos un área de 625 cm^2 y si tenemos otra figura como por ejemplo un rectángulo de 40 cm x 10 cm también tenemos una forma de perímetro 100 cm, pero de área 400 cm^2
Grupo 2: Si es verdad, el perímetro es independiente del área; por eso el problema está en buscar la forma que encierre la mayor área con un perímetro fijo de 100 metros.
Profesor: Como en eso estamos de acuerdo, volvamos al problema del círculo, mi pregunta es ¿Efectivamente es un círculo?
Grupo 2: pues no, pero se acerca mucho a serlo; de hecho, si tuviera más chinches (postes) le pondría todos los necesarios con el fin de ampliar la amplitud de los ángulos y asegurar que se encierra mayor cantidad de espacio.
Grupo 1: Entonces para hacer un terreno circular necesitaríamos de infinitos postes lo cual es imposible, la forma debe ser obligatoriamente rectilínea.
Grupo 2: Pues sí, pero sin embargo el octágono no es el de área mayor, porque en ese caso podríamos hablar del eneágono o el decágono de lados iguales…
Profesor: Regular
Grupo 2: eso, el dodecágono regular tendría mayor área que su octágono.
Grupo 1: Si. En conclusión, para asegurar que el terreno encierre la mayor área posible se deben usar la mayor cantidad de postes, acercándonos a la construcción de un terreno circular.

Análisis de los resultados

Como podemos ver, uno de los aspectos más relevantes es que los estudiantes logran transformar el problema inicial enmarcado en el contexto de la agricultura, en un problema matemático de optimización y maximización de áreas. En la conversación, las afirmaciones que se realizan son bastante importantes para lograr la constitución de objetos mentales y posterior abstracción significativa de un concepto matemático; por ejemplo, la conclusión a la que llega uno de los grupos *<Sí tuviera más chinches (postes) le pondría todos los necesarios con el fin de ampliar la amplitud de los ángulos y asegurar que se acerque al área de un círculo>*, podría suponer una ayuda inicial y bastante empírica para crear modelos mucho más complejos, como el del límite matemático, donde los estudiantes reconocen que al aumentar indefinidamente los vértices o lados de un polígono regular, éste va adoptando la forma y el área de un círculo del mismo perímetro; que dicho en términos matemáticos con el uso del concepto de límite, sería equivalente a decir: .

$$\lim_{\text{Cantidad de vértices} \to \infty} \text{Área de un polígono regular} = \text{Área de un círculo}$$

<El área de polígonos regulares cuando la cantidad de vértices tienden al infinito es igual al área de un círculo de igual perímetro al polígono regular>

Este modelo que los estudiantes no enuncian de manera formal pero que al parecer por las acciones que realizan (como la de ir aumentando cada vez más la cantidad de chinches en los polígonos regulares que van construyendo hasta volverlos un círculo) y las afirmaciones que enuncian en los cuestionarios que contestan los estudiantes (ver figura 5), podrían suscitar la emergencia más comprensible de la idea de límite matemático.

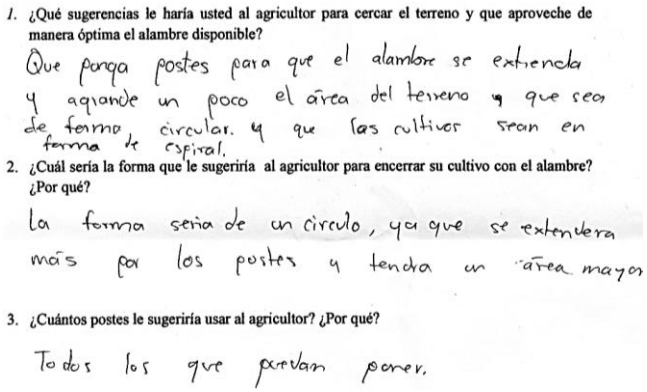

1. ¿Qué sugerencias le haría usted al agricultor para cercar el terreno y que aproveche de manera óptima el alambre disponible?
Que ponga postes para que el alambre se extienda y agrande un poco el área del terreno y que sea de forma circular. y que las cultivos sean en forma de espiral.
2. ¿Cuál sería la forma que le sugeriría al agricultor para encerrar su cultivo con el alambre? ¿Por qué?
la forma sería de un círculo, ya que se extendera más por los postes y tendra un área mayor
3. ¿Cuántos postes le sugeriría usar al agricultor? ¿Por qué?
Todos los que puedan poner.

Figura 5: Cuestionario diligenciado por el grupo N° 2

En este caso, podría suponerse que la situación problema enmarcada en el contexto de la agricultura brindó una variedad de fenómenos que fueron organizados por el objeto mental que los estudiantes poseen sobre límite matemático, en el que el contexto sirvió como excusa para la emergencia de un modelo más formal en los estudiantes, o como lo diría Freudenthal, el contexto usado como *"intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal." (Freudenthal, 1991, p. 34)*

Conclusiones y reflexiones

Como se puede evidenciar, los procesos de matematización que se dan en la situación problema, garantizan el surgimiento de una actividad argumentativa en los estudiantes, que intenta en este caso, constituir el objeto mental de límite. Este acercamiento intuitivo del estudiante hacía el concepto formal es de gran importancia para la EMR, ya que son fundamento para garantizar que los estudiantes están reemplazando prácticas que trivializan la matemática, siendo sustituidas por prácticas más significativas. Estos procesos en los que la matemática es redescubierta o reinventada son los que tienen realmente un valor en los estudiantes, que desde la propuesta de Freudenthal sería una forma de reinvención guiada, en la que se usa el sentido común, el lenguaje cotidiano y las prácticas empíricas para redescubrirlas y comprenderlas.

> *"Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común cristalizan en reglas que se transforman de nuevo en sentido común, pero en un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor, como en la constitución de un objeto mental que en procesos más avanzados de abstracción llegarán a convertirse en conceptos matemáticos formales" (Freudenthal, 1991. Pág. 9)*

Aquí el docente es agente fundamental para mediar entre las producciones informales de los estudiantes y las herramientas formales ya institucionalizadas de la matemática como disciplina. De esta manera, podemos concluir que los estudiantes presentan descriptores propios de una matematización, donde el problema es abordado desde un contexto puramente matemático, trasponiendo los resultados obtenidos en este contexto al problema del agricultor; mientras que reconocen los alcances y límites de sus descubrimientos en las implicaciones del problema original. En este proceso de matematización se hace evidente un proceso de *exploración* de diferentes modelos que posibilitan la solución del problema, abordados desde la reflexión, y finalmente se presentan procesos de formalización cuando concluyen proposiciones dentro de la matemática, aplicables a la situación misma.

En este caso, ciertos anunciamientos concluyentes que hacen los estudiantes en su discurso argumentativo cuando resuelven la situación problema, podrían considerarse aspectos que formalizan y muestran un acercamiento subjetivo al concepto de límite matemático; por ejemplo, cuando refieren que *"dos figuras diferentes con el mismo perímetro no tienen la misma área"* o *"Cuando la cantidad de vértices en un polígono regular tiende al infinito, su área se acerca a la de un círculo con el mismo perímetro del polígono regular, la cual a su vez es el área máxima que se pude construir";* son proposiciones que logran descubrir y generalizar dentro de la matemática pero que han sido suscitadas por la situación problema misma cuando trabajan en procesos de matematización de la misma.

Referencias y bibliografía

Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. F. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta*. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática. Recuperado de: *http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf*

Freudenthal, H. (1983).Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. *Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001*

Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). HANS FREUDENTHAL, un matemático en Didáctica y teoría curricular.

Narvaez, D. (2009). "Sobre la relación entre estrategias utilizadas por estudiantes de matemáticas en la resolución de problemas asociados a teoría de números y los procesos de matematización desarrollados en un ambiente de aprendizaje constructivista". *Tesis Maestría en educación, Universidad de los Andes, Centro de Investigaciones y Formación en Educación (CIFE)*

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) La educación matemática en la enseñanza secundaria (págs. 61-94). Barcelona: Horsori / ICE. ISBN 84-85840-65-8

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Matemática, Física y Música: Interdisciplina entre Arte y Ciencia

Lucas Josué **Villagra**
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta
Argentina
lucasjosuevillagra@gmail.com
María de las Mercedes **Moya**
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta
Argentina
maritamoyaster@gmail.com
Andrea Carolina **Monaldi**
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta.
Argentina
acmonaldi@gmail.com

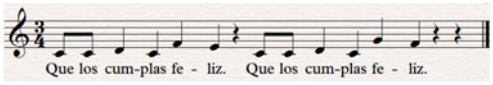
La Matemática es una de las disciplinas científicas con mayor aplicabilidad en distintos campos de estudio, aún en aquellos que en el imaginario social no están relacionados, entre ellos el arte y en particular la Música (Aceff, y Lluis-Puebla, 2006). Este trabajo propone el abordaje interdisciplinario entre aspectos que vinculan conceptos matemáticos, con nociones de la física del sonido y las bases de la teoría musical. Se busca, por un lado, "algebrizar" la música desde la Teoría de Grupos y, por otro, "musicalizar" funciones con el Análisis Armónico incorporando elementos de la física del sonido (Contreras de la Fuente, Díez Bedmar y Pacheco Torres, 2007). Como resultado, surge una propuesta para enriquecer la enseñanza-aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos para docentes y alumnos del Profesorado en Matemática y carreras afines. La misma, fue sintetizada en un Taller dictado en el marco de las II Jornadas de Enseñanza de la Matemática en 2017, en la Universidad Nacional de Salta (Argentina), titulado: "Matemática, Física y Música. Una orquestación interdisciplinar" (Moya, Monaldi y Villagra, 2017), de nueve horas de duración distribuidas en tres días.

Con metodología lúdica, se procuró un aprendizaje por descubrimiento, analogía y aproximación, facilitando a los asistentes recursos tecnológicos tales como videos, instrumentos musicales, teclado virtual y el software MATLAB. Tras una introducción audiovisual y debate sobre la formación de la escala pitagórica y las relaciones de proporción entre notas, se buscó la "construcción" matemática formal de las notas musicales a distintas octavas por Relaciones de Equivalencia (RdE) entre números reales. Esto permitió definir un isomorfismo entre las notas musicales y dichos números: así, por ejemplo, sin importar en qué octava se encuentran, las infinitas notas DO (C) están en la misma clase de equivalencia. Análogamente, mediante teclado virtual, se introdujo la noción de Intervalos Musicales, para luego construirlos a través de RdE.

Posteriormente, a partir de conceptos básicos de física ondulatoria, se pudo incorporar la representación de sonidos mediante funciones sinusoidales de distinta frecuencia y extensión, estableciendo el rango de frecuencias audibles. Se enfatizó que las notas musicales de la escala pitagórica se asocian a frecuencias específicas. En esta instancia cobró sentido aquel número real designado a una nota que surgía como representante de las clases de equivalencia; éste no había sido elegido al azar, pues resulta ser la frecuencia de estas funciones. Se estableció la relación entre la extensión de las funciones y las figuras musicales (duración de la nota); por último, se introdujo la idea de timbre explorando el sonido de una nota en distintos instrumentos. Formalmente, se lo vinculó con la forma de la función que representa el sonido: una suma de sinusoides de distintas frecuencias, peso y amplitud (la fundamental y sus armónicos). Como aliado tecnológico, el software MATLAB posibilitó programar, a través de comandos sencillos, las notas musicales a partir de distintas sinusoides, permitiendo visualizarlas y sonificarlas.

La incorporación de los conceptos matemáticos, físicos y musicales involucrados permitió a los cursantes, como actividad final, construir un fragmento de pieza musical (cuidadosamente elegida) a través de una función definida por ramas y sonificarlo en MATLAB. Por ejemplo, una de las consignas del Taller pide construir la escala musical con sus frecuencias correspondientes, a partir de C=261 Hz. Así obtuvieron, entre otras, que la nota RE (D) corresponde a (9/8)C. Luego, se pide modelizar un fragmento musical a partir de su partitura ("Imagine" de John Lennon, "Feliz Cumpleaños", entre otros). La Figura 1, muestra la función por ramas planteada para "Feliz Cumpleaños", donde T representa la duración prefijada de la Negra, y ε una variación pequeña de tiempo que indica una "respiración".

$$f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen}(2C\cdot\pi t) & \text{si} \quad 0\le t<\frac{T}{2}-\varepsilon;\frac{T}{2}\le t<T;2T\le t<3T;\\ & \quad 6T\le t<\frac{13}{2}T-\varepsilon;\frac{13}{2}T\le t<7T;8T\le t<9T\\ \operatorname{sen}(2D\cdot\pi t) & \text{si} \quad T\le t<2T;7T\le t<8T\\ \operatorname{sen}(2E\cdot\pi t) & \text{si} \quad 4T\le t<5T\\ \operatorname{sen}(2F\cdot\pi t) & \text{si} \quad 3T\le t<4T;\ 10T\le t<11T\\ \operatorname{sen}(2G\cdot\pi t) & \text{si} \quad 9T\le t<10T\\ 0 & \text{si} \quad \frac{T}{2}-\varepsilon\le t<\frac{T}{2};\ 5T\le t<6T;\\ & \quad \frac{13}{2}T-\varepsilon\le t<\frac{13}{2}T;t\ge 11T \end{cases}$$



C=DO; D=RE; E=MI; F=FA; G=SOL; 0=Silencio

Figura 1. Función por ramas y partitura de "Feliz Cumpleaños".

La sonificación y visualización mediante software, permitió conjugar los aspectos principales del Taller, convirtiendo a la computadora en una suerte de "instrumento musical". Como resultado de la experiencia, el 80% de los asistentes sonificaron un fragmento musical, uno de los objetivos principales del trabajo. No obstante, la complejidad de los temas abordados fue un obstáculo didáctico que generó conflictos metacognitivos en los asistentes, brindando variables a tener en cuenta para futuros cursos.

Referencias y bibliografía

Aceff, F., Lluis-Puebla, E. (2006). Matemática en la Matemática, Música, Medicina y Aeronáutica. Publicaciones Electrónicas. Sociedad Matemática Mexicana.

Contreras de la Fuente, A., Díez Bedmar, M., Pacheco Torres, J. (2007). Las matemáticas y la evolución de las escalas musicales. SUMA54. 43-49.

Moya, M., Monaldi, A., Villagra, L. (2017) Matemática, Física y Música. Una orquestación Interdisciplinar. Salta, Argentina. Segundas Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas. Disponible en: https://drive.google.com/drive/u/0/folders/1ziS8cE_yFBQR7oWtQmkSe28NmPc_m5Zw.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Formalización de fenómenos físicos en actividades experimentales a través de la modelación

Nicolás Adolfo **Amaya** Lozano
Universidad de Antioquia
Colombia
nicolas.amaya@udea.edu.co
Diego Alejandro **Ríos** Pérez
Universidad de Antioquia
Colombia
diego.riosp@udea.edu.co
Paula Andrea **Rendón** Mesa
Universidad de Antioquia
Colombia
paula.rendon@udea.edu.co

La intención de este póster es presentar los adelantos de una investigación que se enmarca en el proceso de formación de maestros en el pregrado de licenciatura en matemáticas y física de la universidad de Antioquia (Colombia). En dicha investigación los profesores en formación reconocieron algunas problemáticas que presentan los estudiantes de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín (Antioquia), los cuales se relacionan con la falta de comprensión de fenómenos físicos y modelos matemáticos en la clase de física; además, la escasa relación entre la parte formal y fenoménica de la ciencia. El resultado de la falta de relación entre estos dos últimos "termina en una falta de compresión tanto del concepto físico, como del modelo matemático, de tal forma, que no se llega nunca a la elaboración de una visión del mundo físico" (Ayala, Garzón & Malagón, 2007, p.40).

Formalizar, afirman Arcà y Guidoni (1987), quiere decir dar una forma definida y esquematizada a algo. El tipo de formalización que para esta investigación interesa es en la que existe y se reconoce una estructura formal que permita definir y esquematizar un fenómeno en términos de esta estructura. Por ejemplo, la geometría elemental puede considerarse como el sistema formal de relaciones y formas abstraídas de lo concreto para entender nuestras percepciones del mundo espacial (Ayala, Garzón & Malagón, 2007). En particular, para la física, la estructura matemática permite formalizar fenómenos físicos para analizarlos y comprenderlos. En ese sentido, un modelo matemático es resultado de la formalización.

En correspondencia con la idea anterior, esta investigación se fundamenta en dos aspectos. El primero aspecto es la modelación, de la cual se asume una visión desde la mirada de Blomhøj

y Hoff (2006); es decir, como una práctica que dinamiza el proceso de enseñanza y aprendizaje y establece una relación entre el mundo real y la matemática. Los documentos rectores de Colombia para el área de ciencias naturales plantean la importancia de dar al estudiante la posibilidad de entender y describir su acontecer fenoménico, donde es justamente la modelación una de las estrategias que permite a los estudiantes construir y hacer uso de modelos para dar cuenta de su realidad (MEN, 1998). El segundo aspecto que fundamenta la investigación es la actividad científica escolar, entendida como un proceso de atribución de sentido al mundo natural, de manera similar a la actividad que realizan los científicos, asunto que posibilita la capacidad de pensar el mundo con teorías (Izquierdo-Aymerich & Adúriz-Bravo 2005; Paz, Márquez & Adúriz-Bravo, 2008). La actividad científica escolar promueve la construcción o uso de modelos mediante el pensamiento, la acción y el lenguaje (Izquierdo-Aymerich & Adúriz-Bravo, 2005).

Finalmente, la investigación define como objetivo identificar modelos que planteen los estudiantes en torno a fenómenos físicos en actividades experimentales y así dar cuenta de la modelación como práctica de enseñanza y aprendizaje que posibilita la relación entre la parte formal y fenoménica de la ciencia.

Referencias y bibliografía

Arcà, M. & Guidoni, P. (1987). *Guardare per sistemi, guardare per variabili.* Turín, Italia: Emme Edizioni.

Ayala, M. M., Garzón, M. & Malagón, F. (2007). Consideraciones sobre la formalización y matematización de los fenómenos físicos. *Praxis Filosófica,* (25), 39-54.

Blomhøj, M. & Hoff, T. (2006), Teaching mathematical modeling through project work. *International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 163-177.

Izquierdo-Aymerich, M., & Adúriz-Bravo, A. (2005). Los modelos teóricos para la ciencia escolar. Un ejemplo de química. Actas del VII Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias, *Enseñanza de las Ciencias*, Número Extra. Congreso llevado a cabo en Granada, España.

Ministerio de Educación Nacional. (1998b). *Lineamientos Curriculares: Ciencias Naturales y educación ambiental*. Bogotá: Magisterio.

Paz, V. A., Márquez, C., & Adúriz-Bravo, A. (2008). Análisis de una actividad científica escolar diseñada para enseñar qué hacen los científicos y la función de nutrición en el modelo de ser vivo. *Revista Latinoamericana de Estudios Investigativos*, 4(2), 11-27.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA): un planteamiento desde la Teoría de la Situaciones Didácticas (TSD)

Juddy Amparo**Valderrama**Moreno
UniversidadMetropolitana de Educación, Ciencia y Tecnología (UMECIT)
Panamá
juddyamparo2@gmail.com
Dora Solange**Roa** Fuentes
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander (UIS)
Colombia
roafuentes@gmail.com

Resumen

Esta investigación propone el diseño de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) sustentado en los elementos que propone la Teoría de las Situaciones Didácticas: aprendizaje por adaptación, intención, medio, acciones, retroacciones, interpretación, validación e institucionalización del saber. En particular a través del diseño de tallerescon la herramienta del software dinámico GeoGebra;se busca que los estudiantes de secundaria grado octavo puedan experimentar, representar, visualizar, conjeturar en un contexto matemático mediante la interacción en un OVA.Se afirma que el OVA es una estrategia donde sepotencia el desarrollo de procesos matemáticos, puesto que sin mayor intervención directa del profesor y mediante el progreso de actividades matemáticas permite el paso a paso por niveles para lograr la comprensión de objetos matemáticos para descubrir propiedades y características propias del saber matemático, particularmente referidas al desarrollo de Pensamiento Algebraico (PA).

Palabras clave: OVA, TSD, modelo didáctico, Pensamiento Algebraico, TAC, procesos matemáticos.

Introducción

El surgimiento delsiglo XXI haestado marcadopor la incursión en la era digital donde el lenguaje y pensamiento surgen de formadiferente; la comunicación entre estudiante y profesor varían en comparación condécadas atrás; se habla denativos e inmigrantes digitales y conello ciertas características en común. La gran mayoría de estudiantes nacidos en este siglo son nativos digitales, le gusta las multitareas, los proceso paralelos, recibir información de forma inmediata, prefieren los gráficos y no los textos, les gusta trabajar en red y por la red

demostrando mayor efectividad. Parafraseando a (Prensky, 2011); el proceso de formación no les atrae y manifiestan con facilidad su desinterés, optan por la rebeldía y no valoran el tenor de la experiencia del profesor. Pero esto permite en cuento a la enseñanza de matemáticas realizar cambios paraapuntar a formar seres matemáticamente competentes con capacidades para desenvolverse en la sociedad del conocimiento; al igual que aprovechar las bondades ofrecidas por el uso de las tecnologías digitales en los procesos de enseñanza y generar mayor impacto de aprendizaje en los estudiantes. En este caso se busca a través del diseño de actividades con tareas específicas en el software dinámico GeoGebrabajo el enfoque de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), que los estudiantes puedan experimentar, representar, visualizar, conjeturar y hacer uso de la matemática en un contexto matemático. Esto mediante la interacción en un "Objeto Virtual de Aprendizaje" OVA como una estrategia didáctica de refuerzo donde se potencia el desarrollo del pensamiento matemático enfatizando en el pensamiento variacional y espacialmediante el desarrollo de los procesos matemáticos. Por tanto, se pretende validar un OVA que potencie los procesos matemáticos en estudiantes de secundaria tomando como fundamento la Teoría de las Situaciones Didáctica mediante el diseño y análisis de actividades en un software de geometría dinámica para dar respuesta a la pregunta: ¿Qué procesos matemáticos logran potenciar estudiantes de secundaria cuando interactúan con un OVA diseñado con base en la Teoría de Situaciones Didácticas?En repuesta, se hace una mirada a la incursión del uso de la tecnología y las bondades ofrecidas a la enseñanza de la matemática y sus aportes a la Educación Matemática.

El OVA: una estrategia que responde a las necesidades de la era digital

En los ámbitos internacional y nacional el estudio de la enseñanza de la geometría y el algebra en la escuela ha sido un tema de interés y la tecnología ha ido incursionando; según la National Council ofTeacherofMathematics (NCTM, 2000, por su sigla en inglés) en su texto Principios y Estándares de la Educación Matemática, el cual fue traducido por la sociedad andaluza THALES, allí se define la tecnología como el sexto principioanteponiéndose la igualdad, el currículo, la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación, y se determina la tecnología como un factor esencial que influye en la matemática que se enseña y potencia aprendizaje. Pero no se trata de incluir la tecnología como dinamismo de la enseñanza sino como una acción de regulación de procesos donde el profesor gestiona y organiza estructuras con una intención de enseñar un saber matemático; la intención es enseñar más y de mejor manera, en términos de Lozano (2011) no es equipar a los estudiantes en el manejo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), sino utilizarlas con fines pedagógicos, gestionarlas para lograr mayor impacto de aprendizaje es por esto que este trabajoseaborda las TIC sino las Tecnologíasdel Aprendizaje y el Conocimiento (TAC).

En efecto en el OVA se retoma lo planteado por Brousseau (2007) y a partir de una situación a- didáctica se busca responder un problema mediante la interacción entre intención (propuesta por el profesor en la actividad) y el medio; el estudiante realiza una acción que le permita resolver el problema, seguidamente valida su resolución y en caso de no ser acertada genera una nueva estrategia de solución "retroacción", producto de esta situación a-didáctica se genera un conocimiento y se dice que el estudiante aprendió y con esto que se realizó un proceso que se modificaron los conocimientos. Sin embargo, aún no finaliza su aprendizaje puesto que posteriormente se genera una situación didáctica donde se institucionaliza el saber. Como lo menciono Acosta, Monrroy y Rueda (2010) el conocimiento es diferente al saber. El

conocimiento personal y contextualizado, mientras que el saber es impersonal y descontextualizado, es por esto por lo que se requiere una situación didáctica donde el profesor le permita de una forma guiada, pero con poca intervención realizar la validación. La validación es uno de los momentos más importantes, pero no es el resultado, el profesor debe garantizar la oportunidad de determinar sus aciertos o desaciertos, equivocarse y buscar la autocorrección a partir de formulación de proposiciones y validarlas; en consecuencia, la validación permite relacionar la enseñanza (proyecto del profesor) con el aprendizaje (proyecto del estudiante) (Margolinas, 1993).

La incursión de la era digital al proceso enseñanza aprendizaje

Parafraseando (Prensky, 2011) el nativo digital manifiesta que no presta atención y opta por la rebeldía porque el proceso de formación no les atrae, no les motiva, no despierta el interés, puesto que para ellos todo es valorado a tenor de la experiencia. Razón por la cual nativos e inmigrantes digitales deben buscar puntos de equilibrio para poder hacer posible un proceso enseñanza- aprendizaje agradable donde la tecnología sea una herramienta que facilite no solo desde el punto atractivo, sino a través de la simulación de fenómenos se evidencie los procesos de experimentación, visualización, comprobación y validación de saberes, en consecuencia, se habla de la importancia de romper barreras de comunicación digital y generar un acercamiento entre nativos e inmigrantes de tal forma que se pueda hablar la misma lengua.

Los profesores en su cotidianidad abogan por un lenguaje pedagógico y tradicional, mientras que los estudiantes por un lenguaje digital. El nativo digital es tan visual que puede pasar hasta 10 horas sin preguntar, no porque no lo requiera sino porque lo prefiere así, afirma Prensky. Es así como cada vez más se requiere prácticas pedagógicas que le brinden al estudiante la posibilidad de trabajar en equipo, en red y tengan un alto de contenido visual que le permita generar un aprendizaje con un lenguaje propio de su época.

Como nos dice Gertrudiz, F., Durán, J., Gamonal, R., Gálvez, M. y García. F. (2010) los roles han cambiado y es imposible que el conocimiento lo adquieran de una sola o de un grupo determinado, se vive en la inmediatez, se afirma que cada vez es más tenue el lapso que transcurre en el momento que el conocimiento es adquirido y el momento que el conocimiento es absoluto. Las técnicas de aprendizaje se han trasladado a la red y por la red donde a través de la interacción con un ordenador se relaciona, se comunica, pone en juego sus habilidades en forma creativa, explora y hace posible su actualización constante.

Competencia matemática

En la literatura de la Educación Matemática ha revisado lo correspondiente a ¿Que enseñar? ¿Cómo enseñar?una matemática contextualizada en sí misma y en otras ciencias, donde los contenidos no sean más que el pretexto para enseñarla y su objetivo principal sea desarrollo del Pensamiento Matemático (PM) a través del progreso de los procesos matemáticos. Ser matemáticamente competente requiere procesos, capacidades y contenidos y competencia es “la capacidad para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos” (Pisa, 2012, p. 25). Por otro lado, el

MEN(1998) determina la triada para enseñar matemática: procesos, contenidos y contexto; de igual forma THALES (2013) definen 10 estándares para lograr una sociedad con capacidad para pensar y razonar matemáticamente con conocimientos y destrezas matemáticas.

Desde esta mirada en cuanto a la enseñanza de la matemática ha realizado diferentes cambios que permiten ir ajustando el currículo para responder a dichas necesidades y apuntar a formar seres matemáticamente competentes con capacidades para desenvolverse en la sociedad del conocimiento. Pero existe la preocupación de enseñanza matemática con la rigurosidad que exige, esto ha llevado a realizar un debate alrededor sobre la pertinencia y como lograr el rigor de una manera de fácil acceso. Un ejemplo de ello es lo planteado por investigadoras reconocidas en la incursión de las tecnologías en la enseñanza de la matemáticas. (Hoyles, 2015), quien argumenta que una manera de lograr la rigurosidad de la matemática y su proceso amplio es el uso de la tecnología digital diseñada adecuadamente, de igual forma plantea que no se puede apreciar ni valorar lo que no se conoce; es así como no se debe considerar que la matemática es una caja negra cerrada difícil de abrir de demasiada complejitud para hacerlo, pues la matemática es reconocida por su importancia y la ciencia y la tecnología están en deuda con ella, porque aportes realizados por la matemática han permitido su avance. (Artigue, 2011) coincide con el planteamiento anterior; al dar un uso adecuado a la tecnología se pueden generar la cosificación de objetos matemáticos en forma directamente manipulable y de la visualización y simulación de fenómenos.

Desarrollo del Pensamiento Algebraico

Abordar temáticasrelacionadas a la enseñanza del algebra es un poco tedioso, puesto que se ha visualizado estrictamente para hacer el cambio de los procedimientos numéricos a los procedimientos con números y letras, esto ha hecho ha generado un poco de desinterés por parte de los estudiantes y con ello su poca o nulo comprensión de su estructura de pensamiento. Se desconoce que se debe buscar promover la construcción de un conocimiento matemático a través de la enseñanza de objetos matemáticos que promuevan:

- La construcción de conocimiento matemático definido por propiedades y estructuras propias
- El desarrollo histórico epistemológico del álgebra evidencia su importancia en el desarrollo de Pensamiento Matemático.
- La matemática requiere el paso por diferentes niveles para lograr la comprensión de objetos matemáticos

El abordaje del algebra en el grado octavo no debe ser el paso de la aritmética, sino debe ser un proceso que permita entender las matemáticas a través de caminos particulares de pensamiento, que incluye el análisis de relaciones entre cantidades,el reconocimiento de estructuras, el estudio del cambio, lageneralización, la prueba y la predicción(Cai& Knuth, 2011). Para tal fin un contexto tecnológico gestionado permite abordar la enseñanza con interacción de objetos matemáticos de una forma que puede llegar a procesos de generalización de estructuras algebraicas propias para continuar en el aprendizaje no solo del {algebra sino del calculo y sus aplicaciones.

Método

Metodológicamente esta investigacionse desarrolla desde un enfoque cualitativo, diseño de investigación-acción a la luz de lo planteado por Hernández et al (2014). Por tal razón se realiza en tres fases. Inicialmente se caracteriza la población, se define el diseño de las actividades y se plantearan los aprendizajes esperados para organizar los saberes y la forma de plantearlos desde el OVA. Una segunda se implementación de las actividades y se analizan los datos obtenidos y finalmente se interpretan, se analizan los datos a la luz de la TSD y se determina un plan de mejora.

A continuación, en la cuadro se muestra la estructura del diseño, aplicación y evaluación del OVA hipotético el cual tiene como objetivo valorar las bondades y determinar las pautasde mejora para el OVA refinado



Figura1: OVA a la luz de la TSD
Fuente: Autor

Para este trabajo se tiene como hipótesis que la interacción del estudiante y un OVA construido desde el marco teórico de la didáctica de las matemáticas, potencia el desarrollo de procesos matemáticos; en este caso particular asociados al desarrollo del Pensamiento Algebraico, desde esta mirada se determina el OVA como una variable independiente y los procesos matemáticos como una variable dependiente. Por definición operacional con la aplicación del OVA se determinara el nivel de desempeño en el manejo y apropiación del conjunto de los recursos digitales, utilizados en diversos contextos con un propósito educativo y como segunda medida

de ser matemáticamente competente es decir con el nivel de desempeño en la capacidad para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, al igual que el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas, para describir, explicar y predecir fenómenos.

Resultados

Al revisar la literatura y el contexto institucional se puede apreciar que el colegio Técnico Vicente Azuero del municipio de Floridablanca Colombia, se cuenta con la infraestructura tecnología, con el apoyo de las directivas de la institución para intervenir el currículo e matemáticas e implementar nuevas prácticas pedagógicas, sin embargo se presenta algunas dificultades como la resistencia de algunos pares, padres de familia y estudiantes.

Un primer avance en la investigación fue caracterizar la población de los estudiantes del grado octavo del Colegio Técnico Vicente Azuero, cuyas edades promedio es 13 años en un rango de 11 a 16 años; se determina que la gran mayoría de estudiantes, experimentan un gusto por la tecnología, tiene elementos en casa, pero no les gusta hacer actividades relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas, puesto que un 66% el uso dado al internet no es acceder al conocimiento.

Algunas conclusiones

El Ova es una estrategia que permite no solo tener los contenidosen la red e interactuar con ellos, sino permite tener un aula inclusiva que evidencie el avance de los estudiantes en un proceso de enseñanza aprendizaje. Aunque en este caso solo se pretende validar un Ova de refuerzo a la clase de matemáticas, le va a permitir al estudiante tener un profesor personalizado en horarios distintos al encuentro presencial con el profesor.

Los procesos de comunicación entre profesores y estudiantes cada vez son más distantes, teniendo en cuenta que los estudiantes tiene características propias de los nativos digitales en los cualesles gusta pocointeractuaren la presencialidad y los profesores a pesar de dar pasos agigantados para romper el analfabetismo digitalpor sus características propias son solo inmigrantes digitales.

El OVA permite el dialogo permanente entre el software, el profesor y estudiante a pesar de no estar en una presencialidad, la actividad matemática tiene un componente de experimentación, otro de visualización y otro de razonamiento, por lo tanto, se puede decir que se busca que el estudiante sea competente en la medida que evidencie la matemática en un contexto determinado(tecnológico) y pueda formular, emplear e interpretar con la utilización de saberes propios de la matemática.

La inmediatez es una realidad que se vive en la comunicación de los nativos digitales y se corre el riesgo de perder la motivación con una gran facilidad, por lo tanto,el diseño de actividades matemáticas debe ser enriquecidas con saber matemático en un lenguaje digital de tal forma que prendan y con ello se mantenga la comunicación.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática. Volumen (8) 13-33. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6948/6634

Acosta, M. Monroy, L. y Rueda, K. (2010). *Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando cabri como medio.* Revista integración, vol.2 173- 189. Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas.

Brousseau G. (2007). *Iniciación de la Teoría de las Situaciones Didácticas.*(Traducido por: Fregona,D., trabajo original :Initiation to the study of the theory of the didactic situations.). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cai, J. & Knuth, E. (2011). A Global dialogue about Early Algebraization frommultiple perspectives en J. Cai y E. Knuth (Eds.) *Early Algebraization*(pp. ix).Berlin: Springer.

Gertrudiz, F., Durán, J., Gamonal, R., Gálvez, M. y García. F. (2010). Una taxonomía del término "nativo digital": nuevas formas de relación y comunicación. Congreso Euro Iberoamericano de alfabetización mediática y culturas digitales. Universidad de Sevilla. Recuperado de https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/57014/una_taxonomia_del_termino_nativo_digital._nuevas_formas_de_relacion_y_de_comunicacion.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, M (2014). *Metodología de la investigación.* México, México: McGRAW-HILL / Interamericana Editores, S.A. de C.V, quinta edición.

Hoyles, D. (2015). Comprometerse con las matemáticas en la era digital. Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática. Volumen (1) 36-51 Recuperado de http://cresur.edu.mx/cresur2018/memorias/2.pdf

Margolinas, C. (1993). La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas. (Primera edición en español; Acosta M.E. y Fiallo J.E., Trabajo original: De l'importance du vrai et du fauxdans la classe de mathématiques, publicado en 1993), Bucaramanga, Colombia: Publicaciones UIS.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2000). *Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-81040.html

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Lozano, R. (2011). *De las TIC a las TAC: tecnologías del aprendizaje y el conocimiento.* Anuario ThinkEPI. Volumen (5) 45-47 Recuperado de https://recyt.fecyt.es/index.php/ThinkEPI/article/view/30473/16039

Prensky, M. (2010*). Nativos e Inmigrantes digítales*. Distribuidora SEK, S.A.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Servilla, España: editorial: Servicio de Publicaciones de la S.A.E.M. Thales.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

La práctica de actividad científica en la escuela para el desarrollo de habilidades y actitudes para matemática

Ximena **Colipan**
Universidad de Talca
Chile
Ximena.colipan@utalca.cl

Resumen

Este tallertiene como objetivo presentar situaciones y problemas matemáticos que permitenponer en acción conocimientos matemáticos y habilidades tales como experimentar, conjeturar, modelar, probar, comunicar, etc. Además, se expondrán metodos de gestión de clases, que permiten el fomento de actitudes tales como: abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones, demostrar perseverancia y rigor en la resolución de problemas, trabajar en equipo en forma responsable y proactiva y desarrollar una actitud crítica.En este trabajo es parte de los resultados de nuestras investigaciones sobre el estudio en el aula problemas en matemática discreta y su trasposición didáctica en clases a través de las Situations de Recherchepour la Classe (SiRC).

Palabras clave: Resolución de problemas, problemas abiertos, juegos combinatorios, Desarrollo de habilidades en Matemática, Desarrollo de actitudes, dificultades de aprendizaje.

Contexto y antecedentes

Una de las preocupaciones sociales relativa a las ciencias, es la desafección de los estudiantes hacia el área científica que se complementa, además, con los bajos resultados que obtienen los alumnos en estas áreas a medida que avanzan es su escolarización (SIMCE, 2016a; Hall, 2012). Se ha apuntado como posible causa, al tratamiento que se le da en clases a las disciplinas asociadas, es decir, Física, Química, Biología y Matemática. En efecto, tal como plantea Hall (2012), generalmente estas disciplinas son estudiadas como entes complejos, orientadas hacia el aprendizaje de nociones y procesos más abstractos que palpables. A lo anterior se suma la imposición de contenidos curriculares que dejan al alumno con poca o ninguna oportunidad de participar en la planificación de su propia formación (Connors-Kellgren, Parker, Blustein, Barnett, 2016).

De esta manera, aún siguen imperando en las áreas científicas, los tradicionales métodos de enseñanza y aprendizaje: clases muy teóricas, poco participativas, además de inflexibles, que lejos de atraer y estimular, aburren, desmotivan y extirpan la motivación por las ciencias (Ouvrier-Buffet, 2011; Colipan, 2016). Estos factores, nos lleva a reflexionar sobre otro elemento importante: la gran distancia que existe entre el contenido de las prácticas escolares y la realidad de la investigación científica y si nos enfocamos a la matemática esto se hace mucho más evidente En efecto, tal como plantea Houdement (2008) y Dias (2014) es usual concebir las matemáticas como una ciencia que se articula en forma de algoritmos y aplicaciones de la teoría y que la posibilidad de experimentar actividades científicas se restringe a las ciencias de la naturaleza y por supuesto alejadas de las matemáticas.

Sin embargo, el carácter experimental de la ciencia está inscrito en el proceso de resolución de problemas en la cual experimentar está en interacción con otras acciones como proponerse nuevos problemas, verificar hipótesis/conjeturas, etc… Y en este sentido el carácter experimental de las matemáticas siempre ha estado presente y, es más, para experimentar en matemática no se necesita herramientas muy complejas, un lápiz y un papel pueden ser suficientes.

Practicar una actividad científica en matemática consistiría entonces en tratar de resolver un problema (que sería el objeto central de la actividad) a través de la puesta en marcha de diferentes acciones, no necesariamente en orden y que eventualmente podrían repetirse, tales como: Proponer nuevos problemas, experimentar, conjeturar, modelar, probar, comunicar, entre otros (Godot 2006; Durrant-Guerrier 2010; Colipan y Grenier, 2017).

En consideraciónde lo expuesto anteriormente, practicar la actividad científica en matemática *in se* y *per se* en el ámbito escolar, podría permitir una articulación armoniosa entre conocimientos (saber), habilidades (saber-hacer) y actitudes (saber ser).

La investigacion que se llevó a cabo, se apoyó sobre dos objetos de estudio: El modelo Situations de Recherche Pour la Clase y problemas derivados de la matemática discreta.

Marco teórico

¿Porqué la Matemática discreta?

La matemática discreta, es un área de la matemática pertinente para trabajar con todo tipo de público. En efecto, la matemática discreta es el origen de situaciones que se contemplan en actividades de divulgación, en olimpiadas o concursos matemáticos y, es más, posee una rama llamada teoría de Juegos.

Otro atractivo de esta área de la matemática es que ofrece la posibilidad de proponer problemas que implican conceptos y nociones de fácil acceso para todos. Además, ella se sirve de otras áreas de la matemática tales como geometría, álgebra, lógica, teoría de conjuntos, teoría de números, combinatoria, entre muchas otras.

La matemática discreta se encuentra casi ausente en gran parte de los programas de estudio a nivel mundial, y Chile no es la excepción, pero esto le da un estatus especial. En efecto, tal como señaló Rolland (2000) "*El hecho que las matemáticas discretas no sean estudias en el plano escolar pueden jugar a su favor, de esta manera no es posible amarrar el problema a una noción ya estudiada, por lo que guarda un atractivo por su carácter novedoso, que pude ser incluso considerado como lúdico*"

Todo lo anterior, es respaldado por numerosas investigaciones que revelan la pertinencia

de esta área, de hecho, el International Congress on Mathematical Education(ICME) posee un grupo de estudio permanente sobre matemática discreta y sus implicaciones en el aula. Entre estos trabajos podemos destacar a Goldin, Epstein, Schorr y Warner (2011); Rosenstein (2014); Lockwood y Gibson (2016); Ferrarello y Mammana (2017); Colipan (2018); Hart y Martin (2018), entre otros.

El modelo Situations de recherche pour la classe (SiRC)

El modelo SiRC, es el modelo de situación en la cual nos apoyaremos para simular una actividad científica en matemática (Grenier et payan, 2002; Ouvrier-Buffet, 2009; Grenier, 2012; Colipan, 2016). Este dispositivo didáctico, creado por la Federación de investigación francesa Maths à Modeler, tiene las siguientes características:

La situación debe inscribirse en una problemática de investigación profesional. El enunciado debe ser llamativo, de fácil acceso y no debe estar formalizado en términos puramente matemáticos. Los métodos de resolución no deben estar señalados, el problema debe poder ser abordado a través de variadas pistas, es decir, debe dejar la posibilidad de utilizar múltiples estrategias de resolución.Los conocimientos escolares elementales deben ser suficientes para entender y entrar en la situación, y dominio conceptual en el cual se enmarca, aunque no sea muy familiar, debe ser de fácil acceso para que sea posible tomar fácilmente posesión de la situación. Una vez resuelto un problema de la situación, este debe reenviar a nuevos problemas.Las variables de la situación están a disposición del alumno y no del profesor (como en el caso de las variables didácticas de Brousseau). En una SiRC estas variables son llamadas "variables de investigación".

El objetivo de las SiRC es producir respuestas a interrogantes que nacen de una situación llamada problematica. La diferencia con otros métodos tales como "problem-solving" (Schoenfeld, 1985), "situaciones-problemas" (Douady, 1984), "problemas abiertos" (Arsac, Germain y Mante, 1988), las "situaciones adidacticas" (Brousseau, 1998), radica en que: no hay necesariamente una respuesta final al problema inicial, los conceptos matemáticos que están en juego no están programados y no son restrictivos a priori, ellos están al servicio del problema y su solución, es decir no existe necesariamente una noción o concepto matemático especifico a enseñar, ni la ejercitación de un técnica o método visto durante una clase y es la prueba o demostración el único medio de validación a cargo de los alumnos.

Los aprendizajes esperados en una SiRC son aquellos ligados al saber tranversal, que son agrupados a través de la tripleta (problema, conjetura, prueba). De esta manera, el tránsito entre cada uno de estos elementos moviliza habilidades que constituyen la actividad cientifica en matemática tales como:

Problema-conjetura: Reformular el problema con sus propias palabras, plantearse preguntas, simular la situación, imaginar relaciones con problemas conocidos, dividir el problema en problemas más simples, modificar los datos del enunciado, buscar regularidades, formular hipótesis.

Conjetura-prueba: Organizar las etapas de la resolución, crear argumentaciones, estudiar las relaciones de dependencia entre los objetos del problema, crear una notación pertinente, estudiar todos los casos, utilizar contra-ejemplos, razonar por deducción, razonar por inducción, razonar por condición necesaria y suficiente, efectuar demostraciones por lo absurdo, confrontar los resultados con las conjeturas.

Prueba-Problema: Controlar los resultados obtenidos evaluando pertinencia en función del problema estudiado, verificar que se han contemplado todas las soluciones, dar forma a una solución, comunicar un resultado o pregunta que queda pendiente, argumentar y justificar resultados, utilizar resultados para resolver otros problemas. comunicar y convencer.

Los transitos durante el proceso de resolución de una SiRC, forma parte de las herramientas para el análisis de la producción y actividad de alumnos, inmersos en la resolución de un problema de tipo SiRC.

Resultados obtenidos en la investigación

En esta investigacion utilizamosuna metodologíade tipo cualitativa basada en una ingeniería didáctica (Artigue, 2011). La ingeniería didáctica es una metodología de investigación de origen francés cuya característica principal es su esquema experimental basado en la concepción, realización y análisis de secuencias de enseñanza. El registro está basado en el estudio de casos y la validación es esencialmente interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta, Wilhelmi, 2013).

La experimentación se realizó con 50 alumnos cuyas edades fluctuaban entre los 10 y 14 años. Los resultados demostraron que, el estudio en clases de problemas matemáticos con caracteristicas de tipo SiRC, estarían favoreciendo la integración de las diferentes dimensiones de la matemática. Creemos que implementar esta metodología al contexto educacional puede enriquecer la percepción que se tiene de la matemática y paliar así las diferencias que existe entre el tratamiento de la matemática en el aula y la matemática como disciplina científica. En particular, por el hecho de que los problemas, generalmente, no se sitúan en el campo numérico, estas pueden llevarnos a desprender la matemática del cálculo, poniendo en valor el razonamiento y la actividad científica como criterios significativos de una actividad matemática.

Metodología que se utilizará en el taller

El taller estará organizado en dos etapas, cada una de ellas se articulará la exposición del relator con el trabajo práctico de los participantes.

La primera etapa consiste en dar respuesta a un problema matemático, poniendo énfasis en el proceso de investigación, resolución de problemas, análisis, interpretación, síntesis de información y comunicación de resultados. Para esto, consideraremos como resultados: la obtención de soluciones particulares (mínimo resultado), métodos de construcciones locales y globales (procedimientos para la obtención de soluciones), enunciado de conjeturas locales (de casos particulares) o conjeturas globales (propias a un sub-problema), pruebas o demostraciones globales y locales.

La segunda etapa consistirá en analizar las condiciones necesarias para la gestión en el aula de las situaciones estudiadas

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, 72090110. De la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología (CONICYT), Chile

Referencias y bibliografía

Arsac, G.; Germain, G.; Mante, M. (1988). *Problèmeouvert et situation-problème*. Lyon, Francia: IREM

de Lyon.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia: La pensée sauvage éditions.

Colipan, X. (2016). Desarrollo de la actividad científica en clases a través del estudio de juegos combinatorios, el ejemplo del juego del chocolate. *Boletim de Educação Matemática, 30*(55), 691 – 712. http://dx.doi.org/00.1590/1980-4415v30n55a19

Colipan, X. (2018).Mathematical research in the classroom via combinatorial games.En Hart, E.; Sandefur, J. (eds).*Monograph on the Teaching and Learning of Discrete Mathematics*. Berlin, Alemania: Springer.

Houdement, C. (2008). Experimentación y prueba: Dos Dimensiones de las Matemáticasdesde la EscuelaPrimaria. Paradigma, Vol. XXIX, 2, 173 – 185

Ferrarello, D., &Mammana, M. F. (2017). Teoria dei grafi: Come e perchè. *L'insegnamento Della Matematica E DelleScienzeIntegrate, 40,* 249–271.

Douady. R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*, Tesis de doctorado no publicada, Université de Paris VII, Paris, Francia.

Durand-Guerrier, V. (2010). Expérimenter des problèmes de rechеColipan, X.; Grenier, D. (2017). Desarrollo de habilidades asociadas a la actividad matemática. Una propuesta para la formación inicial y continua de profesores. En Pino-Fan, L.; Poblete A.; Diaz, V. (eds). Perspectivas de la investigación sobre la formación de profesores de matemáticas en Chile. Osorno, Chile: Cuadernos de Sofía.

Connors-Kellgren, A., Parker, C.E., Blustein, D.L., Barnett, M. (2016). InnovationsandChallenges in Project-Based STEM Education: Lessonsfrom ITEST *Journalof Science Educationand Technology*, 25 (6), pp. 825-832

Dias, T. (2014). Des mathématiquesexpérimentalespourrévélerlepotentiel de touslesélèves. *La nouvelle revue de l'adaptation et de lascolarisation, 65*, 151-161.

Hart E.W., Martin W.G. (2018) DiscreteMathematicsIsEssentialMathematics in a 21st CenturySchool Curriculum. In: Hart E., Sandefur J. (eds) Teachingand Learning DiscreteMathematicsWorldwide: Curriculum andResearch. ICME-13 Monographs. Springer, Cham

rche innovants en mathématiques à l'école. Dans: INRP, Cédérom. Chap. La dimension expérimentale en mathématiques. Enjeux épistémologiques et didactiques.

Godino, J.; Batanero, C.; Contreras, A.; Estepa, A.; Lacasta, E.; Wilhelmi, M. Didacticengineering as design-basedresearch in mathematicseducation. In: Congress Of EuropeanResearch In MathematicsEducation, CERME, 8. 2013. Ankara, Turquía. Proceedings... Ankara: Middle East TechnicalUniversity, 2013. p. 2810-2819.

Godot, K. (2006). La roue aux couleurs: une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N*, 78, 31-52.

Grenier, D.; Payan, C. (2002). Situations de recherche en classe: essai de caractérisation et proposition de modélisation. Paris. *Actes du séminaire national de didactique de mathématiques*. Paris, Francia. p.189-205.

Grenier, D. (2012). Rôle des situations de recherche dans la vulgarisation des mathématiques. Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. *Actes du colloque EMF2012.*Ginebra:Suiza, pp. 1905–1913.

Goldin, G. A., Epstein, Y. M., Schorr, R. Y., & Warner, L. B. (2011). Beliefsandengagementstructures: Behindtheaffectivedimensionofmathematicallearning. *ZDM MathematicsEducation, 43,* 547–556.

Hall, O. (2012). La Desafección de los Jóvenes por la Ciencia y la Tecnología: Una Tendencia Peligrosa. Documento UNESCO, Paris, Francia.

Lockwood, E., & Gibson, B. (2016). Combinatorialtasksandoutcomelisting: Examiningproductivelistingamongundergraduatestudents. *EducationalStudies in Mathematics,91*(2), 247–270. doi: 10.1007/s10649-015-9664-5.

Ministerio de Educación. (2015): *Bases curriculares 7° a 2° medio.* Santiago, Chile: Autor

Ouvrier-Buffet, C. ; Perrin, M. (2009): Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur-Quoi de neuf ? Approches plurielles en didactique des mathématiques. *Colloque DIDIREM*, Paris : Francia. pp. 132–143.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematicalexperienceinvolvingdefining processes: in-actiondefinitionsand zero-definitions. *EducationalStudies in Mathematics*, Vol. 76, n°2, 165-182.

Rolland, J. (2000). *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication*. Tesis de doctorado no publicada, Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia.

Rosenstein, J. G. (2014). *Problemsolvingandreasoningwithdiscretemathematics*. ShivitiPublications (en (enlinea http://www.new-math-text.com)

Simce, (2016). Agencia de Calidad de la Educación, entrega de resultados 2016. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/PPT_Conferencia_ER_2017_web_3.pdf

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL, EEUU: Academic Press.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Desarrollo del Pensamiento Geométrico (PG) a través del uso de las tecnologías digitales

Juddy Amparo **Valderrama** Moreno
Colegio Técnico Vicente Azuero - EDUMAT UIS,
Escuela de Matemática,
Universidad Industrial de Santander
Colombia
juddyamparo2@gmail.com
Daniel **Moreno** Caicedo
Colegio Técnico Vicente Azuero - EDUMAT UIS,
Escuela de Matemática,
Universidad Industrial de Santander
Colombia
dmoreno65@gmail.com

Resumen

Esta experiencia pedagógica, propone un abordaje de la enseñanza de la geometría analítica usando tecnologías digitales, para tal fin se utiliza como medio de representación el software de geometría dinámico "GeoGebra" y sus bondades de experimentación, visualización y comprobación. En particular se pretende abordar los objetos matemáticos de Circunferencia y Parábola desde un todo relacionando los tres conceptos: geométrico, gráfico y expresión algebraica a partir de la resolución de problemas. Para tal fin en este taller se pretende aportar al discurso del profesor elementos pedagógicos, tecnológico y disciplinar para la enseñanza de las secciones cónicas con ayuda del sistema de representación de la geometría dinámica. En consecuencia, se pretende incentivar en el uso de las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC).

Palabras clave: Circunferencia, Parábola, TAC, Tecnologías digitales, Resolución de problemas. Pensamiento Matemático.

Introducción

Responder a interés de los estudiantes donde el uso de tecnologías en su cotidianidad es relevante, las tareas repetitivas de procedimiento los aburre y la inmediatez de la información les permite acceder a ella con facilidad, ha generado cambios de concepción en la enseñanza de la matemática, puesto que en el ciberespacio se encuentra cualquier cantidad de contenidos, sin embargo saber utilizar e identificar la pertinencia de los mismos solo es posible cuando se tiene

conocimiento sobre ellos y para tal fin se requiere tener un saber matemático y este solo se logra en la medida que el individuo realice procesos de manipulación de objetos matemáticos contextualizados. Desde esta mirada se ha planteado una experiencia pedagógica en el nivel media donde a través del uso de las tecnologías digitales el estudiante avanza en su proceso de aprendizaje construyendo sus concepciones y con dicha mediación entre la interacción con el medio (GeoGebra), trabajo individual, socialización con sus pares y acompañamiento del experto logra institucionalizar saberes.

El uso de tecnologías digitales en la enseñanza de la matemática

Desde el siglo pasado se ha abordado el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza de las diferentes disciplinas y en la matemática no ha sido la excepción, es así como la comunidad científica de la Educación Matemática tanto internacional como nacional ha ahondado en temas que competen a ¿Cómo enseñar objetos matemáticos usando tecnologías? ¿Qué objetos matemáticos se pueden enseñar usando tecnología? ¿Para qué utilizar las tecnologías en la enseñanza de la matemática? Investigadoras como Artigue (2011), manifiesta que el uso adecuado de la tecnología genera la cosificación de objetos matemáticos en la medida que el estudiante puede manipular, visualizar y simular fenómenos; de igual forma desde los años 80´s como investigadora ha incursionado en influenciar en la construcción de micro currículos donde se incorpore las tecnologías al proceso de enseñanza de las matemáticas.

En Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha impulsado proyectos y estrategias que favorezcan el uso de las tecnologías en la escuela. Para la enseñanza de la matemática en el año 2000 se impulsó el proyecto incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas en educación básica y media (MEN, 2000), este proyecto impactó a 17 departamentos y 3 distritos capitales y fue liderado por profesores de las facultades de universidades; Se pretendía incursionar en el uso de las TIC en el aula de matemáticas con el objetivo de mejorar practicas pedagógicas para hacer cambios sustanciales al currículo de las matemáticas. Particularmente en el departamento de Santander, fue coordinado por la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, lo cual generó la consolidación del grupo de investigación en Educación Matemática EDUMAT-UIS. Desde ese momento buscamos enriquecer el discurso del profesor que orienta matemáticas para mejorar prácticas pedagógicas usando tecnologías digitales.

TIC o TAC

Las TIC han ido incursionando a pasos agigantados en los diferentes ministerios, en Colombia desde el año 2009 se creó su ministerio y ha pretendido hacer interdisciplinariedad con los demás ministerios. Un ejemplo de ello es que mancomunadamente el Ministerio de Educación y el Ministerio de las tecnologías y las comunicaciones con alianzas, se ha equipado algunas instituciones educativas con laboratorios digitales, cobertura de red, tabletas, tableros digitales, televisores, video beam entre otros aparatos tecnológicos. De igual forma los estudiantes son nativos digitales y tiene mayor destreza en la utilización de la tecnología en comparación con sus profesores, ellos piensan y procesan información significativamente distinta (Prensky, 2011) Pero saber manejar la tecnología es tener los herramientas para responder a lo

operativo que se requiere para su funcionamiento, pero saber utilizarla con fines educativos para mejorar procesos de enseñanza son dos cosas distintas. Lo primero con facilidad se logra ya que los estudiantes son nativos digitales, pero ha sido tarea de los profesores y las instituciones de educación superior trabajar al respecto, para aplicar en el manejo las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC).

Por esto se manifiesta de las TIC a las TAC, las primeras su objetivo son el manejo y operatividad de las tecnologías, las segundas en utilizar las tecnologías con objetivos puntuales académicos, para generar procesos de enseñanza con utilización de las tecnologías de tal forma que permita enseñar una disciplina de mejor forma con el objetivo de aprender más.

La enseñanza de objetos matemáticos usando tecnologías digitales

En la medida que el estudiante se apropie de trabajo Matemático y las bondades que le ofrece el software de GeoGebra, su actividad matemática está enriquecida con la experimentación, la visualización de objetos matemáticos con propiedades determinadas por el saber acompañado de un razonamiento matemático. Pero para esto se requiere ir avanzando por niveles de compresión, un ejemplo de ello es que se aborda la temática de circunferencia con el siguiente problema. Dado un punto A poner 20 puntos que se encuentre a igual distancia de dicho punto. A partir de ahí el estudiante inicia su experimentación y con ello sus primeras conjeturas, seguidamente sin intervención directa del profesor el determina infinitos puntos con una propiedad; que el punto fijo se encuentra en el centro determinando un lugar geométrico que se llamará circunferencia. Posteriormente a través de preguntas guiadas determina los elementos de la circunferencia y con ayuda del software navega entre las diferentes representaciones gráfica, algebraica y geométrica y finalmente realiza la práctica de aplicación en diferentes contextos.

Un segundo problema es dado una recta y un punto exterior a ella construir 20 puntos que estén a la misma distancia de ellos. Para resolver el problema se requiere utilizar la mediatriz y la perpendicular, resultado de ello es el lugar geométrico que llamamos parábola. Luego se identifica las relaciones algebraicas de acuerdo con la posición que tiene el punto y la recta con sus diferentes representaciones gráficas. Por la interacción con GeoGebra se pueden visualizar la representación algebraica diferente. Luego se hace el proceso inverso, es decir dada una expresión algebraica de una parábola, hallar la gráfica encontrando el vértice, foco, directriz.

Método

Determinar el método utilizado es hacer un abordaje desde dos miradas, uno desde el trabajo realizado como CoP en pro del proyecto enseñanza aprendizaje de las matemáticas usando tecnologías digitales y otro como se aborda los objetos matemáticos en el aula de clase.

Desde la CoP Tecnologías se busca incentivar la investigación acción en el ciclo formación, aplicación y reflexión y para tal fin se busca enriquecer el discurso Matemático Escolar dME de profesor que orienta matemáticas mediante el encuentro semanal para compartir experiencias y plantear y replantear practicas pedagógicas. Parafraseando a Wenger (2001), las Comunidades de Práctica CoP son grupo de personas que comparten intereses comunes y profundizan su conocimiento mediante la cosificación de saberes. Para tal fin se plantean los

interrogantes ¿cómo abordar los objetos matemáticos usando tecnologías digitales?, pero no se trata simplemente de utilizar las tecnologías en cuanto sino cumplir con el objetivo didáctico desde la Educación Matemática, por lo tanto, no se pretende solo manipular GeoGebra, seguir un procedimiento o experimentar clases para intentar reproducirlas, sino discutir el diseño de prácticas pedagógicas; interiorizar los elementos tecnológicos que permiten hacer posible ver un objeto matemático no estático sino con movimiento, pedagógicos que a la luz del saber matemático se tenga elementos comunicativos para expresar lo que la matemática requiere para ser enseñada y finalmente retomar las propiedades y conceptos propios de la matemática que hacen posible que el objeto matemático tenga razón de ser en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Producto de las reflexiones realizadas en la CoP se diseñan y aplican talleres. Para este caso los experimentados con los estudiantes del Colegio Técnico Vicente Azuero del grado décimo temática secciones cónicas. Cada uno de los talleres tiene inmerso una didáctica determinada de la siguiente forma: situación problema, experimentación, socialización, conceptualización y aplicación. A partir de una situación problema el estudiante interactúa con el medio que en este caso es GeoGebra, experimenta para dar solución a dicho problema, realiza conjeturas y saca sus conclusiones; en esta fase los estudiantes consignan sus apreciaciones para poder leerlas en grupo. Terminada esta fase experimentación se pone en común sus primeras conjeturaciones; mediante la socialización se determina sus aciertos y desaciertos; el profesor es mediador donde pone el juego su capacidad de hacer preguntas que permita que el estudiante valide los aciertos propios y del par, recicle sus desaciertos para que pueda verificar la validez del conocimiento matemático. Producto de la conjeturación de aciertos y desaciertos con la mediación del experto en guiar la discusión se realiza la institucionalización del saber donde el estudiante generaliza y conceptualiza el objeto matemático. Finalmente, el estudiante resuelve nuevas situaciones de aplicación donde requiere saber matemático de los objetos presentados.

Un tercer momento es el de la reflexión, el cual es consecuencia de los dos anteriores y genera un nuevo inicio. En este caso la experiencia pedagógica se encuentra en su segunda versión. Como se mencionó anteriormente el proyecto lleva una trayectoria alrededor de dos décadas y hace 2 años se pretendió plantear un proyecto para la media de tal forma que a partir de los resultados de las pruebas saber 9, se hiciera una intervención y revisar los resultados de las pruebas saber 11. En una primera versión se hizo un análisis general puesto que los resultados de las pruebas saber 9 eran grupales; uno de los resultados obtenidos es que los dos grupos intervenidos con el uso de tecnologías se evidenció mayor nivel de desarrollo de Pensamiento Matemático, en cuanto el avance en el aula de clase y en resultados cuantitativos el 45% de los estudiantes que clasificaron en la estrategia del MEN Ser Pilo Paga correspondieron a los 2 grupo intervenidos con el proyecto, a pesar de ser 8 grupos en total los ofrecidos por la institución.

Algunas conclusiones

Al retomar un poco de la historia durante un par de décadas se enseñó la matemática desde el trazo de las gráficas con hojas milimetradas y de forma dirigida se hacían dibujos de las secciones cónicas, no censura este método de representación porque permitía al estudiante hacer

una idea y con ayuda de su imaginación podía verificar sus propiedades. Pero al abordar la enseñanza de los objetos matemáticos correspondientes a las secciones cónicas usando GeoGebra como medio de representación permite visualizar propiedades y razonar. La representación que se utilice responde a las voluntades del individuo, pero identificar propiedades matemáticas es ajeno a la voluntad, se requiere refinar el saber matemático y la tecnología tiene objetos diferentes a la voluntad del individuo que permite hacer y observar lo que pasa e identificar las propiedades producto de su experimentación e interacción. En respuesta el uso de GeoGebra en la enseñanza de las secciones cónicas ha permitido mejorar la actitud de los estudiantes frente al aprendizaje de las matemáticas, puesto que se les hace más dinámica y le permite al estudiante corroborar sus conjeturas y dado el caso buscar otra alternativa de solución.

Al abordar la temática le permite al estudiante experimentar, observar comportamientos, conjeturar, volver a experimentar y concluir con validez. Resolver el problema planteado con ayuda de GeoGebra le permite comprobar la valides de sus razonamientos, por lo que se afirma que el uso de tecnologías digitales permite no solo al estudiante sino al profesor determinar propiedades y conceptos matemáticos con mayor claridad y precisión. Al poder visualizar la construcción (conserva las propiedades a la prueba del arrastre) de modelación de la situación problema planteada permite la conjeturación de ideas matemáticas y su comprobación, la organización y análisis de datos con mayor experticia, la precisión de cálculos analiza comportamientos, esto conlleva a relacionar los tres conceptos geométrico, gráfico y algebraico; en consecuencia, se puede decir que se visualiza, razona y modela con mayor facilidad.

En particular se puede decir que los objetos matemáticos no cambian, pero al introducir el movimiento en las representaciones permitir cambiar la forma de preguntar para abordarlos y con ello se mejora el discurso del profesor que orienta el área de matemáticas lo que conlleva a buscar mejores elementos que hagan posible no solo enseñar matemáticas sino lograr mayor impacto en el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes del siglo XXI.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática. Volumen (8) 1333. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6948/6634

Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Gardner, M. (2011). Matemáticas para todos (y códigos ultrasecretos). Barcelona, España: RBA Libros, S.A.

Hoyles, D. (2015). Comprometerse con las matemáticas en la era digital. Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática. Volumen (1) 36-51 Recuperado de http://cresur.edu.mx/cresur2018/memorias/2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2000). *Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article81040.html

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Recuperado https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Moreno, L. (2014*). Educación Matemática: del signo al píxel*. Universidad Industrial de Santander.

Montiel, G. (2010). *Hacia el rediseño del discurso: Formación docente en línea centrada en la resignificación de la Matemática Escolar.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Volumen (13)69-84 Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime/201004d.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Servilla, España: editorial Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Lozano, R. (2011). *De las TIC a las TAC: tecnologías del aprendizaje y el conocimiento.* Anuario ThinkEPI. Volumen (5) 45-47 Recuperado de https://recyt.fecyt.es/index.php/ThinkEPI/article/view/30465/16032

Prensky, M. (2010*). Nativos e Inmigrantes digítales*. Distribuidora SEK, S.A.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y exclusión. Una visión Socioepistemología. Revista Bolema. Volumen (28) 1525-1544. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n50/1980-4415-bolema-28-50-1525.pdf

Wenger, E. (1998*). Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Villareal, G. (2010). Caracterización del uso de la tecnología, por profesores y alumnos, en resolución de problemas abiertos en matemática (tesis doctoral). Universidad de Barcelona.

XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/maio/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education
Universidad de Medellín
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A resolução de problemas por estimativas

Malcus Cassiano **Kuhn**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul Câmpus Lajeado
Brasil
malcuskuhn@ifsul.edu.br

Resumo

O físico italiano Enrico de Fermi[1] se tornou conhecido pela resolução de problemas por estimativas. Estimar significa fazer um cálculo aproximado acerca de uma quantia ou uma grandeza. O propósito desta pesquisa qualitativa é estudar problemas que envolvam algum processo de estimativa para chegar à resposta, também chamados de problemas de Fermi. A fundamentação teórica está ancorada no estudo da metodologia de resolução de problemas e da teoria da aprendizagem significativa. A utilização dos problemas de Fermi, que permeiam as ciências, com um enfoque no raciocínio lógico-matemático, permite a interdisciplinaridade em sala de aula e torna a aprendizagem mais significativa.

Palavras chave: resolução de problemas, estimativas, problemas de Fermi, interdisciplinaridade, aprendizagem significativa.

Introdução

Em muitas situações do cotidiano, precisa-se saber apenas uma estimativa de certa quantidade, não se faz necessário obter o valor exato. Consideremos uma situação hipotética em que se noticiou a quantidade de vinte mil pessoas presentes em uma manifestação em praça pública. Como é possível avaliar quantas pessoas estão presentes em determinado evento? Em situações como essa, não importa se na manifestação havia 15478 pessoas ou 24567 pessoas, espera-se apenas um valor aproximado.

Como se estima a área desmatada de uma determinada floresta? A quantidade de explosivos necessária para demolir determinado edifício? Ou até mesmo a quantidade de água armazenada em uma represa? Essas e diversas perguntas recebem respostas aproximadas que podem ser obtidas por meio de estimativas. Além desse tipo de estimativa, envolvendo grandezas

[1] Enrico Fermi viveu entre 1901 e 1954. Suas contribuições mais importantes foram no campo da física nuclear e da teoria quântica: recebeu o Prêmio Nobel de Física por sua contribuição ao desenvolvimento da energia nuclear. No entanto, mal recebeu o prêmio, Fermi foi forçado a deixar a Itália e se converteu ativamente como pesquisador na Universidade de Chicago. Atualmente, um dos laboratórios de física mais importantes do mundo leva o nome de Fermi Lab (próximo a Chicago). Fermi foi membro da equipe que ficou conhecida com o nome de Projeto Manhattan, e que desenvolveu a bomba atômica em Los Álamos, Novo México.

que aparecem naturalmente no nosso dia a dia, nas Ciências Exatas, a estimativa proporciona um grande auxílio na resolução de problemas.

Há diversas maneiras de se realizar uma estimativa. Uma maneira de estimar o resultado de um problema com números grandes é pensar em problemas similares, com números pequenos. A multiplicação é bastante utilizada para respostas estimadas, dividindo-se o todo em grupos iguais e multiplicando-se a quantidade de elementos pela quantidade de grupos. A comparação é também muito utilizada na estimativa de alturas, comprimentos, áreas e volumes, ou seja, conhecendo-se a altura, o comprimento, a área ou o volume de um objeto se pode estimar, com certa precisão, o comprimento, a altura, a área ou o volume de outros objetos comparando-os com o conhecido. Conhecendo-se a capacidade total de um recipiente parcialmente cheio, pode-se usar a noção de metade e de um quarto para estimar o quanto sobra.

Batista & Mozolevski (2010, p. 44) consideram que "uma das tarefas do cientista é de aprimorar sua capacidade de fazer estimativas *a priori* da ordem de magnitude de determinada grandeza, antes de fazer um exame detalhado, seja do ponto de vista teórico ou experimental". Afirmam ainda que Enrico Fermi, um físico italiano que viveu entre 1901 e 1954, introduziu uma prática muito comum entre os físicos de hoje que é a "física do verso de um envelope", isto é, antes de resolver um problema que envolva cálculos complicados é necessário obter estimativas cujos cálculos possam ser realizados no verso de um envelope (Batista & Mozolevski, 2010).

As estimativas estão presentes em cálculos de nosso cotidiano em contextos diversos. Em pesquisas diversas, as estimativas são apontadas como importantes em sala de aula para que o estudante possa perceber que a Matemática não é feita somente por resultados "exatos", mas também de elaboração de argumentos, aproximações, raciocínios e justificativas (Fontanive, Klein & Rodrigues, 2012).

De acordo com Smoothey (1998, p.7), "uma estimativa é um palpite inteligente. Não é um número qualquer escolhido a esmo, mas um número baseado na observação e no raciocínio". Expressões como "cerca de", "aproximadamente", "mais do que", "quase", entre outras, indicam que se trata de uma estimativa. Estimar significa opinar a respeito de algo de que não se tem certeza, fazer um cálculo aproximado acerca de uma quantia ou uma grandeza, como por exemplo, estimar a idade do Universo, estimar a quantidade de pessoas em um show, o número de manifestantes em um evento, o número de átomos que compõem um corpo e o número de bactérias em uma determinada amostra.

Os cientistas, às vezes, fazem essas estimativas antes de optar por métodos mais sofisticados para obter respostas específicas. A capacidade para estimar o tamanho ou a probabilidade de diversas quantidades é útil nas ciências, bem como em muitos outros empreendimentos, para fornecer uma verificação aproximada de cálculos mais exatos; fornecer uma verificação dos resultados da investigação; obter estimativas das quantidades quando outros recursos não estão disponíveis; obter estimativas das quantidades que são difíceis de medir com precisão; obter estimativas de quantidades para as quais não exista uma previsão teórica firme.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) brasileiros também destacam a importância das estimativas:

> A estimativa constrói-se juntamente com o sentido numérico e com o significado das operações e muito auxilia no desenvolvimento da capacidade de tomar decisões. O trabalho com estimativas supõe a sistematização de estratégias. Seu desenvolvimento e

> aperfeiçoamento dependem de um trabalho continuo de aplicações, construções, interpretações, análises, justificativas e verificações a partir de resultados exatos. Desde as primeiras experiências com quantidades e medidas, as estimativas devem estar presentes em diversas estratégias que levem os alunos a perceber o significado de um valor aproximado, decidir quando e conveniente usá-lo e que aproximação e pertinente a uma determinada situação, como, identificar unidades de medida adequadas às grandezas (Brasil, 1997, p. 77).

No Brasil são poucos trabalhos envolvendo estimativas e/ou problemas de Fermi. Um exemplo é o trabalho de Livi (1990) que em seu artigo trata da representação de pequenos e grandes números como potências de base 10 e defende que professores e estudantes devem ser encorajados a fazer estimativas numéricas de qualquer espécie. Sugere para isso, a resolução de problemas de estimativas e fornece diversos exemplos de problemas que podem ser trabalhados com estudantes, os quais se classificam como problemas de Fermi.

Sriraman & Knott (2009) argumentam que os problemas de Fermi que estão diretamente ligados ao cotidiano são mais significativos e oferecem mais possibilidades pedagógicas que exercícios intelectuais. Defendem o uso dos problemas de Fermi que envolvem estimativas do consumo de água doce, o consumo de combustível, o desperdício de alimentos, a quantidade de lixo produzido, entre outros, que além de desenvolverem o raciocínio, levam a uma consciência crítica sobre o uso consciente dos recursos naturais.

Autores de livros didáticos também propõem problemas de Fermi em suas obras. Torres (2013) em sua obra "Física: ciência e tecnologia", voltada para o Ensino Médio, propõe um tópico intitulado "Ordem de grandeza – estimativa de valores" o qual inicia com três problemas que se classificam como problemas de Fermi: "Você tem ideia de quantas gotas de água são necessárias para encher uma piscina olímpica? Quantos grãos estão contidos em um pacote de 5 kg de arroz? Quantos passos um atleta dará durante uma maratona?" (Torres, 2013, p. 46). Os autores discorrem sobre a importância de resolver problemas desse tipo, porém, não propõe estratégias para resolvê-los e não propõe que os estudantes os resolvam, apenas os utilizam como motivação para tratar de ordem de grandeza.

Diante do exposto, compartilha-se uma investigação inicial sobre problemas que envolvam estimativas ou problemas de Fermi[2], fundamentando-se no estudo da metodologia de resolução de problemas e da teoria da aprendizagem significativa.

Fundamentação teórica

Os sistemas nacionais de avaliação da educação básica brasileira, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), junto com os sistemas de avaliação internacional, como o Programme for International Student Assessment (Pisa), cada vez mais têm exigido dos estudantes a competência para resolução de problemas, e não somente em Matemática.

O Enem, por exemplo, traz em sua matriz de referência, no eixo cognitivo, comum a todas as áreas de conhecimento, que o estudante deve enfrentar situações-problema, ou seja,

[2] Trata-se de um recorte do Projeto de Pesquisa "Problemas de Fermi – fazendo estimativas com poucas informações", apoiado pela Pró-reitoria de Pesquisa, Inovação e Pós-graduação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul, por meio do Edital PROPESP Nº 05/2018, sob registro PE0506180818/059.

selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representadas de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

Conforme Schoenfeld (1985), a resolução de problemas possibilita aos estudantes mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão em seu alcance. Assim, os estudantes terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos, bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Dante (2000) assinala o trabalho com resolução de problemas como a principal forma de se alcançar os objetivos em sala de aula, entre eles, o de fazer o estudante pensar produtivamente. Acrescenta que, por meio da resolução de problemas, é possível desenvolver, no estudante, a iniciativa, o espírito explorador, a criatividade, a independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu cotidiano. O autor destaca ainda:

> Mais do que nunca precisamos de pessoas ativas e participantes, que deverão tomar decisões rápidas e, tanto quanto possível, precisas. Assim, é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas de comércio, economia, administração, engenharia, medicina, previsão do tempo e outros da vida diária (Dante, 2000, p. 15).

Dante (2000) também sugere que devemos propor aos estudantes várias estratégias de resolução de problemas, mostrando-lhes que não existe uma única estratégia, ideal e infalível. Cada problema exige uma determinada estratégia. A resolução de problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos estudantes diante de um problema novo. Dessa forma, em sala de aula o professor pode trabalhar com as tentativas e os erros dos estudantes, observando o caminho usado para chegar à solução do problema. Essa observação servirá para compreender o raciocínio dos estudantes e preparar as discussões em torno da resolução desses problemas, com o intuito de conceber processos de resolução diferentes dos já aprendidos.

Segundo Polya (1978), o professor que deseja desenvolver nos estudantes o espírito solucionador e a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes oportunidades de imitar e praticar. Para resolver e encaminhar a solução de um problema, segundo Polya (1978), quatro etapas principais podem ser empregadas: compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução de uma estratégia escolhida e revisão da solução.

Quando o professor adota a metodologia da resolução de problemas, seu papel será de incentivador, facilitador, mediador das ideias apresentadas pelos estudantes, de modo que estas sejam produtivas, levando os estudantes a pensarem e a gerarem seus próprios conhecimentos. Deve criar um ambiente de cooperação, busca, exploração e descoberta, deixando claro que o mais importante é o processo e não o tempo gasto para resolvê-lo ou a resposta final. O professor deve propor situações-problema que possibilitem a produção do conhecimento, onde o estudante deve participar ativamente compartilhando resultados, analisando reflexões e respostas, enfim aprendendo a aprender.

Conforme Moreira (1999) a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) ou Teoria da Assimilação de Ausubel é uma teoria cognitivista e construtivista que propõe explicar o processo de aprendizagem que ocorre na mente humana, através da organização e integração do material de aprendizagem na estrutura cognitiva. A TAS considera necessárias duas condições para que a aprendizagem ocorra de forma significativa: a disposição do estudante para aprender e o material didático desenvolvido deve ser potencialmente significativo para o estudante, além de ser construído a partir dos seus conhecimentos prévios. "Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas, na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem às novas ideias e conceitos" (Moreira, 1999, p. 152).

Para Moreira & Masini (2001), o aprendizado abrange conceitos novos e também modificações na estrutura cognitiva representada pela interação entre conhecimentos assimilados e os conhecimentos pré-existentes dos estudantes. A esse conhecimento prévio, que sofre interação com o novo conhecimento aprendido, Ausubel dá o nome de "subsunçor". A aprendizagem ocorre quando uma nova ideia ou conceito ancora-se em conhecimentos preexistentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Ausubel considera o armazenamento de informações na mente humana como sendo hierarquicamente organizado, resultado de experiências sensoriais do indivíduo. Pensando-se em estimativas numéricas, por exemplo, se o estudante sabe qual o consumo mensal de água de sua família, este conceito serviria de subsunçor para fazer uma estimativa numérica de consumo de água de seu município, de seu estado ou país.

O processo de ancoragem é o aspecto fundamental da teoria de Ausubel. De acordo com Moreira & Masini (2001), novas ideias se relacionam com o que o estudante já sabe e com isso surgem novos significados. No entanto, para que isso ocorra, a relação dessas novas ideias com o conhecimento prévio do estudante deve se dar de modo "substantivo" e "não arbitrário", ou seja, um novo conhecimento não será alocado de modo arbitrário na estrutura cognitiva, ele estará interligado com o conhecimento âncora, como se fosse uma continuação e, além disso, que o estudante consiga resolver problemas com pequenas variações comparando-se com aqueles que lhe foi apresentado, ou ainda, o estudante que aprende um conteúdo de modo substantivo, será capaz de compreender casos cujas estruturas sejam diferentes da forma como foi assimilado, sendo capaz de aplicar o conhecimento para outras situações.

Ausubel considera também que, para que a aprendizagem seja significativa, o material a ser aprendido deve ser "potencialmente significativo". Ou seja, tenha significado para o estudante e que o estudante "manifeste disposição favorável" para aprender de maneira significativa. Para que isto ocorra, recomenda o uso de organizadores prévios que sirvam de âncora para a nova aprendizagem e levem ao desenvolvimento de conceitos subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente (Moreira & Masini, 2001). Os organizadores prévios são materiais apresentados aos estudantes antes do próprio conteúdo a ser aprendido, como por exemplo, um experimento, uma imagem, um texto introdutório ou questionamentos, buscando instigar o estudante a compreender o conteúdo. É uma estratégia que se pode utilizar para manipular a estrutura cognitiva criando um elo entre o conhecimento prévio e o conteúdo a ser aprendido, ou seja, busca mostrar ao estudante a relação entre o conteúdo e o seu conhecimento prévio. Ausubel recomenda o uso de problemas para se procurar evidências da aprendizagem significativa, porém alerta que resolver problemas envolve habilidades que muitas vezes estão além dos conteúdos trabalhados.

Dessa forma, a aprendizagem significativa se torna importante, pois o conhecimento é retido por mais tempo pelo estudante, a aprendizagem é facilitada e, além disso, o conceito que foi aprendido e esquecido pode ser relembrado com mais facilidade. Nesse contexto, o papel do professor seria identificar o que o estudante já sabe organizar no conteúdo a ser aprendido de modo que trabalhe primeiramente os conceitos mais inclusivos, com maior subsunção com o conhecimento prévio do estudante, e utilizar recursos adequados, como a metodologia de resolução de problemas, para que a aprendizagem seja significativa.

Problemas de Fermi

Em 1945, de acordo com Navarro (2013), Fermi conseguiu estimar de maneira muito precisa, a força da bomba atômica que foi detonada no Teste Trinity. A bomba, desenvolvida por Fermi e outros cientistas do Projeto Manhattan, foi estimada em 10 kt (quiloton), um valor bem próximo do real que hoje se tem conhecimento, que é 20 kt. Para tal estimativa, Fermi rasgou uma folha de papel em pedaços pequenos. Quando sentiu o primeiro tremor da onda de choque se espalhando pelo ar, ele lançou os fragmentos de papel acima de sua cabeça. Esses papeis se agitaram para baixo e para longe da nuvem em forma de cogumelo que estava se formando no horizonte, caindo cerca de dois metros atrás dele. Depois de breve cálculo mental, Fermi concluiu que a energia liberada pela bomba seria o equivalente a um milhão de toneladas de TNT.

Na década de 1950, Fermi estimou a quantidade de afinadores de piano que havia em Chicago (Navarro, 2013). A solução para este problema envolveu a tomada de alguns pressupostos, e a multiplicação dos fatores. Primeiro, considerou-se algumas hipóteses:

a) Existem aproximadamente nove milhões de pessoas morando em Chicago.

b) Existem, em média, duas pessoas morando em cada casa em Chicago.

c) Uma casa em vinte possui um piano que é afinado regularmente.

d) Pianos que são afinados regularmente, em média, são afinados uma vez ao ano.

e) Um afinador de piano leva, em média, duas horas para afinar um piano, contando a viagem.

f) Cada afinador de piano trabalha oito horas por dia, cinco dias na semana e cinquenta semanas ao ano.

Logo, para calcular o número de afinadores, primeiro, descobriu-se quantas afinações de piano são feitas por ano:

$$\frac{9000000\,\text{de pessoas}}{2\,\text{pessoas/casa}} \cdot \frac{1}{20}\,\text{casas que possuem piano} \cdot 1\,\text{afinação do piano/ano} = 225000\,\text{afinações/ano.}$$

Em seguida, calcularam-se quantas afinações de piano cada afinador de piano faz em um ano:

$$\frac{50\,\text{semanas/ano} \cdot 5\,\text{dias/semana} \cdot 8\,\text{horas/dia}}{2\,\text{horas/afinação}} = 1000\,\text{afinações de piano/afinador de piano.}$$

Dividindo-se, o primeiro resultado pelo segundo, chegou-se ao número de afinadores de piano na cidade de Chicago:

$$\frac{225000 \text{ pianos afinados/ano}}{1000 \text{ afinações de piano/afinador de piano}} = 225 \text{ afinadores de piano em Chicago.}$$

Na época, o número verdadeiro de afinadores de piano era cerca 290 afinadores. Isso mostra que o número estimado era compatível com o real. Portanto, Fermi considerou alguns dados sobre a população de Chicago e estimou a quantidade de afinadores de piano, valendo-se das operações de multiplicação e divisão.

Inspirados nos problemas de Fermi, estudantes da Educação Básica podem ser desafiados com as seguintes perguntas:

- Vocês seriam capazes de dizer com que velocidade cresce nosso fio de cabelo? E nossas unhas? Que estratégias vocês utilizariam para fazer tal constatação?

- Quais as consequências físicas, geográficas e sociais se os anos bissextos nunca existissem?

Nesse sentido, essa investigação segue com a utilização da metodologia de resolução de problemas no estudo, criação e resolução de problemas de Fermi, bem como, no desenvolvimento de uma sequência didática com problemas de estimativas para estudantes do Ensino Médio.

Considerações finais

Esta comunicação se propôs a refletir sobre a resolução de problemas que envolvam algum processo de estimativa para chegar à resposta, também chamados de problemas de Fermi. Apresentaram-se dois problemas clássicos de Fermi, um sobre a bomba atômica e o outro relacionado ao número de afinadores de piano em Chicago. Obviamente que ninguém espera que diante de um problema de Fermi o estudante responda com um número exato. Mas também, estimar não é chutar. Tão ou mais importante do que determinar a resposta, é avaliar o processo ou estratégia utilizada de estabelecer uma estimativa para a resposta. Tão melhor será sua estimativa, quanto mais ricas forem suas considerações de variáveis e dados utilizados para o problema em questão.

Fundamentando-se no estudo da metodologia de resolução de problemas e da teoria da aprendizagem significativa, aponta-se que a utilização dos problemas de Fermi, que permeiam as ciências, com um enfoque no raciocínio lógico-matemático, permite a interdisciplinaridade em sala de aula e uma aprendizagem mais significativa.

A resolução de problemas por estimativas possibilita aos estudantes desenvolverem diferentes estratégias para resolver problemas com êxito e que os mesmos reflitam sobre sua resolução, não se preocupando apenas em chegar a uma solução. Outro aspecto positivo da utilização de problemas de Fermi é a possibilidade de uma abordagem experimental para a maioria dos problemas e o envolvimento de conteúdos de diferentes áreas do conhecimento, contribuindo para a superação do paradigma de ensino fragmentado. Além disso, a resolução de problemas por estimativas pode ser feita em grupos de trabalho, pois à medida que tecem hipóteses para resolvê-los, os estudantes interagem para chegar a um consenso de como resolver o problema. Dessa forma, pelo caráter desafiador e interdisciplinar dos problemas de Fermi, desperta-se o interesse dos estudantes para resolução de problemas e se possibilita uma aprendizagem mais significativa.

Referências

Batista, E. & Mozolevski, I. (2010). *Métodos de Física-Matemática.* Santa Catarina: Universidade Federal de Santa Catarina – Consórcio ReDiSul. Recuperado de: <http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/Metodos_de_Fisica-Matematica_-_28-jul 2010.pdf>.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Dante, L. R. (2000). *Didática da resolução de problemas de Matemática.* São Paulo: Ática.

Fontanive, N. S.; Klein, R. & Rodrigues, S. S. (2012). Boas práticas docentes no ensino da Matemática. *Estudos & Pesquisas Educacionais,* 3, 195-277.

Livi, R. P. (1990). Como estimar dimensões e grandezas físicas: pequenos e grandes números. *Caderno Catarinense de Ensino de Física.* Recuperado de: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/9798/9034>.

Moreira, M. A. (1999). *Teorias de aprendizagem.* São Paulo: EPU.

Moreira, M. A. & Masini, E. F. S. (2001). *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel.* São Paulo: Centauro.

Navarro, J. M. G. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Épsilon - Revista de Educación Matemática,* 30(2), 57-68.

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Nova York: Academic Press.

Smoothey, M. (1998). *Atividades e jogos com estimativas.* Tradução: Quadros, S. Revisão técnica: D'Ambrósio, U. São Paulo: Scipione.

Sriraman, B. & Knott, L. (2009). The Mathematics of Estimation: Possibilities for Interdisciplinary Pedagogy and Social Consciousness. *Interchange: A Quarterly Review of Education,* 40(2), 205-223. Recuperado de: <http://www.math.umt.edu/sriraman/Interchange_Sriraman_2009_2.pdf>.

Torres, C. M. A. (2013). *Física: ciência e tecnologia.* (3era ed.) São Paulo: Moderna.